PRUEBA DE SELBERG DEL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Por Antonio Jesús Varo Borrego

Dirigido por:
D. Guillermo Curbera Costello

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Índice general

Resumen

Este trabajo tiene como propósito mostrar la prueba elemental al Teorema de los Números Primos dada por Atle Selberg. En primer lugar, veremos la teoría de las funciones aritméticas y cálculo de sumas parciales de que serán la base de la prueba. Posteriormente, deduciremos las estimaciones de Chebyshev que fueron las primeras aproximaciones al orden de $\pi(x)$. Seguiremos viendo unas expresiones equivalentes que antes de encontrar la prueba elemental se demostró que el cumplimiento de estos implica el Teorema de los Números Primos y que fueron objeto de estudio para conseguir llegar a una prueba. Después demostraremos las fórmulas asintóticas que usó Atle Selberg para la demostración elemental del Teorema de los Números Primos y finalmente presentaremos la prueba elemental.

Abstract

This project is intended to show the elementary proof of Prime Number Theorem given by Atle Selberg. First of all, we shall see arithmetic function theory and partial sums calculation which will be the basis of the proof. Next, we shall deduce Chebyshev's estimations that were the first approach to $\pi(x)$'s order. We will continue with some expressions equivalent to the Prime Number Theorem, that is the validity of anyone of them implies the Prime Number Theorem, which were studied to get a proof. Then, we will prove the asymptotic formulas used by Atle Selberg for his Prime Number Theorem elementary proof. Finally, we will show Selberg's elementary proof.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo tiene como propósito proporcionar una prueba elemental del Teorema de los Números Primos, en adelante T.N.P. Esta cuestión de la distribución los números primos en el conjunto de los números naturales, ha sido siempre un tema de gran interés.

En la teoría de números primos, el primer resultado que nos encontramos es la prueba del Teorema de Euclides de la infinitud de números primos. No hay constancia de más resultados hasta el siglo XVII debido a que la aparente aleatoriedad en la posición de los primos frustraba todos los intentos de encontrar fórmulas precisas.

Llegamos al siglo XVIII cuando Adrien-Marie Legendre y Carl Friedrich Gauss formularon la pregunta en un sentido estadístico de cuantos primos encontramos en los N primeros enteros positivos. Examinando las tablas de números primos conocidos, les llevo a conjeturar que la respuesta sería, en cierto modo, $N/\log N$.

Si tomamos $\pi(x)$ como el número de primos en el intervalo $[1, x]$, la afirmación de Gauss y Legendre puede ser expresado como el llamado Teorema de los Números Primos.

El **Teorema Números Primos** establece que

$$\pi(x) \sim x/\log x \quad (x \to \infty),$$

es decir, $\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}$ converge a 1 cuando hacemos crecer x.

Este teorema fue probado por primera vez en 1896, un siglo después de la observación de Gauss y Legendre. Antes de llegar a la prueba hubo numerosas contribuciones a la teoría de números primos.

La primera persona que estableció unas estimaciones del verdadero orden de $\pi(x)$ fue Pafnuti Lvóvich Chebyshev que a mitad del siglo XIX probó, como veremos más adelante, que

$$0{,}92 < \pi(x)/(x/\log x) < 1{,}11,$$

para todo x lo suficientemente grande.

Posteriormente, Bernhard Riemann propuso abordar el problema indirectamente mediante el estudio de las propiedades de la llamada función zeta de Riemann, que es una función analítica en el plano complejo que se define para $\operatorname{Re} s > 1$ con la fórmula

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \cdots \quad .$$

La relación de la función zeta con los números primos viene dada por una segunda representación de $\zeta(s)$, válida en la misma región,

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad \text{donde } p \text{ toma como valores los primos.}$$

Esta función fue utilizada, pero solo en el dominio real, por Leonhard Euler para demostrar que la suma de los inversos de los primos diverge, por lo que estos son infinitos. La aproximación al problema de los números primos propuesta por Riemann, usando una función de variable compleja, se le llama analítica. Por otro lado, el tratamiento con variable real del problema, como el método de Chebyshev, se le llama elemental. Este tratamiento del problema es el que vamos a seguir para encontrar la prueba.

Otra contribución elemental a la teoría de números primos fue dada por Franz Mertens que estableció algunas relaciones como

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} - \log x = O(1)$$

y

$$\prod_{p\leq x} (1 - 1/p) \sim e^{-\gamma}/\log x$$

donde γ es la constante de Euler.

Posteriormente, ha habido mejoras en las estimaciones de Chebyshev, la mejor estimación conocida es de James Joseph Sylvester que demostró

$$0{,}956 < \pi(x)/(x/\log x) < 1{,}045 \quad \text{para } x \text{ suficientemente grande.}$$

El enfoque de Sylvester es muy específico y computacionalmente complejo, por lo que no ofrece esperanzas de llevar a una prueba de T.N.P., como él mismo concluye en su artículo

> “ ... we shall probably have to wait [for a proof of the P.N.T.] until someone is born into the world as far surpassing Chebyshev in insight and penetration as Chebyshev has proved himself superior in these qualities to the ordinary run of mankind.”

Una década después de que Sylvester dijera estas palabras, Jacques Hadamard se embarcó en el estudio de los números primos mediante métodos analíticos como esbozó Riemann. Este estudio acabó con una prueba analítica del T.N.P. por el propio Hadamard y por Charles-Jean de la Vallée Poussin, independientemente, a finales del siglo XIX. Los siguientes 50 años fueron la Edad de Oro de los métodos analíticos. Durante estos años se consiguieron resultados sobre la oscilación de $\pi(x)$ por John Edensor Littlewood y mejoras en los términos de error del T.N.P. por de la Vallée Poussin.

La teoría Tauberiana de Norbert Wiener mostraba una equivalencia entre el T.N.P. y el hecho que la función zeta de Riemann no sea 0 en la línea Re $s = 1$ en el plano complejo. El papel de los métodos analíticos fue fuertemente defendido por matemáticos influyentes de la época como Godfrey Harold Hardy, que llegó a afirmar

> “No elementary proof of the prime number theorem is known, and one may ask whether it is reasonable to expect one. Now we know that the theorem is roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the theorem that Riemann’s zeta function has no roots on a certain line. A proof of such a theorem, not fundamentally dependent on the theory of functions, seems to me extraordinarily unlikely. It is rash to assert that a mathematical theorem cannot be proved in a particular way; but one thing seems quite clear. We have certain views about the logic of the theory; we think that some theorems, as we say ‘lie deep’ and others nearer to the surface. If anyone produces an elementary proof of the prime number theorem, he will show that these views are wrong, that the subject does not hang together in the way we have supposed, and that it is time for the books to be cast aside and for the theory to be rewritten.”

Los métodos elementales no tuvieron mucho éxito durante este periodo, lo que reforzó la idea de que estos métodos no darían buenos resultados.

Sin embargo, los métodos elementales seguían teniendo cierto atractivo para algunos. El principal atractivo era que, al contrario que los métodos analíticos, estos no requerían una introducción de ideas ajenas a las cuestiones aritméticas. Otra razón de peso fue que Viggo Brun demostró con éxito mediante métodos elementales, mientras que los métodos analíticos fallaban, que los números primos gemelos (p y $p+2$ ambos primos) son tan escasos que la suma de los inversos converge. Además de otros resultados en la teoría de números demostrados mediante métodos elementales.

En 1948, Atle Selberg descubrió la fórmula

$$\sum_{p \leq x} \log^2 x + \sum_{pq \leq x} \log p \, \log q = 2x \log x + O(x),$$

donde p y q son primos. Esta fórmula es una versión ponderada de una relación de Chebyshev que veremos más adelante. Esta fórmula nos muestra inmediatamente que en intervalos pequeños de naturales no hay muchos números primos. Por otro lado, la fórmula contiene tanto números primos como números que se pueden expresar como producto de dos números primos, por lo que no es obvio como separar estas dos cantidades.

Durante el siglo siguiente al trabajo de Chebyshev hubo numerosos intentos fallidos de encontrar una prueba elemental de T.N.P. Por lo que hacía falta mucha confianza para afrontar un nuevo intento de una prueba elemental. Para llegar a la prueba necesitaríamos una forma no lineal del teorema Tauberiano que nos permita separar los números primos de los números expresables en producto de dos números primos en la fórmula de Selberg.

Paul Erdös observó que la fórmula de Selberg producía un límite inferior de la cantidad de números primos en ciertos intervalos. Con esta observación Selberg encontró un argumento Tauberiano elemental que nos da el T.N.P. Posteriormente Selberg y Erdös descubrieron otros métodos más directos. Esto ocasionó una disputa entre ellos.

Esta prueba elemental del T.N.P. causó gran sorpresa. Esto ayudo a Selberg a obtener la Medalla Fields y a Erdös un Premio Cole.

Capítulo 2

Nociones previas

Para abordar la prueba elemental del T.N.P. sería útil repasar una serie de conceptos básicos. Empezaremos con la definición de función aritmética, algunas propiedades y funciones aritméticas concretas y la operación conocida como "convolución de Dirichlet". Después veremos algunas técnicas para realizar sumas parciales que nos permitirá hacer estimaciones en los siguientes capítulos.

2.1. Funciones aritméticas

Definición 2.1 *Llamamos función aritmética a una función* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, *y se dice que es multiplicativa si*

$$f(nm) = f(n)f(m) \text{ para } (n, m) = 1.$$

Algunas funciones aritméticas que serán de utilidad son

Definición 2.2 $1(n) := 1$, *para* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.3 *Para* $n \in \mathbb{N}$

$$1_p(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo,} \\ 0 & \text{si } n \text{ no es primo.} \end{cases}$$

Definición 2.4 $L(n) := \log n$, *para* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.5 *Dado un* $r \in \mathbb{N}$, *para* $n \in \mathbb{N}$

$$e_r(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = r, \\ 0 & \text{si } n \neq r. \end{cases}$$

Definición 2.6 (Función de Möbius) *Para* $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 1, \\ (-1)^k & \textit{si } n \textit{ es producto de } k \textit{ primos distintos,} \\ 0 & \textit{si } p^2 | n \textit{ para algun primo } p. \end{cases}$$

La función de Möbius es multiplicativa. Tomamos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}$, tenemos

$$\mu(mn) = \mu(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}) = \begin{cases} 0 \quad \text{si algún } \alpha_i \text{ o } \beta_i \geq 2 \\ (-1)^{k+s} \quad \text{si todos los } \alpha_i \text{ y } \beta_i = 1 \end{cases}$$

y esto es igual a $\mu(n)\mu(m)$.

Definición 2.7 (Función de von Mangoldt) *Para* $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \textit{si } n = p^{\alpha}, p \textit{ primo y } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 0 & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

A cada función aritmética f se le asocia una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como:

Definición 2.8 *Para* $x \geq 1$ *definimos:*

$$F(x) := \sum_{n \leq x} f(n).$$

Algunas funciones que se pueden definir mediante sumatorios son:

$$[x] := \sum_{n \leq x} 1,$$

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n),$$

$$\pi(x) := \sum_{n \leq x} 1_p(n),$$

para $x \geq 1$

Definición 2.9 *Para* $x \geq 1$ *se define*

$$\Theta(x) := \sum_{n \leq x} \log n \; 1_p(n) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

siendo p *primo.*

Esta función es una variación de $\pi(x)$ al que cada primo p se le asocia el peso $\log p$.

Definición 2.10 *Para $x \geq 1$ definimos*

$$\Psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Para muchas relaciones en la teoría de números primos es útil la operación llamada "convolución de Dirichlet"

Definición 2.11 (convolución de Dirichlet) *Sean $f(n)$ y $g(n)$ funciones aritméticas y $n \in \mathbb{N}$, definimos la convolución como:*

$$f * g(n) = \sum_{ij=n} f(i)g(j) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Observación 2.12. Sean $f(n)$, $g(n)$ y $k(n)$ funciones aritméticas y $n \in \mathbb{N}$, vemos que por la definición de convolución ésta es conmutativa

$$f * g(n) = \sum_{ij=n} f(i)g(j) = \sum_{ji=n} g(j)f(i) = g * f(n),$$

y asociativa

$$(f * g) * k(n) = \sum_{kl=n} k(l) \left(\sum_{ij=k} f(i)g(j) \right) = \sum_{ijl=n} f(i)g(j)k(l)$$
$$f * (g * k)(n) = \sum_{ki=n} f(i) \left(\sum_{jl=k} g(j)k(l) \right) = \sum_{ijl=n} f(i)g(j)k(l).$$

Observación 2.13. Si f y g funciones aritméticas multiplicativas, entonces $h(mn) = f * g(mn)$ es multiplicativa.

Demostración. Sean m y n coprimos, entonces $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}$ donde $p_i \neq q_j$ para todo $i = 1 \ldots k$ y todo $j = 1 \ldots l$.

Cada divisor d de mn se puede expresar en la forma $d = ab$ donde $a = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k} | m$ con $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$ para todo $i = 1 \ldots k$ y $b = q_1^{\sigma_1} q_2^{\sigma_2} \cdots q_l^{\sigma_l} | n$ con $0 \leq \sigma_j \leq \beta_j$ para todo $j = 1 \ldots l$. Entonces tenemos que a y b son coprimos y que m/a y n/b también lo son. Por lo que

$$
\begin{aligned}
h(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g\left(\frac{mn}{d}\right) = \sum_{ab|mn} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) \\
&= \sum_{a|m}\sum_{b|n} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right), \\
&= \sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right)\sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) \\
&= h(m)h(n).
\end{aligned}
$$

□

Observación 2.14. Algunas relaciones con la convolución que van a ser útiles posteriormente son:

1. $f * e_1(n) = f(n)$
2. $1 * \mu(n) = e_1(n)$
3. $\Lambda * 1(n) = L(n)$

Demostración. La primera se obtiene directamente de la definición de convolución, puesto que $e_1(n/i)$ solo es 1 para $(n/i) = 1$ de donde se sigue que $i = n$, tenemos entonces

$$f * e_1(n) = \sum_{i|n} f(i)e(n/i) = f(n).$$

La segunda identidad se llama **fórmula de inversión de Möbius**. Es obvio que $1(n)$ es multiplicativa, por lo que, con la Observación 2.13, $h := 1 * \mu(n)$ es multiplicativa. Entonces sea $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} > 1$ tenemos $h(n) = h(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}) = h(p_1^{\alpha_1})h(p_2^{\alpha_2})\cdots h(p_k^{\alpha_k})$. Lo probamos para cada primo que divide a n

$$h(p^\alpha) = \sum_{i=0}^{\alpha} \mu(p^i) = 1 - 1 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

por lo que para $h(n) = 0$ con $n > 1$. Para $n = 1$ tenemos $\mu(1) = 1$ Entonces $h(n) = e_1(n)$.

Para la tercera tenemos $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$

$$L(n) = L(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{i=1}^{k} L(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(p_i).$$

Los únicos términos no nulos de la suma son los divisores de la forma p^k por lo que

$$\Lambda * 1(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{\alpha_i} \Lambda(p_i^m) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{\alpha_i} L(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(p_i) = L(n).$$

□

Puesto que $h(n) = f * g(n)$ es una función aritmética, podemos definir su función sumatorio y este está relacionada con la función sumatorio de f y g

Teorema 2.15 *Sean f y g funciones aritméticas y sea $h = f*g$ su convolución. Definimos, para $x \geq 1$, las funciones*

$$F(x) := \sum_{n\leq x} f(n), \quad G(x) := \sum_{n\leq x} g(n), \quad H(x) := \sum_{n\leq x} h(n).$$

Entonces se cumple

$$H(x) = \sum_{n\leq x} F(x/n)g(n) = \sum_{n\leq x} f(n)G(x/n).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H(x) := \sum_{k\leq x} h(k) = \sum_{k\leq x} f * g(k) = \sum_{k\leq x} \sum_{mn=k} f(m)g(n) = \sum_{nm\leq x} f(m)g(n) \\ = \sum_{n\leq x} g(n) \sum_{m\leq x/n} f(m) = \sum_{n\leq x} F(x/n)g(n). \end{aligned}$$

Análogamente, gracias a la conmutatividad de la convolución tenemos

$$H(x) := \sum_{k\leq x} h(k) = \sum_{k\leq x} f * g(k) = \sum_{n\leq x} f(n)G(x/n).$$

□

Una propiedad de la convolución de Dirichlet que usaremos más adelante para la deducción de la fórmula de Selberg es la siguiente

Teorema 2.16 *Sean $f(n)$ y $g(n)$ funciones aritméticas se tiene*

$$L(f * g)(n) = (Lf) * g(n) + f * (Lg)(n).$$

Demostración. Sabemos que $L(n) = L(d) + L(n/d)$. Entonces

$$\begin{aligned}
L(f * g)(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) L(n) \\
&= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) L(d) + \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) L\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} \left(f(d) L(d)\right) g\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} f(d) \left(g\left(\frac{n}{d}\right) L\left(\frac{n}{d}\right)\right) \\
&= (Lf) * g(n) + f * (Lg)(n).
\end{aligned}$$

□

2.2. Sumas parciales

Vamos a ver ahora métodos para calcular sumas parciales como son la fórmula de Abel, la comparación de suma e integral y el método de la hipérbola.

Teorema 2.17 (Fórmula de Abel) *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Definimos*

$$A(x) := \sum_{n \le x} a_n, \qquad x \ge 1.$$

Sea $f(t)$ una función con derivada continua en $[1, x]$. Entonces:

$$\sum_{n \le x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt.$$

Observación 2.18. Un ejemplo de una suma con la fórmula de Abel es la siguiente

$$\sum_{n \le x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$$

Para probarlo, tomamos $a_n = 1(n)$, $A(x) = [x]$ y $f(x) = \log x$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} \log n = \sum_{n \le x} 1(n) \log n = [x] \log x - \int_1^x \frac{[t]}{t} dt \\
&= (x + O(1)) \log x - \int_1^x \frac{t + O(1)}{t} dt \\
&= x \log x + O(\log x) - x - \int_1^x \frac{O(1)}{t} dt \\
&= x \log x - x + O(\log x).
\end{aligned}$$

Teorema 2.19 (Comparación de una suma y una integral) *Sea $f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función no negativa y decreciente. Existe una constante $\gamma(f)$ tal que para todo x>1 se cumple*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \int_1^x f(t)dt + \gamma(f) + O(f(x)).$$

Demostración. Definimos

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \right) \geq 0,\end{aligned}$$

por ser f decreciente.

Tenemos también que $\gamma_n \leq \gamma_{n+1}$, pues

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+2} f(t)dt \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) + f(n+1) \right) - \left(\int_1^{n+1} f(t)dt + \int_{n+1}^{n+2} f(t)dt \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(t)dt \right) + \left(f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)dt \right) \\ &= \gamma_n + \left(f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)dt \right) \geq \gamma_n.\end{aligned}$$

Vemos que γ_n está acotada

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(k+1)dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1) \leq f(1),\end{aligned}$$

entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma(f)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(n) = \sum_{n \leq x} f(n) \pm \int_1^{n+1} f(t)dt &= \gamma_n + \int_1^{n+1} f(t)dt \\ &= \gamma_n \pm \gamma(f) + \int_1^{x} f(t)dt + \int_x^{n+1} f(t)dt.\end{aligned}$$

Para terminar, vemos que

$$\int_x^{n+1} f(t)dt \leq \int_x^{n+1} f(x)dt = f(x)(n+1-x) \leq f(x).$$

Y también se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_m - \gamma_n &= \sum_{k=1}^{m}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{m}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt\right) \leq \sum_{k=n+1}^{m} f(k) - f(k+1)\\ &= f(n+1) - f(m+1) \leq f(n+1) \leq f(x).\end{aligned}$$

Tomando límite $m \to \infty$ llegamos a $\gamma(f) - \gamma_n = O(f(x))$.

Resumiendo, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \gamma_n \pm \gamma(f) + \int_1^x f(t)dt + \int_x^{n+1} f(t)dt\\ &= \gamma(f) - (\gamma(f) - \gamma_n) + \int_1^x f(t)dt + \int_x^{n+1} f(t)dt\\ &= \gamma(f) + O(f(x)) + \int_1^x f(t)dt + O(f(x)).\end{aligned}$$

□

El T.N.P. nos dice que $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$ esta función $\mathrm{li}(x)$ se define

Definición 2.20 *Dado $x \geq 2$. Se define el logaritmo integral como:*

$$li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

que mediante integración por partes podemos llegar a esta otra expresión

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}.$$

Observación 2.21. Algunas sumas que se pueden hacer con la comparación de suma e integral son:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t}dt + \gamma_1 + O(1/x) = \log x + \gamma_1 + O(1/x) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\log n}{n} &= \int_1^x \frac{\log t}{t}dt + \gamma_2 + O(\log x/x)\\ &= \frac{\log^2 x}{2} + \gamma_2 + O(\log x/x)\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\log n} &= \int_2^x \frac{1}{\log t}dt + \gamma(1/\log x) + O(1/\log x)\\ &= \mathrm{li}(x) + O(1)\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{n\log n} &= \int_2^x \frac{1}{t\log t}dt + \gamma(1/(x\log x)) + O(1/(x\log x))\\ &= \ln(\ln(x)) + O(1)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{n}} &= \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt + \gamma(1/\sqrt{x}) + O(1/\sqrt{x})\\ &= 2\sqrt{x} + O(1)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Teorema 2.22 (Método de la hipérbola de Diritchlet) *Sean f y g funciones aritméticas. Para $1 < y < x$ se tiene:*

$$\sum_{k\leq x} f*g(k) = \sum_{n\leq y} F(x/n)g(n) + \sum_{m\leq x/y} G(x/m)f(m) - F(x/y)G(y).$$

Demostración. Partiendo de la parte izquierda de la igualdad,

$$\begin{aligned}\sum_{mn\leq x} f(m)g(n) &= \sum_{mn\leq x, n\leq y} f(m)g(n) + \sum_{mn\leq x, n>y} f(m)g(n)\\ &= \sum_{mn\leq x, n\leq y} f(m)g(n) + \left(\sum_{mn\leq x} f(m)g(n) - \sum_{mn\leq x, n\leq y} f(m)g(n)\right)\\ &= \sum_{n\leq y} F(x/n)g(n) + \sum_{m\leq x/y} f(m)G(x/m) - \sum_{m\leq x/y} f(m)G(y)\\ &= \sum_{n\leq y} F(x/n)g(n) + \sum_{m\leq x/y} G(x/m)f(m) - F(x/y)G(y).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.23 (Estimación Dirichlet)

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Para demostrarlo utilizaremos el método de la hipérbola y (2.1)

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} d(n) = \sum_{n\leq x} 1 * 1(n) = \sum_{n\leq\sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] 1(n) + \sum_{n\leq\sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] 1(n) - \left[\frac{x}{\sqrt{x}}\right] [\sqrt{x}] \\ =& 2 \sum_{n\leq\sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} + O(1)\right) - (\sqrt{x} + O(1))(\sqrt{x} + O(1)) \\ =& 2x \sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{1}{n} + \sum_{n\leq\sqrt{x}} O(1) - x + O(\sqrt{x}) \\ =& 2x \log\sqrt{x} + 2x\gamma + 2x\, O(1/x) + O(\sqrt{x}) - x + O(\sqrt{x}) \\ =& x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Capítulo 3

Estimaciones de Chebyshev

En este capítulo vamos a tratar algunos resultados previos que nos van a permitir trabajar con las funciones de Chebyshev $\Psi(x)$ y $\Theta(x)$ en lugar de $\pi(x)$ y obtener unas primeras cotas para $\pi(x)$. Veremos que una estimación de $\Psi(x) - x$ produce una estimación de $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$.

Veamos que $\Psi(x) \sim \Theta(x)$ entonces las cotas de $\Psi(x)$ son válidas para $\Theta(x)$ y viceversa.

Proposición 3.1 *Para* $x \geq 1$

$$\Psi(x) - \Theta(x) = O(x^{1/2} \log^2 x).$$

Demostración. Partimos de

$$\Psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \log p = \Theta(x) + \Theta(x^{1/2}) + \cdots + \Theta(x^{1/k}) \text{ con } k = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$$

porque para $\alpha > \frac{\log x}{\log 2}$ se cumple $x^{1/\alpha} < 2$ luego $\Theta(x^{1/\alpha}) = 0$. Usando que

$$0 \leq \Theta(x^{1/n}) \leq x^{1/n} \log x$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \Theta(x) + \sum_{n=2}^{k} O(x^{1/n} \log x) \leq \Theta(x) + \sum_{n=2}^{k} O(x^{1/2} \log x) \\
&= \Theta(x) + \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] O(x^{1/2} \log x) = \Theta(x) + O(x^{1/2} \log^2 x).
\end{aligned}$$

□

Tenemos que $\Theta(x)$ es una forma ponderada de $\pi(x)$, invirtamos la relación con:

$$\Theta(n) - \Theta(n-1) = \sum_{p\le n} \log p - \sum_{p \le n-1} \log p = \begin{cases} \log n & \text{si } n \text{ es primo,} \\ 0 & \text{si } n \text{ no es primo.} \end{cases}$$

De esta expresión vemos que $\dfrac{\Theta(n) - \Theta(n-1)}{\log n} = 1_p(n)$ por lo que

$$\pi(x) = \sum_{n \le x} 1_p(n) = \sum_{n\le x} \frac{\Theta(n) - \Theta(n-1)}{\log n}.$$

Veamos ahora la diferencia de $\pi(x)$ con la suma de los inversos de los logaritmos

$$\begin{aligned} \pi(x) - \sum_{2\le n\le x} \frac{1}{\log n} &= \sum_{2\le n\le x} \frac{\Theta(n) - \Theta(n-1)}{\log n} - \sum_{2\le n\le x} \frac{n-(n-1)}{\log n} \\ &= \sum_{2\le n\le x} \frac{\Theta(n) - \Theta(n-1) - (n-(n-1))}{\log n} \\ &= \sum_{2\le n\le x} \frac{\Theta(n) - n - (\Theta(n-1) - (n-1))}{\log n} \\ &= \sum_{2\le n\le x} \frac{\Theta(n) - n}{\log n} - \sum_{2\le n\le x} \frac{(\Theta(n-1) - (n-1))}{\log n} = (*) \end{aligned}$$

con la Proposición 3.1 podemos sustituir $\Theta(x)$ por $\Psi(x) + O(x^{1/2}\log^2 x)$ y nos queda

$$\begin{aligned} (*) = &\sum_{2\le n\le x} \frac{\Psi(n) - n + O(n^{1/2}\log^2 n)}{\log n} \\ &- \sum_{2\le n\le x} \frac{\Psi(n-1) - (n-1) + O((n-1)^{1/2}\log^2(n-1))}{\log n} \\ = &\sum_{2\le n\le x} \frac{\Psi(n) - n}{\log n} - \sum_{2\le n\le x} \frac{\Psi(n-1) - (n-1)}{\log n} \\ &+ \sum_{2\le n\le x} \frac{O(n^{1/2}\log^2 n)}{\log n} - \sum_{2\le n\le x} \frac{O((n-1)^{1/2}\log^2(n-1))}{\log n} \\ = &\sum_{2\le n\le x} \frac{\Psi(n) - n}{\log n} - \sum_{2\le n\le x} \frac{\Psi(n-1) - (n-1)}{\log n} \\ &+ \sum_{2\le n\le x} \frac{O(n^{1/2}\log^2 n)}{\log n} - \sum_{2\le n\le x} \frac{O(n^{1/2}\log^2 n)}{\log(n+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos por un lado las sumas de los términos en O y por otro lado las otras dos.

Para el cálculo de las otras dos desarrollamos los sumatorios y sumamos y restamos $\dfrac{\Psi([x])-[x]}{\log[x+1]}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{2\le n\le x}\frac{\Psi(n)-n}{\log n}-\sum_{2\le n\le x}\frac{\Psi(n-1)-(n-1)}{\log n}\\
&\qquad=\frac{1}{\log 2}+\frac{\Psi(2)-2}{\log 2}-\frac{\Psi(2)-2}{\log 3}+\cdots+\frac{\Psi([x])-[x]}{\log[x]}\pm\frac{\Psi([x])-[x]}{\log[x+1]}=(*)
\end{aligned}$$

agrupamos los términos con el mismo numerador y obtenemos

$$(*)=\frac{1}{\log 2}+\frac{\Psi([x])-[x]}{\log[x+1]}+\sum_{2\le n\le x}(\Psi(n)-n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right).$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{2\le n\le x}O(n^{1/2}\log^2 n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)&=\sum_{2\le n\le x}O(n^{1/2}\log^2 n)\left(\frac{\log(n+1)-\log n}{\log n\log(n+1)}\right)\\
&=\sum_{2\le n\le x}O(n^{1/2}\log n)\left(\frac{\log(\frac{n+1}{n})}{\log(n+1)}\right)\\
&=O\left(\sum_{2\le n\le x}\left(\frac{n^{1/2}\log n}{\log(n+1)}\right)\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&=O\left(\sum_{2\le n\le x}\left(\frac{n^{1/2}\log n}{\log(n+1)}\right)O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&=O\left(\sum_{2\le n\le x}\left(\frac{\log n}{n^{1/2}\log(n+1)}\right)\right)\\
&\le O\left(\sum_{2\le n\le x}\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right)=O(x^{1/2}).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
&\pi(x)-\sum_{2\le n\le x}\frac{1}{\log n}\\
&\qquad=\frac{1}{\log 2}+\frac{\Psi([x])-[x]}{\log[x+1]}+\sum_{2\le n\le x}(\Psi(n)-n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+O(x^{1/2}).
\end{aligned}$$

Con (2.3) podemos sustituir $\displaystyle\sum_{2\leq n\leq x}\frac{1}{\log n}$ por $\mathrm{li}(x)+O(1)$ obteniendo:

$$\begin{aligned}\pi(x)-\mathrm{li}(x)+O(1)=&\frac{1}{\log 2}+\frac{\Psi([x])-[x]}{\log[x+1]}\\&+\sum_{2\leq n\leq x}(\Psi(n)-n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+O(\sqrt{x}),\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned}\pi(x)-\mathrm{li}(x)=&\frac{\Psi([x])-[x]}{\log[x+1]}+\sum_{2\leq n\leq x}(\Psi(n)-n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right).\\&+O(x^{1/2}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Lema 3.2 *Si* $|\Psi(x)-x|\leq F(x)$ *con* $F(x)$ *una función positiva no decreciente, entonces:*

$$|\pi(x)-li(x)|\leq\frac{2F(x)}{\log x}+2F(\sqrt{x})+B\sqrt{x},\quad \textit{para } x>1$$

con B *una constante positiva.*

Demostración. De (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}|\pi(x)-\mathrm{li}(x)|\leq&\frac{|\Psi([x])-[x]|}{\log[x+1]}+\sum_{2\leq n\leq x}|\Psi(n)-n|\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+O(x^{1/2})\\\leq&\frac{F([x])}{\log[x+1]}+\sum_{2\leq n\leq x}F(n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+O(x^{1/2}).\end{aligned}$$

Separamos el sumatorio en 2, uno hasta $\sqrt{x}$ y otro a partir de ahí

$$
\begin{aligned}
&= \frac{F([x])}{\log[x+1]} + \sum_{2\le n\le \sqrt{x}} F(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \\
&\qquad + \sum_{\sqrt{x}<n\le x} F(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O(x^{1/2}) \\
&\le \frac{F([x])}{\log[x+1]} + F(\sqrt{x})\sum_{2\le n\le \sqrt{x}} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \\
&\qquad + F([x])\sum_{\sqrt{x}<n\le x} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O(x^{1/2}) \\
&= \frac{F([x])}{\log[x+1]} + F(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log(\sqrt{x}+1)}\right) \\
&\qquad + F([x])\left(\frac{1}{\log\sqrt{x}} - \frac{1}{\log[x+1]}\right) + O(x^{1/2}) \\
&= \frac{F(\sqrt{x})}{\log 2} - \frac{F(\sqrt{x})}{\log(\sqrt{x}+1)} + \frac{F([x])}{\log\sqrt{x}} + O(x^{1/2}) \\
&\le \frac{F([x])}{\log\sqrt{x}} + \frac{F(\sqrt{x})}{\log 2} + B\sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

□

Entonces podemos trabajar en ver que $\Psi(x)$ es similar a x y nos daría que $\pi(x)$ es similar a $\mathrm{li}(x)$. Comenzaremos acotando el valor de $\Psi(x)$.

Ahora vamos a describir la estrategia de Chebyshev para obtener cotas de $\Psi(x)$. Sabemos que $\Lambda * 1(n) = L(n)$ por lo que convolucionando ambos lados por μ obtenemos $\Lambda * 1 * \mu(n) = \Lambda * e_1 = \Lambda = L * \mu(n)$. Puesto que la función $\mu(n)$ es complicada, vamos a utilizar una función $\nu(n)$ más manejable que aproxime $\mu(n)$ en cierto modo. Nos queda:

$$\Lambda * 1 * \nu(n) = L * \nu(n).$$

Definimos $E(x)$ como

$$E(x) := \sum_{n\le x} 1 * \nu(n), \quad x \ge 1$$

que con Teorema 2.15 y que $\sum_{n\le x} 1(n) = [x]$ tenemos

$$E(x) = \sum_{n\le x} \left[\frac{x}{n}\right] \nu(n).$$

Esta función $\nu(n)$ que aspira a ser el inverso convolutivo de $1(n)$, es deseable que cumpla

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(n)}{n} = 0$$

y

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(n)}{n} \log n = O(1).$$

Entonces usando el Teorema 2.15 y la Observación 2.18 tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} L * \nu(n) &= \sum_{n\le x}\left(\nu(n)\sum_{m\le x/n}\log m\right)\\ &= \sum_{n\le x}\left\{\frac{x}{n}\log\frac{x}{n} - \frac{x}{n} + O\left(\log\frac{x}{n}\right)\right\}\nu(n)\\ &= (x\log x - x)\sum_{n\le x}\frac{\nu(n)}{n} - x\sum_{n\le x}\frac{\nu(n)\log n}{n} + O(\log x)\\ &= (x\log x - x)\,0 + x\,O(1) + O(\log x)\\ &= O(x).\end{aligned} \tag{3.2}$$

También es conveniente que $\nu(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ para obtener estimaciones sin excesiva dificultad, en la práctica $\nu(n) = 0$ a partir de cierto n y finalmente que $E(x) = \sum_{n\le x}\left[\frac{x}{n}\right]\nu(n)$ sea cercano a 1 para un intervalo grande $[1, a)$. Con esto nos aseguramos que

$$\sum_{n\le x} E(x/n)\Lambda(n) \approx \Psi(x).$$

Si escogemos $\nu(n) = \mu(n)$, entonces $E(x) = 1$ para todo $x \ge 1$ y tendríamos la igualdad, Chebyshev eligió

$$\nu(n) = e_1(n) - e_2(n) - e_3(n) - e_5(n) + e_{30}(n).$$

Veamos que:

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(n)}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 0,$$

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(n)\log(n)}{n} = \frac{\log 1}{1} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 30}{30} \simeq -0{,}921 = O(1)$$

y $\nu(n) = 0$ para todo $n > 30$. Vamos a comprobar los valores de $E(x)$

$$E(x) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{x}{n}\right] \nu(x) = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{30}\right].$$

Observamos que $E(x)$ tiene periodo 30, por lo que solo hay que comprobar para $0 \leq x < 30$:

$$\begin{aligned}
E(x+30) &= [30+x] - \left[15 + \frac{x}{2}\right] - \left[10 + \frac{x}{3}\right] - \left[6 + \frac{x}{5}\right] + \left[1 + \frac{x}{30}\right] \\
&= 30 - 15 - 10 - 6 + 1 + [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{30}\right] \\
&= E(x).
\end{aligned}$$

También observamos que:

$$\begin{aligned}
E(30-x) &= [30-x] - \left[15 - \frac{x}{2}\right] - \left[10 - \frac{x}{3}\right] - \left[6 - \frac{x}{5}\right] + \left[1 - \frac{x}{30}\right] \\
&= 30 - 15 - 10 - 6 + 1 + [-x] \\
&\qquad - \left[-\frac{x}{2}\right] - \left[-\frac{x}{3}\right] - \left[-\frac{x}{5}\right] + \left[-\frac{x}{30}\right] \\
&= E(-x),
\end{aligned}$$

por lo que junto a que $[x] + [-x] = -1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
E(x) + E(30-x) &= E(x) + E(-x) \\
&= [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{30}\right] \\
&\qquad + [-x] - \left[\frac{-x}{2}\right] - \left[\frac{-x}{3}\right] - \left[\frac{-x}{5}\right] + \left[\frac{-x}{30}\right] \\
&= ([x] + [-x]) - \left(\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{-x}{2}\right]\right) - \left(\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{-x}{3}\right]\right) \\
&\qquad - \left(\left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{-x}{5}\right]\right) + \left(\left[\frac{x}{30}\right] + \left[\frac{-x}{30}\right]\right) \\
&= (-1) - (-1) - (-1) - (-1) + (-1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como $E(30-x) = 1 - E(x)$ entonces solo tenemos que comprobar para $0 \leq x \leq 15$ y como $E(x)$ es suma de partes enteras, entonces para $x \in [n, n+1)$, $E(x) = E(n)$.

$$\begin{array}{llll}
E(0) = 0 & E(1) = 1 & E(2) = 1 & E(3) = 1 \\
E(4) = 1 & E(5) = 1 & E(6) = 0 & E(7) = 1 \\
E(8) = 1 & E(9) = 1 & E(10) = 0 & E(11) = 1 \\
E(12) = 0 & E(13) = 1 & E(14) = 1 & E(15) = 0
\end{array}$$

Con todo esto tenemos que $E(x) = 0$ ó 1 para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo que siempre es cercano a 1.

Tenemos entonces, con (3.2) que:

$$\sum_{n\leq x} L*\nu(n) = (x\log x - x)\sum_{n\leq x}\frac{\nu(n)}{n} - x\sum_{n\leq x}\frac{\nu(n)\log n}{n} + O(\log x) =$$
$$= -x\sum_{n\leq x}\frac{\nu(n)\log n}{n} + O(\log x) = Ax + O(\log x).$$

Donde

$$A = -\sum_{n\leq x}\frac{\nu(n)\log n}{n} = -\left(\frac{\log 1}{1} - \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 30}{30}\right)$$

y por tanto

$$A = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30} = 0{,}92129\ldots$$

Por otra parte

$$\sum_{n\leq x} L*\nu(n) = \sum_{n\leq x}\Lambda*1*\nu(n) = \sum_{n\leq x}E(x/n)\Lambda(n).$$

Veamos ahora acotaciones de $\sum_{n\leq x} L*\nu(n)$: Como sabemos que $E(x)\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$ tenemos

$$\sum_{n\leq x}E(x/n)\Lambda(n) \leq \sum_{n\leq x}\Lambda(n) = \Psi(x).$$

Como $E(x/n) = 1$ para $x/n \in [1,6)$ se sigue que $E(x/n) = 1$ con $n\in(x/6,x]$. Luego tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}E(x/n)\Lambda(n) &= \sum_{x/6\leq n\leq x}\Lambda(n) + \sum_{n\leq x/6}E(x/n)\Lambda(n)\\ &\geq \sum_{x/6\leq n\leq x}\Lambda(n) = \Psi(x) - \Psi(x/6).\end{aligned}$$

Entonces

$$Ax + O(\log x) = \sum_{n\leq x} L*\nu(n)\begin{cases}\leq \Psi(x)\\ \geq \Psi(x) - \Psi(x/6).\end{cases}$$

Veamos que sumando:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) - \Psi(x/6) &\leq Ax + O(\log x) \\
\Psi(x/6) - \Psi(x/36) &\leq \frac{Ax}{6} + O(\log x) \\
\Psi(x/36) - \Psi(x/6^3) &\leq \frac{Ax}{6^2} + O(\log x) \\
&\vdots \\
\Psi(x/6^{k-1}) - \Psi(x/6^k) &\leq \frac{Ax}{6^{k-1}} + O(\log x) \\
\hline
\Psi(x) - \Psi(x/6^k) &\leq Ax \sum_{0 \leq n \leq k-1} \frac{1}{6^n} + k \cdot O(\log x).
\end{aligned}$$

Realizamos la suma hasta que $x/6^k$ sea igual a 1, es decir, $x = 6^k$ lo que nos da que $k = \dfrac{\log x}{\log 6}$. Por lo que tenemos que la suma hasta este k es

$$\Psi(x) - \Psi(1) \leq Ax \sum_{0 \leq n \leq k-1} \frac{1}{6^n} + \frac{\log x}{\log 6} \cdot O(\log x) \leq Ax \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} + O(\log^2 x).$$

Como sabemos que la suma de la serie es $6/5$ y $\Psi(1) = 0$ tenemos

$$\Psi(x) \leq \frac{6Ax}{5} + O(\log^2 x).$$

En resumen:

$$A + O\left(\frac{\log x}{x}\right) \leq \frac{\Psi(x)}{x} \leq \frac{6A}{5} + O\left(\frac{\log^2 x}{x}\right) \tag{3.3}$$

donde $A \approx 0{,}92129$.

Capítulo 4

Teoremas equivalentes al Teorema de los Números Primos

Antes que se descubriera la prueba elemental del T.N.P., se obtuvieron muchas fórmulas equivalentes, es decir, que el T.N.P. se puede obtener mediante métodos elementales a partir de la veracidad de cualquiera de estas fórmulas y viceversa. Estas han perdido su valor por el descubrimiento de la prueba elemental del T.N.P., aunque siguen siendo una buena forma de agrupar una serie de afirmaciones sobre los primos.

Las siguientes fórmulas son equivalentes al Teorema de los Números Primos:

1. $\Psi(x) \sim x$

2. $\displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + c + o(1)$

3. $\displaystyle\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + c' + o(1)$

4. $\displaystyle M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$

5. $\displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$

6. $p_n \sim n \log n,$ donde p_n es el n-esimo primo

Veamos que el T.N.P. implica la relación (1). Para ello nos valdremos de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&\pi(n) - \pi(n-1) = 1_p(n),\\
&\Theta(x) = \sum_{n\le x} \log(n) 1_p(n) = \sum_{n\le x} \log(n)(\pi(n) - \pi(n-1)).
\end{aligned}$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) \sim \Theta(x) =& \sum_{n\le x} \log(n)(\pi(n) - \pi(n-1))\\
=&\pi(x)\log[x] - \pi(x-1)\log[x] + \pi(x-1)\log[x-1]\\
&- \pi(x-1)\log[x-2] + \cdots + \log(2)\pi(2)\\
=&\pi(x)\log[x] - \pi(x-1)(\log[x] - \log[x-1])\\
&- \pi(x-2)(\log[x-1] - \log[x-2]) + \cdots - \pi(2)(\log 3 - \log 2)\\
=&\pi(x)\log[x] - \sum_{n\le x-1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\pi(n)
\end{aligned}$$

y como suponemos cierto el T.N.P.

$$\sim \frac{x}{\log x}\log x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \sim x,$$

donde hemos usado la acotación siguiente, que obtendremos del T.N.P. y de que $\log(1+x) = x + O(x^2)$ para $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\pi(n) \sim& \sum_{n\le x} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{\log n}\\
=& \sum_{n\le x}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\frac{n}{\log n}\\
=& \sum_{n\le x}\left(\frac{1}{\log n} + O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)\\
=& \sum_{n\le x}\frac{1}{\log n} + O\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n\log n}\right) = (*)
\end{aligned}$$

utilizando (2.3) y (2.4), tenemos

$$(*) = \frac{x}{\log x} + O(\log(\log(x)) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Veamos ahora que si se cumple que la condición (1) entonces tenemos (4). Partimos de

$$0 = Le_1(n) = L(1 * \mu)(n) = L1 * \mu(n) + 1 * L\mu(n) = \Lambda(n) + 1 * L\mu(n)$$

y convolucionamos a ambos lados por $\mu(n)$

$$0 = \Lambda * \mu(n) + 1 * L\mu * \mu(n) = \Lambda * \mu(n) + L\mu * e_1(n)$$

de donde

$$\Lambda * \mu(n) = -L\mu(n).$$

Si añadimos la igualdad $1 * \mu(n) - e_1 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \mu(n)\log n &= -\sum_{n\le x} \Lambda * \mu(n) + \sum_{n\le x} 1 * \mu(n) - e_1(n) \\ &= \sum_{n\le x}(1-\Lambda) * \mu(n) - \sum_{n\le x} e_1(n) = \sum_{n\le x}(1-\Lambda) * \mu(n) - 1.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Hacemos una sumación de Abel en el primer término de la igualdad con $a_n = \mu(n),\ A(x) = M(x)$ y $f(x) = \log(x)$ y sabemos que $M(t) = O(t)$

$$\sum_{n\le x} \mu(n)\log n = M(x)\log x - \int_1^x \frac{M(t)}{t}dt = M(x)\log x + O(x). \tag{4.2}$$

La suma de la parte derecha de la igualdad (4.1) se puede poner como:

$$\sum_{n\le x}(1-\Lambda) * \mu(n) = \sum_{n\le x}\left(\left[\frac{x}{n}\right] - \Psi\left(\frac{x}{n}\right)\right) * \mu(n).$$

Como suponemos cierto (1) tenemos que

$$|[x/n] - \Psi(x/n)| = |[x/n] - (x/n)| + o(x/n) < \varepsilon x/n$$

para valores de x/n a partir de un $A = A(\varepsilon)$.

También tenemos por las estimaciones de Chebyshev (3.3) que:

$$\Psi(x) \le Cx + O(\log^2 x) \implies \Psi(x) - x \le (C-1)x + O(\log^2 x)$$

y

$$|[x/n] - \Psi(x/n)| \le (C-1)(x/n) + o(x) \implies |[x/n] - \Psi(x/n)| < B(x/n)$$

para todos los valores de x/n. Entonces con (2.1):

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\le x}\left(\left[\frac{x}{n}\right]-\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\right)\mu(n)\right| &\le \sum_{n\le x}\left|\left(\left[\frac{x}{n}\right]-\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right| \\
&\le \sum_{n\le x/A}\varepsilon\frac{x}{n}+\sum_{x/A\le n\le x}B\frac{x}{n} \\
&= \sum_{n\le x/A}\varepsilon\frac{x}{n}+\sum_{n\le x}B\frac{x}{n}-\sum_{n\le x/A}B\frac{x}{n} \\
&= \varepsilon x(\log(x/A)+O(1))+Bx(\log(x)+O(1)) \\
&\qquad - Bx(\log(x/A)+O(1)) \\
&= \varepsilon x(\log(x/A)+O(1))+Bx(\log(A)+O(1)) \\
&= \varepsilon x(\log(x/A)+O(1))+O(x) \\
&\le \varepsilon x\log x+o(x\log x)\le 2\varepsilon x\log x,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

para x lo suficientemente grande.

Entonces tenemos que con (4.1), (4.2) y (4.3):

$$\begin{aligned}
M(x)\log x+O(x) &= M(x)\log x+o(x\log x) \\
&= \sum_{n\le x}(1-\Lambda)*\mu(n)-1\le 2\varepsilon x\log x
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$M(x)\log x\ \le\ 3\varepsilon x\log x\Longrightarrow M(x)\le 3\varepsilon x\Longrightarrow M(x)=o(x),$$

como queríamos probar.

Veamos ahora que (4) implica (5). Para ello observamos que se cumple que

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}=o(1)\iff\sum_{n\le x}\mu(n)\frac{x}{n}=o(x). \tag{4.4}$$

Sea

$$S(x):=\sum_{n\le x}\mu(n)\frac{x}{n}. \tag{4.5}$$

Se cumple que

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]=1,$$

pues se tiene $\sum_{n\le x} 1 = [x]$, y aplica el segundo teorema de inversión de Möbius con

$$F(x) = [x], \quad G(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 1, \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Entonces, de (4.4) y (4.5), se tiene

$$S(x) = 1 + \sum_{n\le x} \mu(n)\Big(\frac{x}{n} - \Big[\frac{x}{n}\Big]\Big).$$

Sea $A > 1$ un número arbitrario. Entonces

$$\sum_{n\le x} \mu(n)\Big(\frac{x}{n} - \Big[\frac{x}{n}\Big]\Big) = \sum_{n\le x/A} \mu(n)\Big(\frac{x}{n} - \Big[\frac{x}{n}\Big]\Big) + \sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\Big(\frac{x}{n} - \Big[\frac{x}{n}\Big]\Big).$$

Descomponemos el segundo sumando del término de la derecha

$$\sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\Big(\frac{x}{n} - \Big[\frac{x}{n}\Big]\Big) = \sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\frac{x}{n} - \sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\Big[\frac{x}{n}\Big]. \tag{4.6}$$

Operamos sobre la segunda suma del término derecho:

$$\begin{aligned}
\sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\Big[\frac{x}{n}\Big] &= \sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\Big(\sum_{m\le x/n} 1\Big) = \sum_{x/A<n\le x,\, m\le x/n} \mu(n) \\
&\quad \text{pues } m \le x/n < A \Rightarrow m < A \\
&= \sum_{m<A} \Bigg(\sum_{x/A<n\le x/m} \mu(n)\Bigg) \\
&= \sum_{m<A} \Bigg(\sum_{n\le x/m} \mu(n) - \sum_{n\le x/A} \mu(n)\Bigg) \\
&= \sum_{m<A} \Big(M(x/m) - M(x/A)\Big) = \sum_{m\le A} \Big(M(x/m) - M(x/A)\Big) \\
&= \sum_{m\le A} M(x/m) - [A]M(x/A).
\end{aligned}$$

Ahora operamos sobre la primera suma del término derecho de (4.6):

$$\begin{aligned}
\sum_{x/A<n\le x} \mu(n)\frac{x}{n} &= \sum_{x/A<n\le x} \frac{x}{n}\Big(M(n) - M(n-1)\Big) \\
&= \sum_{x/A<n\le x} \Big(\frac{x}{n}M(n) - \frac{x}{n}M(n-1)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x/A<n\leq x} \left(\frac{x}{n}M(n) - \frac{x}{n}M(n-1)\right) \pm AM(x/A)\\
&= \sum_{x/A<n\leq x} M(n)\left(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1}\right) - AM(x/A)\\
&= \sum_{x/A<n\leq x} M(n)\int_{\frac{x}{n+1}}^{\frac{x}{n}} dt - AM(x/A)\\
&\text{pues } x/(n+1) < t \leq x/n \iff n \leq x/t < n+1 \iff [x/t] = n\\
&= \sum_{x/A<n\leq x} \int_{\frac{x}{n+1}}^{\frac{x}{n}} M(x/t)dt - AM(x/A)\\
&= \int_{\frac{x}{x+1}}^{A} M(x/t)dt - AM(x/A)\\
&= \int_{1}^{A} M(x/t)dt - AM(x/A).
\end{aligned}
$$

Reuniendo todo se tiene:

$$
\begin{aligned}
S(x) &= 1 + \sum_{n\leq x/A} \mu(n)\left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]\right) + \int_1^A M(x/t)dt\\
&\qquad - AM(x/A) - \sum_{m\leq A} M(x/m) + [A]M(x/A)\\
&= 1 + \sum_{n\leq x/A} \mu(n)\left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]\right) + \int_1^A M(x/t)dt\\
&\qquad - \sum_{m\leq A} M(x/m) - (A - [A])M(x/A).
\end{aligned}
$$

Como hemos supuesto que $M(x) = o(x)$ entonces

$$
S(x) = 1 + \sum_{n\leq x/A} O(1)\mu(n) + \int_1^A o(x/t)dt - \sum_{2\leq n\leq A} o(x/n) - O(1)o(x)
$$

Tomando valor absoluto y con la desigualdad triangular tenemos

$$
|S(x)| \leq 1 + \frac{x}{A} + \int_1^A o(x/t)dt + \sum_{2\leq n\leq A} o(x/n) + o(x) \leq \frac{x}{A} + o(x)
$$

Como A es arbitrario, tenemos $S(x) = o(x)$, como queríamos demostrar.

Capítulo 5

Fórmula de Selberg

Comenzamos con la estimación

$$\sum_{p\le x}\log^2 p+\sum_{pq\le x}\log p\log q \;=\; 2x\log x+O(x) \tag{5.1}$$

encontrada por A.Selberg, donde p y q son primos.

Teorema 5.1 *Sea $x\ge 1$. Entonces es cierto* (5.1) *y las siguientes fórmulas*

$$\Theta(x)\log x+\sum_{p\le x}\Theta(x/p)\log p \;=\; 2x\log x+O(x) \tag{5.2}$$

y

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\log n+\sum_{n\le x}\Lambda*\Lambda(n) \;=\; 2x\log x+O(x). \tag{5.3}$$

Para ello veremos que (5.1), (5.2) y (5.3) son equivalentes y que todos ellas suman $2x\log x+O(x)$.

Observación 5.2. Se cumple:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}(L1_p*L1_p)(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{ab=n}L1_p(a)L1_p(b)\\ &= \sum_{ab\le x}\log a\,1_p(a)\log b\,1_p(b)\stackrel{*}{=}\sum_{pq\le x}\log p\log q\end{aligned}$$

donde en (*) hemos usado que

$$\log a\,1_p(a)\log b\,1_p(b)=\left\{\begin{matrix}\log a\log b & \text{si a y b son primos}\\ 0 & \text{caso contrario}\end{matrix}\right\}=\log p\log q.$$

Lema 5.3 *Son equivalentes* (5.1) *y* (5.2).

Demostración. Por la observación anterior tenemos

$$\sum_{pq\leq x} \log p \log q = \sum_{n\leq x} L1_p * L1_p(n),$$

de esto, junto con Teorema 2.15 tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{pq\leq x} \log p \log q &= \sum_{n\leq x} L1_p * L1_p(n) = \sum_{n\leq x} L1_p(n) \sum_{m\leq x/n} L1_p(m) \\ &= \sum_{n\leq x} \Theta(x/n) L1_p(n) = \sum_{p\leq x} \Theta(x/p) \log p\end{aligned} \tag{5.4}$$

ya que $\Theta(x) = \sum_{n\leq x} L1_p(n)$.

Ahora vamos a ver que $\sum_{p\leq x} \log^2 p = \Theta(x)\log x + O(x)$. Aplicando una suma de Abel con $a_n = \log n\, 1_p(n)$, $A(x) = \Theta(x)$ y $f(x) = \log x$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x} \log^2 p = \sum_{p\leq x} \log p \log p &= \Theta(x)\log x - \int_1^x \frac{\Theta(t)}{t} dt \\ &= \Theta(x)\log x + O(x),\end{aligned} \tag{5.5}$$

ya que al ser $\Theta(x) = O(x)$ entonces la integral es

$$\int_1^x \frac{\Theta(t)}{t} dt = \int_1^x O(1) dt = O(1)\int_1^x dt = O(1)\, x = O(x).$$

Por lo que, de (5.4) y (5.5)

$$\sum_{p\leq x} \log^2 p + \sum_{pq\leq x} \log q \log p = \Theta(x)\log x + O(x) + \sum_{p\leq x} \Theta(x/p)\log p.$$

□

Lema 5.4 (5.2) *es equivalente a* (5.3).

Demostración. Comenzaremos aplicándole una suma de Abel con $a_n = \Lambda(n)$, $A(x) = \Psi(x)$ y $f(x) = \log x$ al primer término de la parte derecha de la igualdad (5.3)

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\log n = \Psi(x)\log x - \int_1^x \frac{\Psi(t)}{t} dt = \Psi(x)\log x + O(x). \tag{5.6}$$

Ya que sabemos que $\dfrac{\Psi(t)}{t} = O(1)$ por (3.3) tenemos:

$$\int_1^x \frac{\Psi(t)}{t} dt = \int_1^x O(1) dt = O(x).$$

Gracias a la Observación 3.1 podemos reemplazar $\Psi(x)$ por $\Theta(x)$. Entonces tenemos

$$\sum_{n\le x} \Lambda(n)\log n = \Psi(x)\log x + O(x) = \Theta(x)\log x + O(x).$$

Nos falta ver que

$$\sum_{n\le x} \Lambda * \Lambda(n) = \sum_{pq\le x} \log p \log q + O(x),$$

para ello usaremos la Observación 5.2. Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \le &\sum_{n\le x} (\Lambda * \Lambda - L1_p * L1_p)(n) \\ = &\sum_{n\le x} (\Lambda - L1_p) * (\Lambda + L1_p)(n) = (*) \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 2.15 y que $\Theta(x) = \sum_{n\le x} L1_p(n)$ y $\Psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$

$$(*) = \sum_{n\le x} (\Psi(x/n) - \Theta(x/n))(\Lambda(n) + 1_p(n)\log n) = (**)$$

por la Proposición 3.1, $\Psi(x/n) - \Theta(x/n) = O(x^{1/2}\log^2 x) \le O(x^{2/3})$, y que $\Lambda(n) \ge L1_p(n)$ tenemos

$$(**) \le \sum_{n\le x} O((x/n)^{2/3})\, 2\Lambda(n) = (***)$$

con una suma de Abel con $a_n = \Lambda(n)$, $A(x) = \Psi(x)$ y $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ tenemos

$$\begin{aligned} (***) =&O(x^{2/3}) \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n^{2/3}} = O(x^{2/3}) \left(\frac{\Psi(x)}{x^{2/3}} - \int_1^x \frac{\Psi(t)}{t^{5/3}} dt \right) \\ =&O(x^{2/3}) \left(\frac{O(x)}{x^{2/3}} - \int_1^x \frac{O(t)}{t^{5/3}} dt \right) = O(x^{2/3}) \left(O(x^{1/3}) - O(x^{1/3}) \right) \\ =&O(x^{2/3}) O(x^{1/3}) = O(x), \end{aligned}$$

ya que:

$$\int_1^x \frac{O(t)}{t^{5/3}} dt = O(1) \int_1^x \frac{t}{t^{5/3}} dt = O(1)\, 3\, x^{1/3} = O(x^{1/3})$$

Entonces se tiene:

$$0 \leq \sum_{n \leq x} (\Lambda * \Lambda - L1_p * L1_p)(n) = \sum_{n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) - \sum_{n \leq x} L1_p * L1_p(n) \leq O(x).$$

Lo que nos demuestra que

$$\sum_{n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) = \sum_{pq \leq x} \log p \log q + O(x).$$

□

Lema 5.5 *La parte izquierda de* (5.3) *es igual a* $\sum_{n \leq x} L^2 * \mu(n)$*, es decir,*

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \log n + \sum_{n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) = \sum_{n \leq x} L^2 * \mu(n)$$

Demostración. Comenzamos con la relación 3 de la Observación 2.14, $\Lambda * 1(n) = L(n)$, y la multiplicamos a ambos lados por $L(n)$

$$L(\Lambda * 1)(n) = L^2(n)$$

usando el Teorema 2.16 tenemos

$$L\Lambda * 1(n) + \Lambda * (L1)(n) = L^2(n),$$

con la relación 3 de la Observación 2.14 y convolucionando por $\mu(n)$ obtenemos

$$\begin{aligned} L\Lambda * 1(n) + \Lambda * \Lambda * 1(n) &= L^2(n) \\ L\Lambda * 1 * \mu(n) + \Lambda * \Lambda * 1 * \mu(n) &= L^2 * \mu(n) \\ L\Lambda(n) + \Lambda * \Lambda(n) &= L^2 * \mu(n). \end{aligned}$$

Ahora sumamos para $n \leq x$ ambos lados y obtenemos la igualdad deseada. □

Observación 5.6. Se cumple $O(\log x) = O(\log[x])$.

Demostración. Para $x > 3$,

$$1 = \frac{\log x}{\log x} \leq \frac{\log x}{\log[x]} \leq \frac{\log x}{\log(x-1)} \leq \frac{\log 2(x-1)}{\log(x-1)} = 1 + \frac{\log 2}{\log(x-1)} \leq 2.$$

□

Proposición 5.7 *Para* $x \geq 1$

$$\sum_{n \leq x} \log^2 n = \int_1^x \log^2 t dt + O(\log^2 x) = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + O(\log^2 x).$$

Demostración. Acotamos por arriba la integral

$$\begin{aligned}\int_1^x \log^2 t dt &= \sum_{k=2}^{[x]} \int_{k-1}^k \log^2(t)dt + \int_{[x]}^x \log^2(t) \\ &\leq \sum_{k=2}^{[x]} \int_{k-1}^k \log^2(k)dt + (x-[x])\log^2(x) \\ &\leq \sum_{k=2}^{[x]} \log^2 k + O(\log^2 x).\end{aligned}$$

Acotamos por abajo la integral y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^x \log^2 t dt &= \sum_{k=2}^{[x]} \int_{k-1}^k \log^2(t)dt + \int_{[x]}^x \log^2(t) \\ &\geq \sum_{k=2}^{[x]} \int_{k-1}^k \log^2(k-1)dt + (x-[x])\log^2([x]) \\ &\geq \sum_{k=2}^{[x]} \log^2(k-1) + O(\log^2[x]) \pm \log^2[x] \\ &= \sum_{k=1}^{[x]} \log^2 k + O(\log^2[x]).\end{aligned}$$

Que junto con la observación anterior tendríamos

$$\int_1^x \log^2(t)dt = \sum_{n\leq x} \log^2 n + O(\log x)$$

como queríamos probar. □

Proposición 5.8 *Para $x \geq 1$ y ciertas constantes α, β se cumple*

$$\sum_{n\leq x} 1*1*1(n) = \frac{1}{2}x\log^2 x + \alpha x\log x + \beta x + O(x^{3/4}\log x).$$

Demostración. Empezamos con la igualdad $d(n) = 1*1(n)$ y aplicamos el método de la hipérbola (Lema 2.22)

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} 1*1*1(n) &= \sum_{n\leq x} 1*d(n) \\ &= \sum_{n\leq\sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] d(n) + \sum_{m\leq\sqrt{x}} \sum_{k\leq x/m} d(k) - \left[\sqrt{x}\right] \sum_{k\leq\sqrt{x}} d(k).\end{aligned}$$

Usando la Observación 2.23, calculemos por partes:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq\sqrt{x}}\left[\frac{x}{n}\right]d(n) &= \sum_{n\leq\sqrt{x}}\left(\frac{x}{n}+O(1)\right)d(n) = x\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n}+\sum_{n\leq\sqrt{x}}O(1)d(n)\\ &= x\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n}+O(x^{1/2}\log x),\end{aligned}$$

donde para calcular $\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n}$ utilizaremos una suma de Abel con $a_n = d(n)$, $A(x) = x\log x + cx + O(\sqrt{x})$ y $f(x) = \frac{1}{x}$. Luego tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n} &= (\sqrt{x}\log\sqrt{x}+c\sqrt{x}+O(\sqrt[4]{x}))\frac{1}{\sqrt{x}}+\int_1^{\sqrt{x}}\left(t\log t+ct+O(\sqrt{t})\,\frac{1}{t^2}\right)dt\\ &= (\log\sqrt{x}+c+O(x^{-1/4}))+\int_1^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log t}{t}+\frac{c}{t}+O(t^{-3/2})\right)dt\\ &= \log\sqrt{x}+c+O(x^{-1/4})+\frac{\log^2 x}{8}+c\log x+O(x^{-1/2})\\ &= \frac{\log x}{2}+c+\frac{\log^2 x}{8}+c\log x+O(x^{-1/4})\\ &= \frac{\log^2 x}{8}+c_1\log x+c_2+O(x^{-1/4})\end{aligned}$$

por lo que llegamos a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq\sqrt{x}}\left[\frac{x}{n}\right]d(n) =& x\left(\frac{\log^2 x}{8}+c_1\log x+c_2+O(x^{-1/4})\right)+O(x^{1/2}\log x)\\ &= \frac{x\log^2 x}{8}+c_1x\log x+c_2x+O(x^{3/4}\log x).\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{k\le x/n} d(k) = \sum_{m\le\sqrt{x}}\left(\frac{x}{m}\log\frac{x}{m}+\frac{cx}{m}+O\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\right)$$

$$= x\log x\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m}+cx\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m}-x\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{\log m}{m}+O\left(\sqrt{x}\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

con (2.1), (2.2) y (2.5) llegamos a

$$= x\log x\left(\log\sqrt{x}+\gamma+O(1/\sqrt{x})\right)+cx\left(\log\sqrt{x}+\gamma+O(1/\sqrt{x})\right)$$
$$-x\left(\frac{\log^2 x}{8}+\gamma_2+O(\log x/\sqrt{x})\right)+O\left(\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+O(1))\right)$$
$$=\frac{x\log^2 x}{2}+\gamma x\log x+\frac{cx\log x}{2}+\gamma cx-\frac{x\log^2 x}{8}$$
$$-\gamma_2 x+O(x^{1/2}\log x)+O(x^{3/4})$$
$$=\frac{x\log^2 x}{2}+c_3x\log x+c_4x-\frac{x\log^2 x}{8}+O(x^{3/4}\log x).$$

Y por último con la Observación 2.23

$$\left[\sqrt{x}\right]\sum_{k\le\sqrt{x}} d(k) = \left[\sqrt{x}\right](\sqrt{x}\log\sqrt{x}+c\sqrt{x}+O(\sqrt[4]{x}))$$
$$= (\sqrt{x}+O(1))(\sqrt{x}\log\sqrt{x}+c\sqrt{x}+O(\sqrt[4]{x}))$$
$$= x\log\sqrt{x}+cx+O(x^{3/4})+O(x^{1/2}\log x)$$
$$= x\log\sqrt{x}+cx+O(x^{3/4}\log x)$$
$$=\frac{x\log x}{2}+cx+O(x^{3/4}\log x).$$

En resumen, tenemos:

$$\begin{array}{rccccc}
\displaystyle\sum_{n\le\sqrt{x}}\left[\frac{x}{n}\right]d(n) = & & \dfrac{\log^2 x}{8} & +c_1x\log x & +c_2x & +O(x^{3/4}\log x)\\
\displaystyle\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{k\le x/m} d(k) = & \dfrac{x\log^2 x}{2} & -\dfrac{\log^2 x}{8} & +c_3x\log x & +c_4x & +O(x^{3/4}\log x)\\
\displaystyle-\left[\sqrt{x}\right]\sum_{k\le\sqrt{x}} d(k) = & & & c_5x\log x & +c_6x & +O(x^{3/4}\log x)\\
\hline
\displaystyle\sum_{n\le x} 1*1*1(n) = & \dfrac{x\log^2 x}{2} & & +\alpha x\log x & +\beta x & +O(x^{3/4}\log x)
\end{array}$$

$\square$

Lema 5.9 *Para $x \geq 1$*

$$\sum_{n\leq x} L^2 * \mu(n) = 2x\log x + O(x).$$

Demostración. Comenzamos con

$$\sum_{n\leq x} L^2 * \mu(n) = \sum_{k\leq x}\sum_{mn=k} L^2(m)\mu(n) = \sum_{mn\leq x} L^2(m)\mu(n) = \sum_{n\leq x}\left(\sum_{m\leq x/n}\log^2 m\right)\mu(n).$$

Nuestro objetivo es encontrar una función que nos permita aproximar $\sum_{n\leq x}\log^2 n$, para ello definimos la función

$$g(n) := (2\cdot 1 * 1 * 1 + a\cdot 1 * 1 + b\cdot 1)(n),$$
$$G(x) := \sum_{n\leq x}(2\cdot 1 * 1 * 1 + a\cdot 1 * 1 + b\cdot 1)(n).$$

Veamos ahora que seleccionando la a y b adecuada llegamos gracias a las Proposiciones 5.7 y 5.8 y a la Observación 2.23 a:

$$\left(\sum_{m\leq y}\log^2 m\right) - G(y) = O(y). \tag{5.7}$$

Para ello:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq y}\log^2 n &= y\log^2 y - 2y\log y + 2y + O(\log^2 y)\\
2\sum_{n\leq y} 1 * 1 * 1(n) &= y\log^2 y + 2\alpha y\log y + 2\beta y + O(y^{3/4}\log y)\\
a\sum_{n\leq y} 1 * 1(n) &= ay\log y + acy + O(\sqrt{y})\\
b\sum_{n\leq y} 1(n) &= by + O(1)
\end{aligned}$$

Tomando $a = -2 - 2\alpha$ y $b = 2 - 2\beta - ac$, obtenemos (5.7).

Pasamos a ver que

$$\sum_{n\leq x} L^2 * \mu(n) = \sum_{n\leq x}\left(\sum_{m\leq x/n}\log^2 m\right)\mu(n) = \sum_{n\leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n) + O(x), \tag{5.8}$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n\leq x}\left(\left(\sum_{m\leq x/n}\log^2 m\right)\mu(n) - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)\mu(n) = O(x).$$

Gracias a (5.7) tenemos que la parte de la izquierda es igual a

$$\sum_{n\leq x}(O(x/n))\,\mu(n)=O\left(\sum_{n\leq x}\mu(n)\frac{x}{n}\right)=O(O(x))=O(x).$$

Ya que $\sum_{n\leq x}\mu(n)\frac{x}{n}=O(x)$ pues

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\mu(n)\frac{x}{n}&=\sum_{n\leq x}\mu(n)\left(\left[\frac{x}{n}\right]+O(1)\right)=\sum_{n\leq x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]+\sum_{n\leq x}O(1)\mu(n)\\&=\sum_{n\leq x}\mu*1(n)+O(x)=\sum_{n\leq x}e_1(n)+O(x)=1+O(x)=O(x).\end{aligned}$$

Vemos que $\sum_{n\leq x}G\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n)=\sum_{n\leq x}g*\mu(n)$ entonces usando las relaciones de la Observación 2.14 y la estimación de Dirichlet (Observación 2.23)

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}G\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n)&=\sum_{n\leq x}(2\cdot 1*1*1+a\cdot 1*1+b\cdot 1)*\mu(n)\\&=\sum_{n\leq x}(2\cdot 1*1(n)+a\cdot 1(n)+be_1(n))\\&=2(x\log x+O(x))+ax+b\\&=2x\log x+O(x).\end{aligned}$$

Entonces con (5.8) y esto último tenemos

$$\sum_{n\leq x}L^2*\mu(n)=\sum_{n\leq x}G\left(\frac{x}{n}\right)\mu(n)+O(x)=2x\log x+O(x).$$

□

Con todo esto, ya estamos preparados para demostrar las expresiones de la fórmula de Selberg (Teorema 5.1)

Demostración. Por el Lema 5.3 y el Lema 5.4 tenemos que (5.1), (5.2) y (5.3) son equivalentes.

Por el Lema 5.5 sabemos que se cumple (5.3) si y solo si

$$\sum_{n\leq x}L*\mu(n)=2x\log x+O(x),$$

que por el Lema 5.9 tenemos que se cumple, por lo que queda demostrado el Teorema 5.1.

□

Observación 5.10. Si suponemos cierto el T.N.P., entonces son equivalentes:

$$\Psi(x)\log x \sim x\log x \sim \sum_{n\leq x}\Psi(x/n)\Lambda(n) \sim \sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\Lambda(n)$$

Demostración. Tenemos por (1) que $\Psi(x)\sim x$ por lo que $\Psi(x)\log x\sim x\log x$ y también $\sum_{n\leq x}\Psi(x/n)\Lambda(n)\sim\sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\Lambda(n)$.

Nos faltaría ver que $x\log x \sim \sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\Lambda(n)$, para ello usaremos la tercera relación de la Observación 2.14 y la Observación 2.18

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\Lambda(n) &= \sum_{n\leq x}\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]+\left[\frac{x}{n}\right]\right)\Lambda(n)\\ &= \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right]\Lambda(n)+\sum_{n\leq x}\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)\Lambda(n)\\ &= \sum_{n\leq x}1*\Lambda(n)+\sum_{n\leq x}O(1)\Lambda(n)\\ &= \sum_{n\leq x}\log n+O(\Psi(x))\\ &= x\log x-x+O(\log x)+O(x)=x\log x+O(x).\end{aligned}\tag{5.9}$$

Lo que nos muestra que todas las expresiones son equivalentes. □

Podemos reescribir la fórmula de Selberg usando (5.3) y (5.6) de la siguiente forma

$$\Psi(x)\log x+\sum_{n\leq x}\Lambda*\Lambda(n)=2x\log x+O(x)\tag{5.10}$$

y dividiendo por $x\log x$ llegamos a la fórmula

$$\frac{\Psi(x)}{x}+\frac{1}{x\log x}\sum_{n\leq x}\Lambda*\Lambda(n)=2+O(1/\log x).\tag{5.11}$$

Proposición 5.11 *Sea a el límite inferior de $\frac{\Psi(x)}{x}$ y A el límite superior, tenemos que*

$$0{,}9212\leq a\leq 1\leq A\leq 1{,}0555$$

y

$$A+a=2.$$

Demostración. La estimación de Chebyshev (3.3) nos dice que $0{,}9212 \leq \dfrac{\Psi(x)}{x} \leq 1{,}10555$ por lo que $0{,}9212 \leq a, A \leq 1{,}10555$. También tenemos que

$$x \log x = \sum_{n \leq x} \Psi(x/n) \leq \sum_{n \leq x} A\frac{x}{n} = Ax \log x \Longrightarrow A \geq 1,$$

$$x \log x = \sum_{n \leq x} \Psi(x/n) \geq \sum_{n \leq x} a\frac{x}{n} = ax \log x \Longrightarrow a \leq 1.$$

Por lo que queda demostrada la primera parte.

Retomamos la fórmula (5.11). Vemos que:

$$\sum_{n \leq x} \frac{ax}{n}\Lambda(n) \leq \sum_{n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) = \sum_{n \leq x} \Psi(x/n)\Lambda(n) \leq \sum_{n \leq x} \frac{Ax}{n}\Lambda(n)$$

Entonces sumando $\Psi(x)\log x$ y dividiendo por $x \log x$ llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{\Psi(x)}{x} + \frac{a}{x \log x}\sum_{n \leq x} \frac{x}{n}\Lambda(n) &\leq \frac{\Psi(x)}{x} + \frac{1}{x \log x}\sum_{n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) \\ &\leq \frac{\Psi(x)}{x} + \frac{A}{x \log x}\sum_{n \leq x} \frac{x}{n}\Lambda(n).\end{aligned}$$

La expresión del medio de la desigualdad hemos visto en (5.11) que es igual a $2 + O(1/\log x)$ y con (5.9) obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\Psi(x)}{x} + \frac{a}{x \log x}(x \log x + O(x)) &\leq 2 + O(1/\log x) \\ &\leq \frac{\Psi(x)}{x} + \frac{A}{x \log x}(x \log x + O(x)),\end{aligned}$$

lo que simplificando nos queda

$$\frac{\Psi(x)}{x} + a + O(1/\log x) \leq 2 + O(1/\log x) \leq \frac{\Psi(x)}{x} + A + O(1/\log x),$$

$$\frac{\Psi(x)}{x} + a \leq 2 + O(1/\log x) \leq \frac{\Psi(x)}{x} + A.$$

Tomando límites

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} + a \leq \limsup_{x\to\infty} \,(2 + O(1/\log x)) \Longrightarrow A + a \leq 2,$$

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} + A \geq \liminf_{x\to\infty} \,(2 + O(1/\log x)) \Longrightarrow a + A \geq 2.$$

Entonces tenemos que $2 \leq A + a \leq 2$, por lo que queda demostrado que $A + a = 2$. $\square$

Capítulo 6

Prueba elemental del Teorema de los Números Primos

A partir de la fórmula de Selberg, se han obtenido muchas formas de deducir el T.N.P. de forma elemental. Dos de ellas son la prueba de Erdös y la de Selberg.

Erdös propuso un método basado en la compensación. Partiendo de la fórmula de Selberg en la forma (5.11) y que $A + a = 2$. Tomando un valor de x tal que $\Psi(x)/x$ sea cercano a A tenemos entonces que a partir de la relación de Mertens, $\Psi(x/p)/(x/p)$ es cercano a a para un conjunto S que comprende la mayoría de los primos $p \leq x$. Seleccionando el menor primo p_1 perteneciente a S, con un argumento similar, llegamos a $\Psi(x/p_1p)/(x/p_1p)$ es cercano a A para la mayoría de primos $p \leq x/p_1$. Entonces en el intervalo $[1, x/p_1]$ tenemos que $\Psi(x/p) \approx ax/p$ y $\Psi(x/p_1p) \approx Ax/p_1p$ lo que nos da $\Psi(x) \approx ax \approx Ax$ y esto es una contradicción a no ser que $A = a = 1$.

La prueba de Selberg también depende de una recursión. Esta vez la recursión se hará sobre una variante de la fórmula de Selberg. Selberg definió $\Theta(x) = R(x) + x$, buscando que $R(x)$ fuera $o(x)$ lo que probaría el T.N.P., y mediante métodos elementales llegó a la cota

$$|R(x)| \log x \leq \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \left| R\left(\frac{x}{n}\right) \right| + O\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right).$$

Después analizando las propiedades de esta función $R(x)$ según la forma del intervalo, llegó a algunas cotas de $R(x)$ como

$$|R(y)| \leq \delta y,$$

en cada intervalo $x \leq y \leq e^{K_1/\delta}x$, o como

$$|R(z)| \leq \frac{\alpha}{2}z,$$

en cada intervalo $y \leq z \leq e^{\delta/2}y$.

Entonces, uniendo todas las cotas obtenidas en cada intervalo con métodos elementales, se llega a que

$$|R(x)| \leq \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{300K_1}\right)x,$$

por lo que tomando ahora el nuevo α del obtenido anteriormente

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n\left(1 - \frac{\alpha_n^2}{300K_1}\right)$$

claramente tiende a 0 como se quería probar

En nuestra prueba tomaremos algunas de las ideas de Selberg, como el uso función $R(x)$, y a partir de las fórmulas asintóticas llegaremos de forma directa, es decir, sin necesidad de recursión, a una prueba elemental del T.N.P.

Partimos de la fórmula de Selberg en la forma (5.10)

$$\Psi(x)\log x + \sum_{n\leq x}\Lambda * \Lambda(n) = 2x\log x + O(x)$$

y usando el Teorema 2.15 tenemos que

$$\sum_{n\leq x}\Lambda * \Lambda(n) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\Psi(x/n),$$

por lo que nos queda otra fórmula equivalente

$$\Psi(x)\log x + \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\Psi(x/n) = 2x\log x + O(x).$$

Definimos ahora

$$R(x) := \Psi(x) - x, \quad \text{para } x \geq 1,$$

nuestro objetivo va a ser ver que $R(x) = o(x)$ lo que nos demostraría el T.N.P.

Tenemos que

$$\Psi(x)\log x - x\log x + \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\Psi(x/n) - x\log x = O(x).$$

Con (5.9) y con la definición de $R(x)$ tenemos

$$R(x)\log x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)\Psi(x/n) - \sum_{n\le x}\frac{x}{n}\Lambda(n) = O(x),$$

es decir,

$$R(x)\log x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n) = O(x).$$

Observemos que si se cumpliese que $R(x)\geq 0$ entonces quedaría probado el T.N.P. pues, de (6) se tendría

$$0\leq R(x)\log x \leq R(x)\log x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n) = O(x),$$

con lo que se tendría

$$0\leq R(x)\log x = O(x),$$

luego $R(x) = O(x/\log x)$ y, por tanto, $R(x)=o(x)$, lo que prueba el T.N.P. Desafortunadamente, no es cierto que $R(x)\geq 0$. Análogamente, se puede ver que ocurriría lo mismo con $R(x)\leq 0$, pero tampoco es cierto.

Si realizamos en (6) el cambio de variables n por m y x por x/n a la fórmula anterior obtenemos

$$R(x/n)\log(x/n) + \sum_{m\le x/n}\Lambda(m)R(x/mn) = O(x/n).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\log x\Bigg(R(x)\log x &+ \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\Bigg)\\ &-\sum_{n\le x}\Lambda(n)\Bigg(R(x/n)\log(x/n)+\sum_{m\le x/n}\Lambda(m)R(x/mn)\Bigg)\\ &=\log x\,O(x)+\sum_{n\le x}\Lambda(n)\,O(x/n)\\ &=O(x\log x)+O\left(\sum_{n\le x}\Lambda(n)\frac{x}{n}\right)\\ &=O(x\log x).\end{aligned}$$

Operamos en la parte izquierda de la igualdad y tenemos

$$\begin{aligned}
R(x)\log^2 x &+ \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log x - \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log(x/n) \\
&- \sum_{n\le x}\sum_{m\le x/n}\Lambda(m)R(x/mn)\Lambda(n) \\
&= R(x)\log^2 x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log x \\
&- \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)(\log x - \log n) - \sum_{mn\le x}\Lambda(m)R(x/mn)\Lambda(n) \\
&= R(x)\log^2 x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log x - \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log x \\
&+ \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log n - \sum_{mn\le x}\Lambda(m)R(x/mn)\Lambda(n) \\
&= R(x)\log^2 x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log n - \sum_{mn\le x}\Lambda(m)R(x/mn)\Lambda(n).
\end{aligned}$$

Entonces

$$R(x)\log^2 x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log n - \sum_{mn\le x}\Lambda(m)R(x/mn)\Lambda(n) = O(x).$$

Lo que reescribiendo nos da

$$R(x)\log^2 x = -\sum_{n\le x}\Lambda(n)R(x/n)\log n + \sum_{mn\le x}\Lambda(m)R(x/mn)\Lambda(n) + O(x).$$

Tomando valor absoluto a ambos lados de la igualdad, $\Lambda(n)$ y $\log n$ son positivos y aplicando la desigualdad triangular tenemos

$$|R(x)|\log^2 x \le \sum_{n\le x}\Lambda(n)|R(x/n)|\log n + \sum_{mn\le x}\Lambda(m)\Lambda(n)|R(x/mn)| + O(x).$$

o lo que es lo mismo

$$|R(x)|\log^2 x \le \sum_{n\le x}\Lambda(n)|R(x/n)|\log n + \sum_{k\le x}\sum_{mn=k}\Lambda(m)\Lambda(n)|R(x/k)| + O(x).$$

por lo que nos queda

$$|R(x)|\log^2 x \le \sum_{n\le x}\Lambda(n)|R(x/n)|\log n + \sum_{k\le x}\Lambda * \Lambda(k)|R(x/k)| + O(x).$$

Reagrupamos y definimos

$$a_n := \Lambda(n)\log n + \Lambda * \Lambda(n),$$

que por (5.3) sabemos que su suma igual a $2x\log x + O(x)$. Nos queda

$$|R(x)|\log^2 x \leq \sum_{n\leq x} a_n |R(x/n)| + O(x\log x). \tag{6.1}$$

Proposición 6.1 *Para* $x \geq 1$ *se tiene*

$$\sum_{n\leq x} a_n |R(x/n)| + O(x\log x) = 2\int_1^x |R(x/t)|\log t dt + O(x\log x).$$

Demostración. Comenzamos definiendo $F(t) := \Psi(t) + t = O(t)$. Entonces, dado $0 \leq t' < t$, tenemos

$$\begin{aligned} \Big||R(t)| - |R(t')|\Big| &\leq |R(t) - R(t')| = |\Psi(t) - \Psi(t) - t + t'|, \\ &\text{puesto que } \Psi(x) \text{ es creciente llegamos a que} \\ &\leq |\Psi(t) - \Psi(t')| + |t' - t| \\ &= \Psi(t) - \Psi(t') + t - t' = F(t) - F(t'). \end{aligned} \tag{6.2}$$

También se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{n\leq x-1} n\left\{F\left(\frac{x}{n}\right) - F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right\} \\ &= F\left(\frac{x}{1}\right) - F\left(\frac{x}{2}\right) + 2F\left(\frac{x}{2}\right) - 2F\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots \\ &= \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) - [x]F\left(\frac{x}{[x]}\right) \\ &= O\left(\sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\right) + O(x) = O(x\log x). \end{aligned} \tag{6.3}$$

La proposición se demostrará en dos pasos. Primero veamos que

$$\sum_{n\leq x} a_n|R(x/n)| = 2\sum_{2\leq n\leq x}|R(x/n)|\int_{n-1}^n \log t dt + O(x\log x).$$

Llamamos

$$c_1 = 0,\ c_n = a_n - 2\int_{n-1}^n \log t dt \text{ y } f(n) = |R(x/n)|.$$

Tenemos que

$$C(x) = \sum_{n\le x} a_n - 2\int_1^{[x]} \log t dt = 2x\log x + O(x) - 2x\log x - 2x = O(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x} a_n |R(x/n)| - 2\sum_{2\le n\le x} |R(x/n)| \int_{n-1}^{n} \log t dt \\
&\quad = \sum_{2\le n\le x} c_n |R(x/n)| \\
&\quad = \sum_{2\le n\le x} C(n) - C(n-1)|R(x/n)| \\
&\quad = \sum_{2\le n\le x} C(n)|R(x/n)| - \sum_{2\le n\le x} C(n-1)|R(x/n)| \\
&\quad = \sum_{2\le n\le x} C(n)|R(x/n)| - \sum_{2\le n\le x-1} C(n)\left|R\left(\frac{x}{n+1}\right)\right| \\
&\quad = \sum_{2\le n\le x-1} C(n)\left(\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| - \left|R\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right) + C(x)R\left(\frac{x}{[x]}\right) \\
&\quad = \sum_{2\le n\le x-1} O(n)\left(\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| - \left|R\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right) + O(x)R\left(\frac{x}{[x]}\right),
\end{aligned}$$

por (6.2) y (6.3) tenemos

$$= O\left(\sum_{2\le n\le x-1} n\left(F\left(\frac{x}{n}\right) - F\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\right) + O(x) = O(x\log x).$$

Ahora veamos que

$$\sum_{2\le n\le x} \left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| \int_{n-1}^{n} \log t dt - \int_1^x \left|R\left(\frac{x}{t}\right)\right| \log t dt = O(x\log x)$$

para ello acotamos el valor absoluto de la diferencia

$$\begin{aligned}
&\left|\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| \int_{n-1}^{n} \log t dt - \int_{n-1}^{n} \left|R\left(\frac{x}{t}\right)\right| \log t dt\right| \\
&\qquad = \left|\int_{n-1}^{n} \left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| - \left|R\left(\frac{x}{t}\right)\right| \log t dt\right| \\
&\qquad \le \int_{n-1}^{n} \left|\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| - \left|R\left(\frac{x}{t}\right)\right|\right| \log t dt
\end{aligned}$$

por (6.2) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{n-1}^{n} \left(F\left(\frac{x}{t}\right) - F\left(\frac{x}{n}\right) \right) \log t \, dt \\
&\leq \int_{n-1}^{n} \left(F\left(\frac{x}{n-1}\right) - F\left(\frac{x}{n}\right) \right) \log t dt \\
&\leq \left(F\left(\frac{x}{n-1}\right) - F\left(\frac{x}{n}\right) \right) \int_{n-1}^{n} \log n dt \\
&\leq \log n \left(F\left(\frac{x}{n-1}\right) - F\left(\frac{x}{n}\right) \right) \\
&\leq (n-1) \left(F\left(\frac{x}{n-1}\right) - F\left(\frac{x}{n}\right) \right).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2\leq n\leq x} \left| R\left(\frac{x}{n}\right) \right| \int_{n-1}^{n} \log t dt - \int_{1}^{x} \left| R\left(\frac{x}{t}\right) \right| \log t dt \\
&\qquad = \sum_{2\leq n\leq x} \left(\left| R\left(\frac{x}{n}\right) \right| \int_{n-1}^{n} \log t dt - \int_{n-1}^{n} \left| R\left(\frac{x}{t}\right) \right| \log t dt \right) \\
&\qquad\qquad + \int_{[x]}^{x} \left| R\left(\frac{x}{t}\right) \right| \log t dt \\
&\qquad = O\left(\sum_{n\leq x-1} n \left(F\left(\frac{x}{n-1}\right) - F\left(\frac{x}{n}\right) \right) \right) + O(x \log x) \\
&\qquad = O(x \log x).
\end{aligned}
$$

□

Entonces usando (6.1) y la Proposición 6.1 tenemos

$$
|R(x)| \log^2 x \leq 2 \int_{1}^{x} |R(x/t)| \log t dt + O(x \log x). \tag{6.4}
$$

Esta inecuación nos servirá para deducir el T.N.P., para ello utilizaremos una nueva función que se define

$$
V(\xi) := e^{-\xi} R(e^{\xi}) = e^{-\xi} \Psi(e^{\xi}) - 1
$$

y realizaremos unos cambios de variable para reescribir la inecuación anterior en términos de la función $V(\xi)$.

Realizamos los cambios de variable $x = e^{\xi}$ y $t = xe^{-\eta}$. La parte izquierda de la desigualdad nos quedaría

$$
R(e^{\xi}) \log^2 e^{\xi} = |e^{\xi} V(\xi)| \xi^2 = e^{\xi} |V(\xi)| \xi^2, \tag{6.5}
$$

y en la parte derecha tenemos,

$$t = xe^{-\eta}; \quad dt = -xe^{-\eta}d\eta$$

y los límites de integración nos quedarían

$$1 = xe^{-\eta}; \quad \eta = \log x = \xi$$

$$x = xe^{-\eta}; \quad \eta = \log 1 = 0$$

entonces la integral tenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^x |R(x/t)| \log t dt &= \int_\xi^0 |R(x/xe^{-\eta})| \log\left(\frac{e^\xi}{e^\eta}\right)(-x)e^{-\eta}d\eta \\
&= x\int_0^\xi |V(\eta)|(\xi - \eta)d\eta \\
&= x\int_0^\xi |V(\eta)| \int_\eta^\xi d\zeta d\eta = (*)
\end{aligned}$$

que le cambiamos el orden de integración y nos queda

$$(*) = x\int_0^\xi \int_0^\zeta |V(\eta)|d\eta d\zeta \tag{6.6}$$

Ahora retomamos la inecuación (6.4) y con (6.5) y (6.6) tenemos

$$e^\xi |V(\xi)|\xi^2 \leq 2x\int_0^\xi \int_0^\zeta |V(\eta)|d\eta d\zeta + O(x\log x).$$

Que sustituyendo $x = e^\xi$ y dividiendo por e^ξ nos queda

$$|V(\xi)|\xi^2 \leq 2\int_0^\xi \int_0^\zeta |V(\eta)|d\eta d\zeta + O(\xi). \tag{6.7}$$

Por como hemos definido $V(\xi)$, si se cumple

$$\lim_{\xi\to+\infty} V(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} R(e^\xi)e^{-\xi} = 0,$$

entonces quedaría demostrado el T.N.P. Para ello comenzamos definiendo

$$\alpha := \limsup_{\xi\to+\infty} |V(\xi)| \quad y \quad \beta := \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{1}{\xi}\int_0^\xi |V(\eta)|d\eta.$$

Tenemos, gracias a que $\Psi(x) = O(x)$, que $V(\xi) = e^{-\xi}\Psi(e^\xi) - 1$ está acotada, por lo que de la propia definición de límite superior tenemos

$$|V(\xi)| \leq \alpha + o(1). \tag{6.8}$$

y

$$\int_0^\xi |V(\eta)|d\eta = \beta\xi + o(\xi).$$

Sustituimos en (6.7) y nos queda

$$|V(\xi)|\xi^2 \leq 2\int_0^\xi (\beta\zeta + o(\zeta))d\zeta + O(e^\xi) = \beta\xi^2 + o(\xi^2)$$

$$|V(\xi)| \leq \beta + o(1).$$

Como α es el límite superior, tenemos entonces que

$$\alpha \leq \beta. \tag{6.9}$$

Por la definición de α sabemos que es mayor o igual a 0. Vemos que si $\alpha = 0$ quedaría demostrado el T.N.P., por lo que nos falta ver que ocurre si $\alpha > 0$.

Vamos a suponer $\alpha > 0$ y vamos a probar que $\beta < \alpha$ lo que nos contradice lo anterior. Para ello comenzaremos demostrando dos teoremas que vamos a necesitar.

Teorema 6.2 *Existe una constante A tal que para cada ξ_1 y ξ_2 tenemos*

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} V(\eta)d\eta\right| < A.$$

Demostración. Comenzaremos viendo que

$$\int_0^\xi V(\eta)d\eta = O(1).$$

Partimos de la estimación de Mertens y sumamos por partes

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x = O(1)$$

Definimos

$$a_n = \Lambda(n),\ A(x) = \Psi(x) \text{ y } f(x) = \frac{1}{x},$$

entonces se tiene

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\Psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\Psi(t)}{t^2} = O(1) + \int_1^x \frac{\Psi(t)}{t^2}$$

y sabemos que

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{t}{t^2} dt.$$

Entonces tenemos

$$O(1) + \int_1^x \frac{\Psi(t)}{t^2} - \int_1^x \frac{t}{t^2}\, dt = O(1) \Rightarrow \int_1^x \frac{\Psi(x) - t}{t^2} dt = \int_1^x \frac{R(t)}{t^2} dt = O(1)$$

donde sustituyendo $x = e^{\xi}$ y $t = e^{\eta}$

$$\int_1^x \frac{R(t)}{t^2} dt = \int_0^{\xi} V(\eta) d\eta = O(1).$$

Entonces

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} V(\eta) d\eta = \int_0^{\xi_2} V(\eta) d\eta - \int_0^{\xi_1} V(\eta) d\eta = O(1).$$

□

Teorema 6.3 *Sea* $\eta_0 > 0$ *y* $V(\eta_0) = 0$. *Entonces se tiene*

$$\int_0^{\alpha} |V(\eta_0 + \tau)| d\tau \leq \frac{\alpha^2}{2} + O(1/\eta_0).$$

Demostración. Comenzaremos con la fórmula de Selberg en la forma (5.10)

$$\Psi(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) = 2x \log x + O(x),$$

tomamos $x > x_0 \geq 1$ y restamos la fórmula para x y para x_0 obteniendo

$$\Psi(x) \log x - \Psi(x_0) \log x_0 + \sum_{x_0 \leq n \leq x} \Lambda * \Lambda(n) = 2x \log x - 2x_0 \log x_0 + O(x).$$

Puesto que $\Lambda * \Lambda(n) \geq 0$ y $\Psi(x) \log x$ es creciente tenemos

$$0 \leq \Psi(x) \log x - \Psi(x_0) \log x_0 \leq 2x \log x - 2x_0 \log x_0 + O(x),$$

restando $x \log x - x_0 \log x_0$ en ambos lados tenemos

$$\Psi(x) \log x - x \log x - \Psi(x_0) \log x_0 + x_0 \log x_0 \leq x \log x - x_0 \log x_0 + O(x).$$

Lo que nos queda

$$|R(x) \log x - R(x_0) \log x_0| \leq x \log x - x_0 \log x_0 + O(x).$$

Hacemos el cambio de variable en esto último $x = e^{\eta_0+\tau}$ y $x_0 = e^{\eta_0}$ por lo que $R(x_0) = R(e^{\eta_0}) = e^{\eta_0}V(\eta_0) = 0$ y queda

$$|R(e^{\eta_0+\tau})\log e^{\eta_0+\tau}| \leq e^{\eta_0+\tau}\log e^{\eta_0+\tau} - e^{\eta_0}\log e^{\eta_0} + O(e^{\eta_0+\tau})$$

dividiendo por $e^{\eta_0+\tau}(\eta_0+\tau)$ tenemos

$$|R(e^{\eta_0+\tau})e^{-(\eta_0+\tau)}| \leq 1 - \frac{e^{\eta_0}\eta_0}{e^{\eta_0+\tau}(\eta_0+\tau)} + O(1/\eta_0)$$

de donde se sigue

$$|V(\eta_0+\tau)| \leq 1 - \frac{\eta_0}{\eta_0+\tau}e^{-\tau} + O(1/\eta_0)$$

sumando y restando $e^{-\tau}$ llegamos a

$$|V(\eta_0+\tau)| \leq 1 - e^{-\tau} + \frac{\tau}{\eta_0+\tau}e^{-\tau} + O(1/\eta_0)$$

y así se tiene

$$|V(\eta_0+\tau)| \leq 1 - e^{-\tau} + O(1/\eta_0)$$

luego como $1 - e^{-\tau} \leq \tau$

$$|V(\eta_0+\tau)| \leq \tau + O(1/\eta_0).$$

Hacemos la integral que queremos demostrar y obtenemos

$$\int_0^\alpha |V(\eta_0+\tau)|d\tau \leq \int_0^\alpha \tau d\tau = \frac{\alpha^2}{2} + O(1/\eta_0).$$

□

Vamos a definir

$$\delta := \frac{3\alpha^2+4A}{2\alpha} > \alpha$$

y tomamos ζ cualquier número positivo, vamos a ver el comportamiento $V(\eta)$ en cada intervalo $\zeta \leq \eta \leq \zeta + \delta - \alpha$.

Por la definición de $V(\eta)$, vemos que es decreciente de forma continua salvo en los puntos donde es discontinua que crece. Por lo que deducimos que solo puede cambiar de positivo a negativo pasando por el 0 y de negativo a positivo en alguna discontinuidad que se produce cuando $\eta = \log p^m$ con p primo y m algún número natural.

En cada intervalo tenemos tres casos posibles:

1. $V(\eta_0) = 0$ para algún η_0.

2. $V(\eta)$ cambia de signo una sola vez.

3. $V(\eta)$ no cambia de signo.

Usando los dos teoremas anteriores y (6.8) calcularemos las integrales en cada tipo de intervalo.

Caso 1:

$$\begin{aligned}
\int_{\zeta}^{\zeta+\delta} |V(\eta)|d\eta &= \int_{\zeta}^{\eta_0} |V(\eta)|d\eta + \int_{\eta_0}^{\eta_0+\alpha} |V(\eta)|d\eta + \int_{\eta_0+\alpha}^{\zeta+\delta} |V(\eta)|d\eta \\
&\leq \alpha(\eta_0 - \zeta) + \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(\zeta + \delta - \eta_0 - \alpha) + o(1) \\
&= \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(\delta - \alpha) + o(1) = \alpha\left(\delta - \alpha + \frac{\alpha}{2}\right) + o(1) \\
&= \alpha\left(\delta - \frac{\alpha}{2}\right) + o(1) = \alpha'\delta + o(1)
\end{aligned}$$

con $\alpha' = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2\delta}\right) < \alpha$.

Caso 2: Suponemos el cambio de signo en algún η_1, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\zeta}^{\zeta+\delta} |V(\eta)|d\eta &= \int_{\zeta}^{\eta_1} |V(\eta)|d\eta + \int_{\eta_1}^{\zeta+\delta-\alpha} |V(\eta)|d\eta + \int_{\zeta+\delta-\alpha}^{\zeta+\delta} |V(\eta)|d\eta \\
&= \left|\int_{\zeta}^{\eta_1} V(\eta)d\eta\right| + \left|\int_{\eta_1}^{\zeta+\delta-\alpha} V(\eta)d\eta\right| + \int_{\zeta+\delta-\alpha}^{\zeta+\delta} |V(\eta)|d\eta \\
&\leq A + A + \int_{\zeta+\delta-\alpha}^{\zeta+\delta} (\alpha + o(1))d\eta \\
&= 2A + \alpha^2 + o(1) = \alpha''\delta + o(1)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \frac{2A + \alpha^2}{\delta} = \frac{2A + \alpha^2}{\dfrac{3\alpha^2 + 4A}{2\alpha}} = \frac{4A\alpha + 2\alpha^3}{4A + 3\alpha^2} = \alpha\left(\frac{4A + 2\alpha^2 \pm \alpha^2}{4A + 3\alpha^2}\right) \\
&= \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{4A + 3\alpha^2}\right) = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2\delta}\right) = \alpha'.
\end{aligned}$$

Caso 3: $V(\eta)$ no cambia de signo, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\zeta}^{\zeta+\delta} |V(\eta)| d\eta &= \int_{\zeta}^{\zeta+\delta-\alpha} |V(\eta)| d\eta + \int_{\zeta+\delta-\alpha}^{\zeta+\delta} |V(\eta)| d\eta \\
&= \left| \int_{\zeta}^{\zeta+\delta-\alpha} V(\eta) d\eta \right| + \int_{\zeta+\delta-\alpha}^{\zeta+\delta} |V(\eta)| d\eta \\
&\leq A + \int_{\zeta+\delta-\alpha}^{\zeta+\delta} (\alpha + o(1)) d\eta \\
&= A + \alpha^2 + o(1) \leq 2A + \alpha^2 + o(1) = \alpha'' \delta + o(1)
\end{aligned}$$

y se sigue como en el caso 2.

En resumen, tenemos siempre que

$$\int_{\zeta}^{\zeta+\delta} |V(\eta)| d\eta \leq \alpha' \delta + o(1).$$

Tomamos $M = \left[\frac{\xi}{\delta}\right]$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\xi} |V(\eta)| d\eta &= \sum_{m=0}^{M-1} \int_{m\delta}^{(m+1)\delta} |V(\eta)| d\eta + \int_{M\delta}^{\xi} |V(\eta)| d\eta \\
&\leq \alpha' \delta M + o(M) + (\alpha + o(1))(\xi - [\xi/\delta]\delta) \\
&= \alpha' \delta [\xi/\delta] + o(\xi) + O(1) = \alpha' \xi + o(\xi).
\end{aligned}$$

Finalmente vemos que

$$\beta := \limsup_{\xi \to \infty} \frac{1}{\xi} \int_{0}^{\xi} |V(\eta)| d\eta \leq \limsup_{\xi \to \infty} \left(\frac{1}{\xi} \alpha' \xi + o(\xi) \right) = \alpha' < \alpha. \qquad (6.10)$$

Tenemos entonces que si $\alpha > 0$ entonces por (6.9) que $\alpha < \beta$ y por (6.10) que $\alpha > \beta$, que se contradicen por lo que $\alpha = 0$.

Entonces como

$$\alpha := \limsup_{\xi \to +\infty} |V(\xi)| = 0$$

tenemos que

$$\lim_{\xi \to +\infty} V(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} e^{-\xi} R(e^{\xi}) = 0,$$

que con el cambio de variable $x = e^{\xi}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{x} = 0.$$

Como $R(x) = o(x)$, entonces $R(x) = \Psi(x) - x = o(x)$. Por tanto, tenemos $|\Psi(x) - x| = o(x)$ que con el Lema 3.2 nos da

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| = \frac{2\,o(x)}{\log x} + 2\,o(\sqrt{x}) + B\sqrt{x} = o\left(\frac{x}{\log x}\right) + O(\sqrt{x}) = o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

como queríamos probar. Por tanto, queda probado el Teorema de los Números Primos.

Bibliografía

[Apo] Apostol, T. M., *Introducción a la teoría analítica de números*, Reverté, Barcelona, 1980.

[BD] Bateman, P. T., Diamond, H. G., *Analytic Number Theory: an Introductory Course*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2004.

[Dia] Diamond, H. G., *Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers*, Bull. Amer. Math. Soc., **7** (1982), 553–589.

[Erd] Erdös, P.,*On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Scis. U.S.A. **35** (1949), 374—384.

[Gol] Goldfeld, D., *The elementary proof of the Prime Number Theorem: an historical perspective.* In: Chudnovsky, D., Chudnovsky, G., Nathanson, M., (eds), *Number Theory*, Springer, New York, 2004.

[HW] Hardy G. H., Wright, E. M., *An introduction to the theory of numbers*, 4ª ed, Oxford, 1968.

[Selb] Selberg, A., *An elementary proof of the prime number theorem.* Ann. of Math., **50** (1949), 305-313.

[Wri] Wright, E. M., *XVIII.—The Elementary Proof of the Prime Number Theorem.* Proc. of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematical and Physical Sciences, **63** (1952), pp. 257–267.