Tampereen yliopisto

Justus Ukkola

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖRYHMIEN RATKAISEMINEN

Kaksimassaisen oskillaattorin värähtely

Kandidaatintyö
Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Tarkastaja: Yliopisto-opettaja Mika Mattila
Helmikuu 2023

TIIVISTELMÄ

Justus Ukkola: Differentiaaliyhtälöryhmien ratkaiseminen
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Helmikuu 2023

Kirjoitelmassa keskitytään kolmeen eri differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisumenetelmään, joita ovat eliminointimenetelmä, Cramerin sääntö ja ominaisarvomenetelmä. Eliminointimenetelmä on yhtälöpareista tuttu menetelmä, jota sovelletaan tässä työssä differentiaaliyhtälöpareihin. Eliminointimenetelmää varten käsitellään esitiedoissa operaattorit ja niiden vaihdannaisuus. Operaattorit ovat kirjoitelmassa keskeisessä asemassa ja niitä hyödynnetään jatkuvasti.

Cramerin säännön avulla voidaan ratkaista matriisimuodossa olevia differentiaaliyhtälöpareja determinantin avulla. Determinanttien laskemisen takia menetelmä ei ole tehokas differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseen, mutta soveltuu differentiaaliyhtälöpareille. Cramerin sääntöä käyttäen saadaan johdettua differentiaaliyhtälöparille eliminaatiomenetelmästä saatua tulosta vastaava tulos.

Kirjoitelma käsittelee ominaisarvo-ongelmaa esimerkin kautta ja hyödyntää ominaisarvomenetelmää myöhemmin oskillaattorin vapaan värähtelyn tutkimiseen. Ominaisarvo-ongelmassa matriisimuotoisia differentiaaliyhtälöryhmiä ratkaistaan hyödyntäen ominaisarvoja ja ominaisvektoreita.

Kaksimassainen oskillaattori on systeemi, jossa on kaksi kappaletta, jotka ovat kiinni toisissaan jousilla. Kappaleet ovat tämän lisäksi kiinnitetty systeemin laitoihin jousilla. Newtonin toista lakia sekä Hooken lakia hyödyntäen saadaan oskillaattorille johdettua värähtelyyn liittyvät differentiaaliyhtälöt. Pakotetun värähtelyn, eli värähtelyn, jossa kappaleeseen vaikuttaa koko ajan vakiovoima, ratkaisu saadaan Cramerin sääntöä hyödyntäen. Epähomogeenisten differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisut haetaan määräämättömien kertoimien menetelmällä. Vapaan värähtelyn, eli värähtelyn, jossa kappaleeseen ei vaikuta voimia, ratkaisu saadaan ominaisarvomenetelmää hyödyntäen. Vapaan värähtelyn differentiaaliyhtälöpari on pakotettua värähtelyä vastaava, mutta homogeeninen differentiaaliyhtälöpari.

Avainsanat: differentiaaliyhtälö, differentiaaliyhtälöryhmä, Cramer, eliminaatiomenetelmä, oskillaattori

ALKUSANAT

Haluan kiittää sponsoreita ja faneja, sillä ilman teitä tämän työn kirjoittaminen ei olisi onnistunut.

Tampereella, 20. helmikuuta 2023

Justus Ukkola

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

e	Neperin luku
$\vec{e}_n$	ominaisvektori
$\vec{q}_n$	vektori
$f_n(t)$	funktio
L_n	operaattori
$\mathbb{R}$	reaaliluvut

1. JOHDANTO

Differentiaaliyhtälöillä on rooli lähes jokaisella fysiikan alalla. Tämä lisäksi niitä käytetään muun muassa matematiikassa ja kemiassa. Kirjoitelmassa käydään läpi kolme menetelmää, joilla voidaan differentiaaliyhtälöryhmiä ratkaista. Menetelmiä varten ensiksi tarkastellaan Cramerin sääntöä, operaattoreita ja niiden vaihdannaisuutta sekä trigonometristen funktioiden superpositiota.

Kolmannessa luvussa käsitellään ensiksi eliminointimenetelmää differentiaaliyhtälöryhmien yhteydessä. Eliminointimenetelmän jälkeen tutustutaan Cramerin säännön käyttämiseen differentiaaliyhtälöparia ratkaistaessa. Viimeisenä kolmannessa luvussa käsitellään ominaisarvo-ongelmaa, jolla saadaan ratkaistua homogeenisia vakiokertoimisia differentiaaliyhtälöryhmiä ominaisarvojen avulla.

Käsiteltyjä menetelmiä hyödynnetään neljännessä luvussa kaksimassaisen oskillaattorin värähtelyn tutkimiseen. Ensiksi tutkitaan oskillaattorin pakotettua värähtelyä, jonka ratkaisemiseen käytetään Cramerin sääntöä ja määräämättömien kertoimien menetelmää. Tämän jälkeen keskitytään oskillaattorin vapaaseen värähtelyyn ominaisarvo-ongelmana.

Kirjoitelma pohjautuu pitkälti lähteeseen [2, s. 318–319, s. 436–464] ja olettaa lukijalta homogeenisten ja epähomogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen ymmärtämisen. Tämän lisäksi kirjoitelma vaatii jonkin verran lineaarialgebran ymmärrystä.

2. ESITIEDOT

2.1 Cramerin sääntö

Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää $Ax = b$, missä A on kääntyvä $n \times n$-matriisi, vektori $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ja $\det(A) \neq 0$. Tällöin lineaarisella yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu ja yhtälöryhmä voidaan ratkaista käyttämällä Cramerin sääntöä.

Lause 2.1. *Jos lineaarisella yhtälöryhmällä $Ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu, voidaan se ratkaista kaavalla,*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \tag{2.1}$$

missä A_i on matriisi A, josta on korvattu sarake $i = 1, 2, \ldots, n$ vektorilla b.

Todistus. Olkoon A yhtälöryhmän muuttujien kertoimista muodostettu matriisi. Matriisista A poistamalla i. rivi ja j. sarake, saadaan uusi matriisi M_{ij}. Jokaiselle alkiolle a_{ij} määritellään komplementti $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$. Nyt voidaan muodostaan matriisin A adjugoitu matriisi

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathrm{n}1} & \cdots & A_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}.$$

Koska $\det(A) \neq 0$, matriisilla A on käänteismatriisi A^{-1}. Koska matriisi A on kääntyvä, niin sille on voimassa

$$A\left(\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}\right) = I = \left(\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}\right)A.$$

Käänteismatriisi A^{-1} voidaan nyt esittää muodossa $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$. Ratkaisuvektori x saadaan näin ollen esitettyä muodossa

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{\mathrm{n}1}}{\det(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{\mathrm{nn}}}{\det(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan merkitä $x_i = \frac{A_{1i}}{\det(A)} b_1 + \cdots + \frac{A_{ni}}{\det(A)} b_n$. Olkoon

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & \dots & a_{\mathrm{ni}-1} & b_n & a_{\mathrm{ni}+1} & \dots & a_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}.$$

Matriisin A_i determinantti voidaan nyt kirjoittaa muodossa $\det(A_i) = A_{1i} b_1 + \cdots + A_{ni} b_n$. Täten saadaan $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$. □

2.2 Operaattorimuoto

Differentiaaliyhtälö on yleisesti muotoa $L(x) = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x)$. Se voidaan myös kirjoittaa vaihtoehtoisesti **operaattorimuodossa**.

Määritelmä 2.2. Differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $Lx = a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$, jossa $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$. Tätä muotoa kutsutaan operaattorimuodoksi.

Lause 2.3. *Kaksi operaattoria L_1 ja L_2 ovat yhtä suuria kaikilla operaattoreiden määrittelyjoukkoon kuuluvilla muuttujan x arvoilla, jos ja vain jos $L_1(x) = L_2(x)$. Tällöin voidaan merkitä $L_1 = L_2$.*

Huomautus 2.4. Differentiaalioperaattorit eivät yleisesti ottaen ole vaihdannaisia, eli $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$.

Esimerkki 2.5. Valitaan operaattorit $L_1 = D$ ja $L_2 = yD$. Nyt $L_1 L_2(x) = D(yD)x = D(yx') = y(Dx') + (Dy)x' = yx'' + x'$ ja vastaavasti $L_2 L_1(x) = (yD)(D)x = (yD)(x') = yx''$.

Differentiaalioperaattorit kuitenkin ovat vaihdannaisia, jos jokainen kerroin a_j on vakio.

Lause 2.6. *Operaattorit ovat vaihdannaisia, jos ne ovat muotoa $Lx = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_0$.*

Havainnollistetaan todistuksen ideaa samoilla operaattoreilla, joilla aiemmin näytettiin, että operaattorit eivät ole vaihdannaisia. Nyt kuitenkin y on vakio, eli $L_1 = D$ ja $L_2 = yD$. Saadaan $L_1 L_2(x) = D(yD)x = D(yx') = yDx' = yx''$. Vastaavasti toisinpäin $L_2 L_1(x) = (yD)(D)x = yDx' = yx'' = L_1 L_2$. Tämä voidaan yleistää kaikille vakiokertoimisille operaattoreille.

2.3 Superpositio

Välillä saattaa olla hyödyllistä esittää trigonometristen funktioiden superpositio yhden funktion avulla. Valitaan mielivaltaiset nollasta eroavat reaaliluvut A ja B. Muodostetaan funktioiden $x(t) =$

$A\sin(\omega t)$ ja $y(t) = B\cos(\omega t)$ superpositio

$$z(t) = x(t) + y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t). \tag{2.2}$$

Tämä superpositio voidaan esittää muodossa

$$z(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \phi), \text{missä } C \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Lause 2.7. *Kahden funktion $x(t) = A\sin(\omega t)$ ja $y(t) = B\cos(\omega t)$ superpositio voidaan esittää muodossa $z(t) = C\sin(\omega t + \phi)$.*

Todistus. Osoitetaan yhtäsuuruus $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \phi)$. Käyttämällä trigonometristä identiteettiä $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ saadaan yhtälön oikea puoli muotoon

$$C\sin(\omega t + \phi) = C\sin(\omega t)\cos(\phi) + C\sin(\phi)\cos(\omega t).$$

Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön, jolloin alkuperäinen yhtälö sievenee muotoon

$$(A - C\cos(\phi))\sin(\omega t) + (B - C\sin(\phi))\cos(\omega t) = 0.$$

Jotta yhtälö pätee, täytyy kertoimien olla nolla. Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} A = C\cos(\phi) \\ B = C\sin(\phi) \end{cases}.$$

Korotetaan yhtälöparin molemmat yhtälöt puolittain potenssiin kaksi. Tämän jälkeen summataan yhtälöt keskenään, josta saadaan yhtälö

$$A^2 + B^2 = C^2\cos^2(\phi) + C^2\sin^2(\phi).$$

Käyttämällä yhtälöä $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ saadaan yhtälö ratkaistua muuttujan C suhteen. Yhtälö sievenee muotoon

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Jaetaan seuraavaksi yhtälöparin (2.3) ylempi yhtälö alemmalla. Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)},$$

joka sievenee muotoon

$$\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right).$$

Täten $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \phi)$. $\square$

3. RATKAISUMENETELMÄT

3.1 Eliminointimenetelmä

Lineaarisia differentiaaliyhtälöryhmiä voidaan ratkaista eliminointimenetelmällä samalla tavalla kuten tavallisia yhtälöryhmiä. Eliminointimenetelmä rajoittuu vaihdannaisiin differentiaalioperaattoreihin, joita ovat Lauseen 2.6 mukaan vakiokertoimiset operaattorit. Jos lineaarinen differentiaaliyhtälöpari on muotoa

$$L_1(x) + L_2(y) = f_1(t), \tag{3.1}$$

$$L_3(x) + L_4(y) = f_2(t), \tag{3.2}$$

voidaan se ratkaista kertomalla ylempi yhtälö vasemmalta operaattorilla L_3 ja alempi operaattorilla L_1. Yhtälöt saadaan muotoon

$$L_3L_1(x) + L_3L_2(y) = L_3(f_1(t)),$$

$$L_1L_3(x) + L_1L_4(y) = L_1(f_2(t)).$$

Koska operaattorit ovat vaihdannaisia, vähentämällä yhtälöt toisistaan puolittain päästään eroon termistä, joka riippuu funktiosta $x(t)$. Jäljelle jäävä yhtälö on muotoa $L_3L_1(x) - L_1L_3(x) + L_3L_2(y) - L_1L_4(y) = L_3(f_1(t)) - L_1(f_2(t))$, joka supistuu muotoon

$$(L_3L_2 - L_1L_4)(y) = L_3(f_1(t)) - L_1(f_2(t)). \tag{3.3}$$

Vastaavasti saadaan ratkaistua funktio $x(t)$ kertomalla yhtälöä (3.1) operaattorilla L_4 ja yhtälöä (3.1) operaattorilla L_2. Kun nämä vähennetään samalla tavalla toisistaan, saadaan yhtälö muotoon $L_4L_1(x)+L_4L_2(y)-L_2L_3(x)-L_2L_4(y) = L_4(f_1(t))-L_2(f_2(t))$, joka saadaan edelleen supistettua muotoon

$$(L_4L_1 - L_2L_3)(x) = L_4(f_1(t)) - L_2(f_2(t)). \tag{3.4}$$

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä

$$(D - 1)x + Dy = 0, \tag{3.5}$$

$$(D + 1)x + (2D + 2)y = 0. \tag{3.6}$$

Muutetaan yhtälöt (3.5) ja (3.6) muotoon

$$L_1(x) + L_2(y) = 0, \tag{3.7}$$

$$L_3(x) + L_4(y) = 0. \tag{3.8}$$

Nyt $L_1 = D - 1$, $L_2 = D$, $L_3 = D + 1$ ja $L_4 = 2D + 2$. Voidaan seuraavaksi kertoa yhtälö (3.7) vasemmalta operaattorilla L_3 ja yhtälö (3.8) vasemmalta operaattorilla L_1. Tällöin yhtälöt saadaan muotoon

$$L_3L_1(x) + L_3L_2(y) = L_3(0), \tag{3.9}$$

$$L_1L_3(x) + L_1L_4(y) = L_1(0). \tag{3.10}$$

Koska operaattorit ovat vaihdannaisia, niin $L_3L_1 = L_1L_3$. Nyt voidaan vähentää alempi yhtälö ylemmästä, mikä tuottaa differentiaaliyhtälön $L_3L_1(x) + L_3L_2(y) - L_1L_3(x) - L_1L_4(y) = L_3(0) - L_1(0)$, joka sievenee edelleen muotoon $L_2L_3(y) - L_1L_4(y) = L_3(0) - L_1(0)$. Operaattorien lineaarisuuden myötä differentiaaliyhtälö saadaan muotoon $(L_2L_3 - L_1L_4)(y) = L_3(0) - L_1(0)$. Nyt voidaan sijoittaa aiemmin määrätyt arvot operaattorien paikalle,

$$L_2L_3 - L_1L_4 = D(D + 1) - (D - 1)(2D + 2)$$

$$= D^2 + D - (2D^2 + 2D - 2D - 2) = D^2 + D - 2D^2 + 2 = -D^2 + D + 2,$$

ja vastaavasti yhtälön oikea puoli saadaan muotoon $L_3(1) - L_1(t) = D(0) - (D-1)(0) = 0 - 0 + 0 = 0$. Nyt differentiaaliyhtälö on muotoa $(-D^2 + D + 2)(y) = 0$, josta viimein saamme sen muotoon

$$-y'' + y' + 2y = 0. \tag{3.11}$$

Ratkaistaan homogeeninen differentiaaliyhtälö $(-D^2 + D + 2)y = 0$. Ratkaistaan ensin karakteristisen yhtälön $-\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ juuret. Juuriksi saadaan $\lambda = -1$ ja $\lambda = 2$. Yleinen ratkaisu on muotoa $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2x}$.

Ratkaistaan $x(t)$ samalla idealla. Nyt kerrotaan yhtälö (3.9) operaattorilla L_4 ja yhtälö (3.10) operaattorilla L_2. Vähennetään yhtälöt puolittain keskenään, jolloin saadaan

$$L_4L_1(x) - L_2L_3(x) + L_4L_2(y) - L_2L_4(y) = L_4(0) - L_2(0).$$

Yhtälö saadaan taas yhden muuttujan differentiaaliyhtälöksi $(L_4L_1 - L_2L_3)(x) = L_4(0) - L_2(0)$. Nyt

$$L_4L_1 - L_2L_3 = (2D + 2)(D - 1) - D(D + 1) = 2D^2 - 2D + 2D - 2 - D^2 - D = D^2 - D - 2.$$

Vastaavasti yhtälön oikea puoli $L_4(0) - L_2(0) = 2D(0) + 2(0) - D(0) = 0$. Ratkaistaan homogeeninen differentiaaliyhtälö $(D^2 - D - 2)x = 0$. Karakteristisen yhtälön juuret ovat -1 ja 2. Tästä saadaan yleinen ratkaisu $x(t) = d_1e^{-t} + d_2e^{2x}$.

3.2 Matriisimuodossa ratkaiseminen

Lineaarisen differentiaaliyhtälöparin yhtälöiden ollessa muotoa (3.1) ja (3.2) voidaan pari ratkaista myös matriisien avulla. Yhtälöpari voidaan esittää matriisien avulla muodossa

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Lauseen 2.1 mukaan tämä voidaan ratkaista hyödyntämällä kaavaa $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$. Kaavaa käyttämällä saamme tulokseksi

$$x = \frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}} = \frac{L_4(f_1(t)) - L_2(f_2(t))}{L_1L_4 - L_3L_2}, \tag{3.13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix}} = \frac{L_1(f_2(t)) - L_3(f_1(t))}{L_1L_4 - L_3L_2}. \tag{3.14}$$

Huomataan, että tulos vastaa eliminaatiomenetelmällä saatuja yhtälöitä (3.4) ja (3.3).

Esimerkki 3.2. Tehdään sama Esimerkki 3.1 matriisien avulla, mutta muutetaan yhtälö epähomogeeniseksi siten, että $f_1(t) = f_2(t) = t$. Esitetään yhtälöiden (3.5) ja (3.6) muodostama yhtälöpari matriisien avulla muodossa $\begin{bmatrix} D-1 & D \\ D+1 & 2D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$. Koska yhtälöryhmä on selvästi lineaarinen, voidaan sen ratkaisemiseksi käyttää Cramerin sääntöä. Voidaan merkitä $A = \begin{bmatrix} D-1 & D \\ D+1 & 2D+2 \end{bmatrix}$. Tästä lasketaan determinantti

$$\det(A) = (D-1)(2D+2) - (D+1)D = 2D^2 + 2D - 2D - 2 - D^2 - D = D^2 - D - 2,$$

joka selvästi eroaa nollasta. Käyttämällä yhtälöä (3.13) saadaan $x = \frac{(2D+2)(t)-(D+1)(t)}{D^2-D-2}$. Nyt kerrotaan nimittäjä toiselle puolelle, jolloin pääsemme muotoon

$$(D^2 - D - 2)x = (2D+2)(t) - (D+1)(t).$$

Tämä voidaan laskea auki

$$x'' - x' - 2x = 2 + 2t - 1 - t,$$

ja sieventää muotoon

$$x'' - x' - 2x = t + 1.$$

Homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on aiemmin laskettu, josta saatiin $x(t) = d_1e^{-t} + d_2e^{2x}$. Tästä esimerkiksi Greenin fuktiota käyttäen saadaan epähomogeeniselle differentiaaliyhtälölle yleinen ratkaisu $x(t) = d_1e^{-t} + d_2e^{2x} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$. Vastaavasti voidaan ratkaista $y(t)$ hyödyntämällä yhtälöä (3.14), jolloin saadaan $y = \frac{(D-1)(t)-(D+1)(t)}{(D-1)(2D+2)-(D+1)D}$. Kerrotaan taas puolittain nimittäjällä, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
((D-1)(2D+2) - (D+1)D)(y) &= (D-1)(t) - (D+1)(t), \\
(2D^2 + 2D - 2D - 2 - D^2 - D)(y) &= 1 - t - 1 - t, \\
(D^2 - D - 2)(y) &= -t^2, \\
y'' - y' - 2y &= -t^2.
\end{aligned}
$$

Tämä voidaan taas ratkaista esimerkin 3.1 tulosta ja Greenin funktiota käyttäen. Yleiseksi ratkaisuksi saadaan $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$.

3.3 Ominaisarvo-ongelma

Vakiokertoimiset homogeeniset differentiaaliyhtälöryhmät voidaan ratkaista käyttämällä eksponenttiyritettä ja ratkaisemalla tämän jälkeen saatu ominaisarvo-ongelma.

Lause 3.3. *Ongelman ollessa muotoa $x' = Ax$, missä A on $n \times n$ vakiokertoiminen matriisi, voidaan käyttää yritettä $x(t) = \vec{q}e^{rt}$, missä $\vec{q}$ on matriisin A ominaisvektori. Sijoittamalla yrite differentiaaliyhtälöön saadaan $A\vec{q}e^{rt} = r\vec{q}e^{rt}$, joka sievenee muotoon $A\vec{q} = r\vec{q}$.*

Esimerkki 3.4. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$
\begin{cases}
x' = 9x + 10y + 9z \\
y' = -6x - 5y - 3z \\
z' = x - z
\end{cases}.
$$

Käytetään eksponenttiyritettä $x(t) = q_1e^{rt}$, $y(t) = q_2e^{rt}$ ja $z(t) = q_3e^{rt}$. Saadaan yhtälöryhmä muotoon

$$
\begin{cases}
rq_1 = 9q_1 + 10q_2 + 9q_3 \\
rq_2 = -6q_1 - 5q_2 - 3q_3 \\
rq_3 = q_1 - q_3
\end{cases}.
$$

Tämä saadaan lauseen 3.3 mukaisesti differentiaaliyhtälöryhmä matriisimuotoon

$$
\begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 \\ -6 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}
= r \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.
$$

Valitaan r siten, että yhtälö antaa epätriviaalin ratkaisun, eli jonkin muun kuin $\vec{q} = 0$. Kyseessä on ominaisarvo-ongelma, joten valitaan r yhtä suureksi ominaisarvon λ kanssa. Ratkaistaan nyt matriisin ominaisarvot. Saadaan yhtälö

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 10 & 9 \\ -6 & -5-\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

josta saadaan

$$1\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ -5-\lambda & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 9-\lambda & 9 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & 10 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix},$$

$$= 10(-3) - 9(-5-\lambda) + (-1-\lambda)((9-\lambda)(-5-\lambda) - 10(-6)),$$

$$= 15 + 9\lambda + (-1-\lambda)(15 - 4\lambda + \lambda^2) = 0,$$

joka sievenee muotoon

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Otetaan λ yhteiseksi tekijäksi, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$-\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0,$$

joka edelleen sievenee muotoon

$$-\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2),$$

$$= -\lambda(\lambda(\lambda-1) - 2(\lambda-1)),$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0.$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = 2$. Etsitään ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Ominaisarvoa $\lambda_1 = 0$ vastaava ominaisvektori saadaan yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 \\ -6 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

joka sievenee muotoon

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 9 \\ -6 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Käytetään Gaussin eliminointimenetelmää, jolloin saadaan matriisi redusoituun porrasmuotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tästä saadaan $q_1 = q_3$ ja $q_2 = -\frac{9}{5}q_3$. Ominaisvektori on siis $\vec{e_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{9}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$. Ratkaistaan seuraavaksi ominaisarvoa $\lambda_2 = 1$ vastaava ominaisvektori yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} 9-1 & 10 & 9 \\ -6 & -5-1 & -3 \\ 1 & 0 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

joka saadaan Gaussin eliminaatiota käyttämällä muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Saadaan relaatiot $q_1 = 2q_3$ ja $q_2 = \frac{5}{2}q_3$, josta ominaisvektoriksi saadaan $\vec{e_2} = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Ratkaistaan vielä ominaisarvoa $\lambda_3 = 2$ vastaava ominaisvektori yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} 9-2 & 10 & 9 \\ -6 & -5-2 & -3 \\ 1 & 0 & -1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

joka Gaussin eliminaatiota käyttämällä sievenee muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Relaatioiksi saadaan $q_1 = 3q_3$ ja $q_2 = -3q_3$, joten ominaisvektori on muotoa $\vec{e_3} = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Yleinen ratkaisu on muotoa

$$\vec{x}(t) = \vec{e_1}e^{\lambda_1 t} + \vec{e_2}e^{\lambda_2 t} + \vec{e_3}e^{\lambda_3 t}. \tag{3.15}$$

Sijoitetaan ominaisarvot ja ominaisvektorit yhtälöön (3.15), josta yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$\vec{x}(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{9}{5} \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t},$$

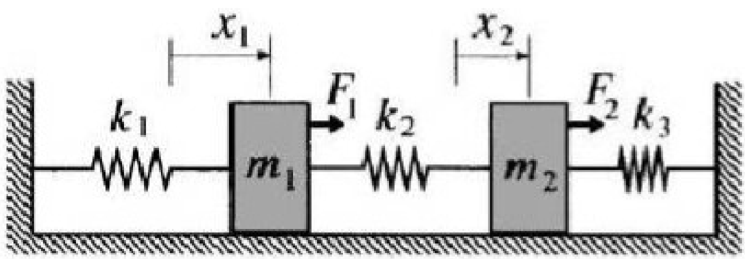
joka voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 2\beta e^{t} + 3\gamma e^{2t} \\ y(t) = -\frac{9}{5}\alpha + \frac{5}{2}\beta e^{t} - 3\gamma e^{2t} \\ z(t) = \alpha + \beta e^{t} + \gamma e^{2t} \end{cases}.$$

4. OSKILLAATTORIT

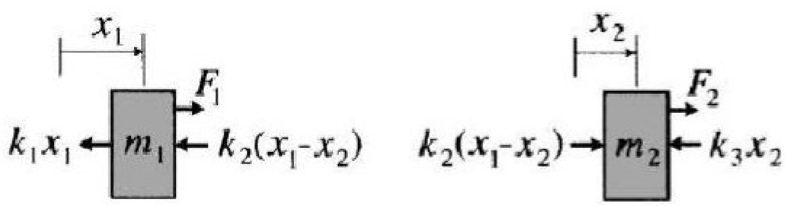
4.1 Pakotettu värähtely

Tarkastellaan systeemiä, jossa on kaksi oskillaattoria yhdistettynä toisiinsa jousen avulla.



Kuva 4.1. *Kaksimassainen oskillaattori.[1, s. 230]*

Oletetaan, että massat ovat kitkattomalla alustalla ja niihin vaikuttavat vain voimat F_1 ja F_2. Tällöin oleellisia fysiikan lakeja ovat Newtonin toinen laki $F = ma$ sekä Hooken laki $F = -kx$. Kun muuttujilla x_1 ja x_2 merkitään kummankin jousen poikkeamaa tasapainoasemasta ja $x_1 = x_2 = 0$, jouset eivät ole puristuneet tai venyneet. Tehdään vielä oletus, että $x_1 > x_2 > 0$. Nyt voidaan piirtää voimakuviot molemmille kappaleille erikseen.



Kuva 4.2. *Vapaakappale kuvat.[1, s. 230]*

Jos vasenta jousta, jonka jousivakio on k_1, venytetään tasapainoasemastaan x_1 pituusyksikön verran, se kohdistaa massaan m_1 voiman $F = k_1x_1$. Tällöin keskimmäinen jousi, jonka jousivakio on k_2, puristuu erotuksen $x_1 - x_2$ verran ja kohdistaa massaan m_1 voiman $F = k_2(x_1 - x_2)$. Massaan m_2 keskimmäinen jousi kohdistaa myös saman voiman $F = k_2(x_1 - x_2)$ Newtonin kolmannen lain mukaisesti (voiman ja vastavoiman laki). Oikea jousi, jonka jousivakio on k_3, puristuu venymän x_2 verran ja aiheuttaa voiman $F = k_3x_2$ massaan m_2. Newtonin toisen lain mukaisesti kuvasta 4.2

voidaan massalle m_1 johtaa yhtälö

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_1(t),$$

joka tulee muotoon

$$m_1 x_1'' + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_1(t). \tag{4.1}$$

Samalla tavalle massalle m_2 saadaan yhtälö,

$$m_2 x_2'' = -k_3 x_2 + k_2(x_1 - x_2) + F_2(t),$$

eli

$$m_2 x_2'' + k_3 x_2 - k_2(x_1 - x_2) = F_2(t). \tag{4.2}$$

Yksinkertaistukseksi oletetaan oskillaattorien ja jousien olevan identtisiä, jolloin $m_1 = m_2$ ja $k_1 = k_2 = k_3$. Ongelman yksinkertaistamiseksi vielä entisestään valitaan massaksi ja jousivakioksi 1, sekä annetaan voimille arvot $F_1(t) = F\sin(\Omega t)$ ja $F_2(t) = 0$. Tällöin saamme yhtälöt (4.1) ja (4.2) muotoon

$$x_1'' + 2x_1 - x_2 = F\sin(\Omega t), \tag{4.3}$$

$$x_2'' + 2x_2 - x_1 = 0. \tag{4.4}$$

Yhtälöt (4.3) ja (4.4) voidaan esittää operaattorimuodossa

$$(D^2 + 2)x_1 - x_2 = F\sin(\Omega t), \tag{4.5}$$

eli

$$-x_1 + (D^2 + 2)x_2 = 0. \tag{4.6}$$

Nyt merkitään $L_1 = D^2 + 2$, $L_2 = -1$, $L_3 = -1$, $L_4 = D^2 + 2$, $f_1 = F\sin(\Omega t)$ ja $f_2 = 0$. Kaavaa (3.13) käyttämällä saadaan,

$$(L_1 L_4 - L_3 L_2)(x_1) = L_4(f_1(t)) - L_2(f_2(t)),$$

$$((D^2 + 2)(D^2 + 2) - (-1)(-1))(x_1) = (D^2 + 2)(F\sin(\Omega t)) - (-1)(0),$$

$$((D^4 + 2D^2 + 2D^2 + 4) - 1)(x_1) = -F\omega^2 \sin(\Omega t) + 2F\sin(\Omega t),$$

$$(D^4 + 4D^2 + 3)(x_1) = (-\Omega^2 + 2)F\sin(\Omega t). \tag{4.7}$$

Vastaavasti käyttämällä kaavaa (3.14) saadaan,

$$(L_1 L_4 - L_3 L_2)(x_2) = L_1(f_2(t)) - L_3(f_1(t)),$$

$$((D^2 + 2)(D^2 + 2) - (-1)(-1))(x_2) = (D^2 + 2)(0) - (-1)(F\sin(\Omega t)),$$

$$(D^4 + 4D^2 + 3)(x_2) = F\sin(\Omega t). \tag{4.8}$$

Etsitään yhtälölle (4.7) yleinen ratkaisu. Haetaan ensin homogeenisen differentiaaliyhtälön $(D^4 + 4D^2 + 3)x = 0$ ratkaisu. Ratkaistaan karakteristinen yhtälö $\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0$. Merkitään $\lambda^2 = z$,

jolloin yhtälö saadaan muotoon
$$z^2 + 4z + 3 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa soveltamalla saadaan yhtälön ratkaisuksi

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}.$$

Saadaan juuriksi $z = -2 \pm 1$, eli $z = -3$ ja $z = -1$. Nyt voidaan sijoittaa saadut juuret yhtälöön $\lambda^2 = z$. Sijoitetaan juuri $z = -3$ yhtälöön, jolloin saadaan $\lambda = \pm\sqrt{3}i$. Sijoitetaan sitten juuri $z = -1$, jolloin saadaan $\lambda = \pm i$. Homogeenisen differentiaaliyhtälön yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \cos(\sqrt{3}t) + c_4 \sin(\sqrt{3}t).$$

Ratkaistaan tämä yhtälö määräämättömien kertoimien menetelmällä[3, s. 54]. Funktio $(-\Omega^2 + 2)F \sin(\Omega t)$ ei kuulu homogeenisen differentiaaliyhtälön ratkaisuavaruuteen. Etsitään operaattori, jonka ratkaisuavaruuteen funktio kuuluu. Tällainen operaattori on $L = (D^2 + \Omega^2)$. Ratkaistaan nyt yrite yhtälöstä $Ly = (D^2+\Omega^2)y = 0$. Tästä saadaan yleiseksi ratkaisuksi $y = A \sin(\Omega t)+B \cos(\Omega t)$, jossa A ja B ovat reaalilukuja. Derivoimalla yleistä ratkaisua saadaan

$$\begin{aligned}
y' &= A\Omega \cos(\Omega t) - B\Omega \sin(\Omega t),\\
y'' &= -A\Omega^2 \sin(\Omega t) - B\Omega^2 \cos(\Omega t),\\
y^{(3)} &= -A\Omega^3 \cos(\Omega t) + B\Omega^3 \sin(\Omega t),\\
y^{(4)} &= A\Omega^4 \sin(\Omega t) + B\Omega^4 \cos(\Omega t).
\end{aligned}$$

Sijoitetaan saadut derivaatat alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön ja saadaan

$$(D^4 + 4D^2 + 3)(y) = (-\Omega^2 + 2)F \sin(\Omega t),$$

$$\begin{aligned}
A\Omega^4 \sin(\Omega t) + B\Omega^4 \cos(\Omega t) + 4(-A\Omega^2 \sin(\Omega t) - B\Omega^2 \cos(\Omega t)) + 3(A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t))&\\
= (-\Omega^2 + 2)F \sin(\Omega t),&\\
A\Omega^4 \sin(\Omega t) + B\Omega^4 \cos(\Omega t) - 4A\Omega^2 \sin(\Omega t) - 4B\Omega^2 \cos(\Omega t) + 3A \sin(\Omega t) + 3B \cos(\Omega t)&\\
= -(\Omega^2 - 2)F \sin(\Omega t).&
\end{aligned}$$

Otetaan yhteiset tekijät, jolloin yhtälö tulee muotoon

$$(A\Omega^4 - 4A\Omega^2 + (\Omega^2 - 2)F + 3A) \sin(\Omega t) + (B\Omega^4 - 4B\Omega^2 + 3B) \cos(\Omega t) = 0.$$

Tästä saadaan yhtälöpari
$$A\Omega^4 - 4A\Omega^2 + (\Omega^2 - 2)F + 3A = 0, \tag{4.9}$$

eli
$$B\Omega^4 - 4B\Omega^2 + 3B = 0. \tag{4.10}$$

Huomataan, että $B = 0$ ja $A = \frac{(-\Omega^2+2)F}{\Omega^4-4\Omega^2+3} = \frac{(2-\Omega^2)F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}$. Täten epähomogeenisen differentiaaliyhtälön (4.7) yleinen ratkaisu on

$$x_1(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3\cos(\sqrt{3}t) + c_4\sin(\sqrt{3}t) + \frac{(2-\Omega^2)F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t). \quad (4.11)$$

Differentiaaliyhtälölle (4.8) homogeenisen yhtälön ratkaisu on sama kuin yhtälölle (4.7). Ratkaistaan epähomogeeninen differentiaaliyhtälö samalla tavalla kuin edellinen. Funktio $F\sin(\Omega t)$ kuuluu myös operaattorin $L = (D^2 + \Omega^2)$ ratkaisuavaruuteen. Ratkaistaan määräämättömät kertoimet yhtälöstä

$$(A\Omega^4 - 4A\Omega^2 + 3A)\sin(\Omega t) + (B\Omega^4 - 4B\Omega^2 + 3B)\cos(\Omega t) = F\sin(\Omega t),$$

joka tulee muotoon

$$(A\Omega^4 - 4A\Omega^2 + 3A - F)\sin(\Omega t) + (B\Omega^4 - 4B\Omega^2 + 3B)\cos(\Omega t) = 0.$$

Saadaan kertoimiksi $B = 0$ ja $A = \frac{F}{\Omega^4-4\Omega^2+3} = \frac{F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}$. Tästä saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$x_2(t) = c_5\cos(t) + c_6\sin(t) + c_7\cos(\sqrt{3}t) + c_8\sin(\sqrt{3}t) + \frac{F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t). \quad (4.12)$$

Sijoitetaan yleiset ratkaisut $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ yhtälöön (4.6) eli yhtälöön $-x_1+(D^2+2)x_2 = 0$. Lasketaan ensin yleisen ratkaisun $x_2(t)$ toinen derivaatta

$$\frac{d^2}{dt^2}(c_5\cos(t) + c_6\sin(t) + c_7\cos(\sqrt{3}t) + c_8\sin(\sqrt{3}t) + \frac{F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t)),$$

joka saadaan muotoon

$$-c_5\cos(t) - c_6\sin(t) - 3c_7\cos(\sqrt{3}t) - 3c_8\sin(\sqrt{3}t) - \frac{\Omega^2 F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t).$$

Nyt voidaan tehdä sijoitukset yhtälöön (4.6). Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
&-(c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3\cos(\sqrt{3}t) + c_4\sin(\sqrt{3}t) + \frac{(2-\Omega^2)F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t))\\
&-c_5\cos(t) - c_6\sin(t) - 3c_7\cos(\sqrt{3}t) - 3c_8\sin(\sqrt{3}t) - \frac{\Omega^2 F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t)\\
&+2(c_5\cos(t) + c_6\sin(t) + c_7\cos(\sqrt{3}t) + c_8\sin(\sqrt{3}t) + \frac{F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t)) = 0,
\end{aligned}$$

joka sievenee muotoon

$$(c_5 - c_1)\cos(t) + (c_6 - c_2)\sin(t) - (c_7 + c_3)\cos(\sqrt{3}t) - (c_8 + c_4)\sin(\sqrt{3}t) = 0.$$

Jotta yhtälö olisi tosi, täytyy kaikkien kertoimien olla nollia. Täten saadaan muodostettua yhtälöt

$$\begin{cases} c_5 = c_1 \\ c_6 = c_2 \\ c_7 = -c_3 \\ c_8 = -c_4 \end{cases}. \tag{4.13}$$

Käyttämällä yhtälöä (2.3) saadaan yleinen ratkaisu $x_1(t)$ muotoon

$$x_1(t) = G\sin(t+\phi) + H\sin(\sqrt{3}t+\psi) + \frac{(2-\Omega^2)F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t),$$

jossa G, H, ϕ ja ψ ovat vakioita. Yleinen ratkaisu $x_2(t)$ saadaan käyttämällä käyttämällä yhtälöä (2.3), sekä edellä ratkaistuja relaatioita (4.13) muotoon

$$x_2(t) = G\sin(t+\phi) - H\sin(\sqrt{3}t+\psi) + \frac{F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\sin(\Omega t).$$

Vektorimuodossa yleinen ratkaisu saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} \sin(t+\phi) \\ \sin(t+\phi) \end{bmatrix} + H\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t+\psi) \\ -\sin(\sqrt{3}t+\psi) \end{bmatrix} + \frac{F}{(\Omega^2-1)(\Omega^2-3)}\begin{bmatrix} \left(2-\Omega^2\right)\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{bmatrix}.$$

Alkuarvojen avulla tästä voidaan ratkaista parametrien G, H, ϕ, ψ, F ja Ω arvot. Jos oletetaan, että voima $F = 0$, puhutaan fysikaalisesti vapaasta värähtelystä. Tällöin ongelma saadaan yksinkertaistettua entisestään ja yleinen ratkaisu on homogeenisen differentiaaliyhtälöparin ratkaisu, joka vektorimuodossa on

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} \sin(t+\phi) \\ \sin(t+\phi) \end{bmatrix} + H\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t+\psi) \\ -\sin(\sqrt{3}t+\psi) \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

4.2 Vapaa värähtely

Tarkastellaan samaista systeemiä kuin kuvassa 4.1. Tutkitaan vapaata värähtelyä arvoilla $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Koska kyseessä on vapaa värähtely, voidaan ottaa yhtälöt (4.3) ja (4.4) ja sijoittaa $F = 0$. Tästä saadaan yhtälöpariksi

$$\begin{cases} x_1'' + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2'' - x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}. \tag{4.15}$$

Käytetään yritettä $x_1(t) = q_1e^{rt}$ ja $x_2(t) = q_2e^{rt}$. Lasketaan molempien yritteiden derivaatat, josta saadaan

$$\begin{cases} x_1''(t) = q_1r^2e^{rt} \\ x_2''(t) = q_2r^2e^{rt} \end{cases}.$$

Sijoitetaan yritteet yhtälöpariin (4.15), josta saadaan

$$\begin{cases} q_1 r^2 e^{rt} + 2q_1 e^{rt} - q_2 e^{rt} = 0 \\ q_2 r^2 e^{rt} - q_1 e^{rt} + 2q_2 e^{rt} = 0 \end{cases},$$

joka sievenee muotoon

$$\begin{cases} q_1 r^2 + 2q_1 - q_2 = 0 \\ q_2 r^2 - q_1 + 2q_2 = 0 \end{cases}.$$

Kirjoitetaan yhtälöpari matriisimuodossa, josta saadaan

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = r^2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Saadaan ominaisarvo-ongelma, missä $\lambda = r^2$. Lasketaan matriisin $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot. Saadaan yhtälö

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Tämä saadaan skalaarimuotoon

$$(-2-\lambda)^2 - 1 = 0,$$

josta voidaan ratkaista λ

$$4 + 4\lambda + \lambda^2 - 1,$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = -2 \pm 1.$$

Ominaisarvot ovat $\lambda_1 = r_1^2 = -1$ ja $\lambda_2 = r_2^2 = -3$. Ratkaistaan ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Ominaisarvoa $\lambda = -1$ vastaava ominaisvektori saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Tästä saadaan muodostettua yhtälöpari

$$\begin{cases} -q_1 + q_2 = 0 \\ q_1 - q_2 = 0 \end{cases},$$

jonka ratkaisuksi saadaan $q_1 = q_2$. Ominaisvektori $\vec{e_1}$ on täten muotoa $\vec{e_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ratkaistaan seuraavaksi ominaisarvoa $\lambda = -3$ vastaava ominaisvektori. Saadaan yhtälö

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Tästä saadaan ratkaisuksi $q_1 = -q_2$, jota vastaa ominaisvektori $\vec{e_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Aiemmin määritettiin,että $r_1^2 = -1$ ja $r_2^2 = -3$. Näistä saadaan vakiolle r ratkaistua arvot $r_1 = \pm i$ ja $r_2 = \pm\sqrt{3}i$. Yleinen ratkaisu on muotoa

$$x(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{r_1 t} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{r_2 t}.$$

Sijoittamalla vakioiden r_1 ja r_2 arvot saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-it} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{\sqrt{3}it} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-\sqrt{3}it},$$

joka saadaan muotoon

$$x(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \\ c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 e^{\sqrt{3}it} + c_4 e^{-\sqrt{3}it} \\ -c_3 e^{\sqrt{3}it} - c_4 e^{-\sqrt{3}it} \end{bmatrix}.$$

Käyttämällä yhtälöä $ae^{\gamma it} + be^{-\gamma it} = c\cos(\gamma t) + d\sin(\gamma t)$ saadaan yleinen ratkaisu muotoon

$$x(t) = \begin{bmatrix} c_5 \cos(t) + c_6 \sin(t) \\ c_5 \cos(t) + c_6 \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_7 \cos(\sqrt{3}t) + c_8 \sin(\sqrt{3}t) \\ -c_7 \cos(\sqrt{3}t) - c_8 \sin(\sqrt{3}t) \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Tästä edelleen käyttämällä yhtälöä (2.3) saadaan yleinen ratkaisu $x(t)$ muotoon

$$x(t) = \begin{bmatrix} G\sin(t+\phi) \\ G\sin(t+\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H\sin(\sqrt{3}t+\psi) \\ -H\sin(\sqrt{3}t+\psi) \end{bmatrix},$$

joka saadaan yhtälöä (4.14) vastaavaan muotoon

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \sin(t+\phi) \\ \sin(t+\phi) \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} \sin(\sqrt{3}t+\psi) \\ -\sin(\sqrt{3}t+\psi) \end{bmatrix}.$$

Pakotetun värähtelyn yleisiä ratkaisuja (4.11) ja (4.12) vastaava yleinen ratkaisu saataisi käyttämällä yleistä ratkaisua (4.16), esimerkiksi luvussa 4.1 käytetyllä määräämättömien kertoimien menetelmällä.

5. YHTEENVETO

Kirjoitelmassa ensiksi perehdyttiin Cramerin sääntöön, jota saatiin hyödynnettyä matriisimuotoisten differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemisessa. Tästä saatua tulosta voitiin hyödyntää myöhemmin kaksimassaisen oskillaattorin pakotetun värähtelyn tutkimisessa. Vaihdannaiset operaattorit olivat jokaisessa menetelmässä keskiössä. Operaattorit ovat vaihdannaisia vain vakiokertoimisissa differentiaaliyhtälöryhmissä, minkä vuoksi kirjoitelman menetelmät rajoittuvat vakiokertoimisiin differentiaaliyhtälöryhmiin.

Eliminaatiomenetelmällä ratkaistiin differentiaaliyhtälöryhmät täysin samalla tavalla kuin perinteiset yhtälöryhmät, mutta kertoimet olivat operaattoreita. Saatu tulos vastasi Cramerin säännön avulla saatua tulosta matriisimuotoisesta differentiaaliyhtälöparista. Matriisimuotoisia differentiaaliyhtälöitä voitiin myös ratkaista ominaisarvomenetelmällä. Tällöin hyödynnettiin eksponenttiyritettä, jolloin saatiin differentiaaliyhtälö matriisimuotoon. Saadun matriisin ominaisarvoja vastaavista ominaisvektoreista voitiin muodostaa yleinen ratkaisu.

Kirjoitelmassa tarkasteltiin systeemiä, jossa kaksi massaa oli yhdistettynä jousella yhdeksi oskillaattorisysteemiksi. Hooken lakia ja Newtonin toista lakia käyttämällä saatiin muodostettua differentiaaliyhtälöpari oskillaattorin värähtelylle. Laskua varten ongelmaa yksinkertaistettiin huomattavasti lukuarvojen osalta, mutta vastaavasti voitaisiin johtaa yleinen ratkaisu mielivaltaisille massojen ja jousivakioiden arvoille.

Vapaan värähtelyn ongelmassa ratkaistiin homogeeniselle yhtälöparille yleinen ratkaisu. Tulos vastasi pakotetun värähtelyn homogeenisen osan ratkaisua. Tästä syystä pakotetun värähtelyn ongelma olisi voitu vaihtoehtoisesti ratkaista hyödyntämällä ominaisarvomenetelmää. Pakotetun ja vapaan värähtelyn yleisen ratkaisun sieventämisessä käytettiin trigonometristen funktioiden ominaisuuksia, joiden avulla ratkaisut saatiin sini- ja kosinifunktioksi. Yleiselle ratkaisulle alku- tai reuna-arvoilla voitaisiin etsiä yksittäisratkaisu.

LÄHTEET

[1] M. D. Greenberg. *Ordinary Differential Equations*. WILEY, 2014.

[2] M. D. Greenberg. *Differential Equations & Linear Algebra*. Prentice Hall, 2001.

[3] H. Orelma. *Johdatusta differentiaaliyhtälöiden teoriaan*. 2022.