BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INVERSAS GENERALIZADAS PARA OPERADORES DE FREDHOLM

TESIS

Que para obtener el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

Lic. Lizbeth Rojas Martinez

Director de tesis:

Dr. Gabriel Kantún Montiel

Puebla, Puebla, Junio 2022.

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

LIZBETH ROJAS MARTÍNEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 27 de mayo de 2022, con la tesis titulada:

Inversas generalizadas para operadores de Fredholm

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 8 de junio de 2022

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

"Si se mide la magnitud de un libro no por el número de sus páginas sino por el tiempo que se necesita para comprenderlo... más de un libro resultaría mucho más corto si no fuera tan corto"

Del Abate Terrasson-Kant

Agradecimientos

La palabra agradecer de muestra un sentimiento de gratitud hacia alguien o algo. A mi parecer a veces esa palabra pude llegar a ser muy pequeña en algunas ocasiones, porque hay hechos en la vida de cada persona que tal vez un simple “gracias” no sea suficiente para agradecer todo lo que realmente se agradezca, no por que no se sienta, sino, tal vez porque esa ayuda brindada mostrada en tiempo, compañía, consejos, esperanzas o incluso un simple abrazo en el momento oportuno, puede cambiar tu día, tu manera de ver las cosas, o incluso la trayectoria de tu vida.
Encontrarte con personas que te sumen día a día es difícil, pero es posible que lo más difícil, sea tratar de conservarlas y no desilusionarlas o las timarlas sin que esa haya sido tu intención. Por eso nuevamente quiero aprovechar este espacio para agradecer a todas las personas que aún están a mi lado, a mis padres y hermanos, mis conocidos y amigos que son esa familia que yo he elegido y he tenido la oportunidad de formar parte sus vidas, si tuviera que nombrar a cada uno de ellos posiblemente mis agradecimientos serian más grandes que mis conclusiones.
Así que solo me remitiré a decir gracias a cada una de las personas que siempre me han apoyado y han estado en los días más obscuros, en esos días que hasta me dolía el solo hecho de respirar, agradezco que alguien estuviera para mí, para abrazarme y darme palabras de consuelo, agradezco que no me hayan dejado sola y lo mas importante hacerme sentir que todo esto valía la pena y que podía respirar un día más porque me aseguraban que no estaría sola. Por su puesto agradezco a mi acompañante de vida, que siempre se ha preocupado y ha estado ahí para mí, el cual ha estado conmigo por más de una década, por su tiempo paciencia y mucho amor que siempre me brinda y que me hace sentir en paz

y feliz.
En matemáticas el vacío es un conjunto que no tiene elementos, y aunque parece insignificante con el vacío se pueden construir otros conjuntos pues este conjunto es el conjunto que está en todos los conjuntos. A veces me siento como ese conjunto, pero sé que me puedo integrar a otros conjuntos y de esta manera no sentirme sola, espero seguir en la vida de cada una de las personas que yo considero amigos y sumarles cosas positivas en sus vidas, espero seguir siendo ese conjunto que siempre forma parte de cada nuevo conjunto.
Quiero dedicar este trabajo a mis fuerzas, esperanzas y poco talento que tengo. Nunca te rindas.

Introducción

En matemáticas las ecuaciones diferenciales ordinarias e integrales nos dan la posibilidad de representar problemas con aplicaciones en algunas áreas como la ingeniería, estos problemas involucran representaciones en forma de ecuaciones lineales como: $Lx = y$, donde L es un operador y x, y elementos de sus respectivos espacios lineales. Partiendo de esa idea, se inspiró este trabajo, en el cual se estará desarrollando teoría para un tipo específico de operadores, a saber, los operadores conocidos como operadores de Fredholm en espacios de Banach y de Hilbert. Por lo cual el interés de este trabajo es mostrar una solución a la ecuación $Lx = y$, es decir, construir la inversa de L, y esta será denotada por L^-, así, si el operador L posee una inversa generalizada L^-, entonces esta será una solución parcial, la cual puede ser escrita de manera explicita como: $x = L^- y$. De lo anterior se tiene que es imprescindible encontrar alguna propuesta sobre la construcción del operador inverso generalizado $L^- : B_2 \to B_1$ de un operador lineal acotado de Fredholm, con B_1 y B_2 espacios de Banach, se procederá de manera análoga para los espacios de Hilbert.

Por lo que los objetivos generales de este trabajo son estudiar inversas generalizadas para operadores de Fredholm. De manera más concisa se proponen los siguientes objetivos específicos;

(i) Se centrará este trabajo en los métodos de construcción de inversas generalizadas para matrices.

(ii) Se investigará inversas generalizadas para operadores en espacios de Hilbert.

(iii) Se analizará propiedades de operadores de Fredholm.

El primer capítulo está centrado en resultados básicos pero necesarios en espacios de Hilbert y de Banach, también se definirán los operadores lineales y acotados para después introducir la definición de operador de Fredholm, finalmente el capítulo se concluye con propiedades de las proyecciones.
En el segundo capítulo, se introducen algunos tipos de inversas, como lo son las inversas laterales y las inversas externas e internas.
En el tercer capítulo se da un resultado análogo al Lema de Schmidt con ayuda de las proyecciones para operadores de Fredholm y así poder exhibir una inversa generalizada para dichos operadores, todo esto en espacios de Banach.
En el último capítulo se desarrollan algunas propiedades de las proyecciones para después introducir un lema análogo al Lema de Schmidt en espacios de Hilbert con operadores de Fredholm y siguiendo con la misma idea, se desarrollan los pseudo-operadores por la derecha e izquierda para operadores de Fredholm y se termina este capítulo con las pseudoinversas con los operadores ya mencionados.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Hilbert

Un espacio con producto interno es un espacio particular de los espacios normados y visto de manera histórica se puede decir que estos son más clásicos que los espacios normados generales. Una de las razones por las que estos espacios son tan importantes es debido a que poseen características similares a las del espacio Euclideano, esto se debe a que es la generalización más "natural" que existe. Por ejemplo uno de los conceptos con mayor utilidad en este trabajo es el concepto y propiedades de la ortogonalidad. Puede considerarse que el pionero de esta teoría fue D. Hilbert (1912) en las ecuaciones integrales. En esta sección se darán algunas propiedades y resultados de manera breve.

Definición 1.1. *Un conjunto H es un* ***espacio de Hilbert*** *si:*

(i) H *es un espacio vectorial.*

(ii) H *posee la operación producto interno, definida por* $\langle , \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$, $\langle x, y\rangle$, *(con* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) con las siguientes propiedades para todo elemento* $x, y, z \in H$ *y todo escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *:*

(i´) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(ii') $\langle x, x\rangle = 0$ *solo si* $x = 0$.

(iii´) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

(iv´) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(v´) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(iii) *H es un espacio completo (con respecto a la métrica $d(x,y) = ||x-y||$ y la norma de un elemento $h \in H$ se define como; $||h|| = \langle h, h\rangle^{1/2}$).*

Ahora se darán unos ejemplos clásicos.

Ejemplo 1.1. *Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio Euclideano n-dimensional con producto interno definido como;*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

con $x = (x_1, ...x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ elementos en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2. *El espacio ℓ^2con el producto interno definido por;*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i},$$

con $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. La norma de un elemento en ℓ_2 se define como;

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Ejemplo 1.3. *El espacio L_2 con el producto interno de dos funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, está definido por;*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(x) dx.$$

Más aún, la norma de un elemento en L_2 se define como;

$$||f|| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2) dx\right)^{1/2}.$$

Podríamos estar tentados a pensar que los espacios ℓ^p con $p \geq 1$ son espacios de Hilbert, pero esto no es cierto. Para ello véase la siguiente observación.

Observación 1.1. *([9], pg133) Los espacios ℓ^p para todo $p \geq 1$ diferente de dos, y el espacio $C[a,b]$, no son espacios de Hilbert.*

Ahora se darán algunas nociones geométricas válidas en cualquier espacio con producto interno.

Definición 1.2. *Sea H un espacio con producto interno y sean x, y elementos en H. Si $\langle x, y\rangle = 0$, entonces se dice que x e y son* ***ortogonales*** *entre sí. Sea $A = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ una colección de vectores en H, diremos que los elementos en A son* ***ortonormales****, si $\langle x_i, x_i\rangle = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, con $i \neq j$.*

Observación 1.2.

(1) En este trabajo se hará la diferencia entre variedad lineal y subespacio cerrado (al cual también llamaremos simplemente subespacio), ya que una **variedad lineal** *de un espacio lineal X sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ es un subconjunto no vacío $\mathcal{M}$ de X con las siguientes propiedades;*

  (i) Para todo $x, y \in \mathcal{M},\ x + y \in \mathcal{M}$.

  (ii) Para todo $x \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathbb{F},\ \alpha x \in \mathcal{M}$.

(2) Sea X un espacio normado, la clausura de una variedad lineal $\overline{\mathcal{M}}$ es un subespacio de X, ver ([8],pg.210).

Ejemplo 1.4. *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio de un espacio de Hilbert H. Entonces $\mathcal{M}$ es un espacio de Hilbert con el producto interno natural heredado por H.*

Definición 1.3 (Suma directa)**.** *Sean X un espacio vectorial, y sean Y, Z dos variedades lineales de X tales que $Y \cap Z = \{0\}$. Si para cada x en X se tienen una única representación de la forma: $x = y + z$; con $y \in Y$, $z \in Z$. Entonces se escribe*

$$X = Y \dot{+} Z,$$

y es llamado ***suma directa (algebraica).*** *Si las variedades lineales Y, Z son cerradas en X, entonces se dice que X se descompone* *en una **suma directa (topológica)** de subespacios, en ese caso se escribe*

$$X = Y \oplus Z.$$

*El subespacio Z es el **complemento directo algebraico** de Y en X, es decir Y es complementado por Z.*

Note que el complemento directo no es único y cada uno es isomorfo entre sí, esto se exhibe en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5. *Sea $Y = \mathbb{R}$ un subespacio del plano Euclideano $\mathbb{R}^2$, Y tiene una infinidad de complementos algebraicos, ya que, cualquier línea que pase por el origen no paralela a Y es un complemento directo de Y.*

Sea H un espacio de Hilbert y Y subespacio de H, se define el **complemento ortogonal** de Y como;

$$Y^{\perp} := \{h \in H : h \perp Y\}.$$

Esto nos lleva a un resultado muy importante, el cual es conocido como el teorema de la proyección o el teorema de la suma directa.

Teorema 1.1 (Teorema de la proyección)**.** *([9], pg.146) Sea Y un subespacio del espacio de Hilbert H, entonces*

$$H = Y \oplus Z, \qquad \textit{con} \quad Z = Y^{\perp}.$$

El siguiente resultado nos garantiza la existencia de un punto tal que la distancia entre cualquier punto del espacio a un espacio convexo[1] es mínima.

Teorema 1.2. *([9], pg. 144) Sea X un espacio con producto interno y completo. Entonces dado A un subconjunto convexo de X diferente del vacío, se cumple que para todo $x \in X$, existe un único $y \in A$ tal que*

$$\delta = \inf_{y \in A} ||x - y|| = ||x - y||.$$

A continuación se presentarán algunas definiciones básicas que servirán para el desarrollo de este trabajo.

[1] Véase [8] pg.85.

Definición 1.4. *(Isomorfismos entre espacios de Hilbert) Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert. H_1 y H_2 son isomorfos si existe un operador $T : H_1 \to H_2$ lineal y sobreyectivo tal que:*

$$\langle Tx, Ty\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_2}, \qquad \textit{para todo} \quad x \in H_1.$$

El operador T es llamado unitario y esta aplicación es llamada ***isomorfismo****. Un isomorfismo es llamado* ***isometría*** *si preserva norma.*

Definición 1.5 (Espacio dual)**.** *Sea X un espacio normado. El* ***espacio dual*** *de X es el conjunto de todas las funcionales lineales y acotadas en X, y es denotado por X^*.*

Note que X^* puede ser dotado de una norma definida de la siguiente manera

$$||f|| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Por lo tanto X^* es un espacio de Banach con la norma mencionada, porque $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ y $(\mathbb{K}, |\ |)$ es Banach.

Definición 1.6 (Operador adjunto T^* en espacios de Hilbert)**.** *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Sea $T^* : H_1 \to H_2$ definido por*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle,$$

para cada $x \in H_1$ y $y \in H_2$. T^* es llamado ***operador adjunto*** *del operador T en espacios de Hilbert.*

Teorema 1.3. *[8],pg.379) El operador adjunto en espacios de Hilbert, T^*, de T existe, es único y es un operador lineal y acotado con norma $||T^*|| = ||T||$.*

Sean X un espacio con producto interno, $y \in X$ y considere el funcional $f : X \to \mathbb{F}$, definido por;

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

El funcional f es lineal y acotado. En efecto, f es lineal porque el producto interno es lineal y es acotado por la desigualdad de **Schwarz**[2], es decir, $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|||y||$ para todo $x \in X$. Por tanto f es un elemento de $\mathcal{L}(X, \mathbb{F}) = X^*$ y $||f|| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |f(x)| \leq ||y||$. Por otro lado $||y||||y|| = |\langle y, y\rangle| = |f(y)| \leq ||f||||y||$, así que, $||y|| \leq ||f||$. Por lo tanto, $||f|| = ||y||$. Se puede concluir que para cada funcional lineal y acotada existe una correspondencia natural con cada vector y de un espacio con producto interno X. En espacios de Hilbert el recíproco se cumple, como se observa en el siguiente teorema.

Teorema 1.4 (Teorema de representación de Riesz)**.** *([8],pg.377) Si H es un espacio de Hilbert y f un funcional lineal y acotado sobre H, entonces existe un único vector $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y\rangle, \quad \text{para todo } x \in H.$$

Más aún, $||f|| = ||y||$. Al único vector $y \in H$, se le llama la representación de Riesz del funcional f en $\mathcal{L}(H, \mathbb{F})$.

Así, el espacio dual de H coincide con H respecto a un isomorfismo, es decir, $\mathcal{L}(H, \mathbb{F}) \cong H$.

1.2. Espacios de Banach

Algunos de los resultados que se cumplen en espacios de Banach con dimensión finita se pueden generalizar a espacios de Banach con dimensión infinita. Para profundizar en las pruebas de algunos resultados que se muestran en esta sección pueden consultarse en [8] y [9].

Definición 1.7. *Un espacio B, se dice de* ***Banach*** *si es un espacio normado y completo.*

Proposición 1.1. *([8], pg. 209) Si B es un espacio de Banach y M es un subespacio de B, entonces M es un espacio de Banach.*

Ejemplo 1.6. *Los siguientes espacios métricos son algunos ejemplos clásicos de espacios de Banach con su respectiva norma.*

[2] $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

(i) *El espacio* $\mathbb{R}^n$, *es decir,* $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_E)$, *con* $n \geq 1$.

(ii) *El espacio de las funciones continuamente diferenciables, es decir,* $(C^n[a,b], \| \ \|_\infty)$, *con* $n \geq 1$.

(iii) *Los espacios* l_p, *es decir,* $(l_p, \| \ \|_p)$.

(iv) *Los espacios* L_p, *es decir,* $(L_p, \| \ \|_p)$.

Ahora se dará un ejemplo que va en contra de la intuición en la geometría Euclideana.

Ejemplo 1.7. *Sea* $B = \mathbb{R}^2$ *con norma* $\|u\| = |u_1| + |u_2|$, *para todo* $u = (u_1, u_2) \in B$. *Considere el cuadrado unitario centrado en el origen, con vértices en los puntos* $(1,0), (0,1), (-1,0),$ *y* $(0,-1)$. *Note que en este caso las bolas unitarias serán las semirectas desde el origen y todo el lado positivo del eje* $\mathcal{X}$, *e* $\mathcal{Y}$ *respectivamente.*

Ahora se define B_0 *como el conjunto formado por todos los puntos que pertenecen a la recta que pasa por el origen con un ángulo de* $45°$ *con respecto al eje* $\mathcal{X}$. *Se puede probar que* B_0 *es un subespacio de* B. *Sea* $v \in B_0$ *con coordenadeas* $v = (v_1, v_1)$. *Luego, si* $u = (1,0)$, *entonces* $\|u - v\| = |1 - v_1| + |v_1|$ *y la norma de la diferencia entre los vectores* v *y* u *alcanza su mínimo igual a uno, para cualquier* v_1, $0 \leq u_1 \leq 1$.

Así, la mínima distancia de un vector u *al subespacio* B_0 *es alcanzado en un conjunto infinito de vectores de* B_0. *En el plano* $\mathbb{R}^2$ *con la métrica Euclideana, la distancia mínima solo se alcanza en un solo vector. Sin embargo en espacios normados con un subespacio de dimensión infinita* B_0 *su mínimo puede no ser alcanzado.*

Observación 1.3. *Sea* $\mathcal{L}(X,Y)$ *el conjunto de todos los operadores lineales y acotados de* X *a* Y. *Si* Y *es completo, entonces el conjunto* $\mathcal{L}(X,Y)$ *es un espacio de Banach. Por tanto el espacio dual de* X, X^*, *es un espacio de Banach.*

Ahora se darán algunos ejemplos de espacios duales.

Ejemplo 1.8. *Para el espacio* $\mathbb{R}^n$, *cualquier funcional lineal acotado* f *tiene la forma* $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$, *donde cada* α_i *es una constante para cada* $i = 1, ..., n$. *Además, existe un isomorfismo entre* $(\mathbb{R}^n)^*$ *y* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.9. *Para* $1 \leq p \leq +\infty$*, el espacio* $(l_p)^*$ *es isomorfo al espacio* l_q*, con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. El isomorfismo está definido por la siguiente formula:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

con $x = (x_1, ..., x_n, ...) \in l_p, \quad y = (y_1, ..., y_n, ...) \in l_q, \quad f \in (l_p)^*.$

Ejemplo 1.10. *Para* $1 \leq p \leq +\infty$*, el espacio* $(L_p)^*$*, es isomorfo al espacio* L_q *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. El isomorfismo correspondiente es:*

$$f(x) = \int_a^b x(t)g(t)dt, \quad x(t) \in L_p, \quad g(t) \in L_q, \quad f \in (L_p)^*.$$

A menudo es necesario resolver el problema de la construcción de funcionales lineales con propiedades dadas, para esto se siguen dos pasos generales: el primero es definirlo sobre un espacio de Banach donde las propiedades requeridas son fácilmente verificadas, y luego por un teorema general se prueba que para cualquier funcional de este tipo se puede extender a todo el espacio con la preservación de las propiedades requeridas.

Teorema 1.5. *(Hahn-Banach, para espacios normados)([9], pg.221) Sea* f *un funcional lineal acotado sobre un subespacio* Z *de un espacio* X*. Entonces existe un funcional lineal acotado* $\tilde{f}$ *sobre* X*, el cual es una extensión de* f *para* X *y con la misma norma, es decir;* $||f||_Z = ||\tilde{f}||_X$*, donde*

$$||f||_Z = \sup_{x \in Z, \|x\|=1} |f(x)|, \qquad ||\tilde{f}||_X = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |\tilde{f}|$$

($||f||_Z = 0$*, si* $Z = 0$*).*

Lema 1.1. *(Existencia de un funcional)([9], pg. 243) Sea* Y *un subespacio propio cerrado de un espacio normado* X*. Sea* $x_0 \in X \setminus Y$ *arbitrario y*

$$\delta = \inf_{y' \in Y} ||y' - x_0||,$$

la distancia desde x_0 *a* Y*. Entonces existe un* $\tilde{f} \in X^*$ *tal que*

$$||\tilde{f}|| = 1, \quad \tilde{f}(y) = 0 \ \text{ para todo } y \in Y, \quad \tilde{f}(x_0) = \delta.$$

Teorema 1.6. *([9], pg.223) Sean X un espacio normado y $x_0 \neq 0$ un elemento arbitrario de X. Entonces existe un funcional lineal acotado $\tilde{f} \in X$, talque*

$$||\tilde{f}\,|| = 1, \qquad \tilde{f}\,(x_0) = ||x_0||.$$

Corolario 1.1. *([9],pg. 223) Para cualquier x en un espacio normado X, se tiene que;*

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{||f||}.$$

Por lo tanto, si x_0 es tal que $f(x_0) = 0$, para $f \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes para que la suma directa sea cerrada.

Teorema 1.7. *(Teorema de Kober)([7]) Sean B un espacio de Banach y B_1, B_2 dos subespacios de B, tales que $B_1 \cap B_2 = \{0\}$. Entonces la suma directa $B_1 \oplus B_2$ es cerrada si y solo si existe una constante $k > 0$ tal que para todo $x \in B_1$ y $y \in B_2$ se cumple que $\|x\| \leq k||x + y||$.*

Corolario 1.2. *Si uno de los subespacios B_1 o B_2 es de dimensión finita, entonces la suma directa $B_1 \oplus B_2$ es cerrada, es decir, cualquier subespacio de dimensión finita de un espacio de Banach siempre puede ser complementado.*[3]

Si en lugar de tener espacios de Banach, se tienen espacios de Hilbert, entonces se garantiza que cualquier subespacio de un espacio de Hilbert, posee un complemento, que en este caso sería su complemento ortogonal como se vio en el Teorema 1.1. Ahora para el caso de espacios de Banach, se puede introducir un concepto análogo al de ortogonalidad basada en la dualidad del espacio de Banach, para ello se define lo siguiente.

Definición 1.8. *Sea B un espacio de Banach y B^* su dual. Para cualesquiera conjuntos $Y \subset B$ y $Y^* \subset B^*$, se definen los siguientes*

[3]Ver la definición 1.3

conjuntos

$$Y^{\perp} = \{f^* \in B^* : f^*(f) = 0, f \in Y\},$$
$$Y^{*\perp} = \{f \in B : f^*(f) = 0, f^* \in Y^*\}.$$

Llamados ***complementos ortogonales*** *de los conjuntos* Y *y* Y^**, respectivamente.*

En este caso, la analogía con los espacios de Hilbert no es tan cercana como se desea porque $Y^{\perp}$ es un subespacio del espacio dual B^*, pero no del espacio original B. Esto es una manifestación adicional de la estructura geométrica compleja del espacio de Banach.

Hablando de manera general, el complemento directo no necesariamente puede ser construido para algún espacio de Banach arbitrario, sin embargo, como ya se indicó, para subespacios de dimensión finita siempre se pueden complementar.

1.3. Operadores lineales

En esta sección, y en lo que sigue de este trabajo, estaremos considerando operadores lineales y acotados de la forma; $L : D \subseteq B_1 \to B_2$, donde B_1 y B_2 son espacios de Banach. Para este tipo de operadores utilizaremos la siguiente notación: $\mathcal{L}'(B_1, B_2) \subseteq \mathcal{L}(B_1, B_2)$.

Definición 1.9. *Sea* $L \in \mathcal{L}'(B_1, B_2)$.

(i) *El* ***dominio del operador*** L *es el subconjunto de* B_1 *donde* L *esta bien definido, denotado por* $D(L)$.

(ii) *El* ***núcleo del operador*** L *se define como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea* $Lx = 0$ *con* $x \in B_1$*, el cual forma un subespacio de* B_1 *denotado por* $N(L)$ *(espacio nulo del operador* L*).*

(iii) *El* ***rango del operador*** L *se define como el conjunto de todos los valores del operador* L*, el cual es una variedad lineal de* B_2 *denotada por* $R(L)$.

Ejemplo 1.11. *Sea $C[a,b]$ el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y considere la operación de diferenciación ordinaria. Como las funciones continuas pueden no ser diferenciables, entonces se tiene que restringir el espacio $C[a,b]$ al espacio de todas las funciones suaves en $[a,b]$, es decir, $C^\infty[a,b]$. Por lo que, para $x \in C^\infty[a,b]$, el conjunto de las imágenes es de la forma $(Lx)(t) = x'(t)$. Esta relación especifica un operador L, con dominio $C^\infty[a,b]$, es decir, $L : C^\infty[a,b] \to C[a,b]$.*

Definición 1.10. *Dos operadores L y $\tilde{L}$ en $\mathcal{L}'(B_1, B_2)$ se diran que son iguales si, $D(L) = D(\tilde{L})$ y $Lx = \tilde{L}x$, para toda $x \in D(L)$. El operador $\tilde{L}$ es llamado una **extensión** (continuación) del operador L y el operador L es llamado una **restricción** de $\tilde{L}$ si $D(L) \subset D(\tilde{L})$ y $Lx = \tilde{L}x$, para toda $x \in D(L)$. Esta relación entre los operadores es denotada por : $L \subset \tilde{L}$.*

Definición 1.11. *La **dimensión de un operador** L en $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ se define como la dimensión de su rango, es decir,*

$$dim(L) = dim(R(L)).$$

Un operador es llamado de dimensión finita si $dim(L) < \infty$.

En la colección de todos los operadores definidos entre espacios de Banach, se puede seleccionar una clase de operadores con propiedades semejantes a la de los operadores acotados, esta es la clase de los operadores cerrados.

Definición 1.12. *Un operador lineal L en $\mathcal{L}'(B_1, B_2)$ es llamado **cerrado** si, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x y Lx_n convergente a y, implica que $x \in D(L)$ y $Lx = y$.*

Esta definición también puede ser encontrada en otros textos como:

(**Operador lineal cerrado**[4]) Sean X y Y espacios normados y $L : D(L) \to Y$ un operador lineal con dominio $D(L) \subset X$. Entonces L es llamado un operador lineal cerrado si su gráfica

$$\mathcal{G}(L) = \{(x,y) | x \in D(L), y = Lx\},$$

[4] Para la equivalencia de estas definiciones puede ver ([9],pg. 293).

es un conjunto cerrado en el espacio normado $X \times Y$, donde las dos operaciones algebraicas del espacio vectorial $X \times Y$ son definidas de la manera usual, y la norma está definida por:

$$||(x, y)|| = \|x\| + ||y||.$$

Por otro lado se puede probar que cualquier operador acotado definido en todo el espacio X es cerrado, pero no todo operador cerrado es acotado, esto se deja claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.12. *(Operador diferencial)([9],pg.294) Sean $X = C[0, 1]$ espacio de Banach y $L : \mathcal{D}(L) \to X$ un operador definido por $Lf = f'$, donde f' denota el diferencial de f y $D(L)$ es el subespacio de funciones $f \in X$ el cual tiene una derivada continua. Sin mucha dificultad se garantiza que el operador L no es acotado, pero sí es cerrado.*

Ahora una pregunta natural es ¿cuáles son las condiciones para que un operador cerrado sea acotado? Una respuesta es dada en el siguiente teorema.

Teorema 1.8. *(Teorema de la gráfica cerrada) ([9],pg.292) Sean B_1, B_2 espacios de Banach y $L : D(L) \to B_2$ un operador lineal cerrado, con $D(L) \subset B_1$. Entonces el operador L es acotado.*

Lema 1.2. *([9],pg.295) Sea $L : D(L) \subseteq X \to Y$ un operador lineal acotado, con X y Y espacios normados. Entonces:*

(i) Si $D(L)$ es un subespacio (variedad lineal cerrada) de X, entonces L es cerrado.

(ii) Si L es cerrado y Y es completo, entonces $D(L)$ es un subespacio de X.

Definición 1.13. *Un operador L en $\mathcal{L}'(B_1, B_2)$ es llamado **densamente definido** en el espacio B_1 si su dominio $D(L)$ es denso en B_1.*

Si un operador es definido en todo el espacio B_1 este es densamente definido. Sea $L^* : B_2^* \to B_1^*$ el operador adjunto a un operador densamente definido $L : B_1 \to B_2$, L^* está determinado de manera única por:

$$(L^*g)(x) = g(Lx); \quad \text{para todo } x \in B_1 \text{ y para todo } g \in B_2^*. \quad (1.1)$$

El operador adjunto es cerrado. En efecto, si $g_n \to g$ y $L^*g_n \to f$, entonces, para $x \in D(L)$, se tiene que $g_n(Lx) \to g(Lx)$ y $g_n(Lx) \to f(x)$. Por la unicidad del límite se tiene que: $g(Lx) = f(x)$ para toda $x \in (D(L))$ y $f = L^*g$. Más aún, el operador adjunto L^* de un operador lineal acotado es también un operador lineal acotado.

Definición 1.14. *Sea $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ con X, Y espacios normados. El núcleo del operador L^*, es llamado el **cokernel** del operador L y es denotado por $cokerL$ o $N(L^*)$(el espacio nulo del operador L^*).*

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach reflexivos[5] y sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, entonces $L^{**} = (L^*)^* = L$, donde

$$N(L) = cokerL^*.$$

A continuación se darán ejemplos de este hecho.

Ejemplo 1.13. *Sean $H_1 = \mathbb{R}^n$, $H_2 = R^m$ y $L : H_1 \to H_2$ un operador lineal que está definido por una matriz A de tamaño $n \times m$ con entradas $a_{i,j}$ definida de la siguiente manera:*

$$(Lx)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, \quad j = 1, ..., m.$$

El espacio dual de $\mathbb{R}^m$ es isomorfo a $\mathbb{R}^m$, y la correspondencia entre estos espacios está dada como sigue:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j \eta_j = \langle \eta, x \rangle.$$

De la definición 1.6 se sigue que:

$$(L^*f)(x) = f(Lx) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\eta_j = \langle \eta, Lx \rangle.$$

[5] Véase [8] pg.267.

El funcional así construido puede ser representado en la forma;

$$\langle L^*\eta, x\rangle = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\eta_j\right)x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\tau_j,$$

donde $\tau_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\eta_j$. *Así la acción del operador adjunto es determinada por la matriz transpuesta* $A^T = (a_{ij})$ *de la matriz* $A = (a_{ij})$, *de tamaño* $m \times n$.

Ejemplo 1.14. *Sea* $L_p[0,1]$ *el espacio de las funciones p-integrables sobre* $[0,1]$, *y considere el operador integral definido por:*

$$(Lx)(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

donde $K(t,s)$ *es un funcional acotado medible en el cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$.

Cualquier funcional $f \in (L_p[0,1])^*$, *puede se representado de la forma*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)g(t)dt,$$

donde $g \in L_q[0,1]$. *Ahora, fijando* $g \in L[0,1]$ *y estudiando la evaluación del operador* L^* *en el correspondiente funcional (utilizando 1.1):*

$$(L^*g)(x) = g(Lx) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\right) g(t)dt.$$

Entonces, realizando un cambio de integración (por el teorema de Fubini, ver [6]), se obtiene:

$$(L^*g)(x) = \int_0^1 x(s)\left[\int_0^1 K(t,s)g(t)dt\right] ds = \int_0^1 x(s)v(s)ds,$$

donde

$$v(s) = \int_0^1 K(t,s)g(t)dt.$$

Así, el operador adjunto L^* *transforma el funcional correspondiente para la función* g *en el funcional correspondiente para la función* v, *es decir:*

$$(L^*g)(s) = \int_0^1 K(s,t)g(t)dt.$$

Por tanto, el operador adjunto para el operador integral con kernel $K(t,s)$ es un operador integral con núcleo $K(s,t)$.

Ejemplo 1.15. *Sea $D_2[0,2]$ el espacio de la funciones absolutamente continuas con derivadas en $L_2[0,2]$, se considera el operador*

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - x(1) + x(0) \equiv \dot{x}(t) - \int_0^1 \dot{x}(s)ds, \quad t \in [0,2],$$

con valores en $L_2[0,2]$.

Como en el ejemplo previo, considere un $g \in L_2[0,2]$ y el operador L^* sobre el correspondiente funcional:

$$\begin{aligned}(L^*g)(x) = g(Lx) &= \int_0^2 \left(\dot{x}(t) - \int_0^1 \dot{x}(s)ds\right) g(t)dt \\ &= \int_0^2 \left(\dot{x}(t) - \int_0^2 \mathcal{X}_{[0,1]}(s)\dot{x}(s)ds\right) g(t)dt \\ &= \int_0^2 \dot{x}(t)g(t)dt - \int_0^2 \left(\int_0^2 \mathcal{X}_{[0,1]}(s\dot{x}ds\right) g(t)dt,\end{aligned}$$

donde $\mathcal{X}_{[0,1]}$ es la función característica en el intervalo $[0,1]$. Cambiando el orden de las integrales en la segunda integral, se tiene;

$$(L^*g)(x) = \int_0^2 \left(g(s) - \mathcal{X}_{[0,1]}(s)\int_0^2 g(t)dt\right)\dot{x}(s)ds.$$

Así, el operador adjunto tiene la forma:

$$(L^*g)(t) = g(t) - \mathcal{X}_{[0,1]}(t)\int_0^2 g(s)ds.$$

Ejemplo 1.16. *Considere un operador $L : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, con la siguiente regla de correspondencia $(Lx)(t) = x(\alpha(t))$, donde $\alpha : [0,1] \to [0,1]$, es una aplicación continuamente diferenciable e invertible en el intervalo $[0,1]$ sobre si mismo con $\alpha'(t) \neq 0$. El operador adjunto L^* esta construida como sigue;*

$$g(Lx) = \int_0^1 g(t)x(\alpha(t))dt,$$

utilizando la siguiente sustitución

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha(t), \qquad dt = \beta'(\tau)d\tau \\ t &= \beta(\tau), \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)x(\alpha(t))dt &= \int_0^1 g(\beta(\tau))x(\tau)\beta'(\tau)d\tau \\ &= \int_0^1 \beta'(\tau)g(\beta(\tau))x(\tau)d\tau \\ &= (L^*g)(x). \end{aligned}$$

Asi, el operador adjunto L^* toma valores en $L_q[0,1]$ definidos por $(L^*g)(t) = \beta'(t)g(\beta(t))$, con $\beta = \alpha^{-1}$.

En el conjunto de operadores cerrados hacemos notar a la clase de operadores normalmente resolubles. Para ello véase la siguiente definición.

Definición 1.15. *Sea $L \in \mathcal{L}'(B_1, B_2)$ un operador densamente definido, entonces L es llamado* ***normalmente resoluble*** *si su imagen es cerrada, es decir, $R(L) = \overline{R(L)}$.*

Así, un operador $L : B_1 \to B_2$, para el cual $R(L) = B_2$ es un ejemplo simple de operador normalmente resoluble.

Si se considera el caso de inclusión estricta, $R(L) \subset B_2$, se muestra que si L es un operador normalmente resoluble y $R(L)$ no coincide con B_2, entonces el espacio nulo $N(L^*)$ del operador adjunto L^* es no trivial. En efecto, sea $f \in B_2$ con $f \in \overline{R(L)}$. Como $R(L)$ es una variedad lineal cerrada, entonces por el teorema de Hahn-Banach se puede construir un funcional lineal $\phi \in B_2^*$ tal que $\phi(f) = 1$ y $\phi(h) = 0$, para todo $h \in R(L)$. La última igualdad significa que $0 = \phi(h) = \phi(Lx) = (L^*\phi)(x)$, con x un vector en $D(L)$. Dado que $D(L)$ es denso en B_1, se tiene que $L^*\phi = 0$, y por lo tanto, $\phi \in N(L^*)$. Por la construcción, el funcional ϕ es diferente del operador trivial, por tanto $N(L^*)$ es no trivial.

En el siguiente teorema se exhiben algunas condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea normalmente resoluble.

Teorema 1.9. *Sea $L \in \mathcal{L}'(B_1, B_2)$ un operador cerrado densamente definido, con $R(L) \neq B_2$. Entonces L es un operador normalmente resoluble si y solo si cualquiera de las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) $N(L^*)^{\perp} = R(L)$,

(ii) La ecuación $Lx = y$ tiene solución solo para $y \in B_2$ que satisfacen la condición $\phi(y) = 0$, cuando ϕ es una solución arbitraria de la ecuación homogénea conjugada $L^*\phi = 0$.

Se asume que los funcionales $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ forman una base en $N(L^*)$. Entonces el requerimiento de que $\phi(y) = 0$ es equivalente a la siguiente condicion:

$$\phi_i(y) = 0, \quad i = 1, ..., m,$$

necesaria y suficiente para resolver la ecuación $Lx = y$.

Ahora se dará otra condición suficiente para que un operador tenga rango cerrado.

Lema 1.3. *Si $L \in \mathcal{L}'(B_1, B_2)$ es un operador cerrado y existe un subespacio lineal M del espacio B_2 tal que*

$$B_2 = M \oplus R(L),$$

entonces L es un operador normalmente resoluble (rango cerrado).

Definición 1.16. *Sea $L : D(L) \subseteq B \to B$ un operador cerrado densamente definido. Entonces L es llamado **reduciblemente invertible** si*

$$B = N(L) \oplus R(L).$$

Por el lema 1.3, $R(L)$ es un espacio cerrado, es decir, el operador reduciblemente invertible tiene rango cerrado, y la ecuación $Lx = y, y \in N(L), y \neq 0$, no tiene solución en B.

De aquí en adelante las dimensiones del núcleo y cokernel de un operador juegan un papel importante por lo que se tendrá en cuenta la siguiente notación.

$$n = \alpha(L) = dimN(L),$$
$$m = \beta(L) = dimcokerL.$$

Definición 1.17. *El* ***índice*** *de un operador lineal L entre espacios vectoriales se define por:*

$$indL = \alpha(L) - \beta(L).$$

Teniendo en cuenta la definición anterior se observa que $indL^* = -indL$. La noción de índice también es aplicable en el caso de que uno de los números $\alpha(L)$(o $\beta(L)$) sea infinito. En ese caso el índice es igual a $\pm\infty$.

Definición 1.18. *Sea L un operador cerrado y normalmente resoluble. Si $\alpha(L)$ ($\beta(L)$) es finito, entonces L es llamado $n-$* ***normal*** ***(****$m-$* ***normal)****.*

En literatura diversa los operadores n-normal y m-normal son conocidos como operadores **semi-Fredolm** incluyendo la clase de Φ_+-operadores ($\alpha(L) < \infty$) y Φ_--operadores ($\beta(L) < \infty$).

Para un operador cerrado densamente definido L, las propiedades de n-normal y m-normal son simétricas con respecto a la operación conjugación.

1.4. Operadores de Fredholm

Erik Ivar Fredholm, fue pionero en la teoría de operadores que hoy en día lleva su nombre, durante el año 1903 publicó un artículo con lenguaje moderno en el cual trabajaba ecuaciones integrales del tipo;

$$h(t) = \lambda g(t) - \int_a^b k(t,u)g(u)\,du, \tag{1.2}$$

donde $k(t,u)$ es una función continua para $a \leq t, u, \leq b$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y g la incógnita. La ecuación mencionada anteriormente es conocida como ecuación integral de Fredholm de segunda especie.

La ecuación 1.2 puede ser reescrita de una manera más sencilla, simplificando la notación, esto gracias al uso de la moderna teoría de operadores. De esta manera, consideremos

$$Kg(t) = \int_a^b k(t,u)g(u)\,du, \tag{1.3}$$

donde $K : C[a,b] \to C[a,b]$ es un operador compacto. Por lo que ahora podemos escribir a la ecuación 1.2 como:

$$h = (\lambda I - K)g. \tag{1.4}$$

Por lo cual, para resolver 1.2, es imprescindible el estudio del operador,

$$A = \lambda I - K.$$

Por otro lado, gracias al trabajo de Fredholm, este tema inicia el desarrollo de una manera más general y esto se da en un artículo de Calkin. En las recientes décadas pasadas se ha incrementado el estudio en esta área y por lo cual se ha aumentado la bibliografía, por ello muchas de ellas se consideran clásicas.

Definición 1.19. *Sean X, Y espacios normados y $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, L es llamado **operador de Fredholm** si $R(L)$ es un subespacio cerrado de Y, $\alpha(L) < \infty$ y $\beta(L) < \infty$.*

Por 1.17 podemos definir el **índice de un operador de Fredholm** L entre espacios de Banach como: $ind(L) = \alpha(L) - \beta(L)$.

Definición 1.20. *Si $indL = 0$ $(\alpha(L) = \beta(L))$, entonces el operador L es llamado un **operador de Fredholm de índice cero**.*

Ahora se darán algunos ejemplos sobre este tipo de operadores.

Ejemplo 1.17. *Una matriz A rectangular de tamaño $m \times n$, con coeficientes en los enteros es un ejemplo simple de un operador de Fredholm. En efecto, sea el $R(A) = n_1 \leq \text{mín}(m,n)$. Como la dimensión del espacio nulo $N(A)$ es igual al defecto de la matriz A y el $R(A) = n_1$, entonces se tiene:*

$$\dim N(A) = n - R(A) = n - n_1 = t.$$

Teniendo en cuenta que $R(A) = R(A^*)$, se tiene que $\dim N(A^*) = m - n_1 = d$ y por lo tanto,

$$indA = \dim N(A) - \dim N(A^*) = t - d = n - m \neq 0,$$

cuando $n \neq m$.

Por otro lado, si $m = n(t = d)$, entonces $indA = 0$. Es decir, una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ es un ejemplo simple de un operador de Fredholm con índice cero.

Ejemplo 1.18. *El operador integro-diferencial*

$L : D_2[0,2] \to L_2[0,2]$ *definido por:*

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^1 \dot{x}(s)ds$$

es un operador de Fredholm. En efecto, la ecuación homogénea del operador $(Lx)(t) = 0$ *tiene dos soluciones linealmente independientes, a saber* $x_1(t) = 1$ *y* $x_2(t) = t$*, mientras que la ecuación* $(L^*g)(t) = 0$ *posee una solución* $g_1(t) = \mathcal{X}_{[0,1]}(t)$*. Por lo tanto, L es un operador de Fredholm con índice cero.*

Ejemplo 1.19. *Considere el operador* $L : l_2 \to l_2$ *definido por* $Lx = (x_2, x_3, ...)$*, para todo* $x \in l_2$*. Entonces L y* L^* *son operadores de Fredholm. En efecto, el operador L es lineal y continuo, por lo tanto, posee un operador adjunto* $L^* : l_2 \to l_2$*. La igualdad* $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle$*, es válida para todo* $x, y \in l_2$*, lo cual implica que* $L^*y = (0, y_1, y_2, ...)$ *para* $y = (y_1, y_2, ...) \in l_2$*.*

El núcleo del operador L consiste de todos los vectores de la forma $(c, 0, 0, ...)$*, con c un número arbitrario. Para el núcleo del operador* L^**, se tiene que* $N(L^*) = \{0\}$*, y por tanto,*

$$\dim N(L) = 1 \;\; y \;\; \dim N(L^*) = 0.$$

Ejemplo 1.20. *Los operadores* L^k *y* $(L^*)^k$*, con* $Lx = (x_2, x_3, ...)$ *para toda* $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$*, son también operadores de Fredholm.*

En efecto, el operador L^k *transforma un elemento* $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$ *de acuerdo a la siguiente regla de correspondencia* $L^kx = (x_{k+1}, x_{k+2}, ...)$*. El operador adjunto* $(L^*)^k$ *esta definido por la igualdad siguiente:*

$$(L^*)^k y = (\underbrace{0, .., 0}_{k}, y_1, y_2, ...) \quad \text{para toda } y = (y_1, y_2, ...) \in l_2.$$

Así, el $N(L^k)$ *consta de todos los elementos de la forma* $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, 0, 0, ...)$*, donde cada* α_i *es un número arbitrario para todo* $i = 1, ..., k$*. Entonces la* $dim N(L^k) = k$*. El núcleo del operador* $(L^*)^k$ *esta formado por todos el elemento cero, es decir,* $\dim N((L^*)^k) = \{0\}$*. Por ello*

$$indL^k = k \quad y \quad ind(L^*)^k = -k.$$

Por lo tanto, L^k y $(L^*)^k$ son operadores de Fredholm.

Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ un operador de Fredholm con B_1 y B_2 espacios de Banach. Como los espacios nulos $N(L)$ y $N(L^*)$ son de dimensión finita entonces tienen complemento directo (ver 1.3). Por ello, estudiaremos la relación que hay entre el espacio nulo $N(L^*)$ y el rango del operador L. Si $g \in N(L^*) \subseteq B_2^*$, entonces

$$0 = (L^*g)x = g(Lx)$$

para todo $x \in B_1$, es decir, el funcional g es ortogonal a $R(L)$. Si $g \in R(L)^\perp$, entonces $g(Lx) = 0$ para todo $x \in B_1$. Por tanto, $g \in B_2^*$ y $L^*g = 0$.

Así, el espacio nulo $N(L^*)$ del operador adjunto L^* es un complemento ortogonal de la imagen del operador L (es decir, $N(L^*) = R(L)^\perp$), y

$$B_2 = Y_0 \oplus R(L),$$

donde Y_0 es isomorfo al espacio nulo $N(L^*)$.

Ahora consideremos la relación entre $N(L)$ y $R(L^*)$. Si $x \in N(L)$ y $f \in R(L^*)$, entonces $f(x) = (L^*g)(x) = g(Lx) = 0$, es decir, $N(L)$ y $R(L^*)$ son ortogonales, es decir, $N(L) = R(L^*)^\perp$. Así,

$$B_1 = N(L) \oplus X_0,$$

donde X_0 es isomorfo al espacio $R(L^*)$.

1.5. Operadores de dimensión finita

En esta sección se considerarán una clase muy especial de operadores lineales, los cuales están dentro de la teoría general de operadores lineales y acotados. Una de sus aplicaciones es la construcción de operadores inversos generalizados para operadores de Fredholm mediante la relación que existe entre el operador proyección sobre el núcleo (cokernel) del operador de Fredholm y los operadores de dimensión finita. Por ello, se estudiarán algunas propiedades de los operadores de dimensión finita y de los operadores proyección.

Definición 1.21. *Sean B un espacio de Banach y $\mathcal{P} : B \to B$ una aplicación lineal. Si $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, es decir $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) = \mathcal{P}(x)$ para todo x en el espacio B, $\mathcal{P}$ es llamado una **proyección** en el espacio B.*

Ahora se darán algunos ejemplos clásicos:

Ejemplo 1.21.

(i) *El operador identidad Id, en cualquier espacio de Banach, es una proyección en el espacio de Banach.*

(ii) *El operador nulo es una proyección en el espacio de Banach.*

(iii) *Si $\mathcal{P}$ es una proyección en el espacio de Banach, entonces $Id - \mathcal{P}$ es una proyección en el mismo espacio. En efecto, como $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned}(Id - \mathcal{P})^2 &= (Id - \mathcal{P})(Id - \mathcal{P}) \\ &= Id - \mathcal{P} - \mathcal{P} + \mathcal{P}^2 \\ &= Id - \mathcal{P}.\end{aligned}$$

Lema 1.4. *[3, pg.30] Sean B un espacio de Banach y $\mathcal{P}$ una proyección en el espacio B, con núcleo $N(\mathcal{P})$ y rango $R(\mathcal{P})$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(i) $R(\mathcal{P}) = N(Id - \mathcal{P}) = \{x \in B : \mathcal{P}x = x\}$.

(ii) $N(\mathcal{P}) = R(Id - \mathcal{P})$.

(iii) $R(\mathcal{P}) \cap N(\mathcal{P}) = \{0\}$ *y* $B = R(\mathcal{P}) + N(\mathcal{P})$.

(iv) *Si B_1 y B_2 son subespacios de B tal que $B_1 \cap B_2 = \{0\}$ y $B = B_1 + B_2$, entonces el espacio B tiene una única proyección Q tal que $B_1 = R(Q)$ y $B_2 = N(Q)$.*

Teorema 1.10. *Si $\mathcal{P}$ es una proyección continua en un espacio de Banach B, entonces*

$$B = R(\mathcal{P}) \oplus N(\mathcal{P}), \tag{1.5}$$

donde $R(\mathcal{P})$ y $N(\mathcal{P})$ son subespacios cerrados del espacio B.

Demostración. Se sabe que los operadores $\mathcal{P}$ e $Id - \mathcal{P}$ son continuos. Por otro lado, los subespacios $N(\mathcal{P})$ y $R(\mathcal{P}) = N(Id - \mathcal{P})$ (la ultima igualdad es válida por el lema 1.4 inciso (i)) son cerrados. Por tanto, el teorema se concluye por el inciso (iii) del lema 1.4. $\square$

Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ un operador de Fredholm tal que $\alpha(L) = t$ y $\beta(L) = d$. Sean $\{f_i\}_{i=1}^t$ y $\{\rho_s\}_{s=1}^d$ bases en los espacios nulos $N(L)$ y $N(L^*)$ de los operadores L y L^*, respectivamente. Por el Lema 1.1, existen funciones continuas linealmente independientes, a saber, $\{\gamma_j\}_{j=1}^t \subset B_1^*$; y elementos $\{\psi_k\}_{k=1}^d \subset B_2$, biortogonales para estas bases, es decir;

$$\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, ..., t,$$

y

$$\rho_s(\psi_k) = \delta_{sk}, \quad s, k = 1, ..., d.$$

Ahora, se definen los operadores finitos $\mathcal{P}_L : B_1 \to B_1$ y $\mathcal{P}_{L^*} : B_2 \to B_2$ como sigue:

$$\mathcal{P}_L x = \sum_{i=1}^{t} \gamma_i(x) f_i \quad \text{y } \mathcal{P}_{L^*} y = \sum_{s=1}^{d} \rho_s(y) \psi_s. \tag{1.6}$$

Se estudiará la relación entre los subespacios de B_1 y B_2 que son descompuestos por los operadores $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$, respectivamente.

Lema 1.5. *Sean $\mathcal{P}_L : B_1 \to B_1$ y $\mathcal{P}_{L^*} : B_2 \to B_2$ definidos como en 1.6. Entonces, los operadores $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ son proyecciones continuas. Además, B_1 y B_2 tienen descomposición en suma directa como:*

$$B_1 = N(L) \oplus X_0, \quad B_2 = Y_0 \oplus R(L), \tag{1.7}$$

donde $N(L), X_0, Y_0$ y $R(L)$ son subespacios cerrados.

Demostración. Primero se probará que los operadores $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$, son proyecciones.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_L^2 x &= \mathcal{P}_L(\mathcal{P}_L x) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \gamma_i \left(\sum_{j=1}^{t} \gamma_j(x) f_j \right) f_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} \gamma_i(f_j)\gamma_j(x) f_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} \delta_{ij}\gamma_j(x) f_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \gamma_i(x) f_i \\
&= \mathcal{P}_L x,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{L^*}^2 y &= \mathcal{P}_{L^*}(\mathcal{P}_{L^*} y) \\
&= \sum_{s=1}^{d} \rho_s \left(\sum_{k=1}^{d} \rho_k(y) \psi_k \right) \psi_s \\
&= \sum_{s=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \rho_s(\psi_k)\rho_k(y) \psi_s \\
&= \sum_{s=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \delta_{sk}\rho_k(y) \psi_s \\
&= \sum_{s=1}^{d} \rho_s(y) \psi_s \\
&= \mathcal{P}_{L^*} x.
\end{aligned}
$$

La continuidad de las proyecciones $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ se sigue de la continuidad de las funciones γ_j con $j = 1, ..., t$, y ρ_s con $s = 1, ..., d$; y del hecho de que las sumas usadas para definir los operadores $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ son finitos dimensionales.
Luego, por el Teorema 1.10, las proyecciones $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ separan los espacios B_1 y B_2 en sumas directas topológicas de subespacios

cerrados como:

$$B_1 = N(\mathcal{P}_L) \oplus R(\mathcal{P}_L), \quad B_2 = N(\mathcal{P}_{L^*}) \oplus R(\mathcal{P}_{L^*}).$$

Para probar la relación 1,7 es necesario y suficiente mostrar que:

$$\begin{array}{ll} (i) N(L) = R(\mathcal{P}_L) & (ii) R(L) = N(\mathcal{P}_{L^*}) \\ (iii) Y_0 = R(\mathcal{P}_L^*) & (iv) X_0 = N(\mathcal{P}_L) \end{array} \tag{1.8}$$

Como

$$\begin{aligned} L\mathcal{P}_L x &= L\left(\sum_{i=1}^{t} \gamma_i(x) f_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \gamma_i(x) L f_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se tiene que $R(\mathcal{P}_L) \subset N(L)$.

Si $x \in N(L)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$. Para poder aplicar las funcionales γ_j, con $j = 1, ..., t$ basta la ultima igualdad, si se toma $c_i = \gamma_i(x)$, es decir, $x = \sum_{i=1}^{t} \gamma_i(x) f_i$.

Sin embargo, $x = \mathcal{P}_L x$, se sigue de la afirmación (i) 1.4 que $x \in R(\mathcal{P}_L)$. Por lo cual, $N(L) \subset R(\mathcal{P}_L)$. Así la igualdad del inciso (i) de 1.8.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{L^*} L x &= \sum_{s=1}^{d} \rho_s(Lx) \psi_s \\ &= \sum_{s=1}^{d} (L^* \rho_s)(x) \psi_s = 0, \end{aligned}$$

donde ρ_s son los vectores básicos del espacio nulo del operador L^*, por lo cual; $R(L) \subset N(\mathcal{P}_{L*})$.

Ahora, si $y \in N(\mathcal{P}_{L^*})$, entonces $\mathcal{P}_{L^*} y = \sum_{i=1}^{d} \rho_s(y) \psi_s = 0$, esto implica que $\psi_s(y) = 0$ para $s = 1, ..., d$, esto se debe a la resolubilidad normal del operador L, esto dirá que $y \in R(L)$. Por lo tanto, $N(\mathcal{P}_{L^*}) \subset R(L)$ y así la igualdad (ii) de la relación 1.8, está probada.

Las igualdades (iii) y (iv) de la relación 1.8 se prueban de manera análoga.

Se concluye que de las relaciones en 1.8 se implica que las proyecciones $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ descomponen a los espacios B_1 y B_2 en sumas directas de subespacios cerrados.

□

A continuación se construyen cierto tipo de operadores de dimensión finita los cuales nos servirán en la construcción de inversas generalizadas.

Sea $p = \text{mín}(t, d)$, donde $t = dimN(L)$ y $d = dimN(L^*)$. Ahora, consideremos los siguientes operadores definidos sobre B_1 y B_2, respectivamente.

$$\overline{\mathcal{P}}_L : B_1 \to \begin{cases} N_1 \subset N(L^*) & \text{si } t \leq d, \\ \quad N(L^*) & \text{si } t \geq d, \end{cases} \tag{1.9}$$

donde $\overline{\mathcal{P}}_L$ está definido como: $\overline{\mathcal{P}}_L x = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i$.

$$\overline{\mathcal{P}}_{L^*} : B_2 \to \begin{cases} \quad N(L) & \text{si } t \leq d, \\ N_2 \subset N(L) & \text{si } t \geq d, \end{cases} \tag{1.10}$$

y donde $\overline{\mathcal{P}}_{L^*}$ se define como: $\overline{\mathcal{P}}_{L^*} y = \sum_{s=1}^{p} \rho_s(y) f_s$.

Nuestro principal interés es garantizar que los rangos de los operadores $\overline{\mathcal{P}}_L$ y $\overline{\mathcal{P}}_{L^*}$, pertenecen a subespacios de los espacios nulos $N(L^*)$ y $N(L)$, respectivamente. En efecto, de la Ecuación 1.8-(i),(ii) y del Lema 1.4-(i) tenemos que los subespacios $N(L)$ y $N(L^*)$ están formados por elementos que satisfacen las relaciones:

$$\mathcal{P}_L x_0 = x_0 \text{ para todo } x_0 \in B_1,$$

y

$$\mathcal{P}_{L^*} y_0 = y_0 \text{ para todo } y_0 \in B_2,$$

respectivamente.

Sean $x_0 = \overline{\mathcal{P}}_{L^*} y$ y $y_0 = \overline{\mathcal{P}}_L x$; donde $x \in B_1$ y $y \in B_2$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_L x_0 &= \mathcal{P}_L \overline{\mathcal{P}}_{L^*} y \\
&= \sum_{i=1}^{t} \gamma_i \left(\sum_{s=1}^{P} \rho_s(y) f_s \right) f_i \\
&= \sum_{i=1}^{t} \sum_{s=1}^{p} \gamma_i(f_s) \rho_s(y) f_i \\
&= \sum_{s=1}^{p} \rho_s(y) f_s \\
&= x_0,
\end{aligned}
$$

dado que

$$
\gamma_i(f_s) = \begin{cases} \delta_{is} & \text{para} \quad i, s = 1 \ldots, p, \\ 0 & \text{para} \qquad i > p. \end{cases}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{L^*} y_0 &= \mathcal{P}_{L^*} \overline{\mathcal{P}}_L x \\
&= \sum_{s=1}^{d} \rho_s \left(\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x) \psi_i \right) \psi_s \\
&= \sum_{s=1}^{d} \sum_{i=1}^{p} \rho_s(\psi_i) \gamma_i(x) \psi_s \\
&= \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x) \psi_s \\
&= y_0,
\end{aligned}
$$

dado que

$$
\rho_s(\psi_i) = \begin{cases} \delta_{si} & \text{para} \quad s, i = 1 \ldots, p, \\ 0 & \text{para} \qquad i > p. \end{cases}
$$

Así, los rangos de los operadores $\overline{P}_L$ y $\overline{P}_{L^*}$ son subespacios de los espacios $N(L^*)$ y $N(L)$, respectivamente.

Ahora, el siguiente lema establece la relación entre las proyecciones mencionadas en (1.6) y los operadores de dimensión finita establecidos en (1.9, 1.10).

Lema 1.6. *Sean los operadores* $\mathcal{P}_L, \mathcal{P}_{L^*}, \overline{\mathcal{P}}_L$ *y* $\overline{\mathcal{P}}_{L^*}$ *definidos como en (1.6), (1.9) y (1.10) respectivamente. Entonces se satisfacen las siguientes relaciones:*

(i) $\mathcal{P}_{L^*}\overline{\mathcal{P}}_L = \overline{\mathcal{P}}_L\mathcal{P}_L = \overline{P}_L$,

(ii) $\mathcal{P}_L\overline{\mathcal{P}}_{L^*} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*}\mathcal{P}_{L^*} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$,

(iii) $\overline{\mathcal{P}}_L\overline{\mathcal{P}}_{L^*}y = \sum_{s=1}^{p} \rho_s(y)\psi_s$,

(iv) $\overline{\mathcal{P}}_{L^*}\overline{\mathcal{P}}_Lx = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)f_i$.

El lema se prueba de manera inmediata.

Capítulo 2

Inversas generalizadas

En este capítulo se definirán las inversas laterales de un operador, además se darán condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de dichos operadores invertibles. Las inversas externas e internas serán definidas, así mismo, se presentarán algunos resultados de los mismos. Finalmente se definirá la pseudoinversa de Moore-Penrose.

2.1. Inversas laterales

En esta sección se darán algunos resultados conocidos, por lo cual se omitirán sus pruebas, sin embargo son de utilidad para este trabajo por lo que se presentan aquí, pero puede encontrar las pruebas de las mismas en [12] y [10].

Definición 2.1. *Un operador $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es llamada* ***invertible por la izquierda*** *si existe un operador $L' \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ tal que $L'L = I_{B_1}$. El operador L' es llamado* ***inverso izquierdo*** *para L y es denotado por: L_l^{-1}.*

Definición 2.2. *Un operador $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es llamado* ***invertible por la derecha*** *si existe un operador $L' \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ tal que $LL' = I_{B_2}$. El operador L' es llamado* ***inverso derecho*** *para el L y es denotado por: L_r^{-1}.*

Se denotará como I_{B_1} y I_{B_2} a los operadores identidad en los espacios B_1 y B_2 respectivamente.

Los siguientes teoremas dan condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de los operadores inversos tanto por la derecha como por la izquierda.

Teorema 2.1. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Entonces L es invertible por la derecha si y solo si cumple las siguientes condiciones:*

(i) $R(L) = B_2$;

(ii) $N(L)$ *posee un complemento directo en* B_1.

La relación 1.1 implica que la condición $R(L) = B_2$ sea equivalente a la igualdad $N(L^*) = \{0\}$. Luego, por el corolario 1.2 la segunda condición es válida, si el $N(L)$ es de dimensión finita.

Teorema 2.2. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Entonces L es invertible por la izquierda si y solo si cumple las siguientes condiciones:*

(i) $R(L)$ *es un subespacio con complemento directo en* B_2*;*

(ii) $N(L) = \{0\}$.

Si $N(L^*)$ es de dimensión finita, entonces la primera condición se satisface por la relación 1.1 y Corolario 1.2.

Definición 2.3. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, se llamará invertible en el sentido más general si existe un operador $T \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ tal que*

$$LTL = L.$$

El operador T es llamado la ***inversa generalizada*** *del operador L y es denotado por: L^-.*

Si un operador $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es invertible tanto por la izquierda como por la derecha, entonces este es invertible. Los operadores lineales acotados unilateralmente invertibles son invertibles en el sentido generalizado.

Teorema 2.3. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Entonces L es invertible en el sentido generalizado si y solo si*

(i) L es un operador densamente definido y con rango cerrado;

(ii) El subespacio $N(L)$ posee un complemento directo en B_1;

(iii) El subespacio $R(L)$ posee un complemento directo en B_2.

Corolario 2.1. *Sea $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, con H_1 y H_2 espacios de Hilbert, entonces el operador L es invertible en el sentido generalizado si y solo si L es un operador densamente definido con rango cerrado.*

Corolario 2.2. *Cualquier operador finito dimensional en $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ es invertible en el sentido general.*

2.2. Inversas internas y externas

En esta sección se darán las definiciones de inversas internas como externas, en espacios de Banach, así mismo se darán algunas propiedades de las mismas.

Definición 2.4. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Se dirá que un operador es una* ***inversa generalizada interna*** *del operador L, si existe $T \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$, tal que $LTL = L$. El operador T se llama* ***inversa generalizada interna*** *y se denota por: T_i, el operador T_i es interno regular.*

Definición 2.5. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Se dirá que un operador es una* ***inversa generalizada externa*** *del operador L, si existe $T \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ y T diferente del operador nulo, tal que $TLT = T$. El operador T se llama* ***inversa generalizada externa*** *y se denota por: T_e. En este caso T_e es externo regular.*

Definición 2.6. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Un operador $T \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ se llama* ***inversa generalizada reflexiva*** *de L, si T es inversa externa e interna de L.*

Lema 2.1. *Si $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(i) Si L es invertible, entonces L^{-1} es la única inversa generalizada interna de L.

(ii) Si $T_i, T_i^{'} \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ son inversas generalizadas internas de L, entonces $T_i L T_i^{'}$ es una inversa generalizada reflexiva de L.

(iii) Si $T \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ es inversa generalizada interna o externa de L, entonces LT es una proyección en $\mathcal{L}(B_2)$, y TL es una proyección en $\mathcal{L}(B_1)$.

Demostración. (i) Supóngase que L' es otra inversa generalizada interna de L, de tal manera que $L' \neq L^-$. De la definición se tiene que $LL'L = L$ y $LL^-L = L$, de las igualdades anteriores se tiene $LL'L = LL^-L$. Como L es invertible se sigue que $LL^- = L^-L = Id$, multiplicando por L^- por la izquierda y por la derecha en ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene que; $L'L = L^-L$, así $L' = L^-$, lo cual asegura que solo hay una única inversa generalizada interna de L.

(ii) Por definición de inversa generalizada interna se tiene:

$$LT_iL = L \quad \text{y} \quad LT_i^{'}L = L.$$

Se afirma que $T_iLT_i^{'}$ es una inversa externa generalizada interna de L. En efecto,

$$L(T_iLT_i^{'})L = (LT_iL)T_i^{'}L = LT_i^{'}L = L.$$

Ahora se mostrará que $T_iLT_i^{'}$ es una inversa generalizada externa de L.

$$\begin{aligned}(T_iLT_i^{'})L(T_iLT_i^{'}) &= T_i(LT_i^{'}L)(T_iLT_i^{'})\\ &= T_iL(T_iLT_i^{'})\\ &= T_i(LT_iL)T_i^{'}\\ &= T_iLT_i^{'}.\end{aligned}$$

Luego $T_iLT_i^{'}$ es inversa generalizada interna y externa de L y por lo tanto, es una inversa generalizada reflexiva de L.

(iii) Supóngase que T es una inversa interna de L, es decir, T_i, luego

$$(LT_i)^2 = (LT_i)(LT_i) = (LT_iL)T_i = LT_i,$$

así, LT_i es un operador idempotente y LT_i es un operador de B_2 en B_2, por lo que LT_i es una proyección en $\mathcal{L}(B_2)$. De manera análoga se demuestra que T_iL es una proyección en $\mathcal{L}(B_1)$, ya que

$$(T_iL)^2 = (T_iL)(T_iL) = T_i(LT_iL) = T_iL.$$

Por otro lado, si T es una inversa generalizada externa, es decir T_e de L. Se cumple que

$$(LT_e)^2 = (LT_e)(LT_e) = L(T_eLT_e) = LT_e,$$

también

$$(T_eL)^2 = (T_eL)(T_eL) = (T_eLT_e)L = T_eL,$$

así, LT_e y T_eL son operadores idempotentes, por lo tanto son proyecciones en $\mathcal{L}(B_2)$ y $\mathcal{L}(B_1)$ respectivamente.

□

Observación 2.1. *Del lema 2.1 se sigue que L tiene inversa generalizada reflexiva si y solo si L es interno regular.*

Teorema 2.4. *Si $T_i \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ es una inversa generalizada interna de $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, entonces LT_i es una proyección de B_2 sobre $R(L)$, $Id - T_iL$ es una proyección de B_1 sobre $N(L)$. En consecuencia, $R(L)$ y $N(L)$ son subespacios complementarios de B_2 y B_1 respectivamente.*

Demostración. Se tiene que $R(LT_i) \subset R(L)$. Ahora supóngase que $x \in R(L)$. Entonces existe algún $y \in B_1$, tal que $x = Ly = LT_iLy = LT_ix$. En consecuencia, $x \in R(LT_i)$.

Si $x \in N(L)$, entonces $(Id - T_iL)x = x$. Por lo tanto, $N(L) \subset R(Id - T_iL)$. Por otro lado, sea $x \in R(Id - T_iL)$, como $Id - T_iL$ es una proyección, se sigue que $x = (Id - T_iL)x$, implica que $T_iLx = 0$. Por lo tanto, $Lx = LT_iLx = 0$ y $x \in N(L)$. □

Teorema 2.5. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$. Si $R(L)$ y $N(L)$ son subespacios complementarios y cerrados de B_2 y B_1 respectivamente, entonces L es interno regular*

Demostración. Supóngase que existen subconjuntos cerrados M de B_1 y N de B_2, tales que $B_1 = M \oplus N(L)$ y, $B_2 = R(L) \oplus N$.

En general, el operador L tiene la siguiente forma matricial con respecto a la descomposición de estos espacios:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_3 \\ L_4 & L_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix}.$$

Note que L_3 representa la restricción de L que va del $N(L)$ a $R(L)$, y L_2 es la restricción de L que va de $N(L)$ a N, así, se sigue que $L_3 = O$ y $L_2 = O$. Además, L_4 es la restricción de L el cual va de M a N, y N es un subespacio complementario de $R(L)$. Por lo tanto, $L_4 = O$. En consecuencia, L tiene la siguiente forma

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Como $N(L) = N(L_1) \oplus N(L)$, se sigue que $N(L_1) = \{0\}$. La igualdad $R(L) = R(L_1)$ es clara. Por lo tanto, L_1 es un operador invertible de M a $R(L)$. Sea $S \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ arbitrario. Entonces S tiene la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_3 \\ S_4 & S_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix}.$$

Una multiplicación directa de matrices demuestra que S es una inversa generalizada interna de L si y solo si $S_1 = S_1^-$, donde S_1 es invertible. Por lo tanto, existen inversas generalizadas internas de L y todas ellas tienen la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_3 \\ S_4 & S_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

donde S_3, S_4 y S_2 son operadores lineales arbitrarios sobre los correspondientes subespacios. $\square$

El siguiente corolario da una caracterización sobre operadores internos regulares.

Corolario 2.3. *Un operador $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es interno regular si y solo si $N(L)$ y $R(L)$ son subespacios complementarios cerrados de B_1 y B_2.*

Por otro lado, si T_i es una inversa generalizada interna de L entonces se pueden dar las formas matriciales de L y T_i con respecto a las descomposiciones de los espacios B_1 y B_2 de la siguiente forma; $B_1 = R(T_iL) \oplus N(L)$ y $B_2 = R(L) \oplus N(LT_i)$. Para esto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ un operador interno regular, y sean M y N subespacios cerrados de B_1 y B_2 respectivamente, tal que $B_1 = M \oplus N(L)$ y $B_2 = R(L) \oplus N$. Entonces L tiene la siguiente forma matricial:*

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix},$$

donde L_1 es invertible.

Además, si T_i es una inversa generalizada interna de L tal que $R(T_iL) = M$ y $N(LT_i) = N$, entonces T_i tiene la siguiente forma:

$$T_i = \begin{bmatrix} L_1^- & O \\ O & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} N \\ N(L) \end{bmatrix},$$

donde $W \in L(N, N(L))$ es arbitrario.

Demostración. Para verificar que L tiene esa forma, veamos la expresión 2.1. De acuerdo a la expresión en 2.2 sabemos que T_i tiene la forma

$$T_i = \begin{bmatrix} L_1^- & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(L) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix}.$$

Si $R(T_iL) = M$, se sigue que T_iL es la proyección de B_1 sobre M a lo largo de $N(L)$. Así,

$$T_IL = \begin{bmatrix} Id & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ N(L) \end{bmatrix}.$$

□

De otra manera,

$$T_iL = \begin{bmatrix} Id & O \\ VL_1 & O \end{bmatrix},$$

con respecto a la misma descomposición. Por lo tanto, $V = O$ y por la misma razón LT_i es la proyección de B_2 sobre $R(L)$ a lo largo de N. Finalmente, se tiene que $U = O$.

Del Teorema 2.6, se observa que la inversa generalizada interna es única si se fija el rango y el espacio nulo de un operador.

Teorema 2.7. *Sea $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, existe una inversa generalizada externa $T_e \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ de L($T_e \neq O$) si y solo si $L \neq O$.*

Demostración. Si $T_e L T_e = T_e$ y $T_e \neq O$, entonces es claro que $L \neq O$. De otra manera, si $T \neq O$, entonces existe algún $x_0 \in B_1$ tal que $Lx_0 = y_0 \neq 0$. Considere las descomposiciones de los espacios[1] $B_1 = span\{x_0\} \oplus M$ y $B_2 = span\{y_0\} \oplus N$ para los subespacios cerrados M, N de B_1, B_2 respectivamente. Entonces L tiene la forma matricial siguiente

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ O & L_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} span\{x_0\} \\ M \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} span\{y_0\} \\ N \end{bmatrix}.$$

Aquí $L_{11}x_0 = Lx_0 = y_0$ y L_{11} es invertible. Considere el operador

$$T_e = \begin{bmatrix} L_{11}^{-} & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} span\{y_0\} \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} span\{x_0\} \\ M \end{bmatrix}.$$

Se observa que $T_e \neq O$ y además $T_e L T_e = T_e$. □

Al conjunto de las inversas generalizadas externas de L será denotado por Γ_e. Note que si T_e es una inversa externa de L, entonces L es inversa generalizada interna de T_e.

Ahora veamos la forma matricial para las inversas generalizadas externas.

Teorema 2.8. *Sean $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ un operador distinto de cero, y M, N subespacios de B_1 y B_2 respectivamente, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) Existe un operador distinto de cero $T_e \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ tal que

$$T_e L T_e = T_e, \quad R(T_e) = M \quad y \quad N(T_e) = N.$$

[1] ver [8], página 45.

(ii) *M y N son subespacios cerrados complementarios de B_1 y B_2 respectivamente, $L(M)$ es cerrado, $L(M) \oplus N = B_2$, y la restricción $L|_M : M \to L(M)$ es invertible.*

Si (i) o (ii) se satisfacen, entonces el operador T_e en la parte (i) es único.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $T_eLT_e = T_e \neq O, R(T_e) = M$ y $N(T_e) = N$. Dado que L es una inversa generalizada interna de T_e, se sigue que T_eL es una proyección de B_1 sobre $M = R(T_e)$ y $Id - LT_e$ es una proyección de B_1 sobre $N = N(T_e)$. Luego $L(M) = R(LT_e)$ es un subespacio cerrado complementario de N de B_2. Ahora, la restricción $L|_M : M \to L(M)$ es sobreyectivo.

Supóngase que existe algún $y \in B_2$ tal que $T_ey = x$. Por lo tanto, se tiene que $0 = T_eLx = T_eLT_ey = T_ey$, esto implica que $x = 0$. Así, se sigue que $L|_M$ es inyectivo sobre M. Finalmente, $L|_M : M \to L(M)$ es invertible.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Existe un subespacio cerrado M_1 de B_1 tal que $B_1 = M \oplus M_1$. También, se satisface que $B_2 = L(M) \oplus N$. Considere la forma matricial de L con respecto a estas descomposiciones de espacios:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} L(M) \\ N \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Como L aplica M a $T(M)$, se obtiene $T_4 = O$. Dado que la restricción $T_1 = T|_M : M \to L(M)$ es invertible, el operador

$$T_e = \begin{bmatrix} L_1^- & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

satisface el inciso (i). Ahora, supóngase que (i) o (ii) se cumple. Considere un operador arbitrario $T_e \in L(B_2, B_1)$, satisface (i). Entonces T_e tiene la forma

$$T_e = \begin{bmatrix} L & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix},$$

Para algunos operadores lineales acotados L, U, V, W. Las hipótesis $R(T_e) = M$ implica que $V = O$ y $W = O$. Si $N(T_e) = N$, entonces $U = O$, y L es invertible. Ahora la condición $T_eLT_e = T_e$ implica que $LL_1L = L$. Como L es invertible, se obtiene $L = L_1^-$. por lo tanto $T_e = L_1$. Por construcción T_e es única.

$\square$

Si las condiciones 2.3 y 2.4 se cumplen, entonces existe una única inversa generalizada externa T_e de L con rango M y espacio nulo N prescritos, dicho espacio será denotado por $\mathcal{T}_{M,N}$. El siguiente corolario muestra la forma matricial de L y su inversa generalizada exterior $\mathcal{T}_{M,N}$.

Corolario 2.4. *Bajo las condiciones 2.3 y 2.4, del Teorema 2.8, Sea $T_e = \mathcal{T}_{M,N}$ la correspondiente inversa generalizada externa de L. Entonces L tiene la siguiente forma matricial:*

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & O \\ O & L_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ N(T_eL) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} L(M) \\ N \end{bmatrix},$$

donde L_1 es invertible. Además, $\Gamma_{M,N}$ tiene la siguiente forma

$$\mathcal{T}_{M,N} = \begin{bmatrix} L_1^- & O \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ N(T_eL) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Tomando $M_1 = N(T_eL)$ en la prueba del Teorema 2.8, y considere la forma 2.4. Ahora,

$$T_eL = \begin{bmatrix} Id & L_1^-L_3 \\ O & O \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ N(T_eL) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ N(T_eL) \end{bmatrix}.$$

Como T_eL es la proyección sobre $R(T_eL) = R(T_e) = M$ paralelo a $N(T_eL)$, se sigue que $L_3 = O$. El resto se sigue de la prueba del Teorema 2.8. $\square$

Capítulo 3

Inversas generalizadas para operadores de Fredholm es espacios de Banach

En este capítulo se estudiará una manera muy práctica de utilizar los operadores compactos[1], es decir, se trabajará con la cerradura de operadores lineales finitos(mencionados en la sección de preliminares). Todo esto con el fin de construir la inversa generalizada para operadores de Fredholm sobre los espacios de Banach. Por lo cual se dará un resultado análogo al lema de Schmidt para operadores de Fredholm, y eso se hará usando el Teorema de **Atkinson**[2] sobre la representación de operadores de Fredholm en forma de suma de operadores de dimensión finita e inversas unilaterales.

[1] Ver [8] pagina 252

[2] Para ver la prueba del teorema ver [12] página 90 y [4] página 37,

3.1. Un análogo del Lema de Schmidt para operadores de Fredholm en espacios de Banach

Un método para la construcción de inversas generalizadas para operadores de Fredholm es mediante el uso de la llamada estructura de Schmidt [M. M. Vainberg and V. A. Trenogin, Theory of Branching of the Solutions of Nonlinear Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1969)]. Una clase de operadores de Fredholm invertibles generalizados es descrita por el Teorema de Nikol'skii [S. M. Nikol'skii, "Linear equations in linear normed spaces," Izv. Akad. Nauk SSSR, 7, No. 3, 147–163 (1943)]. De acuerdo con este Teorema, un operador linealmente acotado de Fredholm definido sobre un espacio normado puede ser representado en la forma de una suma de un operador acotado e invertible y un operador de dimensión finita. En [F. V. Atkinson, "Normal solvability of linear equations in normed spaces," Mat. Sb. Nov. Ser., 28, No. 1, 3–14 (1951).] Atkinson generalizo el Teorema de Nikol'skii para el caso de operadores Noetherian invertibles generalizados, en donde se establece que cualquier operador Noetherian puede ser representado en la forma de una suma de inversa lateral con un operador de dimensión finita.

El Lema de **Schmidt**, es muy relevante en el álgebra pero lamentablemente no es válido para los operadores de Fredholm, por lo que en esta sección se podrá establecer y demostrar un análogo al ya conocido lema de Schmidt, esto se hará con ayuda del Teorema **Atkinson**. Recordar que el Teorema **Atkinson** generaliza el Teorema de **Nikol'skii**[3] para el caso de operadores de Fredholm.

Lema 3.1. *Sean $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ un operador de Fredholm de cualquier índice y consideremos el operador $\overline{\mathcal{P}}_L : B_1 \to B_2$. Entonces el operador $\overline{L} := L+\overline{\mathcal{P}}_L$, tiene inversa lateral (izquierda o derecha) definida como:*

(i) $\overline{L}_l^{-1} := (L + \overline{\mathcal{P}}_L)_l^{-1}$, *si* $t \leq d$.

(ii) $\overline{L}_r^{-1} := (L + \overline{\mathcal{P}}_L)_r^{-1}$, *si* $t \geq d$.

[3] B.Nikol

donde $\dim N(\overline{L}) = t$ *y* $\dim N(\overline{L}^*) = d$.

Demostración. Sea $t \leq d$. Del teorema 2.2 existe $\overline{L}_l^{-1}$ si y solo si

(i) $N(\overline{L}) = 0$,

(ii) $R(\overline{L})$ es un subespacio con complemento directo en B_2.

Primero se probará el inciso (i). Supóngase que existe $x_0 \neq 0$, con $x_0 \in B_1$, tal que $(L + \overline{\mathcal{P}}_L)x_0 = 0$. Luego $Lx_0 = -\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x_0)\psi_i$. Aplicando las funciones ρ_s, con $s = 1, ..., d$ en ambos lados de la igualdad anterior, de esto se tendría el siguiente sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} 0 &= (L^*\rho_s)(x_0) \\ &= \rho_s(Lx_0) \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x_0)\rho_s(\psi_i) \\ &= -\gamma_s(x_0), \text{ con } s = 1, ..., p = t. \end{aligned}$$

Recordar que los funcionales γ_s, con $s = 1, ..., p = t$, son linealmente independientes, por el corolario 1.1 del teorema 1.5, por lo que se concluye que $x_0 = 0$, lo cual contradice lo supuesto. Así, se tiene que $N(\overline{L}) = \{0\}$.

Ahora se mostrará que la $R(\overline{L})$ posee un complemento directo en B_2.

Sea $x \in B_1$ y $y \in B_2^*$. Luego

$$\begin{aligned} g(\overline{\mathcal{P}}_L x) &= g\left(\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)g(\psi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i(x), \end{aligned}$$

donde $\overline{\mathcal{P}^*}_L g$. Se proseguirá a determinar la forma general de la función $g \in B_2^*$, la cual satisface la siguiente ecuación

$$(L + \overline{\mathcal{P}}_L)^* g = 0.$$

Reescribiendo la ecuación se tiene;

$$L^*g = -\sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i. \tag{3.1}$$

Luego aplicando las funcionales

$$L^*g \in B_1^* \text{ y } \sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i \in B_1^*,$$

en los elementos f_k y usando la relación 3.1, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (L^*g)f_k \\ &= g(Lf_k) \\ &= -\sum_{i=1}^{p} g(\psi_i)\gamma_i(f_k) \\ &= -g(\psi_k),\ k = 1, ..., r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L^*g = 0$ y $g = \sum_{j=1}^{p} c_k\rho_j$, donde los ρ son vectores básicos del núcleo $N(L^*)$. Anteriormente se mostró que $g(\psi_i) = 0$, con $k = 1, ..., p = t$, así, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= g(\psi_k) \\ &= \sum_{j=1}^{d} c_j\rho_j(\psi_k) \\ &= \sum_{j=1}^{p} c_j\rho_j(\psi_k) + \sum_{j=p+1}^{d} c_j\rho_j(\psi_k), \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\rho_j(\psi_k) = \begin{cases} \delta_{j,k} & \text{para } j, k = 1, ..., p, \\ 0 & \text{para } j > p. \end{cases}$$

Lo anterior implica que $c_j = 0$ para $j = 1, ..., p = t$, por lo tanto,

$$g = \sum_{i=1}^{d-r} c_i\rho_i \in N(L^*) \text{ y } dimN(\overline{L^*}) = d - t < \infty.$$

De esta manera se probó la existencia de la inversa por la izquierda del operador $\overline{L}$.
Ahora, para $t \geq d$, se sigue del teorema 2.1 que el operador inverso derecho es $\overline{L}_r^{-1}$ siempre y cuando las siguientes condiciones se satisfagan:

(i) $R(\overline{L}) = B_2$ y

(ii) El subespacio $N(\overline{L})$ tiene un complemento directo en B_1.

Primero se probará que el $N(\overline{L}^*) = 0$. Supóngase que existe $g_0 \neq 0, g_0 \in B_2^*$, tal que $(L + \overline{\mathcal{P}}_L)^* g_0 = 0$ y, por lo tanto,

$$L_{g_0}^* = -\sum_{i=1}^{p} g_0(\psi_i)\gamma_i \tag{3.2}$$

Aplicando las funcionales $L_{g_0}^* \in B_1^*$ y $\sum_{i=1}^{p} g_0(\psi_i)\gamma_i \in B_i^*$ para los elementos $f_j, j = 1, .., t$, y usando la relación 3.2, así se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
0 &= g(Lf_j) \\
&= (L^* g_0) f_j \\
&= -\sum_{i=1}^{p} g_0(\psi_i)\gamma_i(f_i) \\
&= -g_0(\psi_i), i = 1, ..., p = d
\end{aligned}$$

Como los elementos ψ_i con $i = 1, ..., d$, son linealmente independientes, por otro lado la igualdad $g_0(\psi_i) = 0$ es posible solo para $g_0 \equiv 0$, lo cual contradice lo que se supuso. Por lo tanto $N(\overline{L}^*) = \{0\}$.

Los elementos $x \in B_1$ satisface la ecuación $(L + \overline{\mathcal{P}}_L)x = 0$, esto implica que

$$Lx = -\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\psi_i, \tag{3.3}$$

luego aplicando las funcionales $\rho_s, s = 1, ..., d$, en ambos lados de la igualdad 3.3, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (L^*\psi_s)(x) \\ &= \rho_s(Lx) \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x)\rho_s(\psi_i) \\ &= -\gamma_i(x). \end{aligned}$$

Así, la ecuación 3.3 toma la forma $Lx = 0$, donde $x = \sum_{j=1}^{r} c_j f_j$, donde f_j son vectores básicos del $N(L)$. Como $\gamma_i(x) = 0$ para $i = 1, ..., p = d$ y recordar que $d \leq t$, de esto se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_i(x) \\ &= \gamma_i \left(\sum_{j=i}^{t} c_j f_j \right) \\ &= -\sum_{j=1}^{p} c_i \gamma_i(f_i) + \sum_{j=p+1}^{t} c_j \gamma_j(f_i). \end{aligned}$$

Así,

$$\gamma_i(f_j) = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{para } i, j = 1, ..., p, \\ 0 & \text{para } j > p. \end{cases}$$

Se concluye que los c_j son constantes arbitrarios para $j = \alpha + 1, ..., t$, y $c_j = 0$ para $j = 1, ..., p$, con $p = d$. Por lo tanto

$$x = \sum_{i=1}^{t-d} c_i f_i \in N(\overline{L})$$

y la $R(\overline{L}) = B_2$, lo cual prueba la existencia de la inversa derecha $\overline{L}_r^{-1}$ del operador $\overline{L}$.

Notar que como el operador L es lineal y acotado, este es de Fredholm (normalmente resoluble), es decir el rango $R(L)$ es cerrado. Luego los operadores $(L + \overline{\mathcal{P}}_L)_l^{-1}$ y $(L + \overline{\mathcal{P}}_L)_r^{-1}$ son cerrados y por lo tanto son operadores acotados y $R(\overline{\mathcal{P}}_L) = N_1(L^*)$ es de dimensión finita. $\square$

Observación 3.1. *Si $t = d = p, L$ es un operador de Fredholm de índice cero y el operador $\overline{L}$ tiene inversa derecha $(\overline{L}_r^{-1})$ e inversa* *izquierda* ($\overline{L}_l^{-1}$)*, así el operador inverso* $\overline{L}^{-1}$ *existe. El Lema 3.1 es conocido como el Lema de Schmidt.*

Ahora se establecerán y se probarán algunas propiedades de los operadores

$$\overline{L}_l^{-1}, \overline{L}_r^{-1} \in \mathcal{L}(B_2, B_1).$$

Lema 3.2. *Si* $\overline{L}_l^{-1}, \overline{L}_r^{-1} \in \mathcal{L}(B_2, B_1).$*, entonces* $\overline{L}_l^{-1} y \overline{L}_r^{-1}$ *satisface las siguientes relaciones:*

(i) $\mathcal{P}_L \overline{L}_l^{-1} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$, $\mathcal{P}_L \overline{L}_r^{-1} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$,

(ii) $L\overline{L}_l^{-1} = I_{B_2} - \mathcal{P}_{L^*}$, $L\overline{L}_r^{-1} = I_{B_2} - \mathcal{P}_{L^*}$

(iii) $\overline{L}_l^{-1} P_{L^*} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$, $\overline{L}_r^{-1} P_{L^*} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$,

(iv) $\overline{L}_l^{-1} L = I_{B_1} - \mathcal{P}_L$, $\overline{L}_r^{-1} L = I_{B_1} - \mathcal{P}_L$,

donde I_{B_1} *y* I_{B_2} *son operadores identidad de sus correspondientes espacios* B_1 *y* B_2*,*

Demostración. Si $t \leq d$ entonces $\overline{L}_l^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_L)_l^{-1}$ por el Lema 3.1 y se tiene que

$$\overline{\mathcal{P}}_{L^*} = 0 \text{ y } \overline{\mathcal{P}}_{L^*}\overline{\mathcal{P}}_L = \mathcal{P}_L, \text{ con } p = \text{mín}(t, d) = t$$

luego aplicando el operador $L + \overline{\mathcal{P}}_L$ en ambos lados de la primera igualdad del inciso (i), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L &= \mathcal{P}_L(L + \overline{\mathcal{P}}_L)_l^{-1}(L + \overline{\mathcal{P}}_L) \\ &= \mathcal{P}_L \overline{L}_l^{-1}(L + \overline{\mathcal{P}}_L) \\ &= \overline{\mathcal{P}}_{L^*}(L + \overline{\mathcal{P}}_L) \\ &= \overline{\mathcal{P}}_{L^*} L + \overline{\mathcal{P}}_{L^*}\overline{\mathcal{P}}_L \\ &= \mathcal{P}_L \end{aligned}$$

esto prueba la primera igualdad del inciso (i).
Del Lema 1.6, se tiene que $\mathcal{P}_{L^*}\overline{\mathcal{P}}_L = \overline{P}_L$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{L^*}(Lx) &= \sum_{s=1}^{d} \rho_s(Lx)\psi_s \\ &= \sum_{s=1}^{d} (L^*\rho_s)(x)\psi_s = 0 \end{aligned}$$

Luego aplicando el operador $L+\overline{\mathcal{P}}_L$ en ambos lados de la igualdad (ii), se tiene

$$\begin{aligned} L &= L(L+\overline{\mathcal{P}}_L)_l^{-1}(L+\overline{\mathcal{P}}_L) \\ &= L\overline{L}_l(L+\overline{\mathcal{P}}_L) \\ &= L(I_{B_2}-\mathcal{P}_{L^*})(L+\overline{\mathcal{P}}_L) \\ &= L+\overline{\mathcal{P}}_L-\mathcal{P}_{L^*}L-\mathcal{P}_{L^*}\overline{\mathcal{P}}_L \\ &= L+\overline{\mathcal{P}}_L-\overline{\mathcal{P}}_L \\ &= L. \end{aligned}$$

Lo cual prueba la primera igualdad del inciso (ii).
Para la primera parte del inciso (iii), se tiene que

$$\mathcal{P}_{L^*}^2=\mathcal{P}_{L^*} \text{ y } L(\overline{\mathcal{P}}_{L^*}y)=L\left(\sum_{s=1}^{p}\rho_s(y)Lf_s\right)=0. \tag{3.4}$$

Ahora aplicando el operador L en ambos lados de la igualdad de la relación (iii) por el lado izquierdo y usando el inciso (ii) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{P}_{L^*}-\mathcal{P}_{L^*} \\ &= I_{B_2}\mathcal{P}_{L^*}-\mathcal{P}_{L^*}^2 \\ &= (I_{B_2}-\mathcal{P}_{L^*})\mathcal{P}_{L^*} \\ &= L\overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{L*} \\ &= L\overline{\mathcal{P}}_{L^*} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente para el inciso (iv), se aplica el operador $\overline{L}_l^{-1}$ en ambos lados de la igualdad (iv) por el lado derecho y usando los incisos anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} L_l^{-1}I_{B_2}-\overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{L^*} &= \overline{L}_l^{-1}L\overline{L}_l^{-1} \\ &= I_{B_1}\overline{L}_l^{-1}-\mathcal{P}_L\overline{L}_l^{-1}. \end{aligned}$$

La prueba para $t \leq d$, se hace de manera similar a lo ya probado. $\square$

3.2. Inversas generalizadas para operadores de Fredholm

Algunos problemas de ecuaciones diferenciales e integrales son representadas por medio de algún operador lineal en una ecuación de la forma $Lx = y$, donde $L : B_1 \to B_2$ es un operador de Fredholm. El poder escribirlo de esa forma permite centrar nuestra atención en verificar si el operador L tiene inversa generalizada, la cual recordemos que es denotado por L^-, y así poder dar una solución parcial a la ecuación $Lx = y$, donde la solución parcial puede ser escrita de una forma explícita como $x = L^-y$. Por lo tanto, el problema de condicionar el resultado bajo el cual la ecuación $Lx = y$ es soluble y el desarrollo de la construcción del operador inversa generalizada pasa a ser la prioridad, aunque los Lemas 3.1 y 3.2 probados en la sección 3.1 permiten sugerir la siguiente construcción del operador inversa generalizada $L^- : B_2 \to B_1$ para un operador de Fredholm $L : B_1 \to B_2$.

Teorema 3.1. *Si $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es un operador de Fredholm entonces su inversa generalizada tiene cualquiera de las siguientes formas:*

(i) $L^- := \overline{L}_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$, *si* $t \leq d$

(ii) $L^- := \overline{L}_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{L^*}$, *si* $t \geq d$.

Demostración. Obsérvese que es necesario y suficiente mostrar que el operador L^- satisface las definiciones 2.4 y 2.5.
Primero se probará que

$$LL^- = I_{B_2} - \mathcal{P}_{L^*} \quad \text{y} \quad L^-L = I_{B_1} - \mathcal{P}_L, \tag{3.5}$$

para ello, se ocupará la relación (ii) del lema 3.2 y la relación 3.4, por lo que es posible escribirlo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} LL^- &= L(\overline{L}_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{L^*}) \\ &= L\overline{L}_r^{-1} - L\overline{\mathcal{P}}_{L^*} \\ &= I_{B_2} - \mathcal{P}_{L^*}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{P}}_{L^*}(Lx) &= \sum_{s=1}^{p} \rho_s(Lx) f_s \\ &= \sum_{s=1}^{p} (L^*\rho_s)(x) f_s \\ &= 0,\end{aligned}$$

luego, de la relación (iv) del lema 3.2 se tiene,

$$\begin{aligned}L^- L &= (\overline{L}_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{L^*})L \\ &= \overline{L}_l^{-1} L - \overline{\mathcal{P}}_{L^*} L \\ &= I_{B_1} - \mathcal{P}_L.\end{aligned}$$

Ahora usando la relación 3.5, para verificar la validez de 2.4, 2.5 y como resultado se obtiene

$$\begin{aligned}LL^- L &= L(I_{B_1} - \mathcal{P}_L) \\ &= L - L\mathcal{P}_L = L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L^- L L^- &= (I_{B_1} - \mathcal{P}_L)L- \\ &= L^- - \mathcal{P}_L L^- = L^-.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathcal{P}_L L^- = \mathcal{P}_L \overline{L}_l^{-1} - \mathcal{P}_L \overline{\mathcal{P}}_{L^*} = \overline{\mathcal{P}}_{L^*} - \overline{\mathcal{P}}_{L^*} = 0.$$

Así, el teorema esta demostrado. □

La representación del operador inversa generalizada L^- que se mencionó en el Teorema 3.1, es de gran ayuda para expresar de una manera más simple y explícita la solución general de la ecuación del operador lineal

$$Lx = y \tag{3.6}$$

donde $L : B_1 \to B_2$ es un operador lineal acotado de Fredholm. Por lo que la solución general de la ecuación 3.6 puede ser representada en forma de una suma directa de la solución general de la ecuación homogénea $Lx = 0$ y una solución especial $L^{-}y$ de la ecuación no homogénea 3.6. La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma de una combinación lineal de bases de vectores f_i con $i = 1, .., t$, es decir

$$x = \sum_{i=1}^{t} c_i f_i, \quad \text{con} \quad c_i \in \mathbb{R},$$

el cual puede ser reescrito como $x = (f_1, ..., f_t)C$, donde C es el vector columna t-dimensional de constantes, es decir: $C = col(c_1, ..., c_i, ..., c_t) \in \mathbb{R}^t,\ f_i \in N(L),\ i = 1, ..., t$. Donde cualquier ecuación del operador lineal L es un operador de Fredholm el cual es normalmente resoluble. El Teorema 1.9 implica que la ecuación analizada es soluble si y solo si

$$\rho_s(y) = 0,\ s = 1, ..., d; \tag{3.7}$$

donde ρ_s son soluciones de la ecuación homogénea $L^*g = 0$. Si la condición 3.7 se satisface, entonces y es necesariamente elemento de la imagen $R(L)$ del operador L, lo cual se sigue de la relación (ii) en 1.8 tal que $R(L) = N(\mathcal{P}_{L^*})$. Por lo tanto, la relación 3.7 es equivalente para la siguiente condición

$$\mathcal{P}_{L^*}y = 0. \tag{3.8}$$

Permite formular el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *La ecuación del operador de Fredholm $Lx = y$ es soluble si y solo si $y \in B_2$ satisface 3.8. Más aún, la ecuación $Lx = y$ bajo la condición 3.8 hace que la $dimN(L) = t$, es decir, posee t-parámetros para la familia de soluciones, el cual puede ser representado en forma de una suma directa;*

$$x = (f_1, ..., f_t)c + L^{-}y, \tag{3.9}$$

donde el primer término de la ecuación es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y el segundo término es una solución particular de la ecuación $Lx = y$.

Demostración. Se sustituirá la relación 3.9 en la ecuación $Lx = y$, así se tiene

$$\begin{aligned} Lx &= L(f_1, ..., f_t)c + LL^- y \\ &= LL^- y \\ &= (I_{B_2} - P_{L^*})y \\ &= I_{B_2} y - P_{L^*} y \\ &= I_{B_2} y \\ &= y. \end{aligned}$$

□

Observación 3.2. *Notar que el Teorema 3.2 también toma en cuenta los dos casos "extremos", estos son:* $N(L) = \{0\}$ *o* $N(L^*) = \{0\}$*. En estos casos se dice que* L *es un operador de rango completo.*

En base a la observación previa del Teorema 3.2 se hacen explícitos estos dos casos en los siguientes corolarios.

Corolario 3.1. *Sea* L *operador de Fredholm con* $N(L) = \{0\}$*. La ecuación* $Lx = y$ *es soluble si y solo si* $y \in B_2$ *satisface la condición 3.8. Más aún, bajo la condición inicial, la ecuación* $Lx = y$ *posee una única solución de la forma*

$$x = L_l^{-1} y. \tag{3.10}$$

Demostración. En efecto, como $N(L) = \{0\}$ se implica que $t = 0, \overline{\mathcal{P}}_L = 0$ y $\overline{\mathcal{P}}_{L^*} = 0$. De ahí que la relación 3.9 tiene la forma $x = L_l^{-1} y$ y además $L^- = \overline{L}_{l,r}^{-1} = L_l^{-1}$. □

Corolario 3.2. *Sea* L *operador de Fredholm con* $N(L^*) = \{0\}$*. La ecuación* $Lx = y$ *es soluble para todo* $y \in B_2$ *y posee una familia de soluciones de t-parámetros con la forma*

$$x = (f_1, .., f_t)c + L_r^{-1} y.$$

Demostración. En efecto, como $N(L^*) = \{0\}$ implica que $\mathcal{P}_{L^*} = 0$, y la condición 3.8 se satisface para todo $y \in B_2$. Por lo tanto,

$$\overline{\mathcal{P}}_L = 0, \ \overline{\mathcal{P}}_{L^*} = 0, \ \text{y } L^- = L_{l,r}^{-1} = L_r^{-1}.$$

$\square$

En el caso cuando $N(L) = \{0\}$, se dice que la ecuación $Lx = y$ satisface el teorema de la unicidad. En el caso cuando $N(L^*) = \{0\}$, se dice que la ecuación $Lx = y$ satisface la existencia del Teorema 3.2.

Capítulo 4

Inversa Moore-Penrose para operadores de Fredholm

En este capítulo se estudiarán los métodos usados para la construcción del operador inversa generalizada en espacios de Hilbert. Recordar que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial completo equipado con un producto interior, una operación que permite definir longitudes y ángulos, lo anterior da la posibilidad a la descomposición única en suma directa de subespacios ortogonales y el hecho de que los espacios duales sean isomorfos, todo ello para poder establecer resultados más sofisticados concernientes a los operadores inversos en espacios de Hilbert.
En el conjunto de los operadores inversas generalizadas es posible seleccionar un solo operador pseudoinversa que posea un número de propiedades notables, en particular sería el minimizar la norma residual para los operadores no homogéneos de la ecuación $Lx = y$, este mismo puede garantizar la existencia de operadores de proyección ortogonal P_L y P_L^* con una norma unitaria en los espacios de Hilbert. Estos operadores serán construidos en la sección 4.1, también se introducirán operadores de dimensión finita $\widetilde{P}_L$ y $\widetilde{P}_L^*$. En la sección siguiente se dará un análogo al lema de Schmidt pero para espacios de Hilbert, para la construcción de un operador pseudoinversa para un operador lineal acotado de Fredholm L ya

establecido.

4.1. Algunas propiedades de proyectores ortogonales y proyecciones de dimensión finita

Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio de Hilbert H tales que $H = H_1 \oplus H_2$, así el vector $h \in H$ admite una única representación de la forma: $h = h_1 + h_2$, donde $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$. El vector h_1 es llamado proyección del vector h sobre H_1. Al subespacio H_1 es llamado el complemento ortogonal de H_2 y se denota por: $H_1 = H \ominus H_2$. De manera análoga se dice que H_2 es llamado el complemento ortogonal de H_1 y está denotado por: $H_2 = H \ominus H_1$. De manera general, al conjunto $M \subset H$ es llamado suma directa de un número finito de espacios lineales $H_i \subset H$, con $i = 1, ..., n$ y es expresado por: $M = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$, donde cada elemento $h \in H$, se puede escribir como: $h = h_1 + \cdots + h_n$ con cada $h_i \in H_i$, $i = 1, ..., n$, donde M es en si mismo un espacio lineal.

Definición 4.1. *Sea P un operador definido en el espacio de Hilbert H tal que a cada elemento del espacio, $h \in H$, lo envíe a su proyección bajo el subespacio H_1. Entonces es un operador proyección bajo H_1, y es llamado **proyección ortogonal**, se utilizará la siguiente notación: P o P_{H_1}, es decir*

$$h_1 = P_{H_1} h = Ph.$$

Los operadores proyecciones son lineales, más aún, son acotados y tiene norma unitaria. En efecto, se tiene $||h||^2 = ||h_1||^2 + ||h_2||^2$, luego $||h_1|| \leq ||h||$, es decir, $||P_{H_1} h|| \leq ||h||$. Por otro lado, si $h \in H_1$, entonces $h_1 = h$ y $||P_{H_1} h|| = ||h||$. Por lo tanto $||P_{H_1}|| = 1$. La proyección ortogonal P tiene las siguientes propiedades:

$$(i) P^2 = P, \qquad (ii) P^* = P. \tag{4.1}$$

En los siguientes resultados se presentarán las operaciones como la multiplicación, la suma y la resta entre proyecciones ortogonales.

Teorema 4.1. *Sean P_{H_1} y P_{H_2} proyecciones ortogonales. Entonces se tiene que: $P_{H_1}P_{H_2} = Q_M$ es una proyección ortogonal si y solo si P_{H_1} y P_{H_2} son proyecciones conmutativas, es decir,*

$$P_{H_1}P_{H_2} = P_{H_2}P_{H_1}. \tag{4.2}$$

Con $M = H_1 \cap H_2$[1]

Demostración. Supóngase que el producto de proyecciones ortogonales es también un operador proyección, es decir,

$$P_{H_1}P_{H_2} = (P_{H_1}P_{H_2})^* = P_{H_2}^*P_{H_1}^* = P_{H_2}P_{H_1}.$$

Sea $h \in H$ fijo pero arbitrario y $m = P_{H_1}P_{H_2}h = P_{H_2}P_{H_1}h$. Por la primera representación $m \in H_1$ y por la segunda $m \in H_2$. por lo tanto $m \in H_1 \cap H_2$. Si $h \in H_1 \cap H_2$, entonces $P_{H_1}P_{H_2}h = h$. Ahora supóngase que P_{H_1} y P_{H_2} conmutativos, es decir

$$P_{H_1}P_{H_2} = P_{H_2}P_{H_1} = Q_M.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
(Q_M)^2 &= (P_{H_1}P_{H_2})^2 \\
&= P_{H_1}P_{H_2}P_{H_1}P_{H_2} \\
&= P_{H_1}P_{H_1}P_{H_2}P_{H_2} \\
&= P_{H_1}^2P_{H_2}^2 \\
&= P_{H_1}P_{H_2} \\
&= Q_M,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle Q_M h_1, h_2\rangle &= \langle P_{H_1}P_{H_2}h_1, h_2\rangle \\
&= \langle P_{H_2}h_1, P_{H_1}h_2\rangle \\
&= \langle h_1, P_{H_2}P_{H_1}h_2\rangle \\
&= \langle h_1, P_{H_1}P_{H_2}h_2\rangle \\
&= \langle h_1, Q_M h_2\rangle.
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores muestran que el operador $Q_M = P_{H_1}P_{H_2}$ es una proyección ortogonal. □

[1] Una implicación geométrica de la conmutatividad de los operadores P_{H_1} y P_{H_2} es que el subespacio $H_1 \ominus (H_1 \cap H_2)$ y $H_2 \ominus (H_1 \cap H_2)$ son ortogonales.

El siguiente corolario es una implicación inmediata del teorema previo.

Corolario 4.1. *Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio de Hilbert H. Los subespacios H_1 y H_2 son ortogonales si y solo si $P_{H_1}P_{H_2} = 0$.*

Teorema 4.2. *Sean H_i subespacios de Hilbert con $i = 1, ..., n$ y P_{H_i} proyecciones ortogonales. Entonces se tiene que: $P_{H_1} + P_{H_2} + \cdots + P_{H_n} = Q$ si y solo si $P_{H_j}P_{H_k} = 0, j \neq k$. Es decir, si los subespacios H_i son ortogonales dos a dos entonces $Q = P_M$ con $M = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$.*

Demostración. Si P es un operador proyección ortogonal entonces $\|f\|^2 \geq \langle Pf, f\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle P_{H_j}f, f\rangle \geq \langle P_{H_i}f, f\rangle + \langle P_{H_k}f, f\rangle$, para cualesquiera índices i, k tales que $i \neq k$, así se tiene que: $\|P_{H_i}f\|^2 + \|P_{H_k}f\|^2 \leq \|f\|^2$. Si se define $f = P_{H_k}h$, entonces $\|P_{H_i}P_{H_k}h\|^2 + \|P_{H_k}h\|^2 \leq \|P_{H_k}h\|^2$, por lo que $\|P_{H_i}P_{H_k}h\| = 0$, para $h \in H$, así $P_{H_i}P_{H_k} = 0$. Por lo tanto, los espacios H_i y H_k son ortogonales. □

Teorema 4.3. *Sean P_{H_1} y P_{H_2} proyecciones ortogonales. Entonces*

$$P_M = P_{H_1} - P_{H_2} \tag{4.3}$$

es una proyección ortogonal si y solo si $H_2 \subset H_1$. En este caso P_M es proyección ortogonal sobre $H_1 \ominus H_2$.

Demostración. Se tiene que el operador $P_M = I - (P_{H_1} - P_{H_2})$ es una proyección ortogonal, luego reescribiendo la igualdad previa en una suma de dos proyecciones ortogonales se tiene que: $P_M = (I - P_{H_1}) + P_{H_2}$, del Teorema 4.2 se implica que $(I - P_{H_1})P_{H_2} = 0$, o de manera equivalente

$$P_{H_2} = P_{H_1}P_{H_2}. \tag{4.4}$$

Sea $m \in H_2$. Luego $m = P_{H_2}m = P_{H_1}P_{H_2}m = P_{H_1}m$, lo que implica que $m \in H_1$. Por lo tanto, $H_2 \subset H_1$.
Por otro lado, si $H_2 \subset H_1$ entonces puede expresarse como: $P_{H_2} = P_{H_1}P_{H_2}$ y esta expresión es necesaria y suficiente para que

la diferencia de proyecciones ortogonales también sea una proyección ortogonal.
Solo resta caracterizar el subespacio M como suma de subespacios H_i con $i = 1, 2$ sobre el cual $P_M(4.3)$ se proyecta, es decir, el operador P_M sobre $[H \ominus H_1] \oplus H_2$, por lo que el operador P_M definido como en 4.3 se proyecta sobre

$$H \ominus \{[H \ominus H_1] \oplus H_2\}, \tag{4.5}$$

el cual es el subespacio de vectores ortogonales tanto para H_2 como para $H \ominus H_1$. Este subespacio consiste de todos los vectores de H_1 que son ortogonales a H_2, dicho subespacio esta denotado por:

$$H_1 \ominus H_2, \tag{4.6}$$

esta diferencia se obtiene de manera directa por la ecuación 4.5 quitando formalmente los corchetes. □

Ahora se estudiarán las propiedades de las proyecciones ortogonales para la construcción del operador pseudoinverso de un operador lineal y acotado de Fredholm $L : H_1 \to H_2$, donde H_i con $i = 1, 2$ son espacios de Hilbert. El **operador pseudoinverso** se denotará por L^+.
Recordar que $\{f_i\}_{i=1}^t$, $\{\rho_s\}_{s=1}^d$ denotan las bases de los espacios nulos $N(L)$, $N(L^*)$ respectivamente. Sean $P_L : H_1 \to N(L)$ y $P_{L^*} : H_2 \to N(L^*)$ proyecciones las cuales se definen estableciendo:

$$\gamma_i(x) = \sum_{j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x\rangle, \quad \rho_s(y) = \sum_{k=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \langle \rho_k, y\rangle. \tag{4.7}$$

Lo anterior se obtiene mediante una analogía de la construcción de los operadores $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$, notando que en lugar de considerar elementos arbitrarios ψ_k en H_2, se pueden elegir los mismos elementos ρ_k de la base $N(L^*)$. Donde α_{ij}^{-1} y β_{sk}^{-1} son elementos de las matrices inversas α^{-1} y β^{-1} de tamaño $t \times t$ y $d \times d$, respectivamente, con α y β son matrices simétricas de Gram: $\alpha = [\langle f_i, f_j\rangle]$ y $\beta = [\langle \rho_s, \rho_k\rangle]$, por lo anterior se tiene que:

$$P_L x = \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x\rangle f_i, \text{ y } P_{L^*} y = \sum_{s,k=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \langle \rho_k, y\rangle \rho_s, \tag{4.8}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno correspondiente al espacio de Hilbert.

Lema 4.1. *Sean P_L y P_{L^*} operadores definidos como en 4.8 y si satisfacen la condición 4.1 entonces son proyecciones ortogonales.*

Demostración. La prueba se hará solo para el operador P_L, para el operador P_{L^*} la prueba es similar.

$$\begin{aligned}
P_L^2 x &= P_L(P_L x) \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{i,j}^{-1} \left\langle f_j, \sum_{q,l=1}^{t} \alpha_{ql}^{-1} \langle f_l, x \rangle f_q \right\rangle f_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{i,j}^{-1} \sum_{q,l=1}^{t} \alpha_{ql}^{-1} \langle f_l, x \rangle \langle f_j, f_q \rangle f_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \sum_{q,l=1}^{t} \alpha_{ql}^{-1} \alpha_{j,q} \langle f_l, x \rangle f_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \sum_{l=1}^{t} \delta_{lj} \langle f_l, x \rangle f_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle f_i \\
&= P_L x, \quad \text{para todo } \ x \in H_1.
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene $\langle f_i, z \rangle = \langle z, f_i \rangle$ y del hecho de que la matriz α_{ij}^{-1} sea simétrica, se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle P_L x, z \rangle &= \left\langle \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle f_i, z \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_i, z \rangle \langle x, f_j \rangle \\
&= \left\langle x, \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_i, z \rangle f_j \right\rangle \\
&= \langle z, P_L z \rangle, \quad \text{para todo} x, z \in H_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto P_L es un operador ortogonal. □

Sean P_L y P_{L^*} proyecciones ortogonales definidos como en (4.8) y sean $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ **proyecciones sesgadas** sobre los espacios nulos $N(L)$ y $N(L^*)$ de los operadores L y L^* respectivamente, que se definen de acuerdo a la relación 3.1 como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L x &= \sum_{i=1}^{t} \langle \gamma_i, x\rangle f_i, \text{ donde } \langle \gamma_i, f_j\rangle = \delta_{ij}, \\ \mathcal{P}_{L^*} y &= \sum_{s=1}^{d} \langle \rho_s, y\rangle \psi_k, \text{ donde } \langle \rho_s, \psi_k\rangle = \delta_{sk}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Lema 4.2. *Si $P_L, P_{L^*}, \mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_{L^*}$ están definidos como en 4.8 y 4.9 respectivamente, entonces los operadores mencionados satisfacen lo siguiente:*

(i) $P\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_L$,

(ii) $\mathcal{P}_L P_L = P_L$,

(iii) $P_{L^*}\mathcal{P}_{L^*} = P_{L^*}$,

(iv) $\mathcal{P}_{L^*} P_{L^*} = \mathcal{P}_{L^*}$

Demostración. Recordar que $\sum_{j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \alpha_{js} = \delta_{is}$, con $i, s = 1, ..., t$. Primero se probará para (i)

$$\begin{aligned} P_L \mathcal{P}_L x &= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \left\langle f_j, \sum_{s=1}^{t} \langle \gamma_s, s\rangle f_s \right\rangle f_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{t} \sum_{s=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \alpha_{js} \langle \gamma_s, x\rangle f_i \\ &= \sum_{s=1}^{t} \langle \gamma_s, x\rangle f_s \\ &= \mathcal{P}_L x. \end{aligned}$$

Para (ii), recuerde que $\langle \gamma_s, f_i \rangle = \delta_{si}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_L P_L x &= \sum_{s=1}^{t} \left\langle \gamma_s, \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle f_i \right\rangle f_s \\
&= \sum_{s=1}^{t} \sum_{i,j=1}^{t} \delta_{si} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle f_s \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_i, x \rangle f_s \\
&= P_L x.
\end{aligned}$$

Como $\langle \rho_k, \psi_j \rangle$ para (iii) se tiene que:

$$\begin{aligned}
P_{L^*} \mathcal{P}_{L^*} y &= \sum_{s,k=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \left\langle \rho_k, \sum_{j=1}^{d} \langle \rho_j, y \rangle \psi_j \right\rangle \rho_s \\
&= \sum_{s,k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \delta_{kj} \langle \rho_j, y \rangle \rho_s \\
&= \sum_{s,k=1}^{d} \beta_{sj}^{-1} \langle \rho_j, y \rangle \rho_s \\
&= P_{L^*} y
\end{aligned}$$

Para (iv) téngase en cuenta la siguiente igualdad $\sum_{s=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \beta_{js} = \delta_{jk}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{L^*} P_{L^*} y &= \sum_{j=1}^{d} \left\langle \rho_j, \sum_{s,k=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \langle \rho_k, y \rangle \rho_s \right\rangle \psi_j \\
&= \sum_{j=1}^{d} \sum_{s,k=1}^{d} \beta_{sk}^{-1} \beta_{js} \langle \rho_k, y \rangle \psi_j \\
&= \sum_{j=1}^{d} \langle \rho_j, y \rangle \psi_j \\
&= \mathcal{P}_{L^*} y.
\end{aligned}$$

$\square$

Para la construcción de operadores de dimensión finita $\overline{P}_L$ y $\overline{P}_{L^*}$, se procederá de la misma manera como se definieron en 1.9 y 1.10, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma_i(x) &= \sum_{j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle, \\ \rho_s(y) &= \sum_{k=1}^{p} \overline{\beta}_{sk}^{-1} \langle \rho_k, y \rangle, \qquad \psi_s = \rho_s, \end{aligned} \tag{4.10}$$

con subíndices $i, s = 1, ..., p$, donde $p = \text{mín}(r, d)$, y $\overline{\alpha}_{ij}^{-1}$, $\overline{\beta}_{sk}^{-1}$ son elementos de las matrices $\overline{\alpha}^{-1} = [\langle f_i, f_j \rangle]^{-1}$ y $\overline{\beta}^{-1} = [\langle \rho_s, \rho_k \rangle]^{-1}, i, j, s, k = 1, ..., p$; las funciones γ_j y ρ_s definidas como antes en 1.9 y 1.10 para espacios de Hilbert, tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \overline{P}_L : H_1 \to N_1(L^*) \subset N(L^*);\ \ \overline{P}_L x &= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle \rho_i, \\ \overline{P}_{L^*} : H_2 \to N_1(L) \subset N(L);\ \ \overline{P}_{L^*} y &= \sum_{s,k=1}^{p} \overline{\beta}_{sk}^{-1} \langle \rho_k, y \rangle f_s. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Lema 4.3. *Sean P_L, P_{L^*} proyecciones ortogonales y sean $\overline{P}_L, \overline{P}_{L^*}$ proyecciones de dimensión finita definidos como en 4.8 y 4.11 respectivamente. Entonces los operadores mencionados satisfacen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} (i) P_{L^*} \overline{P}_L &= \overline{P}_L P_L = \overline{P}_L, \\ (ii) P_L \overline{P}_{L^*} &= \overline{P}_{L^*} P_{L^*} = \overline{P}_{L^*}, \\ (iii) \overline{P}_L \overline{P}_{L^*} y &= \sum_{s,k=1}^{p} \overline{\beta}_{sk}^{-1} \langle \rho_k, y \rangle \rho_s, \\ (iv) \overline{P}_{L^*} \overline{P}_L x &= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1} \langle f_j, x \rangle f_i. \end{aligned} \tag{4.12}$$

La prueba de este Lema se hace de manera análoga al Lema 4.2.

4.2. Una análogo del Lema de Schmidt para operadores de Fredholm en espacios de Hilbert

En esta sección se utilizará la notación $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ para denotar el conjunto de los operadores lineales y acotados, que van de H_1 en H_2 espacios de Hilbert. Se establecerán condiciones necesarias para tener un resultado análogo al Lema de Schmidt para operadores de Fredholm de índice arbitrario $L : H_1 \to H_2$, así como en el Lema 3.1 que se probó en la sección 1.5 para espacios de Banach, ahora se probará para espacios de Hilbert, y en esta sección se utilizará la notación I para hacer referencia al operador identidad en lugar de Id.

Lema 4.4. *Sean $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ un operador de Fredholm, $\overline{P}_L : H_2 \to H_1$ operador de dimensión finita y $\overline{L} := L + \overline{P}_L$, tiene inversa lateral (izquierda o derecha) y definida por:*

(i) $\overline{L}_l^{-1} := (L + \overline{P}_L)_l^{-1}$, *si* $t \leq d$.

(ii) $\overline{L}_r^{-1} := (L + \overline{P}_L)_r^{-1}$, *si* $t \geq d$.

La prueba de este lema es similar a la prueba del Lema 3.1 por lo cual no se presentará aquí. Sin embargo, hay que enfatizar que para el caso de espacios de Banach los funcionales $\gamma_i(\cdot)$ y $\rho_s(\cdot)$ son como en (4,10) respectivamente, desde este punto en adelante, los operadores $\overline{L}$ estará definidos como se definió en el Lema 4.4 En el siguiente resultado, se establecerán las propiedades de los operadores $\overline{L}_l^{-1}$ y $\overline{L}_{l,r}^{-1}$ con base al estudio de los operadores $\overline{L}, \overline{L}^*, \overline{L}_l^{-1}$ y $(L_r^{-1})^*$ en los vectores básicos de los espacios nulos $N(L)$ y $N(L^*)$. Por lo que primero se considerará la relación entre los operadores $(L_l^{-1})^*, (L_r^{-1})^*, (L^*)_l^{-1}$ y$(L^*)_r^{-1}$, para ello véase el siguiente lema.

Lema 4.5. *Sean $(L_l^{-1})^*, (L_r^{-1})^*, (L^*)_l^{-1}$ y$(L^*)_r^{-1}$ operadores. Entonces la siguiente relación se cumple*

$$(\overline{L}_l^{-1})^* \sim (\overline{L}^*)_l^{-1}. \tag{4.13}$$

$$(\overline{L}_r^{-1})^* \sim (\overline{L}^*)_r^{-1}. \tag{4.14}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(\overline{L}\overline{L}_r^{-1})^* = (\overline{L}_r^{-1})^*\overline{L}^* = I_{H_2}\\ \text{y } (\overline{L}^*)_l^{-1}\overline{L}^* = I_{H_2}\end{aligned} \tag{4.15}$$

Por lo que se concluye $(\overline{L}_r^{-1})^* \sim (\overline{L}^*)_l^{-1}$.
De manera similar se tiene que

$$\begin{aligned}(\overline{L}_l^{-1}\overline{L})^* = (\overline{L}^*)(\overline{L}_l^{-1})^* = I_{H_1}\\ \text{y } \overline{L}^*(\overline{L}^*)_r^{-1} = I_{H_1},\end{aligned} \tag{4.16}$$

y así, $(\overline{L}_l^{-1})^* \sim (\overline{L}^*)_r^{-1}$. □

Notar que $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$ mantiene siempre el operador inverso

Lema 4.6. *Consideremos $\overline{L}, \overline{L}_l^{-1}, \overline{L}^*$ y $(\overline{L}_r^{-1})^*$ definidos como en el Lema 4.4, satisfacen las siguientes igualdades:*

(i) $\overline{L}f_k = \rho_k$ *con* $k = 1, ..., t$ *y* $r = p$,

(ii) $\overline{L}_l^{-1}\rho_k = f_k$, *con* $k = 1, ..., t$ *y* $t = p$,

(iii) $\overline{L}^*\rho_s = \sum_{j=1}^{d}\xi_{js}f_j$ *con* $s = 1, ...d$ *y* $d = p$,

(iv) $(\overline{L}_r^{-1})^*f_s = (\overline{L}^*)_l^{-1}f_s = \sum_{j=1}^{d}\xi_{s,j}^{-1}\rho_j$ *con* $s = 1, ..., d = p$, *donde* ξ_{js} *son enteros de la matriz simétrica* $E = \overline{\alpha}^{-1}\beta$ *y* ξ_{sj}^{-1} *son las entradas de la matriz inversa de* E.

Demostración. Supóngase que $d \leq t = p, x_0 = \sum_{k=1}^{t} d_kf_k \in N(L)$, donde d_k son constantes arbitrarias y $\{f_k\}_{k=1}^{t}$ son vectores básicos del espacio nulo $N(L)$. Entonces $\overline{L}x_0 = Lx_0 + \overline{P}_Lx_0 = \overline{P}_Lx_0$, por lo que $Lx_0 = \sum_{k=1}^{t} d_k L f_k = 0$, así

$$\begin{aligned}\overline{L}\left(\sum_{k=1}^{t} d_k f_k\right) &= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1}\left\langle f_j, \sum_{k=1}^{t} d_k f_k\right\rangle \rho_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \sum_{k=1}^{t} d_k \langle f_j, f_k\rangle \rho_i \\ &= \sum_{k=1}^{t}\sum_{i,j=1}^{t} d_k \alpha_{i,j}^{-1}\alpha_{jk}\rho_i \\ &= \sum_{k=1}^{t} d_k \rho_k,\end{aligned}$$

de esto se sigue que

$$\overline{L} f_k = \rho_k, k = 1, ..., t = p. \tag{4.17}$$

Por el Lema 4.8 existe un operador $\overline{L}_l^{-1}$ inverso izquierda para el operador $\overline{L}$, siempre que $t \leq d$. Luego aplicando el operador $\overline{L}_l^{-1}$ por ambos lados de la relación (4.18), así se tiene que $L_l^{-1}\overline{L} f_k = \overline{L}_l^{-1}\rho_k$ con $k = 1, ..., t = p$ y por lo tanto

$$\overline{L}_l^{-1}\rho_k = f_k \text{ con } k = 1, ..., t = p. \tag{4.18}$$

Para considerar la acción del operador $\overline{L}^*$ en los vectores básicos ρ_s del espacio nulo $N(L^*)$, se definirá a $\overline{P}_L^*$. Para ello, sea $x \in H_1$ y $y \in H_2$ teniendo en cuenta la Definición 1.6 de operador adjunto en espacios de Hilbert. Por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\langle \overline{P}_L x, y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle f_j, x\rangle\langle \rho_i, y\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle x, f_j\rangle\langle \rho_i, y\rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle \rho_i, y\rangle f_j\right\rangle \\ &= \langle x, \overline{P}_L^* y\rangle.\end{aligned}$$

como $\overline{\alpha}_{ij}^{-1} = \overline{\alpha}_{ji}^{-1}$, así $\overline{P}_L^* y = \sum_{i,j=1}^{p} \overline{\alpha}_{ij}^{-1} \langle \rho_i, y \rangle f_j$.
Ahora, si $t \leq d = p$ y $y_0 = \sum_{s=1}^{d} c_s \rho_s \in N(L^*)$, entonces $\overline{L}^* y_0 = L^* y_0 + \overline{P}_L^* y_0 = \overline{P}_L^* y_0$, así, $\overline{L}^* y_0 = \sum_{s=1}^{d} c_s L^* \rho_s = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\overline{L}^* \left(\sum_{s=1}^{d} c_s \rho_s \right) &= \sum_{i,j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ji}^{-1} \left\langle \rho_i, \sum_{s=1}^{d} c_s \rho_s \right\rangle f_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ji}^{-1} \sum_{s=1}^{d} c_s \langle \rho_i, \rho_s \rangle f_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{s=1}^{d} c_s \overline{\alpha}_{ji}^{-1} \beta_{is} f_i \\
&= \sum_{s,j=1}^{d} c_s \xi_{js} f_j,
\end{aligned}$$

donde $\xi_{js} = \sum_{j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ji}^{-1} \beta_{is}$ son entradas de la matriz no singular y simétrica $E\overline{\alpha}^{-1}\beta$ de tamaño $d \times d$, por lo que $\sum_{s=1}^{d} c_s \overline{L}^* \rho_s = \sum_{s=1}^{d} c_s \sum_{j=1}^{d} \xi_{js} f_j$, donde

$$\overline{L}^* \rho_s = \sum_{j=1}^{d} \xi_{js} f_j, \text{ con } s = 1, ..., d = p. \tag{4.19}$$

Luego por el Lema 4.4 se tiene que el operador inverso por la derecha $\overline{L}_r^{-1}$ existe cuando $d \leq t$, más aún, por el Lema 4.5 se tiene que $(L_r^{-1})^* \sim (\overline{L}^*)_l^{-1}$, por lo que al aplicar el operador (L_r^{-1}) en ambos lados de la relación (4.19) se tiene:

$$\begin{aligned}
(\overline{L}_r^{-1})^* \overline{L}^* \rho_s &= (\overline{L}^*)_l^{-1} \overline{L}^* \rho_s \\
&= (\overline{L}_r^{-1})^* \sum_{j=1}^{d} \xi_{js} f_j \\
&= (\overline{L}^*)_l^{-1} \sum_{j=1}^{d} \xi_{js} f_j,
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(\overline{L}_r^{-1})^* f_s = (\overline{L}^*)_l^{-1} f_s = \sum_{i=1}^{p} \xi_{sj}^{-1} \rho_j, \text{ con } s = 1, ..., d = p, \tag{4.20}$$

y ξ_{sj}^{-1} son entradas de la matriz simétrica $E^{-1} = \beta^{-1}\overline{\alpha}$. □

Lema 4.7. *Sea* $\overline{L} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *y sean* P_L *y* P_{L^*}. *Si* $\overline{L}_l^{-1}, \overline{L}_r^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ *es el operador inverso de* $\overline{L}$, *entonces se satisface lo siguiente:*

(i) $L\overline{L}_r^{-1} = I_{H_2} - P_{L^*}$,

(ii) $\overline{L}_l^{-1}L = I_{H_1} - P_L$.

Demostración. Primero se probará para el inciso (i). De acuerdo a la definición del operador inverso por la derecha se tiene, $\overline{L}\overline{L}_r^{-1} = I_{H_2}$ y por otro lado, $\overline{L} = L + \overline{P}_L$, así $L\overline{L}_r^{-1} = I_{H_2} - \overline{P}_L\overline{L}_r^{-1}$. Ahora se mostrará que $\overline{P}_L\overline{L}_r^{-1} = P_{L^*}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_L(\overline{L}_r^{-1}y) &= \sum_{i,j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle f_j, \overline{L}_r^{-1}y\rangle\rho_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle (\overline{L}_r^{-1})^* f_j, y\rangle\rho_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\left\langle \sum_{k=1}^{d} \xi_{k,j}^{-1}\rho_k, y\right\rangle\rho_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \beta_{ik}^{-1}\langle \rho_k, y\rangle\rho_i \\
&= P_{L^*}y,
\end{aligned}
$$

donde $\sum_{j=1}^{d} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\xi_{jk}^{-1} = \beta_{ik}^{-1}$. Por lo tanto $L\overline{L}_r^{-1} = I_{H_2} - P_{L^*}$.

Ahora se hará la prueba para el inciso (ii). De acuerdo a la definición del operador inverso izquierdo se tiene lo siguiente $\overline{L}_l^{-1}\overline{L} = I_{H_1}$, y de acuerdo al Lema 4.4 se concluye que $\overline{L}_l^{-1}(L + \overline{P}_L) = \overline{L}_l^{-1} + \overline{L}_l^{-1}\overline{P}_L = I_{H_1} - \overline{L}_l^{-1}\overline{P}_L$.

Se procederá a mostrar que $\overline{L}_l^{-1}\overline{P}_L = P_L$.

$$\begin{aligned}
\overline{L}_l^{-1}\overline{P}_L &= \overline{L}_l^{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{t} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle f_j, x\rangle \rho_i\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle f_j, x\rangle \overline{L}_l^{-1}\rho_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{t} \overline{\alpha}_{ij}^{-1}\langle f_j, x\rangle f_j \\
&= P_L x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{L}_l^{-1}L = I_{H_1} - P_L$. □

4.3. Pseudoinversa derecha e izquierda para operadores lineales de Fredholm.

Si un operador $L \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ es invertible en el sentido generalizado, entonces el operador $L^- \in \mathcal{L}(B_2, B_1)$ se puede elegir para garantizar la validez de las igualdades

$$(i)\ LL^-L = L \ \text{ y } \ (ii)\ L^-LL^- = L^-. \tag{4.21}$$

Notemos que ahora estamos interesados en el caso de un operador $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ actúa desde un espacio de Hilbert H_1 en un espacio de Hilbert H_2. Entonces el conjunto de los operadores generalizados invertible $L^- \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ contiene un operador único satisface la siguiente condición:

$$(i)\ LL^-L = L, \qquad (ii)\ L^-LL^- = L^-, \tag{4.22}$$

$$(iii)\ (LL^-)^* = LL^-, \qquad (iv)\ (L^-L)^* = L^-L. \tag{4.23}$$

Definición 4.2. *Un operador L^- que satisface la condición 4.22 es llamado un* ***operador pseudoinverso Moore-Penrose*** *y es denotada por L^+.*

Notemos que el operador L^+ es único, la prueba de este hecho lo puede ver en [1] La definición del operador pseudoinversa en el sentido de Moore-Penrose para un operador L el cual es denotado como L^+ cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &(i) LL^+L = L, \\ &(ii) L^+LL^+ = L^+, \\ &(iii) (LL^+)^* = LL^+ = I_{H_2} - P_{L^*}, \\ &(iv) (L^+L)^* = L^+L = I_{H_1} - P_L. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por otro lado, como los operadores P_L y P_{L^*} tienen normas unitaria. las propiedades (iii) y (ii) de 4.24 implican que la solución a la ecuación $Lx = y$ sea $x = L^+y$. Más aún, minimiza la norma residual, es decir, $\|Lx - y\|_{H_2} = \|P_{L^*}y\|_{H_2}$, y la solución para la ecuación conjugada $L^*f = g$ es $f = (L^*)^+g = (L^+)^*g$, la cual minimiza la norma del residuo como: $\|L^*f - g\|_{H_1} = \|P_L g\|_{H_1}$. Además, como $(L^*)^+ = (L^+)^*$ los mínimos se alcanzan para el mismo operador L^+, sin embargo, como se vio previamente los mínimos se pueden obtener de manera ajena con el uso de diferentes operadores, por ejemplo, si L^- es el operador inversa generalizada y satisface las propiedades $(i), (ii)$ y (iii) de 4.24 entonces una solución a la ecuación $Lx = y$ es $x = L^-y$, la cual minimiza el residual únicamente para la ecuación original $Lx = y$. Por otro lado, si L^- tiene las propiedades $(i), (ii)$ y (iv), entonces el residual es minimizado solo para la ecuación conjugada. Con base es esta relación se tiene la siguiente definición.

Definición 4.3. *Sea $L^- \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, si satisface las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} &(i) LL^-L = L, \\ &(ii) L^-LL^- = L^-, \\ &(iii) (LL^-)^* = LL^- = I_{H_2} - P_{L^*}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

será llamado el operador ***pseudoinversa por la derecha*** *para un operador L y es denotado por: L_r^+.*
Si satisface:

$$\begin{aligned} &(i) LL^-L = L, \\ &(ii) L^-LL^- = L^-, \\ &(iii) (L^-L)^* = L^-L = I_{H_1} - P_L, \end{aligned} \tag{4.26}$$

se llamará operador ***pseudoinversa por la izquierda*** *para un operador L y se denotará por: L_l^+.*

Notemos que el operador pseudoinverso por la derecha e izquierda es **pseudoinversa en el sentido de Moore-Penrose**. El operador $\overline{L}_l^{-1}$ (o el operador $\overline{L}_r^{-1}$) definido como en el Lema 4.4 satisface la relación $L\overline{L}_l^{-1}L = L$ pero no cumple la segunda condición de la definición de operadores inversas generalizadas, es decir, $\overline{L}_l^{-1}L\overline{L}_l^{-1} \neq \overline{L}_l^{-1}$. Por otro lado, si el operador L_0^-, cumple que $LL_0^{-1}L = L$ pero $L_0^{-1}LL_0^- \neq L_0^{-1}$, entonces el operador $L_0^-LL_0^-$ satisface ambas condiciones por lo que L^- es el operador inversa generalizada. La función de L^{-1} está dada con base al operador $\overline{L}_l^{-1}L\overline{L}_l^{-1}$ (o bien $\overline{L}_r^{-1}L\overline{L}_r^{-1}$)entonces es llamado operador pseudoinverso unilateral.

Teorema 4.4. *Sean $L_l^+ : H_2 \to H_1$ y $L_r^+ : H_2 \to H_1$ pseudoinversas en el sentido de Moore-Penroes y sean P_L, P_{L*} proyecciones ortogonales definidas como en 4.8. Se define:*

(i) $\overline{L}_l^+ := (I_{H_1} - P_L)\overline{L}_l^{-1}$*, si* $t \leq d$*.*

(ii) $\overline{L}_r^+ := \overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*})$*, si* $t \geq d$*.*

Entonces $\overline{L}_l^+$ y $\overline{L}_l^+$ son pseudoinversa unilateral para un operador de Fredholm lineal y acotado.

Demostración. Sea $t \geq d$. Por el Lema 4.4 el operador $\overline{L}$ tiene inversa acotada por la derecha, a saber, L_r^{-1}, se necesita verificar los incisos de 4.25. Para ello, note que de la relación (ii) del 3.2, se tiene que $L\overline{L}_r^{-1} = I_{H_2} - P_{L^*}$, luego por el Lema 4.2

$$\begin{aligned} LL_r^+L &= L\overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*})L \\ &= (I_{H_2} - P_{L^*})(I_{H_2} - P_{L^*})L = L \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_r^+LL_r^+ &= \overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*})L\overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*}) \\ &= \overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*}) = L_r^+, \end{aligned}$$

finalmente se tiene: $LL_r^+ = L\overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*}) = I_{H_2} - P_{L^*} = (LL_r^+)^*$, ya que $I_{H_2}^* = I_{H_2}$ y $P_{L^*}^* = P_{L^*}$.
La prueba para $t \leq d$ se hace de manera similar, en este caso el operador $L_r^+ = \overline{L}_r^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*})$ es pseudoinversa derecha para L. □

4.4. Pseudoinversas para operadores lineales y acotados de Fredholm

Para un operador lineal y acotado de Fredholm en un espacio de Banach la estructura del operador inversa generalizada L^-, no determina el operador pseudoinversa en el caso de espacios de Hilbert, al mismo tiempo la estructura de las pseudoinversa unilaterales L_l^+ y L_r^+ deduce el operador pseudoinversa.

Teorema 4.5. *Sean $L \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ operador de Fredholm y $L^+ \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ operador definido por:*

$$\begin{aligned} &(i)\ \textit{Inversa izquierda}\ L_l^+(I_{H_2} - P_{L^*}),\ \textit{para}\ t \leq d, \\ &(ii)\ \textit{Inversa derecha}\ (I_{H_1} - P_L)L_r^+,\ \ \textit{para}\ t \geq d, \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde $dimN(\overline{L}) = t$ y $dimN(\overline{L}^*) = d$. Entonces $L_l^+(I_{H_2} - P_{L^*})$ y $(I_{H_1} - P_L)L_r^+$ son los únicos operador pseudoinverso para un operador lineal acotado de Fredholm L.

Demostración. Se tiene que $L(I_{H_1} - P_L) = L$ y $(I_{H_2} - P_{L^*})L = L$. Luego las igualdades (i) y (ii) de (4.24) son ciertas, por lo que solo resta verificar las igualdades (iii) y (iv).
El operador L_r^+ es pseudoinversa derecha, por lo que se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} LL^+ &= L(I_{H_1} - P_L)L_r^+ \\ &= LL_r^+ \\ &= I_{H_2} - P_{L^*} \\ &= (LL^+)^*, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} L^+L &= (I_{H_1} - P_L)L_r^+L \\ &= (I_{H_1} - P_L)\overline{L}_r^{-1}(I_{H_1} - P_{L^*})L \\ &= (I_{H_1} - P_L)\overline{L}_r^{-1}L \\ &= (I_{H_1} - P_L)(I_{H_1} - \mathcal{P}_L), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_L$ es una proyección para $N(L)$, en efecto, como $\overline{L}_r^{-1}L\overline{L}_r^{-1}L = \overline{L}_r^{-1}(I - P_{L^*})L = \overline{L}_r^{-1}L$, el operador $\overline{L}_r^{-1}L$ es una proyección para $R(L^*)$, así, $I_{H_1} - \overline{L}_r^{-1}L = \mathcal{P}_L$ es también una proyección. Luego, por el Lema 4.2 se tiene $P_{L^*}\mathcal{P}_{L^*} = \mathcal{P}_{L^*}$ y de esta manera se tiene que $(I_{H_1} - P_L)(I_{H_1} - \mathcal{P}_L) = I_{H_1} - P_L - \mathcal{P}_L + P_L\mathcal{P}_L = I_{H_1} - P_L$, así $L^+L = I_{H_1} - P_L = (L^+L)^*$, esto implica que $I_{H_1}^* = I_{H_1}$ y $P_L^* = P_L$.
Ahora para verificar las propiedades (iii) y (iv) de la segunda parte de las igualdades 4.27, se tiene que $L^+L = L_l^+(I_{H_2} - P_{L^*})L = L_l^+L = I_{H_1} - P_L = (L^+L)^*$, por lo que L_l^+ es el operador pseudoinversa izquierda, así

$$\begin{aligned} LL^+ &= LL_l^+(I_{H_2} - P_{L^*}) \\ &= L(I_{H_1} - P_L)\overline{L}_l^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*}) \\ &= L\overline{L}_l^{-1}(I_{H_2} - P_{L^*}) \\ &= (I_{H_2} - \mathcal{P}_{L^*})(I_{H_2} - P_{L^*}), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_{L^*}$ es el operador proyección L^* para el espacio nulo $N(L^*)$, luego por el Lema 4.2, se tiene $\mathcal{P}_{L^*}P_{L^*} = \overline{P}_{L^*}$ y esto implica que $(I_{H_2} - \mathcal{P}_{L^*})(I_{H_2} - P_{L^*}) = I_{H_2} - \mathcal{P}_{L^*} - P_{L^*} + \mathcal{P}_{L^*}P_{L^*} = I_{H_2} - P_{L^*}$, donde $LL^+ = I_{H_2} - P_{L^*} = (LL^+)^*$. □

Esta no es la única forma de deducir el operador pseudoinversa de un operador de Fredholm en un espacio de Hilbert, debido a que cualquier espacio de Hilbert coincide con su espacio dual por medio de un isomorfismo.

Por otro lado, las composiciones de los operadores $L : H_1 \to H_2$ y $L^* : H_2 \to H_1$ quedan de la siguiente manera: $L^*L : H_1 \to H_1$ y $LL^* : H_2 \to H_2$. Luego se define el operador S como: $S := L^*L : H_1 \to H_1$, este operador es autoadjunto,

$$S^* = (L^*L)^* = L^*L^{**} = L^*L = S.$$

Finalmente usando la igualdad 4.8 se construye el operador proyección ortogonal $P_S : H_1 \to N(S)$.

Lema 4.8. *Sean P_L, P_S y P_{S^*} proyecciones definidas como en 4.8. Entonces las proyecciones P_L, P_S y P_{S^*} satisfacen: $P_L = P_S = P_{S^*}$*

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i=1}^{t}$ una base del espacio nulo $N(L)$ y como $Lf_i = 0$ para cada $i = 1, ..., t$ y los operadores L^* y L son lineales, se sigue que $Sf_i = L^*Lf_i = 0$, es decir, $N(L) \subset N(S)$. Se mostrará que la base f_i con $i = 1, ..., t$ el espacio nulo $N(L)$ no puede ser complementado agregando elementos linealmente independientes $x_0 \in H_1$ tal que $x_0 \in N(S)$, es decir, $Sx_0 = 0$, para ello supóngase lo contrario, es decir, existe un elemento $x_0 \in H_1$ tal que $Lx_0 = \psi \neq 0$ y $Sx_0 = L^*\psi = 0$, así

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Lx_0, 0\rangle \\ &= \langle x_0, L^*\psi\rangle \\ &= \langle Lx_0, \psi\rangle \\ &= \langle \psi, \psi\rangle \neq 0 \end{aligned}$$

esto nos lleva a una contradicción.
Las bases del espació nulo $N(L)$ y $N(S)$ coinciden, entonces $P_L = P_S$, y como el operador S es autoadjunto se concluye que $N(S) = N(S^*)$ y $P_S = P_{S^*}$. □

Teorema 4.6. *Sea $L^+ \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ operador definido por:*

$$L^+ = (L^*L + P_L)^{-1}L^* = L^*(LL^* + P_{L^*})^{-1}. \tag{4.28}$$

Entonces L^+ es un operador acotado pseudoinversa para operadores lineales y acotados de Fredholm L.

Demostración. Sea S un operador de Fredholm con índice cero, el Lema de Schmidt es cierto para el operador S así el operador $S + P_S$ tienen inversa acotada, por lo que, el operador $S^+ = (S + P_S)^{-1} - P_S$ es inversa generalizada de S y satisface la relación $S^+S = I_{H_1} - P_S$. Más aún, como P_S es un operador proyección ortogonal, el operador S^+ es la inversa generalizada, también es el único operador pseudoinversa que satisface (4.22). En efecto,

$$\begin{aligned} &(i) SS^+S = S(I - P_S) = S - SP_S = S \\ &(ii) S^+SS^+ = (I - P_S)S^+S^+ - P_SS^+ = S^+, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$S^+P_S = 0$ y $P_S(S+P_S)^{-1} = P_S$. Más aún,

$$\begin{aligned} &(iii)(S^+S)^* = (I_{H_1} - P_S)^* = I_{H_1} - P_S = S^+S, \\ &(iv)(SS^+)^* = (I_{H_1} - P_{S^*})^* = I_{H_1} - P_{S^*} = SS^+, \end{aligned} \tag{4.30}$$

por lo que $P_S = P_{S^*}, I^*_{H_1} = I_{H_1}$ y $P_S = P^*_S$. Ahora usando las relaciones (4.29) y (4.30), se muestra que el operador, $L^+ = S^+L^*$ satisface la relación (4.24) y como el operador es pseudoinversa para el operador L, también $P_L = P_S, LP_L = 0, S^+S = I_{H_1} - P_S$ y $P_SS^+ = 0$, se puede escribir a L y L^+ como:

(i) $LL^+L = LS^+L^*L = L(I_{H_1} - P_S) = L(I_{H_1} - P_L) = L$,

(ii) $L^+LL^+ = S^+L^*LL^+ = (I_{H_1} - P_S)L^+ = L^+ - P_SS^+L^* = L^+$.

Se concluye que: $L^*L^* = L, ((S+P_S)^{-1})^* = (S + P_S^{-1})$ y como $(S^+)^* = ((S+P_S)^{-1} - P_S)^* = ((S+P_S)^{-1})^* - P^*_S = S^+$, así, se tendría:

$$\begin{aligned} (iii)(L^+L)^* &= (S^+L^*L)^* \\ &= (S^+S)^* \\ &= S^+S \\ &= S^+L^*L \\ &= L^+L, \\ (iv)(LL^+)^* &= (LS^+L^*)^* \\ &= L^{**}(LS^+)^* \\ &= L(S^+)^*L^*LS^+L^* \\ &= LL^+. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Y como $P_LL^* = (LP_L)^*$ y $P_S = P_L = P^*_L$, se escribe $L^+ = S^+L^* = [(S+P_S)^{-1} - P_S]L^* = (L^*L + P_L)^{-1}L^*$.
La igualdad $L^+ = L^*(LL^* + P_{L^*})^{-1}$, se prueba de manera análoga. □

Note que el operador L es tal que $N(L) = 0$ o $N(L^*) = 0$, entonces la igualdad (4.28) coinciden con las siguientes igualdades

$$L^+ = (L^*L)^{-1}L^*(P_L \cong 0), L^+ = L^*(LL^*)^{-1}(P_{L^*} \cong 0).$$

Observación 4.1. *La igualdad (4.28) puede ser usado para la determinación del operador pseudoinversa L^+ para un operador cerrado densamente definido L.*

4.5. Inversas para operadores de Fredholm de índice cero

Las igualdades (4.27) y (4.28) precisan que el operador pseudoinversa para operadores de Fredholm es valido para operadores de Fredholm de índice cero. En cuanto a la construcción del operador pseudoinversa para operadores de Fredholm con índice cero es un espacio de Hilbert se usará una base aproximada, que se obtiene al ocupar el Lema de Schmidt. Sea L un operador de Fredholm con índice cero, es decir, $indL = 0$, donde $t = d = p$ como se definió en 1.20 y sean $\{f_i\}_{i=1}^{t}$ y $\{\rho_s\}_{s=1}^{d}$ bases en los espacios $N(L)$ y $N(L^*)$ respectivamente, y usando las protecciones definidas como en (4.8) y (4.11), se construirán otras proyecciones que estarán relacionadas con $P_L : H_1 \to N(L)$ y $P_{L^*} : H_2 \to N(L^*)$ y operadores de dimensión finita como $\tilde{P}_L : H_1 \to N(L^*)$ y $\tilde{P}_{L^*} : H_2 \to N(L)$

Lema 4.9. *Si $P_L, P_{L^*}, \overline{P}_L$ y $\overline{P}_{L^*}$ son proyecciones definidas como en (4.8) y (4.11) respectivamente, entonces satisfacen lo siguiente:*

$$\begin{aligned} (i) P_{L^*}\overline{P}_L &= \overline{P}_L P_L = \overline{P}_L, \\ (ii) P_L\overline{P}_{L^*} &= \overline{P}_{L^*} P_{L^*} = \overline{P}_{L^*}, \\ (iii) \overline{P}_L\overline{P}_{L^*} &= P_{L^*}, \\ (iv) \overline{P}_{L^*}\overline{P}_L &= P_L. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Demostración. La prueba de este Lema es una implicación directa del Lema 4.3, las igualdades (iii) y (iv) en (4.32), se sigue de las igualdades en (iii) y (iv) en (4.12), para $t = d = p$ y usando las expresiones $\sum_{s,k=1}^{p} \beta_{sk}^{-1}\langle \rho_k, y\rangle \rho_s$ y $\sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij}^{-1}\langle f_j, x\rangle f_i$, que son las proyecciones ortogonales P_{L^*} y P_L, respectivamente. □

Lema 4.10. *Sea L un operador de Fredholm con índice cero y $\overline{P}_L$ definido como en (4.8). Entonces $L + \overline{P}_L$ tiene inversa acotada.*

Demostración. Es necesario y suficiente mostrar que $N(L + \overline{P}_L) = \{0\}$ y $N(L + \overline{P}_L)^* = \{0\}$.
Supóngase que existe $x_0 \neq 0, x_0 \in H_1$ tal que $(L + \overline{P}_L)x_0 = 0$, es decir, $Lx_0 = -\sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1}\langle f_j, x_0\rangle \rho_i$, multiplicando a ambos lados

de la igualdad por el funcional ρ_s con $s = 1, ..., t$ se tiene que:

$$0 = \langle L^* \rho_s, x_0 \rangle \tag{4.33}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle f_j, x_0 \rangle \langle \rho_s, \rho_i \rangle \tag{4.34}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \beta_{si} \langle f_j, x_0 \rangle. \tag{4.35}$$

donde la matriz α^{-1} y β son de tamaño $t \times t$ y son no singulares, la igualdad (4.33) es verdadera solo en el caso cuando $\langle f_s, x_0 \rangle = 0$, con $s = 1, ..., t$ y por otro lado, como los vectores básicos f_s son linealmente independientes, la igualdad $\langle f_s, x_0 \rangle = 0$ implican que $x_0 \cong 0$, pero esto es una contradicción. Por lo que se prueba que $N(L + \overline{P}_L) = \{0\}$.

Ahora se mostrará que $N(L + \overline{P}_L)^* = \{0\}$. Sea $\overline{P}_{L^*}$ el operador adjunto del operador $\overline{P}_L$ y está determinado en la prueba del Lema 4.6 y así se define

$$\overline{P}_L^* y = \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle \rho_i, y \rangle f_j.$$

Ahora supóngase que exista $y_0 \neq 0$, $y_0 \in H_2 = H_2^*$ tal que $(L + \overline{P}_L)^* y_0 = 0$, es decir, $L^* y_0 = -\sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle \rho_i, y_0 \rangle f_j$, multiplicando ambos lados de la igualdad por un elemento f_k con $k = 1, ..., t$, así se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L^* y_0, f_k \rangle \\ &= \langle y_0, L f_k \rangle - \sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \langle y_0, \rho_i \rangle \langle f_j, f_k \rangle \\ &= -\sum_{i,j=1}^{t} \alpha_{ij}^{-1} \alpha_{jk} \langle y_0, \rho_i \rangle. \end{aligned}$$

Como los vectores básicos ρ_i con $i = 1, ..., t$ son linealmente independientes la igualdad $\langle y_0, \phi_i \rangle = 0$, es cierta solo si $y_0 \cong 0$. Así, $N(L + \overline{P}_L)^* = 0$, por lo que el operador $L + \overline{P}_L$ establece una correspondencia uno a uno entre los espacios H_1 y H_2. Luego por el

Teorema de operadores inversas en espacios de Banach el operador $(L + \overline{P}_L)^{-1}$ existe y es acotado. $\square$

Teorema 4.7. *Sea L operador acotado de Fredholm con índice cero y sea el operador*

$$L^+ = (L + \overline{P}_L)^{-1} - \overline{P}_{L^*}. \tag{4.36}$$

Entonces L^+ es el operador acotado pseudoinversa para el operador L.

Demostración. La prueba de este Teorema se sigue directamente del Teorema 4.4, ya que $t = d = p$, el operador inverso por la izquierda $(L + \overline{P}_L)_l^{-1}$ y el operador inverso por la derecha $(L + \overline{P}_L)_r^{-1}$, es decir, el operador inverso $(L + \overline{P}_L^{-1})$ existe. Por lo tanto por analogía al Teorema 4.4, se concluye este Teorema. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un estudio sobre las inversas generalizadas para operadores de Fredholm en espacios de Banach y Hilbert, cubriendo una cantidad de resultados para estudiar la solución a la ecuación lineal de la forma; $Lx = y$.
En espacios de Banach se destaca la importancia de trabajar con proyecciones de dimensión finita, esto para poder aplicar el lema de Atkinson, obtener un análogo al lema de Schmidt y con la finalidad de poder definir la inversa de un operador de Fredholm. También, se puede observar que en estos espacios la ecuación $Lx = y$ tiene solución por mínimos cuadrados es única expresada de la siguientes forma; $x = L^{+}y$, donde L^{+} es la pseudoinversa Moore-Penrose. Si L es un operador de Fredholm de índice cero, podemos dar una representación explícita de su pseudoinversa $L^{+} = (L+\overline{P}_L)^{-1}-\overline{P}_{L^*}$.

Queda como trabajo a futuro explorar algunas aplicaciones de las pseudoinversas de operadores de Fredholm a problemas como los de Riemann y Haseman.

Bibliografía

[1] Ben-Israel, A., & Greville, T. N. (2003). Generalized inverses: theory and applications (Vol. 15). Springer Science & Business Media.

[2] O. V. Besov, V. P. Ilin and S. M. Nikolski, "Integral Representation of Functions and Embedding Theorem," V.H. Wilson and Sons, Washington DC, 1978.

[3] Boichuk, A. A., & Samoilenko, A. M. (2016). Generalized Inverse Operators: And Fredholm Boundary-Value Problems (Vol. 59). Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

[4] Caradus, S. R., Pfaffenberger, W. E., & Yood, B. (2017). Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces. Routledge.

[5] Djordjevic, D. S., y Rakocevic, V., Lectures on generalized inverses. Nis: University of Nis, 2008.

[6] Flett, T. M. (1966). Advanced Calculus. An Introduction to Analysis. By W. Fulks. Pp. xv, 521. 90s.(Wiley). The Mathematical Gazette, 50(373), 339-339.

[7] Kober, H. (1940). A theorem on Banach spaces. Compositio Mathematica, 7, 135-140.

[8] Kubrusly, C. S. (2011). Elements of operator theory. Boston: Birkhäuser.

[9] Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications (Vol. 1). New York: wiley.

[10] Nashed, M. Z. (Ed.). (2014). Generalized Inverses and Applications: Proceedings of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin—Madison, October 8-10, 1973 (No. 32). Elsevier.

[11] Rodríguez, Z. M., & Hernández, J. E. (2018). Operadores Fuertes de Fredholm. Visión Antataura, 2(2), 64-76.

[12] Schechter, M. (2002). Principles of functional analysis. Providence, R.I: AMS Press

[13] Zheng, Z. M., & Ding, H. S. (2016). A note on closedness of the sum of two closed subspaces in a Banach space. Communications in Mathematical Analysis, 19(2), 62-67.