

〔論文〕

二重周期配列の傾斜き裂群をもつ無限体の解析

井川 秀信*¹

Analysis of a Doubly Periodic Array of Slant Cracks in an Infinite Plate

Hidenobu IGAWA*¹

Abstract

Fatigue fractures are caused in any material due to the incorporation and growth of cracks generated from latent defects and dislocations, which can lead to accidents. In the initial-stage fracture, micro cracks are generated from slips in the material due to shear stress. Following a cycle of incorporation and growth, these micro cracks eventually form macro cracks, which lead to the final fracture. Therefore, it is important to elucidate the growth of fatigue fractures by investigating the effects of crack interference.

In this paper, a doubly periodic array of slant cracks in an infinite plate is analyzed. The analysis uses a suitable unit region and the body force method by satisfying the traction-free conditions for crack edges, where expressions of body force densities based on resultant forces are introduced to obtain results with high accuracy. The results of the stress intensity factors, tensile stiffness, and shearing stiffness of slant cracks are summarized for practical use.

Key Words : Two dimensional elasticity, Slant cracks, Body force method, Stress intensity factor, Tensile stiffness, Shearing stiffness

1. 緒 言

疲労破壊の初期段階では、数多くの微小なき裂が見られ、それらが成長および合体を繰り返し最終破壊に至る。従って、き裂の発生や成長には、微小き裂の干渉が影響する。

疲労寿命の予測にはき裂先端の応力場を示すパラメータである応力拡大係数が重要な役割を持ち、それを高精度に求めるため計算機によるシミュレーションが数多く行われてきた。しかし、いまだ未解決な問題も多く、特に複数個のき裂解析については解析が困難であるため研究途上にある。

石田らは、周期配列のき裂群の引張りについて固有関数展開法による応力解析を行い、無次元応力拡大係数および引張剛性係数の結果を与えた^{(1),(2)}。また、傾斜き裂群については、ローラン展開法や固有関数展開法等による応力解析が行われてきた^{(3)~(11)}。しかし、周期配列の傾斜き裂群については、これまで十分な解析が行われていない。

本研究は、周期配列の傾斜き裂群について汎用的な高精度応力解析法を開発したものである。解析には、一個のき裂を含む適当な長方形を考えた。そして種々の荷重条件に適合するように複素応力関数の級数展開法を与え、き裂相当面に体積力を分布させてき裂縁を自由とする方法をとった。このとき合力に基づく境界分割法を用いて体積力の重みを高精度に定めた。本法を用いて、引張応力および面内せん断を受ける周期配列の傾斜き裂について無次元応力拡大係数、引張剛性係数およびせん断剛性係数の結果を与える。

2. 解析方法

2.1 複素応力関数

二次元弾性問題における応力、合力の成分は、複素応力関数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re}[\varphi(z)] \quad (1)$$

*¹ 交通機械工学科
令和4年10月31日受理

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \tag{2}$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \tag{3}$$

$$2G(u - iv) = \kappa\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \tag{4}$$

ここに G はせん断弾性係数で、 κ はポアソン比 ν によって次式で与えられる。

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \tag{5}$$

本研究では、Fig. 1 に示すように遠方で引張応力 σ およびせん断応力 τ を受ける無限板に長さ $2a$ 、傾斜角度 θ のき裂群が横方向および縦方向の間隔 $2b$ 、 $2c$ で周期的に配列した場合を考える。

解析には一個のき裂を含む適当な単位領域を考え、原点 O と x 、 y 軸を図のように定める。解析は、問題の対称性を考慮して単位領域 DEFG について行う。

先ず、Fig2(a)に示す長方形領域に任意の外力 $P_{x,a}^*$ 、 $P_{y,a}^*$ および変位 u_a^* 、 v_a^* を受ける場合を考える。このときの領域内の応力と変位は次に示す2つの複素応力関数 $\varphi_a(z)$ 、 $\psi_a'(z)$ で与えられる。

$$\varphi_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^{n+1},$$

$$\psi_a'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^{n+1} \tag{6}$$

ここに M_n 、 K_n は、複素係数である。

式(6)によって Fig.2(a)に示した領域内の応力と変位の状態を求めることができるが、き裂縁が自由となる条件を満たしていない。そこで、著者がこれまで開発してきた体積力法によるき裂縁を自由とする解析法を用いる^{(8)~(11)}。

具体的には、Fig.2(a)に示した領域内の中心に角度 θ の仮想き裂を考える。座標 Oxy と仮想き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s を図のように定める。

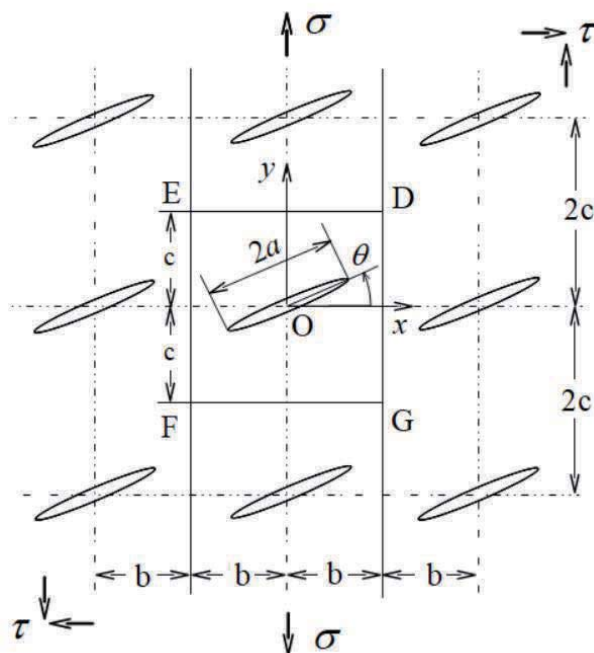


Fig. 1 Doubly-periodic array of slant cracks

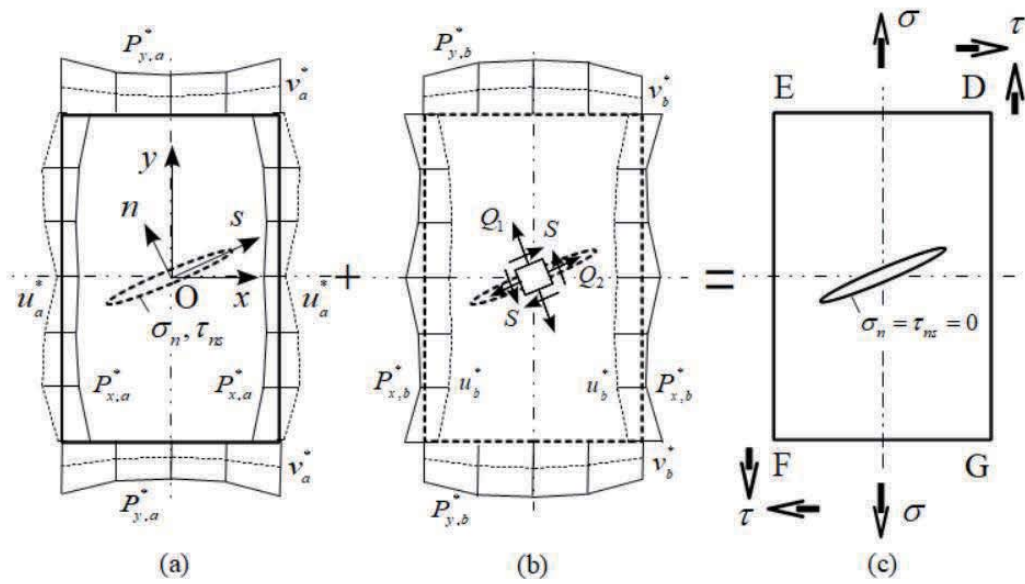


Fig. 2 Analytic model

次に、Fig.2(b) に示すようにき裂相当面に沿って引張り型とせん断型の集中力対を同時に分布させ、き裂縁が自由となる条件を満足させる。それらの集中力対は、 Fig.3 に示した集中力 R の基礎式から求めることができる。すなわち

$$\varphi(z) = -\frac{R}{2\pi(\kappa-1)} \log(z-\zeta),$$

$$\psi'(z) = \frac{1}{2\pi(\kappa-1)} \left[\kappa R \log(z-\zeta) + R \frac{\zeta}{z-\zeta} \right] \tag{7}$$

ここに ζ は、原点 O からの距離である。

Fig. 2(b) に示した引張り型の集中力対は、引張応力を受ける場合にき裂縁を自由にする関係式であり、式(7)から求めたき裂面に直角な方向（法線方向 n ）の体積力対 $Q_1 = q_1(t)dt$ とき裂面方向（接線方向 s ）の体積力対 $Q_2 = q_2(t)dt$ を分布させることで求められる。ここに $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ はき裂面に分布させる体積力対の密度であり、 t はき裂中心からの距離である。そして Q_1 、 Q_2 の体積力がき裂縁にせん断応力を生じないための条件が石田によって求められており⁽⁵⁾、これを書くとき次のようになる。

$$q_2(t) = \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \frac{dq_1(t)}{dt} \tag{8}$$

従って求める体積力の密度は $q_1(t)$ だけとなり、それらの複素応力関数を $\varphi_b(z)$ 、 $\psi'_b(z)$ とする。

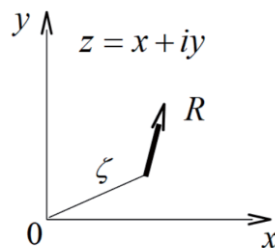


Fig. 3 Force acting on a plane

Fig.2(b)に示したせん断型集中力対は、面内せん断を受ける場合にき裂縁を自由にする関係式であり、式(7)から求めたせん断力型の体積力対 $S = w(t)dt$ をき裂相当面に分布させることで求められる。ここに $w(t)$ はき裂面に分布させる体積力の密度である。それらの複素応力関数を $\varphi_c(z)$, $\psi'_c(z)$ とする。

以上によって、 Q , S が同時に作用する場合の関数は、

$$\varphi(z) = \varphi_a(z) + \varphi_b(z) + \varphi_c(z),$$

$$\psi'(z) = \psi'_a(z) + \psi'_b(z) + \psi'_c(z) \tag{9}$$

となり、き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s の合力は次式から求められる。

$$\begin{aligned} P_n + iP_s &= (P_x + iP_y)e^{i\theta} \\ &= [-\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z)]e^{i\theta} \end{aligned} \tag{10}$$

本研究では、き裂面を自由縁とするために引張り型の体積力対 $Q = Q_1 + Q_2$ とせん断型の体積力対 S をき裂相当面に同時に分布させる。

き裂解析には各き裂縁に体積力対分布させる必要があるが、き裂の座標系と幾何学パラメーターを Fig.4 の様に定め、各き裂先端局部応力場の特性に適合する次の関係式を用いる。

$$q_1(t) = 4\sqrt{a^2 - t^2} f(t),$$

$$w(t) = 4\sqrt{a^2 - t^2} g(t) \tag{11}$$

式(11)の重み関数 $f(t)$, $g(t)$ は、Fig.5 に示した折れ線関数による合力境界分割法で求めた。

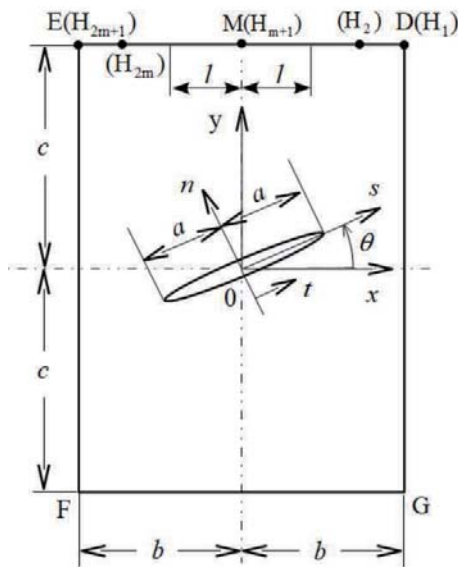


Fig. 4 Rectangular plate with a slant crack

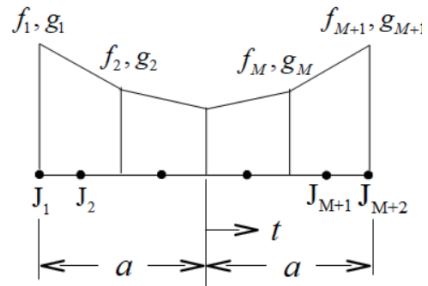


Fig. 5 Subdivision of crack for numerical evaluation of weighting function

2・2 応力解析の概要

式(6)の未知係数 M_n , K_n および式(11)の体積力の重み関数 $f(t)$, $g(t)$ は、Fig.1 の単位領域 DEFG の外周の辺 DE, EF, FG, GD の境界条件と前述のき裂縁の自由条件から定める^{(1),(2)}。なお、外周の各辺は、応力状態の x 方向および y 方向の周期性から同様の境界条件となるので辺 DE について述べる。

Fig.4 の辺 DE の中点を M とすると、応力状態の x 方向および y 方向の周期性から、点 M の両側で M から等距離 l にある二点は同じ応力状態であり、またこれらの点 M に対する相対変位も同じである。そこで、便宜上、辺 DE を偶数 $N_1 (= 2m)$ 個の等しい区間に分割し、分点を H_e ($e = 1, 2, \dots, N_1 + 1; N_1 = 2m$) とする。

まず点 M から等距離にある分点 H_e と H_{2m+2-e} ($e = 1, 2, \dots, m$) における等応力条件は、これらの点と点 M (すなわち点 H_{m+1}) における合力の差によって次式で与えられる。

$$\left[P_x + iP_y \right]_{H_e}^{H_{m+1}} = \left[P_x + iP_y \right]_{H_{m+1}}^{H_{2m+2-e}} \quad (e = 1, 2, \dots, m; m = N_1 / 2) \quad (12)$$

また、点 M の相対変位が点 H_{2m+2-e} と点 M の相対変位に等しい条件は次のようになる。

$$\left[u - iv \right]_{H_e}^{H_{m+1}} = \left[u - iv \right]_{H_{m+1}}^{H_{2m+2-e}} \quad (e = 1, 2, \dots, m; m = N_1 / 2) \quad (13)$$

さらに外荷重の条件は次式で与えられる。

$$\left[P_x + iP_y \right]_D^E = \sigma \cdot 2b + i\tau \cdot 2b \quad (14)$$

辺 EF, FG, GD に関しても同様の境界条件から式(12)~(14)を適用することができる。

領域外周の全分割数を N ($= N_1 + N_2 + N_3 + N_4$) とすれば、 M_n , K_n を定めるための境界条件は $(4N + 4)$ 個となる。そこで式(6), (7)の未知係数 M_n ($n \leq N + 1$), K_n ($n \leq N + 1$) の実数部と虚数部を含めて $(4N + 4)$ 個を残して、これらより高次の項を零と置くことにより、Fig.2(a)に示した単位領域外周に合力 $P_{x,a}^*$, $P_{y,a}^*$ および変位 u_a^* , v_a^* を受ける場合の応力状態が定められる。さらに Fig.2(b)に示す様に単位領域内に傾斜き裂を実現するためにき裂相当面に体積力を分布させてき裂縁自由の条件を満足させる。それにより新たに単位領域外周に合力 $P_{x,b}^*$, $P_{y,b}^*$ および変位 u_b^* , v_b^* を生ずるが、周期傾斜き裂群の境界条件を満たす様に Fig.2(a) と Fig.2(b)を組合わせて連立に解くことにより式(6)の未知係数 M_n , K_n と式(11)の体積力の重み関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めた。

き裂端 A, B の応力拡大係数は次式で求める。

$$\begin{aligned} K_{I,A}, K_{I,B} &= [f(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a}, \\ K_{II,A}, K_{II,B} &= [g(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (15)$$

3. 解析結果

3・1 計算した物理量と計算精度

本研究では、次式で定義されたモード I, モード II の無次元応力拡大係数, 引張剛性係数およびせん断剛性係数を求めた。

無次元応力拡大係数

$$\begin{aligned} F_{I,A} &= \frac{K_{I,A}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, & F_{I,B} &= \frac{K_{I,B}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, \\ F_{II,A} &= \frac{K_{II,A}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, & F_{II,B} &= \frac{K_{II,B}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \end{aligned} \quad (16)$$

引張剛性係数

$$\begin{aligned} C_I &= \frac{E^*}{E_0} \\ E^* &= \text{き裂がある場合の平均引張弾性係数} \\ E_0 &= \text{き裂がない場合の引張弾性係数} \\ &= \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

せん断剛性係数

$$C_{II} = \frac{G^*}{G_0}$$

G^* = き裂がある場合の平均せん断弾性係数

G_0 = き裂がない場合のせん断弾性係数

(18)

石田らは引張りおよび面内せん断を受ける二重周期き裂群について固有関数展開による解析法を開発し、無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ および $F_{II,A}$ の結果を与えた^{(1),(9)}. 本法ではき裂の傾斜角 $\theta=0^\circ$ に相当し、 $c/b=1$ の場合について両者による無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ および $F_{II,A}$ の値を Table 1 に示す. なお、本法による解析値は、有効数字5桁まで示している. 両者による解析値は、有効数字4桁まで良い一致を示していることが分かる.

以下に、き裂の傾斜角度が異なる場合について無次元応力拡大係数、引張剛性係数およびせん断剛性係数の結果を与える. なお、本法を用いて種々の c/b について解析を行うことができるが、紙面の都合により $c/b=1$ の正方形配列の場合について述べる.

Table 1 Values of $F_{I,A}$ and $F_{II,A}$

Case	Tension		In-plane shear	
	$F_{I,A}$		$F_{II,A}$	
	Eigen function expansions	Present method	Eigen function expansions	Present method
0.0	1.000	1.0000	1.000	1.0000
0.1	1.003	1.0028	1.005	1.0051
0.2	1.012	1.0122	1.020	1.0205
0.3	1.031	1.0306	1.047	1.0466
0.4	1.062	1.0622	1.085	1.0851
0.5	1.113	1.1133	1.140	1.1397
0.6	1.194	1.1939	1.219	1.2195
0.7	1.324	1.3244	1.345	1.3448
0.8	1.558	1.558	1.569	1.570

3・2 引張応力を受ける周期傾斜き裂群の無次元応力拡大係数と引張剛性係数

Fig.6, Fig.7 は、き裂の傾斜角度 $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ に対する無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ ($=F_{I,B}$), $F_{II,A}$ ($=F_{II,B}$) と $\lambda=a/b$ の関係を示したものである. $F_{I,A}$, $F_{II,A}$ は、 $\lambda \rightarrow 0$ では無限板に一個の傾斜き裂をもつ場合となり、次の値となる.

$$\left[F_{I,A} \right]_{\lambda \rightarrow 0} = \cos^2 \theta,$$

$$\left[F_{II,A} \right]_{\lambda \rightarrow 0} = \cos \theta \sin \theta \tag{19}$$

モード I の無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ ($=F_{I,B}$) は、 $\theta=0^\circ$ すなわちき裂縁が引張方向と直角のとき最大となり、 θ の増大で $F_{I,A}$ の曲線群が低下する. $\theta=90^\circ$ のとき $F_{I,A}$ が最も小さくなる. また、各 θ に対する $F_{II,A}$ は λ の増大で単調に増大する.

一方、モード II の無次元応力拡大係数 $F_{II,A}$ は、 $\theta=0^\circ$ で最も小さく、 θ の増大で $F_{II,A}$ の曲線群が増大する. そして $\theta=45^\circ$ のとき $F_{II,A}$ が最大となり、これより θ が大きくなると $F_{II,A}$ の曲線群は逆に減少する. また、 $F_{II,A}$ は θ によって λ の増大で異なった増大・減少を示すが、その変動の幅は小さい.

Fig.8 は、き裂の傾斜角度 $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ に対する引張剛性係数 C_I と λ の関係を示したものである. 引張剛性係数 C_I は、 θ のいずれの場合も λ の増大で単調に減少する. C_I の曲線群は $\theta=0^\circ$ で最も低下し、各 θ で λ に対する減少の大きさが異なる. 石田らは、単位領域にき裂が占める有効面積率 f を考え、引張剛性係数 C_I と有効面積率 f が良い相関関係にあることを示した⁽¹⁾.

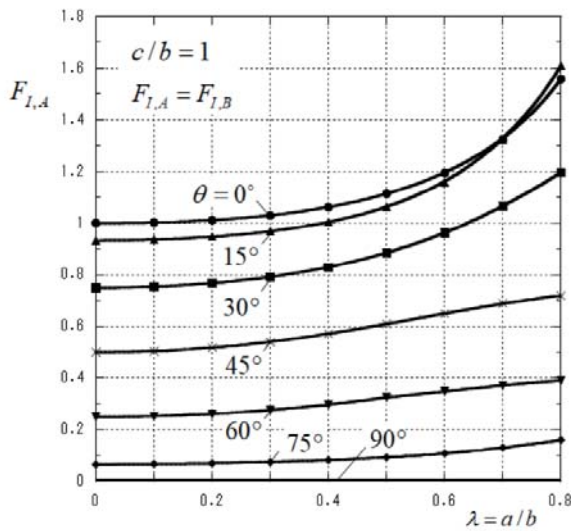


Fig. 6 $F_{I,A}, \lambda$ -relations for tension

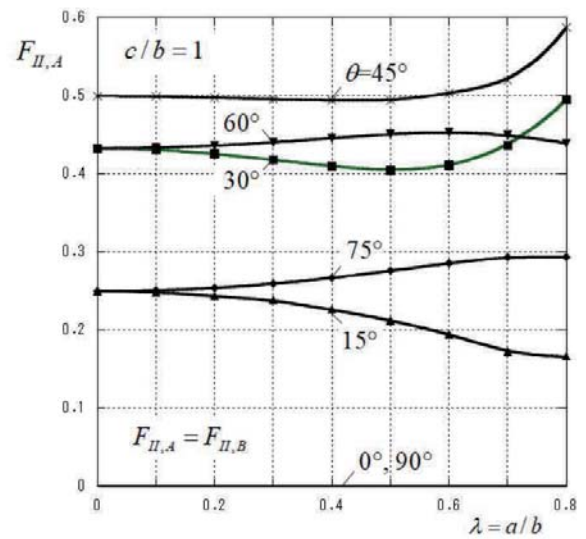


Fig. 7 $F_{II,A}, \lambda$ -relations for tension

傾斜き裂では、傾斜角度 θ によって C_I の傾向が異なるため、有効面積率 f が適用できない。そこで傾斜き裂に有効なパラメーターとして次のき裂密度 ρ を提案する。

$$\rho = \frac{(a \cos \theta)^2}{A},$$

$$A = 4bc \quad (\text{単位領域の面積})$$

(20)

Fig.9は、引張剛性係数 C_I とき裂密度 ρ の関係を示したものである。同図より C_I はき裂の傾斜角度 θ に関係なくほぼ一本曲線上にまとまることが分かる。従って、本結果はき裂がランダムに分布する場合の弾性係数の推定にも有効であると思われる。

以上の結果から、き裂密度 ρ をパラメーターとする引張剛性係数の計算式を次のように与えた。

$$C_I = \frac{E^*}{E_0} = 1 - 6.1443\rho + 29.921\rho^2 - 93.758\rho^3 + 122.73\rho^4$$

(平均誤差 ; 1.1[%] for $\rho \leq 0.1$, 2.7[%] for $\rho \leq 0.15$)

(21)

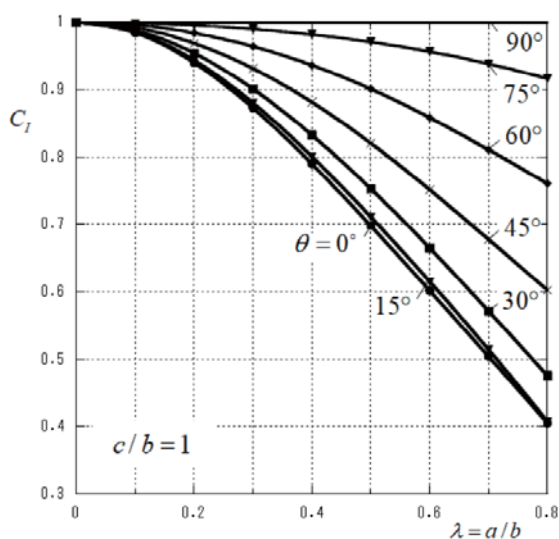


Fig. 8 C_I, λ -relations for tension

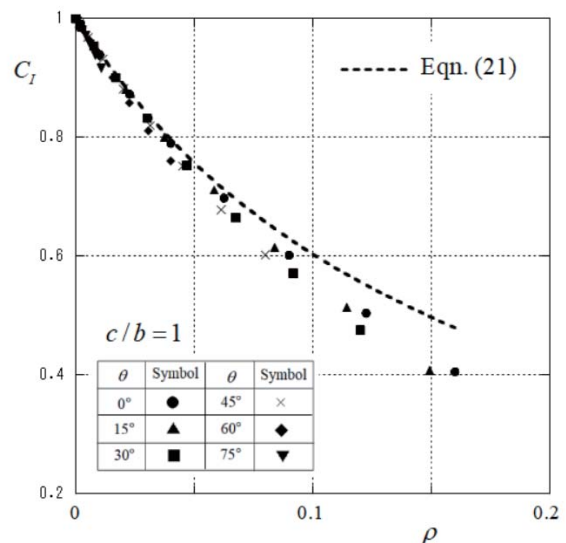


Fig. 9 C_I, ρ -relations for tension

Fig.9 に計算式(21)の結果を破線で示したが、図中の解析値と良い近似を与えていることが分かる。以上の結果は、平面応力、平面ひずみに関係なく、 E , ν の材料定数にも無関係である。

3・3 面内せん断応力を受ける周期傾斜き裂群の無次元応力拡大係数と引張剛性係数

Fig.10, Fig.11 は、き裂の傾斜角度 $\theta=0^\circ, -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ$ に対する無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ ($=F_{I,B}$), $|F_{II,A}|$ ($=|F_{II,B}|$) と $\lambda=a/b$ の関係を示したものである。なお、モードIIの無次元応力拡大係数は、 $[[F_{II,A}]]_{\theta=0^\circ\sim 45^\circ} = [-F_{II,A}]_{\theta=45^\circ\sim 90^\circ}$ となり、 $|F_{II,A}|$ として Fig.11 に示した。

$F_{I,A}$, $F_{II,A}$ は、 $\lambda \rightarrow 0$ では無限板に一個の傾斜き裂をもつ場合となり、次の値となる。

$$\begin{aligned}
 [F_{I,A}]_{\lambda \rightarrow 0} &= -2 \cos \theta \sin \theta, \\
 [F_{II,A}]_{\lambda \rightarrow 0} &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

モードIの無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ ($=F_{I,B}$) は、 θ の減少で $F_{I,A}$ の曲線群が上昇し、 $\theta=45^\circ$ のとき最大となる。このことは、面内せん断応力を受ける平面では、 $\theta=45^\circ$ の角度でせん断応力が0となり、この面と直角および平行な方向で最大・最小の主応力が生ずることからも推察される。また、各 θ に対する $F_{I,A}$ は、 λ の増大で単調に増大する。

一方、モードIIの無次元応力拡大係数 $|F_{II,A}|$ は、 $\theta=0^\circ$ で最も大きく、 θ の減少で $|F_{II,A}|$ の曲線群が低下する。そして $\theta=45^\circ$ のとき $|F_{II,A}|$ が最小となる。

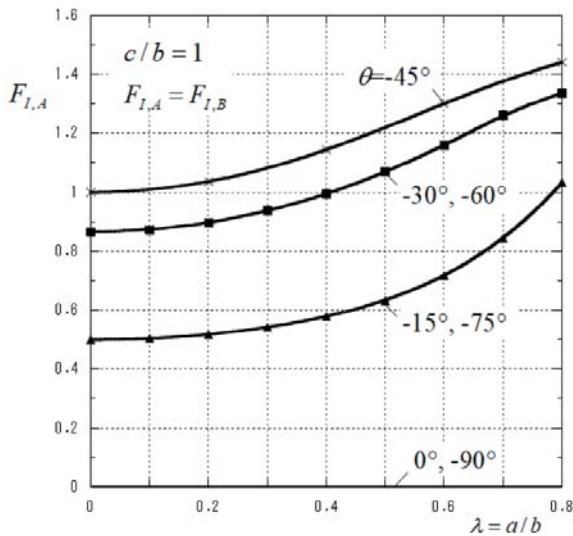


Fig. 10 $F_{I,A}$, λ -relations for in-plane shear

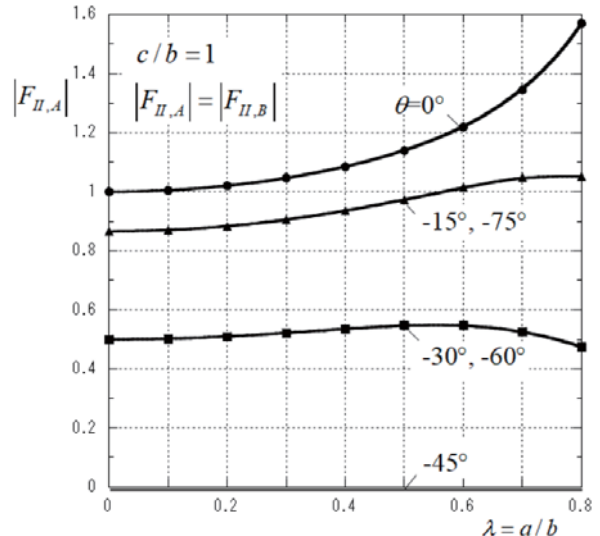


Fig. 11 $|F_{II,A}|$, λ -relations for in-plane

Fig.12 は、き裂の傾斜角度 $\theta=0^\circ, -45^\circ, -90^\circ$ に対するせん断剛性係数 C_{II} と λ の関係を示したものである。 C_{II} は、 λ の増大で単調に減少する。き裂の傾斜角度については、 $\theta=0^\circ, -45^\circ, -90^\circ$ の C_{II} はあまり差が無く、き裂の傾斜角度の違いによるせん断剛性係数に与えるの影響があまり無いことが分かる。また、図中に平面応力の場合の C_{II} を実線で、平面ひずみの場合を破線で示したが、 C_{II} は平面ひずみの方がわずかに大きい。

以上の結果は、平面応力と平面ひずみの場合でわずかに異なるが、実用上はほぼ同じ値と見なして良い。

4. 結 論

- (1) 周期傾斜き裂群をもつ無限板に引張応力および面内せん断を受ける場合について体積法による応力解析法を開発した。
- (2) 本法を用いて傾斜き裂の角度が異なる場合のモードI, モードIIの無次元応力拡大係数, 引張剛性係数およびせん断剛性係数の結果を精度良く求めた。

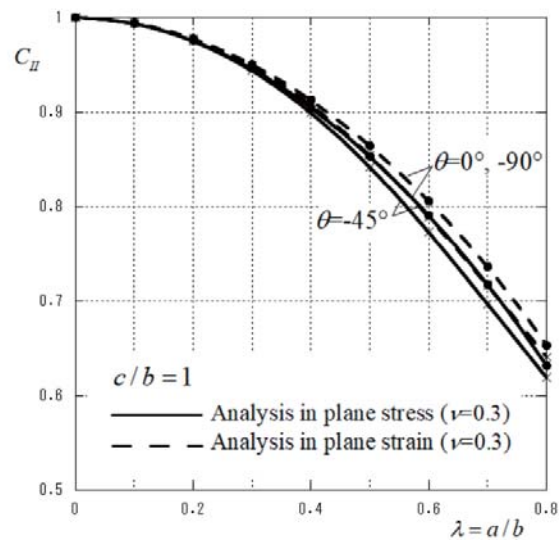


Fig. 8 C_{II}, ρ -relations for in-plane shear

- (3) 引張剛性係数は、き裂密度 ρ と非常に良い相関関係にある。また、引張剛性係数に対する計算式を与えた。
- (4) セン断剛性係数は、き裂の傾斜角度の違いによる影響があまり無い。また、平面応力と平面ひずみのせん断剛性係数はわずかに異なり、平面ひずみのせん断剛性係数が平面応力の場合より幾分大きくなる。

文 献

- (1) 石田誠, 井川秀信, “二重周期き裂群および千鳥分布き裂群をもつ無限体の引張り”, 日本機械学会論文集, 第 510 号 A 編 (1989), pp. 238-245.
- (2) M. Isida, H. Igawa, “Doubly-periodic array and zig-zag array of cracks in solids under uniaxial tension”, International Journal of Fracture, Vol. 53 (1992), pp. 249-260.
- (3) 石田誠, 井川秀信, “二重周期き裂群および千鳥分布き裂群をもつ無限体の面内せん断”, 久留米工業大学知能工学研究所報告, 第 6 号(1993), pp. 13-20.
- (4) M. Isida, “Method of Laurent series expansion for internal crack problems”, Mechanics of Fracture I (1973), Edited by G. C. Shi, Noordhoff International Publishing, pp. 56-130.
- (5) 石田誠, 野口博司, “任意分布き裂群を持つ接合半無限体の面内荷重問題”, 日本機械学会論文集, 第 437 号 A 編 (1983), pp. 36-45.
- (6) H. Igawa, “Tension of an infinite solid containing a doubly-periodic array of slant cracks”, Boundary Element Technology VIII (1999), WTT Press, pp. 568-575.
- (7) H. Igawa, “In-plane shear of an infinite solid containing a doubly-periodic array of slant cracks”, Boundary Element Technology VIII (1999), WTT Press, pp. 609-618.
- (8) 井川秀信, “任意に分布するき裂群の解析(第1報:引張応力を受ける無限板)”, 久留米工業大学研究報告, No. 31 (2008), pp. 15-20.
- (9) 井川秀信, “任意に分布するき裂群の解析(第2報:面内せん断を受ける無限板)”, 久留米工業大学研究報告, No. 33 (2010), pp. 7-13.
- (10) 井川秀信, “2個の等長傾斜き裂の解析(第1報:引張応力を受ける場合)”, 久留米工業大学研究報告, No. 42 (2019), pp. 89-99.
- (11) 井川秀信, “2個の等長傾斜き裂の解析(第2報:面内せん断を受ける場合)”, 久留米工業大学研究報告, No. 43 (2020), pp. 54-64.