



Universidad de Alcalá

Programa de Doctorado en Ciencias

**Estudio asintótico de curvas y
superficies**

Tesis Doctoral presentada por

Elena Campo Montalvo

2022



Universidad de Alcalá

Programa de Doctorado en Ciencias

**Estudio asintótico de curvas y
superficies**

Tesis Doctoral presentada por
Elena Campo Montalvo

Directora:

Dra. Sonia Pérez Díaz

Alcalá de Henares, octubre de 2022



E. Campo-Montalvo, S. Pérez-Díaz (Dir.),
“Estudio asintótico de curvas y superficies”,
Ph.D. Thesis, University of Alcalá,
Alcalá de Henares, Spain, 2022

is licensed under the [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

*A mis padres, modelos de perseverancia y amor en cada momento de su vida,
y a mi hija, el amor, la fuerza y la confianza que me inspiran y sostienen.*

Agradecimientos

Con esta tesis doctoral culmina un sueño y una trayectoria académica que inicié hace años. Con ella, también se ha abierto un camino en el que confluyen las disciplinas científicas que han formado la parte más importante de mi aprendizaje: las matemáticas y las ciencias de la computación, además de la ingeniería de computadores.

Con esta tesis en mis manos quiero dar las gracias a todas las personas que me han ayudado a alcanzar este proyecto que creía imposible.

En primer lugar, quiero dar mi más sincero agradecimiento a mi directora de tesis, Sonia Pérez. Efectivamente, tal como decía Karl F. Gauss sobre Sophie Germain, Sonia es una mujer profesionalmente increíble, “sus investigaciones indican que posee una valentía notable, talento extraordinario y un genio superior” y, además, tiene la magnífica generosidad de compartir su sabiduría con la mayor sencillez. Su brillantez, su percepción intuitiva de las matemáticas, su magia y su empatía han logrado que haya avanzado y disfrutado en cada minuto de esta investigación. Gracias a que es humanamente tan perfecta como sus asíntotas, también es un modelo de referencia como persona, siempre derrochando ánimos, transmitiendo el entusiasmo y la pasión por todo lo que hace, acompañándome en momentos desesperados, en los que me ha tomado de la mano y me ha ayudado a desenmarañar las discusiones en las que me he visto estancada.

También agradezco enormemente a Marián Fernández, ejemplo de profesionalidad, esfuerzo y voluntad, por sus sabios consejos y por las aportaciones que siempre me ha brindado desinteresadamente. El rigor de su carrera y su calidad humana se unen en perfecta armonía y con un delicado glamour. No olvidaré que gracias a ella, y a todo su estímulo, comencé esta fascinante andadura para la que me proporcionó las alas con las que sentí que alcanzaría este hito.

Un agradecimiento especial a mi maestro y amigo, Javier Ceballos, excelente profesional y probablemente la persona más íntegra que conozco y con la que conecté desde el primer momento. Intentar seguir sus pasos es crecer en la disciplina, el tesón y la perfección por el trabajo. Es una persona admirable, hace simple lo complejo, transmite vitalidad y optimismo a su alrededor, mantiene su honradez y sinceridad, junto con el cuerpo y la solera del buen vino.

Gracias a Ana Privado, una mujer con un inmenso talento, que junto a su infinito entusiasmo hacen que trabajar con ella haya sido tan fácil. También aprecio sobremanera su humildad y comprensión que me ha aportado un gran sosiego y un cariño sin límites. Ella me ha hecho entender cómo el optimismo es una filosofía de vida, mostrando sus mejores energías y vitalidad ante las adversidades.

Muchas gracias a la Universidad de Alcalá, especialmente a las personas de la Escuela de Doctorado y a los compañeros de la Escuela Politécnica Superior y de la Facultad de Ciencias.

De manera muy especial doy las gracias a mi familia. Mis padres son las mejores personas del universo, me han transmitido los mayores valores, el gusto por lo sencillo y lo cotidiano, una inmensa generosidad y una perpetua bondad, siempre dando lo mejor de sí mismos, trabajado incansablemente y ofreciendo su sacrificio para sustentar un entorno maravilloso y una familia especialmente feliz. Mi hija me ha educado en la paciencia, en el respeto, en la ternura, en la dignidad, en la sensatez, en la responsabilidad, en la constancia y en tantas otras virtudes que comparte con todas las personas que se acercan a ella. Mi niña es una mujer extraordinaria con un encanto especial, una enorme empatía y esa formidable ironía con la que te provoca las sonrisas más divertidas. Ha percibido los momentos en los que no dado la talla como madre y he estado ausente y, a cambio, me ha dado todo su apoyo incondicional, aportando la calma y el cariño que lleva consigo, y regalándome ilusiones y alegrías día a día con todo lo que hace. Gracias por tus abrazos llenos de empuje, por preparar la comida cuando yo la olvidaba involucrada en el trabajo, . . . , llegarás a cumplir tus sueños más felices, mi cielo.

Muchas gracias mis grandes amores, sin vosotros nada de esto hubiera sido posible, sois los cimientos más firmes en los que me apoyo, de los que me siento plenamente orgullosa y tremendamente afortunada.

A mi lado siempre han estado mis hermanas, soportándome, alentándome y dándome sus mejores consejos en los momentos de flaquezas e incertidumbres, en los que he recibido su luz con total honestidad y comprensión incondicional, que me ha permitido afrontar mis debilidades. Gracias, gracias a las risas de mis sobrinos malvados, a los que seguiré robando besos y achuchones, a mi cuñado Daniel con el que seguiré debatiendo hasta en el infinito, y a mi cuñado David. También mi gratitud a todos mis tíos y primos, en especial a mi tía Salud y a mi tío Ángel, junto con sus hijas, son personas fundamentales en mi vida y me han empujado a seguir adelante con su convicción en Eleniiiiita.

Mi agradecimiento todas esas grandes mujeres y amigos que me quieren, me han querido y han sabido entender mis “renuncias” a compartir con ellos momentos y vivencias, con las que he compartido ilusiones y parte de mi vida. Especial mención a Fran, Ana, Ileana, Sabrina, Claudia, Nora, Inés, y a tantos otros amigos.

A los atardeceres junto a los firmes molinos manchegos, porque anclada a la tierra puedo volar hacia un cielo límpido, teñido de añil y violeta.

Resumen

Esta memoria se encuadra en el área de la geometría algebraica, el cálculo simbólico y sus aplicaciones en el diseño geométrico asistido por ordenador (*Computer Aided Geometric Design*, CAGD). Su objetivo es avanzar, desde los estudios preliminares relacionados con la caracterización de curvas algebraicas planas, hacia el análisis de las propiedades de las ramas de una curva en puntos con coordenadas “suficientemente grandes” y hacia la construcción de las “asíntotas generalizadas” de una curva, extendiendo la investigación al caso de superficies algebraicas.

Se crean nuevos métodos de computación simbólica, que caracterizan a las curvas algebraicas planas y analizan el comportamiento de sus ramas infinitas, pudiendo extraer una gran parte de la información sobre el comportamiento de una curva, estudiar la topología de ciertas variedades algebraicas, curvas planas y superficies en tres dimensiones, y representarlas gráficamente en el infinito. Además, se presentan algoritmos e implementaciones que construyen de manera efectiva las asíntotas generalizadas de una curva dada, junto con un análisis de su rendimiento.

Se trata, por tanto, de una investigación que involucra a dos disciplinas científicas: la matemática y la computación, haciendo que las expresiones matemáticas y los objetos matemáticos puedan manejarse, utilizando el cálculo simbólico, para resolver problemas del mundo real.

Así, las principales **aportaciones** e innovaciones de esta tesis doctoral son: (1) el desarrollo de métodos efectivos y exactos para la construcción de las ramas infinitas y de las asíntotas de una curva algebraica plana, mediante el cálculo de límites y derivadas, (2) el diseño e implementación de algoritmos eficientes para el cálculo de las asíntotas de curvas algebraicas planas (con el software de álgebra **Maple**), así como el análisis de su rendimiento computacional, (3) la determinación de ciertas propiedades obtenidas a partir de las ramas infinitas y construcción de familias de curvas a partir de ciertas asíntotas y (4) definición de conceptos de rama infinita, ramas infinitas convergentes y aproximación aplicados a superficies algebraicas.

Estos resultados pueden adaptarse al espacio n -dimensional y a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales. Además, se abren futuras líneas de investigación aplicada, en el área del diseño gráfico en 3-D, en el campo de la ingeniería de datos, o en el ámbito del análisis del rendimiento y eficiencia computacional de algoritmos, entre otras áreas de investigación y desarrollo.

Palabras clave: Curvas algebraicas, superficies algebraicas, ramas infinitas, ramas convergentes, curvas aproximantes, asíntotas generalizadas, g-asíntotas, rendimiento computacional.

Áreas UNESCO: 1201 Álgebra, 1203 Ciencia de ordenadores, 1204 Geometría, 1210 Topología.

Abstract

This memory framework is the area of algebraic geometry, symbolic calculus and its applications in Computer Aided Geometric Design (CAGD). Its aim is to advance, from the preliminary studies related to the characterization of plane algebraic curves, towards the analysis of the branches' properties of a curve at points with "sufficiently large" coordinates and towards the construction of the "generalized asymptotes" of a curve, extending the investigation to the case of algebraic surfaces.

New symbolic computation methods are created, which characterize plane algebraic curves and analyze the behavior of their infinite branches, being able to extract a large part of the information about the behavior of a curve, study the topology of certain algebraic varieties, plane curves and surfaces in three dimensions, and represent them graphically at infinity. In addition, algorithms and implementations that effectively construct the generalized asymptotes of a given curve are presented, along with an analysis of their performance.

It is, therefore, an investigation that involves two scientific disciplines: mathematics and computing, making mathematical expressions and mathematical objects can be handled, using symbolic calculus, to solve real-world problems.

Thus, the main **contributions** and innovations of this doctoral thesis are: (1) the development of effective and exact methods for the construction of infinite branches and asymptotes of a plane algebraic curve, by calculating limits and derivatives, (2) the design and implementation of efficient algorithms for the calculation of the asymptotes of plane algebraic curves (with the algebra software **Maple**), as well as the analysis of their computational performance, (3) the determination of certain properties obtained from infinite branches and the construction of families of curves from certain asymptotes and (4) the definition of concepts of infinite branch, convergent infinite and approaching branches, applied to algebraic surfaces.

These results can be adapted to the n -dimensional space and to curves defined by not necessarily rational parameterizations. In addition, future lines of applied research are opened in the 3-D graphical design area, in the field of data engineering, or in the field of performance analysis and computational efficiency of algorithms, among other areas of research and developing.

Keywords: Algebraic curves, algebraic surfaces, infinite branches, convergent branches, approaching curves, generalized asymptotes, g-asymptotes, computational performance.

UNESCO fields: 1201 Algebra, 1203 Computer Sciences, 1204 Geometry, 1210 Topology.

Resumen extendido

Esta memoria se encuadra en el área de la geometría algebraica, el cálculo simbólico y sus aplicaciones en el diseño geométrico asistido por ordenador (en inglés, *Computer Aided Geometric Design*, CAGD). Su objetivo es avanzar, desde los estudios preliminares relacionados con la caracterización de curvas algebraicas planas, hacia la extracción y análisis de la información obtenida a partir de las ramas de una curva en puntos con coordenadas “suficientemente grandes” y hacia el cálculo sus “asíntotas generalizadas”, extendiendo esta investigación al caso de superficies algebraicas.

Para contextualizar al lector, es importante destacar que el tema de las curvas y superficies algebraicas racionales es, y ha sido, un área de investigación activa que se aplica a multitud de ámbitos como, por ejemplo: diseños arquitectónicos antiguos y modernos, problemas de teoría de números, formas biológicas, códigos de corrección de errores, algoritmos criptográficos, diseño de aviones, automóviles o electrodomésticos, representaciones gráficas, etc.

Estos progresos se deben, en gran parte, al análisis de la topología y representación gráfica de curvas y superficies algebraicas, que llevó la definición de nociones tales como rama infinita, superficies aproximantes o, incluso, a generalizar el concepto clásico de asíntota como “asíntota generalizada” o “g-asíntota”, que podría decirse que, es la curva de menor grado que se aproxima a una curva dada en alguna de sus ramas infinitas.

En consecuencia, las asíntotas de una rama de una curva algebraica real plana reflejan el estado de esta rama en puntos con coordenadas suficientemente grandes, lo cual permite extraer una gran parte de la información sobre la caracterización y el comportamiento de dicha curva en el infinito.

A partir de todo lo anterior se plantea esta investigación, cuyos avances han conducido a la creación de métodos de computación simbólica para variedades algebraicas, curvas y superficies, que se acompañan con las correspondientes demostraciones y ejemplos ilustrativos.

Para poder trabajar en estos resultados, se han diseñado algoritmos escritos en pseudocódigo que permiten implementar las investigaciones que constituyen los principales aportes de esta tesis. Además, se demuestra empíricamente una importante mejora de la eficiencia de los métodos anteriores, con un análisis de los resultados obtenidos por las soluciones algorítmicas propuestas, tras haber sido aplicadas a diferentes casos de estudio.

Se trata, por tanto, de una investigación que involucra a dos disciplinas científicas: la matemática y la computación, empleando como herramienta software para el cálculo simbólico, el sistema de álgebra computacional **Maple**.

Consecuentemente, se han creado herramientas que caracterizan a las curvas algebraicas planas y que analizan el comportamiento de sus ramas infinitas. Ha de considerarse que las ramas infinitas son una herramienta muy importante para analizar el comportamiento de una curva en puntos con coordenadas “suficientemente grandes” y, con ello, se definen las bases para determinar cuándo dos curvas convergen en el infinito o se aproximan entre sí.

Además, esta memoria presenta las implementaciones de los métodos simbólicos que construyen, de manera efectiva, las asíntotas generalizadas de una curva dada. Las nuevas herramientas propuestas son menos complejas y más eficientes, computacionalmente hablando y, además, generan una menor sobrecarga en el sistema que los algoritmos previos, dado que se basan en el cálculo de límites de funciones racionales y de ciertas derivadas de funciones univariadas (en lugar de aplicar los desarrollos en series de Puiseux de los métodos clásicos).

También, a partir del estudio de las ramas infinitas de una curva algebraica se han analizado diversas aplicaciones, demostrando cuál es la forma de grado máximo del polinomio de una curva definida implícitamente, a partir de la cual se puede calcular la información de dicha curva y descubrir algunas relaciones entre sus propiedades, llegando a construir todas las familias de curvas a partir de ciertas asíntotas.

Por otro lado, la tesis revela nuevas ideas completamente innovadoras, aplicables a la topología y a la representación de superficies algebraicas en el infinito, y que consisten en extender la noción de rama infinita a superficies definidas implícitamente, demostrando cuándo dos superficies se aproximan entre sí y explorando las propiedades y el comportamiento de estas variedades algebraicas, así como la representación en tres dimensiones.

La tesis doctoral, que aquí se presenta, se centra en las tres **líneas de actuación** que se indican a continuación:

1. Creación de nuevos métodos para la construcción de las ramas infinitas y asíntotas de curvas algebraicas planas, y estudio de sus aplicaciones.
2. Diseño e implementación de nuevos algoritmos que mejoren la eficiencia y el rendimiento computacional de los clásicos.
3. Estudio de ramas de infinito y convergencia de superficies definidas implícitamente en el infinito.

La línea 1 presenta nuevos métodos que construyen, de forma exacta, las asíntotas generalizadas de una curva de entrada, empleando para ello el cálculo de límites de funciones racionales construidas a partir de una parametrización racional dada, así como la determinación de ciertas derivadas de funciones univariadas. Con ello se simplifica la complejidad e imprecisión, debida al truncamiento de la serie polinomial, que introducía el desarrollo en series de Puiseux, necesario en los métodos previos a esta investigación.

Además, como consecuencia de la utilización de derivadas, se demuestran resultados que relacionan de manera clara el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada con los puntos de infinito, su multiplicidad y su carácter (ordinario o no ordinario). Así, a partir de las relaciones anteriores, se muestra cuál es la forma de grado máximo del polinomio

que define implícitamente a la curva *input*, a partir de la cual pueden calcularse los conceptos anteriormente mencionados.

También es conveniente subrayar que hasta el momento no existían herramientas que estudiaran o caracterizaran a las curvas algebraicas planas en el infinito de una manera exacta y eficiente. Así mismo, ha de recalcar que estas investigaciones se pueden generalizar al espacio n -dimensional.

La línea 2 innova con el diseño de los algoritmos que implementan mejoras en la eficiencia de los clásicos, utilizando el software de álgebra computacional **Maple**. Además, se cuantifica el grado de utilización de los recursos hardware del sistema empleado por cada algoritmo, para un conjunto de casos de estudio. Con ello, se realiza un análisis comparativo de la sobrecarga del sistema, considerando el tiempo de ejecución en el microprocesador, el tiempo de estancia en el sistema y la memoria necesaria, por cada proceso, para construir las asíntotas de una curva algebraica plana.

Finalmente, la línea 3 revoluciona el campo de la geometría algebraica retomando el concepto de rama infinita de una curva plana, y lo generaliza al estudio de superficies. Esto permite definir cuándo dos superficies tienen el mismo “comportamiento asintótico” en el infinito y se establece un punto de partida para llegar, en el futuro, a la noción de asíntota de una superficie, así como para obtener algoritmos que construyan dichas asíntotas.

Este último caso constituye una referencia indudable para el estudio de superficies, como pudiera ser su topología o su representación, así como para algunas aplicaciones en el marco del CAGD en 3-D.

A continuación, a modo de resumen, se detallan las principales **aportaciones** e innovaciones de esta tesis doctoral, que han dado lugar a las publicaciones internacionales [1–5] y a la comunicación de ciertos resultados de la investigación en [6].

- Desarrollo de dos métodos para la construcción de ramas infinitas y de asíntotas generalizadas de una curva algebraica plana. En el primero de ellos se realiza el cálculo de límites de funciones racionales construidas a partir de una determinada parametrización racional y, en el segundo, se determinan ciertas funciones racionales univariadas de la curva de entrada dada.
- Diseño de algoritmos para la construcción de asíntotas de curvas algebraicas planas y su implementación con el software de álgebra **Maple**.
- Análisis comparativo del rendimiento computacional, comparando los tiempos que los procesos permanecen en el sistema, así como el grado de utilización del procesador y la capacidad de memoria necesaria para ejecutar cada algoritmo.
- Presentación y demostración de los resultados sobre el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada, su multiplicidad y su carácter ordinario (o no ordinario). Además, se prueba cuál es la forma de grado máximo del polinomio que define implícitamente la curva de *input*.
- Definición de herramientas para el estudio de superficies en el infinito. En este caso, a partir de la noción de rama infinita se introducen las ideas de ramas infinitas convergentes y de superficies aproximantes.

Las **conclusiones** obtenidas en esta memoria, así como las **futuras líneas de investigación** que pueden dar continuidad a los métodos aquí propuestos, avanzan hacia la extensión de los anteriores resultados al espacio n -dimensional y a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales. Es más, se sientan las bases para concretar el concepto de g -asíntota para el caso de superficies, así como para la obtención de los algoritmos que las calculan. Estos nuevos métodos podrán ser implementados adaptando los algoritmos de esta tesis doctoral.

Esta tesis extiende las aplicaciones de las ramas infinitas y de las asíntotas de diferentes variedades algebraicas, curvas y superficies, haciendo que las expresiones matemáticas y objetos matemáticos puedan manejarse utilizando los métodos del cálculo simbólico.

Así, desde el punto de vista de la computación simbólica, esto supondrá una importante evolución en la resolución de ciertas cuestiones vinculadas con la geometría algebraica, avanzando hacia nuevas propuestas de aplicaciones. Así mismo, se abren futuras líneas de investigación aplicada, que podrán resolver problemas prácticos del mundo real, por ejemplo, en el área del diseño gráfico en 3-D, en el campo de la ingeniería de datos, o en el ámbito del hardware y de los sistemas operativos con el análisis del rendimiento y eficiencia computacional de algoritmos.

Finalmente, esta tesis se acompaña del conjunto de publicaciones relacionadas con el eje principal de esta investigación, los casos de uso, el pseudocódigo de los algoritmos propuestos y su correspondiente implementación con el sistema de álgebra Maple.

Índice general

Resumen	i
Abstract	iii
Resumen extendido	v
Índice general	ix
Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xv
Notación	xvii
Introducción	1
1 Fundamentos sobre curvas algebraicas planas	11
1.1 Definiciones, preliminares y terminología	14
1.2 Ramas infinitas y particularidades	16
1.3 Ramas convergentes y curvas aproximantes	20
1.4 Comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas	23
1.5 Asíntotas y curvas perfectas	26
1.6 Construcción de asíntotas de curvas implícitas	29
1.7 Algunos resultados sobre curvas perfectas	34
1.8 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas	37
1.9 Conclusiones	42
2 Estudio de las ramas y asíntotas de curvas paramétricas	45
2.1 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con límites	47
2.2 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con derivadas	60

2.3	Análisis del rendimiento computacional	69
2.3.1	Construcción de asíntotas de curvas implícitas	71
2.3.2	Construcción de asíntotas de curvas paramétricas	76
2.3.3	Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con límites	78
2.3.4	Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con derivadas	80
2.3.5	Análisis comparativo del grado de sobrecarga del computador	82
2.4	Algunas aplicaciones	92
2.5	Conclusiones	99
3	Comportamiento asintótico de superficies implícitas	101
3.1	Terminología	103
3.2	Ramas infinitas	106
3.3	Ramas convergentes y superficies aproximantes	116
3.4	Conclusiones	126
4	Conclusiones y futuras líneas de investigación	129
	Bibliografía	135
	Apéndices	143
	Apéndice A Publicaciones	143
A.1	Asymptotic behavior of a surface implicitly defined	145
A.2	A simple formula for the computation of branches and asymptotes of curves and some applications	146
A.3	Determining the asymptotic family of an implicit curve	147
A.4	Improving the hardware overload for the computation of generalized asymptotes	148
A.5	Design and implementation of symbolic algorithms for the computation of generalized asymptotes	149
A.6	Computing branches and asymptotes of curves defined by a not rational parametrization	150
A.7	Cálculo de asíntotas generalizadas de curvas algebraicas	151
	Apéndice B Casos de estudio	153
B.1	Definición de curvas y cálculo de sus asíntotas	154
B.2	Puntos de infinito	171
B.3	Raíces y multiplicidad de las ecuaciones paramétricas	172

Apéndice C Pseudocódigo de los algoritmos	173
C.1 Algoritmo de comportamiento asintótico	174
C.2 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas implícitas	175
C.3 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas paramétricas	176
C.4 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas paramétricas con límites	177
C.5 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas paramétricas con derivadas . .	178
 Apéndice D Implementación de los algoritmos	 179

Índice de figuras

1.1	Curva algebraica real plana \mathcal{C} y sus ramas infinitas B_1 y B_2	19
1.2	Curva \mathcal{D} que aproxima a \mathcal{C} en una de sus ramas infinitas.	22
1.3	Comportamiento asintótico de dos curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} en sus ramas convergentes.	26
1.4	Comportamiento asintótico de la hipérbola (izquierda) y elipse (derecha).	26
1.5	Comportamiento asintótico de la parábola.	27
1.6	Curva \mathcal{C} aproximada por una parábola y una recta.	28
1.7	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} definida de forma implícita.	32
1.8	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} definida de forma implícita.	34
1.9	Asíntota $\tilde{\mathcal{C}}$ de la curva no perfecta \mathcal{C}	35
1.10	Curva \mathcal{C} perfecta.	36
1.11	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} expresada en forma paramétrica.	40
1.12	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} expresada en forma paramétrica.	42
2.1	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} calculadas con límites.	55
2.2	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} calculadas con límites.	56
2.3	Asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$, $\tilde{\mathcal{C}}_{3,1}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_4$ de la curva \mathcal{C} calculadas con límites.	59
2.4	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} calculadas con derivadas.	66
2.5	Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$ de la curva \mathcal{C} calculadas con derivadas.	68
2.6	Tiempo de uso del microprocesador (ms.) dependiendo del grado.	84
2.7	Tiempo de uso del microprocesador (ms.) dependiendo del n° de términos.	85
2.8	Tiempo de uso del microprocesador (ms.) dependiendo del número de ramas.	85
2.9	Tiempo de uso del microprocesador dependiendo del mayor grado de asíntotas.	86
2.10	Capacidad de memoria necesaria (KiB) dependiendo del grado.	89
2.11	Capacidad de memoria necesaria (KiB) dependiendo del n° de términos.	89
2.12	Capacidad de memoria necesaria (KiB) dependiendo del número de ramas.	90
2.13	Capacidad de memoria necesaria, en KiB, según la asíntota de grado máximo.	90

3.1	Superficie \mathcal{V}	110
3.2	Superficie \mathcal{V}	112
3.3	Superficies \mathcal{V}_1 , izquierda, y \mathcal{V}_2 , derecha, dadas por las ramas infinitas de \mathcal{V}	113
3.4	Superficies de las ramas infinitas de \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 y superficie \mathcal{V}	114
3.5	Superficies \mathcal{V} , izquierda, y $\overline{\mathcal{V}}$, derecha.	121
3.6	Superficies de las ramas infinitas de \mathcal{V} , izquierda, y $\overline{\mathcal{V}}$, derecha.	122
3.7	Superficies de \mathcal{V} , junto con sus ramas infinitas, izquierda, y de $\overline{\mathcal{V}}$, derecha.	123
3.8	Superficies \mathcal{V} , izquierda, y $\overline{\mathcal{V}}$, derecha.	124
3.9	Superficies de las dos ramas infinitas de \mathcal{V} , izquierda, y de la rama de $\overline{\mathcal{V}}$, derecha.	125
3.10	Superficies de \mathcal{V} , junto con sus ramas infinitas, izquierda, y de $\overline{\mathcal{V}}$, derecha.	126
B.1	Curva 1 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{3a}$	154
B.2	Curva 2 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$	155
B.3	Curva 3 y su asíntota real $\tilde{\mathcal{C}}_3$	157
B.4	Curva 4 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$	158
B.5	Curva 5 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$	159
B.6	Curva 6 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$	160
B.7	Curva 7 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$	161
B.8	Curva 8 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$	162
B.9	Curva 9 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$	163
B.10	Curva 10 y su asíntota real $\tilde{\mathcal{C}}_1$	164
B.11	Curva 11 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$	166
B.12	Curva 12 y su asíntota real $\tilde{\mathcal{C}}_2$	168
B.13	Curva 13 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_{2a}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{2d}$	169
B.14	Curva 14 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$	170

Índice de tablas

2.1	Propiedades de las curvas implícitas y de sus asíntotas.	72
2.2	Recursos hardware requeridos por el Algoritmo 1.2 para curvas implícitas.	76
2.3	Propiedades de las curvas paramétricas y de sus asíntotas.	77
2.4	Recursos hardware usados por el Algoritmo 1.3 para curvas paramétricas.	77
2.5	Propiedades de las curvas paramétricas y de sus asíntotas.	78
2.6	Recursos hardware requeridos por el Algoritmo 2.1 para curvas paramétricas.	79
2.7	Propiedades de las curvas paramétricas y de sus asíntotas.	80
2.8	Recursos hardware requeridos por el Algoritmo 2.2 para curvas paramétricas.	81
2.9	Propiedades de la curva de entrada y tiempo de microprocesador necesario para ejecutar los Algoritmos 1.2, 1.3, 2.1, 2.2.	83
2.10	Propiedades de la curva de entrada y tiempo real de estancia en el sistema necesario para ejecutar los Algoritmos 1.2, 1.3, 2.1, 2.2.	87
2.11	Propiedades de la curva de entrada y capacidad de memoria necesaria para ejecutar los Algoritmos 1.2, 1.3, 2.1, 2.2.	88
A.1	Resumen de publicaciones.	144
B.1	Puntos de infinito.	171
B.2	Raíces y multiplicidad de $p_{12}(s)$ y $p_{22}(s)$	172

Notación

B, \bar{B}	Rama infinita de la curva algebraica plana afín \mathcal{C} .
$\mathbb{C}[[t]]$	Dominio de las series formales de potencias en la variable t .
$\mathbb{C}((t))$	Cuerpo de las series formales de Laurent en la variable t .
$\mathbb{C} \ll t \gg$	Cuerpo de las series formales de Puiseux en la variable t .
\mathcal{C}	Curva algebraica plana afín.
\mathcal{C}^*	Curva algebraica plana proyectiva.
$\tilde{\mathcal{C}}$	Asíntota generalizada o <i>g-asíntota de una curva \mathcal{C}</i> .
$d(p, \mathcal{C})$	Distancia de un punto p a \mathcal{C} .
$f(x, y)$	Polinomio implícito en $\mathbb{R}[x, y]$.
$F(x, y, z)$	Polinomio implícito definido en el espacio proyectivo de $\mathbb{R}[x, y, z]$.
L_i	Hoja i de una rama infinita B .
$\nu(\varphi)$	Índice de ramificación de φ .
$\text{ord}(A)$	Orden de la serie A .
p	Punto definido en el espacio afín.
P	Punto definido en el espacio proyectivo.
$\mathcal{P}(t)$	Parametrización local afín de $\mathcal{C} \in \mathbb{C}((t))^2$.
$\mathcal{P}(t)^*$	Parametrización local proyectiva de $\mathcal{C}^* \in \mathbb{C}((t))^3$.
$\varphi(t)$	Serie de Puiseux en t .
\mathcal{V}	Superficie algebraica afín.
\mathcal{V}^*	Superficie algebraica proyectiva.

Introducción

*El que influye en el pensamiento de su tiempo,
influye en todos los momentos que le siguen.
Deja su opinión para la eternidad.*

Hipatia de Alejandría

La presente investigación se enmarca en el área de las matemáticas, concretamente en la línea de geometría algebraica computacional. Además incluye aspectos relacionados con la implementación de métodos de computación simbólica y con el análisis del rendimiento de las soluciones algorítmicas propuestas.

Concretamente, en este trabajo se presentan una serie de resultados cuyo objetivo es caracterizar curvas, o superficies, analizando el comportamiento de las ramas infinitas de dichas variedades algebraicas. Así mismo, se implementan métodos simbólicos que construyen, de manera efectiva, las “asíntotas generalizadas” de una curva dada, tanto en su forma implícita como paramétrica, y se analizan sus aplicaciones.

Se trata, por tanto, de una investigación que involucra tanto a las ciencias matemáticas, como a las ciencias de la computación, en la que se emplea como herramienta el software de cálculo simbólico (o también denominado sistema de álgebra computacional) **Maple**, que permite experimentar con los métodos y algoritmos matemáticos propuestos en esta memoria, en la que también se realiza un análisis del rendimiento de las soluciones propuestas.

Para contextualizar al lector en esta investigación, ha de ponerse en claro que el marco temático de esta memoria se construye a partir de los resultados de las investigaciones previas sobre los conceptos de ramas y asíntotas generalizadas de una curva en el infinito, además del estudio del comportamiento de dicha curva en coordenadas “suficientemente grandes”.

De este modo, las ramas infinitas tienen múltiples usos, ya que permiten que las expresiones matemáticas y los objetos matemáticos puedan manejarse, utilizando el cálculo simbólico, para resolver problemas del mundo real que son de especial interés en el campo del Diseño Geométrico Asistido por Ordenador (en inglés, *Computer Aided Geometric Design* CAGD) o, también, para establecer modelos predictivos y de cálculo de tendencias, que podrían mejorar las estimaciones obtenidas con la regresión lineal simple. Por ejemplo, determinar las ramas infinitas de una curva plana es un paso importante para su representación gráfica, así como para el estudio de su topología [7–10].

Así mismo, cabe señalar que el tema de las curvas y superficies algebraicas racionales ha sido un área de investigación activa [11–14] que aparece en multitud de ámbitos como, por ejemplo, en diseños arquitectónicos antiguos y modernos, en problemas de teoría de números [15, 16], en formas biológicas [17], en códigos de corrección de errores [18–20] y en algoritmos criptográficos [15, 21–24], entre otras múltiples aplicaciones. Además, recientemente han adquirido una importancia práctica adicional como objetos centrales del CAGD en aviones, automóviles y electrodomésticos, que serían impensables sin la ayuda computacional y el desarrollo de métodos efectivos para la manipulación de las curvas y superficies algebraicas [25–28]. Las parametrizaciones de estas entidades también desempeñan un papel importante en otros aspectos como puede ser la integral de línea, representación, distribución de nodos de interpolación polinomial [29], teoría del control [30], etc.

Por tanto, las ramas infinitas son una herramienta muy importante para analizar el comportamiento de una curva en el infinito y, por ejemplo, definen las bases para determinar cuándo dos curvas convergen o se aproximan entre sí en el infinito.

A partir de todo lo anterior, Pérez-Díaz introdujo el concepto de “asíntota generalizada” o “g-asíntota”, junto con su correspondiente algoritmo de cálculo, aplicándolo, tanto al caso de curvas definidas implícitamente [31] como al caso de curvas paramétricas [32]. De este modo, se generalizó el concepto clásico de asíntota.

De manera intuitiva, se podría decir que una asíntota generalizada de una curva dada, es la curva de menor grado que se aproxima a dicha curva en alguna de sus ramas infinitas.

En consecuencia, las asíntotas de una rama de una curva algebraica real plana reflejan el estado de esta rama en puntos con coordenadas suficientemente grandes, lo cual permite extraer una gran parte de la información sobre la caracterización y el comportamiento de dicha curva en el infinito.

Se recuerda que, en geometría analítica, una asíntota de una curva es una recta tal que la distancia entre la curva y la recta se aproxima a cero cuando ambas tienden a infinito. Incluso, en algunos contextos, como ocurre en geometría algebraica, una asíntota se define como una recta que es tangente a una curva en el infinito. Sin embargo, ha de considerarse que una curva algebraica plana puede tener curvas más generales que las rectas que describen el estado de una rama en los puntos con coordenadas suficientemente grandes. Esto motiva el interés por analizar y calcular estas asíntotas generalizadas.

La tesis doctoral, que aquí se presenta, se basa en los elementos teóricos comentados previamente, que constituyen los antecedentes y los cimientos fundamentales de los objetivos de esta investigación. Esto, junto con los métodos y algoritmos prácticos desarrollados en los estudios [31–33], resulta en una evolución hacia las tres **líneas de actuación** que se declaran a continuación:

1. Creación de nuevos métodos para la construcción de las ramas infinitas y asíntotas de curvas algebraicas y estudio de sus aplicaciones.
2. Diseño e implementación de nuevos algoritmos que mejoren la eficiencia y el rendimiento computacional de los clásicos.
3. Estudio del comportamiento en el infinito de superficies definidas implícitamente.

La línea 1, “Creación de nuevos métodos para la construcción de las ramas infinitas y asíntotas de curvas algebraicas planas, y estudio de sus aplicaciones”, determina las ramas y asíntotas utilizando el cálculo de límites de funciones racionales construidas a partir de una parametrización racional dada, así como la determinación de ciertas derivadas de funciones univariadas construidas a partir de una curva de entrada, dada por una parametrización. Con ello se simplifica la complejidad que introducía el desarrollo en series de Puiseux, necesario para la aplicación de los métodos previos a esta investigación.

Además, como consecuencia de la utilización de las derivadas, se demuestran resultados que relacionan de manera clara el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada con los puntos de infinito, su multiplicidad y su carácter (ordinario o no ordinario). Adicionalmente, a partir de las relaciones anteriores, se muestra cuál es la forma de grado máximo del polinomio que define implícitamente a la curva *input*, a partir de la cual pueden calcularse los conceptos anteriormente mencionados.

Por lo demás, ha de subrayarse que las investigaciones presentadas en este capítulo pueden generalizarse al espacio n -dimensional.

En lo relativo a la línea 2, “Diseño e implementación de nuevos algoritmos que mejoren la eficiencia y el rendimiento computacional de los clásicos”, se retoman los métodos para la construcción de asíntotas de curvas algebraicas planas definidas implícita [31] y paramétricamente [32], basados en el desarrollo en series de Puiseux, y se diseñan e implementan los algoritmos correspondientes, Algoritmo 1.2 y Algoritmo 1.3. Adicionalmente, las mejoras descritas en la línea 1 se materializan con la implementación del Algoritmo 2.1 que emplea límites, y del Algoritmo 2.2, basado en el cálculo de derivadas.

Estos cuatro algoritmos utilizan diferentes métodos de computación simbólica empleando el software de álgebra Maple, con el cual, se ha podido cuantificar el grado de utilización de los recursos hardware del sistema empleado por cada algoritmo, permitiendo realizar un análisis comparativo, para cada caso, del tiempo de microprocesador requerido por un proceso, el tiempo de estancia en el sistema y la memoria necesaria, por dicho proceso, para construir las asíntotas de una curva algebraica plana.

Mediante este análisis ha sido posible demostrar la mejora que proporcionan los hallazgos de esta tesis, ofreciendo una solución computacional más ligera y eficiente, que puede encontrarse el trabajo [3].

Finalmente, la línea 3 considera el “Estudio del comportamiento en el infinito de superficies definidas implícitamente”. Así, si una rama infinita representaba el comportamiento de una curva para puntos con coordenadas suficientemente grandes, en el caso de las superficies, una rama infinita debe aproximar a la superficie de *input* en “curvas” definidas en el infinito.

Este concepto permitirá analizar, por ejemplo, si dos superficies definidas implícitamente tienen el mismo “comportamiento asintótico” en el infinito y establece un punto de partida para llegar a la noción de asíntota para el caso de superficies, así como para la obtención de algoritmos que construyan dichas asíntotas.

A continuación, a modo de resumen, se detallan las principales **aportaciones** e innovaciones de esta tesis doctoral, que han dado lugar a las publicaciones internacionales [1–5] y a la comunicación de ciertos resultados de la investigación en [6].

- Desarrollo de dos métodos para la construcción de ramas y asíntotas generalizadas de una curva algebraica. En el primero de ellos se realiza el cálculo de límites de funciones racionales construidas a partir de una determinada parametrización racional y, en el segundo método, se determinan ciertas funciones racionales univariadas de la curva de entrada dada.
- Diseño de algoritmos para la construcción de asíntotas de curvas algebraicas planas y su implementación con el software de álgebra Maple.
- Análisis del grado de sobrecarga introducido por los algoritmos implementados, comparando los tiempos que los procesos permanecen en el sistema, así como el grado de utilización del procesador y la capacidad de memoria necesaria para ejecutar cada algoritmo.
- Presentación y demostración de resultados sobre el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada, su multiplicidad y su carácter ordinario (o no ordinario). Además, se prueba cuál es la forma de grado máximo del polinomio que define implícitamente la curva de *input*.
- Declaración de herramientas para el estudio de superficies en el infinito. En este caso, se ha de considerar que, a partir de la noción de rama infinita, se establecen los conceptos de ramas infinitas convergentes y de superficies aproximantes.

Esta memoria se estructura en tres capítulos y cuatro apéndices, cuyos contenidos se describen a continuación:

En el **Capítulo 1** se introducen las nociones esenciales y los fundamentos de la presente tesis doctoral, así como algunos algoritmos y resultados previos.

Estas nociones abarcan las definiciones de ramas infinitas, ramas convergentes, curvas aproximantes, asíntotas generalizadas (o g-asíntotas) y curvas perfectas, entre otros.

Además, se describen varios métodos necesarios para obtener resultados que permiten describir el comportamiento de una curva en el infinito, tales como el algoritmo que compara el comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas planas en el infinito, o bien, los algoritmos que construyen todas las asíntotas generalizadas de una curva algebraica real plana, tanto a partir de su expresión en forma implícita como en su forma paramétrica.

A continuación se presenta la estructura de este capítulo, cuyas secciones incluyen ejemplos ilustrativos que aclaran las nociones expuestas:

- En la Sección 1.1 se recuerdan las definiciones de las series formales de Laurent y de Puiseux, así como el concepto de parametrización local, tanto para las curvas en el espacio afín como para las curvas en el proyectivo. También se incluye el concepto de *place*, a partir del cual es posible calcular las ramas de una curva plana.
- La Sección 1.2 revisa los conceptos de punto de infinito y de rama infinita de una curva algebraica plana. Además, ilustra el cálculo del conjunto de las hojas de una curva de *input* que dan lugar a una rama infinita, aplicando el desarrollo en series de Puiseux como herramienta fundamental de cálculo.

- Los planteamientos anteriores permiten describir cuándo dos ramas infinitas convergen. Así, la Sección 1.3 describe la relación de proximidad entre dos curvas algebraicas planas, a partir del cálculo de sus ramas infinitas.
- Cuando una curva se aproxima a otra en todas sus ramas infinitas, y recíprocamente, se dice que ambas curvas presentan el mismo comportamiento asintótico. Este concepto se presenta en la Sección 1.4, junto con su correspondiente algoritmo de cálculo, Algoritmo 1.1, y ejemplos aplicados a curvas definidas implícitamente.
- La Sección 1.5 incluye la noción de curva perfecta. De forma intuitiva una curva es perfecta cuando no se puede encontrar en el infinito otra curva de menor grado y con el mismo comportamiento asintótico que la primera.

Esto conlleva introducir el concepto clave para el desarrollo de esta tesis, la definición de *g-asíntota*, como una curva perfecta que aproxima a la curva de *input* en una de sus ramas infinitas.

- En la Sección 1.6, se presenta el Algoritmo 1.2 para la construcción de asíntotas de una curva definida implícitamente. Este algoritmo se aplica sobre varios ejemplos y se representan gráficamente las asíntotas calculadas a partir de las curvas dadas.
- Los anteriores resultados se pueden obtener a partir de las características de una curva perfecta y se revisan en la Sección 1.7, tales como su carácter polinomial o el grado de las asíntotas.
- Una vez abordada la construcción de asíntotas a partir de la expresión implícita de una curva, la Sección 1.8 presenta un método para calcular las *g-asíntotas* de una curva algebraica plana, esta vez a partir de su expresión paramétrica, mediante la aplicación del Algoritmo 1.3. Así mismo, se ilustran los cálculos realizados con varios ejemplos.
- La Sección 1.9 presenta las conclusiones obtenidas en este capítulo, que conducen a introducir los principales resultados y hallazgos de esta investigación en los sucesivos capítulos de esta memoria.

Es importante subrayar que las soluciones algorítmicas presentadas en este capítulo se basan en el desarrollo en series de Puiseux, como herramienta fundamental para el cálculo de las ramas infinitas de una curva definida implícitamente. Además, aunque los métodos han sido desarrollados para caso de curvas planas [31–33], también en [34] se muestra la idea de cómo pueden adaptarse al caso de curvas racionales en el espacio n -dimensional.

Por último, destacar que en este capítulo se presentan los algoritmos anteriormente mencionados, destacando su estructura y carácter computacional.

El objetivo del **Capítulo 2** es proporcionar soluciones computacionales que mejoren el Algoritmo 1.2 y el Algoritmo 1.3 en cuanto a su eficacia y rendimiento.

A tal efecto, se emplean métodos basados en el cálculo de límites de funciones racionales construidas a partir de una parametrización racional dada, y también se determinan ciertas derivadas de funciones univariadas para obtener las asíntotas generalizadas de curva dada por una parametrización de entrada.

De manera más precisa, se presentan los Teoremas 2.1.1 y 2.2.1 que obtienen fórmulas simples para construir, no solo las parametrizaciones propias que describen a las asíntotas generalizadas de la curva racional *input*, sino de toda la rama; evitando así el cálculo de las series de Puiseux. Ambos teoremas dan lugar al pseudocódigo del Algoritmo 2.1 y del Algoritmo 2.2, respectivamente.

Además, este capítulo proporciona un análisis comparativo de los tiempos que los procesos permanecen en el sistema, así como del grado de utilización de los recursos hardware de la máquina, tales como el microprocesador y la memoria. Este análisis ha permitido demostrar que los Algoritmos 2.1 y 2.2 mejoran el rendimiento computacional de los resultados obtenidos con el Algoritmo 1.2 y Algoritmo 1.3.

Por otro lado, y como segundo objetivo esencial de este capítulo, en la Sección 2.4 se obtienen resultados de gran interés consecuencia de las fórmulas presentadas en el Algoritmo 2.2. Concretamente, se demuestran resultados que relacionan de manera clara el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada con los puntos de infinito, su multiplicidad y su carácter (ordinario o no ordinario). Además, considerando las relaciones anteriores, se muestra cuál es la forma de grado máximo del polinomio que define implícitamente a la curva *input*, a partir de la cual pueden calcularse los conceptos anteriormente mencionados.

A continuación se presentan las secciones que componen este capítulo, destacando que cada una de ellas se ilustra con los respectivos ejemplos explicativos:

- En primer lugar, la Sección 2.1 presenta el Teorema 2.1.1, con el que se expone un método que mejora la eficiencia de los algoritmos descritos en el Capítulo 1. La solución aportada permite construir las asíntotas generalizadas, así como las ramas infinitas, de una curva algebraica plana expresada en forma paramétrica. Este método se basa en la aplicación, de límites simples de funciones racionales, a la parametrización de la curva de entrada, cuya implementación está incluida en el Apéndice D y se basa en el pseudocódigo propuesto en el Algoritmo 2.1.
- Siguiendo en la misma línea de mejora de la eficiencia computacional, en la Sección 2.2 se presenta el Teorema 2.2.1. Con este método, se pueden calcular las g-asíntotas, así como las ramas, de una curva algebraica plana definida por una parametrización, mediante la determinación de algunas derivadas de funciones univariadas, construidas a partir de la expresión paramétrica de la curva de entrada.
- La Sección 2.3 compara el rendimiento computacional de los algoritmos clásicos, Algoritmo 1.2 y Algoritmo 1.3, con los algoritmos propuestos en esta investigación, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2.

Para ello se propone un conjunto de casos de estudio. Estos son, las curvas planas reales del Apéndice B.1, cada una de ellas con diferentes características, de las que se han obtenido las principales propiedades, tales como el grado de la curva, sus raíces y su multiplicidad, el número de términos, la cantidad de ramas que dan lugar a las g-asíntotas y el grado mayor de las asíntotas obtenidas.

Estos casos de estudio permiten evaluar la sobrecarga generada por los recursos hardware de la máquina. Para ello, se computa el tiempo de uso del microprocesador, el tiempo real

del estancia en el sistema y la cantidad de memoria empleada al ejecutar cada uno de los procedimientos, usando el software de álgebra computacional Maple.

Así se observa que el mayor rendimiento lo proporciona el Algoritmo 2.2, seguido del Algoritmo 2.1, y de los Algoritmos 1.2 y 1.3 (nótese que el mayor grado de sobrecarga en el sistema se produce cuando se aplican los desarrollos en series de Puiseux).

- La Sección 2.4 estudia con mayor profundidad y relaciona los conceptos introducidos previamente, tales como el índice de ramificación y el grado de la g -asíntota, así como el cálculo de la forma infinita, la multiplicidad y el carácter de los puntos infinitos.
- La Sección 2.5 muestra las conclusiones obtenidas en este capítulo, destacando que los métodos y algoritmos aquí introducidos pueden aplicarse, tanto al caso de curvas n -dimensionales [31] como al cálculo de ramas infinitas y asíntotas de curvas no necesariamente algebraicas [2].

Además, se subraya que estos resultados han sido publicados en [1] y hay tres artículos en proceso de revisión [2–4].

El **Capítulo 3** retoma el concepto de rama infinita de una curva plana y lo generaliza al caso de superficies algebraicas definidas implícitamente. Así, de manera intuitiva, una rama infinita de una superficie representará el comportamiento de la superficie *input* en “puntos” con coordenadas suficientemente grandes. En este caso, estos puntos con coordenadas grandes resultarán ser curvas de infinito.

Las ramas de infinito son necesarias e imprescindibles para el estudio de las superficies, ya que revelan el comportamiento de una superficie algebraica real dada en las “curvas” de infinito. Estas ramas infinitas suponían ser una herramienta importante para la representación gráfica de una curva algebraica plana, así como para analizar su topología [7–10, 33] y construir sus respectivas g -asíntotas. Teniendo en cuenta estos conceptos, en este capítulo se introduce la generalización de algunas de las nociones descritas para curvas, al caso de superficies definidas implícitamente. El objetivo final es el estudio del comportamiento de una superficie en “puntos” con coordenadas suficientemente grandes.

En el caso que nos ocupa en este capítulo, es decir, superficies algebraicas, la noción de rama infinita permite definir los conceptos de ramas convergentes y de superficies aproximantes. Concretamente, se dice que dos ramas infinitas convergen, si se acercan entre sí cuando tienden a infinito. Este concepto permitirá analizar si dos superficies definidas implícitamente tienen el mismo comportamiento asintótico en el infinito, pudiendo obtener importantes resultados que caracterizan si dos superficies algebraicas se aproximan entre sí.

Con este capítulo se marca un punto de partida para llegar a la noción de asíntota generalizada de una superficie, así como para la obtención de algoritmos efectivos como los presentados en el Capítulo 2 de esta tesis, dado que no hay ningún estudio previo a este respecto.

Esta innovación constituye una referencia indudable para el estudio de superficies, como pudiera ser su topología o su representación, así como para algunas aplicaciones en el marco del diseño gráfico en 3-D.

Este capítulo está estructurado en secciones que incluyen las nociones investigadas y, como en los capítulos anteriores, se ilustran con ejemplos aclaratorios. A continuación se describen las secciones en las que se estructura el Capítulo 3:

- En la Sección 3.1 se retoman las nociones y preliminares que se introdujeron sobre las curvas planas en el Capítulo 1, y se generalizan al caso de superficies algebraicas. En concreto, se adaptan los resultados previos sobre el desarrollo de las series de Puiseux al caso de series de potencias de varias variables y, se introduce, el concepto de parametrización local para superficies algebraicas, tanto proyectivas como afines.

Así, a partir de estas nociones, se proporcionan las bases para definir el concepto de rama infinita incluido en la siguiente sección.

- La Sección 3.2 introduce el concepto de rama infinita, determinada a partir de una de las hojas asociada a un único *place* de infinito. En esta sección son muy interesantes las demostraciones de algunas propiedades importantes de las ramas infinitas.

Así mismo, se muestra cómo los puntos de infinito (que en realidad son curvas de infinito) de una superficie, pueden caracterizar tres tipos diferentes de ramas.

Considerando lo expuesto en esta sección, varios ejemplos permiten intuir cuándo una superficie será perfecta, o cómo calcular las ramas infinitas de una superficie, mostrando la forma en que estas ramas se aproximan a la superficie *input*.

- La Sección 3.3, proporciona las nociones de ramas convergentes y de superficies aproximantes. Además, se caracteriza si dos superficies algebraicas se aproximan entre sí.

Por un lado, se demuestra que dos ramas infinitas convergen si se acercan entre sí cuando tienden a infinito y, por otro, se prueba que dos superficies algebraicas se aproximan, si ambas tienen ramas infinitas convergentes.

- El Capítulo 3.4 presenta las conclusiones obtenidas y algunas líneas de trabajo futuro. Se plantea cómo los conceptos de rama infinita y de superficie aproximante podrían aplicarse para definir el concepto de *g*-asíntota para el caso de superficies, así como para el desarrollo e implementación de algoritmos que permitan calcular dichas asíntotas generalizadas, tanto para superficies definidas implícitamente como de forma paramétrica, que resuelvan problemas del mundo real.

Cabe destacar que los resultados de las investigaciones realizadas para este capítulo han sido publicados en [5].

Finalmente, el **Capítulo 4** expone las conclusiones obtenidas en esta memoria, así como las futuras líneas de investigación que pueden dar continuidad a los métodos aquí propuestos, ampliando los resultados al espacio n -dimensional y a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales. Estos nuevos métodos podrán ser implementados adaptando los algoritmos de esta tesis doctoral. Así mismo, se propone dar continuidad al estudio de *g*-asíntotas en el caso superficies algebraicas.

Desde el punto de vista de la computación simbólica, esto supondrá un importante avance en la resolución de ciertas cuestiones de la geometría algebraica, avanzando hacia nuevas propuestas

de aplicaciones. Así mismo, se abren futuras líneas de investigación aplicada, que podrán resolver problemas prácticos del mundo real, por ejemplo, en el área del CAGD en 3-D, en el campo de la ingeniería de datos, o en el ámbito del hardware y de los sistemas operativos, con el análisis del rendimiento y eficiencia computacional de algoritmos.

Por último, se describen los apéndices que aportan información complementaria empleada en esta investigación.

Así, el **Apéndice A** muestra el conjunto de publicaciones relacionadas con el eje principal de esta investigación. Se trata de publicaciones en revistas de impacto indexadas en el *Journal Citation Reports* (JCR) y de la comunicación que presenta los avances de esta tesis en el Encuentro Álgebra Computacional y Aplicaciones (EACA). Para cada una de estas publicaciones se indica el nombre de la revista, o congreso, la fecha de publicación y, si procede, el cuartil en el que se ubica dicha revista, considerando el *Journal Impact Factor* (JIF) del *Web of Science Core*. También se refiere el *Digital Object Identifier* (DOI), o el *Uniform Resource Locator* (URL), de la publicación electrónica, y se relaciona con el capítulo de la tesis doctoral en el que puede encontrarse un amplio desarrollo de la publicación.

El **Apéndice B** presenta tres secciones que permiten ilustrar, mediante casos de uso y ejemplos de aplicación, los resultados obtenidos en esta tesis doctoral.

En este apéndice se encuentran los siguientes contenidos:

- La Sección **B.1** muestra los casos de estudio utilizados en esta tesis doctoral. Se trata de catorce curvas algebraicas planas, expresadas tanto en su forma implícita como paramétrica, junto con las ecuaciones que dan lugar a las asíntotas generalizadas. Tanto las curvas, como las asíntotas obtenidas en cada caso, se representan en las respectivas figuras. Cabe señalar que cada una de estas curvas ha sido elegida por sus propiedades y particularidades, que la diferencian del resto de los casos de estudio.
- En la Sección **B.2** se incluyen los puntos de infinito calculados para cada una de las curvas propuestas, implícitas y paramétricas.
- La Sección **B.3** contiene los pares (raíz, multiplicidad) de las soluciones de los denominadores de las ecuaciones paramétricas de las curvas.

El **Apéndice C** contiene el pseudocódigo de los algoritmos presentados en esta memoria, distribuidos según se detalla en las siguientes secciones:

- La Sección **C.1** incluye el Algoritmo **1.1**, que determina el comportamiento asintótico de dos curvas, es decir, si se aproximan todas sus ramas infinitas entre sí.
- La Sección **C.2** contiene el Algoritmo **1.2**, que calcula las asíntotas de una curva a partir de su expresión implícita, considerando las ramas infinitas que convergen con la curva dada.
- La Sección **C.3** muestra el Algoritmo **1.3**, que realiza la construcción de las asíntotas a partir de la expresión paramétrica de la curva.

En estos casos dos últimos casos se requiere del desarrollo en series de Puiseux para alcanzar la solución.

- La Sección C.4 presenta el Algoritmo 2.1, cuya implementación supone una importante mejora del grado de sobrecarga del procesador, construyendo las g-asíntotas de la curva de entrada mediante límites.
- La Sección C.5 contiene el Algoritmo 2.2, que aporta el mejor rendimiento computacional, debido a la utilización de algunas derivadas de funciones univariadas para la construcción de las g-asíntotas.

La correspondiente implementación de estos algoritmos ha sido realizada con el sistema de álgebra Maple y se integra en el Apéndice D.

Así pues, el **Apéndice D** presenta las implementaciones de los cuatro algoritmos que construyen las g-asíntotas de una curva algebraica plana, analizados en esta investigación: Algoritmo 1.2, Algoritmo 1.3, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2. Además, para cada uno de los métodos propuestos, se añade un conjunto de órdenes que permiten caracterizar y obtener determinadas propiedades de una curva de *input*.

Finalmente, es importante subrayar que se van a patentar los pseudocódigos presentados en el Apéndice C, así como las correspondientes implementaciones desarrolladas en el Apéndice D.

Capítulo 1

Fundamentos sobre curvas algebraicas planas

El Álgebra no es más que Geometría y la Geometría no es más que Álgebra abstracta.

Sophie Germain

El objetivo de este capítulo es servir de introducción al trabajo de investigación presentado en los capítulos posteriores de esta tesis doctoral relacionada con algoritmos y métodos de computación simbólica, aplicados a la geometría algebraica.

En él se exponen fundamentos de las curvas algebraicas planas y resultados obtenidos en investigaciones previas sobre el comportamiento de una curva en el infinito. Para ello, se introduce la terminología que se utilizará en toda la tesis, así como algunos resultados y conceptos fundamentales, que sientan las bases y definen las referencias esenciales de este trabajo.

Estos conceptos abarcan las definiciones de ramas infinitas, ramas convergentes, curvas aproximantes, g -asíntotas (o asíntotas generalizadas) y curvas perfectas, entre otros. Además, se describen varios métodos necesarios para obtener resultados que permiten describir el comportamiento de una curva en el infinito, tales como el algoritmo que compara el comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas planas en el infinito, y el cálculo de todas las asíntotas generalizadas de una curva algebraica real plana, tanto a partir de su expresión en forma implícita como en su forma paramétrica.

Intuitivamente hablando, las ramas infinitas de una curva reflejan su comportamiento en puntos con coordenadas “suficientemente grandes”. De hecho, una rama infinita se asocia con un *place* centrado en un punto de infinito, que puede “parametrizarse” mediante series de Puiseux (véase Sección 1.2). Es por ello, que las ramas infinitas de una curva algebraica real plana son una herramienta muy importante para analizar su comportamiento en el infinito.

En este sentido, las ramas infinitas tienen muchas aplicaciones, ya que permiten que el cálculo simbólico se pueda utilizar en el contexto de problemas del mundo real que son de especial interés en el campo del CAGD o, también, para establecer modelos predictivos y de

cálculo de tendencias, que mejoren los resultados de la regresión lineal simple. Por ejemplo, determinar las ramas infinitas de una curva plana es un paso importante para su representación gráfica, así como para el estudio de su topología [7–10]. Además, uno puede plantearse por ejemplo, problemas de carácter numérico, como el que consiste en determinar curvas racionales lo más cercanas posible a una curva *input* que ha sufrido perturbaciones iniciales [35–38]. En este sentido, es esencial el estudio en el infinito de ambas curvas de tal manera que permita calcular el error cometido en la aproximación realizada.

Así mismo, cabe señalar que el tema de las curvas y superficies algebraicas racionales ha sido un área de investigación activa [11–14] que aparece en multitud de ámbitos como, por ejemplo, en diseños arquitectónicos antiguos y modernos, en problemas de teoría de números [15, 16], en formas biológicas [17], en códigos de corrección de errores [18–20] y en algoritmos criptográficos [15, 21–24], entre otras múltiples aplicaciones. Además, recientemente han adquirido una importancia práctica adicional como objetos centrales del diseño geométrico asistido por ordenador en aviones, automóviles y electrodomésticos, que serían impensables sin la ayuda computacional y el desarrollo de métodos efectivos para la manipulación de las curvas y superficies algebraicas [25–28]. Las parametrizaciones de estas entidades también desempeñan un papel importante en otros aspectos como puede ser la integral de línea, representación, distribución de nodos de interpolación polinomial [29], teoría del control [30], etc.

Una vez introducido el concepto de rama infinita, se introduce la noción de ramas convergentes y de curvas aproximantes [33, Sec. 4]. La idea es la siguiente: dos ramas infinitas convergen si se aproximan cuando tienden a infinito. Por tanto, una curva \mathcal{D} se aproxima a \mathcal{C} en su rama infinita B , si \mathcal{D} tiene una rama infinita, \overline{B} , convergente con B .

A partir de estas ramas infinitas es posible calcular las asíntotas generalizadas o *g*-asíntotas de una curva \mathcal{C} y, mediante las *g*-asíntotas, es posible extraer una gran parte de la información sobre el comportamiento de una curva en el infinito. El concepto de *g*-asíntota fue introducido en [31], junto con su correspondiente algoritmo de cálculo para el caso de curvas expresadas en forma implícita. Asimismo, puede consultarse el estudio realizado para el caso de las curvas paramétricas en [32].

Una curva $\tilde{\mathcal{C}}$ es una *asíntota generalizada* (o *g*-asíntota) de otra curva \mathcal{C} , si $\tilde{\mathcal{C}}$ se aproxima a \mathcal{C} en alguna rama infinita y \mathcal{C} no puede aproximarse por una nueva curva de grado menor (es decir, el concepto de *g*-asíntota generaliza el concepto clásico de asíntota).

Intuitivamente hablando, las asíntotas de una rama de una curva algebraica real plana reflejan el estado de esta rama en puntos con coordenadas suficientemente grandes. En geometría analítica, una asíntota de una curva es una recta tal que la distancia entre la curva y la recta se aproxima a cero cuando ambas tienden a infinito. En algunos contextos, tales como ocurre en geometría algebraica, una asíntota se define como una recta que es tangente a una curva en el infinito.

Concretamente, sea \mathcal{C} una curva algebraica plana real, y B una rama infinita de \mathcal{C} . La recta ℓ es una asíntota de \mathcal{C} en B , si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(P, \ell) < \epsilon$, para cada $P \in B$ con $\|P\| > M$.

Si B puede definirse por la ecuación explícita de la forma $y = f(x)$ (o $x = g(y)$), donde $f(x)$ (o $g(y)$) es una función continua de un intervalo infinito, es fácil decidir si \mathcal{C} tiene una asíntota

en B , analizando la existencia de los límites de ciertas funciones cuando $x \rightarrow \infty$ (o $y \rightarrow \infty$). Además, si estos límites existen, se puede obtener la ecuación de la asíntota de \mathcal{C} en B . Sin embargo, si esta rama B está definida implícitamente y su ecuación no puede convertirse en la forma explícita, tanto la decisión como el cálculo de la asíntota de \mathcal{C} en B , requieren de algunas herramientas.

Determinar las asíntotas de una curva algebraica plana, definida implícitamente, es un tema considerado en muchos libros de texto de análisis [39]. En [40] se presenta un método simple para obtener las asíntotas de una curva definida por un polinomio irreducible de grado dos. En [10], se obtiene un algoritmo para calcular todas las asíntotas rectas de una curva algebraica real plana, \mathcal{C} , definida implícitamente. En particular, se puede decidir si una rama de \mathcal{C} tiene una asíntota, calcular todas las asíntotas de \mathcal{C} y determinar aquellas ramas cuyas asíntotas sean las mismas. Mediante este algoritmo, todas las asíntotas de \mathcal{C} pueden representarse mediante el aislamiento de raíces reales de un polinomio.

Una curva algebraica plana puede tener curvas más generales que las rectas que describen el estado de una rama en los puntos con coordenadas suficientemente grandes. Esto motiva el interés por analizar y calcular estas *asíntotas generalizadas*.

El conjunto de los fundamentos y resultados expuestos en este capítulo puede extenderse más allá de las curvas planas y es aplicable, mediante ciertos ajustes, a curvas algebraicas definidas en el espacio n .dimensional [34].

En esta tesis, se presentan resultados para el caso de curvas planas definidas paramétricamente e implícitamente, así como para superficies definidas implícitamente. A continuación se presenta someramente la estructura de este capítulo:

- En la Sección 1.1 se revisan los conceptos elementales que sientan las bases para el desarrollo de esta investigación. Así se recuerdan las definiciones de los cuerpos de las series formales de Laurent y de Puiseux, así como el concepto de parametrización local, tanto para las curvas en el espacio afín como para las curvas en el proyectivo. También se incluye el concepto de *place*, a partir del cual es posible calcular las ramas de una curva plana.
- A continuación, la Sección 1.2 introduce el concepto de rama infinita asociada a un punto de infinito para una curva algebraica plana. Además se ilustra, con un ejemplo, el cálculo del conjunto de las hojas de una curva de *input* que dan lugar a una rama infinita, utilizando el desarrollo en series de Puiseux.
- Los planteamientos anteriores permiten describir cuándo dos ramas infinitas convergen. Así, en la Sección 1.3 se presentan los conceptos de ramas convergentes y de curvas aproximantes en el infinito. En concreto, se dirá que dos ramas infinitas convergen si se aproximan entre sí cuando tienden a infinito.
- Cuando una curva se aproxima a otra en todas sus ramas infinitas, y recíprocamente, se dice que ambas curvas presentan el mismo comportamiento asintótico. Este concepto se presenta en la Sección 1.4 junto con el Algoritmo 1.1, el cual determina si dos curvas tienen el mismo comportamiento asintótico, y se acompaña de un ejemplo aplicado a dos curvas definidas implícitamente.

- La Sección 1.5 incluye la noción de curva perfecta. De forma intuitiva una curva es perfecta cuando no se puede encontrar en el infinito otra curva de menor grado y con el mismo comportamiento asintótico que la primera. Esto conlleva introducir el concepto clave para el desarrollo de esta tesis, la definición de *g-asíntota*, como una curva perfecta que aproxima a la curva de *input* en una de sus ramas infinitas.
- Así, en la Sección 1.6, se presenta el Algoritmo 1.2 para la construcción de asíntotas de una curva definida implícitamente. Este algoritmo se aplica sobre varios ejemplos y se representan gráficamente las asíntotas calculadas a partir de las curvas dadas.
- Para la obtención de los resultados anteriores, es esencial el concepto y las propiedades de curva perfecta. Es por ello que en la Sección 1.7 se muestran algunas propiedades relativas a las curvas perfectas, partiendo de la condición necesaria para que una curva sea perfecta.
- Una vez abordada la construcción de asíntotas a partir de la expresión implícita de una curva, la Sección 1.8 presenta un método para calcular las *g-asíntotas* de una curva algebraica plana, esta vez a partir de su expresión paramétrica. Este método permite la obtención del Algoritmo 1.3, que se ilustra con varios ejemplos.
- La Sección 1.9 muestra las conclusiones obtenidas, que conducen a introducir los principales resultados y hallazgos de esta investigación en los siguientes capítulos. Así, en el Capítulo 2 se proponen nuevos algoritmos que mejoran la eficiencia computacional para la construcción de asíntotas de curvas algebraicas planas, mientras que en el Capítulo 3 se amplían las nociones aquí expuestas a superficies algebraicas.

Finalmente, cabe señalar que si bien los conceptos y resultados presentados en este capítulo han sido obtenidos a partir de los trabajos previos indicados anteriormente, los algoritmos han sido reformulados de manera computacional muy rigurosa, mostrando ejemplos que los ilustran de manera precisa y estricta.

1.1 Definiciones, preliminares y terminología

En esta sección se presentan algunos conceptos fundamentales y terminología que son necesarias para el desarrollo científico del estudio realizado. Así, ha sido necesario revisar los conceptos de parametrizaciones locales y de series de Puiseux, que pueden ampliarse en [41, 42], [43, Sec. 2.5], [44] y [45, Cap. 4, Sec. 2]).

Sea $\mathbb{C}[[t]]$ el dominio de las series formales de potencias en la variable t con coeficientes en los números complejos \mathbb{C} , es decir, el conjunto de todas las sumas de la forma $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{Z}$. El cuerpo cociente de $\mathbb{C}[[t]]$ se denomina cuerpo de las *series formales de Laurent* y se denota como $\mathbb{C}((t))$, de modo que $L(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i$, $a_i \in \mathbb{C}$ e $i \in \mathbb{Z}$.

Además, el cuerpo $\mathbb{C} \ll t \gg$ se denomina cuerpo de las *series formales de Puiseux*, tal que $\varphi(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^{i/N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{Z}$ y $N \in \mathbb{N}$. Obsérvese que las series de Puiseux son series de potencias con exponente fraccionario.

Cada serie de Puiseux, φ , tiene un común denominador para todos los exponentes con coeficientes distintos de cero, calculado a partir del mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de dichos exponentes, que se denomina **índice de ramificación** de la serie y se denota como $\nu(\varphi)$ [41].

El **orden** de una serie A distinta de cero, de Puiseux o de Laurent, es el exponente más pequeño de un término con coeficiente distinto de cero en A , $\text{ord}(A)$. En lo que sigue, se asume que el orden de 0 es ∞ .

A continuación, se presenta el concepto de parametrización local afín de una curva plana definida en el espacio afín. Para más información, se recomienda revisar [43, 46].

Definición 1.1.1. Sea \mathcal{C} una curva algebraica plana real sobre \mathbb{C} , definida implícitamente por el polinomio irreducible $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Sean las series A y B en $\mathbb{C}((t))$ tales que: (i) $f(A(t), B(t)) = 0$ (donde ambas series convergen) y (ii) A o B no es una constante. Entonces, $\mathcal{P}(t) = (A, B)$ se denomina **parametrización local afín** de \mathcal{C} .

Además, si $\text{ord}(A)$ y $\text{ord}(B) \geq 0$, el punto $\mathcal{P}(0) \in \mathcal{C}$ se denomina **centro** de $\mathcal{P}(t)$.

Siguiendo este mismo razonamiento, una curva plana definida en el espacio proyectivo se puede expresar de la siguiente manera [43, Def. 2.69, Lema 2.70]:

Definición 1.1.2. Sea $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva proyectiva plana definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Sean A^*, B^* y C^* series en $\mathbb{C}((t))$ tales que: (i) $F(A^*(t) : B^*(t) : C^*(t)) = 0$, donde las tres series convergen, y (ii) no hay $D \in \mathbb{C}((t)) \setminus \{0\}$ de modo que $D \cdot (A^*, B^*, C^*) \in \mathbb{C}^3$. Entonces $\mathcal{P}^*(t) = (A^* : B^* : C^*) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}((t)))$ es una **parametrización local proyectiva** de \mathcal{C}^* . Además, siempre se puede encontrar una parametrización que tenga $\min\{\text{ord}(A^*), \text{ord}(B^*), \text{ord}(C^*)\} = 0$ y el punto $\mathcal{P}^*(0) \in \mathcal{C}^*$ se denomina **centro** de $\mathcal{P}^*(t)$.

En lo sucesivo, aunque se trabaja con curvas afines, ha de tenerse en cuenta que los resultados y conceptos aquí presentados, obviamente, pueden adaptarse a curvas proyectivas.

Dos parametrizaciones locales, $\mathcal{P}_1(t)$ y $\mathcal{P}_2(t)$, de una curva algebraica plana \mathcal{C} , se dice que son **parametrizaciones equivalentes**, si existe $R \in \mathbb{C}[[t]]$ de $\text{ord}(R) = 1$ de modo que $\mathcal{P}_1(t) = \mathcal{P}_2(R)$. Se puede demostrar que esta equivalencia de parametrizaciones locales es, en realidad, una relación de equivalencia

Si una parametrización local $\mathcal{P}(t)$, o una equivalente, satisface que $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}'(t^k)$ para alguna parametrización de $\mathcal{P}'(t)$ y para algún número natural $k > 1$, entonces se dice que $\mathcal{P}(t)$ es **reducible**. De lo contrario, $\mathcal{P}(t)$ es **irreducible**.

Bajo estas condiciones, se introduce el concepto de *place* como sigue.

Definición 1.1.3. Una clase de equivalencia de parametrizaciones locales irreducibles de la curva algebraica plana \mathcal{C} se denomina **place** de \mathcal{C} . El centro común de las parametrizaciones locales, si existe, es el centro del place.

En la siguiente definición, se introduce el concepto de rama de una curva plana.

Definición 1.1.4. Dada una parametrización local (X, Y) de una curva plana \mathcal{C} , el conjunto de todos los puntos $(X(t), Y(t))$ obtenidos al mover t en un entorno de 0, donde $X(t)$ e $Y(t)$ convergen, se denomina **rama** de \mathcal{C} .

Considerando que dos parametrizaciones locales equivalentes definen la misma rama, se verifica que se obtiene una única rama para cada *place* de una curva algebraica plana.

Se puede probar que el centro de una parametrización local de \mathcal{C} es un punto de \mathcal{C} . Recíprocamente, a partir de los siguientes teoremas, también se deduce que cada punto de \mathcal{C} es el centro de, al menos, un *place* de \mathcal{C} [43, Teo. 2.77, 2.78].

Teorema 1.1.5. - Teorema de Puiseux - El cuerpo $K \ll x \gg$ es algebraicamente cerrado.

Una demostración del Teorema de Puiseux puede obtenerse, de manera constructiva, por el método del Polígono de Newton [43, Sec. 2.5]. Este método permite construir soluciones de ecuaciones polinómicas de una sola variable, no constantes, sobre $K \ll x \gg$.

Teorema 1.1.6. Sea una curva plana \mathcal{C} definida por $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. A cada raíz $Y(x) \in \mathbb{C} \ll x \gg$ de $f(x, y) = 0$ con $\text{ord}(Y) > 0$ le corresponde un único *place* de \mathcal{C} con centro el punto $(X(0), Y(0))$. Recíprocamente, para cada *place* $(X(t), Y(t))$ de \mathcal{C} con centro en $(X(0), Y(0))$ le corresponden $\text{ord}(X)$ raíces de $f(x, y) = 0$, cada una de orden mayor que cero.

Si $Y(x)$ es una serie de Puiseux que satisface $f(x, y) = 0$, $\text{ord}(Y) > 0$ y n es el menor entero para el cual $Y(x) \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ (es decir, $\nu(Y) = n$), entonces fijando $x^{\frac{1}{n}} = t$, se tiene que $(t^n, Y(t^n))$ es una parametrización local con centro en el punto $(X(0), Y(0))$. Las soluciones $f(x, y)$ de orden 0 corresponden a *places* con centro en el eje y y las soluciones de orden negativo corresponden a *places* con centro en un punto de infinito.

Obsérvese que varias series de Puiseux diferentes pueden corresponder a parametrizaciones locales equivalentes y, en consecuencia, estas series proporcionan un único *place*. De manera más precisa, sea $Y(x) = \sum_{i \geq r} a_i x^{i/n}$ una serie de Puiseux con índice de ramificación $\nu(Y) = n$. Las series $\sigma_\epsilon(Y)$, $\epsilon^n = 1$ se denominan los **conjugados** de Y , donde

$$\sigma_\epsilon(Y) = \sum_{i \geq r} \epsilon^i a_i x^{i/n}.$$

Esto lleva a establecer la definición de clase de conjugación [41, 47].

Definición 1.1.7. El conjunto de todos los conjugados (distintos) de Y se denomina **clase de conjugación** de Y y el número de conjugados diferentes de Y es $\nu(Y)$.

Así, si dos series de Puiseux proporcionan el mismo *place* es porque pertenecen a la misma clase de conjugación.

1.2 Ramas infinitas y particularidades

En esta sección se introduce el concepto de rama infinita (véase Definición 1.2.1) y se obtienen algunas propiedades relacionadas con estas entidades algebraicas.

Para introducir este concepto se considera una curva algebraica plana afín, \mathcal{C} , sobre el cuerpo de los complejos \mathbb{C} , definida implícitamente por el polinomio irreducible $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Sea \mathcal{C}^* su correspondiente curva proyectiva, definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Además, sea $P = (1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$ un punto de infinito de \mathcal{C}^* y sea la curva definida implícitamente por el polinomio $g(y, z) = F(1 : y : z)$. Puede observarse que $g(p) = 0$, donde $p = (m, 0)$.

Aplicando el Teorema 1.1.5, se calcula el desarrollo en series de las soluciones de $g(y, z) = 0$. Existen exactamente $\text{grado}_y(g)$ soluciones determinadas por las diferentes series de Puiseux que pueden agruparse en clases conjugadas. Sea una de estas soluciones la definida por la siguiente serie de Puiseux:

$$\varphi(t) = m + a_1 t^{N_1/N} + a_2 t^{N_2/N} + a_3 t^{N_3/N} + \dots \in \mathbb{C} \ll t \gg, \quad a_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N},$$

donde $\nu(\varphi) = N \in \mathbb{N}$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots$ y $0 < N_1 < N_2 < \dots$. Se tiene que $g(\varphi(t), t) = 0$ en algún entorno de $t = 0$ donde $\varphi(t)$ converge. Entonces, existe algún $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$F(1 : \varphi(t) : t) = g(\varphi(t), t) = 0, \quad \text{para } t \in \mathbb{C} \text{ y } |t| < M,$$

lo que implica que $F(t^{-1} : t^{-1}\varphi(t) : 1) = f(t^{-1}, t^{-1}\varphi(t)) = 0$, para $t \in \mathbb{C}$ y $0 < |t| < M$.

Se define $t^{-1} = z$ y se obtiene que

$$f(z, r(z)) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| > M^{-1}, \text{ donde}$$

$$r(z) = z\varphi(z^{-1}) = mz + a_1 z^{1-N_1/N} + a_2 z^{1-N_2/N} + a_3 z^{1-N_3/N} + \dots, \quad a_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}, \\ N, N_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots \text{ y } 0 < N_1 < N_2 < \dots$$

Como $\nu(\varphi) = N$, se deduce que hay N series diferentes en su clase de conjugación. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ estas series y

$$r_i(z) = z\varphi_i(z^{-1}) = mz + a_1 c_i^{N_1} z^{1-N_1/N} + a_2 c_i^{N_2} z^{1-N_2/N} + a_3 c_i^{N_3} z^{1-N_3/N} + \dots \quad (1.1)$$

donde c_1, \dots, c_N son las N raíces complejas de $x^N = 1$.

Utilizando esta notación, a continuación, se introduce el concepto de rama infinita.

Definición 1.2.1. El conjunto $B = \bigcup_{i=1}^N L_i$ donde

$$L_i = \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$$

se denomina **rama infinita** de la curva plana afín \mathcal{C} . Los subconjuntos L_1, \dots, L_N se llaman **hojas** de la rama infinita B .

La siguiente definición describe los dos tipos de ramas infinitas que pueden existir.

Definición 1.2.2. Sea \mathcal{C} una curva plana afín sobre \mathbb{C} definida por un polinomio irreducible $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$.

- Una rama infinita de \mathcal{C} de tipo 1, asociada al punto de infinito $P = (1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$, es un conjunto $B = \bigcup_{i=1}^N L_i$, donde $L_i = \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$,

$i = 1, \dots, N$, $M \in \mathbb{R}^+$, y r_1, \dots, r_N son conjugados de

$$r(z) = mz + a_1 z^{1-N_1/N} + a_2 z^{1-N_2/N} + a_3 z^{1-N_3/N} + \dots, \quad a_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N},$$

$N, N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots$ y $0 < N_1 < N_2 < \dots$.

- Una rama infinita de \mathcal{C} de tipo 2, asociada al punto de infinito $P = (m : 1 : 0)$, $m \in \mathbb{C}$, es un conjunto $B = \bigcup_{i=1}^N L_i$, donde $L_i = \{(r_i(z), z) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $M \in \mathbb{R}^+$, y r_1, \dots, r_N son conjugados de

$$r(z) = mz + a_1 z^{1-N_1/N} + a_2 z^{1-N_2/N} + a_3 z^{1-N_3/N} + \dots, \quad a_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N},$$

$N, N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots$, y $0 < N_1 < N_2 < \dots$.

Observación 1.2.3.

1. En lo que sigue se asume sin pérdida de generalidad que, una determinada curva algebraica plana, \mathcal{C} , solo tiene ramas infinitas de tipo 1; es decir, todos los puntos de infinito tienen la forma $(1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$. De lo contrario se considera, sin pérdida de generalidad, un cambio lineal de coordenadas.
2. Por abuso de notación, N es el índice de ramificación de la rama B , y se escribe como $\nu(B) = N$. Obsérvese que B tiene $\nu(B)$ hojas.

En el siguiente ejemplo se calculan las ramas infinitas para una determinada curva plana. Para ello, se ha utilizado el software de álgebra Maple [48] con el soporte de referencias tales como [49–54].

Ejemplo 1.2.4. Sea \mathcal{C} la curva plana definida implícitamente por el polinomio irreducible

$$f(x, y) = y^5 - 4y^4x + 4y^3x^2 + 2y^2x - y^2x^2 + 2yx^2 + 2yx^3 + x + x^2 \in \mathbb{R}[x, y].$$

La correspondiente curva proyectiva \mathcal{C}^* viene entonces definida por

$$F(x : y : z) = y^5 - 4y^4x + 4y^3x^2 + 2y^2z^2x - zy^2x^2 + 2z^2yx^2 + 2yzx^3 + z^4x + z^3x^2 \in \mathbb{R}[x, y, z].$$

Obsérvese que $P = (1 : 0 : 0)$ es un punto de infinito de \mathcal{C}^* , a partir del cual se calculan las ramas infinitas asociadas a P .

Para ello, se considera la curva definida implícitamente por el polinomio $g(y, z) = F(1 : y : z)$ y se observa que $g(p) = 0$, donde $p = (0, 0)$.

Para realizar el desarrollo en series de las soluciones de $g(y, z) = 0$ se ha utilizado la orden *puiseux* del paquete *algcures*, incluido en el sistema informático de álgebra Maple, obteniendo que

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= -1/2t^2 + 1/8t^4 - 1/8t^5 + 1/16t^6 + 1/16t^7 + \dots \in \mathbb{C} \ll t \gg \quad y \\ \varphi_2(t) &= \frac{-(-2t)^{1/2}}{2} - \frac{t}{8} + \frac{27}{256}(-2t)^{3/2} - \frac{7}{32}t^2 + \frac{4057}{65536}(-2t)^{5/2} + \dots \in \mathbb{C} \ll t \gg. \end{aligned}$$

Es decir, $g(\varphi_j(t), t) = 0$, $j = 1, 2$ [43, Sec. 2.5].

Dado que $\nu(\varphi_1) = 1$, solo hay una serie de Puiseux en la clase de conjugación de φ_1 . Sin embargo, $\nu(\varphi_2) = 2$ y, por tanto, las siguientes series de Puiseux conjugadas pertenecen a la clase de conjugación de φ_2 :

$$\varphi_{2,1}(t) = \frac{-(-2t)^{1/2}}{2} - \frac{t}{8} + \frac{27}{256}(-2t)^{3/2} - \frac{7}{32}t^2 + \frac{4057}{65536}(-2t)^{5/2} + \dots$$

$$\varphi_{2,2}(t) = \frac{(-2t)^{1/2}}{2} - \frac{t}{8} - \frac{27}{256}(-2t)^{3/2} - \frac{7}{32}t^2 - \frac{4057}{65536}(-2t)^{5/2} + \dots$$

Esto determina que existen dos ramas infinitas:

$$B_1 = L_1 = \{(z, r_1(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}, \text{ donde}$$

$$r_1(z) = z\varphi_1(z^{-1}) = -1/(2z) + 1/(8z^3) - 1/(8z^4) + 1/(16z^5) + 1/(16z^6) + \dots$$

$$B_2 = L_{2,1} \cup L_{2,2}, \text{ donde } L_{2,i} = \{(z, r_{2,i}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}, i = 1, 2 \text{ y}$$

$$r_{2,1}(z) = z\varphi_{2,1}(z^{-1}) = -\frac{(-2z)^{1/2}}{2} - \frac{1}{8} + \frac{27(-2z)^{-1/2}}{64} - \frac{7z^{-1}}{32} + \frac{4057(-2z)^{-3/2}}{4096} + \dots$$

$$r_{2,2}(z) = z\varphi_{2,2}(z^{-1}) = +\frac{(-2z)^{1/2}}{2} - \frac{1}{8} - \frac{27(-2z)^{-1/2}}{64} - \frac{7z^{-1}}{32} - \frac{4057(-2z)^{-3/2}}{4096} + \dots$$

En la Figura 1.1 se representa la curva \mathcal{C} y algunos puntos de sus ramas infinitas, B_1 y B_2 , asociados al punto P de infinito.

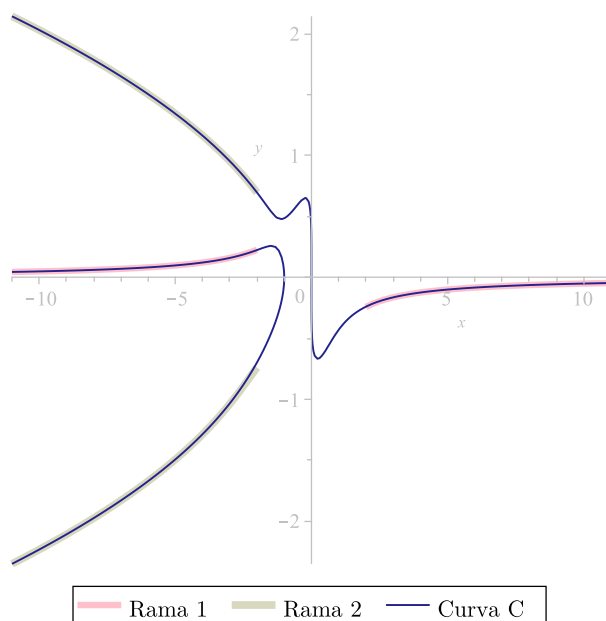


Figura 1.1: Curva algebraica real plana \mathcal{C} y sus ramas infinitas B_1 y B_2 .

A continuación, se demuestra que cualquier punto de una curva, con coordenadas suficientemente “grandes”, pertenece a alguna rama infinita. Para ello, se recuerda al lector que si h es una función compleja de variable compleja, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que el límite de $h(z)$ cuando z se tiende ∞ es L , $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = L$, si dada cualquier sucesión de puntos $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = L$ [55, Sec. 3.2.4] y [56, Cap. 2, Sec. 3].

Lema 1.2.5. *Sea \mathcal{C} una curva algebraica plana. Existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $p = (a, b) \in \mathcal{C}$ con $|a| > K$, se cumple que $p \in B$, donde B es una rama infinita de \mathcal{C} [33, Lem. 3.6].*

Observación 1.2.6. *Razonando de manera similar al Lema 1.2.5, se tiene que existe $K \in \mathbb{R}^+$, tal que para todo $p = (a, b) \in \mathcal{C}$ con $|b| > K$, se cumple que $p \in B$, donde B es una rama infinita de \mathcal{C} .*

1.3 Ramas convergentes y curvas aproximantes

En esta sección se presentan los conceptos de ramas convergentes y de curvas aproximantes. Intuitivamente hablando, dos ramas infinitas convergen si se aproximan entre sí cuando tienden hacia el infinito. Este concepto permite analizar si dos curvas se aproximan entre sí en el infinito [33, Sec. 4].

Definición 1.3.1. *Dos hojas, $L = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$ y $\bar{L} = \{(z, \bar{r}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \bar{M}\}$, se dice que son **convergentes**, si $\lim_{z \rightarrow \infty} (\bar{r}(z) - r(z)) = 0$.*

Lema 1.3.2. *Dos hojas $L = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$ y $\bar{L} = \{(z, \bar{r}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \bar{M}\}$ son convergentes, si y solo si los términos con exponentes no negativos de las series $r(z)$ y $\bar{r}(z)$ son iguales.*

Observación 1.3.3. *Del Lema 1.3.2 se deduce que:*

1. Si $m = \bar{m}$, entonces L y \bar{L} están asociados al mismo punto de infinito $(1 : m : 0)$.
2. El número de términos con exponente positivo en ambas series es finito.
3. Dos ramas infinitas convergentes siempre están asociadas al mismo punto de infinito, $(1 : m : 0)$.

Definición 1.3.4. *Dos ramas infinitas, B y \bar{B} , son **convergentes** si existen dos hojas convergentes $L \subset B$ y $\bar{L} \subset \bar{B}$.*

Proposición 1.3.5. *Dos ramas infinitas B y \bar{B} son convergentes, si y solo si para cada hoja $L \subset B$ existe una hoja $\bar{L} \subset \bar{B}$ convergente con L , y recíprocamente.*

Observación 1.3.6. *Dos ramas infinitas convergentes pueden tener diferentes índices de ramificación, es decir, diferente número de hojas. Sin embargo, el grado de cada rama infinita, $n \in \mathbb{N}$, es el mismo en ambas y se obtiene al simplificar los exponentes no negativos. Así, dos ramas infinitas convergentes tienen el mismo grado [33, Sec. 4].*

A continuación, se ilustra esta observación con un ejemplo.

Ejemplo 1.3.7. Sean las curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} , las definidas por los polinomios

$$f(x, y) = y^4 - 2xy^2 + x^2 - y \quad y \quad \bar{f}(x, y) = y^2 - x.$$

\mathcal{C} solo tiene la rama infinita $B = \bigcup_{i=1}^4 L_i$, donde $L_i = \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$,

$$r_i(z) = c_i^2 z^{1/2} + \frac{1}{2} c_i^5 z^{-1/4} - \frac{1}{64} c_i^{11} z^{-7/4} + \frac{1}{128} c_i^{14} z^{-10/4} + \dots \quad y$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = I, \quad c_3 = -1, \quad c_4 = -I.$$

Obsérvese que el primer término de estas series es $z^{1/2}$ o $-z^{1/2}$.

La curva \mathcal{D} también tiene una rama infinita definida por $\bar{B} = \bigcup_{i=1}^2 \bar{L}_i$, donde $\bar{L}_i = \{(z, \bar{r}_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \bar{M}\}$,

$$\bar{r}_i(z) = d_i z^{1/2} \quad y \quad d_1 = 1, \quad d_2 = -1.$$

Se deduce que B y \bar{B} son convergentes ya que L_1 y \bar{L}_1 convergen. De hecho, L_1 y L_3 convergen con \bar{L}_1 y, por otro lado, L_2 y L_4 convergen con \bar{L}_2 (véase Lema 1.3.2).

Así, dos ramas infinitas convergentes pueden estar contenidas en la misma curva o pueden pertenecer a diferentes curvas. En este segundo caso se puede decir que estas curvas se aproximan. Para definir este concepto de manera más formal, a continuación, se introduce la definición de distancia como sigue.

Definición 1.3.8. Dada una curva algebraica plana \mathcal{C} sobre \mathbb{C} y un punto $p \in \mathbb{C}^2$, se define la **distancia de p a \mathcal{C}** como $d(p, \mathcal{C}) = \min\{d(p, q) : q \in \mathcal{C}\}$.

Obsérvese que este mínimo existe porque \mathcal{C} es un conjunto cerrado.

Definición 1.3.9. Sea una curva algebraica plana \mathcal{C} sobre \mathbb{C} con una rama infinita B . Se dice que una curva \mathcal{D} se **aproxima** a \mathcal{C} en su rama infinita B , si existe una hoja $L = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\} \subset B$ tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} d((z, r(z)), \mathcal{D}) = 0$.

Teorema 1.3.10. Sea una curva algebraica plana \mathcal{C} sobre \mathbb{C} con una rama infinita B . Una curva algebraica plana \mathcal{D} se aproxima a \mathcal{C} en B , si y solo si \mathcal{D} tiene una rama infinita \bar{B} , tal que B y \bar{B} convergen.

A partir de este teorema, se extraen las siguientes observaciones.

Observación 1.3.11.

1. Del Teorema 1.3.10 se obtiene que la “proximidad” es una relación simétrica. Es decir, \mathcal{D} se aproxima a \mathcal{C} en alguna rama infinita B , si \mathcal{C} se aproxima a \mathcal{D} en alguna rama infinita \bar{B} , se dice que \mathcal{C} y \mathcal{D} se aproximan entre sí, o que son curvas aproximantes.
2. El Teorema 1.3.10 y la Observación 1.3.3, Apartado 3, implican que dos curvas que se aproximan tienen un punto de infinito común.

3. Del Teorema 1.3.10 y la Proposición 1.3.5, se obtiene que \mathcal{D} se aproxima a \mathcal{C} en una rama infinita B , si y solo si para cada hoja $L = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\} \subset B$, se tiene que $\lim_{z \rightarrow \infty} d((z, r(z)), \mathcal{D}) = 0$.

Corolario 1.3.12. Sea \mathcal{C} una curva algebraica plana con una rama infinita B . Sean \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 dos curvas diferentes que aproximan a \mathcal{C} en B . Entonces, se dice que \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 se aproximan entre sí.

A continuación, se ilustran estos resultados con un ejemplo aplicado a dos curvas algebraicas planas, definidas por sus ecuaciones implícitas.

Ejemplo 1.3.13. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos curvas planas definidas por los polinomios

$$f(x, y) = 2y^3x - y^4 + 2y^2x - y^3 - 2x^3 + x^2y + 3 \in \mathbb{R}[x, y], \quad y$$

$$\bar{f}(x, y) = y^3x + y^4 + y^2x + y^3 - x^3 - x^2y + 2 \in \mathbb{R}[x, y].$$

Obsérvese que ambas curvas, \mathcal{C} y \mathcal{D} , se aproximan entre sí (véase Figura 1.2) en la rama infinita asociada al punto de infinito $P = (1 : 0 : 0)$ (nótese que es común en ambas curvas).

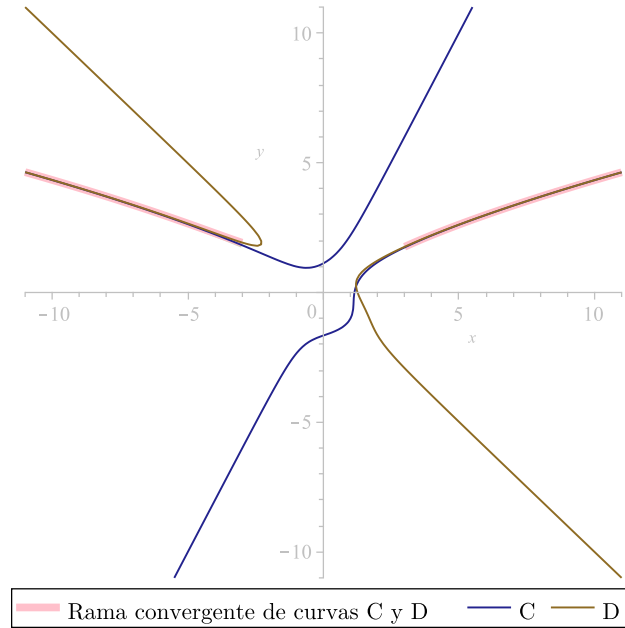


Figura 1.2: Curva \mathcal{D} que aproxima a \mathcal{C} en una de sus ramas infinitas.

Razonando como en el Ejemplo 1.2.4 se obtiene que la rama infinita de \mathcal{C} asociada a P está dada por $B = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, donde $L_i = \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$,

$$r_i(z) = c_i^2 z^{2/3} - 1/3 + 1/9 c_i^2 z^{-2/3} - 2/81 c_i^4 z^{-4/3} - 1/2 c_i^7 z^{-7/3} + \dots, \quad c_i = 1, 2, 3,$$

c_i son las raíces complejas de $x^3 = 1$.

Por otro lado, la rama infinita de \mathcal{D} asociada a P viene dada por $\bar{B} = \bar{L}_1 \cup \bar{L}_2 \cup \bar{L}_3$, donde $\bar{L}_i = \{(z, \bar{r}_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$,

$$\bar{r}_i(z) = c_i^2 z^{2/3} - 1/3 + 1/9 c_i^2 z^{-2/3} - 2/81 c_i^4 z^{-4/3} - 2/3 c_i^7 z^{-7/3} + \dots, \quad c_i = 1, 2, 3,$$

c_i son las raíces complejas de $x^3 = 1$.

Del Lema 1.3.2, se concluye que ambas ramas convergen, ya que los términos con exponente no negativo en ambas series, r_i y \bar{r}_i , son iguales.

Observación 1.3.14. En el ejemplo 1.3.13, las curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} son curvas aproximantes, ya que \mathcal{C} se aproxima a \mathcal{D} en una de sus ramas infinitas, y recíprocamente. Sin embargo, \mathcal{D} tiene otra rama infinita a la que \mathcal{C} no se aproxima y la curva \mathcal{C} tiene una rama infinita a la que \mathcal{D} tampoco lo hace.

Cuando una curva se aproxima a otra curva en todas sus ramas infinitas, y recíprocamente, se dice que ambas están presentando el mismo “comportamiento asintótico” (véase Definición 1.4.1).

Según estos resultados, a continuación se presenta la noción de comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas planas definidas implícitamente.

1.4 Comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas

En esta sección se estudia el *comportamiento asintótico* de dos curvas. En primer lugar se define cuándo dos curvas se aproximan entre sí en todas sus ramas infinitas y, a continuación, se muestra el pseudocódigo del algoritmo que calcula el comportamiento asintótico de dos curvas, \mathcal{C} y \mathcal{D} , ilustrando su ejecución mediante un ejemplo aplicado a sendas curvas algebraicas, definidas implícitamente.

Definición 1.4.1. Se dice que dos curvas algebraicas planas, \mathcal{C} y \mathcal{D} , tienen el mismo **comportamiento asintótico**, si cada rama infinita de \mathcal{C} converge a otra rama infinita de \mathcal{D} , y recíprocamente.

Observación 1.4.2. Del Teorema 1.3.10 se obtiene que \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen el mismo comportamiento asintótico, si y solo si \mathcal{C} se aproxima a \mathcal{D} en todas sus ramas infinitas y recíprocamente.

Así, el Algoritmo 1.1 permite comparar el comportamiento asintótico de dos curvas, \mathcal{C} y \mathcal{D} , considerando que $(0 : 1 : 0)$ no es un punto de infinito ni de \mathcal{C}^* y ni de \mathcal{D}^* (véase Observación 1.2.3, Apartado 1). Además, este resultado puede aplicarse de manera similar a las curvas del espacio n -dimensional [34].

Data: \mathcal{C} y \mathcal{D} , curvas algebraicas planas definidas implícitamente.

Result: TRUE: \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen el mismo comportamiento asintótico,

FALSE: Cualquier otro caso.

begin

```

   $F(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(\mathcal{C})$ 
   $G(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(\mathcal{D})$ 
   $P_1, \dots, P_k \leftarrow \text{PuntosdeInfinito}(F(x, y, 0))$ 
   $Q_1, \dots, Q_l \leftarrow \text{PuntosdeInfinito}(G(x, y, 0))$ 
  if  $\text{PuntosdeInfinito}(\mathcal{C}) \neq \text{PuntosdeInfinito}(\mathcal{D})$  then
     $\_ \text{return FALSE}$  /* Observación 1.3.3 */
   $g(y, z) \leftarrow F(1, y, z)$ 
   $h(y, z) \leftarrow G(1, y, z)$ 
   $\phi_1, \dots, \phi_m \leftarrow \text{SeriesPuisseux}(g(y, 0))$ 
   $\psi_1, \dots, \psi_n \leftarrow \text{SeriesPuisseux}(h(y, 0))$ 

  foreach  $\phi_i$  de  $P_i$ ,  $i \leftarrow 1 \dots m$  do
     $r_i(z) \leftarrow z\phi_i(z^{-1})$ 
     $B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{r}_i(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(r_i(z))$ 
     $\tilde{B}_i \leftarrow \{(z, \tilde{r}_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$ 

  foreach  $\psi_j$  de  $Q_j$ ,  $j \leftarrow 1 \dots n$  do
     $\bar{r}_j(z) \leftarrow z\psi_j(z^{-1})$ 
     $\bar{B}_j \leftarrow \{(z, \bar{r}_j(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_j\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{\bar{r}}_j(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(\bar{r}_j(z))$ 
     $\tilde{\bar{B}}_j \leftarrow \{(z, \tilde{\bar{r}}_j(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_j\}$ 

  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $\tilde{r}_i(z) \notin \{\tilde{\bar{r}}_j(z), j \in 1, \dots, n\}$  then
       $\_ \text{return FALSE}$  /* Lema 1.3.2 */

  for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
    if  $\tilde{\bar{r}}_j(z) \notin \{\tilde{r}_i(z), i \in 1, \dots, m\}$  then
       $\_ \text{return FALSE}$  /* Lema 1.3.2 */

   $\_ \text{return TRUE}$ 

```

Algoritmo 1.1: Comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas planas \mathcal{C} y \mathcal{D} .

A continuación, se ilustra este algoritmo mediante un ejemplo aplicado a dos curvas algebraicas planas, \mathcal{C} y \mathcal{D} .

Ejemplo 1.4.3. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos curvas algebraicas planas definidas implícitamente por los polinomios

$$f(x, y) = 2y^3x - y^4 + 2y^2x - y^3 - 2x^3 + x^2y + 3 \quad y$$

$$\bar{f}(x, y) = 2y^3x - y^4 + 2y^2x - y^3 - 2x^3 + x^2y - 3x^2 - xy + 2x - 3y + 1.$$

Se aplica el Algoritmo 1.1 para decidir si \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen el mismo comportamiento asintótico. Para ello, se calculan los puntos de infinito de \mathcal{C} y \mathcal{D} , obteniendo que \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen los mismos puntos de infinito: $P_1 = (1 : 0 : 0)$ y $P_2 = (1 : 2 : 0)$.

Iteración 1: Razonando como en el Ejemplo 1.2.4, se calculan las series de Puiseux para P_1 , en \mathcal{C} y en \mathcal{D} , obteniendo que:

1. La única rama infinita, asociada a P_1 en \mathcal{C} , viene dada por $B_1 = L_{1,1} \cup L_{1,2} \cup L_{1,3}$, donde $L_{1,i} = \{(z, r_{1,i}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_1\}$, $i = 1, 2, 3$ y

$$r_{1,i}(z) = z^{2/3} - 1/3 + 1/9z^{-2/3} - 2/81z^{-4/3} + \dots$$

2. La única rama infinita, asociada a P_1 en \mathcal{D} , viene dada por $\bar{B}_1 = \bar{L}_{1,1} \cup \bar{L}_{1,2} \cup \bar{L}_{1,3}$, donde $\bar{L}_{1,j} = \{(z, \bar{r}_{1,i}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \bar{M}_1\}$, $i = 1, 2, 3$ y

$$\bar{r}_{1,i}(z) = z^{2/3} - 1/3 + 1/2z^{-1/3} + 19/36z^{-2/3} + \dots$$

3. $\tilde{r}_{1,1}(z) = z^{2/3} - 1/3$.

4. $\tilde{\bar{r}}_{1,1}(z) = z^{2/3} - 1/3$.

Se observa que $\tilde{r}_{1,1}(z)$ y $\tilde{\bar{r}}_{1,1}(z)$ tienen los mismos términos con exponente no negativo. Por tanto, B_1 y \bar{B}_1 convergen.

Iteración 2: Razonando como en el Ejemplo 1.2.4, se calculan las series de Puiseux para P_2 , en \mathcal{C} y en \mathcal{D} , obteniendo que:

1. La única rama infinita asociada al punto P_2 en \mathcal{C} , está dada por $B_2 = L_2 = \{(z, r_2(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_2\}$, donde

$$r_2(z) = 2z + 3/8z^{-3} - 9/64z^{-4} + 27/512z^{-5} + \dots$$

2. La única rama infinita, asociada al punto P_2 en \mathcal{D} , está dada por $\bar{B}_2 = \bar{L}_2 = \{(z, \bar{r}_{2,j}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \bar{M}_2\}$, donde

$$\bar{r}_2(z) = 2z - 5/8z^{-1} - 17/64z^{-2} - 145/512z^{-3} + \dots$$

3. $\tilde{r}_2(z) = 2z$.

4. $\tilde{\bar{r}}_2(z) = 2z$.

Se observa que $\tilde{r}_{2,1}(z)$ y $\tilde{\bar{r}}_{2,1}(z)$ tienen los mismos términos con exponente no negativo. Por tanto, B_2 y \bar{B}_2 convergen.

Dado que cada rama infinita de \mathcal{C} converge a otra rama de \mathcal{D} , y recíprocamente, el algoritmo devuelve que \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen el mismo comportamiento asintótico (véase Figura 1.3).

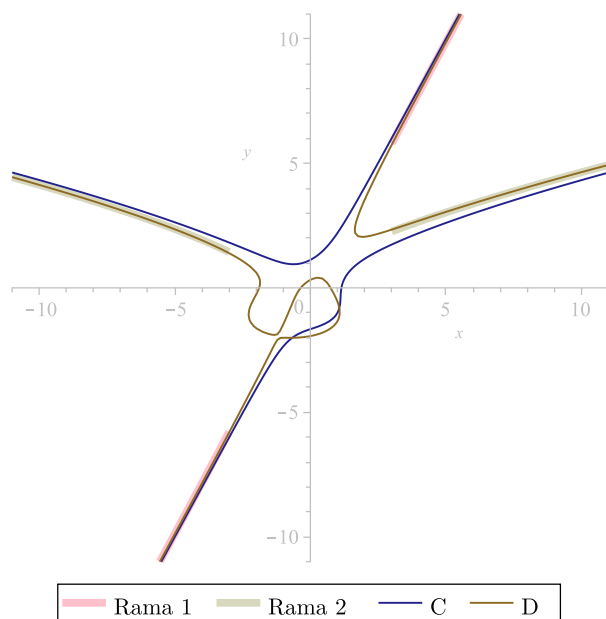


Figura 1.3: Comportamiento asintótico de dos curvas \mathcal{C} y \mathcal{D} en sus ramas convergentes.

1.5 Asíntotas y curvas perfectas

Según se describe en [33], a partir de una curva algebraica plana \mathcal{C} y su rama infinita B , es posible comprobar si \mathcal{C} puede aproximarse en B mediante una nueva curva \mathcal{D} .

Intuitivamente hablando, si B aproxima a \mathcal{C} mediante \mathcal{D} y $\text{grado}(\mathcal{D}) < \text{grado}(\mathcal{C})$, se puede decir que \mathcal{C} *degenera*, ya que \mathcal{C} se comporta en el infinito como una curva de menor grado.

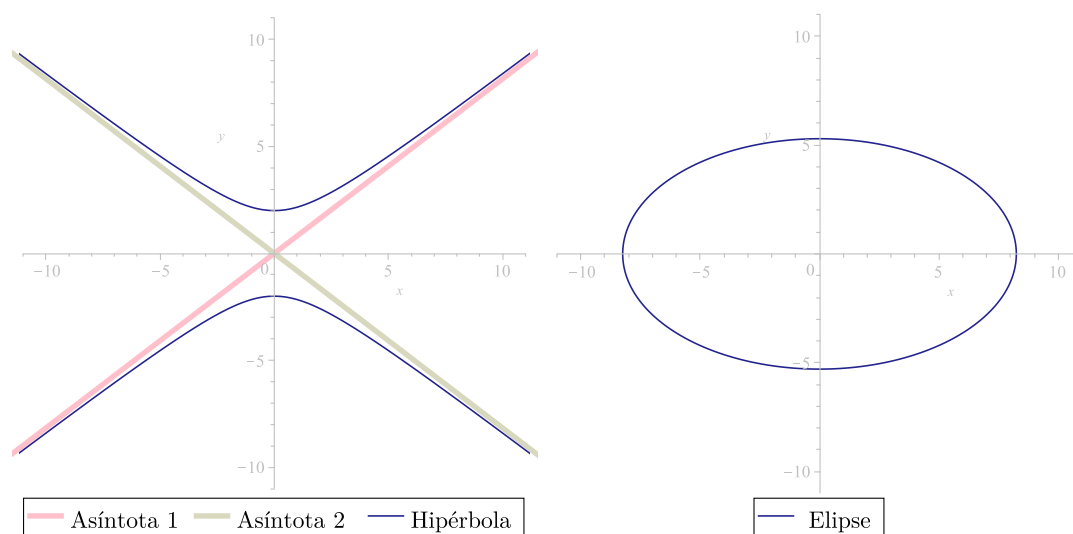


Figura 1.4: Comportamiento asintótico de la hipérbola (izquierda) y elipse (derecha).

Un ejemplo se ilustra en la Figura 1.4 donde puede observarse que una hipérbola es una curva de grado 2 con dos asíntotas reales, lo que implica que la hipérbola degenera en el infinito,

en dos rectas. El comportamiento de una elipse es similar, aunque en este caso las ramas infinitas son complejas y, por tanto, también pueden ser aproximada por rectas complejas.

Sin embargo, el comportamiento asintótico de una parábola es diferente, ya que en el infinito la parábola no puede ser aproximada por ninguna recta, es decir, por ninguna curva de menor grado (véase Figura 1.5).

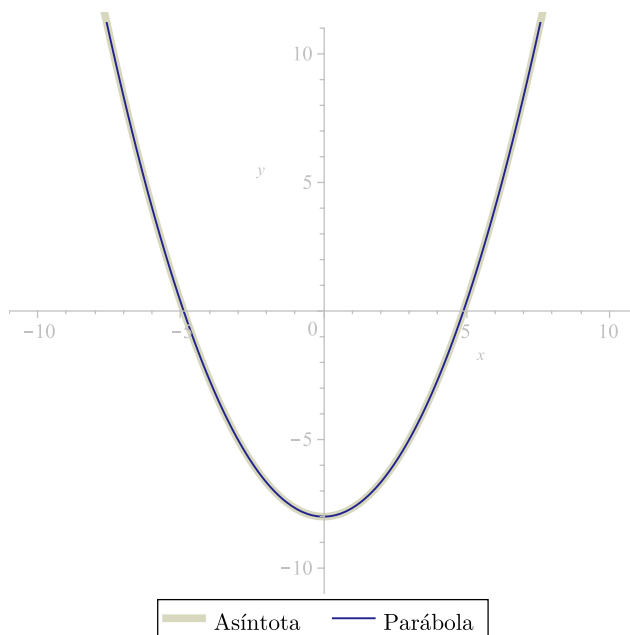


Figura 1.5: Comportamiento asintótico de la parábola.

Esto motiva las siguientes definiciones [31, Sec. 3].

Definición 1.5.1. Una curva de grado d es una **curva perfecta** si no puede ser aproximada por ninguna curva de grado menor que d .

Una curva C que no sea perfecta puede aproximarse por otras curvas de menor grado. Si estas otras curvas son perfectas, se denominan g-asíntotas de C . Todo esto conduce a la siguiente definición.

Definición 1.5.2. Sea una curva C con una rama infinita B . Una **g-asíntota** (asíntota generalizada) de C en B es una curva perfecta que aproxima a C en B .

La noción de g-asíntota es similar al concepto clásico de asíntota [39, 40, 57]. La diferencia es que una g-asíntota no es necesariamente una recta, sino una curva perfecta. En realidad es una generalización, ya que cada recta es una curva perfecta (este hecho se desprende de la Definición 1.5.1). En lo sucesivo, se utilizará indistintamente el término asíntota y g-asíntota.

Para aclarar esta noción, a continuación se considera una curva plana C definida por el polinomio irreducible

$$f(x, y) = -yx - y^2 - x^3 + 2x^2y + x^2 - 2y \in \mathbb{R}[x, y].$$

\mathcal{C} tiene grado 3 y dos ramas infinitas. En la Figura 1.6, se puede comprobar que estas ramas infinitas son aproximadas por la parábola $y - 2x^2 + 3/2x + 15/8 = 0$ y por la recta $y - x/2 + 1/8 = 0$.

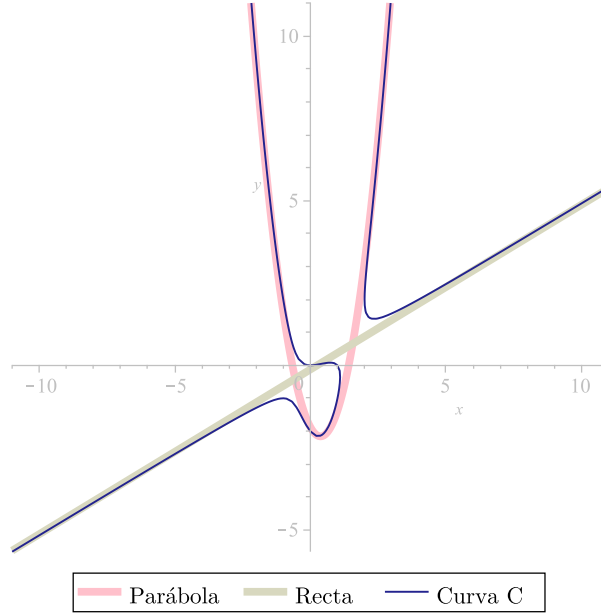


Figura 1.6: Curva \mathcal{C} aproximada por una parábola y una recta.

Más adelante se verá que otras curvas planas de grado 3, como $y - x^3 = 0$ o $y^2 - x^3 = 0$, no pueden aproximarse por ninguna curva de grado menor que 3, tratándose, por tanto, de curvas perfectas.

Observación 1.5.3. *El grado de una asíntota es menor o igual que el grado de la curva que la aproxima. De hecho, una asíntota de una curva \mathcal{C} en una rama B tiene el menor grado posible de todas las curvas que aproximan a \mathcal{C} en B . Si $\tilde{\mathcal{C}}$ es una asíntota de \mathcal{C} en B y \mathcal{D} otra curva que aproxima a \mathcal{C} en B , del Corolario 1.3.12 se deduce que \mathcal{D} aproxima a $\tilde{\mathcal{C}}$ y, dado que $\tilde{\mathcal{C}}$ es perfecta, es posible concluir que $\text{grado}(\mathcal{D}) \geq \text{grado}(\tilde{\mathcal{C}})$.*

A continuación, se muestra que cada rama infinita de una curva algebraica plana tiene, al menos, una asíntota (véase Teorema 1.6.3). Para ello, primero es necesario mostrar algunos resultados previos, [31, Sec. 3].

Para este propósito, sea \mathcal{C} una curva algebraica plana y $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$ una rama infinita de \mathcal{C} asociada a $P = (1 : m : 0)$. De la Definición 1.2.1, se tiene que

$$r(z) = mz + a_1 z^{1-N_1/N} + \dots + a_k z^{1-N_k/N} + a_{k+1} z^{1-N_{k+1}/N} + \dots \quad (1.2)$$

donde $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{C}$, $N, N_1, N_2, \dots \in \mathbb{N}$ y $0 < N_1 < N_2 < \dots$. Además, sean $N_k \leq N < N_{k+1}$ los términos $a_j z^{1-N_j/N}$ con $j \geq k+1$ con exponente negativo.

Obsérvese que $\nu(B) = N$ y que la serie tiene un número finito de términos positivos, pudiendo ser infinito el número de términos negativos.

Lema 1.5.4. Sea \mathcal{C} una curva plana que contiene una rama infinita de la forma de la Ecuación 1.2 y sea $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ el polinomio irreducible que define implícitamente a \mathcal{C} . Se tiene que $(y - mx)^N$ divide a $f_d(x, y)$.

Observación 1.5.5. De la demostración del Lema 1.5.4 [31, Lem. 2], se obtiene que $h(x, y) := \prod_{i=1}^N (y - r_i(x))$ divide a $f(x, y)$ como polinomios en la variable y . En efecto, como $\prod_{i=1}^N (y - x\varphi_i(z/x)) = \prod_{i=1}^N (y - mx - p_i(x, z))$ divide a $F(x : y : z)$, se fija $z = 1$, y se deduce que $h(x, y)$ divide a $f(x, y)$ con respecto a la variable y .

A continuación, se escribe la Ecuación 1.2 que define una rama B como

$$r(z) = mz + a_1 z^{1-n_1/n} + \dots + a_k z^{1-n_k/n} + a_{k+1} z^{1-N_{k+1}/N} + \dots \quad (1.3)$$

donde $\text{mcd}(N, N_1, \dots, N_k) = b$, $N_j = n_j b$, $N = nb$, $j = 1, \dots, k$. Esto es, se simplifican todos los exponentes no negativos de modo que $\text{mcd}(n, n_1, \dots, n_k) = 1$. Obsérvese que $0 < n_1 < n_2 < \dots$, $n_k \leq n$ y $N < n_{k+1}$, es decir, los términos $a_j z^{1-N_j/N}$ con $j \geq k+1$ tienen exponente negativo.

En lo que sigue, toda la parte correspondiente a $r(z)$ con términos negativos se denotará como

$$A(z) := \sum_{\ell=k+1}^{\infty} a_{\ell} z^{-q_{\ell}}, \quad q_{\ell} = -N_{\ell}/N + 1 \in \mathbb{Q}^+, \quad \ell \geq k+1,$$

es decir, $r(z) = mz + a_1 z^{1-n_1/n} + \dots + a_k z^{1-n_k/n} + A(z)$.

Según estas condiciones, a continuación se introduce la definición de grado de una rama B .

Definición 1.5.6. Sea $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$ definida por la Ecuación 1.3 una rama infinita asociada a $P = (1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$. Entonces, n es el **grado de B** y se denota por $\text{grado}(B)$.

Proposición 1.5.7. Sea \mathcal{D} una curva que aproxima a \mathcal{C} en su rama infinita B . Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ el polinomio implícito de \mathcal{D} . Se verifica que $(y - mx)^n$ divide la forma homogénea de grado máximo de $f(x, y)$.

Observación 1.5.8. Del Lema 1.5.4, se deduce que una curva \mathcal{C} que contiene una rama infinita B de grado n , al menos tiene un $\nu(B) \geq n$. Además, de la Proposición 1.5.7, también se deduce que $\text{grado}(\mathcal{D}) \geq n$ para cualquier curva \mathcal{D} que aproxime a \mathcal{C} en B .

1.6 Construcción de asíntotas de curvas implícitas

Considerando los resultados presentados anteriormente, se tiene que cualquier curva \mathcal{D} que aproxime a \mathcal{C} en B , debería tener una rama infinita $\bar{B} = \{(z, \bar{r}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$ en la que los términos con exponente no negativo de $r(z)$ y $\bar{r}(z)$ sean iguales.

En el caso más simple, si $A = 0$, no hay términos con exponente negativo (véase Ecuación 1.3), y se obtiene que

$$\bar{r}(z) = mz + a_1 z^{1-n_1/n} + a_2 z^{1-n_2/n} + \dots + a_k z^{1-n_k/n}, \quad (1.4)$$

donde $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{C}$, $n, n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(n, n_1, \dots, n_k) = 1$ y $0 < n_1 < n_2 < \dots$.

Nótese que $\bar{r}(z)$ tiene los mismos términos con exponente no negativo que $r(z)$ y, además, $\bar{r}(z)$ no tiene términos con exponente negativo.

Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una curva plana que contiene una rama $\tilde{B} = \{(z, \tilde{r}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \tilde{M}\}$, siendo $\tilde{r}(z) = \bar{r}(z)$ (obsérvese que $\tilde{\mathcal{C}}$ es única, ya que dos curvas algebraicas planas diferentes tienen un número finito de puntos en común). Por tanto, se tiene que

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t^n, mt^n + a_1 t^{n-n_1} + \dots + a_k t^{n-n_k}) \in \mathbb{C}[t]^2, \quad (1.5)$$

donde $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(n, n_1, \dots, n_k) = 1$ y $0 < n_1 < \dots < n_k$, es una parametrización polinomial de $\tilde{\mathcal{C}}$ y es propia (véase Lema 1.6.1). Además, en el Teorema 1.6.3 se muestra que $\tilde{\mathcal{C}}$ es una asíntota de \mathcal{C} en B .

Lema 1.6.1. *La parametrización obtenida en la Ecuación 1.5 es propia, es decir, invertible [31, Lem. 3].*

De manera intuitiva, el carácter propio o invertible de una parametrización significa que la parametrización “recorre” a la curva una sola vez. Más concretamente, una parametrización racional afín $\mathcal{P}(t)$ de una curva racional \mathcal{C} es propia, si la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ t &\longmapsto \mathcal{P}(t) \end{aligned}$$

es birracional, o de forma equivalente, si casi la totalidad de los puntos de \mathcal{C} se generan únicamente por un valor del parámetro t .

Del mismo modo, la inversa de una parametrización propia, $\mathcal{P}(t)$, se denota como $\mathcal{P}^{-1}(t)$, que es la aplicación racional inversa de \mathcal{P} .

Es bien sabido que, por el Teorema de Lüroth [43, Cap. 4, Sec. 4.2], cualquier curva racional se puede parametrizar propiamente. En concreto, el problema de la reparametrización propia se puede enunciar de la siguiente manera: dada una parametrización impropia racional $\mathcal{P}(t)$, de una curva plana algebraica \mathcal{C} , encontrar una parametrización propia racional $\mathcal{M}(t)$ de \mathcal{C} , tal que $\mathcal{M}(S(t)) = \mathcal{P}(t)$ siendo $S(t)$ una función racional.

Así por ejemplo, la parametrización $\mathcal{P}(t) := (t^2, t^4)$, cuya expresión implícita es $x^2 - y$, “recorre” a la curva dos veces. Si se reparametriza de manera propia, sustituyendo $t^2 = s$, se obtiene una parametrización invertible de la parábola anterior, $\mathcal{M}(s) := (s, s^2)$, que solo “recorre” a la curva una única vez.

Hay muchas soluciones algorítmicas al problema de la reparametrización, la mayoría de ellas basadas en demostraciones constructivas del Teorema de Lüroth [58–60], donde se aportan algoritmos eficientes de reparametrización que determinan $\mathcal{M}(t)$ y $S(t)$ de manera efectiva, mediante cálculos del máximo común divisor (mcd).

A lo largo de esta tesis, se asume que $\mathcal{P}(t)$ es propia o, en su defecto, que se puede parametrizar fácilmente aplicando los algoritmos anteriores.

El siguiente resultado declara una propiedad concerniente al polinomio implícito de $\tilde{\mathcal{C}}$ (compárese con el Lema 1.5.4).

Lema 1.6.2. Sea \tilde{C} la curva plana que contiene a la rama infinita definida en la Ecuación 1.4. Sea $\tilde{f}(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ el polinomio implícito que define a \tilde{C} . Se tiene que la forma homogénea de grado máximo de $\tilde{f}(x, y)$ es $(y - mx)^n$ y, en consecuencia, se deduce que $\text{grado}(\tilde{C}) = n$ [31, Lem. 4 y Obs. 6].

Teorema 1.6.3. La curva \tilde{C} es una asíntota de C en B [31, Teo. 2].

Asimismo, en [31, Sec. 3] se demuestra que para cualquier rama infinita, B , de una curva plana, C , siempre existe una asíntota que se aproxima a C en B .

El Algoritmo 1.2 calcula una asíntota para cada rama infinita de una determinada curva algebraica plana, tomando la curva de *input*, C , a la que se ha aplicado un adecuado cambio lineal de coordenadas. De este modo se evita que $(0 : 1 : 0)$ sea un punto infinito de C (véase Observación 1.2.3, Apartado 1 y algoritmo presentado en [6, Sec. 3]).

Data: C , curva algebraica plana irreducible definida por $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$.

Result: Asíntotas \tilde{C}_i , $i \leftarrow 1, \dots, k$.

begin

```

   $F(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(C)$ 
   $P_1, \dots, P_m \leftarrow \text{PuntosInfinito}(F(x, y, 0))$ 
   $g(y, z) \leftarrow F(1, y, z)$ 
   $\phi_1(z), \dots, \phi_k(z) \leftarrow \text{SeriesPuiseux}(g(y, z), z = 0, y)$  /* Teorema 1.1.5 */

  foreach  $\phi_i(z)$  de  $P_j$  do
     $r_i(z) \leftarrow z\phi_i(z^{-1})$ 
     $B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{r}_i(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(r_i(z))$  /* Ecuación 1.4 */
     $n_i \leftarrow \text{grado}(B_i)$  /* Definición 1.5.6 */
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, \tilde{r}_i(t^{n_i})) \in \mathbb{C}[t]^2$  es propia /* Lema 1.6.1 */
  return  $\tilde{C}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$ ,  $i \leftarrow 1, \dots, k$ 

```

Algoritmo 1.2: Construcción de asíntotas de una curva plana C definida implícitamente.

A continuación, este algoritmo se ilustra con dos ejemplos. El primero de ellos se utilizará en las siguientes secciones y capítulos, sirviendo como referencia para establecer diferentes criterios comparativos entre algoritmos estudiados en este trabajo.

Ejemplo 1.6.4. Sea C la curva de grado $d = 3$ definida por el polinomio irreducible

$$f(x, y) = -45y^3 - 18xy^2 + 121x^2 + 335xy + 25y^2 + 313x - 41y + 61 \in \mathbb{R}[x, y].$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 1.2 para calcular las asíntotas de C . Nótese que como $f_3(x, y) = -45y^3 - 18xy^2$, se obtienen los dos puntos de infinito $P_1 = (-2/5 : 1 : 0)$ y $P_2 = (1 : 0 : 0)$.

Iteración 1: Sea $P_1 = (-2/5 : 1 : 0)$,

1. La única rama infinita asociada a P_1 es B_1 , donde

$$r_1(z) = -\frac{2}{5}z - \frac{5}{4} - \frac{9}{8}z^{-1} - \frac{495}{256}z^{-2} - \frac{5085}{1024}z^{-3} + \dots$$

(r_1 se obtiene utilizando el paquete `algcures` del software de álgebra Maple).

$$2. \tilde{r}_1(z) = -\frac{2}{5}z - \frac{5}{4}.$$

$$3. \tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4} \right).$$

La asíntota $\tilde{\mathcal{C}}_1$ está definida por la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4} \right) \in \mathbb{C}[t]^2$.

Iteración 2: Sea $P_2 = (1 : 0 : 0)$,

1. La única rama infinita asociada a P_2 es B_2 , donde

$$r_2(z) = \frac{11\sqrt{2}}{6}z + \frac{65}{72} - \frac{1321\sqrt{2}}{3456}z^{-1} + \frac{9}{16}z^{-2} - \frac{1893395\sqrt{2}}{3981312}z^{-3} + \frac{495}{512}z^{-4} + \dots$$

$$2. \tilde{r}_2(z) = \frac{11\sqrt{2}}{6}z + \frac{65}{72}.$$

$$3. \tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}}{6}t + \frac{65}{72} \right).$$

La asíntota $\tilde{\mathcal{C}}_2$ está definida por la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}}{6}t + \frac{65}{72} \right) \in \mathbb{C}[t]^2$.

Por tanto, las asíntotas son las curvas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$, que se definen implícitamente por los polinomios [43, Sec. 4]:

- $\tilde{f}_1(x, y) = -\frac{2}{5}x - y - \frac{5}{4} \in \mathbb{R}[x, y]$.
- $\tilde{f}_2(x, y) = y^2 - \frac{121}{18}x - \frac{65}{36}y + \frac{4225}{5184} \in \mathbb{R}[x, y]$.

En la Figura 1.7 se representa la curva \mathcal{C} y sus asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

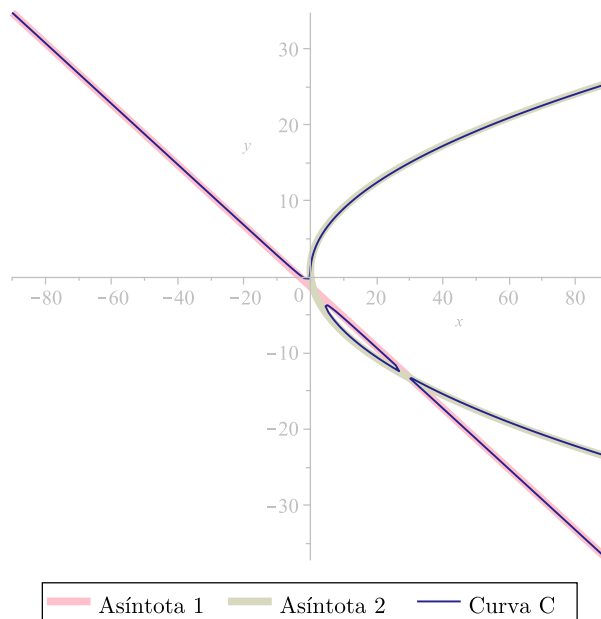


Figura 1.7: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} definida de forma implícita.

Ejemplo 1.6.5. Sea C la curva de grado $d = 4$ definida por el polinomio irreducible

$$f(x, y) = -y^4 + 2y^3x + 2y^2x - y^3 - 2x^3 + x^2y + 3 \in \mathbb{R}[x, y].$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 1.2 para calcular las asíntotas de C . Nótese que como $f_4(x, y) = -y^4 + 2y^3x$, los puntos infinitos son $P_1 = (1 : 2 : 0)$ y $P_2 = (1 : 0 : 0)$.

Iteración 1: Sea $P_1 = (1 : 2 : 0)$,

1. La única rama infinita asociada a P_1 es B_1 , donde

$$r_1(z) = 2z + \frac{3z^{-3}}{8} - \frac{9z^{-4}}{64} + \frac{27z^{-5}}{512} - \frac{81z^{-6}}{4096} + \dots$$

(r_1 se obtiene utilizando el paquete `algcures` del sistema de álgebra Maple).

2. $\tilde{r}_1(z) = 2z$.

3. $\tilde{P}_1(t) = (t, 2t)$.

La asíntota \tilde{C}_1 está definida por la parametrización $\tilde{P}_1(t) = (t, 2t) \in \mathbb{C}[t]^2$.

Iteración 2: Sea $P_2 = (1 : 0 : 0)$,

1. La única rama infinita asociada a P_2 es B_2 , donde

$$r_2(z) = z^{2/3} - \frac{1}{3} + \frac{z^{-2/3}}{9} - \frac{2z^{-4/3}}{81} + \dots$$

2. $\tilde{r}_2(z) = z^{2/3} - 1/3$.

3. $\tilde{P}_2(t) = (t^3, t^2 - 1/3)$.

La asíntota \tilde{C}_2 está definida por la parametrización $\tilde{P}_2(t) = (t^3, t^2 - 1/3) \in \mathbb{C}[t]^2$.

Por tanto, las asíntotas son las curvas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 , que se definen implícitamente por los polinomios [43, Sec. 4]:

- $\tilde{f}_1(x, y) = y - 2x \in \mathbb{R}[x, y]$.
- $\tilde{f}_2(x, y) = y^3 - x^2 + y^2 + 1/3y + 1/27 \in \mathbb{R}[x, y]$.

Finalmente, en la Figura 1.8 se representa la curva C y sus asíntotas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 .

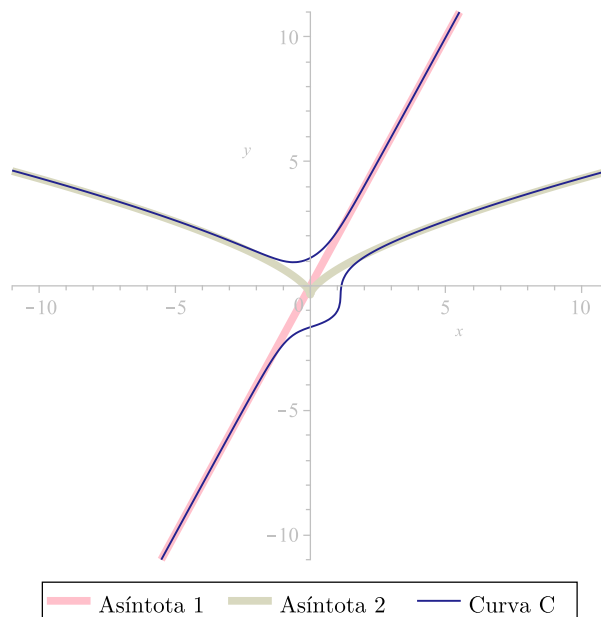


Figura 1.8: Asíntotas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 de la curva \mathcal{C} definida de forma implícita.

1.7 Algunos resultados sobre curvas perfectas

Una herramienta indispensable para el desarrollo de los resultados anteriores, es la noción de curva perfecta. Es por ello que, en esta sección se muestran algunas propiedades relativas a las curvas perfectas, partiendo de la condición necesaria para que una curva sea perfecta.

Proposición 1.7.1. *Una curva perfecta es polinomial, es decir, admite una parametrización polinomial (véase la demostración en [31, Prop. 2]).*

Se recuerda que una parametrización racional afín $\mathcal{P}(t)$ de una curva racional afín \mathcal{C} es polinomial, si todas sus componentes son polinomios. Además, a la curva afín \mathcal{C} se le denomina curva polinomial, si es racional y puede parametrizarse mediante una parametrización polinomial. Puede ampliarse más información sobre curvas polinomiales, así como su caracterización, a partir de los trabajos presentados en [61–63].

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la Proposición 1.7.1 no es cierto. Es decir, se considera una curva polinomial \mathcal{C} y se muestra que \mathcal{C} no es una curva perfecta.

Ejemplo 1.7.2. *Sea \mathcal{C} la curva definida por la parametrización polinomial*

$$\mathcal{P}(t) = (t^4 + t, t^2) \in \mathbb{R}[t]^2.$$

Se calcula el polinomio implícito de \mathcal{C} aplicando, por ejemplo, los resultados de [43, Cap. 4], obteniendo que

$$f(x, y) = \text{resultante}_t(x - t^4 - t, y - t^2) = -y + x^2 - 2xy^2 + y^4 \in \mathbb{R}[x, y].$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 1.2 para determinar las asíntotas de \mathcal{C} .

Primero se observa que \mathcal{C} solo tiene el punto de infinito $P = (1 : 0 : 0)$. A partir de dicho punto se calcula su rama infinita asociada (mediante el paquete `algcures` de Maple) y se obtiene que $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$, donde

$$r(z) = z^{1/2} + \frac{1}{2}z^{-1/4} - \frac{1}{64}z^{-7/4} + \frac{1}{128}z^{-10/4} + \dots$$

A continuación, se considera $\tilde{r}(z) = z^{1/2}$, de la que se obtiene la asíntota $\tilde{\mathcal{C}}$ definida por la parametrización $\tilde{P}(t) = (t^2, t)$. El polinomio que define implícitamente a la curva $\tilde{\mathcal{C}}$ es $\tilde{f}(x, y) = y^2 - x$.

Obsérvese que la curva \mathcal{C} , que tiene grado 4, es aproximada por $\tilde{\mathcal{C}}$ que tiene grado 2. Por tanto, \mathcal{C} no es perfecta.

Así, $\tilde{\mathcal{C}}$ se aproxima a \mathcal{C} en cada hoja de la rama B (véase Observación 1.3.11, Apartado 3). Concretamente, B tiene dos hojas reales y dos hojas complejas [33, Obs. 4.7]. Las hojas reales son convergentes con la hoja $\tilde{r}_1(z) = z^{1/2}$ de la parábola $\tilde{\mathcal{C}}$ y las hojas complejas son convergentes con la hoja $\tilde{r}_2(z) = -z^{1/2}$ de $\tilde{\mathcal{C}}$.

En la Figura 1.9 se representa la curva \mathcal{C} y la asíntota $\tilde{\mathcal{C}}$.

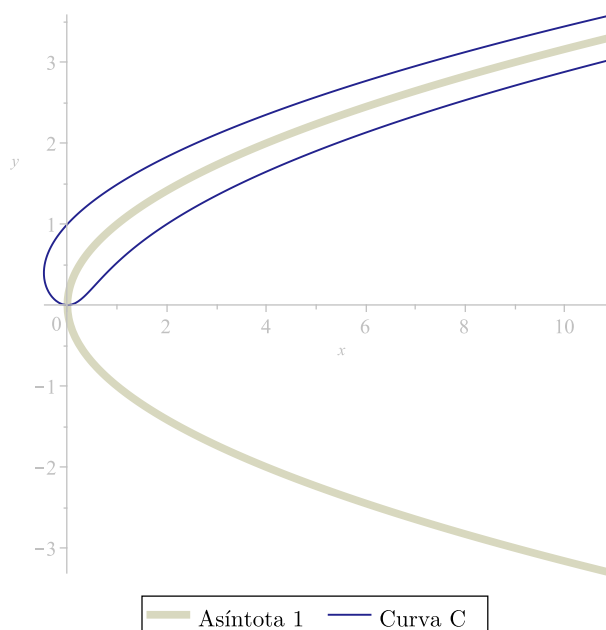


Figura 1.9: Asíntota $\tilde{\mathcal{C}}$ de la curva no perfecta \mathcal{C} .

Por tanto, aunque Proposición 1.7.1 asevera que una curva perfecta tiene solo una rama infinita, esta condición no asegura que la curva sea perfecta. En consecuencia, el Ejemplo 1.7.2 muestra que esta condición no es suficiente.

Seguidamente, en la Proposición 1.7.4 se proporciona una caracterización de curvas perfectas cuya demostración puede verse en [31, Prop. 3]. Para ello, primero se observan algunas propiedades obtenidas de las definiciones y resultados presentados anteriormente; a partir de

los cuales se introduce la Proposición 1.7.6, que establece una condición suficiente para que una curva sea perfecta.

Observación 1.7.3.

1. Dos curvas perfectas aproximantes tienen el mismo grado (véase Definición 1.5.1).
2. Dos asíntotas que aproximan a la misma rama tienen el mismo grado (véase Apartado 1 anterior y el Corolario 1.3.12).
3. Cualquier asíntota que aproxima a una curva en una rama de grado n tiene grado n (véase Lema 1.6.2 y Teorema 1.6.3).
4. De la afirmación anterior y del Lema 1.5.4 se deduce que si B es una rama de una curva perfecta, entonces $\nu(B) = \text{grado}(B)$.

Proposición 1.7.4. Sea \mathcal{C} una curva algebraica plana de grado d . La curva \mathcal{C} es perfecta si y solo si tiene una única rama infinita B y $\text{grado}(B) = d$.

Ejemplo 1.7.5. En este ejemplo, se prueba que la curva plana \mathcal{C} , definida por el polinomio irreducible $f(x, y) = y^n - x^m \in \mathbb{R}[x, y]$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, es perfecta.

Para ello, primero se observa que $\text{mcd}(n, m) = 1$. De lo contrario, $n = n_1 k$, $m = m_1 k$, $k \geq 2$ y, por tanto, $(y^{n_1} - x^{m_1})$ dividiría a f , lo cual es imposible porque f es irreducible.

Obsérvese que \mathcal{C} tiene una única rama infinita B , ya que admite la parametrización polinomial (t^n, t^m) . Además, B viene dada por $r(z) = z^{m/n}$ y, por tanto, $\text{grado}(B) = n$. Entonces, aplicando la Proposición 1.7.4 se concluye que \mathcal{C} es perfecta.

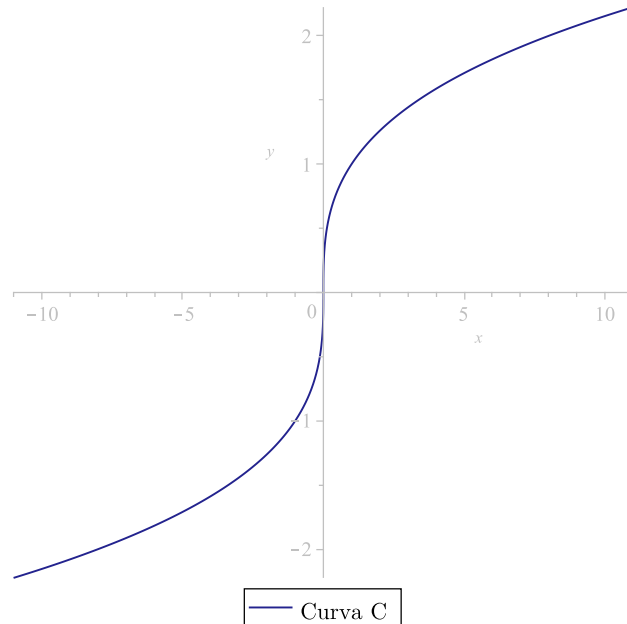


Figura 1.10: Curva \mathcal{C} perfecta.

La Proposición 1.7.6 establece una condición suficiente para que una curva sea perfecta, la cual puede comprobarse sin calcular ninguna rama infinita. La demostración de esta proposición

puede encontrarse en [31, Prop. 4]. Para entenderla mejor, se recuerda que un punto P es una singularidad de multiplicidad l en \mathcal{C} , si y solo si todas las derivadas de su polinomio implícito hasta orden $l - 1$ se anulan en P y alguna de orden l es distinta de cero. Para leer este concepto desde una parametrización véase [64].

Proposición 1.7.6. *Sea \mathcal{C} una curva algebraica plana con un único punto infinito P y sea P regular (es decir, P no es una singularidad), entonces \mathcal{C} es perfecta.*

Observación 1.7.7. *El recíproco de la Proposición 1.7.6 no es cierto. Por ejemplo, la curva definida por el polinomio $f(x, y) = y^3 - x$ es una curva perfecta, en la que su único punto de infinito $(1 : 0 : 0)$ es una singularidad (véase Figura 1.10).*

1.8 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas

Tras haber abordado las curvas algebraicas definidas implícitamente, en esta sección se presenta un método para calcular las ramas infinitas y las g-asíntotas de una curva algebraica plana a partir de su representación paramétrica, basándose en el desarrollo en series de Puiseux y de sus ramas infinitas [34, Sec. 5].

Sea \mathcal{C} una curva algebraica plana definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

Se asume que $(0 : 1 : 0)$ no es un punto de infinito de la curva \mathcal{C} . En caso contrario, se aplicaría un cambio lineal de coordenadas.

Si \mathcal{C}^* representa la curva proyectiva asociada a \mathcal{C} , se tiene que la parametrización de \mathcal{C}^* está dada por $\mathcal{P}^*(s) = (p_1(s) : p_2(s) : 1)$ o, su equivalente,

$$\mathcal{P}^*(s) = \left(1 : \frac{p_2(s)}{p_1(s)} : \frac{1}{p_1(s)} \right). \quad (1.7)$$

Para calcular las g-asíntotas de \mathcal{C} , primero se necesita determinar las ramas infinitas de \mathcal{C} . Esto es, los conjuntos $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$, donde $r(z) = z\varphi(z^{-1})$.

Para ello, teniendo en cuenta la Definición 1.2.1, se considera $f(z, r(z)) = F(1 : \varphi(z^{-1}) : z^{-1}) = F(1 : \varphi(t) : t) = 0$ alrededor de $t = 0$, donde $t = z^{-1}$ y F es el polinomio que define implícitamente a la curva \mathcal{C}^* . Obsérvese que se parte de la parametrización $\mathcal{P}^*(s)$ de \mathcal{C}^* y, entonces, $F(\mathcal{P}^*(s)) = F(1 : p_2(s)/p_1(s) : 1/p_1(s)) = 0$.

De forma intuitiva, para calcular las ramas infinitas de \mathcal{C} y, en particular las series φ , es necesario escribir la parametrización $\mathcal{P}^*(s)$ de la forma $(1 : \varphi(t) : t)$ alrededor de $t = 0$. La idea es buscar un valor del parámetro s , expresado como $\ell(t) \in \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$, tal que $\mathcal{P}^*(\ell(t)) = (1 : \varphi(t) : t)$ alrededor de $t = 0$.

Por consiguiente, siguiendo el razonamiento anterior, se deduce que primero se ha de considerar la ecuación $1/p_1(s) = t$, o lo que es lo mismo,

$$p_{12}(s) - tp_{11}(s) = 0 \quad (1.8)$$

y resolverla en la variable s alrededor de $t = 0$.

Del Teorema de Puiseux 1.1.5 se tienen las soluciones $\ell_1(t), \ell_2(t), \dots, \ell_k(t) \in \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$, tales que, $p_{12}(\ell_i(t)) - tp_{11}(\ell_i(t)) = 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$ en un entorno de $t = 0$. Esto es, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe $M_i \in \mathbb{R}^+$ tal que los puntos $(1 : \varphi_i(t) : t)$ o sus equivalentes, $(t^{-1} : t^{-1}\varphi_i(t) : 1)$, donde

$$\varphi_i(t) = \frac{p_2(\ell_i(t))}{p_1(\ell_i(t))}, \quad (1.9)$$

están en \mathcal{C}^* para $|t| < M_i$. Nótese que $\mathcal{P}^*(\ell(t)) \in \mathcal{C}^*$ ya que \mathcal{P}^* es una parametrización de la curva \mathcal{C}^* y que, además, $\varphi_i(t)$ es una serie de Puiseux, ya que $p_2(\ell_i(t))$ y $p_1(\ell_i(t))$ pueden escribirse como series de Puiseux.

Finalmente, si se fija $z = t^{-1}$, se obtienen los puntos $(z, r_i(z))$, donde $r_i(z) = z\varphi_i(z^{-1})$ están en \mathcal{C} para $|z| > M_i^{-1}$. Así, las ramas infinitas de \mathcal{C} son los conjuntos $B_i = \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^3 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i^{-1}\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Observación 1.8.1. *Obsérvese que las series $\ell_i(t)$ satisfacen que $p_1(\ell_i(t))t = 1$, para $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces, de la Ecuación 1.9 se tiene que*

$$\varphi_i(t) = \frac{p_2(\ell_i(t))}{p_1(\ell_i(t))} = p_2(\ell_i(t))t \quad \text{y} \quad r_i(z) = z\varphi_i(z^{-1}) = p_2(\ell_i(z^{-1})).$$

Una vez que se han obtenido las ramas infinitas, se pueden calcular las correspondientes g-asíntotas, eliminando simplemente los términos de $r_i(z)$ con exponente negativo.

El Algoritmo 1.3 calcula las ramas infinitas de una curva algebraica plana, expresada en su forma paramétrica, y devuelve las asíntotas correspondientes.

Data: \mathcal{C} , curva algebraica plana irreducible definida por $\mathcal{P}(s)$, /* Ecuación 1.6 */

$$\mathcal{P}(s) \leftarrow (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2,$$

$$p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \text{ mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, i = 1, 2.$$

Result: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_i$, $i \leftarrow 1, \dots, k$.

begin

```

 $\mathcal{P}^*(s) \leftarrow \text{ParametrizaciónProyectiva}(\mathcal{P}(s))$  /* Ecuación 1.7 */
 $P_1, \dots, P_m \leftarrow \text{PuntosInfinito}(\mathcal{P}^*(s))$ 
 $\ell_1(t), \ell_2(t), \dots, \ell_k(t) \leftarrow \text{SeriesPuiseux}(p_{12}(s) - tp_{11}(s) = 0, t = 0, s)$  /* Ec. 1.8 */
foreach  $\ell_i(t)$  de  $P_i$  do
     $r_i(z) \leftarrow p_2(\ell_i(z^{-1})) \in \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle, z \leftarrow t^{-1}$  /* Observación 1.8.1 */
     $B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{r}_i(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(r_i(z))$  /* Ecuación 1.4 */
     $n_i \leftarrow \text{grado}(B_i)$  /* Definición 1.5.6 */
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, \tilde{r}_i(t^{n_i})) \in \mathbb{C}[t]^2$  es propia /* Lema 1.6.1 */
return  $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$ ,  $i \leftarrow 1, \dots, k$ 

```

Algoritmo 1.3: Construcción de asíntotas de una curva \mathcal{C} definida de forma paramétrica.

Observación 1.8.2.

1. Algunas de las soluciones $\ell_1(t), \ell_2(t), \dots, \ell_k(t) \in \mathbb{C} \ll t \gg$ podrían pertenecer a la misma clase de conjugación. En este caso, solo se consideraría una solución para cada una

de estas clases. La asíntota que se obtiene como resultado, \tilde{C} , es independiente de las soluciones $\ell_1(t), \ell_2(t), \dots, \ell_k(t) \in \mathbb{C} \ll t \gg$ y de la hoja elegida para definir la rama B .

2. Antes de aplicar el algoritmo, la curva de entrada se debe preparar de modo que $(0 : 1 : 0) \notin C^*$, evitando así la posibilidad de que la curva tenga ramas infinitas de tipo II, [33, Def. 3.3].

Como alternativa se podría aplicar primero el algoritmo para $\mathcal{P}(t)$ y después para $\bar{\mathcal{P}}(t) = (p_2(t), p_1(t)) \in \mathbb{R}(t)^2$, en donde se habría aplicado un cambio lineal de coordenadas.

En este último caso, si se obtiene la asíntota definida por la parametrización propia de $\bar{\mathcal{P}}(t) = (h_1(t), h_2(t))$, es necesario deshacer el cambio de coordenadas, para obtener la asíntota definida por la parametrización propia de $\tilde{\mathcal{P}}(t) = (h_2(t), h_1(t))$.

Algunas de las asíntotas obtenidas en $\bar{\mathcal{P}}(t)$ pueden coincidir con las de $\mathcal{P}(t)$, pero también podrían aparecer nuevas asíntotas que se corresponderían con asíntotas verticales, véanse los Corolarios 2.1.5 y 2.1.6.

En los siguientes ejemplos se consideran curvas paramétricas planas con varias ramas infinitas. En ambos casos, se aplica el Algoritmo 1.3 para obtener estas ramas y calcular sus correspondientes g-asíntotas.

Ejemplo 1.8.3. Sea C la curva algebraica plana definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^2 + 5}{s(s-2)^2}, \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s-2)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 1.3 para calcular las asíntotas de la curva C .

Partiendo de las soluciones de Puiseux de la ecuación $p_{12}(s) - tp_{11}(s) = 0$ alrededor de $t = 0$, obtenidas mediante el paquete `algcures` de la herramienta software Maple, se tiene que

$$\ell_1(t) = \frac{975}{256}t^3 + \frac{25}{16}t^2 + \frac{5}{4}t \quad y$$

$$\ell_2(t) = 2 + \frac{576284941\sqrt{2}}{254803968}t^{7/2} - \frac{975}{512}t^3 + \frac{370439\sqrt{2}}{442368}t^{5/2} + \dots$$

Iteración 1: Sea $\ell_1 = \frac{975}{256}t^3 + \frac{25}{16}t^2 + \frac{5}{4}t + \dots$

$$1. \quad r_1(z) = -\frac{2}{5}z - \frac{5}{4} - \frac{9}{8}z^{-1} - \frac{1405}{256}z^{-2} + \dots$$

$$2. \quad \tilde{r}_1(z) = -\frac{2}{5}z - \frac{5}{4}.$$

$$3. \quad \tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4} \right).$$

Iteración 2: Sea $\ell_2(t) = 2 + \frac{576284941\sqrt{2}}{254803968}t^{7/2} - \frac{975}{512}t^3 + \frac{370439\sqrt{2}}{442368}t^{5/2} + \dots$

$$1. \quad r_2(z) = \frac{11\sqrt{2}\sqrt{z}}{6} + \frac{65}{72} - \frac{1321\sqrt{2}}{3456\sqrt{z}} + \frac{9}{16z} - \frac{1893395\sqrt{2}}{3981312z^{3/2}} + \frac{495}{512z^2} + \dots$$

$$2. \tilde{r}_2(z) = \frac{11\sqrt{2}\sqrt{z}}{6} + \frac{65}{72}.$$

$$3. \tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}t}{6} + \frac{65}{72} \right).$$

Las asíntotas resultantes son las curvas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ definidas por las siguientes parametrizaciones propias, cuya representación gráfica se muestra en la Figura 1.11:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4} \right) \in \mathbb{C}[t]^2.$
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}t}{6} + \frac{65}{72} \right) \in \mathbb{C}[t]^2.$

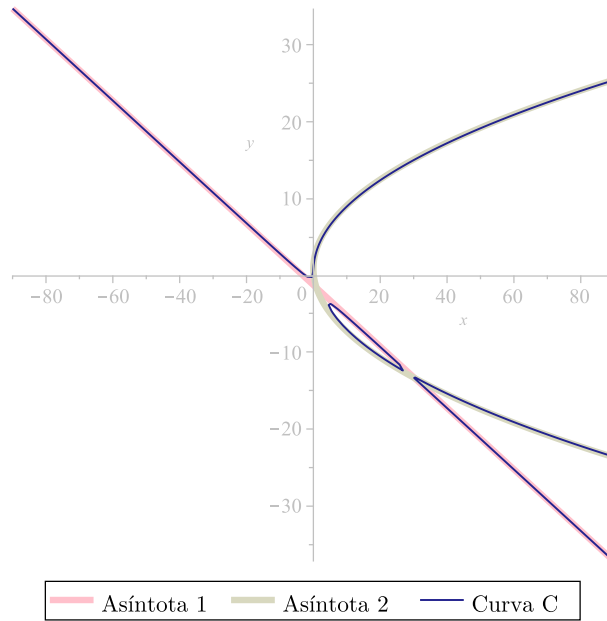


Figura 1.11: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} expresada en forma paramétrica.

Ejemplo 1.8.4. Sea \mathcal{C} la curva algebraica plana definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^3 + 2s - 1}{(s-1)(s-2)^3}, \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s-2)^2(s-1)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 1.3 para calcular las asíntotas de \mathcal{C} .

Se parte de las soluciones de Puiseux de la ecuación $p_{12}(s) - tp_{11}(s) = 0$ alrededor de $t = 0$, obtenidas mediante el paquete `algcures` de la herramienta software Maple.

Se tiene que

$$\ell_1(t) = 2 - \frac{5815633199150}{1578460851} t^{14/3} + \frac{51050175471467}{17363069361} t^{13/3} - \frac{7102}{3} t^4 + \dots \quad y$$

$$\ell_2(t) = 7102t^4 - 362t^3 + 22t^2 - 2t + 1.$$

A continuación, para cada solución de Puiseux, se calculan las parametrizaciones de sus asíntotas correspondientes, a partir de las ramas infinitas.

Iteración 1: Sea $\ell_1(t) = 2 - \frac{5815633199150}{1578460851} t^{14/3} + \frac{51050175471467}{17363069361} t^{13/3} + \dots$

$$1. r_1(z) = \frac{21}{11} z^{2/3} + \frac{35}{121} z^{1/3} + \frac{250}{121} - \frac{1852}{1331z^{1/3}} + \frac{21257}{14641z^{2/3}} + \dots$$

$$2. \tilde{r}_1(z) = \frac{21}{11} z^{2/3} + \frac{35}{121} z^{1/3} + \frac{250}{121}.$$

$$3. \tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t^3, \frac{21}{11} t^2 + \frac{35}{121} t + \frac{250}{121} \right).$$

Iteración 2: Sea $\ell_2(t) = 7102t^4 - 362t^3 + 22t^2 - 2t + 1$.

$$1. r_2(z) = -2z - 6 + 50z^{-1} - 806z^{-2} - 137856z^{-3} - 185484z^{-4} + \dots$$

$$2. \tilde{r}_2(z) = -2z - 6.$$

$$3. \tilde{\mathcal{P}}_2(t) = (t, -2t - 6).$$

Las asíntotas resultantes son las curvas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ definidas por las siguientes parametrizaciones propias, cuya representación gráfica se muestra en la Figura 1.12:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t^3, \frac{21}{11} t^2 + \frac{35}{121} t + \frac{250}{121} \right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = (t, -2t - 6).$

Observación 1.8.5. Obsérvese que cuando se calculan las series $\ell_i(t)$ han de truncarse los términos infinitos para poder manejarla, lo cual puede distorsionar el cálculo de las series $r_i(z)$. Sin embargo, esta distorsión no debería afectar a los términos en $r_i(z)$. De hecho, el número de términos afectados depende del número de términos que se hayan considerado en $\ell_i(t)$.

No obstante, nótese que no es necesario conocer la expresión completa de $r_i(z)$, sino únicamente los términos con exponente no negativo.

En [34, Prop. 2] se prueba que pueden obtenerse los términos con exponente no negativo de $r_i(z)$, considerando únicamente los $2 \text{ grado}(p_1) + 1$ términos de $\ell_i(t)$.

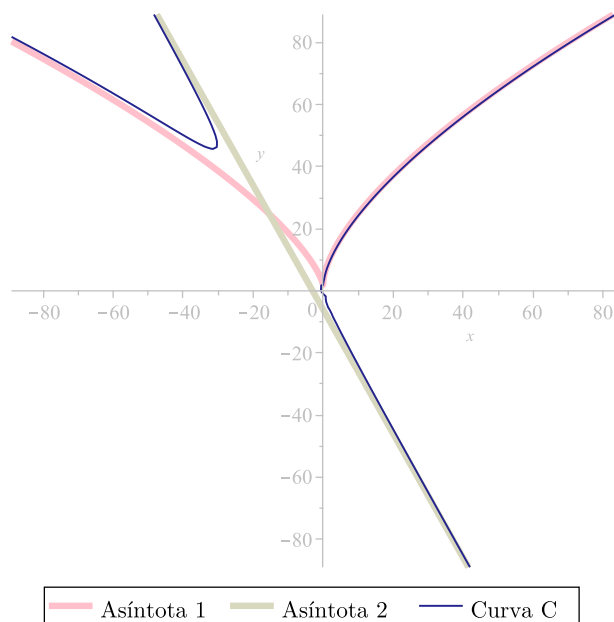


Figura 1.12: Asíntotas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 de la curva C expresada en forma paramétrica.

1.9 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el estado del arte y los principios básicos que fundamentan el estudio de las curvas algebraicas planas, definidas en el cuerpo de los números reales, tanto en su forma implícita como paramétrica. También se han expuesto determinados métodos simbólicos y varios algoritmos, que pueden aplicarse a este campo de la geometría algebraica, cuyo objetivo es obtener resultados para el análisis de las propiedades de las curvas planas y que permiten determinar su comportamiento en el infinito. Todo ello, puede extenderse a curvas algebraicas definidas, tanto en el espacio afín como en el espacio proyectivo, o también cuando se trata de curvas expresadas en su forma implícita o paramétrica.

Así, los conceptos de puntos de infinito y de convergencia de ramas infinitas han llevado a describir el comportamiento asintótico de dos curvas, es decir, cuando ambas curvas se aproximan entre sí en todas sus ramas infinitas. Además se ha introducido la noción de curva perfecta, como aquella que no puede ser aproximada por otra curva de menor grado.

Con todo lo anterior, se ha introducido la idea clave de esta investigación, el concepto de asíntota generalizada o g-asíntota, es decir, una curva perfecta que aproxima a la curva de entrada en alguna de sus ramas infinitas.

Cada una de las ideas conceptualizadas en este capítulo, se acompaña de un ejemplo ilustrativo que facilita su comprensión y que aclara los resultados obtenidos tras la aplicación de los métodos expuestos.

Consecuentemente, para complementar estos resultados, se han ampliado los casos de estudio, incluyéndolos en el Apéndice B de esta tesis. Además, el Apéndice C presenta los algoritmos vistos en este y en sucesivos capítulos.

Así, el Algoritmo 1.1 comprueba el comportamiento asintótico de dos curvas, es decir, si se aproximan todas sus ramas infinitas entre sí. Por otro lado, el Algoritmo 1.2 calcula las asíntotas de una curva a partir de su expresión implícita, considerando las ramas infinitas que convergen con la curva dada. Finalmente, el Algoritmo 1.3 realiza la construcción de las asíntotas a partir de la expresión paramétrica de la curva. Para estos dos últimos algoritmos se requiere realizar el desarrollo en series de Puiseux, lo que añade una importante carga computacional en la ejecución de los procedimientos implementados mediante la orden (`algcurves : -puiseux`) del sistema de álgebra computacional Maple, y que pueden consultarse en el Apéndice D de esta memoria.

Así, con el objetivo de mejorar la eficiencia de estos algoritmos, en el Capítulo 2 se plantean alternativas más eficientes y que mejoran el rendimiento computacional, empleando métodos basados en el cálculo de límites de funciones racionales y de ciertas derivadas de funciones univariadas. Los algoritmos estudiados en el presente capítulo permiten establecer criterios comparativos respecto a las mejoras del Capítulo 2.

Finalmente, los fundamentos aquí expuestos pueden ampliarse al espacio n -dimensional. Así mismo, los resultados presentados en este capítulo, sientan las bases que permitirán avanzar en la caracterización y el estudio del comportamiento asintótico de las superficies algebraicas estudiadas en el Capítulo 3.

Capítulo 2

Estudio de las ramas y asíntotas de curvas paramétricas

La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples.

Stan Gudder

En el capítulo precedente se han revisado los conceptos de ramas infinitas (Sección 1.2), ramas convergentes y curvas aproximantes (Sección 1.3), que junto con la noción de curva perfecta (Sección 1.5), han permitido introducir la definición de g -asíntota [31, Def. 5], generalizando el concepto clásico de asíntota y ampliando sus métodos de cálculo.

Como se comentó en el capítulo anterior, las asíntotas generalizadas constituyen una herramienta fundamental para analizar el comportamiento de una curva en el infinito. Es por ello que en el Capítulo 1, se han presentado dos soluciones algorítmicas que permiten construir las asíntotas de una curva algebraica plana. Así, el Algoritmo 1.2 realiza el cálculo de las g -asíntotas de una curva definida implícitamente, mientras que el Algoritmo 1.3 las calcula a partir de la ecuación expresada en forma paramétrica. En ambas soluciones se utiliza el desarrollo en series de Puiseux como herramienta fundamental para el cálculo de las ramas infinitas de una curva definida tanto implícitamente, como paramétricamente. Además, aunque estos métodos han sido desarrollados para caso de curvas planas [31–33], también en [34] se muestra la idea de cómo pueden adaptarse al caso de curvas racionales en el espacio n -dimensional.

Uno de los objetivos de este capítulo es proporcionar soluciones computacionales que mejoren el rendimiento del Algoritmo 1.2 y del Algoritmo 1.3 en cuanto a su eficacia y rendimiento.

A tal efecto, se presentan métodos basados en el cálculo de límites de funciones racionales construidas a partir de una parametrización racional dada, o bien, se determinan ciertas derivadas de funciones univariadas construidas a partir de la parametrización de entrada.

De manera más precisa, de los Teoremas 2.1.1 y 2.2.1 se obtienen fórmulas muy simples que permiten construir, no solo las parametrizaciones propias que describen a las asíntotas

generalizadas de la curva racional *input*, sino de toda la rama, evitando así el cálculo de los desarrollos en series de Puiseux. De hecho, aunque no se detalla en esta tesis, en el trabajo [2] se prueba que estas técnicas pueden aplicarse a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales, además del cálculo completo de una rama [1, 2]. Además, siguiendo las ideas presentadas en [34], los resultados mostrados pueden desarrollarse de igual manera al caso n -dimensional.

Conviene subrayar que estos métodos, que se detallan en los Algoritmos 2.1 y 2.2 respectivamente, son de gran interés, puesto que hasta el momento no había herramientas para estudiar y caracterizar a las curvas algebraicas planas en el infinito.

Así mismo, se proporciona un análisis comparativo de los tiempos que los procesos permanecen en el sistema, así como el grado de utilización de los recursos hardware de la máquina, tales como el microprocesador y la memoria, necesarios para construir las asíntotas de una curva algebraica plana, según las soluciones proporcionadas en el Capítulo 1 y en las investigaciones del presente capítulo.

Para este análisis, se parte de las catorce curvas del Apéndice B, cada una de ellas con diferentes características, de las que se han obtenido las principales propiedades, tales como el grado de la curva, sus raíces y su multiplicidad, el número de términos, la cantidad de ramas que dan lugar a las g -asíntotas y el grado mayor de las asíntotas obtenidas. Además, se han calculado los puntos de infinito que dan lugar a cada una de las asíntotas construidas a partir de los algoritmos presentados.

Este análisis ha permitido demostrar que los Algoritmos 2.1 y 2.2 mejoran los resultados obtenidos con respecto a los Algoritmos 1.2 y 1.3, proporcionando una solución computacional más ligera y eficiente, que puede encontrarse el trabajo [3].

Finalmente, y como segundo objetivo esencial de este capítulo, en la Sección 2.4 se obtienen resultados de gran interés consecuencia de las fórmulas presentadas en el Algoritmo 2.2. Concretamente, se demuestran resultados que relacionan de manera clara el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada con los puntos de infinito, su multiplicidad y su carácter (ordinario o no ordinario). Además, a partir de las relaciones anteriores, se muestra cual es la forma de grado máximo del polinomio que define implícitamente a la curva *input* a partir de la cual pueden calcularse los conceptos anteriormente mencionados. Estos resultados permiten, entre otras cuestiones, construir todas las familias de las curvas que tienen ciertas asíntotas predefinidas, tal como se describe en [4].

A continuación se presenta la estructura de este capítulo:

- En primer lugar, la Sección 2.1 presenta el Teorema 2.1.1, con el que se expone un método que mejora la eficiencia de los algoritmos descritos en el Capítulo 1. La solución aportada permite construir las g -asíntotas, así como las ramas, de una curva algebraica plana, expresada en forma paramétrica. Este método se basa en el cálculo de límites simples de funciones racionales, a la parametrización de la curva de entrada, cuya implementación incluida en el Apéndice D, se basa en el pseudocódigo propuesto en el Algoritmo 2.1.

Así mismo, en esta sección incluye ejemplos que ilustran el método propuesto.

- Siguiendo en la misma línea de mejora de la eficiencia computacional, en la Sección 2.2 se presenta el Teorema 2.2.1. Con este método, se pueden calcular las g -asíntotas, así como las ramas, de una curva algebraica plana definida por una parametrización, mediante la determinación de algunas derivadas de funciones univariadas, construidas a partir de la expresión paramétrica de la curva de entrada.

La aplicación de este método está reflejada en el pseudocódigo del Algoritmo 2.2 y en su implementación, véase Apéndice D, también se acompaña con varios ejemplos ilustrativos.

- La Sección 2.3 compara el rendimiento computacional de los algoritmos 1.2 y 1.3, con los algoritmos propuestos en esta investigación, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2.

Para ello se propone un conjunto de casos de estudio, las curvas planas reales del Apéndice B.1, con las que se evalúa el grado de sobrecarga de los recursos hardware de la máquina. Para ello, se computa el tiempo de uso del microprocesador, el tiempo real del estancia en el sistema y la cantidad de memoria empleada al ejecutar cada uno de los procedimientos con el software de álgebra computacional Maple. Así se observa que el mayor rendimiento lo proporciona el Algoritmo 2.2, seguido del Algoritmo 2.1, y de los algoritmos 1.2 y 1.3.

Conviene recordar que, estos últimos, calculaban las ramas infinitas de la curva mediante el desarrollo en series de Puiseux, introduciendo un alto grado de sobrecarga en el sistema.

- Retomando los hallazgos de la Sección 2.2, se deducen algunos resultados de gran interés, que se describen en la Sección 2.4, y que permiten estudiar con más profundidad y relacionar los conceptos introducidos previamente, tales como el índice de ramificación y el grado de la g -asíntota, así como el cálculo de la forma infinita, la multiplicidad y el carácter de los puntos infinitos.
- Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas en este capítulo, destacando que los métodos y algoritmos, aquí introducidos, pueden aplicarse a curvas n -dimensionales [34]. También, estas técnicas pueden aplicarse a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales, además del cálculo completo de una rama [1, 2]. Del mismo modo, estas investigaciones podrían aplicarse en un futuro a superficies, cuyos primeros resultados se proporcionan en el Capítulo 3.

Para concluir, se subraya que estos resultados han sido publicados en [1] y hay tres artículos en proceso de revisión [2–4].

2.1 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con límites

Tal como se ha descrito en el Capítulo 1, las asíntotas generalizadas constituyen una herramienta fundamental para analizar el comportamiento de una curva en el infinito. En dicho capítulo, se presentaron dos soluciones algorítmicas, una para el caso de curvas algebraicas planas definidas implícitamente y otra para el caso de curvas paramétricas.

En ambos casos, el cálculo de las g -asíntotas se realizaba a partir del cálculo de las ramas infinitas de las curvas dadas, mediante series de Puiseux. Así, el Algoritmo 1.2 realizaba el cálculo de las g -asíntotas de una curva definida implícitamente, mientras que el Algoritmo 1.3 construía estas asíntotas generalizadas a partir de la ecuación de la curva expresada en forma paramétrica.

En esta sección se presenta un método que mejora los resultados de los algoritmos previamente mencionados, proporcionando una solución computacional más ligera y eficiente, que puede aplicarse al caso de curvas algebraicas planas expresadas de forma paramétrica (véase más adelante, Algoritmo 2.1). Además, aunque esta solución está desarrollada para el caso de curvas algebraicas planas, se puede generalizar trivialmente al caso de curvas racionales definidas en el espacio n -dimensional. La idea de esta generalización también puede ampliarse con más detalle al caso de curvas no necesariamente racionales, como se describe en el artículo [2].

A continuación, se considera una curva racional plana, \mathcal{C} , definida por una parametrización según la Ecuación 1.6:

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2.$$

En lo que sigue, se asume sin pérdida de generalidad que $\text{grado}(p_{i1}(s)) \leq \text{grado}(p_{i2}(s)) = d_i$, $i = 1, 2$ (en otro caso, se aplica un cambio lineal de variables). Con esto, se tiene que $\lim_{s \rightarrow \infty} p_i(s) \neq \infty$, $i = 1, 2$ y las ramas infinitas de \mathcal{C} estarán representadas cuando la variable s se mueve alrededor de las diferentes raíces de los denominadores $p_{12}(s)$ y $p_{22}(s)$. De hecho, cada una de estas raíces da como resultado una rama infinita.

Así, el siguiente teorema muestra cómo obtener una g -asíntota para cada una de estas ramas infinitas, mediante el cálculo de los límites simples de funciones racionales construidas a partir de $\mathcal{P}(s)$.

Teorema 2.1.1. *Sea \mathcal{C} una curva definida por una parametrización (véase Ecuación 1.6)*

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2,$$

donde $\text{grado}(p_{i1}(s)) \leq \text{grado}(p_{i2}(s)) = d_i$, $i = 1, 2$. Sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{i2}(s) = (s - \tau)^{n_i} \bar{p}_{i2}(s)$ donde $\bar{p}_{i2}(\tau) \neq 0$, $i = 1, 2$, y $n_i \geq 1$, y sea B la rama infinita correspondiente.

Una g -asíntota de la curva \mathcal{C} en la rama B viene definida por la parametrización

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t^{n_1}, a_{n_2} t^{n_2} + a_{n_2-1} t^{n_2-1} + \dots + a_0),$$

donde

$$\begin{aligned} a_{n_2} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_2}(s), & f_{n_2}(s) &= \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} \\ a_{n_2-1} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_2-1}(s), & f_{n_2-1}(s) &= p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2}(s) - a_{n_2}) \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n_2-i} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_2-i}(s), & f_{n_2-i}(s) &= p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2-i+1}(s) - a_{n_2-i+1}) \\ & \vdots & & \vdots \\ a_0 &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_0(s), & f_0(s) &= p_1(s)^{1/n_1} (f_1(s) - a_1) \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, se recuerda que al principio de la Sección 1.8 se mostraba cómo obtener ramas infinitas de una curva algebraica plana, mediante el cálculo de las soluciones de Puiseux de $p_{12}(s) - tp_{11}(s) = 0$, alrededor de $t = 0$. Sean $\ell_1(s), \ell_2(s), \dots, \ell_k(s) \in \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$ esas soluciones. Por tanto, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ existe $M_i > 0$ tal que $p_{12}(\ell_i(s)) - tp_{11}(\ell_i(s)) = 0$ para $|t| < M_i$.

En particular, asumiendo sin pérdida de generalidad que $s = 0$, se tiene que $p_{12}(\ell_i(0)) = 0$. Esto es, cada solución de Puiseux $\ell_i(s)$ está asociada a una raíz de $p_{12}(s)$ dada por $\tau_i = \ell_i(0)$.

A continuación, sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{i2}(s) = (s - \tau)^{n_i} \bar{p}_{i2}(s)$ con $\bar{p}_{i2}(\tau) \neq 0$, $i = 1, 2$, y sea $\ell(s)$ la correspondiente solución de Puiseux. Entonces, $\ell(0) = \tau$ y se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow \tau} \mathcal{P}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{P}(\ell(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (p_1(\ell(s)), p_2(\ell(s))) = \lim_{s \rightarrow 0} (1/s, p_2(\ell(s))),$$

ya que por la Observación 1.8.1, $p_1(\ell(s))s = 1$ en un entorno cercano a $s = 0$.

Además, este límite se puede expresar como sigue:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (1/s, p_2(\ell(s))) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z, p_2(\ell(1/z))) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z, r(z)).$$

Se recuerda que una g-ásintota que se aproxime a la rama infinita B , viene dada por

$$\tilde{P}(t) = (t^n, \tilde{r}(t^n)) = (t^{n_1}, a_{n_2}t^{n_2} + a_{n_2-1}t^{n_2-1} + \dots + a_0),$$

donde $\tilde{r}(z)$ puede calcularse a partir de $r(z)$, eliminando todos los términos con exponente (véase Sección 1.6). En consecuencia, se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow \tau} \mathcal{P}(s) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z, r(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z, \tilde{r}(z)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}(t).$$

En lo sucesivo, se utilizará esta igualdad para obtener los coeficientes a_{n_2-i} para $i \in \{0, \dots, n_2\}$ del polinomio $\tilde{r}(z)$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \tau} \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2}t^{n_2} + a_{n_2-1}t^{n_2-1} + \dots + a_0}{(t^{n_1})^{n_2/n_1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2}t^{n_2} + a_{n_2-1}t^{n_2-1} + \dots + a_0}{t^{n_2}} = a_{n_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \tau} p_1(s)^{1/n_1} \left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} - a_{n_2} \right) &= \lim_{s \rightarrow \tau} \frac{p_2(s) - a_{n_2}p_1(s)^{n_2/n_1}}{p_1(s)^{(n_2-1)/n_1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2}t^{n_2} + a_{n_2-1}t^{n_2-1} + \dots + a_0 - a_{n_2}(t^{n_1})^{n_2/n_1}}{(t^{n_1})^{(n_2-1)/n_1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2-1}t^{n_2-1} + \dots + a_0}{t^{n_2-1}} = a_{n_2-1}, \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow \tau} p_1(s)^{1/n_1} \left(p_1(s)^{1/n_1} \left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} - a_{n_2} \right) - a_{n_2-1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow \tau} \frac{p_2(s) - a_{n_2} p_1(s)^{n_2/n_1} - a_{n_2-1} p_1(s)^{(n_2-1)/n_1}}{p_1(s)^{(n_2-2)/n_1}} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2} t^{n_2} + a_{n_2-1} t^{n_2-1} + \dots + a_0 - a_{n_2} (t^{n_1})^{n_2/n_1} - a_{n_2-1} (t^{n_1})^{(n_2-1)/n_1}}{(t^{n_1})^{(n_2-2)/n_1}} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2-2} t^{n_2-2} + \dots + a_0}{t^{n_2-2}} = a_{n_2-2},
\end{aligned}$$

y, razonando de forma análoga, se concluye que

$$\begin{aligned}
&\lim_{s \rightarrow \tau} p_1(s)^{1/n_1} \left(p_1(s)^{1/n_1} \dots \left(p_1(s)^{1/n_1} \left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} - a_{n_2} \right) - a_{n_2-1} \right) - \dots - a_{n_2-i} \right) = \\
&= \lim_{s \rightarrow \tau} \frac{p_2(s) - a_{n_2} p_1(s)^{n_2/n_1} - \dots - a_{n_2-i+1} p_1(s)^{(n_2-i+1)/n_1}}{p_1(s)^{(n_2-i)/n_1}} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2} t^{n_2} + a_{n_2-1} t^{n_2-1} + \dots + a_0 - a_{n_2} (t^{n_1})^{n_2/n_1} - \dots - a_{n_2-i+1} (t^{n_1})^{(n_2-i+1)/n_1}}{(t^{n_1})^{(n_2-i)/n_1}} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{n_2-i} t^{n_2-i} + \dots + a_0}{t^{n_2-i}} = a_{n_2-i}, \text{ para } i = 0, \dots, n_2.
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} = f_{n_2}(s),$$

$$p_1(s)^{1/n_1} \left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} - a_{n_2} \right) = p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2}(s) - a_{n_2}) = f_{n_2-1}(s),$$

$$p_1(s)^{1/n_1} \left(p_1(s)^{1/n_1} \left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} - a_{n_2} \right) - a_{n_2-1} \right) = p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2-1}(s) - a_{n_2-1}) = f_{n_2-2}(s),$$

$$\begin{aligned}
&p_1(s)^{1/n_1} \left(p_1(s)^{1/n_1} \dots \left(p_1(s)^{1/n_1} \left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} - a_{n_2} \right) - a_{n_2-1} \right) - \dots - a_{n_2-i} \right) = \\
&= p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2-i+1}(s) - a_{n_2-i+1}) = f_{n_2-i}(s).
\end{aligned}$$

□

Observación 2.1.2. De la construcción anterior se deduce que cada raíz τ de $p_{12}(t)$ da como resultado una rama infinita y, por tanto, un punto de infinito P (véase Teorema 1.1.6). En efecto, obsérvese que la parametrización $\mathcal{P}(s)$ puede expresarse como

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) = \left(\frac{p_{11}(s)}{p_{12}(s)}, \frac{p_{21}(s)}{p_{22}(s)} \right) = \left(\frac{q_1(s)}{q(s)}, \frac{q_2(s)}{q(s)} \right), \quad (2.1)$$

donde $q(s) = \text{mcm}(p_{12}(s), p_{22}(s))$ y $q_i(s) = p_{i1}(s)q(s)/p_{i2}$, $i = 1, 2$.

Con ello, se parametriza la correspondiente curva proyectiva $\mathcal{P}^*(s) = (q_1(s), q_2(s), q(s))$ y el punto de infinito asociado a τ es $P = (q_1(\tau) : q_2(\tau) : 0)$.

Observación 2.1.3. Del Teorema 2.1.1 se obtiene la parametrización

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t^{n_1}, a_{n_2}t^{n_2} + a_{n_2-1}t^{n_2-1} + \dots + a_0) \text{ y } n_1 \geq n_2$$

(de otro modo, $(0 : 1 : 0)$ sería un punto de infinito de la curva de entrada).

Obsérvese que el grado de la curva resultante no es necesariamente n_1 , ya que $\tilde{\mathcal{P}}(t)$ podría ser una parametrización impropia, lo que es equivalente a que $\text{mcd}(n_1, n_2, \dots, n_2 - j) \neq 0$ para cada $j = 0, \dots, n_2 - 1$, tal que $a_{n_2-j} \neq 0$.

En estas condiciones, sea $\text{mcd}(n_1, n_2, \dots, n_2 - j) = \beta$ para cada $j = 0, \dots, n_2 - 1$, tal que $a_{n_2-j} \neq 0$. Entonces, si $n := n_1/\beta$, se tiene que

$$\mathcal{M}(t) = \tilde{\mathcal{P}}(t^{1/\beta}) = (t^n, a_{n_2}t^{n_2/\beta} + a_{n_2-1}t^{(n_2-1)/\beta} + \dots + a_0) \in \mathbb{K}[t]^2,$$

una reparametrización propia de $\tilde{\mathcal{P}}(t)$ (véase el Algoritmo "Proper Reparametrization for Curves" en [65, Sec. 3]).

En los siguientes corolarios se analiza el caso especial de las g-asíntotas verticales y horizontales, es decir, las rectas de la forma $x - a$ o $y - b$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ (obsérvese que estas asíntotas se corresponden con ramas asociadas a los puntos de infinito $(0 : 1 : 0)$ y $(1 : 0 : 0)$).

De manera más precisa, se prueba que estas asíntotas se obtienen de las raíces no comunes de los denominadores de una parametrización dada.

En este sentido, cabe señalar que, en el diseño práctico de la ingeniería y en el modelado de aplicaciones, las curvas racionales se representan normalmente por coeficientes numéricos y, en general, $\mathcal{P}(s)$ satisface que $\text{mcd}(p_{12}(s), p_{22}(s)) = 1$, lo cual implica que el caso mencionado surge habitualmente en problemas prácticos.

Corolario 2.1.4. Sea \mathcal{C} una curva definida por una parametrización (véase Ecuación 1.6)

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2,$$

donde $\text{grado}(p_{i1}(s)) \leq \text{grado}(p_{i2}(s))$, $i = 1, 2$. Sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{12}(s) = (s - \tau)^{n_1} \bar{p}_{12}(s)$ donde $p_{22}(\tau) \bar{p}_{12}(\tau) \neq 0$ y $n_1 \geq 1$. Entonces, la g-asíntota de \mathcal{C} correspondiente al punto de infinito $(1 : 0 : 0)$, es la recta horizontal $y - p_2(\tau) = 0$ definida por la parametrización propia $\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t, p_2(\tau))$.

Demostración. Se aplica el Teorema 2.1.1 con $n_2 = 0$. □

Corolario 2.1.5. Sea \mathcal{C} una curva definida por una parametrización (véase Ecuación 1.6)

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2,$$

donde $\text{grado}(p_{i1}(s)) \leq \text{grado}(p_{i2}(s))$, $i = 1, 2$. Sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{22}(s) = (s - \tau)^{n_2} \bar{p}_{22}(s)$ donde $p_{12}(\tau) \bar{p}_{22}(\tau) \neq 0$ y $n_2 \geq 1$. Entonces, la g-asíntota de \mathcal{C} correspondiente al punto de infinito $(0 : 1 : 0)$, es la recta vertical $x - p_1(\tau) = 0$ definida por la parametrización propia $\tilde{\mathcal{P}}(t) = (p_1(\tau), t)$.

Demostración. Se aplica el Corolario 2.1.4 a la parametrización $(p_2(s), p_1(s))$ y se obtiene la asíntota definida por $(t, p_1(\tau))$. Después, se deshace el cambio de coordenadas (véase la afirmación 2 de la Observación 1.8.2). \square

Según todo lo anterior, se obtiene el siguiente resultado que incluye a los anteriores Corolarios 2.1.4 y 2.1.5.

Corolario 2.1.6. *Sea \mathcal{C} una curva definida por una parametrización (véase Ecuación 1.6)*

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1,$$

donde $\text{grado}(p_{i1}(s)) \leq \text{grado}(p_{i2}(s))$, $i = 1, 2$.

1. *Sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{12}(t) = (t - \tau)^{n_1} \bar{p}_{12}(t)$ donde $p_{22}(\tau)\bar{p}_{12}(\tau) \neq 0$ y $n_1 \geq 1$. Se tiene que una asíntota de \mathcal{C} , correspondiente al punto de infinito $(1 : 0 : 0)$, es la recta horizontal $y - p_2(\tau) = 0$ definida por la parametrización propia $\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t, p_2(\tau))$.*
2. *Sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{22}(t) = (t - \tau)^{n_2} \bar{p}_{22}(t)$ donde $p_{12}(\tau)\bar{p}_{22}(\tau) \neq 0$ y $n_2 \geq 1$. Se tiene que una asíntota de \mathcal{C} , correspondiente al punto de infinito $(0 : 1 : 0)$, es la recta vertical $x - p_1(\tau) = 0$ definida por la parametrización propia $\tilde{\mathcal{P}}(t) = (p_1(\tau), t)$.*

De este modo, se obtiene el Algoritmo 2.1 que utiliza límites para la construcción de las asíntotas de curvas definidas paramétricamente.

Como se ha comentado anteriormente, este algoritmo mejora los resultados de los métodos descritos en Capítulo 1, especialmente en lo que se refiere al Algoritmo 1.3, mostrando una clara mejora de la eficiencia y reduciendo la cantidad de recursos hardware que se requieren del computador cuando se construyen las asíntotas de una curva paramétrica mediante límites (en lugar de utilizar el desarrollo en series de Puiseux).

Además, para ilustrar el comportamiento el Algoritmo 2.1, se presenta el Ejemplo 2.1.7 y el Ejemplo 2.1.8. Obsérvese que en el primero de ellos, se retoma la curva del Ejemplo 1.8.3 y, en este caso, se calcula las asíntotas usando el Algoritmo 2.1, cuya eficiencia se describe con el mayor detalle en la Sección 2.3.

Data: \mathcal{C} , curva algebraica plana irreducible definida por $\mathcal{P}(s)$, /* Ecuación 1.6 */
 $\mathcal{P}(s) \leftarrow (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2$, $p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s)$, $\text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1$,
 $\text{grado}(p_{i1}) \leq \text{grado}(p_{i2})$, $i = 1, 2$.

Result: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_i$, $i \leftarrow 1, \dots, k$.

begin

```

 $\tau_1 \dots \tau_l \leftarrow \text{Raíces}(p_{12}(s)) \in \mathbb{C}$ 
 $n_{11} \dots n_{1l} \leftarrow \text{MultiplicidadRaíces}(p_{12}(s))$ 
 $\rho_1 \dots \rho_k \leftarrow \text{Raíces}(p_{22}(s)) \in \mathbb{C}$ 
 $n_{21} \dots n_{2k} \leftarrow \text{MultiplicidadRaíces}(p_{22}(s))$ 
foreach  $\tau_i \in \{\tau_1 \dots \tau_l\}$  do
  /* Calcula asíntotas horizontales, si existen. Corolario 2.1.4 */
  if  $p_{22}(\tau_i) \neq 0$  then
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t, p_{22}(\tau_i)) \in \mathbb{C}[t]^2$ 
  /* Coeficientes de la parametrización. Teorema 2.1.1 */
  else if  $n_{2i} \geq 1$  then
     $f_{n_{2i}}(s) \leftarrow \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_{2i}/n_{1i}}}$ 
     $a_{n_{2i}} \leftarrow \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_{2i}}(s)$ 
    for  $j \leftarrow n_{2i} - 1$  to 0 do
       $f_j(s) \leftarrow p_1(s)^{1/n_{1i}}(f_{j+1}(s) - a_{j+1})$ 
       $a_j \leftarrow \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_j(s)$ 
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_{1i}}, a_{n_{2i}}t^{n_{2i}} + a_{n_{2i}-1}t^{n_{2i}-1} + \dots + a_0t^0) \in \mathbb{C}[t]^2$ 
  /* Calcula asíntotas verticales, si existen. Corolario 2.1.5 */
  foreach  $\rho_j \in \{\rho_1 \dots \rho_k\} \setminus \{\tau_i\}$  do
    if  $\exists \rho_j, p_{12}(\rho_j) \neq 0$  then
       $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (p_{12}(\rho_j), t) \in \mathbb{C}[t]^2$ 
       $i \leftarrow i + 1$ 
  return  $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$ ,  $i \leftarrow 1, \dots, k$ 

```

Algoritmo 2.1: Construcción de asíntotas de la curva paramétrica, \mathcal{C} , con límites.

El siguiente Ejemplo 2.1.7 ilustra el comportamiento del algoritmo.

Ejemplo 2.1.7. Se considera la curva algebraica plana \mathcal{C} del Ejemplo 1.8.3, definida por

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^2 + 5}{s(s-2)^2}, \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s-2)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 2.1.

En primer lugar se calculan las raíces de $p_{12}(s)$, que son $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = 2$ con multiplicidades $n_{11} = 1$ y $n_{12} = 2$, respectivamente. La multiplicidad de estas raíces en $p_{22}(s)$ es $n_{21} = 1$ y $n_{22} = 1$.

Raíz $\tau_1 = 0$: Se obtiene que:

- No hay asíntota horizontal.
- Los coeficientes de la parametrización, considerando multiplicidades $n_{11} = n_{21} = 1$, son:

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} f_1(s) = -\frac{2}{5}, \quad f_1(s) = \frac{p_2(s)}{p_1(s)}.$$

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} f_0(s) = -\frac{5}{4}, \quad f_0(s) = p_1(s)(f_1(s) - a_1).$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4}\right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíz $\tau_2 = 2$: Se obtiene que:

- No hay asíntota horizontal.
- Los coeficientes de la parametrización, considerando multiplicidades $n_{12} = 2$ y $n_{22} = 1$, son:

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 2} f_1(s) = \frac{11\sqrt{2}}{6}, \quad f_1(s) = \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{1/2}}.$$

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 2} f_0(s) = \frac{65}{72}, \quad f_0(s) = p_1(s)^{1/2}(f_1(s) - a_1).$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}}{6}t + \frac{65}{72}\right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Finalmente, se observa que no hay asíntotas verticales.

En consecuencia, las asíntotas resultantes son las curvas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ definidas por las siguientes parametrizaciones propias:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4}\right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}}{6}t + \frac{65}{72}\right).$

En la Figura 2.1 se muestra la representación gráfica de la curva \mathcal{C} y sus asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

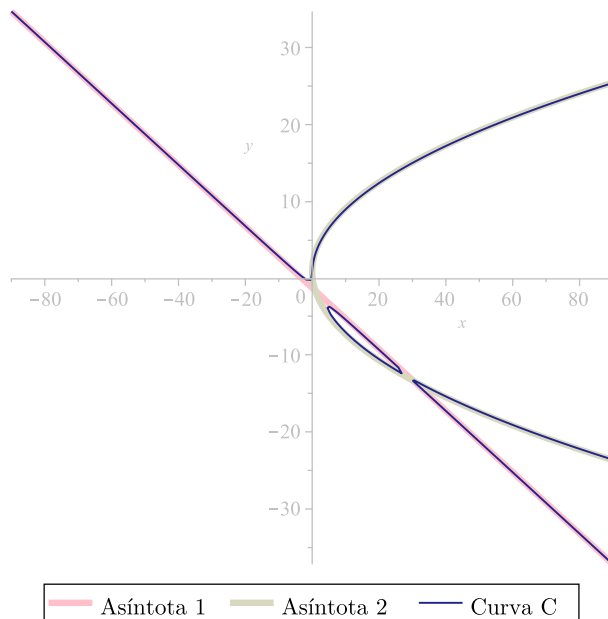


Figura 2.1: Asíntotas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 de la curva C calculadas con límites.

Ejemplo 2.1.8. Se considera la curva algebraica plana C definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{4(s^2 + 1)}{s^2(s-2)^3}, \frac{2s^2 + 2s - 1}{s^2(s-2)^2} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

A continuación, se aplica el Algoritmo 2.1.

En primer lugar se calculan las raíces de $p_{12}(s)$, que son $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = 2$, con multiplicidades $n_{11} = 2$ y $n_{12} = 3$, respectivamente. La multiplicidad de estas raíces en $p_{22}(s)$ es $n_{21} = 2$ y $n_{22} = 2$.

Raíz $\tau_1 = 0$: Se obtiene que:

- No hay asíntota horizontal.
- Los coeficientes de la parametrización, considerando las multiplicidades $n_{11} = 2$ y $n_{21} = 2$, son:

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow 0} f_2(s) = \frac{1}{2}, \quad f_2(s) = \frac{p_2(s)}{p_1(s)}.$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 0} f_1(s) = \frac{5\sqrt{2}i}{8}, \quad f_1(s) = p_1(s)^{1/2}(f_2(s) - a_2).$$

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} f_0(s) = \frac{31}{32}, \quad f_0(s) = p_1(s)^{1/2}(f_1(s) - a_1).$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t^2, \frac{1}{2}t^2 + \frac{5\sqrt{2}i}{8}t + \frac{31}{32} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíz $\tau_2 = 2$: Se obtiene que:

- No hay asíntota horizontal.
- Los coeficientes de la parametrización propia, considerando las multiplicidades $n_{12} = 3$ y $n_{22} = 2$, son:

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow 2} f_2(s) = \frac{11 \cdot 5^{1/3}}{20}, \quad f_2(s) = \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{2/3}}.$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 2} f_1(s) = \frac{7 \cdot 5^{2/3}}{300}, \quad f_1(s) = p_1(s)^{1/3}(f_2(s) - a_2).$$

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 2} f_0(s) = \frac{77}{400}, \quad f_0(s) = p_1(s)^{1/3}(f_1(s) - a_1).$$
- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^3, \frac{11 \cdot 5^{1/3}}{20} t^2 + \frac{7 \cdot 5^{2/3}}{300} t + \frac{77}{400} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Finalmente, se observa que no hay asíntotas verticales.

En consecuencia, las asíntotas resultantes son las curvas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ definidas por las parametrizaciones propias:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t^2, \frac{1}{2} t^2 + \frac{5\sqrt{2}}{8} t + \frac{31}{32} \right)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^3, \frac{11 \cdot 5^{1/3}}{20} t^2 + \frac{7 \cdot 5^{2/3}}{300} t + \frac{77}{400} \right)$.

En la Figura 2.2 se muestra la representación gráfica de la curva \mathcal{C} y sus asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

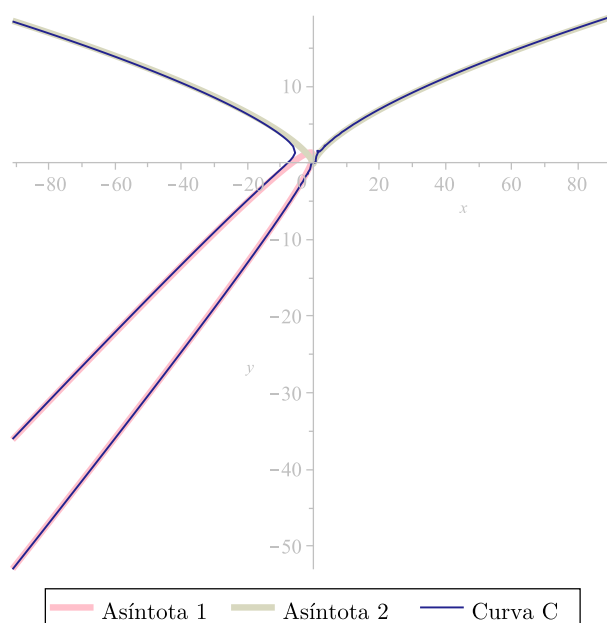


Figura 2.2: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ de la curva \mathcal{C} calculadas con límites.

A partir del Teorema 2.1.1 se pueden obtener fácilmente todas las asíntotas generalizadas de una curva racional. Sin embargo, calcular las raíces de los denominadores de la parametrización puede presentar ciertas dificultades cuando se trata de números algebraicos.

Este problema se puede resolver considerando la noción de puntos conjugados [66, Def. 12] y [43, Sec. 2.3], la cual permite abordar esta cuestión, análogamente a como se describe en [32, Sec. 4.2].

Observación 2.1.9. *Es posible seleccionar los puntos cuyas coordenadas dependan algebraicamente de todas las raíces conjugadas de un mismo polinomio irreducible, $m(t) \in \mathbb{R}[t]$. Si $m(t)$ es factor común de ambos denominadores, se pueden calcular restos polinomiales, trabajando así en el cuerpo de fracciones correspondiente.*

En algunos de los casos de estudio mostrados en el Apéndice B.1 se presentan puntos conjugados, al igual que sucede en el siguiente ejemplo, en el que se ilustra cómo se resuelve esta situación. Para más detalles, véase el artículo [32].

Ejemplo 2.1.10. *Sea C la curva plana definida por la parametrización*

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{4(s^2 + 1)}{(s^3 + s + 1)(s - 2)^3 s}, \frac{2s^3 + s + 1}{(s - 1)s^2(s - 2)^2} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

Aplicando el Algoritmo 2.1, en primer lugar se calculan las raíces de $p_{12}(s)$, que son $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = 2$ con multiplicidades $n_{11} = 1$ y $n_{12} = 3$, respectivamente. La multiplicidad de estas raíces en $p_{22}(s)$ es $n_{21} = 2$ y $n_{22} = 2$.

Además, se tiene una raíz real y dos raíces complejas de $p_{12}(s)$, correspondientes a las raíces del polinomio irreducible $s^3 + s + 1$. Estas raíces tienen multiplicidad 1 en $p_{12}(s)$ y multiplicidad 0 en $p_{22}(s)$.

Raíz $\tau_1 = 0$: *Se obtiene que:*

- No hay asíntota horizontal.
- Los coeficientes de la parametrización, considerando las multiplicidades $n_{11} = 1$ y $n_{21} = 2$, son:

$$\begin{aligned} a_2 &= \lim_{s \rightarrow 0} f_2(s) = -1, & f_2(s) &= \frac{p_2(s)}{p_1(s)}. \\ a_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} f_1(s) = 1, & f_1(s) &= p_1(s)^{1/2}(f_2(s) - a_2). \\ a_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} f_0(s) = \frac{1}{8}, & f_0(s) &= p_1(s)^{1/2}(f_1(s) - a_1). \end{aligned}$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -t^2 + t - \frac{1}{8} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíz $\tau_2 = 2$: Se obtiene que:

- No hay asíntota horizontal.
- Los coeficientes de la parametrización propia, considerando las multiplicidades $n_{12} = 3$ y $n_{22} = 2$, son:

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow 2} f_2(s) = \frac{19}{40} 2^{1/3} 605^{1/3}, \quad f_2(s) = \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{2/3}}.$$

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow 2} f_1(s) = -\frac{151}{36300} 2^{2/3} 605^{2/3}, \quad f_1(s) = p_1(s)^{1/3} (f_2(s) - a_2).$$

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 2} f_0(s) = \frac{152983}{72600}, \quad f_0(s) := p_1(s)^{1/3} (f_1(s) - a_s).$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^3, \frac{19 \cdot 2^{1/3} \cdot 605^{1/3}}{40} t^2 - \frac{151 \cdot 2^{2/3} \cdot 605^{2/3}}{36300} t + \frac{152983}{72600} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíces de $s^3 + s + 1$: En este caso se trabaja con las raíces de $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $m(\alpha) = 0$, siendo $m(t) = t^3 + t + 1$ (véase Observación 2.1.9).

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) = (t, \alpha)$, donde $m(\alpha) = 0$, es propia (véase Observación 2.1.3).

Obsérvese que en este caso, se obtienen las tres asíntotas horizontales definidas por la recta $y = \alpha$, con $m(\alpha) = 0$. Claramente una de estas asíntotas es real y las otras dos son complejas.

Raíz $\rho_1 = 1$: Es una asíntota vertical, ya que ρ_1 no es una solución de $p_{12}(s)$.

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_4(t) = \left(-\frac{8}{3}, t \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

En consecuencia, las asíntotas resultantes son las curvas definidas por las parametrizaciones propias:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -t^2 + t - \frac{1}{8} \right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^3, \frac{19 \cdot 2^{1/3} \cdot 605^{1/3}}{40} t^2 - \frac{151 \cdot 2^{2/3} \cdot 605^{2/3}}{36300} t + \frac{152983}{72600} \right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) = (t, \alpha)$, donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) = t^3 + t + 1$.

- $\tilde{\mathcal{P}}_4(t) = \left(-\frac{8}{3}, t \right).$

La Figura 2.3 (arriba) muestra la representación gráfica de la curva \mathcal{C} y de sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$, $\tilde{\mathcal{C}}_{3,1}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_4$. Así mismo, se ilustra con mayor detalle el comportamiento particular de cada una de las asíntotas reales calculadas (centro y abajo).

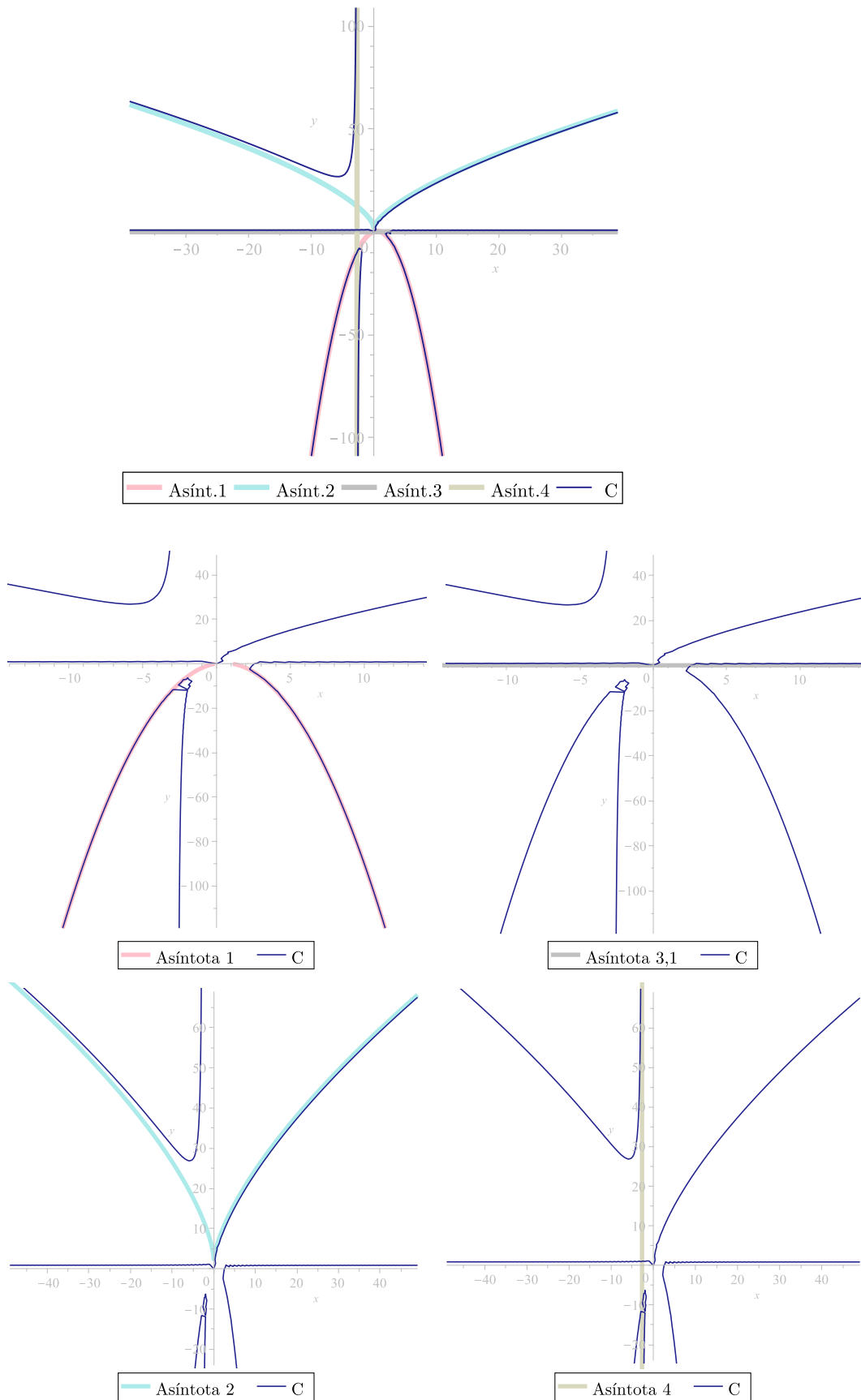


Figura 2.3: Asíntotas reales \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 , $\tilde{C}_{3,1}$ y \tilde{C}_4 de la curva C calculadas con límites.

Para finalizar esta sección, se observa cómo el Teorema 2.1.1 puede adaptarse para calcular los coeficientes asociados a los términos con exponente negativo, para calcular, además de las asíntotas, las ramas de una curva algebraicas plana. Los detalles del Teorema 2.1.11 pueden ampliarse en [2].

Teorema 2.1.11. *Sea \mathcal{C} una curva definida por una parametrización*

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2,$$

donde $\text{grado}(p_{i1}(s)) \leq \text{grado}(p_{i2}(s)) = d_i$, $i = 1, 2$. Sea $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $p_{i2}(s) = (s - \tau)^{n_i} \bar{p}_{i2}(s)$ donde $\bar{p}_{i2}(\tau) \neq 0$, $i = 1, 2$, y $n_i \geq 1$, y sea B la rama infinita correspondiente. Una rama infinita asociada a un punto de infinito $P = (1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$ viene dada como

$$B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\},$$

donde

$$r(z) = a_{n_2} z^{n_2/n_1} + a_{n_2-1} z^{(n_2-1)/n_1} + \dots + a_0 + a_{-1} z^{-1/n_1} + a_{-2} z^{-2/n_1} + \dots$$

($m = a_1$), y

$$\begin{aligned} a_{n_2} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_2}(s), & f_{n_2}(s) &= \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_2/n_1}} \\ a_{n_2-1} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_2-1}(s), & f_{n_2-1}(s) &= p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2}(s) - a_{n_2}) \\ &\vdots & &\vdots \\ a_{n_2-i} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_2-i}(s), & f_{n_2-i}(s) &= p_1(s)^{1/n_1} (f_{n_2-i+1}(s) - a_{n_2-i+1}) \\ &\vdots & &\vdots \\ a_0 &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_0(s), & f_0(s) &= p_1(s)^{1/n_1} (f_1(s) - a_1) \\ a_{-1} &= \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{-1}(s), & f_{-1}(s) &= p_0(s)^{1/n_1} (f_0(s) - a_0) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

para $i \geq 0$.

2.2 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con derivadas

En esta sección se desarrolla un método que permite calcular todas las g-asíntotas y las ramas de una curva algebraica plana definida por una parametrización, mediante la determinación de algunas derivadas de funciones univariadas construidas a partir de la parametrización de entrada.

A partir del algoritmo obtenido se deducen algunos resultados de gran interés, que se desarrollan en la Sección 2.4, tales como el índice de ramificación y el grado de la g-asíntota; así como el cálculo de la forma infinita, la multiplicidad y el carácter de los puntos infinitos.

A continuación, se considera la curva algebraica plana, \mathcal{C} , definida por la siguiente parametrización, obtenida a partir de la curva proyectiva de la Ecuación 2.1

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = q_i(s)/q(s), \quad \text{mcd}(q_1(s), q_2(s), q(s)) = 1, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Se asume que todas las raíces de los denominadores pueden escribirse como $\tau \in \mathbb{C}$, tal que $q(s) = (s - \tau)^n \bar{q}(s)$, donde $\bar{q}(\tau)q_1(\tau) \neq 0$ y $n \geq 1$. En caso contrario, se consideraría un cambio lineal de coordenadas, que posteriormente habría que deshacer.

Teorema 2.2.1. *Sea \mathcal{C} una curva definida por la parametrización*

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = q_i(s)/q(s), \quad \text{mcd}(q_1(s), q_2(s), q(s)) = 1, \quad i = 1, 2.$$

Sea $\tau \in \mathbb{C}$, tal que $q(s) = (s - \tau)^n \bar{q}(s)$, donde $\bar{q}(\tau)q_1(\tau) \neq 0$ y $n \geq 1$.

Se tiene que

$$\sigma(s) := \frac{q_2(s)}{q_1(s)} \quad \text{y} \quad \rho(s) := \left(\frac{q_1(s)}{\bar{q}(s)} \right)^{1/n}.$$

Sea B la rama infinita correspondiente, tal que una g -asíntota de B viene definida por la parametrización

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t^n, a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0),$$

donde

$$a_n = \sigma(\tau) \quad (2.3)$$

y para $0 \leq i \leq n - 1$

$$a_i = \frac{1}{(n-i)!} \cdot \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial s^{n-1-i}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho(s)^{(n-i)} \right) (\tau) \quad (2.4)$$

Demostración. En primer lugar, se asume sin pérdida de generalidad que $\tau = 0$ (de lo contrario, se razona de forma similar). Así, usando el Teorema 2.1.1, se obtiene fácilmente que

$$a_n = \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(s) = \sigma(0),$$

Para probar la otra igualdad, se observa que para $i = 1, \dots, n$ se puede escribir (véase Teorema 2.1.1, expresión para f_{n-i})

$$a_{n-i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(s) \mu_i(s)}{s^i},$$

donde

$$\mu_i(s) = ((\sigma(s) - a_n) \rho^{i-1} - a_{n-1} \rho^{i-2} s - a_{n-2} \rho^{i-3} s^2 - \dots - a_{n-i+2} \rho s^{i-2} - a_{n-i+1} s^{i-1}).$$

Obsérvese que

$$\frac{\partial^j \mu_i}{\partial s^j}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, i-1, \quad i = 1, \dots, n,$$

y

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial s}(s) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s).$$

Además, para $i = 2, \dots, n$, se tiene que

$$\frac{\partial^i \mu_i}{\partial s^i}(s) = \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(s) \frac{\partial \rho}{\partial s}(s) + \rho(s) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(s) \right)$$

donde,

$$\lambda_0 = \sigma(s) - a_n, \quad \lambda_{i-2} = \lambda_{i-3} \rho(s) - a_{n-i+2} s^{i-2}, \quad i = 3, \dots, n.$$

En efecto, se observa que se puede escribir

$$\frac{\partial^i \mu_i}{\partial s^i}(s) = \frac{\partial^i (\rho \lambda_{i-2})}{\partial s^i}(s)$$

y dado que $\frac{\partial^j \lambda_{i-2}}{\partial t^j}(0) = 0$, $j = 0, \dots, i-2$, se deduce que

$$\frac{\partial^i \mu_i}{\partial s^i}(0) = \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(0) \frac{\partial \rho}{\partial s}(0) + \rho(0) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right).$$

Ahora, teniendo en cuenta las igualdades anteriores y que $\rho(s)$ está definida en $s = 0$, por la regla de L'Hôpital, se tiene que

$$a_{n-1} = \frac{\rho(0) \frac{\partial \mu_1}{\partial s}(0)}{1!} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho(s) \right) (0)$$

y para $i \in \{2, \dots, n\}$,

$$a_{n-i} = \frac{\rho(0) \frac{\partial^i \mu_i}{\partial s^i}(0)}{i!} = \frac{\rho(0) \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(0) \frac{\partial \rho}{\partial s}(0) + \rho(0) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right)}{i!}.$$

Finalmente, solo se necesita probar que para $i \in \{2, \dots, n\}$

$$\rho(0) \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(0) \frac{\partial \rho}{\partial s}(0) + \rho(0) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right) = \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho(s)^i \right) (0).$$

Para ello, se escribe

$$\left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(0) \frac{\partial \rho}{\partial s}(0) + \rho(0) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right) = \left(\alpha_2 \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}} + \alpha_1 \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right)$$

donde $\alpha_1 = \rho(0)$ y $\alpha_2 = \binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho}{\partial s}(0)$.

En estas condiciones, dado que $\lambda_{i-2} = \lambda_{i-3} \rho(s) - a_{n-i+2} s^{i-2}$ y como $\frac{\partial^j \lambda_{i-2}}{\partial s^j}(0) = 0$, $j = 0, \dots, i-2$, se tiene que,

$$\left(\alpha_2 \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(0) + \alpha_1 \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right) = \left(\alpha_3 \frac{\partial^{i-2} \lambda_{i-3}}{\partial s^{i-2}}(0) + \alpha_2 \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-3}}{\partial s^{i-1}}(0) + \alpha_1 \frac{\partial^i \lambda_{i-3}}{\partial s^i}(0) \right),$$

donde $\alpha_1 = \rho(0)$, $\alpha_2 = \binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho^2}{\partial s}(0)$ y $\alpha_3 = \binom{i}{i-2} \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial s^2}(0)$.

Seguidamente, $\lambda_{i-3} = \lambda_{i-4}\rho(s) - a_{n-i+3}s^{i-3}$ y $\frac{\partial^j \lambda_{i-2}}{\partial s^j}(0) = 0$, $j = 0, \dots, i-2$, se tiene que

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_3 \frac{\partial^{i-2} \lambda_{i-3}}{\partial s^{i-2}}(0) + \alpha_2 \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-3}}{\partial t s^{i-1}}(0) + \alpha_1 \frac{\partial^i \lambda_{i-3}}{\partial s^i}(0) \right) = \\ & = \left(\alpha_4 \frac{\partial^{i-3} \lambda_{i-4}}{\partial s^{i-3}}(0) + \alpha_3 \frac{\partial^{i-2} \lambda_{i-4}}{\partial s^{i-2}}(0) + \alpha_2 \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-4}}{\partial s^{i-1}}(0) + \alpha_1 \frac{\partial^i \lambda_{i-4}}{\partial s^i}(0) \right), \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = \rho^3(0)$, $\alpha_2 = \binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho^3}{\partial s}(0)$, $\alpha_3 = \binom{i}{i-2} \frac{\partial^2 \rho^3}{\partial s^2}(0)$ y $\alpha_4 = \binom{i}{i-3} \frac{\partial^3 \rho^3}{\partial s^3}(0)$.

De esta manera, aplicando este proceso i veces, se tiene que

$$\begin{aligned} & \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho}{\partial s}(0) \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}} + \rho(0) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right) = \\ & = \binom{i}{i} \rho^{i-1}(0) \frac{\partial^i \lambda_0}{\partial s^i} + \binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho^{i-1}}{\partial s}(0) \frac{\partial^{i-1} \lambda_0}{\partial s^{i-1}} + \binom{i}{i-2} \frac{\partial^2 \rho^{i-1}}{\partial s^2}(0) \frac{\partial^{i-2} \lambda_0}{\partial s^{i-2}} + \dots \\ & \dots + \binom{i}{i-1} \frac{\partial^i \rho^{i-1}}{\partial s^i}(0) \frac{\partial \lambda_0}{\partial s} = \binom{i}{i} \rho^{i-1}(0) \frac{\partial^i \sigma}{\partial s^i}(0) + \binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho^{i-1}}{\partial s}(0) \frac{\partial^{i-1} \sigma}{\partial s^{i-1}}(0) + \\ & + \binom{i}{i-2} \frac{\partial^2 \rho^{i-1}}{\partial s^2}(0) \frac{\partial^{i-2} \sigma}{\partial s^{i-2}}(0) + \dots + \binom{i}{i-1} \frac{\partial^i \rho^{i-1}}{\partial s^i}(0) \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \rho(0) \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \lambda_{i-2}}{\partial s^{i-1}}(0) \frac{\partial \rho}{\partial s}(0) + \rho(0) \frac{\partial^i \lambda_{i-2}}{\partial s^i}(0) \right) = \\ & = \rho(0) \left(\binom{i}{i} \rho^{i-1}(0) \frac{\partial^i \sigma}{\partial s^i}(0) + \binom{i}{i-1} \frac{\partial \rho^{i-1}}{\partial s}(0) \frac{\partial^{i-1} \sigma}{\partial s^{i-1}}(0) + \binom{i}{i-2} \frac{\partial^2 \rho^{i-1}}{\partial s^2}(0) \frac{\partial^{i-2} \sigma}{\partial s^{i-2}}(0) \right) + \dots \\ & \dots + \rho(0) \left(\binom{i}{i-1} \frac{\partial^i \rho^{i-1}}{\partial s^i}(0) \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0) \right) = \binom{i-1}{i-1} \rho^i(0) \frac{\partial^i \sigma}{\partial s^i}(0) + \binom{i-1}{i-2} \frac{\partial \rho^i}{\partial s}(0) \frac{\partial^{i-1} \sigma}{\partial s^{i-1}}(0) + \\ & + \binom{i-1}{i-3} \frac{\partial^2 \rho^i}{\partial s^2}(0) \frac{\partial^{i-2} \sigma}{\partial s^{i-2}}(0) + \dots + \binom{i-1}{0} \frac{\partial^{i-1} \rho^i}{\partial s^{i-1}}(0) \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0) = \\ & = \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho(s)^i \right) (0). \end{aligned}$$

□

Observación 2.2.2. Del Teorema 2.2.1 se obtiene la parametrización

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t^n, a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0),$$

donde $a_n = \sigma(\tau)$ y para $0 \leq i \leq n-1$,

$$a_i = \frac{1}{(n-i)!} \cdot \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial s^{n-1-i}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho(s)^{(n-i)} \right) (\tau).$$

Obsérvese que el grado de la curva resultante no es necesariamente n , ya que $\tilde{\mathcal{P}}(t)$ podría ser una parametrización impropia, lo que es equivalente a que $\text{mcd}(n, \dots, n-j) \neq 0$ para cada $j = 0, \dots, n$, tal que $a_n \neq 0$.

Por tanto, sea $\text{mcd}(n, \dots, n-j) = \beta$ para cada $j = 0, \dots, n$ tal que $a_{n-j} \neq 0$. Se tiene que $\mathcal{M}(t) = \tilde{\mathcal{P}}(t^{1/\beta})$ es una reparametrización propia de $\tilde{\mathcal{P}}(t)$ (véase el algoritmo de reparametrización propia para curvas en [65, Sec. 3]).

A continuación, se introduce el Algoritmo 2.2, que realiza el cálculo de las asíntotas de una curva algebraica plana, expresada en forma paramétrica, aplicando los resultados del Teorema 2.2.1.

Data: \mathcal{C} , curva plana irreducible definida por /* Ecuación 2.2 */

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = q_i(s)/q(s)$$

$$\text{mcd}(q_1(s), q_2(s), q(s)) = 1, \quad i = 1, 2,$$

Result: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_i$, $i \leftarrow 1, \dots, k$

begin

$\tau_1 \dots \tau_k \leftarrow \text{Raíces}(q(s)) \in \mathbb{C}$

$n_1 \dots n_k \leftarrow \text{MultiplicidadRaíces}(q(s))$

$\sigma(s) \leftarrow \frac{q_2(s)}{q_1(s)}$ /* Teorema 2.2.1 */

foreach $\tau_i \in \{\tau_1 \dots \tau_k\}$ **do**

$\bar{q}_i(s) \leftarrow \frac{q(s)}{(s - \tau_i)^{n_i}}$

$\rho_i(s) \leftarrow \left(\frac{q_1(s)}{\bar{q}_i} \right)^{\frac{1}{n_i}}$

/* Coeficientes de la parametrización */

$a_{n_i} \leftarrow \sigma(\tau_i)$

for $j \leftarrow (n_i - 1)$ **to** 0 **do**

$a_j = \frac{1}{(n_j - j)!} \cdot \frac{\partial^{n_i-1-j} \sigma(s)}{\partial s^{n_i-1-j}} \cdot \rho_i^{(n_i-j)}(\tau_i)$

$\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, a_{n_i} t^{n_i} + \dots + a_0 t^0) \in \mathbb{C}[t]^2$

return $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$, $i \leftarrow 1, \dots, k$

Algoritmo 2.2: Construcción de asíntotas de la curva paramétrica, \mathcal{C} , con derivadas.

Según este algoritmo, pueden obtenerse fácilmente todas las g-asíntotas de una curva, tal como se muestra en los Ejemplos 2.2.3 y 2.2.4.

Ejemplo 2.2.3. Sea \mathcal{C} la curva plana de los ejemplos previos, 1.6.4, 1.8.3, 2.1.7, definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^2 + 5}{s(s-2)^2}, \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s-2)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2,$$

que puede escribirse como (véase Ecuación 2.2):

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^2 + 5}{q(s)}, \frac{(s^2 + 3s + 1)(s-2)}{q(s)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad q(s) = s(s-2)^2.$$

A continuación, se calculan las asíntotas de \mathcal{C} utilizando el Algoritmo 2.2 que se acaba de presentar.

Para ello, primero se observa que $q(s)$ tiene las raíces $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = 2$, con multiplicidades $n_1 = 1$ y $n_2 = 2$, respectivamente.

Sea

$$\sigma(s) = \frac{(s^2 + 3s + 1)(s - 2)}{s^2 + 5}.$$

Raíz $\tau_1 = 0$: Se tiene que $\rho_1(s) = \frac{s^2 + 5}{(s - 2)^2}$.

- Se calculan los coeficientes de la parametrización, considerando que la multiplicidad de τ_1 es $n_1 = 1$.

$$a_1 = \sigma(0) = -\frac{2}{5}.$$

$$a_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0) \cdot \rho_1(0) = -\frac{5}{4}.$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4}\right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíz $\tau_2 = 2$: Se tiene que $\rho_2(s) = \sqrt{s + \frac{5}{s}}$.

- Se calculan los coeficientes de la parametrización, considerando que multiplicidad de τ_2 es $n_2 = 2$:

$$a_2 = \sigma(2) = 0.$$

$$a_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(2) \cdot \rho_2(2) = \frac{11\sqrt{2}}{6}.$$

$$a_0 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho_2(s)^2 \right) (2) = \frac{65}{72}.$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}}{6}t + \frac{65}{72}\right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Entonces, se obtienen la asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$, definidas por las siguientes parametrizaciones propias:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t, -\frac{2}{5}t - \frac{5}{4}\right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t^2, \frac{11\sqrt{2}}{6}t + \frac{65}{72}\right).$

En la Figura 2.4 se ilustra el resultado obtenido, que coincide con las soluciones de los algoritmos previos, aplicados en los Ejemplos 1.6.4, 1.8.3, 2.1.7.

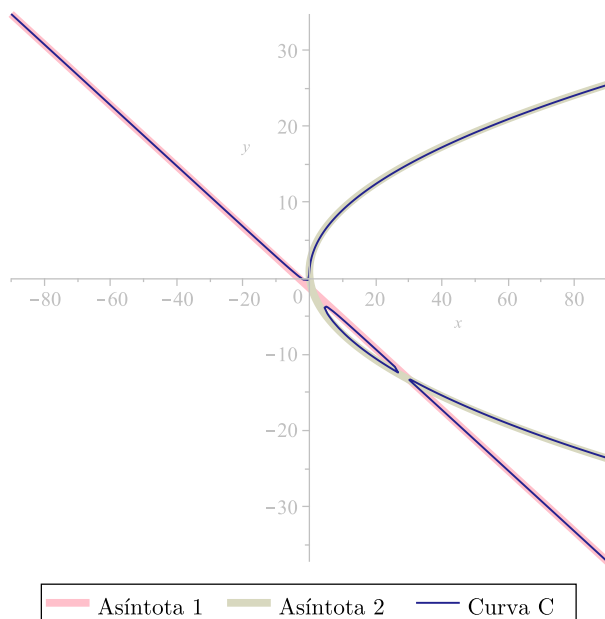


Figura 2.4: Asíntotas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 de la curva C calculadas con derivadas.

Ejemplo 2.2.4. Sea C la curva plana definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{s^4(s-1)(s-2)}, \frac{2s^4 - 3s^3 - 2s^2 - 26s - 18}{s^4(s-1)(s-2)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

Dicha curva se puede escribir como:

$$\mathcal{P}(s) = (s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1, 2s^4 - 3s^3 - 2s^2 - 26s - 18), \quad q(s) = s^4(s-1)(s-2).$$

A continuación, se calculan las asíntotas de C utilizando el Algoritmo 2.2.

Se observa que $p(s)$ tiene las raíces $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, $\tau_3 = 2$, con multiplicidades $n_1 = 4$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$.

$$\text{Sea } \sigma(s) = \frac{2s^4 - 3s^3 - 2s^2 - 26s - 18}{s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1}.$$

Raíz $\tau_1 = 0$: Se tiene que $\rho_1(s) = \frac{((s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1)(s-2)^3(s-1)^3)^{1/4}}{(s-2)(s-1)}$.

- Se calculan los coeficientes de la parametrización, sabiendo que la multiplicidad de τ_1 es $n_1 = 4$.

$$a_4 = \sigma(0) = -18.$$

$$a_3 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0) \cdot \rho_1(0) = 5 \cdot 8^{1/4}.$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho_1(s)^2 \right) (0) = \frac{307\sqrt{2}}{8}.$$

$$a_1 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho_1(s)^3 \right) (0) = -\frac{4317 \cdot 8^{3/4}}{512}.$$

$$a_0 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho_1(s)^4 \right) (0) = -\frac{1251}{32}.$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t^4, -18t^4 + 5 \cdot 8^{1/4}t^3 + \frac{307\sqrt{2}}{8}t^2 - \frac{4317 \cdot 8^{3/4}}{512}t - \frac{1251}{32} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíz $\tau_2 = 1$: Se tiene que $\rho_2(s) = \frac{s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{s^4(s-2)}$.

- Se calculan los coeficientes de la parametrización, sabiendo que la multiplicidad de τ_2 es $n_2 = 1$.

$$a_1 = \sigma(1) = -\frac{47}{8}.$$

$$a_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(1) \cdot \rho_2(1) = -\frac{363}{8}.$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t, -\frac{47}{8}t - \frac{363}{8} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Raíz $\tau_3 = 2$: Se tiene que $\rho_3(s) = \frac{s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{27s^4(s-1)}$.

- Se calculan los coeficientes de la parametrización, sabiendo que la multiplicidad de τ_3 es $n_3 = 1$.

$$a_1 = \sigma(2) = -\frac{70}{33}.$$

$$a_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(2) \cdot \rho_2(2) = \frac{457}{2376}.$$

- La parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) = \left(t, -\frac{70}{33}t + \frac{457}{2376} \right)$ es propia (véase Observación 2.1.3).

Entonces, se obtienen las asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$, definidas por las parametrizaciones propias:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = \left(t^4, -18t^4 + 5 \cdot 8^{1/4}t^3 + \frac{307\sqrt{2}}{8}t^2 - \frac{4317 \cdot 8^{3/4}}{512}t - \frac{1251}{32} \right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = \left(t, -\frac{47}{8}t - \frac{363}{8} \right).$

- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) = \left(t, -\frac{70}{33}t + \frac{457}{2376} \right).$

A continuación, en la Figura 2.5 se muestra una representación general de la curva \mathcal{C} y de las tres asíntotas que la aproximan, $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$. Así mismo, la Figura 2.5 ilustra con mayor detalle el comportamiento de cada una de las asíntotas particulares.

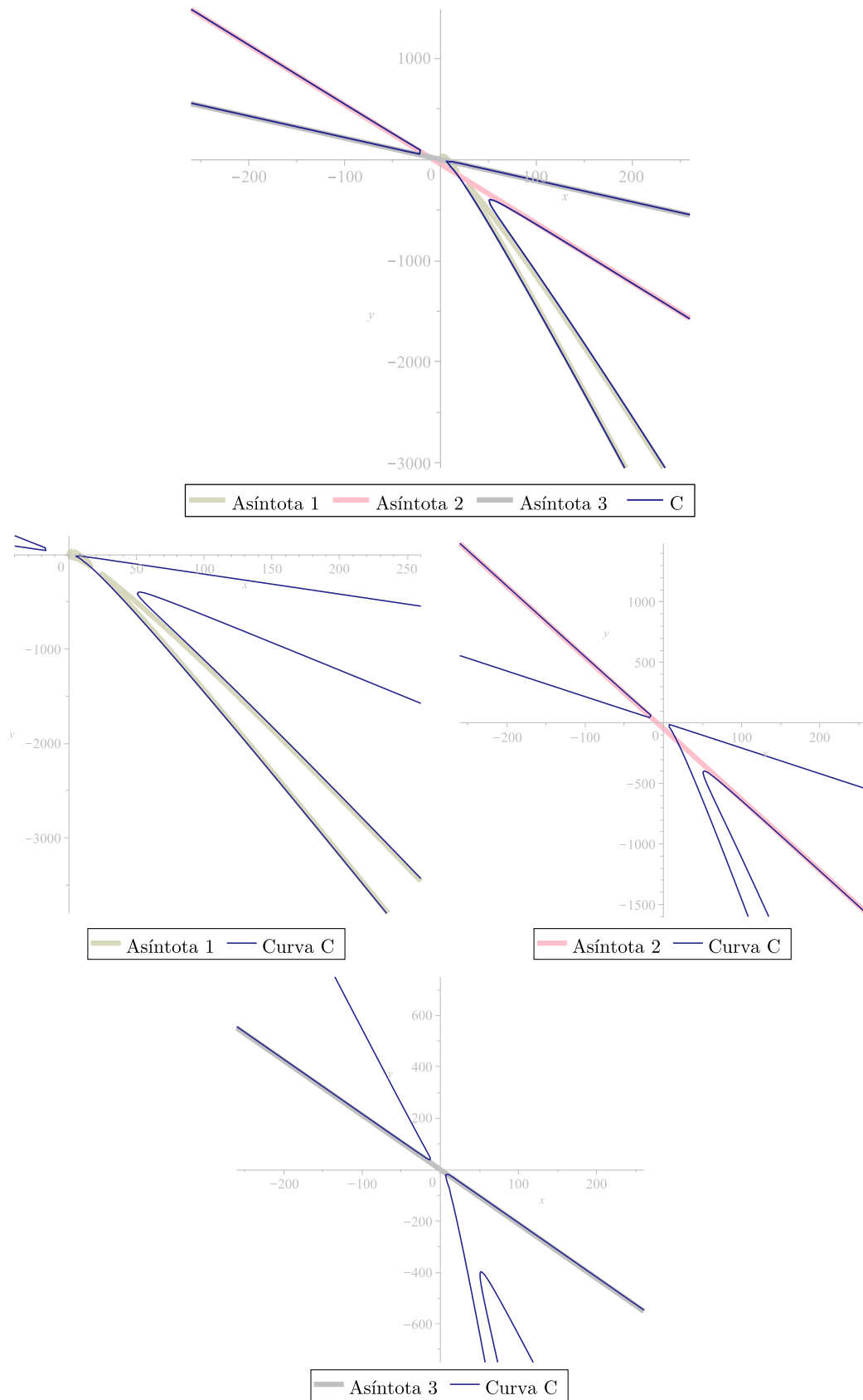


Figura 2.5: Asíntotas \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 y \tilde{C}_3 de la curva C calculadas con derivadas.

Para finalizar esta sección, y análogamente a lo que sucede con el Teorema 2.1.11 en el caso de límites, se observa cómo el Teorema 2.2.1 puede adaptarse para calcular los coeficientes asociados a los términos con exponente negativo. De este modo, se pueden calcular, además de las asíntotas, las ramas de una curva algebraica plana.

Teorema 2.2.5. *Sea \mathcal{C} una curva definida por la parametrización*

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = q_i(s)/q(s), \quad \text{mcd}(q_1(s), q_2(s), q(s)) = 1, \quad i = 1, 2.$$

Sea $\tau \in \mathbb{C}$, tal que $q(s) = (s - \tau)^n \bar{q}(s)$, donde $\bar{q}(\tau)q_1(\tau) \neq 0$ y $n \geq 1$.

Se tiene que

$$\sigma(s) := \frac{q_2(s)}{q_1(s)} \quad \text{y} \quad \rho(s) := \left(\frac{q_1(s)}{\bar{q}(s)} \right)^{1/n}.$$

Una rama infinita asociada al punto de infinito $P = (1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$ viene dada por

$$B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\},$$

donde

$$r(z) = a_n z + a_{n-1} z^{(n-1)/n} + \dots + a_0 + a_{-1} z^{-1/n} + a_{-2} z^{-2/n} + \dots,$$

($m = a_1$),

$$a_n = \sigma(\tau) \tag{2.5}$$

y para $i \geq 0$.

$$a_i = \frac{1}{(n-i)!} \cdot \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial s^{n-1-i}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s) \cdot \rho(s)^{(n-i)} \right) (\tau) \tag{2.6}$$

2.3 Análisis del rendimiento computacional

En esta sección se evalúa el desempeño de los algoritmos para la construcción de asíntotas de una curva algebraica plana irreducible. Se retoman los descritos en el Capítulo 1, Algoritmo 1.2 y Algoritmo 1.3, y se comparan con los algoritmos propuestos en esta investigación, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2.

Se recuerda que el primer algoritmo calcula las asíntotas de una curva a partir de su expresión implícita, considerando las ramas infinitas que convergen con la curva dada, para lo que se requiere el cómputo de las series de Puiseux. Igualmente, el segundo método aplica los anteriores fundamentos al caso de las curvas definidas de forma paramétrica. Sin embargo, las mejoras conseguidas con el Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2 se obtienen cuando se realiza la construcción de asíntotas empleando límites y derivadas, respectivamente.

Con el propósito de realizar un análisis comparativo sobre el rendimiento de estos algoritmos, se ha definido un conjunto de curvas planas reales (véanse los casos de estudio en el Apéndice B.1) y se han calculado sus puntos de infinito (véase Apéndice B.2), mediante la implementación de los métodos aquí expuestos y que se incluyen en el Apéndice C.

Es importante indicar que todas estas curvas han sido preparadas aplicando los correspondientes cambios lineales de coordenadas, para que $(0 : 1 : 0)$ no sea un punto de infinito y,

además, es de interés para el ámbito de esta tesis, indicar que los coeficientes y exponentes de las expresiones polinomiales son números reales.

Así, las curvas de *input* elegidas, presentan ciertas caracterizaciones específicas y propiedades diferentes, que permiten evaluar las variaciones en cuanto al rendimiento de los cuatro algoritmos aquí presentados. Estas propiedades son:

- Grado de la curva.
- Número de términos.
- Número de ramas.
- Mayor grado de las asíntotas.
- Número de asíntotas reales.
- Número de asíntotas complejas.

Obsérvese que los Algoritmos 1.2 y 1.3 calculan las ramas infinitas de la curva de *input* mediante el desarrollo en series de Puiseux, utilizando el paquete `algcurses` del software de álgebra Maple. En este sentido es necesario recordar que, cuando se conjugan algebraicamente varias soluciones de Puiseux, se tiene como resultado el mismo *place* (véase Definición 1.1.7) y, por tanto, la orden `algcurses : -puiseux` solo devuelve una única serie.

Además, aunque los cálculos se realizan sobre las expresiones implícitas y paramétricas de las curvas y asíntotas definidas algebraicamente, para facilitar la lectura de algunas de las expresiones, se han representado ciertos resultados en coma flotante. Tal es el caso de las curvas \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_{10} , \mathcal{C}_{11} , \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} (véanse siguientes subsecciones y Apéndice B.1).

A partir de todas las consideraciones anteriores, se ha efectuado un análisis del rendimiento computacional de cada uno de los cuatro algoritmos presentados, considerando los casos de estudio del Apéndice B. Para ello, se ha evaluado el grado de sobrecarga de los recursos hardware de la máquina (CPU y memoria), estimando el tiempo de uso del microprocesador y de la cantidad de memoria empleada para la ejecución cada uno de los algoritmos. Además, se ha calculado el valor del tiempo de estancia real en el sistema, invertido por el proceso que construye las asíntotas de una curva, según las soluciones aquí presentadas.

Para cuantificar estos resultados, ha sido necesario utilizar las herramientas proporcionadas por el paquete `CodeTools` de Maple. Así, es importante aclarar que la orden `CodeTools : -Usage` diferencia entre el tiempo de uso de CPU y el tiempo real de ejecución de un proceso. De este modo, el tiempo de CPU es el lapso durante el que un proceso está utilizando exclusivamente el microprocesador. Por otro lado, el tiempo real de ejecución calcula el periodo durante el que el proceso permanece en el sistema, desde que se lanza hasta que finaliza, es decir, todo el transcurso de tiempo en el que se están utilizando los diversos recursos hardware de la máquina: CPU, memoria, entrada/salida, etc.

Cabe destacar que en sistemas monoprocador, el tiempo total de uso de la CPU siempre será menor que el tiempo real de ejecución, mientras que en máquinas con múltiples procesadores, la carga puede distribuirse entre varias CPU. En este último caso, la suma de todos los

tiempos de uso de los múltiples procesadores es considerado como el total de tiempo de uso de CPU y, por tanto, puede darse el caso de que sea mayor que el tiempo de estancia real del proceso en el sistema.

A efectos de cómputo del grado de sobrecarga, cada algoritmo sometido a análisis se ha iterado cien veces para cada una de las curvas de estudio. Por consiguiente, se han podido registrar estadísticas fiables sobre el uso de los recursos hardware, necesarios para realizar el cálculo de las asíntotas de una curva dada, permitiendo establecer criterios comparativos en función de las distintas propiedades de las curvas de *input*, tales como el grado, número de términos, número de ramas infinitas y el grado mayor de las asíntotas obtenidas, así como el número de asíntotas reales y complejas.

Desde el punto de vista hardware, la ejecución se ha realizado sobre un Mac Book Pro 2018, con procesador Intel Core i5 de 4 núcleos a 2,3 GHz, con 16 GiB de memoria LPDDR3 a 2133 MHz, una tarjeta gráfica Intel Iris Plus Graphics 655 de 1536 MiB, un disco SSD de 500 GiB. El sistema operativo utilizado es macOS Monterrey, versión 12.3.1, y el software de álgebra computacional es Maple2021.1.

Cabe señalar que la importancia de estos algoritmos también se basa en que es posible aplicarlos, tanto a curvas n -dimensionales [31] como al cálculo de ramas y asíntotas de curvas no necesariamente algebraicas [2]. Así mismo, cabe señalar que estas investigaciones podrán aplicarse en un futuro al estudio de superficies, cuyos primeros resultados se proporcionan en el Capítulo 3.

En las siguientes subsecciones se presenta el análisis de los resultados obtenidos, tras la aplicación de cada uno de los métodos desarrollados para la construcción de las asíntotas de las curvas algebraicas planas del Apéndice B.1, cada una de ellas con sus diferentes características específicas. Finalmente, en la Sección 2.3.5 se realiza un análisis comparativo de los cuatro algoritmos.

2.3.1 Construcción de asíntotas de curvas implícitas

En este epígrafe se presentan los resultados de ejecutar cien veces el Algoritmo 1.2, sobre las catorce curvas del Apéndice B.1, ajustando el parámetro `accuracy = 10` en la orden `algcurses : -puiseux` del software de álgebra Maple.

Tal como puede observarse en la Tabla 2.1, la curva de menor complejidad es \mathcal{C}_4 , con grado tres y dos asíntotas cuyo mayor grado es dos. Por otro lado, la curva de mayor complejidad es la curva \mathcal{C}_3 , con 114 términos y grado diecisiete.

Según estos datos, es conveniente subrayar el excelente comportamiento en el infinito de las curvas \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_{12} , cuyos grados son diecisiete y trece respectivamente. En ambos casos, el mayor grado de las asíntotas reales es dos, muy inferior al de la curva de *input*.

Tabla 2.1: Propiedades de las curvas implícitas y de sus asíntotas.

Id	Curva <i>input</i>		Asíntotas <i>output</i>			
	Grado	Nº térm	Nº ramas	Mayor grado	Nº asint reales	Nº asint complejas
\mathcal{C}_1	7	21	5	2	3	2
\mathcal{C}_2	7	21	3	3	3	0
\mathcal{C}_3	17	114	5	3	1	4
\mathcal{C}_4	3	8	2	2	2	0
\mathcal{C}_5	6	25	3	4	3	0
\mathcal{C}_6	4	11	3	2	3	0
\mathcal{C}_7	4	12	2	3	2	0
\mathcal{C}_8	5	13	2	3	2	0
\mathcal{C}_9	5	15	2	1	2	0
\mathcal{C}_{10}	7	19	3	3	1	2
\mathcal{C}_{11}	15	58	4	5	2	2
\mathcal{C}_{12}	13	31	7	2	1	6
\mathcal{C}_{13}	9	22	5	2	3	2
\mathcal{C}_{14}	5	15	2	2	2	0

A continuación se realiza un análisis de las asíntotas de las curvas \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_4 , \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} , cuyas particularidades conviene destacar.

Obsérvense en \mathcal{C}_3 las parametrizaciones de las cinco asíntotas que genera el Algoritmo 1.2, con grados tres y cuatro, muy inferiores al grado de la curva de *input* dada, cuyo valor es diecisiete.

$$\bullet \tilde{\mathcal{P}}_{3,1}(t) := \left(t^4, -\frac{73176468 \dots 70022160}{(2941595 + 1044237\alpha)^9} - \frac{31007116 \dots 24025488}{(2941595 + 1044237\alpha)^9} \alpha \right),$$

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := t^2 + 4t + 5$.

Operando con los puntos conjugados, como se indica en la Observación 2.1.9, de $\tilde{\mathcal{P}}_{3,1}(t)$ se obtienen las siguientes parametrizaciones:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{3,1a}(t) := (t^4, -2 + i)$, cuya reparametrización propia es $\tilde{\mathcal{M}}_{3,1a}(t) := (t, -2 + i)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{3,1b}(t) := (t^4, -2 - i)$, cuya reparametrización propia es $\tilde{\mathcal{M}}_{3,1b}(t) := (t, -2 - i)$.

Las correspondientes asíntotas generalizadas, $\tilde{\mathcal{C}}_{3,1a}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{3,1b}$ son complejas, y se pueden expresar implícitamente como:

$$\tilde{f}_{3,1a}(x, y) := -y - 2 - i \quad \text{y} \quad \tilde{f}_{3,1b}(x, y) := -y - 2 + i.$$

$$\bullet \tilde{\mathcal{P}}_{3,2}(t) := \left(t^3, \frac{3175473 \dots 54113 \sqrt[3]{103^2} \sqrt[3]{(-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759)^2} \alpha t}{1299560599332066084366131105651465209158301825429328825664} - \frac{1254510 \dots 682965 \sqrt[3]{103^2} \sqrt[3]{(-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759)^2} t}{216593433222011014061021850941910868193050304238221470944} - \frac{13690955225473280 \sqrt[3]{103} \sqrt[3]{-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759} \alpha t^2}{26403789750400376029519659801} + \right)$$

$$+ \frac{8520846961643513 \sqrt[3]{103} \sqrt[3]{-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759} t^2}{17602526500266917353013106534} + \alpha t^3 -$$

$$- \left(\frac{19425159575 \alpha}{15549038208} + \frac{12229619291}{2591506368} \right),$$

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := 209 t^2 - 268 t + 492 \in \mathbb{R}[t]$.

Trabajando con los puntos conjugados, como se indica en Observación 2.1.9, se obtienen las siguientes parametrizaciones de $\tilde{\mathcal{P}}_{3,2}(t)$ que, para facilitar su lectura, se expresan en coma flotante:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{3,2_a}(t) := (t^3, (0,6411483254 - 1,393913846 i) t^3 - (12,59613512 + 6,157394565 i) t^2 - (8,164266141 - 17,77612191 i) t + 3,918139913 + 1,741393811 i,$

cuya expresión implícita es

$$\tilde{f}_{3,2_a}(x, y) := -(0,9970232232 10^{42} + 0,2142436425 10^{43} i) x^3 - (0,2991162159 10^{43} - 0,3521629612 10^{43} i) x^2 y + (0,2899928901 10^{43} + 0,8120140300 10^{42} i) x y^2 - (0,1030000368 10^{42} + 0,6460977974 10^{42} i) y^3 + (0,9457203411 10^{45} - 0,3208540572 10^{45} i) x^2 + (0,3822668418 10^{45} + 0,3413679924 10^{45} i) x y - (0,2164626451 10^{43} - 0,8132595583 10^{43} i) y^2 + (0,1145710661 10^{46} + 0,2383652638 10^{46} i) x + (0,2264336091 10^{44} - 0,2809518025 10^{44} i) y - 0,4588154305 10^{44} - 0,2354994619 10^{44} i.$$

- $\tilde{\mathcal{P}}_{3,2_b}(t) := (t^3, (0,6411483254 + 1,393913846 i) t^3 - (12,59613512 - 6,157394565 i) t^2 - (8,164266141 + 17,77612191 i) t + 3,918139913 - 1,741393811 i,$

cuya expresión implícita es

$$\tilde{f}_{3,2_b}(x, y) := -(0,6705370326 10^{34} - 0,6851619734 10^{34} i) x^3 - (0,6692372003 10^{34} + 0,1750962884 10^{35} i) x^2 y + (0,1219069693 10^{35} + 0,8061279565 10^{33} i) x y^2 + (0,1265854356 10^{34} - 0,2332974345 10^{34} i) y^3 + (0,3185371655 10^{37} + 0,2503638157 10^{37} i) x^2 + (0,1923149771 10^{37} - 0,7902721869 10^{36} i) x y + (0,2691502170 10^{34} - 0,3403581252 10^{35} i) y^2 + (0,7599717110 10^{37} - 0,7573882446 10^{37} i) x + (0,4872407120 10^{35} + 0,1380440407 10^{36} i) y - 0,1437655888 10^{36} - 0,1520093566 10^{36} i.$$

- $\tilde{\mathcal{P}}_{3,3}(t) := (t^3, (1/8 - 1/8\sqrt{3} i) t - 1/24)$ tiene coeficientes complejos, aunque, la asíntota $\tilde{\mathcal{C}}_{3,3}$ es real y su expresión implícita es $\tilde{f}_{3,3}(x, y) := -13824 y^3 - 1728 y^2 - 216 x - 72 y - 1 \in \mathbb{R}[x, y]$.

Por otro lado, se observa que la curva \mathcal{C}_4 es la que tiene menor grado y menor número de términos. Nótese que presenta dos ramas infinitas y que la asíntota de mayor grado tiene grado dos, menor que el de la curva de entrada.

Así, las parametrizaciones de las g-ásintotas reales de la curva \mathcal{C}_4 son:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{4,1}(t) := (t^2, 11/6\sqrt{2} t + 65/72)$, cuya ecuación implícita es $\tilde{f}_{4,1}(x, y) := 5184 y^2 - 34848 x - 9360 y + 4225$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{4,2}(t) := (t, -2/5 t - 5/4)$, cuya ecuación implícita es $\tilde{f}_{4,2}(x, y) := -8 x - 20 y - 25$.

Así mismo, llama la atención que \mathcal{C}_{12} de grado trece, presente una asíntota real de grado uno (asíntota horizontal) y seis asíntotas complejas de grado dos (véase Tabla 2.1).

Para ilustrar estos detalles, a continuación, se muestran las parametrizaciones de las g -asíntotas obtenidas a partir de la curva de entrada \mathcal{C}_{12} .

$$\bullet \tilde{\mathcal{P}}_{12,1}(t) := (t^2, \frac{965084862034 \alpha^2 + 1657570956128 \alpha - 10958170857228}{7490349 \alpha^7 \sqrt{\alpha}} t + \frac{15127222542616 \alpha^2 + 5513812351100 \alpha + 62931415515000}{7490349 \alpha^{10} \sqrt{\alpha}} t - \frac{326894725 + 516120472\alpha + 64717862\alpha^2 - 83621175\alpha^3 + 27982896\alpha^4 - 7640562\alpha^5}{2496783000},$$

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := 3 t^6 + 24 t^5 - 172 t^3 + 318 t^2 + 300 t + 1250 \in \mathbb{R}[t]$.

Operando con los puntos conjugados de la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1}(t)$, como se indica en Observación 2.1.9, se obtienen las seis parametrizaciones siguientes que definen curvas complejas. Para facilitar su lectura, se expresa la parametrización y la implícita correspondiente en coma flotante:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1_a}(t) := (t^2, (1,525609655 + 0,4470665102 i) t - 0,1148070203 - 0,3344253589 i)$,
cuya expresión implícita viene dada por
 $\tilde{f}_{12,1_a}(x, y) := (14679,42346 + 13377,30859 i) y^2 - (12984,22197 + 48485,95227 i) x - (5576,820723 - 12889,96080 i) y - 2475,493968 + 192,5861409 i$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1_b}(t) := (t^2, (1,525609655 - 0,4470665102 i) t - 0,1148070203 + 0,3344253589 i)$,
cuya expresión implícita viene dada por
 $\tilde{f}_{12,1_b}(x, y) := (14679,42346 - 13377,30859 i) y^2 - (12984,22197 - 48485,95227 i) x - (5576,820723 + 12889,96080 i) y - 2475,493968 - 192,5861409 i$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1_c}(t) := (t^2, (0,02739834281 + 2,355947189 i) t - 0,07093393239 - 0,4731660645 i)$,
cuya expresión implícita viene dada por
 $\tilde{f}_{12,1_c}(x, y) := (1125,027407 + 1601,143574 i) y^2 + (6450,310244 + 8740,686012 i) x - (1355,608370 - 1291,800403 i) y - 353,6973725 - 274,8976973 i$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1_d}(t) := (t^2, (0,02739834281 - 2,355947189 i) t - 0,07093393239 + 0,4731660645 i)$,
cuya expresión implícita es
 $\tilde{f}_{12,1_d}(x, y) := (1125,027407 - 1601,143574 i) y^2 + (6450,310244 - 8740,686012 i) x - (1355,608370 + 1291,800403 i) y - 353,6973725 + 274,8976973 i$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1_e}(t) := (t^2, (0,6622078155 - 1,008166188 i) t + 0,1440742862 + 0,3119943138 i)$,
implícitamente definida por
 $\tilde{f}_{12,1_e}(x, y) := -(404,269690 - 60,734293 i) y^2 - (314,71363 + 504,696312 i) x + (154,387243 + 234,75918 i) y + 25,5001505 - 40,9953515 i$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,1_f}(t) := (t^2, (0,6622078155 + 1,008166188 i) t + 0,1440742862 - 0,3119943138 i)$,
cuya expresión implícita viene dada por
 $\tilde{f}_{12,1_f}(x, y) := -(404,269690 + 60,734293 i) y^2 - (314,71363 - 504,696312 i) x + (154,387243 - 234,75918 i) y + 25,5001505 + 40,9953515 i$.

- $\tilde{\mathcal{P}}_{12,2}(t) := (t, 1/2)$, cuya expresión implícita es la recta $\tilde{f}_{12,2}(x, y) = 1/2 - y$.

Del mismo modo, la curva \mathcal{C}_{13} de grado nueve, presenta cinco asíntotas: una asíntota horizontal real, $\tilde{\mathcal{C}}_{13,1}$, y cuatro g-asíntotas representadas mediante los puntos conjugados definidos por el polinomio $m(t) \in \mathbb{R}[t]$. Este polinomio tiene dos raíces en \mathbb{R} que dan lugar a dos asíntotas reales de grado dos, $\tilde{\mathcal{C}}_{13,2_a}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{13,2_d}$, y otras dos asíntotas complejas también de grado dos, $\tilde{\mathcal{C}}_{13,2_b}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{13,2_c}$.

A continuación se muestran las asíntotas de la curva \mathcal{C}_{13} :

- $\tilde{\mathcal{P}}_{13,1}(t) := (t, 1)$ es la parametrización de la asíntota $\tilde{\mathcal{C}}_{13,1}$, dada por la ecuación implícita $\tilde{f}_{13,1}(x, y) := 1 - y$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{13,2}(t) := (t^2, \frac{39055753216 \alpha^3 + 28358758400 \alpha^2 + 303179759616 \alpha + 76378406912}{\alpha^9 \sqrt{\alpha}} t - \frac{112 - 8\alpha + 98\alpha^2 - 3\alpha^3}{384\alpha})$, donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := t^4 - 32t^3 - 16t^2 - 256t + 64 \in \mathbb{R}[t]$.

Trabajando con los puntos conjugados, como se indica en la Observación 2.1.9, de $\tilde{\mathcal{P}}_{13,1}(t)$ se obtienen dos parametrizaciones reales y dos complejas.

A continuación, para facilitar su lectura, se expresa cada una de las correspondientes parametrizaciones en coma flotante:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{13,2_a}(t) := (t^2, 5,720673881 t + 0,02711892246)$, cuya expresión implícita es real, $\tilde{f}_{13,2_a}(x, y) := 3,12148 y^2 - 102,154134 x - 0,16929 y + 0,002296$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{13,2_b}(t) := (t^2, (-1,082392201 + 1,287188506 i)t + 0,1035533906 + 0,6306723113 i)$. Su expresión implícita es $\tilde{f}_{13,2_b}(x, y) := (64 - 367,4879931 i) y^2 + 1055,058008 x - (476,7838379 + 4,61680053 i) y + 23,23044739 + 150,5862253 i$ es compleja.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{13,2_c}(t) := (t^2, (-1,082392201 - 1,287188506 i)t + 0,1035533906 - 0,6306723113 i)$ viene definida implícitamente por su polinomio complejo $\tilde{f}_{13,2_c}(x, y) := (64 + 367,4879931 i) y^2 + 1055,058008 x - (476,7838379 - 4,61680053 i) y + 23,23044739 - 150,5862253 i$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{13,2_d}(t) := (t^2, -0,4944220183 t - 1,234225712)$ es real y viene definida por el polinomio real $\tilde{f}_{13,2_d}(x, y) := 3,12148 y^2 - 0,763054 x + 7,70523 y + 4,755004$.

En cuanto al uso de recursos, los resultados de la Tabla 2.2 muestran que para el caso de la curva \mathcal{C}_3 , el Algoritmo 1.2 requiere del mayor tiempo de estancia en el sistema y genera la mayor sobrecarga en el microprocesador y en la memoria, mientras que las curvas \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} son las que requieren de la menor cantidad de recursos del sistema.

Tabla 2.2: Recursos hardware requeridos por el Algoritmo 1.2 para curvas implícitas.

Id.	t. de CPU	t. real de estancia	Memoria utilizada
\mathcal{C}_1	26,17 ms.	25,06 ms.	1978,84 KiB
\mathcal{C}_2	66,13 ms.	31,56 ms.	1386,33 KiB
\mathcal{C}_3	362,72 ms.	283,47 ms.	10806,75 KiB
\mathcal{C}_4	14,86 ms.	16,88 ms.	810,67 KiB
\mathcal{C}_5	168,47 ms.	124,77 ms.	3758,74 KiB
\mathcal{C}_6	8,78 ms.	8,09 ms.	695,43 KiB
\mathcal{C}_7	27,70 ms.	39,57 ms.	1495,48 KiB
\mathcal{C}_8	76,90 ms.	40,75 ms.	1924,63 KiB
\mathcal{C}_9	86,23 ms.	45,01 ms.	1755,44 KiB
\mathcal{C}_{10}	75,12 ms.	51,87 ms.	1333,29 KiB
\mathcal{C}_{11}	119,21 ms.	82,42 ms.	3706,32 KiB
\mathcal{C}_{12}	8,65 ms.	7,93 ms.	782,95 KiB
\mathcal{C}_{13}	7,13 ms.	6,88 ms.	602,33 KiB
\mathcal{C}_{14}	76,67 ms.	52,47 ms.	1875,11 KiB

Obsérvese que la curva \mathcal{C}_3 es la de mayor grado y de mayor número de términos. En este caso, la ejecución del Algoritmo 1.2 requiere de la mayor cantidad de recursos, 283,47 ms. de tiempo de estancia en el sistema, 362,72 ms. de uso del microprocesador y 10,55 MiB de capacidad de memoria.

Por otro lado, es conveniente destacar las particularidades de las curvas \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} . Obsérvese que, en ambos casos, el algoritmo ha empleado la menor cantidad de recursos computacionales para calcular las asíntotas respectivas de ambas curvas. Además, el mayor grado de las asíntotas construidas con el Algoritmo 1.2 es dos, muy inferior a los grados trece y nueve de las curvas de entrada \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} .

2.3.2 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al ejecutar los métodos descritos en el Apéndice C, ajustando en la orden `alcurves`: `-puiseux` el parámetro `accuracy = 10`, con la que se realiza el desarrollo en series de Puiseux para el caso de las curvas paramétricas definidas en el Apéndice B, con la Ecuación 1.6

$$\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2, \quad p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s), \quad \text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1, \quad i = 1, 2.$$

En la Tabla 2.3 puede comprobarse que se obtienen exactamente los mismos resultados que en la Tabla 2.1 del caso anterior, excepto para la columna número de términos, que obviamente muestra diferentes valores para el caso curvas expresadas en su forma implícita, frente a las curvas expresadas paramétricamente.

Tabla 2.3: Propiedades de las curvas paramétricas y de sus asíntotas.

Id	Curva <i>input</i>		Asíntotas <i>output</i>			
	Grado	Nº térm	Nº ramas	Mayor grado	Nº asint reales	Nº asint complejas
\mathcal{C}_1	7	5	5	2	3	2
\mathcal{C}_2	7	3	3	3	3	0
\mathcal{C}_3	17	5	5	3	1	4
\mathcal{C}_4	3	3	2	2	2	0
\mathcal{C}_5	6	5	3	4	3	0
\mathcal{C}_6	4	3	3	2	3	0
\mathcal{C}_7	4	3	2	3	2	0
\mathcal{C}_8	5	3	2	3	2	0
\mathcal{C}_9	5	3	2	1	2	0
\mathcal{C}_{10}	7	3	3	3	1	2
\mathcal{C}_{11}	15	4	4	5	2	2
\mathcal{C}_{12}	13	3	7	2	1	6
\mathcal{C}_{13}	9	2	5	2	3	2
\mathcal{C}_{14}	5	2	2	2	2	0

Por otro lado, al observar la Tabla 2.4 se evidencia que, en general, el Algoritmo 1.3 presenta una menor eficiencia que el Algoritmo 1.2 para el caso de curvas expresadas en forma paramétrica. En la mayoría de los casos, este algoritmo produce una mayor sobrecarga en el sistema y requiere de una mayor cantidad de recursos hardware.

Tabla 2.4: Recursos hardware usados por el Algoritmo 1.3 para curvas paramétricas.

Id.	t. de CPU	t. real de estancia	Memoria utilizada
\mathcal{C}_1	16,13 ms.	20,38 ms.	2014,46 KiB
\mathcal{C}_2	131,45 ms.	117,78 ms.	17305,41 KiB
\mathcal{C}_3	$> 10^8$ ms.	$> 10^8$ ms.	$> 10^8$ KiB
\mathcal{C}_4	3,98 ms.	3,60 ms.	276,03 KiB
\mathcal{C}_5	114,12 ms.	63,74 ms.	10630,93 KiB
\mathcal{C}_6	2,57 ms.	2,69 ms.	288,92 KiB
\mathcal{C}_7	25,10 ms.	26,58 ms.	3193,96 KiB
\mathcal{C}_8	102,26 ms.	72,53 ms.	8634,75 KiB
\mathcal{C}_9	47,83 ms.	25,44 ms.	2832,28 KiB
\mathcal{C}_{10}	18496.00 ms.	16028.00 ms.	1795206,41 KiB
\mathcal{C}_{11}	$> 10^8$ ms.	$> 10^8$ ms.	$> 10^8$ KiB
\mathcal{C}_{12}	21726.00 ms.	18961.00 ms.	2720673,58 KiB
\mathcal{C}_{13}	22877.00 ms.	17054.00 ms.	2667242,91 KiB
\mathcal{C}_{14}	24,00 ms.	24,00 ms.	3668,91 KiB

Así, puede observarse que el Algoritmo 1.3 genera los mayores tiempos reales de estancia en el sistema y requiere del mayor uso del microprocesador para el caso de las curvas \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_8 , \mathcal{C}_{10} , \mathcal{C}_{11} , \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} . Este incremento en el grado de sobrecarga se hace más patente cuando

se observan los requisitos de memoria, en los que solamente las curvas más sencillas demandan una menor cantidad de recursos.

Así, las mayores necesidades de hardware corresponden al cálculo de las asíntotas de las curvas \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_{11} . En estos casos, el algoritmo ha necesitado de más de 24 horas de uso de la CPU y más de 100 GiB de memoria.

Además, la ejecución del algoritmo con la curva \mathcal{C}_{13} requiere de un tiempo real de estancia en el sistema de 17 segundos, 23 segundos de uso del microprocesador y de 2,5 GiB de memoria, lo cual contrasta considerablemente con la aplicación del Algoritmo 1.2, en cuyo caso se obtuvo un tiempo real de uso de los recursos del sistema de 6,88 ms., 7,13 ms. de uso del microprocesador y 602,33 KiB de memoria.

Por otro lado, es interesante reseñar que la aplicación del Algoritmo 1.3 para el cálculo de las asíntotas de las curvas \mathcal{C}_4 y \mathcal{C}_6 presenta el menor grado de sobrecarga, incluso comparado con la aplicación del Algoritmo 1.2.

Obsérvese que si se comparan estos resultados con los de la Tabla 2.2, se intuye que a medida que aumenta la complejidad de la curva, el uso de CPU, el tiempo real de estancia en el sistema y las necesidades de memoria se van incrementando de manera exponencial.

2.3.3 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con límites

A continuación, la Tabla 2.5 muestra los resultados de ejecutar el Algoritmo 2.1 para construir las asíntotas de las curvas del Apéndice B, a partir de las expresiones paramétricas dadas por la Ecuación 1.6. Nótese que este resultado es coincidente con el de la Tabla 2.3.

Tabla 2.5: Propiedades de las curvas paramétricas y de sus asíntotas.

Id	Curva <i>input</i>		Asíntotas <i>output</i>			
	Grado	Nº térm	Nº ramas	Mayor grado	Nº asint reales	Nº asint complejas
\mathcal{C}_1	7	5	5	2	3	2
\mathcal{C}_2	7	3	3	3	3	0
\mathcal{C}_3	17	5	5	3	1	4
\mathcal{C}_4	3	3	2	2	2	0
\mathcal{C}_5	6	5	3	4	3	0
\mathcal{C}_6	4	3	3	2	3	0
\mathcal{C}_7	4	3	2	3	2	0
\mathcal{C}_8	5	3	2	3	2	0
\mathcal{C}_9	5	3	2	1	2	0
\mathcal{C}_{10}	7	3	3	3	1	2
\mathcal{C}_{11}	15	4	4	5	2	2
\mathcal{C}_{12}	13	3	7	2	1	6
\mathcal{C}_{13}	9	2	5	2	3	2
\mathcal{C}_{14}	5	2	2	2	2	0

Adicionalmente, se recuerda que la aplicación de este algoritmo requiere del cálculo de las raíces de los denominadores de las componentes $p_1(s)$ y $p_2(s)$ de la ecuación paramétrica,

así como de su multiplicidad correspondiente. Para ello, pueden consultarse los pares raíz-multiplicidad en la Tabla B.2 del Apéndice B. Obsérvese, también, que para el caso de las curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}$ y \mathcal{C}_{13} se obtienen las raíces conjugadas en $p_{12}(s)$ y $p_{22}(s)$.

A continuación, la Tabla 2.6 permite valorar el grado de sobrecarga que produce este algoritmo en el sistema.

Tabla 2.6: Recursos hardware requeridos por el Algoritmo 2.1 para curvas paramétricas.

Id.	t. de CPU	t. real de estancia	Memoria utilizada
\mathcal{C}_1	41,74 ms	44,93 ms	4815,36 KiB
\mathcal{C}_2	11,99 ms	13,44 ms	1241,23 KiB
\mathcal{C}_3	59,25 ms	62,82 ms	5910,91 KiB
\mathcal{C}_4	7,77 ms	11,40 ms	587,45 KiB
\mathcal{C}_5	23,00 ms	18,78 ms	1836,80 KiB
\mathcal{C}_6	20,78 ms	11,31 ms	832,64 KiB
\mathcal{C}_7	9,76 ms	10,73 ms	871,49 KiB
\mathcal{C}_8	11,10 ms	11,56 ms	973,96 KiB
\mathcal{C}_9	5,92 ms	6,48 ms	527,17 KiB
\mathcal{C}_{10}	15,30 ms	16,50 ms	1302,70 KiB
\mathcal{C}_{11}	42,77 ms	31,43 ms	2796,50 KiB
\mathcal{C}_{12}	48,13 ms	34,53 ms	3242,84 KiB
\mathcal{C}_{13}	22,06 ms	17,93 ms	1390,01 KiB
\mathcal{C}_{14}	8,32 ms	8,49 ms	636,6 KiB

En la Tabla 2.6 se advierte una mayor eficiencia generalizada en la gestión de la memoria del computador, que la de los Algoritmos 1.2 y 1.3. También se observan mejoras en los tiempos de uso de CPU y de estancia real en el sistema, destacando el comportamiento de las curvas \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_9 .

En el primer caso, se trata de la curva para la que el Algoritmo 2.1 requería el mayor tiempo real de estancia y generaba la mayor sobrecarga en el microprocesador, con la mayor necesidad de memoria. Sin embargo el uso de recursos es bastante inferior al de los resultados previos de las Tablas 2.2 y 2.4, con tan solo 62,82 ms. de tiempo de permanencia en el sistema, 59,25 ms. de uso de CPU y 1,21 MiB de memoria.

En el segundo caso, \mathcal{C}_9 , se ha obtenido la menor sobrecarga con únicamente 6,48 ms. de tiempo real en el sistema, 5,92 ms. de uso de CPU y 0,5 MiB de memoria. Así, esta curva, de grado cinco, muestra el menor grado de sobrecarga al construir con el Algoritmo 2.1 sus dos asíntotas reales.

A continuación, se muestran las expresiones paramétricas e implícitas de las asíntotas de la curva \mathcal{C}_9 :

- $\tilde{\mathcal{P}}_{9,1}(t) := (t^3, 5/9)$, que puede reparametrizarse propiamente como $\tilde{\mathcal{M}}_{9,1}(t) := (t, 5/9)$, y cuya expresión implícita es $\tilde{f}_{9,1}(x, y) := -9y + 5$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{9,2}(t) := (t^2, 3t^2 + 13/9)$, que puede reparametrizarse propiamente como $\tilde{\mathcal{M}}_{9,2}(t) := (t, 3t + 13/9)$, y cuya expresión implícita es $\tilde{f}_{9,2}(x, y) := y - 3x - 13/9$.

2.3.4 Construcción de asíntotas de curvas paramétricas con derivadas

En la Tabla 2.7 se muestran los resultados de ejecutar el Algoritmo 2.2 para construir las asíntotas de curvas del Apéndice B, mediante la utilización de algunas derivadas de funciones univariadas. Nótese que este resultado es coincidente con el de las Tablas 2.3 y 2.5.

Tabla 2.7: Propiedades de las curvas paramétricas y de sus asíntotas.

Id	Curva <i>input</i>		Asíntotas <i>output</i>			
	Grado	Nº térm	Nº ramas	Mayor grado	Nº asint reales	Nº asint complejas
\mathcal{C}_1	7	5	5	2	3	2
\mathcal{C}_2	7	3	3	3	3	0
\mathcal{C}_3	17	5	5	3	1	4
\mathcal{C}_4	3	3	2	2	2	0
\mathcal{C}_5	6	5	3	4	3	0
\mathcal{C}_6	4	3	3	2	3	0
\mathcal{C}_7	4	3	2	3	2	0
\mathcal{C}_8	5	3	2	3	2	0
\mathcal{C}_9	5	3	2	1	2	0
\mathcal{C}_{10}	7	3	3	3	1	2
\mathcal{C}_{11}	15	4	4	5	2	2
\mathcal{C}_{12}	13	3	7	2	1	6
\mathcal{C}_{13}	9	2	5	2	3	2
\mathcal{C}_{14}	5	2	2	2	2	0

De forma semejante a la aplicación del Algoritmo 2.1, se recuerda que este método requiere del cálculo de las raíces de los denominadores del primer miembro de la ecuación paramétrica, así como de su multiplicidad. Puede consultarse este resultado en los pares raíz-multiplicidad en la primera columna de la Tabla B.2 del Apéndice B. Obsérvese que para el caso de las curvas \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_{10} , \mathcal{C}_{11} , \mathcal{C}_{12} y \mathcal{C}_{13} se obtienen raíces conjugadas.

Seguidamente, la Tabla 2.7 muestra el grado de sobrecarga que produce este algoritmo en el sistema. En este caso, se presenta una mejora muy significativa con respecto a los casos anteriores: Algoritmo 1.2, Algoritmo 1.3 y Algoritmo 2.1.

En casi todas las curvas de *input*, excepto para el caso de \mathcal{C}_{11} , la utilización de los recursos hardware: tiempo de uso del microprocesador, tiempo de estancia real en el sistema y capacidad de memoria, muestran la mayor eficiencia.

La excepción que se produce para el caso de la construcción de las asíntotas de la curva \mathcal{C}_{11} , que requiere de mayor cantidad de memoria, del mayor tiempo de CPU y permanece más tiempo el sistema, que para el caso del Algoritmo 2.1.

Obsérvese que el mejor desempeño se obtiene al construir las asíntotas de la curva de la curva más sencilla, \mathcal{C}_4 , con tan solo 2,55 ms. de uso del procesador, 2,68 ms. de permanencia en el sistema y 223,10 KiB de capacidad de memoria. La curva que genera mayor sobrecarga es la \mathcal{C}_{11} , que requiere de de 50 ms. de CPU, con un tiempo real de 48,29 ms. y de 7,27 MiB de memoria.

Tabla 2.8: Recursos hardware requeridos por el Algoritmo 2.2 para curvas paramétricas.

Id.	t. de CPU	t. real de estancia	Memoria utilizada
\mathcal{C}_1	10,18 ms	11,13 ms	803,07 KiB
\mathcal{C}_2	4,16 ms	5,61 ms	347,86 KiB
\mathcal{C}_3	40,48 ms	35,30 ms	5155,88 KiB
\mathcal{C}_4	2.55 ms	2,68 ms	223,10 KiB
\mathcal{C}_5	4.17 ms	5,11 ms	331,83 KiB
\mathcal{C}_6	3.42 ms	3,38 ms	284,55 KiB
\mathcal{C}_7	3.37 ms	3,42 ms	266,60 KiB
\mathcal{C}_8	3.31 ms	3,26 ms	268,50 KiB
\mathcal{C}_9	3.07 ms	3,18 ms	263,64 KiB
\mathcal{C}_{10}	5.38 ms	6,58 ms	421,00 KiB
\mathcal{C}_{11}	50.00 ms	48,29 ms	7446,49 KiB
\mathcal{C}_{12}	13.13 ms	14,51 ms	1234,98 KiB
\mathcal{C}_{13}	8.83 ms	9,14 ms	715,44 KiB
\mathcal{C}_{14}	3.26 ms	3,23 ms	265,36 KiB

A continuación, se analiza el caso particular de las asíntotas obtenidas para la curva \mathcal{C}_{11} , que cuenta con una asíntota compleja de grado cinco, $\tilde{\mathcal{C}}_{11,1}$, y dos asíntotas reales, $\tilde{\mathcal{C}}_{11,2}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{11,3}$, de grados tres y dos, respectivamente. Obsérvese que trabajar con los puntos conjugados de la asíntota compleja es lo que introduce el mayor grado de sobrecarga.

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{\mathcal{P}}_{11,1}(t) := & (t^5, \frac{6208967 \sqrt[5]{4394^2} \sqrt[5]{(-1493 \dots 824\alpha - 6192 \dots 625)^2} \left(\alpha + \frac{7491741216}{13641100499} \right)}{1914932769775390625} t^3 - \\ & - \frac{2892 \dots 111 \sqrt[5]{4394^3} \sqrt[5]{(-1493 \dots 824 \alpha - 6192 \dots 625)^3} \left(\alpha + \frac{3864 \dots 728}{6355 \dots 867} \right)}{20335743339873061418533325195312500} t^2 + \\ & + \frac{\sqrt[5]{4394^4} \sqrt[5]{(-1493 \dots 824 \alpha - 6192 \dots 625)^4} (-1396 \dots 196 \alpha + 16499 \dots 586)}{518390330522050013731796003878116607666015625000000} t + \\ & + \frac{128889 \alpha}{585760} - \frac{10961}{234304} \Big), \text{ donde } m(\alpha) = 0 \text{ y } m(t) := 4394 t^2 + 1146 t + 3125 \in \mathbb{R}[t]. \end{aligned}$$

A partir de esta parametrización se obtienen las siguientes parametrizaciones, operando con los puntos conjugados, como se indica en Observación 2.1.9:

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{\mathcal{P}}_{11,1a} := & \left(t^5, \frac{1-3i}{\sqrt[5]{(6+4i)^3}} t^3 + \frac{141-107i}{52 \sqrt[5]{(6+4i)^2}} t^2 + \frac{8176-2621i}{13520 \sqrt[5]{6+4i}} t - \frac{26531}{351520} - \frac{128889i}{703040} \right), \\ & \text{cuya ecuación implícita expresada como flotante es } \tilde{f}_{11,1}(x, y) = \\ & := 10^4 (-209584557639886848737801666560i + 143555285298761453372191539200)y^5 + \\ & + (103922150218352435473334272000 - 1893151971676388852175585280000i)x y^3 - \\ & - (210682699166190692787136061440i - 137942460607678765135207751680)y^4 + \\ & + (155901658407700373337921290240 - 146938518663272836850785976320i)x^3 + \\ & + (1632265325736613135988567080960 - 1704018388150332665361226465280i)x^2 y + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1521219913585992784724852584448 - 1815245258481560426919918966784i)x y^2 + \\
& + (18775661191700892748181549312i + 98071760518877454592186998016)y^3 - \\
& - (288460496950026530433883531264 - 53911268260023439591833741312i)x^2 + \\
& + 10^3((8027273149819424515195513185152 - 263825938059284100719842176320i)xy + \\
& + (39598138958175055902228248456 + 193966847912944199703237359992i)y^2) + \\
& + (525940440556485418404997621501300 + 623352703886193700441557232144668i)x - \\
& - \frac{32571456263161100562224801963525}{2} + \frac{21899228231874245995726384716575i}{2}y - \\
& - \frac{82856190073989877290413298889817}{128} - \frac{55276933597867270811822650422319i}{128}.
\end{aligned}$$

$$\bullet \tilde{\mathcal{P}}_{11,1b} := \left(t^5, \frac{1+3i}{\sqrt[5]{(6-4i)^3}}t^3 + \frac{141+107i}{52\sqrt[5]{(6-4i)^2}}t^2 + \frac{8176+2621i}{13520\sqrt[5]{6-4i}}t - \frac{26531}{351520} + \frac{128889i}{703040} \right).$$

Su expresión implícita, expresada en coma flotante resulta $\tilde{f}_{11,2}(x, y) :=$

$$\begin{aligned}
& := 10^4((209584557639886848737801666560i - 143555285298761453372191539200)y^5 + \\
& + (103922150218352435473334272000 + 1893151971676388852175585280000i)x y^3 + \\
& + (210682699166190692787136061440i + 137942460607678765135207751680)y^4 + \\
& + (155901658407700373337921290240 + 146938518663272836850785976320i)x^3 + \\
& + (1632265325736613135988567080960 + 1704018388150332665361226465280i)x^2y + \\
& + (1521219913585992784724852584448 + 1815245258481560426919918966784i)x y^2 - \\
& - (18775661191700892748181549312i - 98071760518877454592186998016)y^3 - \\
& - (288460496950026530433883531264 + 53911268260023439591833741312i)x^2 + \\
& + 10^3((8027273149819424515195513185152 + 263825938059284100719842176320i)xy + \\
& + (39598138958175055902228248456 - 193966847912944199703237359992i)y^2) + \\
& + (525940440556485418404997621501300 - 623352703886193700441557232144668i)x - \\
& - \frac{32571456263161100562224801963525}{2} - \frac{21899228231874245995726384716575i}{2}y - \\
& - \frac{82856190073989877290413298889817}{128} + \frac{55276933597867270811822650422319i}{128}.
\end{aligned}$$

- $\tilde{\mathcal{P}}_{11,2}(t) := (t^3, \sqrt[3]{6}t^2 + 4/9\sqrt[3]{36}t + 7/48)$ define una asíntota real, cuya expresión implícita es $\tilde{f}_{11,2}(x, y) := -2985984y^3 + 17915904x^2 + 23887872xy + 1306368y^2 + 5953536x - 190512y + 9261$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{11,3}(t) := (t^2, 1)$, cuya reparametrización propia es $\tilde{\mathcal{M}}_3(t) := (t, 1)$, define la recta horizontal dada por la ecuación implícita $\tilde{f}_{11,3}(x, y) := -y + 1$.

2.3.5 Análisis comparativo del grado de sobrecarga del computador

En esta sección se realiza un análisis comparativo de los algoritmos 1.2, 1.3, 2.1 y 2.2, presentados en las secciones anteriores. Para ello se consideran algunas propiedades de las curvas de entrada, así como los resultados obtenidos al construir las respectivas asíntotas (véase Apéndice B).

Así, la Tabla 2.9 permite valorar la eficiencia de cada algoritmo y establecer criterios comparativos respecto al tiempo de uso de la CPU a partir de la curva más sencilla, es decir, la de menor grado y menor número de términos, \mathcal{C}_4 , respecto de la curva de mayor complejidad, \mathcal{C}_3 .

Tabla 2.9: Propiedades de la curva de entrada y tiempo de microprocesador necesario para ejecutar los Algoritmos 1.2, 1.3, 2.1, 2.2.

Id	N° de términos		Asíntotas				Tiempo de CPU (ms.)				
	Grado	Implícitas	Paramétricas	Grado máx.	N° asint	N° asint reales	N° asint complejas	Alg.1.2	Alg.1.3	Alg.2.1	Alg.2.2
C ₁	7	21	5	2	5	3	2	26,17	16,13	41,74	10,18
C ₂	7	21	3	3	3	3	0	66,13	131,45	11,99	4,16
C ₃	17	114	5	3	5	1	4	362,72	> 10 ⁸	59,25	40,48
C ₄	3	8	3	2	2	2	0	14,86	3,98	7,77	2,55
C ₅	6	25	5	4	3	3	0	168,47	114,12	23,00	4,17
C ₆	4	11	3	2	3	3	0	8,78	2,57	20,78	3,42
C ₇	4	12	3	3	2	2	0	27,70	25,10	9,76	3,37
C ₈	5	13	3	3	2	2	0	76,90	102,26	11,10	3,31
C ₉	5	15	3	1	2	2	0	86,23	47,83	5,92	3,07
C ₁₀	7	19	3	3	3	1	2	75,12	18.496,00	15,30	5,38
C ₁₁	15	58	4	5	4	2	2	119,21	> 10 ⁸	42,77	50,00
C ₁₂	13	31	3	2	7	1	6	8,65	21.726,00	48,13	13,13
C ₁₃	9	22	2	2	5	3	2	7,13	22.877,00	22,06	8,83
C ₁₄	5	15	2	2	2	2	0	76,67	24,00	8,32	3,26

En la Tabla 2.9 se pueden comparar los tiempos de uso de CPU tras la ejecución cada uno de los cuatro algoritmos utilizados para la construcción de asíntotas de las curvas $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_{14}$. Se señalan en rojo los peores resultados y se destacan en verde los cinco mejores tiempos de uso de la CPU, dados principalmente cuando el Algoritmo 2.2 construye las asíntotas de las curvas \mathcal{C}_4 , \mathcal{C}_8 , \mathcal{C}_9 y \mathcal{C}_{14} .

La gráfica de la Figura 2.6 representa el comportamiento de cada uno de los algoritmos, dependiendo del grado de la curva de entrada (eje x), con respecto al tiempo de uso de CPU (eje y) expresado en milisegundos. Nótese que se trata de una gráfica lineal-logarítmica, en base 10, en la que las líneas de tendencia son exponenciales.

Analizando el caso del Algoritmo 2.2, se observa la mayor eficiencia, ya que requiere la menor cantidad de tiempo de uso de CPU. Así mismo, también se muestra que, para todos los algoritmos, el grado de la curva determina el tiempo de microprocesador necesario para construir las asíntotas.

Por otro lado, es destacable que aunque el Algoritmo 1.3 tiene un buen comportamiento con curvas sencillas (véase la curva \mathcal{C}_6 en la Tabla 2.9), sin embargo, el tiempo de uso de CPU se incrementa exponencialmente a medida que crece el grado de la curva de *input* (véase las curvas \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_{11} en la Tabla 2.9).

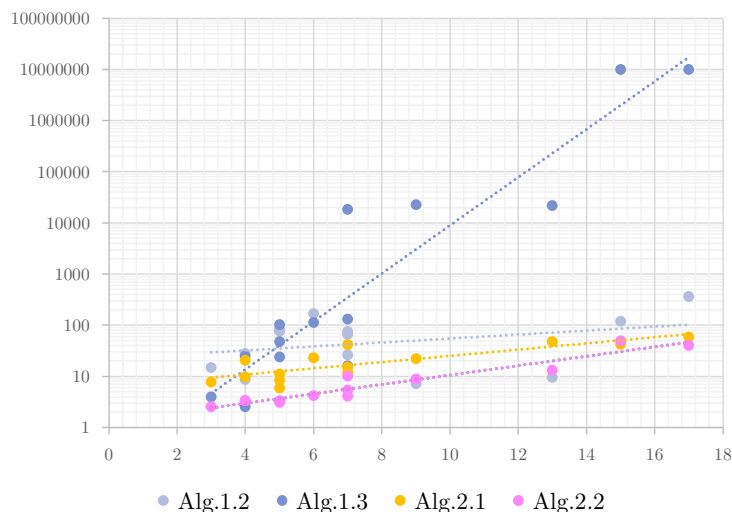


Figura 2.6: Tiempo de uso del microprocesador (ms.) dependiendo del grado.

La gráfica de la Figura 2.7 muestra cómo a medida que se incrementa el número de términos de la curva de *input*, se incrementa el tiempo de CPU necesario para ejecutar el Algoritmo 1.3. Sin embargo, la densidad de la curva de entrada, parece que afecta en menor medida a la eficiencia del resto de los algoritmos analizados. Nótese que, en este caso, no se evalúa el Algoritmo 1.2. Esto es debido a que el caso implícito no permite establecer un criterio comparativo con el resto de algoritmos, en lo que se refiere a la densidad de la curva de entrada.

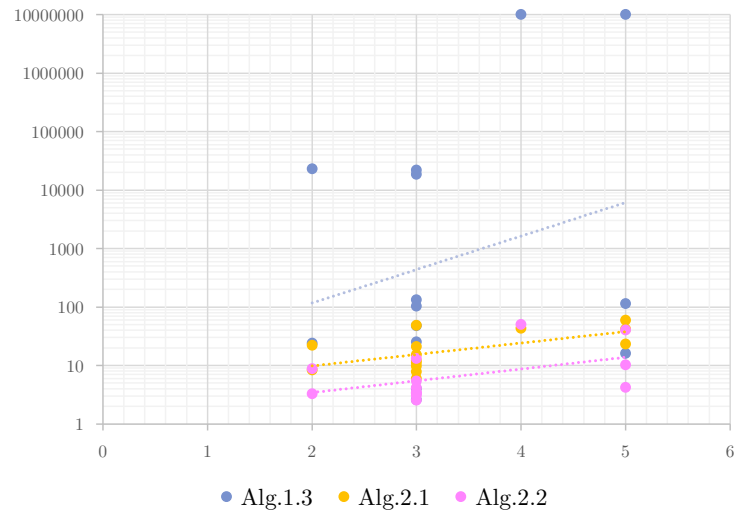


Figura 2.7: Tiempo de uso del microprocesador (ms.) dependiendo del n° de términos.

Por otro lado, del mismo modo ocurre en la gráfica de la Figura 2.8. El Algoritmo 1.3 requiere de un mayor tiempo de uso de CPU en los casos donde se observa que un elevado número de ramas (recuérdese que las líneas de tendencias son exponenciales). Sin embargo, no parece que el número de ramas condicione el tiempo de uso del microprocesador para el caso de los otros algoritmos representados.

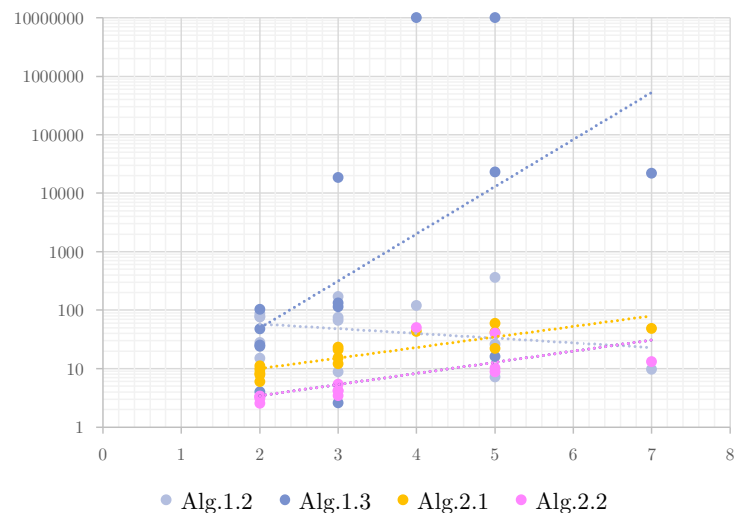


Figura 2.8: Tiempo de uso del microprocesador (ms.) dependiendo del número de ramas.

En la Figura 2.9 se muestra el tiempo de CPU requerido por cada algoritmo, en función del grado mayor de las asíntotas, de cada una de las curvas de *input*. Puede observarse que el Algoritmo 2.2 es el que, en general, presenta la mayor eficiencia, ya que requiere la menor cantidad de tiempo de uso de CPU.

Así mismo, también se muestra que el Algoritmo 1.3 tiene un comportamiento bastante dispar, dado que no parece que el grado de las asíntotas afecte al tiempo de uso de la CPU para este algoritmo.

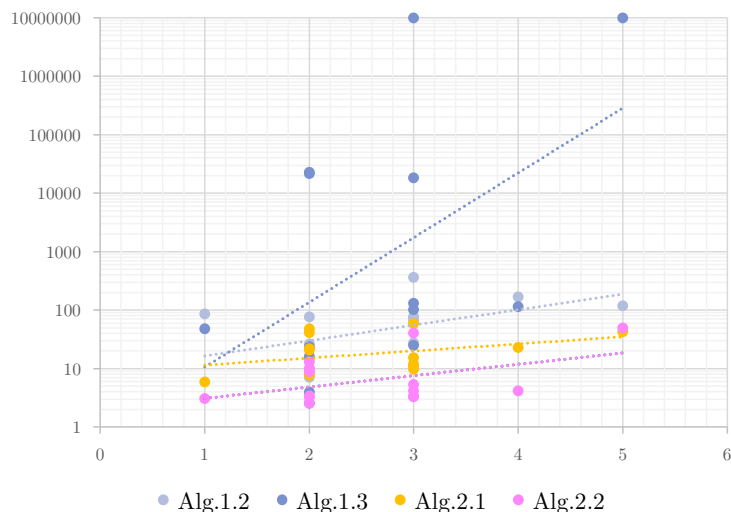


Figura 2.9: Tiempo de uso del microprocesador dependiendo del mayor grado de asíntotas.

La Tabla 2.10 muestra el tiempo real que tarda en ejecutarse cada algoritmo para cada una de las curvas, con unos resultados muy similares a los obtenidos en la Tabla 2.9. Lo cual resulta bastante lógico debido a que ambos tiempos están relacionados.

Se recuerda al lector que el tiempo real se refiere al periodo que transcurre desde que el proceso se inicia hasta que finaliza, es decir, el tiempo que permanece en el sistema. Nótese que, en algunos casos, este tiempo de estancia es inferior al tiempo de uso del microprocesador, esto se debe a que el software de álgebra computacional Maple realiza la ejecución en un sistema con varios núcleos. En este caso, el tiempo de uso de la CPU es la suma de todos los tiempos de uso de los diferentes núcleos microprocesador. Esta suma, es la que determina el valor total de CPU dado en la Tabla 2.9.

Obsérvese en Tabla 2.10 que se destacan en rojo los peores resultados globales, arrojados cuando se ejecuta el Algoritmo 1.3 con las curvas de *input* C_3 y C_{11} . Además, se muestran en color verde los cinco mejores tiempos de uso de la CPU, dados cuando se ejecuta el Algoritmo 1.3 con la curva de entrada C_6 y cuando se construyen las asíntotas de las curvas C_4 , C_8 , C_9 y C_{14} con el Algoritmo 2.2.

Puede comprobarse que estos resultados muestran una eficiencia semejante a la obtenida cuando se computa el tiempo de uso de CPU (véase la Tabla 2.9).

Tabla 2.10: Propiedades de la curva de entrada y tiempo real de estancia en el sistema necesario para ejecutar los Algoritmos 1.2, 1.3, 2.1, 2.2.

Id	Grado		N° de términos		Grado máx.			Asíntotas			Tiempo real de estancia en el sistema (ms.)				
	Implícitas	Paramétricas	Implícitas	Paramétricas	N° asint	N° asint reales	N° asint complejas	Alg.1.2	Alg.1.3	Alg.2.1	Alg.2.2	Alg.1.2	Alg.1.3	Alg.2.1	Alg.2.2
C_1	7	21	5	5	5	3	2	25,06	20,38	44,93		25,06	20,38	44,93	11,13
C_2	7	21	3	3	3	3	0	31,56	117,78	13,44		31,56	117,78	13,44	5,61
C_3	17	114	5	5	5	1	4	283,47	> 10^8	62,82		283,47	> 10^8	62,82	35,3
C_4	3	8	3	3	2	2	0	16,88	3,6	11,4		16,88	3,6	11,4	2,68
C_5	6	25	5	5	3	3	0	124,77	63,74	18,78		124,77	63,74	18,78	5,11
C_6	4	11	3	3	3	3	0	8,09	2,69	11,31		8,09	2,69	11,31	3,38
C_7	4	12	3	3	2	2	0	39,57	26,58	10,73		39,57	26,58	10,73	3,42
C_8	5	13	3	3	2	2	0	40,75	72,53	11,56		40,75	72,53	11,56	3,26
C_9	5	15	3	3	2	2	0	45,01	25,44	6,48		45,01	25,44	6,48	3,18
C_{10}	7	19	3	3	3	1	2	51,87	16028	16,5		51,87	16028	16,5	6,58
C_{11}	15	58	4	4	4	2	2	82,42	> 10^8	31,43		82,42	> 10^8	31,43	48,29
C_{12}	13	31	3	3	7	1	6	7,93	18961	34,53		7,93	18961	34,53	14,51
C_{13}	9	22	2	2	5	3	2	6,88	17054	17,93		6,88	17054	17,93	9,14
C_{14}	5	15	2	2	2	2	0	52,47	24,00	8,49		52,47	24,00	8,49	3,23

Tabla 2.11: Propiedades de la curva de entrada y capacidad de memoria necesaria para ejecutar los Algoritmos 1.2, 1.3, 2.1, 2.2.

Id	Grado	Nº de términos			Grado máx.	Asíntotas			Capacidad de memoria (KiB)			
		Implícitas	Paramétricas	Paramétricas		Nº asínt	Nº asínt reales	Nº asínt complejas	Alg.1.2	Alg.1.3	Alg.2.1	Alg.2.2
C_1	7	21	5	5	2	3	2	1978,84	2.014,46	4.815,36	803,07	
C_2	7	21	3	3	3	3	0	1386,33	17.305,41	1.241,23	347,86	
C_3	17	114	5	5	3	1	4	10806,75	> 10 ⁸	5.910,91	5.155,88	
C_4	3	8	3	2	2	2	0	810,67	276,03	587,45	223,10	
C_5	6	25	5	3	4	3	0	3758,74	10.630,93	1.836,80	331,83	
C_6	4	11	3	3	2	3	0	695,43	288,92	832,64	284,55	
C_7	4	12	3	2	3	2	0	1425,48	3.193,96	871,49	266,60	
C_8	5	13	3	2	3	2	0	1924,63	8.634,75	973,96	268,50	
C_9	5	15	3	2	1	2	0	1755,44	2.832,28	527,17	263,64	
C_{10}	7	19	3	3	3	1	2	1333,29	1795206,41	1.302,70	421,00	
C_{11}	15	58	4	4	5	2	2	3706,32	> 10 ⁸	2.796,50	7.446,49	
C_{12}	13	31	3	7	2	1	6	782,95	2.720.673,58	3.242,84	1.234,98	
C_{13}	9	22	2	5	2	3	2	602,33	2.667.242,91	1.390,01	715,44	
C_{14}	5	15	2	2	2	2	0	1875,11	3.668,91	636,60	265,36	

Finalmente, la Tabla 2.11 permite comparar las necesidades de memoria de los algoritmos analizados. Se señalan en rojo los peores resultados y se destacan en verde los cinco mejores tiempos de uso de la CPU, dados por el Algoritmo 2.2, al construir las asintotas de las curvas C_4 , C_7 , C_8 , C_9 y C_{14} .

Con este recurso hardware, el algoritmo que marca los mejores resultados es el 2.2, seguido del Algoritmo 2.1 y del Algoritmo 1.2. Sin embargo, para el caso del Algoritmo 1.3 los requisitos hardware de memoria crecen exponencialmente con el grado de la curva de entrada y el número de términos de la curva de *input*.

Las gráficas de la Figura 2.10 y de la Figura 2.11 reflejan el comportamiento de cada uno de los algoritmos, considerando los parámetros de la curva de *input* con respecto a la memoria.

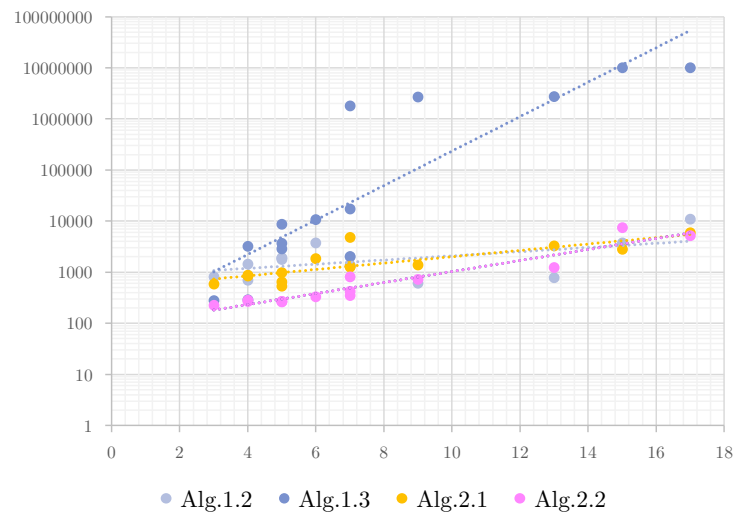


Figura 2.10: Capacidad de memoria necesaria (KiB) dependiendo del grado.

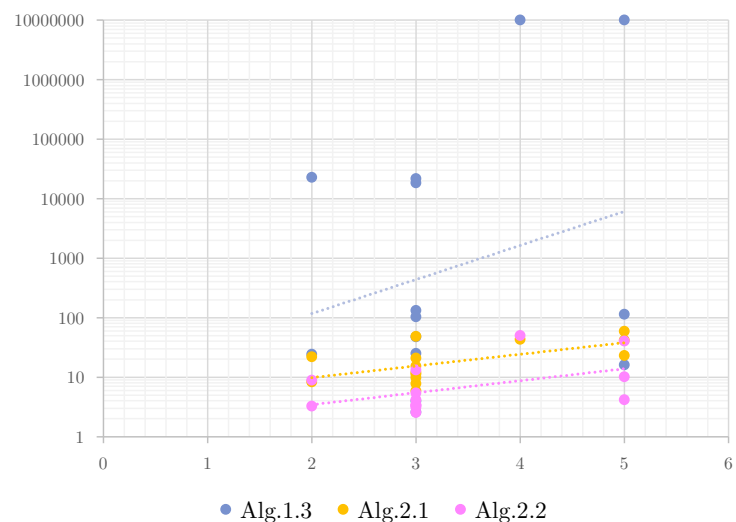


Figura 2.11: Capacidad de memoria necesaria (KiB) dependiendo del nº de términos.

Para el análisis de estas gráficas, se recuerda que el eje y es logarítmico, base 10, y que las líneas de tendencia son exponenciales.

Por otro lado, al observar la Figura 2.12 no parece que el número de ramas sea una condición determinante para las necesidades de memoria en el caso de los algoritmos analizados. Lo mismo ocurre en la gráfica de la Figura 2.13. En ambos casos puede observarse que el Algoritmo 2.2 es el que, en general, presenta la mayor eficiencia, con la menor cantidad de memoria necesaria para poder ejecutarse. Sin embargo, el Algoritmo 1.3 tiene un comportamiento bastante dispar, dado que ni el número de ramas, ni el mayor grado de las asíntotas parece que determine los requerimientos de memoria para ejecutar el algoritmo. Por ejemplo, puede observarse que para las asíntotas cuyo grado máximo es dos, las necesidades de memoria pueden oscilar entre los 276,03 KiB de la curva C_4 y los 2,59 GiB de la curva C_{12} .

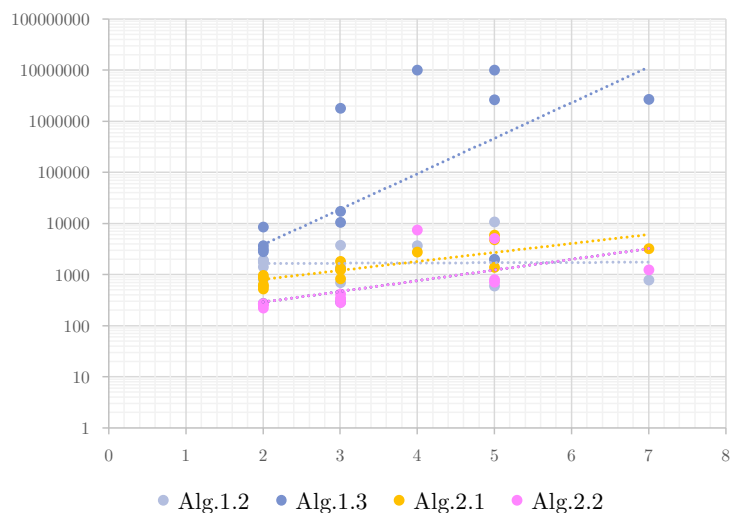


Figura 2.12: Capacidad de memoria necesaria (KiB) dependiendo del número de ramas.

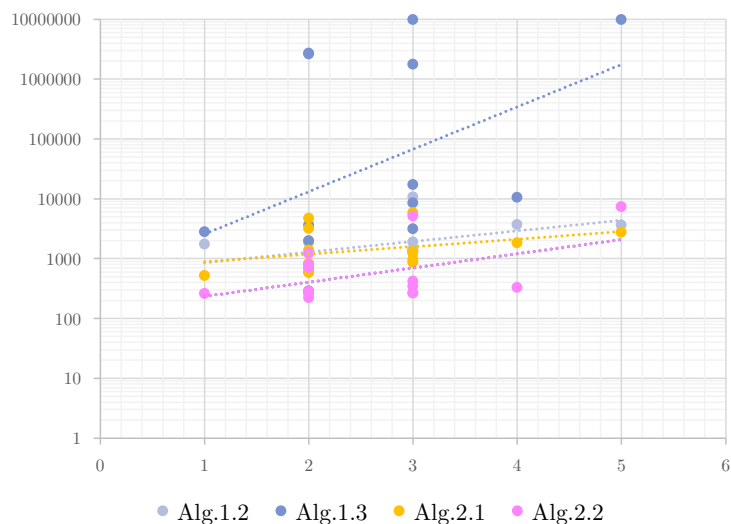


Figura 2.13: Capacidad de memoria necesaria, en KiB, según la asíntota de grado máximo.

Finalmente, se puede afirmar que el Algoritmo 2.2 es el que presenta mejor rendimiento computacional, requiriendo la menor cantidad de recursos hardware: tiempo de CPU, tiempo real de ejecución y cantidad de memoria. Así mismo, también se muestra que para todos los algoritmos, el grado de la curva es el parámetro que determina, en mayor medida, la cantidad de recursos del sistema necesarios para construir las asíntotas.

Por otro lado, es destacable que el Algoritmo 1.3 tiene un buen comportamiento con curvas sencillas, véanse los valores para el caso de las curvas \mathcal{C}_4 y \mathcal{C}_6 en la Tabla 2.9, Tabla 2.10 y Tabla 2.11, respectivamente. Sin embargo, se trata de un algoritmo muy “pesado” cuando crece el grado de la curva de *input* y el número de términos, en cuyo caso se incrementan exponencialmente las necesidades hardware de dicho algoritmo (véanse las curvas \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_{11} en las tablas anteriores).

Los resultados de esta evaluación han evidenciado cómo los algoritmos desarrollados en esta investigación, y presentados en este capítulo, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2, además de mejorar el grado de sobrecarga del sistema, son más eficientes que los descritos en el Capítulo 1, destacando principalmente los resultados del Algoritmo 2.2.

Por el contrario, el Algoritmo 1.3 es el que requiere de más recursos, generando la mayor sobrecarga en el sistema, debido principalmente a la complejidad introducida por el cómputo de las series de Puiseux. Además, a mayor precisión para la obtención de la serie, el proceso requiere de una mayor capacidad de memoria y mayor tiempo de ejecución.

Tras realizar este análisis, se tienen las siguientes conclusiones relativas a los principales aspectos que condicionan la mayor sobrecarga en el sistema, cuando se construyen las g-asíntotas de una curva dada:

- El grado de la curva de *input*.
- El número de términos de la curva de *input*.
- El grado de las asíntotas complejas.

Por otro lado, se ha observado que la precisión aplicada al realizar el desarrollo en series de Puiseux determina la capacidad de memoria que necesita el proceso. A mayor precisión, crece exponencialmente el requisito de memoria y también, aunque en menor medida, el del tiempo de CPU y el tiempo real de ejecución.

Estos resultados apoyan la idea de que los métodos propuestos pueden usarse de manera efectiva para la solución de problemas a gran escala, sin los altos requisitos de utilización de recursos computacionales impuestos por los métodos previos, basados en el desarrollo de las series de Puiseux.

Además, estos dos nuevos algoritmos, el Algoritmo 2.1 y el Algoritmo 2.2, mejoran la eficiencia de los anteriores métodos basados en la construcción de asíntotas de curvas algebraicas planas, Algoritmo 1.2 y Algoritmo 1.3, mostrando un mayor rendimiento computacional, requiriendo de una menor cantidad de recursos hardware, y reduciendo considerablemente el grado de sobrecarga del computador.

2.4 Algunas aplicaciones

Sea el punto infinito $P = (1 : m : 0)$ y la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = (q_1(s) : q_2(s) : q_3(s)) = (q_1(s) : q_2(s) : \bar{q}_3(s) \bar{q}(s))$$

tal que τ_1, \dots, τ_u son las raíces (diferentes) de $\bar{q}_3(s)$ y $\bar{q}(\tau_j) \neq 0$ y $q_2(\tau_j)/q_1(\tau_j) = m$ para $j = 1, \dots, u$. Para $j = 1, \dots, u$, se denota con N_j la multiplicidad de τ_j como raíz del polinomio $\bar{q}_3(s)$.

Se asume que, en caso necesario, se ha preparado la curva de *input* \mathcal{C} mediante el adecuado cambio lineal de coordenadas, de tal forma que se verifica que $(0 : 1 : 0)$ no es un punto de infinito.

En estas condiciones se enuncian los siguientes teoremas y resultados, que muestran la relación entre el índice de ramificación, el grado de la asíntota, la forma de infinito y las multiplicidades de los puntos de infinito.

Así, en [4], dada una curva plana algebraica \mathcal{C} , definida implícitamente, se determina su “familia asíntótica”, es decir, el conjunto de curvas algebraicas que tienen el mismo comportamiento asíntótico que \mathcal{C} . Obsérvese que el caso de una curva con una única rama regular en el infinito (es decir, curvas con un único punto de infinito regular) se aborda en [31, Teo. 3]. En [4] se consideran curvas con dos o más ramas regulares en el infinito. De manera más concreta, en [4], se demuestra que el comportamiento asíntótico de una “curva regular” de grado d definida implícitamente (una curva implícita cuyos puntos de infinito son todos regulares) está completamente determinado por sus formas homogéneas de grado d y $d - 1$, y viceversa.

Es decir, a partir de dichas formas se puede calcular una asíntota para cada rama infinita de la curva. Asimismo, dado un conjunto de asíntotas regulares (curvas regulares perfectas), se determina el conjunto de todas las curvas a las que esas asíntotas se aproximan en sus diferentes ramas infinitas. En otras palabras, se puede determinar la familia de curvas cuyo comportamiento asíntótico está definido por ese conjunto de asíntotas.

Índice de ramificación y grado de la asíntota

En primer lugar presentamos propiedades concernientes al índice de ramificación y el grado de la asíntota. De manera más concreta, el siguiente teorema describe la relación existente entre el índice de ramificación y el grado de una asíntota.

Teorema 2.4.1. *Para cada $j = 1, \dots, u$, se tiene que el índice de ramificación de una rama asociada a $P = (1 : m : 0)$ es N_j (número de hojas), tal que*

$$B_j = \{(z, r_j(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_j\},$$

donde

$$r_j(z) = m z + a_{k_{1j}} z^{k_{1j}/N_j} + \dots + a_{0j} + a_{-1j} z^{-1/N_j} + a_{-2j} z^{-2/N_j} + \dots$$

y $0 \leq k_{1j} < N_j$ es el primer número natural tal que $a_{k_{1j}} \neq 0$. Además, para cada $j = 1, \dots, u$, la asíntota viene definida por la parametrización racional

$$\tilde{\mathcal{P}}_j(t) = (t^{N_j}, m t^{N_j} + a_{k_{1j}} t^{k_{1j}} + \dots + a_{0j}).$$

El grado de la asíntota es $n_j = N_j/\beta_j$, donde $\beta_j := \text{mcd}(N_j, k_{1j}, \dots, k_{1j} - i)$ para cada $i = 0, \dots, k_{1j} - 1$ tal que $a_{ij} \neq 0$.

Demostración. Este teorema se obtiene de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.5.

Obsérvese que para cada $j = 1, \dots, u$, el grado de la asíntota no es necesariamente N_j , ya que $\tilde{\mathcal{P}}_j(t)$ podría ser impropia. Esto es equivalente a que el $\text{mcd}(N_j, k_{1j}, \dots, k_{1j} - i)$ sea distinto de 0, para cada $i = 0, \dots, k_{1j} - 1$ tal que $a_{ij} \neq 0$.

En estas condiciones, para cada $j = 1, \dots, u$, sea $\beta_j := \text{mcd}(N_j, k_{1j}, \dots, k_{1j} - i)$ y $n_j = N_j/\beta_j$ para $i = 0, \dots, k_{1j} - 1$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Así, se tiene que

$$\tilde{\mathcal{M}}_j(t) = (t^{n_j}, m t^{n_j} + a_{k_{1j}} t^{k_{1j}/\beta_j} + \dots + a_0)$$

es una reparametrización propia de $\tilde{\mathcal{P}}_j(t)$. En consecuencia, se tiene que el grado de la asíntota es n_j (véase Observación 2.1.3). \square

A continuación se presentan propiedades relacionadas con la forma de grado máximo y la multiplicidad de los puntos de infinito.

Forma de grado máximo y multiplicidad de los puntos de infinito

Se comienza con el siguiente teorema probado en [31, Lem. 2] y con el Corolario 2.4.3, que describe la forma de grado máximo y los puntos de infinito.

Teorema 2.4.2. *Se tiene que $(x - my)^{N_1 + \dots + N_u}$ divide a la forma de grado máximo de la ecuación implícita definida por la curva dada.*

Corolario 2.4.3. *Sea $\mathcal{P}(s) = (q_1(s) : q_2(s) : q(s))$ tal que $q(s) = \prod_{i=1}^d \bar{q}_i(s)$ y para cada raíz τ de $\bar{q}_i(s)$, se tiene que $q_2(\tau)/q_1(\tau) = m_i$. La forma de grado máximo de la ecuación implícita definida por la curva de input viene dada por $\prod_{i=1}^d (x - m_i y)^{\text{grado}(\bar{q}_i)}$ y los puntos de infinito son $P_i = (1 : m_i : 0)$ para $i = 1, \dots, d$.*

A continuación se resumen algunas propiedades de las multiplicidades y singularidades de los puntos de infinito. Estas propiedades resultan fundamentales para entender algunos resultados que se presenta a continuación, como el Teorema 2.4.12. Véanse [43, 45] para más información.

Definición 2.4.4. *Sea \mathcal{C} una curva plana afín sobre \mathbb{R} definida por el polinomio irreducible $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, y sea $p = (a, b) \in \mathcal{C}$. Se dice que p tiene multiplicidad r en \mathcal{C} , si y solo si todos los las derivadas de $f(x, y)$ hasta el $(r - 1)$ -ésima, inclusive, se anulan en p , pero existe una derivada de orden r que no es nula en p . En lo sucesivo, la multiplicidad de p en \mathcal{C} se denota por $\text{mult}_p(\mathcal{C})$.*

El punto p es un punto simple en \mathcal{C} si y si solo si $\text{mult}_p(\mathcal{C}) = 1$. Si $\text{mult}_p(\mathcal{C}) = r > 1$, entonces p es un punto múltiple, singular o una singularidad de multiplicidad r en \mathcal{C} . Si $r = 2$,

entonces p se llama punto doble, si $r = 3$ punto triple, si $r = 4$ punto cuádruple, etc. Se dice que una curva es no singular si no tiene puntos singulares.

Claramente $p \notin \mathcal{C}$ si y solo si $\text{mult}_p(\mathcal{C}) = 0$. Si \mathcal{C} es una recta, entonces para cada $p \in \mathcal{C}$ se tiene que $\text{mult}_p(\mathcal{C}) = 1$; es decir, \mathcal{C} no es singular. Además, para cada punto $p \in \mathcal{C}$ se tiene que $1 \leq \text{mult}_p(\mathcal{C}) \leq \text{grado}(\mathcal{C})$.

Las singularidades de la curva \mathcal{C} definida por f son puntos del conjunto algebraico afín $V\left(f(x, y), \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$. Este conjunto es 0-dimensional, es decir, cada curva tiene un número finito de singularidades.

En el siguiente teorema se demuestra que la noción de multiplicidad es invariante con cambios lineales de coordenadas.

Teorema 2.4.5. *Sea la curva \mathcal{C} definida por $f(x, y)$, $p \in \mathcal{C}$ y T una aplicación lineal invertible sobre \mathbb{R}^2 (es decir, un cambio lineal de coordenadas), tal que $T(\bar{p}) = p$. Sea $\bar{\mathcal{C}}$ definida por $\bar{f}(x, y) = f(x, y) \circ T$. La multiplicidad de p en \mathcal{C} es la misma que la multiplicidad de \bar{p} en $\bar{\mathcal{C}}$.*

Teorema 2.4.6. *Sea \mathcal{C} una curva plana afín definida por $f(x, y)$. La multiplicidad de \mathcal{C} en el origen es el mínimo de los grados de los componentes homogéneos distintos de cero de $f(x, y)$.*

Teniendo en cuenta el Teorema 2.4.5, la multiplicidad de p también se puede determinar desplazando p al origen mediante un cambio lineal de coordenadas y aplicando el Teorema 2.4.6.

Sea $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto de multiplicidad r ($r \geq 1$) de la curva \mathcal{C} definida por el polinomio $f(x, y)$. Entonces, la primera componente no nula del desarrollo de Taylor de $f(x, y)$ en p es

$$T_r(x, y) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{r-i}}(p) (x-a)^i (y-b)^{r-i}.$$

Mediante un cambio lineal de coordenadas que desplace p al origen del polinomio, se transforma $T_r(x, y)$ en un polinomio homogéneo bivariado de grado r . Por lo tanto, dado que el número de factores de un polinomio es invariante tras los cambios lineales de coordenadas, se obtiene que todos los factores irreducibles de T_r son lineales. Estos son las tangentes a la curva en p .

Definición 2.4.7. *Sea \mathcal{C} una curva plana afín con un polinomio definido por $f(x, y)$ y $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\text{mult}_p(\mathcal{C}) = r \geq 1$. Entonces la tangentes a \mathcal{C} en p son los factores irreducibles del polinomio*

$$\sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \frac{\partial^r f}{\partial x^i \partial y^{r-i}}(p) (x-a)^i (y-b)^{r-i}$$

ya la multiplicidad de una tangente es la multiplicidad del factor correspondiente.

Para analizar un punto singular p en una curva \mathcal{C} es necesario conocer tanto su multiplicidad, como también las multiplicidades de las tangentes en p . Si todas las r tangentes al punto de multiplicidad r de p son diferentes, entonces esta singularidad tiene un “buen” comportamiento. Es decir, cuando se traza la curva a través de p , se puede seguir la tangente y luego aproximarse de nuevo a la curva. Esto no es posible cuando algunas de las tangentes son las mismas.

Definición 2.4.8. *Un punto singular p de multiplicidad r en una curva plana afín \mathcal{C} se llama ordinario, si y solo si las r tangentes a \mathcal{C} en p son distintas, y no ordinario si ocurre al contrario. También se dice que el carácter de p es ordinario o no ordinario, respectivamente.*

Teorema 2.4.9. *Sea la curva \mathcal{C} definida por $f(x, y)$, $p \in \mathcal{C}$ y T una aplicación lineal invertible en \mathbb{R}^2 (es decir, un cambio lineal de coordenadas), tal que $T(\bar{p}) = p$. Sea $\bar{\mathcal{C}}$ definida por $\bar{f}(x, y) = f(x, y) \circ T$. Entonces T define una correspondencia biunívoca, conservando multiplicidades entre las tangentes a \mathcal{C} en p y las tangentes a $\bar{\mathcal{C}}$ en \bar{p} .*

Corolario 2.4.10. *El carácter de un punto singular es invariante tras un cambio lineal de coordenadas.*

De los resultados anteriores, Teoremas 2.4.5, 2.4.6 y 2.4.9, se obtiene el siguiente lema.

Lema 2.4.11. *Sea \mathcal{C} una curva plana afín definida por el polinomio $f(x, y) = \prod_{i=1}^n f_i$, donde todas las componentes $f_i(x, y)$ son irreducibles. Sea \mathcal{C}_i la componente de \mathcal{C} definida por $f_i(x, y)$. Sea p un punto en \mathbb{R}^2 , entonces, se cumple que:*

1. $\text{mult}_p(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \text{mult}_p(\mathcal{C}_i)$.
2. Si L es tangente a \mathcal{C}_i en p con multiplicidad s_i , entonces L es tangente a \mathcal{C} en p con multiplicidad $\sum_{i=1}^n s_i$.

Es importante destacar que estos resultados se generalizan de manera natural al caso proyectivo [43].

Según todo lo anterior, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en este capítulo, se puede describir la multiplicidad de un punto infinito como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.12. *Se tiene que $P = (1 : m : 0)$ es un punto de multiplicidad $\sum_{j=1}^u (N_j - k_{1j})$, tanto en la asíntota como en la curva de entrada.*

Demostración. Si $N_j - k_{1j} \geq 2$ y como

$$\frac{\partial^i}{\partial^i t} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) (s_j) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, N_j - k_{1j} - 1$$

y

$$\frac{\partial^{N_j - k_{1j}}}{\partial^{N_j - k_{1j}} t} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) (s_j) \neq 0$$

(véase Teorema 2.2.1), se tiene que $a_{N_j - i} = 0$ para $i = 1, \dots, N_j - k_{1j} - 1$ y $a_{k_{1j}} \neq 0$. Es más, también se tiene que

$$G(t) = \text{mcd}(q_2(t) - m q_1(t), (t - s_j)^{N_j} \bar{q}(t)) = \prod_{j=1}^u (t - s_j)^{N_j - k_{1j}},$$

lo que implica que $\text{grado}(G) = \sum_{j=1}^u (N_j - k_{1j})$. Por tanto, se concluye que $P = (1 : m : 0)$ es un punto de multiplicidad $\sum_{j=1}^u (N_j - k_{1j})$ (véase Definición 2.4.4). \square

Según el Teorema 2.4.12 y utilizando el Teorema 2 de [64], se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.4.13. *Sea $P = (1 : m : 0)$ un punto de infinito cuya multiplicidad es $\sum_{j=1}^u (N_j - k_{1j}) \geq 2$. Entonces, P es un punto singular. Además, es no-ordinario, si y solo sí se cumple una de las afirmaciones siguientes:*

1. *Existe al menos una raíz $s_i \in \mathbb{C}$ de $q(t)$ de multiplicidad $N_i \geq 2$.*
2. *Si $N_i = 1$, $i = 1, \dots, u$ y, al menos, existen dos raíces $s_0, s_1 \in \mathbb{C}$ tales que*

$$q_1(s_1)(q_2'(s_0) - m q_2'(s_1)) = (q_1'(s_0) - m q_1'(s_1))q_2(s_1), \quad m = q'(s_0)/q'(s_1).$$

Demostración.

1. Teniendo en cuenta la demostración 2.4.12 y aplicando el Teorema 2, afirmación 1, de [64], se tiene que $P = (1 : m : 0)$ es una singularidad no-ordinaria de multiplicidad $\sum_{j=1}^u (N_j - k_{1j})$ en la asíntota y también en la curva de *input*. En efecto, nótese que

$$\frac{\partial^i}{\partial^i t} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) (s_j) = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, N_j - k_{1j} - 1$$

y

$$\frac{\partial^{N_j - k_{1j}}}{\partial^{N_j - k_{1j}} t} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) (s_j) \neq 0$$

(véase Teorema 2.2.1).

2. Se aplica el Teorema 2, afirmación 2, de [64].

□

Finalmente, se considera el siguiente caso particular, que es la situación común para las aplicaciones reales, en las que la parametrización de entrada tiene algunas perturbaciones previas. Este teorema se obtiene a partir de los resultados anteriores.

Teorema 2.4.14. *Sea*

$$\mathcal{P}(t) = (q_1(t) : q_2(t) : \prod_{j=1}^u (t - s_j) \bar{q}(t)), \quad \bar{q}(s_j) \neq 0 \text{ y } q_2(s_j)/q_1(s_j) = m$$

para $j = 1, \dots, u$ y $s_i \neq s_j$ para cada $i \neq j$ y $i, j \in \{1, \dots, u\}$. *Se tiene que:*

1. *Existen u ramas diferentes asociadas a $P = (1 : m : 0)$, y cada rama tiene una hoja.*
2. *$p = (1 : m : 0)$ es un punto de multiplicidad u , ya que $G(t) = \text{mcd}(q_2(t) - m q_1(t), \prod_{j=1}^u (t - s_j) \bar{q}(t)) = \prod_{j=1}^u (t - s_j)$. Es decir, $\text{grado}(G) = u$.*
3. *Las asíntotas son*

$$\tilde{\mathcal{P}}_j(t) = (t, a_{1j}t + a_{0j}), \quad j = 1, \dots, u$$

donde

$$a_{1j} = m = \frac{q_2}{q_1}(s_j), \quad a_{0j} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) (s_j) \frac{q_1(s_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^u (s_j - s_i) \bar{q}(s_j)}, \quad j = 1, \dots, u.$$

4. $(x - my)^u$ divide a la forma de grado máximo de la ecuación implícita definida por la curva dada.

A continuación, los teoremas y corolarios precedentes se ilustran con un ejemplo.

Ejemplo 2.4.15. Sea C la curva plana introducida en el Ejemplo 2.2.4 definida por la parametrización

$$\mathcal{P}(s) = \left(\frac{s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{s^4(s-1)(s-2)}, \frac{1/27(-108 - 216s + 27s^4 - 367s^3 - 2440s^2)}{s^4(s-1)(s-2)} \right) \in \mathbb{R}(s)^2.$$

Utilizando los Teoremas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.12 y los Corolarios 2.4.3 y 2.4.13, se obtienen las siguientes propiedades sobre los puntos de infinito.

1. Se tiene que (véase Teorema 2.4.1):

- (a) El punto $(1 : -388/27 : 0)$ es un punto de infinito que tiene dos ramas con índice de ramificación igual a $N_1 = N_2 = 1$.
- (b) El punto $(1 : -4 : 0)$ es un punto de infinito que tiene una rama con índice de ramificación igual a $N_3 = 4$.

En las primeras dos ramas, se tiene que $k_{11} = k_{12} = 1$, pero en la tercera se obtiene que $k_{13} = 2$. Además, el grado de las asíntotas son 1, 1 y $4/2 = 2$, respectivamente.

2. La forma de grado máximo de la ecuación implícita es $(x + 388/27y)^2(x + 4y)^4$ (véase Teorema 2.4.2 y Corolario 2.4.3).
3. Se tiene que (véase Teorema 2.4.12 y Corolario 2.4.13):

- (a) El punto $(1 : -388/27 : 0)$ es una singularidad ordinaria de multiplicidad $\sum_{j=1}^2 (N_j - k_{1j}) = (1 - 0) + (1 - 0) = 2$.
- (b) El punto $(1 : -4 : 0)$ es una singularidad no ordinaria de multiplicidad $(N_3 - k_{13}) = (4 - 2) = 2$.

Utilizando los resultados expuestos en esta sección, así como el Teorema 2.2.1, el siguiente ejemplo ilustra cómo construir todas las familias de curvas paramétricas a partir de sus asíntotas [1, Obs. 5]. Estos resultados se encuentran ya publicados para el caso de curvas implícitas y se pretende ampliar su estudio para tratar el caso de puntos infinitos no regulares [4].

Ejemplo 2.4.16. Sean las curvas \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 definidas por las parametrizaciones propias

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) = (t, -12/61t + 53/122) \quad y$
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) = (t^3, 4t^3 - 89/6 - 7 \cdot 2^{1/3} t).$

En este ejemplo se construyen todas las curvas planas, C , definidas por una parametrización $\mathcal{P}(t)$, que tienen como asíntotas a \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 .

En primer lugar, de cada asíntota se deduce que:

1. $(1 : -12/61 : 0)$ es un punto infinito de $\tilde{\mathcal{P}}_1(t)$, que es simple y tiene una sola rama y $N_1 = 1$.
2. $(1 : 4 : 0)$ es un punto infinito de $\tilde{\mathcal{P}}_2(t)$, con multiplicidad 2 y una sola rama con $N_2 = 3$.
3. $k_{11} = k_{12} = 1$.
4. El grado de las asíntotas es 1 y 3, respectivamente.
5. La forma de grado máximo de la ecuación implícita es $(x + 12/61 y)(x - 4y)^3$.

Por lo tanto, $\text{grado}(\mathcal{P}) = 4$, donde $\mathcal{P}(s)$ determina todas las parametrizaciones propias que tienen estas asíntotas.

En consecuencia, podemos deducir que $\mathcal{P}(s)$ viene dada como

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{q_1(s)}{q(s)}, \frac{q_2(s)}{q(s)} \right),$$

donde $q(s) = s^3(s - \tau)$, $\tau \neq 0$ y

$$q_i(t) = \beta_{i4}s^4 + \beta_{i3}s^3 + \beta_{i2}s^2 + \beta_{i1}s + \beta_{i0}, \quad q_i(0)q_i(\tau) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

A continuación, se calculan las asíntotas con el Teorema 2.2.1.

Raíz $s = 0$: Se calcula la asíntota $\tilde{\mathcal{P}}_2(s)$, siendo:

$$\sigma(s) := \frac{q_2}{q_1} \quad y \quad \rho(s) := \frac{q_1^{1/3}}{(s - \tau)^{1/3}}.$$

Se obtienen las siguientes igualdades:

$$a_3 = \sigma(0) = 4.$$

$$a_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0)\rho(0) = 0.$$

$$a_1 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} \cdot \rho(s)^2 \right) (0) = -7 \cdot 2^{1/3}.$$

$$a_0 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} \cdot \rho(s)^3 \right) (0) = -89/6.$$

Raíz $s = \tau$: Se calcula la asíntota $\tilde{\mathcal{P}}_1(s)$, siendo:

$$\rho(s) := \frac{q_1}{s^3}.$$

Se obtienen las siguientes igualdades:

$$a_1 = \sigma(\tau) = -12/61.$$

$$a_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(\tau)\rho(\tau) = 53/122.$$

En estas condiciones, los puntos de intersección comunes a las seis curvas definidas por estas ecuaciones anteriores, determinan las siguientes familias de parametrizaciones, que definen curvas que tienen como asíntotas a las curvas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

Si se considera $\tau = 4$, se obtiene por ejemplo:

- $q_1(s) = b_{14}s^4 + b_{13}s^3 - 3413/384s^2 - 1003/768s^2b_{11} + 427/768is^2b_{11}\sqrt{3} + 427/384is^2\sqrt{3} - b_{13}s^2 + b_{11}s + 1.$
- $q_2(s) = 4 - 4b_{13}s^2 - 12/61b_{14}s^4 + 4b_{13}s^3 + 4b_{11}s - 235/732s^4b_{11} - 7/3is^3b_{11}\sqrt{3} + 7/12is^4b_{11}\sqrt{3} - 245/96is^2\sqrt{3} - 4651/732s^4 + 82/3s^3 - 2741/96s^2 + 7/3s^3b_{11} - 1003/192s^2b_{11} - 64/61s^4b_{13} + 427/192is^2b_{11}\sqrt{3} - 7/12is^4\sqrt{3} + 7/3is^3\sqrt{3}.$

En [4] se describe una *familia asintótica* de una curva algebraica plana \mathcal{C} , definida implícitamente, como el conjunto de curvas algebraicas que tienen el mismo comportamiento asintótico que \mathcal{C} .

Concretamente, dada una curva \mathcal{C} asintóticamente regular definida implícitamente (es decir, que solo tiene una única asíntota para cada rama infinita), se puede obtener toda la familia de curvas asintóticamente regulares con el mismo comportamiento asintótico que \mathcal{C} , simplemente modificando los términos de grado menor que $d - 1$ en la ecuación implícita. A estos términos se les denomina *términos irrelevantes*.

Por tanto, dado un conjunto de curvas regulares perfectas asociadas a diferentes puntos de infinito, se puede obtener la familia asintótica definida por tal conjunto; es decir, la familia de curvas que tienen exactamente una rama de infinito convergente con cada una de esas curvas (asíntotas). Para ello, no es necesario calcular las expresiones de Puiseux correspondientes. Si las asíntotas están dadas implícitamente, se pueden multiplicar sus polinomios implícitos y se puede obtener una curva (reducible) de la familia. Así, se obtienen f_d y f_{d-1} (formas homogéneas de grado d y $d - 1$) que determinan la familia completa.

Nótese que la idea que se acaba de presentar se puede utilizar, además, para facilitar el cálculo de las asíntotas. Dada una curva implícitamente definida, se puede, en primer lugar, eliminar todos los términos irrelevantes y luego aplicar el algoritmo.

2.5 Conclusiones

En este capítulo se han propuesto dos nuevos métodos que permiten calcular las g-asíntotas de una curva algebraica plana, dada a partir de una parametrización racional que define a la curva algebraica plana dada. Estos métodos, construyen las correspondientes asíntotas generalizadas, bien mediante el cálculo de límites de funciones racionales (véase Teorema 2.1.1), o bien, determinando ciertas derivadas de funciones univariadas (véase Teorema 2.2.1). De este modo, mediante fórmulas simples, se pueden construir, no solo las parametrizaciones propias que describen a las asíntotas generalizadas de la curva racional de *input*, sino todas sus ramas infinitas.

Estos métodos evitan tener que realizar el desarrollo en series de Puiseux, aplicado en el Capítulo 1, y se implementan dos soluciones computacionales que mejoran la eficiencia y el rendimiento de los procesos que calculan las g-asíntotas de una curva racional, estas son, el Algoritmo 2.1 y el Algoritmo 2.2.

También es conveniente señalar que, los resultados de esta investigación son de gran interés, puesto que hasta el momento no había herramientas para estudiar y caracterizar a las curvas algebraicas planas en el infinito de una manera eficiente.

Además, es interesante revisar el análisis comparativo del rendimiento computacional de los algoritmos presentados en esta tesis, cuando se aplican sobre las curvas del Apéndice B, demostrando que el Algoritmo 2.2 mejora el resultado del Algoritmo 2.1 y de los algoritmos previos, Algoritmo 1.2 y, especialmente, del Algoritmo 1.3.

Así, en la Sección 2.3, puede observarse que la implementación propuesta en el Apéndice D para el caso de derivadas, proporciona la solución computacional más efectiva y con la que se requiere la menor cantidad de recursos hardware del sistema, reduciendo los tiempos de uso del microprocesador, el tiempo real que pasa el proceso en el sistema y la cantidad de memoria necesaria construir las g-asíntotas.

Por otro lado, la Sección 2.4 presenta consecuencias de gran interés, obtenidas a partir del estudio del Teorema 2.2.1. Concretamente, se demuestran resultados que relacionan de manera clara el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada con los puntos de infinito, su multiplicidad y su carácter, ordinario o no ordinario.

Además, a partir de las relaciones anteriores, se muestra cual es la forma de grado máximo del polinomio que define implícitamente a la curva *input*, a partir de la cual pueden calcularse los conceptos anteriormente mencionados.

Como se ha comentado anteriormente, estos resultados permiten, entre otras cuestiones que serán estudiadas en futuros trabajos, construir todas las familias de las curvas paramétricas que tienen ciertas asíntotas predefinidas. Algunos resultados iniciales ya se encuentran publicados en [4].

Finalmente, cabe señalar que teniendo en cuenta ciertas consideraciones iniciales, se pueden aplicar estas técnicas a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales. En este sentido, se podría plantear la formalización de nuevos algoritmos que realicen el cálculo completo de las ramas infinitas de una curva dada (unos primeros resultados al respecto pueden verse en [2]).

Igualmente, es muy interesante ampliar la noción de asíntota generalizada y trasladar este concepto al espacio n -dimensional, utilizando las ideas ya desarrolladas en trabajos previos [34] para, por ejemplo, el estudio del comportamiento asintótico de las superficies algebraicas que se introduce en el Capítulo 3.

Capítulo 3

Comportamiento asintótico de superficies implícitas

Ninguna investigación humana puede ser llamada verdadera ciencia si no puede ser demostrada matemáticamente.

Leonardo da Vinci

Tal como se ha descrito en el Capítulo 1, las curvas y superficies algebraicas son entidades esenciales para aplicaciones prácticas [13, 27]. De hecho, es conveniente revisar la literatura referenciada en la primera parte de esta tesis, relativa a los diferentes problemas con multitud de aplicaciones reales, relacionados con variedades algebraicas y, en concreto, curvas o superficies (por ejemplo, [43, 45]).

En este capítulo se retoma el concepto de rama infinita de una curva algebraica y se pretende estudiar dichas cuestiones para el caso de superficies algebraicas definidas implícitamente. Intuitivamente hablando, se recuerda al lector que, una rama infinita representa el comportamiento de una curva (en este capítulo lo será de una superficie) en puntos con coordenadas suficientemente grandes. Se puede esperar que, generalizando la situación correspondiente a las curvas algebraicas, una rama infinita de una superficie esté asociada a un *place* proyectivo centrado en un *punto de infinito* (que en el caso de este capítulo corresponderá a una *curva de infinito*), que podrá ser parametrizada mediante *series de Puiseux en varias variables* [67–71]. Es decir, en este capítulo, la definición formal de estas nociones se amplía a superficies, basándose para ello en los conceptos introducidos en el Capítulo 1.

Las ramas de infinito son necesarias e imprescindibles para el estudio de las superficies, ya que revelan el comportamiento de una curva de infinito de la superficie algebraica real dada. Se recuerda que, las ramas infinitas de una curva plana algebraica definida implícitamente son una herramienta importante para, por ejemplo, su representación gráfica, para analizar su topología, etc. [7–10, 33]. Cabe recordar que para el caso de las curvas, a partir de las ramas de infinito, en [31] se introduce la noción de *g*-asíntota, que generaliza la conocida noción de asíntota como recta que se aproxima indefinidamente a una curva, y que puede calcularse a partir de sus ramas

infinitas. En concreto, se dice que una curva $\tilde{\mathcal{C}}$ es una *asíntota generalizada* (o *g-asíntota*) de una curva de entrada \mathcal{C} , si $\tilde{\mathcal{C}}$ se aproxima a \mathcal{C} en alguna rama infinita. Además, la curva de entrada \mathcal{C} no puede ser aproximada por una nueva curva que tenga un grado más bajo.

Teniendo en cuenta estos conceptos, se introduce la generalización de algunas de las nociones descritas para curvas, en el Capítulo 1, al caso de superficies definidas implícitamente, buscando como objetivo final, estudiar el comportamiento de la superficie en puntos con coordenadas suficientemente grandes.

En el caso que nos ocupa en este capítulo, es decir, para superficies algebraicas, la noción de rama infinita permite definir los conceptos de ramas convergentes y de superficies aproximantes (ver Sección 3.3). Más exactamente, se dice que dos ramas infinitas convergen, si se acercan entre sí cuando tienden a infinito. Este concepto permitirá analizar si dos superficies definidas implícitamente tienen el mismo “comportamiento asintótico” en el infinito. De hecho, se dice que una superficie algebraica $\bar{\mathcal{V}}$ se aproxima a \mathcal{V} en su rama infinita B , si $\bar{\mathcal{V}}$ tiene otra rama infinita \bar{B} tal que \bar{B} es convergente con B . Con esto, se obtienen importantes resultados que caracterizan si dos superficies algebraicas se aproximan entre sí.

Los resultados que se presentan en este capítulo son totalmente novedosos puesto que no hay ningún resultado al respecto para el caso de superficies. Además, las cuestiones estudiadas en este último capítulo son fundamentales para algunas aplicaciones en el marco del CAGD. Se puede pensar, por ejemplo, en el problema de la parametrización aproximada [36, 38, 72, 73] que puede plantearse de la siguiente manera: dada una superficie afín no racional \mathcal{V} (supóngase que es una perturbación de una superficie racional), se quiere calcular, si existe, una parametrización de una nueva superficie afín racional $\bar{\mathcal{V}}$ que esté cerca de la superficie de entrada. La efectividad del algoritmo depende de la cercanía de \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$, y evidentemente, del comportamiento de \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$ en el infinito.

Este capítulo marca un punto de partida para llegar a la noción de asíntota en el caso de superficies, así como para la obtención de algoritmos efectivos como los presentados en el Capítulo 2 de esta tesis. Como se ha comentado anteriormente, estos resultados marcan un ítem absolutamente novedoso, y de referencia indudable, para el estudio de superficies como pudiera ser su topología o su representación.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera:

- En la Sección 3.1 se retoman las nociones y preliminares que se describieron sobre las curvas planas en el Capítulo 1, y que se aplican al caso de superficies algebraicas. En concreto, se presentan los resultados previos sobre las series de Puiseux para el caso de varias variables y, se introduce el concepto de parametrización local para superficies algebraicas.

Así, a partir de estas nociones, se proporcionan las bases para definir el concepto de rama que se incluye en la siguiente sección.

- En la Sección 3.2 se introduce el concepto de rama infinita, determinada a partir de una de las hojas asociada a un único *place* de infinito. En esta sección son muy interesantes las demostraciones de algunas propiedades importantes de las ramas infinitas y, así mismo, se

muestra cómo los puntos de infinito (que en realidad, como se ha comentado anteriormente, son curvas de infinito) de una superficie pueden caracterizar tres tipos diferentes de ramas.

Considerando lo expuesto en esta sección, varios ejemplos permiten intuir cuándo una superficie será perfecta, o cómo calcular las ramas infinitas de una superficie, mostrando la forma en que estas ramas se aproximan a la superficie *input*.

- Consecuentemente, la Sección 3.3 proporciona las nociones de *ramas convergentes* y de *superficies aproximantes*. Además, se caracteriza si dos superficies algebraicas se aproximan entre sí. De manera más concreta, por un lado, se demuestra que dos ramas infinitas convergen si se acercan entre sí cuando tienden a infinito y, por otro, se prueba que dos superficies algebraicas se aproximan, si ambas tienen ramas infinitas convergentes. Adicionalmente, se ofrecen varios ejemplos que ilustran estos conceptos, aclarando cuándo dos superficies son aproximantes.

Además de las demostraciones que justifican los teoremas enunciados, se identifican algunas propiedades relacionadas con la proximidad.

- Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas en este capítulo y las líneas de trabajo futuro. Se plantea cómo los conceptos de rama infinita y de superficie aproximante, investigados en este capítulo, podrían aplicarse para definir el concepto de asíntota generalizada para el caso de superficies, así como para el desarrollo e implementación de algoritmos que permitan calcular las asíntotas, tanto para superficies definidas implícitamente como paramétricamente.

También sería interesante crear nuevos modelos que permitan obtener, de manera clara y efectiva, las series de Puiseux, incrementando la aplicabilidad de los métodos investigados en este capítulo, a la resolución de problemas del mundo real.

Como resultado de todo lo anterior, cabe destacar que los resultados de este capítulo han sido publicados en [5].

3.1 Terminología

A continuación, se recuerdan brevemente algunos conceptos y nociones de las curvas planas que se generalizan a las superficies, objeto de estudio en este capítulo. En particular, se retoman algunos resultados de parametrizaciones locales y de series de Puiseux, presentados en la Sección 1.1 del Capítulo 1, [43, Sec. 2.5], [45, Cap. 4], [41, 44, 68, 74], entre otros, y se presentan los correspondiente conceptos para el caso de superficies.

Se representa por $\mathbb{C}[[t]]$ el dominio de las series de potencias formales en la variable t con coeficientes en el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} . Es decir, $\mathbb{C}[[t]]$ es el conjunto de todas las sumas $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i$, $a_i \in \mathbb{C}$. El cuerpo cociente de $\mathbb{C}[[t]]$ es el cuerpo de una serie formal de Laurent, que se denota por $\mathbb{C}((t))$. Cada serie formal de Laurent, $A \in \mathbb{C}((t))$ distinta de cero, se puede escribir de la forma $A(t) = t^k \cdot (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)$, donde $a_0 \neq 0$ y $k \in \mathbb{Z}$. Además, el cuerpo $\mathbb{C} \ll t \gg := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((t^{1/n}))$ es el cuerpo de una serie formal de Puiseux.

El cuerpo $\mathbb{C} \ll t \gg$ es algebraicamente cerrado. Las series de Puiseux son series de potencias con exponentes fraccionarios. Es más, dada una serie de Puiseux, φ , existe un límite para los

denominadores de los exponentes con coeficientes no negativos de φ . Este límite se conoce como índice de ramificación de φ y se representa como $\nu(\varphi)$.

Se recuerda que el orden de una serie A , de Puiseux o de Laurent, es el exponente más pequeño de un término con coeficiente no negativo en A .

Sea $Y(x)$ una serie de Puiseux que resuelve $f(x, y) = 0$, $\text{ord}(Y) > 0$ y sea n el menor entero para el cual $Y(x) \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ (es decir, $\nu(Y) = n$). Si $x^{\frac{1}{n}} = t$, entonces $(t^n, Y(t^n))$ es una parametrización local con centro en el origen. Las soluciones de $f(x, y)$ de orden 0 son *places* con centro en el eje y , diferente del origen. Las soluciones de orden negativo son *places* en el infinito (es decir, *places* con centro en un punto de infinito).

Sea $Y(x) = \sum_{i \geq r} a_i x^{i/n}$ una serie de Puiseux con $\nu(Y) = n$. Las series $\sigma_\epsilon(Y)$, $\epsilon^n = 1$ se definen como los conjugados de Y , donde $\sigma_\epsilon(Y) = \sum_{i \geq r} \epsilon^i a_i x^{i/n}$. El conjunto de todos los conjugados de Y se llama clase de conjugación de Y . El número de conjugados diferentes de Y es $\nu(Y)$. Dos series de Puiseux proporcionan el mismo *place* si pertenecen a la misma clase de conjugación.

En lo que sigue, se adaptan estos resultados al caso de varias variables. En concreto, al caso de series de Puiseux en varias variables, se puede utilizar la notación introducida en [67–71, 74]. Más concretamente, se fija un vector de variables $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, y un entero $d > 0$. Se utiliza el orden lexicográfico \leq_{lex} sobre \mathbb{R}^n , que puede definirse de la siguiente manera: a todo monomio $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, se le asigna el vector de sus exponentes $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ y, se considera el orden lexicográfico del grupo $M = \{x^a\}_{\{a \in \mathbb{Z}^n\}}$ de monomios escribiendo

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \leq_{lex} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \leq_{lex} (b_1, \dots, b_n).$$

Esta extensión también se llama *orden lexicográfico para monomios* y es un orden de grupo. El mismo argumento sigue para el grupo $M^{1/d}$, $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$ de monomios con vectores de exponentes en $(1/d) \cdot \mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{F}_{n,d}$ el conjunto de todas las funciones $f : (1/d) \cdot \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{F}_{n,d}$ es un grupo abeliano con respecto a la habitual suma de funciones. Si se fija un vector x de variables, se puede escribir cada $f \in \mathcal{F}_{n,d}$ como la suma formal $f = \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} f_a x^{a/d}$, donde $f_a = f(a/d) \in \mathbb{K}$ y si $a = (a_1, \dots, a_n)$, entonces $x^{a/d} = x_1^{a_1/d} \cdots x_n^{a_n/d}$. En este caso, se define $\mathcal{F}_{n,d} = \mathcal{F}_{x,d}$. Se denomina soporte de f al conjunto

$$E(f) = \{a/d \in (1/d) \cdot \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}^n, f_a \neq 0\}.$$

Finalmente, se denota por $K_{x,d}$ al subgrupo $K_{x,d} = \mathbb{C}((x_n^{1/d})) \cdots \mathbb{C}((x_1^{1/d}))$ de $\mathcal{F}_{x,d}$, que es un cuerpo construido por inducción (para más detalles, ver [74]). En estas condiciones, si $0 \neq f \in \mathcal{F}_{x,d}$, entonces $f \in K_{x,d}$ si $E(f)$ es un subconjunto bien ordenado de $(1/d) \cdot \mathbb{Z}$ por el orden lexicográfico. Los elementos de $K_{x,d}$ se llamarán **series de Puiseux generalizadas**.

Por abuso de notación, en lo que sigue, se denotará $\mathbb{C}((t_1, t_2)) = \mathbb{C}((t_1^{1/d})) \cdot \mathbb{C}((t_2^{1/d}))$.

En la siguiente definición, se introduce el concepto de parametrización local proyectiva para una superficie algebraica proyectiva.

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{V}^* \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ una superficie algebraica proyectiva definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z, w) \in \mathbb{R}[x, y, z, w]$. Sean A^*, B^*, C^*, D^* series en $\mathbb{C}((t_1, t_2))$ tales que: (i) $F(A^*(t_1, t_2) : B^*(t_1, t_2) : C^*(t_1, t_2) : D^*(t_1, t_2)) = 0$, donde las cuatro series convergen, y (ii) no existe $K \in \mathbb{C}((t_1, t_2)) \setminus \{0\}$ de modo que $K \cdot (A^*, B^*, C^*, D^*) \in \mathbb{C}^4$. Entonces, $\mathcal{P}^*(t_1, t_2) = (A^* : B^* : C^* : D^*) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}((t_1, t_2)))$ es una **parametrización local proyectiva** de \mathcal{V}^* . Además, siempre se puede encontrar una parametrización que tenga $\min\{\text{ord}(A^*), \text{ord}(B^*), \text{ord}(C^*), \text{ord}(D^*)\} = 0$ y al punto $\mathcal{P}^*(0) \in \mathcal{V}^*$ se le denomina **centro** de \mathcal{P}^* .

Dada una superficie afín, la noción previa puede expresarse como sigue:

Definición 3.1.2. Sea \mathcal{V} una superficie algebraica real sobre \mathbb{C} definida implícitamente por el polinomio irreducible $f(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Sean A, B, C series en $\mathbb{C}((t_1, t_2))$ tales que: (i) $f(A(t_1, t_2), B(t_1, t_2), C(t_1, t_2)) = 0$ (donde las series convergen) y (ii) alguna de las series A, B o C no es una constante. Entonces, $\mathcal{P} = (A, B, C)$ es una **parametrización local afín** de \mathcal{V} . Además, si $\text{ord}(A), \text{ord}(B), \text{ord}(C) \geq 0$, al punto $\mathcal{P}(0) = (a, b, c) \in \mathcal{V}$ se le denomina **centro** de \mathcal{P} .

A continuación, se trabaja con superficies afines, teniendo en cuenta que los resultados y nociones aquí presentadas pueden adaptarse fácilmente a superficies algebraicas proyectivas.

Para ello, es necesario generalizar la definición anterior. Más concretamente, se parte de la Definición 3.1.2 pero, en este caso, se considera como centro de \mathcal{P} al *place* $\mathcal{P}(0, t_2) = (a(t_2), b(t_2), c(t_2)) \in \mathcal{V}$, $a(t_2), b(t_2), c(t_2) \in \mathbb{C} \ll t_2 \gg$.

Definición 3.1.3. Una clase de equivalencia de parametrizaciones locales irreducibles de la superficie \mathcal{V} se llama **place** de \mathcal{V} . El centro común de parametrizaciones locales (si existe) es el **centro** del *place*.

Seguidamente, se introduce la noción de rama de una superficie.

Definición 3.1.4. Dada una parametrización local (X, Y, Z) de una superficie \mathcal{V} , el conjunto de todos los puntos $(X(t_1, t_2), Y(t_1, t_2), Z(t_1, t_2))$ obtenidos al mover t_1 en el entorno de 0 donde $X(t_1, t_2), Y(t_1, t_2)$ y $Z(t_1, t_2)$ convergen, se denomina **rama** de \mathcal{V} .

Se puede probar que dos parametrizaciones locales equivalentes proporcionan la misma rama. Por lo tanto, se obtiene la misma rama para cada *place* de la superficie de entrada.

Además, el centro de una parametrización local de \mathcal{V} es un punto de \mathcal{V} . Recíprocamente, a partir del siguiente teorema, también se obtiene que cada punto en \mathcal{V} es el centro de, al menos, un *place* de \mathcal{V} .

Teorema 3.1.5. Sea \mathcal{V} una superficie definida por $f(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Para cada raíz $(X(z), Y(z)) \in \mathbb{C} \ll z \gg$ de $f(x, y, z) = 0$ con $\text{ord}(X) > \text{ord}(Y) > 0$, le corresponde un único *place* \mathcal{V} con centro en el origen. Recíprocamente, para cada *place* $(X(t_1, t_2), Y(t_1, t_2), Z(t_1, t_2))$ de \mathcal{V} con centro en el origen, le corresponden $\text{ord}(Z)$ raíces de $f(x, y, z) = 0$, cada una de orden mayor que cero.

3.2 Ramas infinitas

En esta sección se define el concepto de *rama infinita* (véase Definición 3.2.1) asociada con una curva de infinito, la cual estaría formada por un número finito de hojas (determinado por su índice de ramificación). Para ilustrar este concepto, se presentan varios ejemplos de superficies definidas implícitamente por sus correspondientes polinomios irreducibles, y se determinan las ramas infinitas asociadas con cada una de las curvas de infinito. Con ello se muestra cuándo una superficie es perfecta y se obtienen algunas propiedades importantes que serán esenciales para los resultados que se presentan en este capítulo.

A tal efecto, sea \mathcal{V} una superficie afín algebraica sobre \mathbb{C} , definida implícitamente por el polinomio irreducible $f(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Sea \mathcal{V}^* su correspondiente superficie proyectiva definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z, w) \in \mathbb{R}[x, y, z, w]$. Además, sea $p = (m_1(t_2), m_2(t_2))$, donde $m_1(t_2), m_2(t_2) \in \mathbb{C} \ll t_2 \gg$, una parametrización local de una curva infinita de \mathcal{V}^* definida implícitamente por el polinomio irreducible $g(y, z, 0)$, que divide a $F(1, y, z, 0)$ (véase Definición 3.1.2). Obsérvese que $F(1, m_1(t_2), m_2(t_2), 0) = 0$ y, por abuso de notación, se tiene que $P = (1 : m_1(t_2) : m_2(t_2) : 0)$ es una *curva de infinito* de la superficie \mathcal{V}^* (nótese en que en este caso, el infinito viene descrito por curvas infinitas definidas implícitamente por los factores irreducibles de $F(x, y, z, 0)$).

Se calcula el desarrollo en series para las soluciones de $g(y, z, t_1) = 0$ con respecto a (y, z) alrededor de $t_1 = 0$. Se obtienen las soluciones dadas por las diferentes series de Puiseux, que pueden agruparse en clases de conjugación. Sea una de estas soluciones la dada por las series de Puiseux $\varphi(t_1, t_2) =$

$$(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)) := \left(m_1(t_2) + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{1, \mathbf{N}} \xi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}}, m_2(t_2) + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{2, \mathbf{N}} \xi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} \right) \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg^2,$$

donde para $j = 1, 2$, $\mathbf{N} = (N_{j1}, N_{j2})$, $\xi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} = t_1^{N_{j1}/N_1} t_2^{N_{j2}/N_2}$, $\nu_{t_i}(\varphi) = N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2$, considerando el orden lexicográfico para monomios.

Se tiene que $g(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), t_1) = 0$ en un entorno de $t_1 = 0$, donde $\varphi(t_1, t_2)$ converge. Entonces, existe algún $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$F(1 : \varphi_1(t_1, t_2) : \varphi_2(t_1, t_2) : t_1) = g(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), t_1) = 0,$$

donde $(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ y $|t_1| < M$, lo que implica que

$$F(t_1^{-1} : t_1^{-1} \varphi_1(t_1, t_2) : t_1^{-1} \varphi_2(t_1, t_2) : 1) = f(t_1^{-1}, t_1^{-1} \varphi_1(t_1, t_2), t_1^{-1} \varphi_2(t_1, t_2)) = 0,$$

para $(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ y $0 < |t_1| < M$. Si $t_1^{-1} \rightarrow t_1$, se obtiene que

$$f(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) = 0, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ y } |t_1| > M^{-1},$$

donde

$$r_j(t_1, t_2) = t_1 \varphi_j(t_1^{-1}, t_2) = m_j(t_2) t_1 + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{j, \mathbf{N}} \chi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\mathbf{N} = (N_{j1}, N_{j2})$, $\chi^{\mathbf{N}/N} = t_1^{1-N_{j1}/N_1} t_2^{N_{j2}/N_2}$ para $j = 1, 2$.

Dado que $\nu_{t_1}(\varphi) = N_1$, se tiene que existen N_1 series diferentes en su clase de conjugación (con respecto a la variable t_1). Sean $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1N_1}$ esas series y

$$\begin{aligned} r_{1i}(t_1, t_2) &= t_1 \varphi_{1i}(t_1^{-1}, t_2) = \\ &= m_1(t_2)t_1 + a_1(t_2)c_i^{N_{11}}t_1^{1-N_{11}/N_1} + a_2(t_2)c_i^{N_{21}}t_1^{1-N_{21}/N_1} + a_3(t_2)c_i^{N_{31}}t_1^{1-N_{31}/N_1} + \dots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde c_1, \dots, c_{N_1} son las N_1 raíces complejas de $x^{N_1} = 1$. Igualmente, se puede razonar teniendo en cuenta estos preliminares y la construcción previa para $r_{2i}(t_1, t_2)$.

A continuación se introduce la noción de rama infinita.

Definición 3.2.1. *El conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$ donde*

$$L_i = \{(t_1, r_{1i}(t_1, t_2), r_{2i}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M_i\}$$

se llama **rama infinita** de la superficie afín \mathcal{V} . Los subconjuntos L_1, \dots, L_{N_1} se denominan **hojas** de la rama infinita B .

Observación 3.2.2.

1. Una rama infinita está determinada únicamente por una hoja, excepto conjugados. Esto es, si $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$ donde $L_i = \{(t_1, r_{1i}(t_1, t_2), r_{2i}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M_i\}$ y $r_{1i}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{1i}(t_1^{-1}, t_2) =$

$$= m_1(t_2)t_1 + a_1(t_2)t_1^{1-N_{11}/N_1} + a_2(t_2)t_1^{1-N_{21}/N_1} + a_3(t_2)t_1^{1-N_{31}/N_1} + \dots,$$

entonces $r_{1j} = r_{1i}$, $j = 1, \dots, N_1$, excepto conjugados. Es decir, $r_{1j}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{1j}(t_1^{-1}, t_2) =$

$$= m_1(t_2)t_1 + a_1(t_2)c_j^{N_{11}}t_1^{1-N_{11}/N_1} + a_2(t_2)c_j^{N_{21}}t_1^{1-N_{21}/N_1} + a_3(t_2)c_j^{N_{31}}t_1^{1-N_{31}/N_1} + \dots,$$

donde $c_j^{N_1} = 1$, $j = 1, \dots, N_1$ y $N_1, N_{i1} \in \mathbb{N}$. Se razona igualmente para $r_{2j}(t_1, t_2)$.

2. Sea $M = \max\{M_1, \dots, M_N\}$. En lo sucesivo, se consideran las hojas L_i tal que $L_i = \{(t_1, r_{1i}(t_1, t_2), r_{2i}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}$.

Sea $\varphi_{ji}(t_1, t_2) = m_j(t_2) + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{j,i,\mathbf{N}} \xi^{\mathbf{N}/N}$, $j = 1, 2$, el desarrollo en series para una solución de $g(\varphi_{1i}(t_1, t_2), \varphi_{2i}(t_1, t_2), t_1) = 0$. Se considera $\psi_{ji}(t_1, t_2) := \varphi_{ji}(t_1^{N_1}, t_2^{N_2})$ y se observa que $(1 : \varphi_{1i}(t_1^{N_1}, t_2^{N_2}) : \varphi_{2i}(t_1^{N_1}, t_2^{N_2}) : t_1^{N_1})$ es una parametrización local proyectiva, con centro en $P = (1 : m_1(t_2) : m_2(t_2) : 0)$, de la superficie proyectiva \mathcal{V}^* .

Por lo tanto, $\psi_{ji}(t_1, t_2) := \varphi_{ji}(t_1^{N_1}, t_2^{N_2})$, $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, 2$ (φ_{ji} son las N_1 series diferentes de la clase de conjugación de φ_{ji}). Se obtienen N_1 parametrizaciones locales proyectivas equivalentes, $(1 : \psi_{1i}(t_1, t_2) : \psi_{2i}(t_1, t_2) : t_1^{N_1})$ (obsérvese que son equivalentes, dado que $\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jN_1}$ pertenecen a la misma clase de conjugación). Por lo tanto, todas las hojas de B están asociadas a un único *place* infinito.

Recíprocamente, a partir de un *place* infinito definido por una parametrización local proyectiva $(1 : \varphi_1(t_1^{N_1}, t_2^{N_2}) : \varphi_2(t_1^{N_1}, t_2^{N_2}) : t_1^{N_1})$, se obtienen N_1 series de Puisseux, $\varphi_{ji}(t_1, t_2) = \psi(c_i t_1^{1/N_1} t_2^{1/N_2})$, $c_i^{N_i} = 1$, que proporcionan diferentes expresiones $r_{ji}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{ji}(t_1^{-1}, t_2)$, $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, 2$. Por consiguiente, la rama infinita B se define por las hojas

$$L_j = \{(t_1, r_{1j}(t_1, t_2), r_{2j}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}, \quad j = 1, \dots, N_1.$$

De las discusiones anteriores, se concluye que existe una relación biunívoca entre infinitos *places* e infinitas ramas y, se puede decir que, cada rama infinita está asociada con una única curva de infinito (que viene dado por el centro del *place* correspondiente). Recíprocamente, de la construcción anterior se obtiene que toda curva de infinito tiene asociado, al menos, una rama infinita. Así, toda superficie algebraica tiene, al menos, una rama infinita. Además, toda superficie algebraica tiene un número finito de ramas.

Este proceso puede aplicarse a las curvas de infinito de la forma $(a(t_2) : b(t_2) : c(t_2) : 0)$, $a(t_2) = 1$, que proporciona una parametrización local $(b(t_2), c(t_2))$ de una curva infinita. Para el caso de $b(t_2) = 1$, se puede razonar de manera similar considerando la superficie definida implícitamente por el polinomio $F(x, 1, z, w)$. Obsérvese que $g(p, 0) = 0$, donde $p = (m_1(t_2), m_2(t_2))$, $m_1(t_2), m_2(t_2) \in \mathbb{C} \ll t_2 \gg$, es una parametrización local de una curva infinita \mathcal{V}^* definida implícitamente por el polinomio irreducible $g(x, z, 0)$ que divide a $F(x, 1, z, 0)$. En este caso, $F(m_1(t_2) : 1 : m_2(t_2) : 0) = 0$ y, por abuso de notación, $P = (m_1(t_2) : 1 : m_2(t_2) : 0)$ es una *curva de infinito* de la superficie dada. En esta situación, se tiene que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$F(\varphi_1(t_1, t_2), 1, \varphi_2(t_1, t_2), t_1) = h(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), t_1) = 0,$$

para $(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ y $|t_1| < M$, donde para $j = 1, 2$,

$$\varphi_j(t_1, t_2) = m_j(t_2) + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{j, \mathbf{N}} \xi^{\mathbf{N}/N} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\mathbf{N} = (N_{j1}, N_{j2})$, $\xi^{\mathbf{N}/N} = t_1^{N_{j1}/N_1} t_2^{N_{j2}/N_2}$, $\nu_{t_i}(\varphi_j) = N_i \in \mathbb{N}$, $N_{ji} \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots$ (considerando el orden lexicográfico para monomios) es un desarrollo en series de la solución de $h(x, z, t_1) = 0$, con respecto a (x, z) , alrededor de $t_1 = 0$. Si se hace $t_1 \rightarrow t_1^{-1}$, se obtiene que

$$f(r_1(t_1, t_2), t_1, r_2(t_1, t_2)) = 0, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ y } |t_1| > M^{-1},$$

donde $r_j(t_1, t_2) = t_1 \varphi_j(t_1^{-1}, t_2)$ para $j = 1, 2$.

Por tanto, se obtiene la rama infinita $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$ cuyas hojas tienen la forma:

$$L_i = \{(r_{1i}(t_1, t_2), t_1, r_{2i}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}.$$

Obsérvese que esto se puede aplicar a la construcción de cualquier curva de infinito de la forma $(a(t_2) : b(t_2) : c(t_2) : 0)$, $b(t_2) \neq 0$.

Finalmente, para el caso de $c(t_2) = 1$, se considera la superficie definida implícitamente por el polinomio $F(x, y, 1, w)$. Nótese que $g(p, 0) = 0$, donde $p = (m_1(t_2), m_2(t_2))$, con $m_1(t_2), m_2(t_2)$

en $\mathbb{C} \ll t_2 \gg$, es una parametrización local de la curva infinita de \mathcal{V}^* definida de manera implícita por el polinomio irreducible $g(x, y, 0)$ que divide a $F(x, y, 1, 0)$. En este caso, $F(m_1(t_2) : m_2(t_2) : 1 : 0) = 0$ y, por abuso de notación, $P = (m_1(t_2) : m_2(t_2) : 1 : 0)$ es una *curva de infinito* de la superficie de entrada. En esta situación, se tiene que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$F(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), 1, t_1) = h(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), t_1) = 0,$$

para $(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ y $|t_1| < M$, donde para $j = 1, 2$,

$$\varphi_j(t_1, t_2) = m_j(t_2) + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{j, \mathbf{N}} \xi^{\mathbf{N}/N} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\mathbf{N} = (N_{j1}, N_{j2})$, $\xi^{\mathbf{N}/N} = t_1^{N_{j1}/N_1} t_2^{N_{j2}/N_2}$, $\nu_{t_i}(\varphi_j) = N_i \in \mathbb{N}$, $N_{ji} \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots$ que (considerando el orden lexicográfico de monomios), es un desarrollo en series para una solución de $h(x, y, w) = 0$. Si $t_1 \rightarrow t_1^{-1}$ se tiene que

$$f(r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2), t_1) = 0, \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \quad y \quad |t_1| > M^{-1}, \quad \text{donde}$$

$r_j(t_1, t_2) = t_1 \varphi_j(t_1^{-1}, t_2)$ para $j = 1, 2$.

De este modo, se obtiene la rama infinita $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$ cuyas hojas tienen la forma:

$$L_i = \{(r_{1i}(t_1, t_2), r_{2i}(t_1, t_2), t_1) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}.$$

Nótese que se puede aplicar esta construcción a cualquier curva de infinito de la forma $(a(t_2) : b(t_2) : c(t_2) : 0)$, $c(t_2) \neq 0$.

Definición 3.2.3. Sea \mathcal{V} una superficie afín sobre \mathbb{C} definida por un polinomio irreducible $f(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$.

- Una **rama infinita de tipo 1** de la superficie \mathcal{V} , asociada a la curva de infinito $P = (1 : m_1(t_2) : m_2(t_2) : 0)$, $m_1(t_2), m_2(t_2) \in \mathbb{C} \ll t_2 \gg$, es un conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$, donde $L_i = \{(t_1, r_{1i}(t_1, t_2), r_{2i}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}$, $i = 1, \dots, N_1$, $M \in \mathbb{R}^+$ y r_{11}, \dots, r_{1N_1} son los conjugados de

$$r_1(t_1, t_2) = m_1(t_2)t_1 + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{\mathbf{N}} \chi^{\mathbf{N}/N} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\mathbf{N} = (N_{11}, N_{12})$, $\chi^{\mathbf{N}/N} = t_1^{1-N_{11}/N_1} t_2^{N_{12}/N_2}$ (de forma similar para r_2).

- Una **rama infinita de tipo 2** de la superficie \mathcal{V} , asociada a la curva de infinito $P = (m_1(t_2) : 1 : m_2(t_2) : 0)$, $m_1(t_2), m_2(t_2) \in \mathbb{C} \ll t_2 \gg$, es un conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$, donde $L_i = \{(r_{1i}(t_1, t_2), t_1, r_{2i}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}$, $i = 1, \dots, N_1$, $M \in \mathbb{R}^+$ y r_{11}, \dots, r_{1N_1} son los conjugados de

$$r_1(t_1, t_2) = m_1(t_2)t_1 + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{\mathbf{N}} \chi^{\mathbf{N}/N} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\mathbf{N} = (N_{11}, N_{12})$, $\chi^{\mathbf{N}/N} = t_1^{1-N_{11}/N_1} t_2^{N_{12}/N_2}$ (del mismo modo para r_2);

- Una **rama infinita de tipo 3** de la superficie \mathcal{V} , asociada a la curva de infinito $P = (m_1(t_2) : m_2(t_2) : 1 : 0)$, $m_1(t_2), m_2(t_2) \in \mathbb{C} \ll t_2 \gg$, es un conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{N_1} L_i$ donde $L_i = \{(r_{1i}(t_1, t_2), r_{2i}(t_1, t_2), t_1) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}$, $i = 1, \dots, N_1$, $M \in \mathbb{R}^+$ y r_{11}, \dots, r_{1N_1} son los conjugados de

$$r_1(t_1, t_2) = m_1(t_2)t_1 + \sum_{N \in \mathbb{N}^2} h_N \chi^{N/N} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$$\mathbf{N} = (N_{11}, N_{12}), \chi^{N/N} = t_1^{1-N_{11}/N_1} t_2^{N_{12}/N_2} \text{ (igualmente para } r_2).$$

Observación 3.2.4.

1. A continuación, se trabaja con las ramas infinitas de tipo 1 de una superficie algebraica dada, \mathcal{V} . De manera similar se puede razonar para las otras ramas infinitas.
2. Se dice que N_1 es el **índice de ramificación** de la rama B con respecto a t_1 , y se denota como $\nu_{t_1}(B) = N_1$. Obsérvese que B tiene $\nu_{t_1}(B)$ hojas.

En los siguientes ejemplos, se calculan las ramas infinitas para algunas superficies.

Ejemplo 3.2.5. Sea \mathcal{V} una superficie definida implícitamente por el polinomio irreducible

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 \in \mathbb{R}[x, y, z],$$

representada en la Figura 3.1.

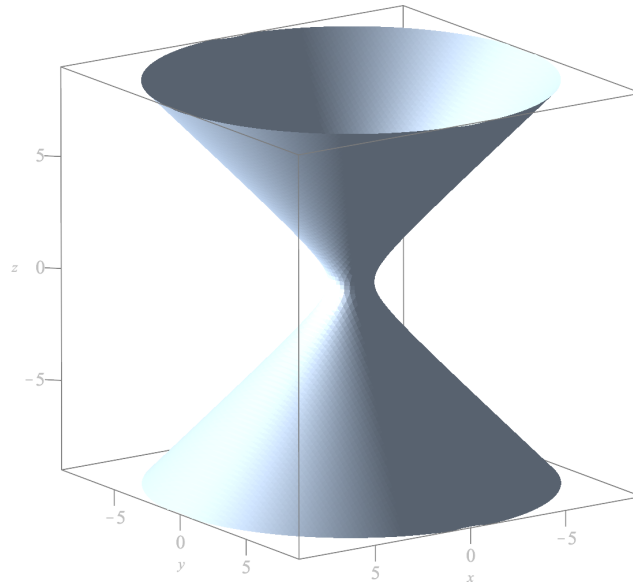


Figura 3.1: Superficie \mathcal{V} .

La superficie proyectiva correspondiente, \mathcal{V}^* , está definida por

$$F(x, y, z, w) = x^2 + y^2 - z^2 - w^2 \in \mathbb{R}[x, y, z, w].$$

Nótese que

$$P = \left(1 : -\frac{(t_2 - 1)(t_2 + 1)}{2t_2} : \frac{(1 + t_2^2)}{2t_2} : 0 \right)$$

define una curva de infinito de \mathcal{V}^* ($F(P) = 0$).

Para determinar las ramas infinitas asociadas a P , se considera la curva definida por el polinomio irreducible $g(y, z, w) = F(1, y, z, w)$ y se observa que $g(P, 0) = 0$, donde

$$\mathcal{P}(t_2) = \left(-\frac{(t_2 - 1)(t_2 + 1)}{2t_2}, \frac{(1 + t_2^2)}{2t_2} \right)$$

es una parametrización racional de la curva definida implícitamente por

$$g(y, z, 0) = F(1, y, z, 0) = 1 + y^2 - z^2.$$

Obsérvese que, en este caso, se tiene más que una parametrización local de $g(y, z, 0)$. De hecho se obtiene una parametrización racional global de $g(y, z, 0)$.

A continuación, se calculan los desarrollos en series de las soluciones de $g(y, z, t_1) = 0$ con respecto a (y, z) alrededor de $t_1 = 0$. En este caso, dado que $g(y, z, t_1)$ es racional en $\mathbb{C}(t_1)$, se obtiene una sola parametrización global, siendo:

$$y = \varphi_1(t_1, t_2) = 1/2(1 - t_1^2 - t_2^2)/t_2 \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg \quad y$$

$$z = \varphi_2(t_1, t_2) = 1/2(1 - t_1^2 + t_2^2)/t_2 \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg .$$

Obsérvese que $\mathcal{P}(t_2) = (\varphi_1(0, t_2), \varphi_2(0, t_2))$ y $g(\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2), t_1) = 0$. Nótese que $\nu_{t_1}(\varphi_j) = 1$, $j = 1, 2$, lo cual implica que solo hay una serie de Puiseux en la clase de conjugación de φ_j , $j = 1, 2$. Por tanto, se obtiene una rama infinita:

$$B_1 = L_1 = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}, \quad \text{donde}$$

$$r_1(t_1, t_2) = t_1 \varphi_1(t_1^{-1}, t_2) = 1/2 t_1 t_2^{-1} - 1/2 t_1^{-1} t_2^{-1} - 1/2 t_1 t_2,$$

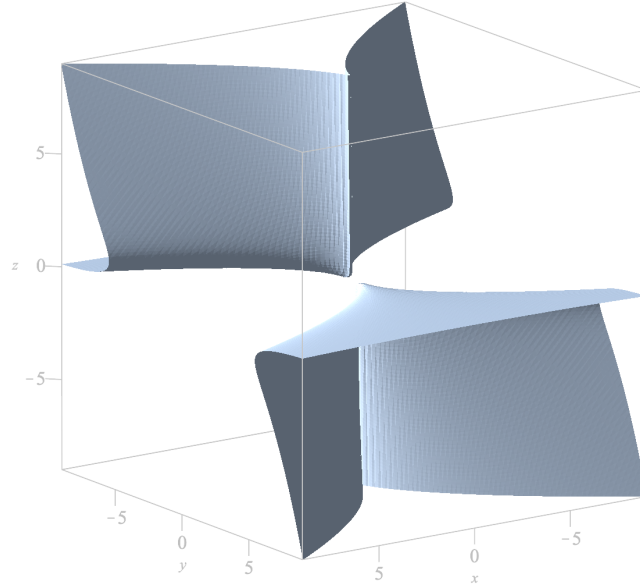
$$r_2(t_1, t_2) = t_1 \varphi_2(t_1^{-1}, t_2) = 1/2 t_1 t_2^{-1} - 1/2 t_1^{-1} t_2^{-1} + 1/2 t_1 t_2.$$

Si se calcula la implícita de la rama anterior usando, por ejemplo, el método presentado en [75], se obtiene que B es exactamente la superficie input. Esto se puede entender como que la superficie input no tiene una superficie que la aproxime en el infinito “mejor” que ella misma. En el caso de curvas, esto sería equivalente a curva perfecta y, para el caso de superficies, esto será el punto de partida para futuros trabajos que se centraran en la definición y cálculo de g -asíntotas para superficies.

Ejemplo 3.2.6. Sea \mathcal{V} una superficie definida implícitamente por el polinomio irreducible

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 x^2 + z y^3 \in \mathbb{R}[x, y, z],$$

representada en la Figura 3.2.

Figura 3.2: Superficie \mathcal{V} .

La superficie proyectiva correspondiente, \mathcal{V}^* , está definida por

$$F(x, y, z, w) = x^2w^2 + z^2x^2 + zy^3 \in \mathbb{R}[x, y, z, w].$$

Nótese que $P_1 = (1 : t_2 : -t_2^3 : 0)$ y $P_2 = (1 : t_2 : 0 : 0)$ son puntos de infinito de \mathcal{V}^* . Para determinar las ramas infinitas asociadas a P_1 y P_2 , se considera la curva definida por el polinomio irreducible $g(y, z, w) = F(1, y, z, w)$ y se observa que $g(P_1, 0) = 0$, donde $\mathcal{P}_1(t_2) = (t_2, -t_2^3)$. Nótese que, en este caso, se tiene una parametrización racional global de $g(y, z, 0)$.

Así pues, se calculan los desarrollos en series de las soluciones de $g(y, z, t_1) = 0$ con respecto a (y, z) alrededor de $t_1 = 0$. En este caso, $g(y, z, t_1)$ no es racional en $\mathbb{C}(t_1)$, por lo que se calcula una parametrización local. Se obtienen las siguientes soluciones:

1. Se tiene que $\varphi_1(t_1, t_2) = (\varphi_{11}(t_1, t_2), \varphi_{12}(t_1, t_2))$, donde

$$\varphi_{11}(t_1, t_2) = t_2 \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg \quad y$$

$$\varphi_{12}(t_1, t_2) = -t_2^3 + t_1^2/t_2^3 + t_1^4/t_2^9 + \dots \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg .$$

Obsérvese que $\varphi_1(0, t_2) = (t_2, -t_2^3)$ y $g(\varphi_1(t_1, t_2), t_1) = 0$ en un entorno de $t_1 = 0$. Nótese que $\nu_{t_1}(\varphi_{1j}) = 1$, $j = 1, 2$, lo que implica que solo se tiene una serie de Puiseux en la clase de conjugación de φ_j , $j = 1, 2$. Entonces, se obtiene una rama infinita:

$$B_1 = L_1 = \{(t_1, r_{11}(t_1, t_2), r_{12}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}, \text{ donde}$$

$$r_{11}(t_1, t_2) = t_1\varphi_{11}(t_1^{-1}, t_2) = t_1t_2,$$

$$r_{12}(t_1, t_2) = t_1\varphi_{12}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1t_2^3 + t_1^{-1}t_2^{-3} + t_1^{-3}t_2^{-9} + \dots .$$

En la Figura 3.3 se representa la superficie \mathcal{V}_1 , construida a partir de la rama infinita B_1 que se aproxima a la superficie \mathcal{V} en B_1 (véase Sección 3.3).

2. Se tiene que $\varphi_2(t_1, t_2) = (\varphi_{21}(t_1, t_2), \varphi_{22}(t_1, t_2))$ donde

$$\varphi_{21}(t_1, t_2) = t_2 \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg \text{ y}$$

$$\varphi_{22}(t_1, t_2) = -t_1^2/t_2^3 - t_1^4/t_2^9 + \dots \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \subset \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg .$$

Obsérvese que $\varphi_2(0, t_2) = (t_2, 0)$ y $g(\varphi_2(t_1, t_2), t_1) = 0$ en un entorno de $t_1 = 0$. Nótese que $\nu_{t_1}(\varphi_{2j}) = 1$, $j = 1, 2$, lo que implica que solo se tiene una serie de Puiseux en la clase de conjugación de φ_j , $j = 1, 2$. Entonces, se obtiene una rama infinita:

$$B_2 = L_2 = \{(t_1, r_{21}(t_1, t_2), r_{22}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}, \text{ donde}$$

$$r_{21}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{21}(t_1^{-1}, t_2) = t_1 t_2,$$

$$r_{22}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{22}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1^{-1} t_2^{-3} - t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots .$$

En la Figura 3.3 se representa la superficie \mathcal{V}_2 construida a partir de la rama infinita, B_2 , que se aproxima a la superficie de entrada, \mathcal{V} en B_2 (véase Sección 3.3).

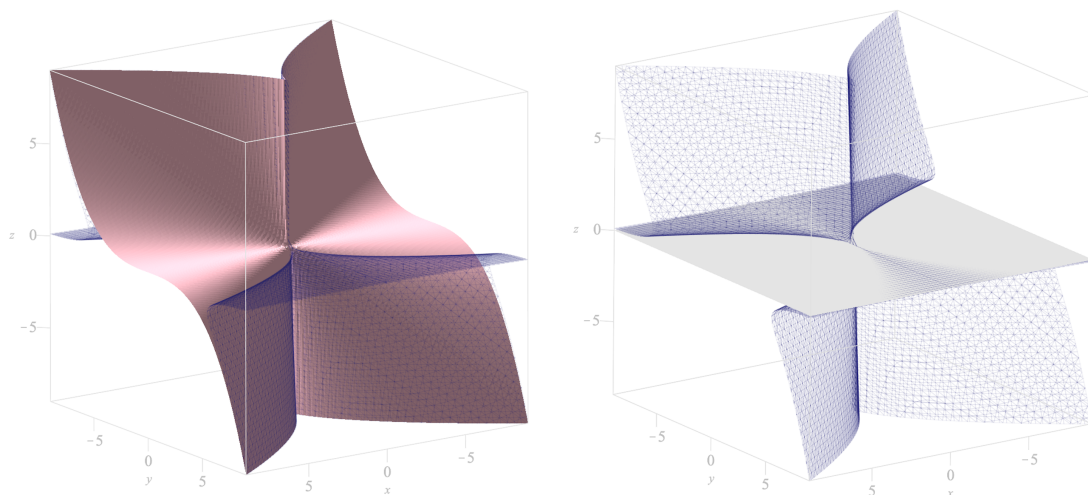


Figura 3.3: Superficies \mathcal{V}_1 , izquierda, y \mathcal{V}_2 , derecha, dadas por las ramas infinitas de \mathcal{V} .

En la Figura 3.4 se representan conjuntamente las superficies \mathcal{V} y las superficies \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 .

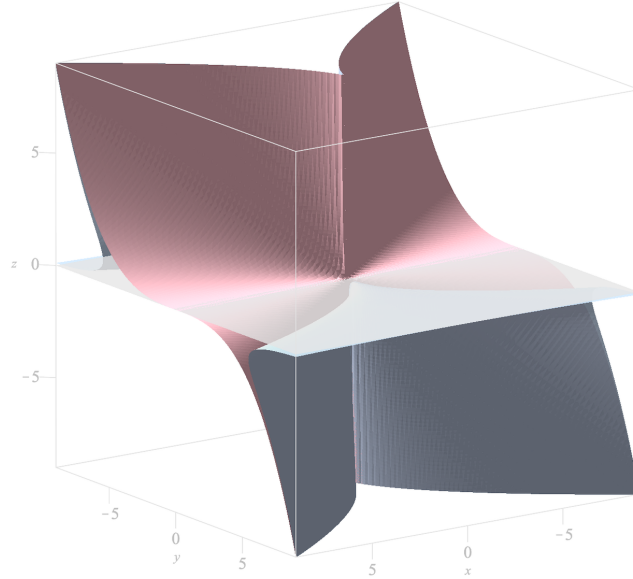


Figura 3.4: Superficies de las ramas infinitas de \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 y superficie \mathcal{V} .

Observación 3.2.7. El cálculo de $\varphi_i(t_1, t_2) \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg$, $i = 1, 2$, no es una cuestión sencilla. En algunos casos, este problema se puede resolver fácilmente como en los Ejemplos 3.2.5 y 3.2.6. Sin embargo, es más complicado para casos más generales, así como para el caso de superficies definidas paramétricamente.

A continuación, se demuestra que cualquier punto de una superficie con coordenadas suficientemente grandes, pertenece a alguna rama infinita. Para este propósito, se recuerda que si h es una función compleja de variable compleja, $h : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que el límite de $h(z_1, z_2, z_3)$ cuando z_i tiende a ∞ es L , escrito como $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = L$. Adicionalmente, si $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos con $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = L$ [55, 56].

Lema 3.2.8. Sea \mathcal{V} una superficie algebraica. Existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $p = (a, b, c) \in \mathcal{V}$ con $|a| > K$, se tiene que $p \in B_p$, donde B_p es una rama infinita de \mathcal{C} .

Demostración. Se asume que no se satisface el Lema 3.2.8 y se considera una sucesión $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \infty$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $p_n = (a_n, b_n(t_2), c_n(t_2)) \in \mathcal{V}$ tal que $|a_n| > K_n$ y p_n no pertenece a ninguna rama infinita de \mathcal{V} .

Sea $P_n = (a_n : b_n(t_2) : c_n(t_2) : 1)$. Dado que $F(P_n) = f(p_n) = 0$, con $p_n = (a_n, b_n(t_2), c_n(t_2))$, entonces se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(P_n) = 0$. Así, se distinguen los siguientes casos:

1. Si existen dos subsucesiones monótonas no acotadas, $\{b_{n_l}(t_2)/a_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ y $\{b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2)\}_{l \in \mathbb{N}}$, se tiene que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2) = \infty$$

y entonces, $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}/b_{n_l}(t_2) = 0$ y $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2) = 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(0, 1, 0, 0) = 0, \text{ donde } Q_{n_l} = (a_{n_l}/b_{n_l}(t_2) : 1 : c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2) : 1/b_{n_l}(t_2)),$$

lo que implica que $P = (0 : 1 : 0 : 0)$ es un punto infinito de \mathcal{V}^* .

2. Si existe una subsucesión monótona no acotada, $\{b_{n_l}(t_2)/a_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, y una subsucesión monótona acotada, $\{b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2)\}_{l \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = \infty$ y $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2) = m(t_2)$. Entonces, $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}/b_{n_l}(t_2) = 0$ y $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2) = 1/m(t_2) := m_2(t_2)$ (si $m(t_2) \neq 0$). Por lo tanto,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(0 : 1 : m_2(t_2) : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (a_{n_l}/b_{n_l}(t_2) : 1 : c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2) : 1/b_{n_l}(t_2))$, lo que implica que $P = (0 : 1 : m_2(t_2) : 0)$ es un punto infinito de \mathcal{V}^* .

Obsérvese que si $m(t_2) = 0$, entonces se considera $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}/c_{n_l}(t_2) = 0$. En consecuencia,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(0 : 0 : 1 : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (a_{n_l}/c_{n_l}(t_2) : b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2) : 1 : 1/c_{n_l}(t_2))$, de donde se deduce que $P = (0 : 0 : 1 : 0)$ es un punto infinito de \mathcal{V}^* .

3. Si existen dos subsucesiones monótonas acotadas, $\{b_{n_l}(t_2)/a_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ y $\{b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2)\}_{l \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = m_1(t_2)$ y

$$\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} (c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2))/(b_{n_l}(t_2)/a_{n_l}) = m(t_2)/m_1(t_2) := m_2(t_2)$$

(si $m_1(t_2) \neq 0$). Por tanto,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(1 : m_1(t_2) : m_2(t_2) : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (1 : b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : 1/a_{n_l})$, por lo que $P = (1 : m_1(t_2) : m_2(t_2) : 0)$ define a una curva de infinito de \mathcal{V}^* .

Si $m_1(t_2) = 0$, esto es $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = 0$, dado que $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2) = n(t_2)$ (se asume que $n(t_2) \neq 0$), se tiene que $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = 0$. Esto es,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(1 : 0 : 0 : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (1 : b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : 1/a_{n_l})$, lo que implica que $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ es un punto de infinito de \mathcal{V}^* .

Si $m_1(t_2) = n(t_2) = 0$, esto es, $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2) = 0$, entonces $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = n(t_2)$ o $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}/c_{n_l}(t_2) = m(t_2)$. Se asume que $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = n(t_2)$. Entonces, dado que $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = 0$, se tiene que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(1 : 0 : n(t_2) : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (1 : b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : 1/a_{n_l})$, por lo que $P = (1 : 0 : n(t_2) : 0)$ define a una curva de infinito de \mathcal{V}^* .

4. Si existe una subsucesiones monótona acotada, $\{b_{n_l}(t_2)/a_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, y una subsucesión monótona no acotada, $\{b_{n_l}(t_2)/c_{n_l}(t_2)\}_{l \in \mathbb{N}}$, se tiene que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = m_1(t_2)$$

y

$$\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} (c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2))/(b_{n_l}(t_2)/a_{n_l}) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(1 : m_1(t_2) : 0 : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (1 : b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : 1/a_{n_l})$, por lo que $P = (1 : m_1(t_2) : 0 : 0)$ define a una curva de infinito de \mathcal{V}^* .

Obsérvese que $\lim_{l \rightarrow \infty} b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = 0$. Entonces, dado que $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/b_{n_l}(t_2) = 0$, se tiene que $\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} = 0$. En consecuencia,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F(Q_{n_l}) = F(1 : 0 : 0 : 0) = 0,$$

donde $Q_{n_l} = (1 : b_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : c_{n_l}(t_2)/a_{n_l} : 1/a_{n_l})$, lo que implica que $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ es un punto de infinito de \mathcal{V}^* .

De ambas situaciones, se deduce que existe una sucesión $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que se aproxima a un punto infinito P cuando n tiende a infinito. Es decir, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|Q_n - P\| \leq \epsilon$ para $n \geq M$. Así pues, se puede concluir que $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \geq M}$ viene determinado por un *place* centrado en P . Por lo tanto, p_n pertenece a alguna rama infinita de \mathcal{V} , lo que contradice la hipótesis. \square

Observación 3.2.9. *Razonando como en el Lema 3.2.8, se tiene que existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que, para cada $p = (a, b, c) \in \mathcal{V}$, $|b| > K$, entonces $p \in B_p$, donde B_p es una rama infinita de \mathcal{V} . El razonamiento es similar si $|c| > K$.*

3.3 Ramas convergentes y superficies aproximantes

En esta sección se definen, entre otros, los conceptos de hojas convergentes, ramas convergentes y superficies aproximantes. Así, a partir de la definición de hojas convergentes se llega a la definición de ramas convergentes, que se trata de aquellas ramas que están asociadas con la misma curva de infinito.

Además, cuando estas ramas infinitas convergentes pertenecen a dos superficies diferentes, se dice que ambas superficies se aproximan entre sí en el infinito. Este caso se ilustra con varios ejemplos que muestran cuándo se cumple, o no, esta relación de proximidad, obtenida a partir del cálculo de las ramas infinitas de cada una de las superficies de estudio.

Definición 3.3.1. Dadas dos hojas $L = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}$ y $\bar{L} = \{(t_1, \bar{r}_1(t_1, t_2), \bar{r}_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > \bar{M}\}$, se dice que son convergentes si $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} (\bar{r}_i(t_1, t_2) - r_i(t_1, t_2)) = 0$, para $i = 1, 2$.

Lema 3.3.2. Dos hojas $L = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\}$ y $\bar{L} = \{(t_1, \bar{r}_1(t_1, t_2), \bar{r}_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > \bar{M}\}$ son convergentes, si y solo si los monomios en la variable t_1 que tienen exponentes no negativos en las series $r_i(t_1, t_2)$ y $\bar{r}_i(t_1, t_2)$ son los mismos para $i = 1, 2$.

Demostración. Sea

$$r_1(t_1, t_2) = m_1(t_2)t_1 + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{1, \mathbf{N}} \chi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$$\mathbf{N} = (N_{11}, N_{12}), \chi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} = t_1^{1-N_{11}/N_1} t_2^{N_{12}/N_2}, \text{ y}$$

$$\bar{r}_1(t_1, t_2) = \bar{m}_1(t_2)t_1 + \sum_{\bar{\mathbf{N}} \in \mathbb{N}^2} \bar{h}_{1, \bar{\mathbf{N}}} \bar{\chi}^{\bar{\mathbf{N}}/\bar{\mathbf{N}}} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$$\bar{\mathbf{N}} = (\bar{N}_{11}, \bar{N}_{12}), \bar{\chi}^{\bar{\mathbf{N}}/\bar{\mathbf{N}}} = t_1^{1-\bar{N}_{11}/\bar{N}_1} t_2^{\bar{N}_{12}/\bar{N}_1}. \text{ Entonces,}$$

$$r_1(t_1, t_2) - \bar{r}_1(t_1, t_2) = m_1 t_1 - \bar{m}_1 t_1 + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{1, \mathbf{N}} \chi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} - \sum_{\bar{\mathbf{N}} \in \mathbb{N}^2} \bar{h}_{1, \bar{\mathbf{N}}} \bar{\chi}^{\bar{\mathbf{N}}/\bar{\mathbf{N}}}.$$

Obsérvese que $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} (\bar{r}_1(t_1, t_2) - r_1(t_1, t_2)) = 0$ si y solo si $\bar{r}_1(t_1, t_2) - r_1(t_1, t_2)$ no tiene monomios que tengan exponente no negativo en la variable t_1 . Esta situación se cumple si los monomios de la variable t_1 , que tienen exponente no negativo en ambas series, r_1 y \bar{r}_1 , son iguales.

Se razona de manera similar para r_2 y \bar{r}_2 . □

Observación 3.3.3.

1. Del Lema 3.3.2, se deduce que $m_i(t_2) = \bar{m}_i(t_2)$, $i = 1, 2$, y que L y \bar{L} están asociados con el mismo punto infinito.
2. El número de monomios, con respecto a t_1 , que tienen exponente positivo en ambas series es finito.

A continuación, se introducen algunas definiciones esenciales para analizar el comportamiento de dos superficies algebraicas. En primer lugar, se define el concepto de ramas convergentes y la noción de distancia de un punto a una superficie, a partir de estos, se puede definir cuándo una superficie algebraica se aproxima a otra y, también, si ambas presentan el mismo comportamiento asintótico. Además, se ilustra con varios ejemplos, al final de esta sección, tanto la relación de proximidad como el análisis comportamiento asintótico de dos superficies algebraicas. Así mismo, se explican de forma detallada los cálculos realizados para aclarar ambos conceptos.

Definición 3.3.4. *Dos ramas infinitas, B y \bar{B} , son convergentes si existen dos hojas convergentes $L \subset B$ y $\bar{L} \subset \bar{B}$.*

Observación 3.3.5. *El enunciado 1 de la Observación 3.3.3 implica que, dos ramas infinitas convergentes están asociadas a la misma curva de infinito.*

Proposición 3.3.6. *Dos ramas infinitas B y \bar{B} son convergentes si y solo si, para cada hoja $L \subset B$ existe una hoja $\bar{L} \subset \bar{B}$ convergente con L , y recíprocamente.*

Demostración. Sea B y \bar{B} dos ramas convergentes, se prueba que para cualquier $L_i \subset B$ existe $\bar{L}_j \subset \bar{B}$ convergente con L_i (mediante la Definición 3.3.4 se puede obtener el recíproco). De la Definición 3.3.4, existen dos hojas convergentes,

$$L = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\} \quad y$$

$$\bar{L} = \{(t_1, \bar{r}_1(t_1, t_2), \bar{r}_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > \bar{M}\}.$$

Sean $(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2))$ y $(t_1, \bar{r}_1(t_1, t_2), \bar{r}_2(t_1, t_2))$, del Lema 3.3.2, se deduce que coinciden los términos con respecto a la variable t_1 que tienen exponente no negativo en r y \bar{r} . De este modo, $u_l = \bar{u}_l = a_l$ para $l = 1, \dots, k$, y

$$r_1(t_1, t_2) = m_1(t_2)t_1 + \sum_{\mathbf{N} \in \mathbb{N}^2} h_{1, \mathbf{N}} \chi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\mathbf{N} = (N_{11}, N_{12})$, $\chi^{\mathbf{N}/\mathbf{N}} = t_1^{1-N_{11}/N_1} t_2^{N_{12}/N_2}$, y

$$\bar{r}_1(t_1, t_2) = \bar{m}_1(t_2)t_1 + \sum_{\bar{\mathbf{N}} \in \mathbb{N}^2} \bar{h}_{1, \bar{\mathbf{N}}} \bar{\chi}^{\bar{\mathbf{N}}/\bar{\mathbf{N}}} \in \mathbb{C} \ll t_1, t_2 \gg,$$

$\bar{\mathbf{N}} = (\bar{N}_{11}, \bar{N}_{12})$, $\bar{\chi}^{\bar{\mathbf{N}}/\bar{\mathbf{N}}} = t_1^{1-\bar{N}_{11}/\bar{N}_1} t_2^{\bar{N}_{12}/\bar{N}_1}$.

Se observa que se han simplificado los exponentes no negativos tales que $\text{mcd}(n, n_1, \dots, n_k) = 1$. Esto es, para $l = 1, \dots, k$, existen $b, \bar{b} \in \mathbb{N}$ tales que $N_l = bn_l$, $N = bn$, $\bar{N}_l = \bar{b}n_l$ y $\bar{N} = \bar{b}n$.

En estas condiciones, se observa que las hojas diferentes de B y \bar{B} de obtienen por conjugación de $r(z)$ y $\bar{r}(z)$. Esto es (véase Ecuación (3.1)),

$$r_i(z) = mz + u_1 c_i^{N_1} z^{1-\frac{N_1}{N}} + \dots + u_k c_i^{N_k} z^{1-\frac{N_k}{N}} + u_{k+1} c_i^{N_{k+1}} z^{1-\frac{N_{k+1}}{N}} + \dots$$

$$\bar{r}_j(z) = mz + \bar{u}_1 d_j^{\bar{N}_1} z^{1-\frac{\bar{N}_1}{\bar{N}}} + \dots + \bar{u}_k d_j^{\bar{N}_k} z^{1-\frac{\bar{N}_k}{\bar{N}}} + \bar{u}_{k+1} d_j^{\bar{N}_{k+1}} z^{1-\frac{\bar{N}_{k+1}}{\bar{N}}} + \dots,$$

donde c_1, \dots, c_N son las N raíces complejas de $x^N = 1$ y $d_1, \dots, d_{\bar{N}}$ son las \bar{N} raíces complejas de $x^{\bar{N}} = 1$.

Simplificando los exponentes, y haciendo que $u_l = \bar{u}_l = a_l$, $l = 1, \dots, k$, se tiene que:

$$r_i(z) = mz + a_1 c_i^{N_1} z^{1-\frac{n_1}{n}} + \dots + a_k c_i^{N_k} z^{1-\frac{n_k}{n}} + u_{k+1} c_i^{N_{k+1}} z^{1-\frac{N_{k+1}}{N}} + \dots$$

$$\bar{r}_j(z) = mz + a_1 d_j^{\bar{N}_1} z^{1-\frac{n_1}{n}} + \dots + a_k d_j^{\bar{N}_k} z^{1-\frac{n_k}{n}} + \bar{u}_{k+1} d_j^{\bar{N}_{k+1}} z^{1-\frac{\bar{N}_{k+1}}{\bar{N}}} + \dots$$

Por consiguiente, solo es necesario mostrar que para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ existe $j \in \{1, \dots, \bar{N}\}$ tal que $c_i^{N_l} = d_j^{\bar{N}_l}$ para cada $l = 1, \dots, k$. En efecto, dado que $c_i, i = 1, \dots, N$ son las N raíces complejas de $x^N = 1$, se tiene que $c_i = e^{\frac{2(i-1)\pi I}{N}}$, donde I es la unidad imaginaria. Teniendo en cuenta que $N = bn$, se deduce que $c_i^b = e^{\frac{2(i-1)\pi I}{n}}, i = 1, \dots, N$ y $c_i^b = c_{i+(m-1)n}^b$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $m = 1, \dots, b$. Esto es, $(c_i^b)^n = 1, i = 1, \dots, n$. Razonando de forma similar, se tiene que $d_j^{\bar{b}} = e^{\frac{2(j-1)\pi I}{n}}, j = 1, \dots, \bar{N}$ y $d_j^{\bar{b}} = d_{j+(m-1)n}^{\bar{b}}$ para cada $j = 1, \dots, n$ y $m = 1, \dots, \bar{b}$. Esto es, $(d_j^{\bar{b}})^n = 1, j = 1, \dots, n$. Por lo tanto, $c_i^b = d_{i+(m-1)n}^{\bar{b}}, m = 1, \dots, \bar{b}$ y haciendo que $N_l = bn_l$ y $\bar{N}_l = \bar{b}n_l, l = 1, \dots, k$, resulta que $c_i^{N_l} = d_j^{\bar{N}_l}, j = i + (m-1)n, m = 1, \dots, \bar{b}$. □

Observación 3.3.7. *Dos ramas infinitas convergentes pueden tener diferentes índices de ramificación. Es decir, pueden tener diferente número de hojas. Sin embargo, $n_1 \in \mathbb{N}$, obtenido tras simplificar los exponentes no negativos en la variable t_1 , es igual en ambas ramas. Por tanto, $n_1 \in \mathbb{N}$ es el **grado de la rama infinita con respecto a t_1** .*

Nótese que a partir de la demostración de la Proposición 3.3.6 se obtiene que, dos ramas infinitas convergentes tienen el mismo grado con respecto a t_1 .

Dos ramas infinitas convergentes pueden estar contenidas en la misma o pertenecer a diferentes superficies. En este segundo caso, se dice que esas superficies *se aproximan entre sí*. Para abordar este concepto de una manera más formal, a continuación se introduce el concepto de distancia.

Definición 3.3.8. *Dada una superficie algebraica \mathcal{V} en \mathbb{C} y un punto $p \in \mathbb{C}^3$, se define la **distancia de p a \mathcal{V}** como $d(p, \mathcal{V}) = \min\{d(p, q) : q \in \mathcal{V}\}$.*

Se destaca que dado que \mathcal{V} es un conjunto cerrado, este mínimo existe.

Definición 3.3.9. *Sea \mathcal{V} una superficie algebraica en \mathbb{C} con una rama infinita B . Se dice que una superficie $\bar{\mathcal{V}}$ **aproxima a \mathcal{V}** en su rama infinita B , si existe una hoja $L = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\} \subset B$, tal que $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} d((t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)), \bar{\mathcal{V}}) = 0$.*

Se muestra que esta condición se cumple para una hoja de B , si y solo si se satisface para cada hoja de B . Como consecuencia, se llega al siguiente teorema.

Teorema 3.3.10. *Sea \mathcal{V} una superficie algebraica en \mathbb{C} con una rama infinita B . Una superficie algebraica $\bar{\mathcal{V}}$ se aproxima a \mathcal{V} en B , si y solo si $\bar{\mathcal{V}}$ tiene una rama infinita, \bar{B} , tal que B y \bar{B} convergen.*

Demostración. La demostración sigue un razonamiento similar a la demostración del Teorema 4.11 en [33]. □

Observación 3.3.11.

1. El Teorema 3.3.10 implica que la proximidad es una relación simétrica. En concreto, la superficie $\bar{\mathcal{V}}$ se aproxima a la superficie \mathcal{V} en alguna rama infinita B , si y solo si \mathcal{V} se

aproxima a \bar{V} en alguna rama infinita \bar{B} . En lo sucesivo, se dice que \mathcal{V} y \bar{V} se aproximan entre sí o que son **superficies aproximantes**.

2. Del Teorema 3.3.10 y la Observación 3.3.5, se obtiene que dos superficies que se aproximan tienen una curva de infinito común.

3. El Teorema 3.3.10 y la Proposición 3.3.6 implican que \bar{V} aproxima a \mathcal{V} en una rama infinita B , si para cada hoja

$$L = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : t_1, t_2, \in \mathbb{C}, |t_1| > M\} \subset B,$$

se cumple que $\lim_{z \rightarrow \infty} d((t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)), \bar{V}) = 0$.

Corolario 3.3.12. Sea \mathcal{V} una superficie algebraica con una rama infinita B . Sean \bar{V}_1 y \bar{V}_2 dos superficies diferentes que aproximan a \mathcal{V} en B . Entonces, \bar{V}_1 y \bar{V}_2 se aproximan entre sí.

Demostración. Del Teorema 3.3.10, se tiene que existen dos ramas infinitas tales que, $B_1 \subset \bar{V}_1$ y $B_2 \subset \bar{V}_2$ convergentes con B . Por este motivo, se tiene que para cada hoja $L = \{(t_1, r_1(t_1, t_2), r_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : t_1 \in \mathbb{C}, |t_1| > M\} \subset B$, existen las hojas

$$L_1 = \{(t_1, l_1(t_1, t_2), l_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^2 : t_i \in \mathbb{C}, |t_1| > M_1\} \subset B_1 \quad y$$

$$L_2 = \{(t_1, s_1(t_1, t_2), s_2(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : t_i \in \mathbb{C}, |t_1| > M_2\} \subset B_2,$$

obteniendo que $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} (r_1(t_1, t_2) - l_1(t_1, t_2)) = 0$ y $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} (r_1(t_1, t_2) - s_1(t_1, t_2)) = 0$.

Entonces,

$$|l_1(t_1, t_2) - s_1(t_1, t_2)| \leq |l_1(z) - r_1(t_1, t_2)| + |r_1(t_1, t_2) - s_1(t_1, t_2)| \xrightarrow{t_1 \rightarrow \infty} 0$$

(se razona de forma semejante para r_2). Consecuentemente, \bar{V}_1 y \bar{V}_2 se aproximan entre sí. \square

En el Ejemplo 3.3.13 se ilustran estos resultados.

Ejemplo 3.3.13. Sean \mathcal{V} y \bar{V} dos superficies definidas implícitamente por los polinomios

$$f(x, y, z) = x^2 z^2 + y^3 z + x^2 \in \mathbb{R}[x, y, z] \quad y$$

$$\bar{f}(x, y, z) = x^2 z^2 + y^3 z + x^2 + 90x - 2y - 9 \in \mathbb{R}[x, y, z],$$

respectivamente. Ambas superficies se representan en la Figura 3.5.

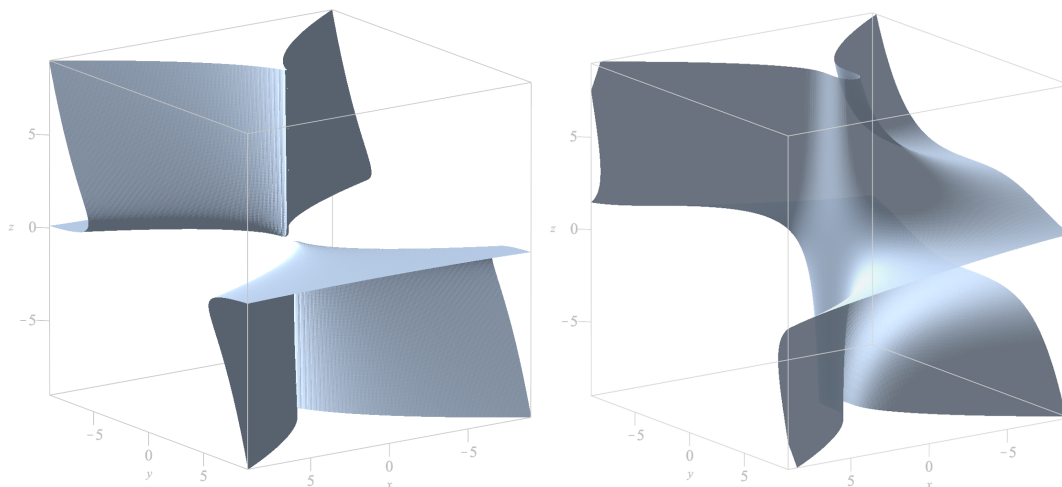


Figura 3.5: Superficies \mathcal{V} , izquierda, y $\bar{\mathcal{V}}$, derecha.

Se prueba que \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$ se aproximan entre sí, en las ramas infinitas definidas por las curvas de infinito

$$P_1 = (1 : t_2 : -t_2^3 : 0), \quad P_2 = (1 : t_2 : 0 : 0).$$

Obsérvese que ambas superficies tienen $P_1 = (1 : t_2 : -t_2^3 : 0)$ y $P_2 = (1 : t_2 : 0 : 0)$ como curvas de infinito, puesto que

$$F(x, y, z, 0) = z(x^2 z + y^3) \quad y$$

$$\bar{F}(x, y, z, 0) = z(x^2 z - y^3).$$

Razonando como en el Ejemplo 3.2.6, se tiene que la rama infinita de \mathcal{V} asociada con P_1 está dada por

$$B_1 = L_1 = \{(t_1, r_{11}(t_1, t_2), r_{12}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$r_{11}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{11}(t_1^{-1}, t_2) = t_1 t_2,$$

$$r_{12}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{12}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1 t_2^3 + t_1^{-1} t_2^{-3} + t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots$$

La rama infinita de \mathcal{V} asociada a P_2 está dada por

$$B_2 = L_2 = \{(t_1, r_{21}(t_1, t_2), r_{22}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$r_{21}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{21}(t_1^{-1}, t_2) = t_1 t_2,$$

$$r_{22}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{22}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1^{-1} t_2^{-3} - t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots$$

Por otro lado, la rama infinita de $\bar{\mathcal{V}}$ asociada a P_1 está dada por

$$\bar{B}_1 = \bar{L}_1 = \{(t_1, \bar{r}_{11}(t_1, t_2), \bar{r}_{12}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$\bar{r}_{11}(t_1, t_2) = t_1 t_2,$$

$$\bar{r}_{12}(t_1, t_2) = -t_1 t_2^3 + t_1^{-1} t_2^{-3} + t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots .$$

La rama infinita de $\bar{\mathcal{V}}$ asociada a P_2 está dada por

$$\bar{B}_2 = \bar{L}_2 = \{(t_1, \bar{r}_{21}(t_1, t_2), \bar{r}_{22}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$\bar{r}_{21}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{21}(t_1^{-1}, t_2) = t_1 t_2,$$

$$\bar{r}_{22}(t_1, t_2) = t_1 \varphi_{22}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1^{-1} t_2^{-3} - t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots .$$

Las siguientes imágenes muestran las ramas infinitas de las superficies \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$.

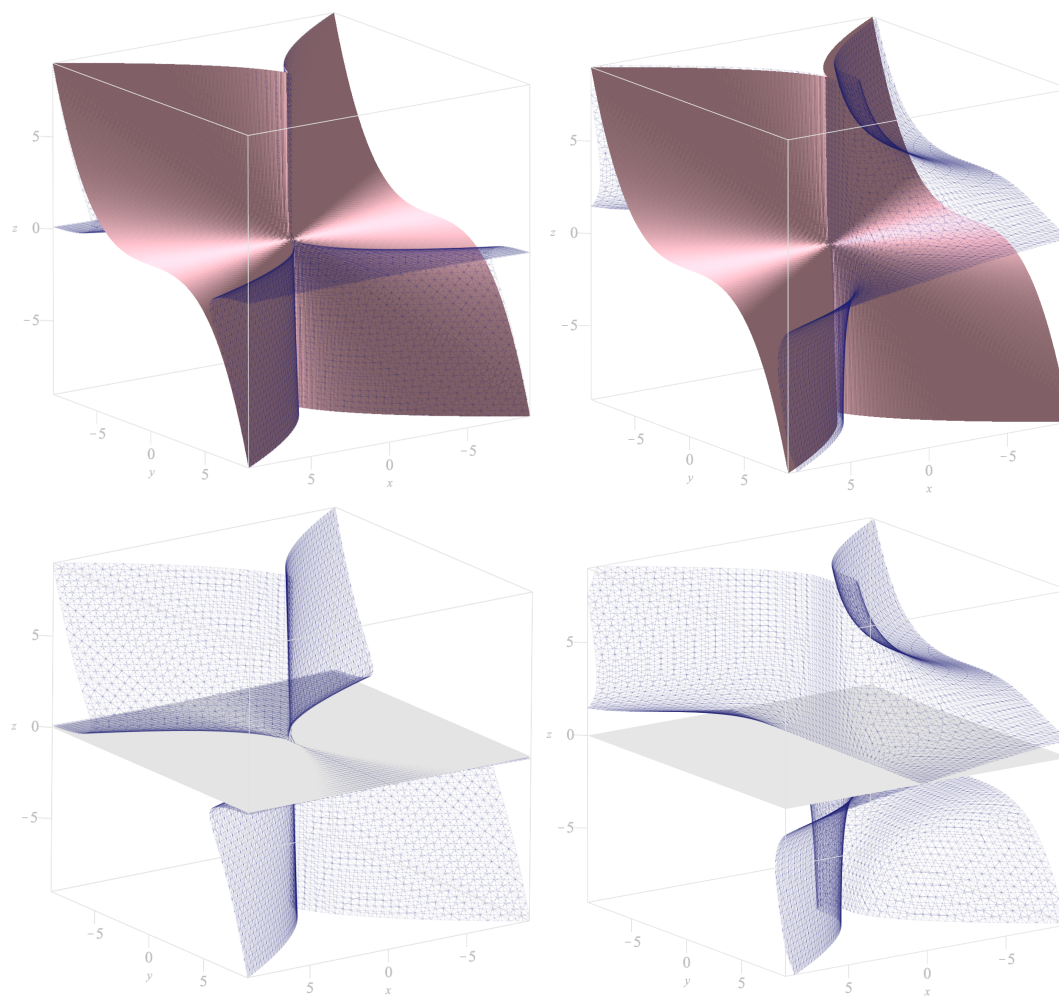


Figura 3.6: Superficies de las ramas infinitas de \mathcal{V} , izquierda, y $\bar{\mathcal{V}}$, derecha.

Finalmente, la Figura 3.7 muestra en la misma imagen, las superficies, \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$, junto con sus ramas infinitas.

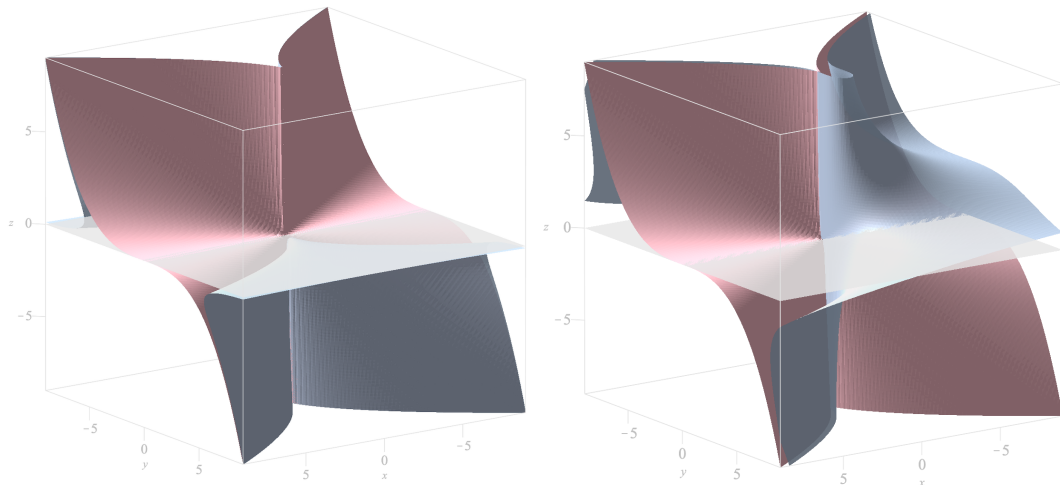


Figura 3.7: Superficies de \mathcal{V} , junto con sus ramas infinitas, izquierda, y de $\bar{\mathcal{V}}$, derecha.

Obsérvese que del Lema 3.3.2 se concluye que ambas ramas son convergentes, dado que puede observarse que los términos con exponente no negativo de ambas series, r_{ij} y \bar{r}_{ij} , son coincidentes.

Observación 3.3.14. En el Ejemplo 3.3.13, las superficies \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$ son superficies aproximantes, dado que \mathcal{V} se aproxima a $\bar{\mathcal{V}}$ en una de sus ramas infinitas, y recíprocamente se produce la misma situación. En este caso, se dice que ambas superficies tienen el mismo comportamiento asintótico.

A continuación se muestra otro ejemplo en el que puede apreciarse que converge solo una de las ramas.

Ejemplo 3.3.15. Sean \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$ dos superficies definidas implícitamente por los polinomios

$$f(x, y, z) = x^2 z^2 + y^3 z + x^2 \in \mathbb{R}[x, y, z] \quad y$$

$$\bar{f}(x, y, z) = x^2 z + y^3 - 10y \in \mathbb{R}[x, y, z],$$

respectivamente.

Ambas superficies se representan en la Figura 3.8 para, a continuación, calcular e ilustrar sus correspondientes ramas infinitas.

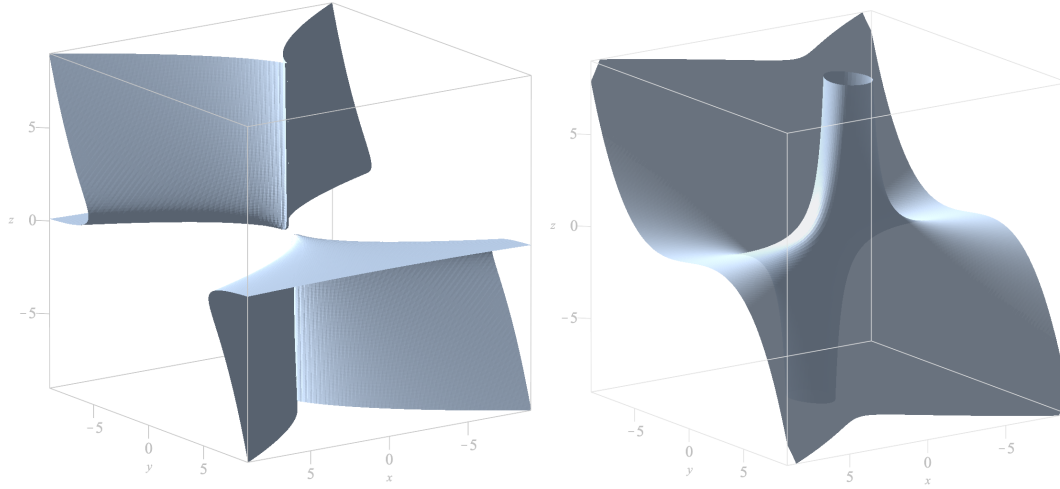


Figura 3.8: Superficies \mathcal{V} , izquierda, y $\bar{\mathcal{V}}$, derecha.

Las curvas de infinito de \mathcal{V}^* vienen definidas por $P_1 = (1 : t_2 : -t_2^3 : 0)$ y por $P_2 = (1 : t_2 : 0 : 0)$, mientras que $\bar{\mathcal{V}}$ solo tiene la curva de infinito definida por $\bar{P}_1 = (1 : t_2 : -t_2^3 : 0)$, puesto que $F(x, y, z, 0) = z(x^2 z + y^3)$ y $\bar{F}(x, y, z, 0) = x^2 z + y^3$.

Por tanto, solo puede haber una rama infinita asociada a la curva de infinito común en ambas superficies.

Razonando como en el Ejemplo 3.2.6, se tiene que la rama infinita de \mathcal{V} asociada a P_1 está dada por

$$B_1 = L_1 = \{(t_1, r_{11}(t_1, t_2), r_{12}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$\begin{aligned} r_{11}(t_1, t_2) &= t_1 \varphi_{11}(t_1^{-1}, t_2) = t_1 t_2, \\ r_{12}(t_1, t_2) &= t_1 \varphi_{12}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1 t_2^3 + t_1^{-1} t_2^{-3} + t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots \end{aligned}$$

La rama infinita de \mathcal{V} asociada a P_2 está dada por

$$B_2 = L_2 = \{(t_1, r_{21}(t_1, t_2), r_{22}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$\begin{aligned} r_{21}(t_1, t_2) &= t_1 \varphi_{21}(t_1^{-1}, t_2) = t_1 t_2, \\ r_{22}(t_1, t_2) &= t_1 \varphi_{22}(t_1^{-1}, t_2) = -t_1^{-1} t_2^{-3} - t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado, la rama infinita de $\bar{\mathcal{V}}$ asociada a \bar{P}_1 está dada por

$$\bar{B}_1 = \bar{L}_1 = \{(t_1, \bar{r}_{11}(t_1, t_2), \bar{r}_{12}(t_1, t_2)) \in \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2, |t_1| > M\},$$

donde

$$\bar{r}_{11}(t_1, t_2) = t_1 t_2,$$

$$\bar{r}_{12}(t_1, t_2) = -t_1 t_2^3 + t_1^{-1} t_2^{-3} + t_1^{-3} t_2^{-9} + \dots$$

La Figura 3.9 muestra las ramas infinitas de las superficies \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$. Obsérvese que, para realizar la representación gráfica, se han eliminado todos los términos negativos de las ramas infinitas.

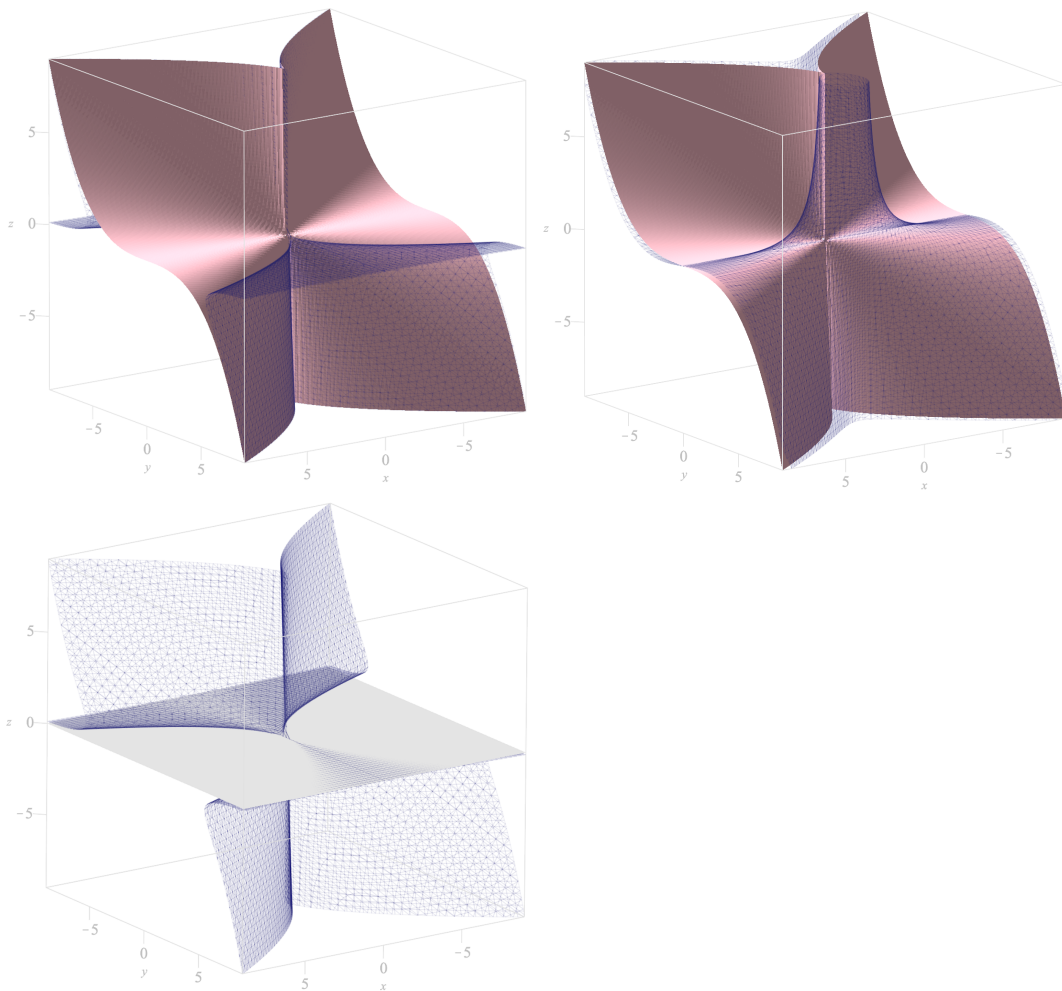


Figura 3.9: Superficies de las dos ramas infinitas de \mathcal{V} , izquierda, y de la rama de $\bar{\mathcal{V}}$, derecha.

Finalmente, la Figura 3.10 muestra conjuntamente cada superficie, \mathcal{V} y $\bar{\mathcal{V}}$, junto con sus ramas infinitas.

Obsérvese que del Lema 3.3.2 se concluye que ambas ramas son convergentes, dado que puede observarse que los términos con exponente no negativo de ambas series, r_{ij} y \bar{r}_{ij} , son coincidentes.

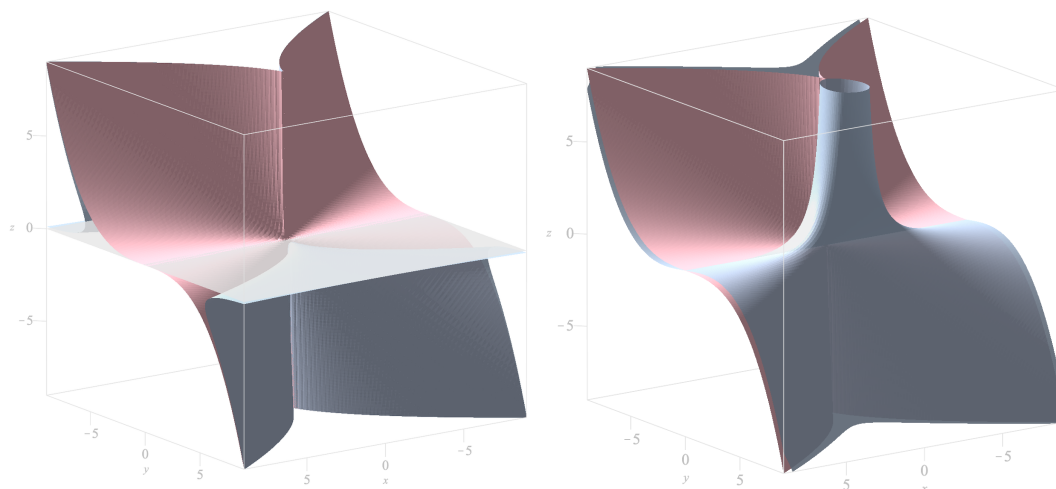


Figura 3.10: Superficies de \mathcal{V} , junto con sus ramas infinitas, izquierda, y de $\bar{\mathcal{V}}$, derecha.

3.4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la noción de rama infinita y de superficies aproximantes, para el caso de superficies algebraicas definidas implícitamente, junto con algunas propiedades, ejemplos y demostraciones que ilustran su comportamiento.

A partir de estos conceptos, sería posible plantear un algoritmo y su correspondiente implementación, que realizara un análisis de comportamiento asintótico en el infinito de dos superficies algebraicas, siguiendo un procedimiento equivalente al desarrollado en el Capítulo 1, para el caso de curvas algebraicas con el Algoritmo 1.1.

La posibilidad de contar con una herramienta que realice este análisis, conllevará al desarrollo, en trabajos futuros, de la introducción del concepto de asíntota generalizada y superficie perfecta, así como la obtención de importantes propiedades que finalmente nos conducirían a la presentación de algoritmos que construyan las asíntotas generalizadas de superficies definidas implícita y paramétricamente.

El objetivo final sería la obtención de resultados efectivos como los presentados en el Teorema 2.1.1 y Teorema 2.2.1, y plasmados en el Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2. Para ello, también se podría considerar cómo influye la sobrecarga computacional que introduce el desarrollo en series de Puiseux en la eficiencia del algoritmo de construcción de asíntotas para superficies, tal como se mostró en el Capítulo 2. Dada la complejidad de este modelo, también sería interesante valorar si otros métodos de cálculo podrían mejorar el rendimiento de la máquina, ofreciendo nuevos algoritmos de mejora.

Así mismo, y planteándonos una problemática a mas largo plazo, sería además interesante abordar el estudio y cálculo efectivo de las g-asíntotas y de sus ramas para superficies definidas paramétricamente a partir de funciones racionales e incluso de una manera más genérica.

Las caracterización de familias de g-asíntotas así como el estudio de las propiedades esenciales de superficies perfectas es otro aspecto a desarrollar en trabajos futuros.

A partir de los métodos investigados en esta tesis, en un futuro se podrán ofrecer soluciones que muestren simplificaciones, tendencias y comportamientos de objetos tridimensionales aplicables a la resolución de problemas del mundo real.

Cabe destacar que los resultados obtenidos en este capítulo son totalmente novedosos y constituyen un punto de partida sin precedentes para el estudio de superficies en el infinito, es decir, en las curvas definidas por puntos con coordenadas suficientemente grandes. Como se ha podido observar, el principal escollo en este problema resulta ser la obtención de las parametrizaciones locales en dichas curvas de infinito. Como se ha comentado, se espera que esta situación pueda resolverse satisfactoriamente con la generalización de los resultados obtenidos para curvas donde la determinación de asíntotas podría reducirse al cálculo de ciertos límites y derivadas (ver Teoremas [2.1.1](#) y [2.2.1](#)).

Capítulo 4

Conclusiones y futuras líneas de investigación

El arte de hacer las matemáticas consiste en la búsqueda de ese caso especial, que contiene todos los gérmenes de la generalidad.

David Hilbert

En la presente investigación se ha dado respuesta a cuestiones matemáticas relacionadas con la geometría algebraica y el cálculo simbólico, proponiendo mejoras que inciden directamente en la obtención de nuevos algoritmos con técnicas algebraicas muy efectivas, la extracción y estudio de la información obtenida de las g-asíntotas, así como la aplicabilidad para la manipulación efectiva de variedades algebraicas, sobre todo curvas y superficies. Además, se inicia una línea de investigación en superficies algebraicas, con la exploración de las propiedades obtenidas para curvas y su exportación al caso de superficies como el concepto de ramas de infinito.

De este modo, se espera que los resultados aquí expuestos permitan avanzar hacia el estudio de curvas y superficies algebraicas, mediante el análisis del comportamiento de las ramas infinitas de estas variedades algebraicas.

Precisamente, los fundamentos de base tratan las investigaciones previas de curvas algebraicas planas, cuyas propiedades, cálculo de ramas infinitas y de asíntotas se obtenían mediante la aplicación del desarrollo en series de Puiseux. A partir de estos estudios, la tesis plantea procedimientos completamente innovadores, más eficientes, precisos y simples que los anteriores, en lo relativo al cálculo, a la implementación y a su generalización.

Por un lado, se abre una nueva línea que avanza en la caracterización de las curvas algebraicas, así como en la construcción de sus ramas infinitas y de sus asíntotas, aplicando herramientas sencillas y con menor grado de sobrecarga computacional, tales como el cálculo de límites de funciones racionales y de ciertas derivadas de funciones univariadas construidas a partir de la parametrización de la variedad *input*. Así mismo, se obtienen propiedades importantes que relacionan todos los conceptos introducidos y, a partir de las cuales, se puede calcular la infor-

mación de una curva y descubrir algunas relaciones entre sus propiedades, llegando a construir todas las familias de curvas a partir de ciertas asíntotas.

Por otro lado, la tesis revela nuevos conceptos, extendiendo la noción de rama infinita a superficies definidas implícitamente y analizando cuándo dos superficies se aproximan entre sí.

Como se ha comentado en los párrafos precedentes, este trabajo resulta del objetivo de analizar el comportamiento de las ramas infinitas de curvas y superficies. Así mismo, se han implementado métodos simbólicos que construyen, de manera efectiva, las “asíntotas generalizadas” de una curva dada, tanto a partir de su forma implícita como paramétrica. También se han analizado nuevas aplicaciones a partir de los métodos obtenidos y se ha evaluado la efectividad de las implementaciones de los diferentes algoritmos propuestos.

Los resultados alcanzados en esta tesis suponen una importante innovación en el campo de la geometría algebraica, evolucionando hacia nuevas propuestas de aplicaciones y futuras líneas de investigación.

A continuación se describen las conclusiones alcanzadas en cada uno de los capítulos de esta tesis:

- El **Capítulo 1** presenta el estado del arte y los principios básicos que fundamentan el estudio de las curvas algebraicas definidas en el cuerpo de los números reales, tanto en su forma implícita como paramétrica.

En él se exponen determinados métodos simbólicos y varios algoritmos previos, que permiten obtener soluciones para el estudio del comportamiento en el infinito y de las propiedades de las curvas algebraicas expresadas, tanto en su forma implícita como paramétrica.

Aquí se recuerdan las nociones de ramas de infinito y de convergencia de ramas infinitas, se estudia el comportamiento asintótico de dos curvas (véase Algoritmo 1.1) y se define el concepto de curva perfecta, entre otros. Además, se introduce la idea determinante en la que se basa esta investigación, el concepto de asíntotas generalizadas, junto con los algoritmos que las calculan a partir de la expresión implícita (véase Algoritmo 1.2), o bien, a partir de la expresión paramétrica de la curva (véase Algoritmo 1.3), considerando en todo caso, las ramas infinitas que convergen con la curva dada.

En estos algoritmos, el método imprescindible para el cálculo de las ramas infinitas de una curva dada y para la construcción de sus asíntotas, es el desarrollo en series de Puiseux. Este método presenta el inconveniente de arrojar resultados, cuya mejora en la precisión hace que vaya aumentando exponencialmente la sobrecarga computacional del sistema.

Esta problemática ha llevado a buscar soluciones innovadoras que garantizan resultados exactos para obtener propiedades de curvas y de superficies algebraicas, expresadas en forma paramétrica y que, además, alivian considerablemente la carga del sistema informático.

Estas alternativas suponen una importante mejora en los procedimientos de cálculo, transformando el desarrollo en series de Puiseux, en métodos más simples basados en el cálculo de límites de funciones racionales y de ciertas derivadas de funciones univariadas, descritos en el Capítulo 2.

Además, estos fundamentos pueden extenderse al espacio n -dimensional, utilizando las ideas ya desarrolladas en trabajos previos [34], y sentando las bases que han permitido avanzar en la caracterización y en el estudio del comportamiento asintótico de superficies algebraicas. Tales conceptos se introducen en el Capítulo 3.

- En el **Capítulo 2** se han propuesto dos nuevos métodos que permiten calcular las asíntotas generalizadas de una curva algebraica plana, dada a partir de una parametrización racional. Estos métodos construyen las correspondientes g -asíntotas, bien mediante el cálculo de límites de funciones racionales (véase Teorema 2.1.1), o bien, determinando ciertas derivadas de funciones univariadas (véase Teorema 2.2.1). De este modo, es posible construir mediante fórmulas simples, no solo las parametrizaciones propias que describen a las asíntotas generalizadas de la curva racional de entrada, sino que además, se pueden calcular todas sus ramas infinitas.

Es más, el uso de límites y derivadas, permite generalizar fácilmente estos resultados para curvas que no son algebraicas.

Ambas soluciones presentan la importante ventaja de construir las ramas infinitas y las asíntotas generalizadas de una curva algebraica, mediante operaciones triviales de límites (véase Algoritmo 2.1) o de derivadas (véase Algoritmo 2.2), aplicadas término a término, reduciendo considerablemente la sobrecarga del sistema y mejorando la eficiencia de los métodos anteriores.

También es conveniente subrayar que los resultados de esta investigación son de gran interés, puesto que hasta el momento no existían herramientas que estudiaran o caracterizaran a las curvas algebraicas planas en el infinito de una manera eficiente.

Con estos métodos se evita tener que realizar el desarrollo en series de Puiseux, necesario en los algoritmos del Capítulo 1, y permiten implementar dos soluciones computacionales que mejoran la eficiencia y el rendimiento de los procesos que calculan las asíntotas generalizadas de una curva racional.

Además, es interesante revisar el análisis comparativo del rendimiento computacional de los algoritmos presentados en esta tesis, cuando se aplican a los casos de estudio del Apéndice B, demostrando que el Algoritmo 2.2 mejora el resultado del Algoritmo 2.1 y de los algoritmos previos, Algoritmo 1.2 y, especialmente, del Algoritmo 1.3.

Así, la implementación que utiliza derivadas proporciona la solución computacional más efectiva y con la que se requiere la menor cantidad de recursos hardware del sistema, reduciendo los tiempos de uso del microprocesador, el tiempo real que pasa el proceso en el sistema y la cantidad de memoria necesaria construir las asíntotas generalizadas.

Es importante señalar que los procedimientos aquí presentados se han implementando con el sistema de álgebra computacional Maple y pueden consultarse en el Apéndice D de esta tesis.

También es muy importante analizar la Sección 2.4, que presenta consecuencias de gran interés, obtenidas a partir del estudio del Teorema 2.2.1. Concretamente, se demuestran resultados que relacionan de manera clara el índice de ramificación y el grado de la asíntota generalizada con los puntos de infinito, su multiplicidad y su carácter, ordinario o no ordinario. Además, a partir de las relaciones anteriores, se muestra cuál es la forma de

grado máximo del polinomio que define implícitamente a la curva *input*, a partir de la cual pueden calcularse los conceptos anteriormente mencionados.

Adicionalmente, se ha mostrado cómo estos resultados permiten, entre otras cuestiones que serán estudiadas en futuros trabajos, construir todas las familias de las curvas paramétricas que tienen ciertas asíntotas predefinidas.

- El **Capítulo 3** introduce nuevos conceptos absolutamente novedosos para el caso de superficies, utilizando las investigaciones previas desarrolladas para el caso de curvas. Estos son, la noción de rama infinita y la idea de superficies aproximantes para el caso de superficies algebraicas definidas implícitamente, junto con algunas propiedades, ejemplos y demostraciones.

Por tanto, este capítulo inicia el estudio de las ramas infinitas, su convergencia y cálculo de las asíntotas en el caso de superficies algebraicas, así como para la obtención de algoritmos efectivos como los presentados en el Capítulo 2, marcando con ello un ítem absolutamente novedoso y de referencia indudable para el estudio de superficies.

A partir de estos conceptos, sería posible plantear un algoritmo, y su correspondiente implementación, que realizara un análisis del comportamiento asintótico en el infinito de dos superficies algebraicas, siguiendo un procedimiento equivalente al desarrollado en el Capítulo 1 para el caso de curvas algebraicas con el Algoritmo 1.1.

La posibilidad de contar con una herramienta que realice este análisis introducirá, en trabajos futuros, el concepto de asíntota generalizada y de superficie perfecta. Así mismo, se podrán obtener importantes propiedades que conducirán a la presentación de los algoritmos que construirán las asíntotas generalizadas de superficies, definidas implícita y paramétricamente.

El objetivo final sería la obtención de resultados efectivos como los presentados en la Sección 1.8, Teorema 2.1.1 y Teorema 2.2.1, y plasmados en el Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2. Para ello, también se podría considerar cómo influye la sobrecarga computacional que introduce el desarrollo en series de Puiseux en la eficiencia del algoritmo de construcción de las asíntotas de superficies, tal como se mostró en el Capítulo 2. Dada la complejidad de este modelo, también sería interesante valorar si otros métodos de cálculo podrían mejorar el rendimiento de la máquina, ofreciendo nuevos algoritmos de mejora.

Cabe destacar que los resultados obtenidos en este capítulo son totalmente novedosos y constituyen un punto de partida sin precedentes en el estudio de superficies en el infinito, es decir, en las curvas definidas por puntos con coordenadas suficientemente grandes. Como se ha podido observar, el principal escollo en este problema resulta ser la obtención de las parametrizaciones locales, en el infinito, de dichas variedades algebraicas. Se espera que esta situación pueda resolverse satisfactoriamente con la generalización de los resultados obtenidos para curvas, donde la determinación de las asíntotas se reduce al cálculo de ciertos límites y derivadas (ver Teoremas 2.1.1 y 2.2.1).

- El presente **Capítulo 4** muestra las principales conclusiones y resultados, así como las futuras líneas de investigación que pueden dar continuidad a los métodos propuestos en esta tesis.

Con estos avances se abren nuevas líneas de investigación aplicada, que podrían resolver problemas prácticos del mundo real, por ejemplo, en el *plotting* de variedades algebraicas (curvas y superficies), en estudios topológicos (cálculo de simetrías), en la obtención de aproximaciones numéricas, en el área del CAGD en 3-D, en el campo de la ingeniería de datos, o en el ámbito del hardware y de los sistemas operativos, con el análisis del rendimiento y eficiencia computacional de algoritmos, etc. También, se ofrecen soluciones más precisas y simples al cálculo de tendencias y de comportamientos de curvas bidimensionales y de objetos tridimensionales, que puedan ser aplicadas a la resolución de problemas del mundo real.

Finalmente, cabe señalar que teniendo en cuenta ciertas consideraciones iniciales, se pueden aplicar estas técnicas a curvas definidas por parametrizaciones no necesariamente racionales. En este sentido, se podría plantear la formalización de nuevos algoritmos y adaptación de los ya existentes, para realizar el cálculo completo de las ramas infinitas de una curva dada (algunos primeros resultados al respecto pueden verse en [2]).

Así mismo, es importante subrayar que se van a patentar los pseudocódigos presentados en el Apéndice C, así como las correspondientes implementaciones desarrolladas en el Apéndice D.

Bibliografía

- [1] E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla, and S. Pérez-Díaz, “A simple formula for the computation of branches and asymptotes of curves and some applications,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 94, p. 102084, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102084>
- [2] —, “Computing branches and asymptotes of curves defined by a not rational parametrization,” *Journal of Computer Science and Technology*. [Manuscript submitted for publication], 2022.
- [3] —, “Design and implementation of symbolic algorithms for the computation of generalized asymptotes,” *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. Special Issue Symbolic Computation in Software Science. [Manuscript submitted for publication], 2022.
- [4] E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla, R. Magdalena Benedicto, and S. Pérez-Díaz, “Determining the asymptotic family of an implicit curve,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 98, p. 102146, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102146>
- [5] E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla, and S. Pérez-Díaz, “Asymptotic behavior of a surface implicitly defined,” *Mathematics*, vol. 10, no. 9, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/math10091445>
- [6] —, “Cálculo de asíntotas generalizadas de curvas algebraicas,” in *Actas del XVII Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones (EACA 2022)*. [In press], 2022.
- [7] B. Gao and Y. Chen, “Finding the topology of implicitly defined two algebraic plane curves,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 25, no. 2, pp. 362–374, Apr 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s11424-012-1145-7>
- [8] L. González-Vega and I. Necula, “Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 19, no. 9, pp. 719–743, 2002. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(02\)00167-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(02)00167-X)
- [9] H. Hong, “An efficient method for analyzing the topology of plane real algebraic curves,” *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 42, no. 4-6, pp. 571–582, 1996. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(96\)00034-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(96)00034-1)

- [10] G. Zeng, “Computing the asymptotes for a real plane algebraic curve,” *Journal of Algebra*, vol. 316, no. 2, pp. 680–705, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.03.030>
- [11] C. L. Bajaj, Ed., *Algebraic Geometry and its Applications*. Springer-Verlang, 1994. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2628-4>
- [12] D. A. Cox and B. Sturmfels, “Applications of computational algebraic geometry,” in *Symposia in Applied Mathematics*, vol. 53. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1090/psapm/053>
- [13] C. M. Hoffmann, J. R. Sendra, and F. Winkler, “Parametric algebraic curves and applications,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 23, special issue, 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0079>
- [14] J. Schicho and J. R. Sendra, “Special issue on algebraic curves,” *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 18, special issue, pp. 1–2, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00200-006-0022-9>
- [15] D. Poulakis and E. Voskos, “On the practical solution of genus zero diophantine equations,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 30, no. 5, pp. 573–582, 2000. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1006/jsco.2000.0420>
- [16] —, “Solving genus zero diophantine equations with at most two infinite valuations,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 33, no. 4, pp. 479–491, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1006/jsco.2001.0515>
- [17] C. Bajaj, H. Y. Lee, R. Merkert, and V. Pascucci, “Nurbs based b-rep models for macromolecules and their properties,” in *Fourth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*, ser. SMA '97. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1997, pp. 217–228. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/267734.267787>
- [18] V. D. Goppa, “Codes associated with divisors,” *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 13, no. 1, pp. 33–39, 1977.
- [19] —, “Codes on algebraic curves,” *Soviet Mathematics Doklady*, vol. 259, no. 6, pp. 1289–1290, 1981. [Online]. Available: <http://mi.mathnet.ru/eng/dan44654>
- [20] O. Pretzel, *Codes and algebraic curves*, ser. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 8. Oxford, United Kingdom: Oxford University Press, 1998.
- [21] I. F. Blake, G. Seroussi, and N. P. Smart, *Elliptic curves in cryptography*, ser. London Mathematical Society Lecture Note Series, 265. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1999. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107360211>
- [22] J. A. Buchmann, *Introduction to cryptography*, ser. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1995. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0496-8>
- [23] N. Koblitz, *Algebraic aspects of cryptography*, ser. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1998. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03642-6>

- [24] —, “Good and bad uses of elliptic curves in cryptography,” *Moscow Mathematical Journal*, vol. 2, no. 4, pp. 693–715, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2002-2-4-693-715>
- [25] G. Farin, *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*, 3rd ed. Boston: Academic Press, 1993. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-22351-8>
- [26] G. Farin, J. Hoschek, and M.-S. Kim, *Handbook of computer aided geometric design*. Amsterdam: North-Holland, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/B978-044451104-1/50000-9>
- [27] J. Hoschek and D. Lasser, *Fundamentals of computer-aided geometric design*. Wellesley, MA: A. K. Peters/CRC Press, 1993. [Online]. Available: <http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?an=0788.68002>
- [28] T. W. Sederberg, “Applications to computer aided geometric design,” in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Applications of Computational Algebraic Geometry*, D. A. Cox and B. Sturmfels, Eds., vol. 53. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1998, pp. 67–89. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1090/psapm/053>
- [29] M. Götz, V. Maymeskul, and E. Saff, “Asymptotic distribution of nodes for near-optimal polynomial interpolation on certain curves in \mathbb{R}^2 ,” *Constructive Approximation*, vol. 18, pp. 255–284, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00365-001-0020-x>
- [30] K. Forsman, “On rational state space realizations,” in *Nonlinear control systems design: Selected papers from the 2nd IFAC Symposium*, ser. IFAC symposia series, M. Fliess, Ed. Oxford, United Kingdom: Pergamon Press, 1993, pp. 341–346. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-041901-5.50061-0>
- [31] Á. Blasco and S. Pérez-Díaz, “Asymptotes and perfect curves,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 31, no. 2, pp. 81–96, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2013.12.004>
- [32] —, “A new approach for computing the asymptotes of a parametric curve,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 364, pp. 112–118, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112350>
- [33] —, “Asymptotic behavior of an implicit algebraic plane curve,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 31, no. 7, pp. 345–357, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2014.04.002>
- [34] —, “Asymptotes of space curves,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 278, pp. 231–247, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.013>
- [35] S. Pérez-Díaz, J. Sendra, and J. R. Sendra, “Parametrization of approximate algebraic curves by lines,” *Theoretical Computer Science*, vol. 315, no. 2-3, pp. 627–650, 2004. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2004.01.010>
- [36] S. Pérez-Díaz, J. Sendra, and J. R. Sendra, “Parametrization of approximate algebraic surfaces by lines,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 22, no. 2, pp. 147–181, 2005. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.10.001>

- [37] S. Pérez-Díaz, J. R. Sendra, S. L. Rueda, and J. Sendra, “Approximate parametrization of plane algebraic curves by linear systems of curves,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 27, no. 2, pp. 212–231, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2009.12.002>
- [38] L. Y. Shen, S. Pérez-Díaz, and Z. Yang, “Numerical proper reparametrization of space curves and surfaces,” *Computer-Aided Design*, vol. 116, p. 102732, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2019.07.001>
- [39] E. Maxwell, *An analytical calculus*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1962, vol. 3.
- [40] J. D. Kečkić, “A method for obtaining asymptotes of some curves,” *The Teaching of Mathematics*, vol. III, no. 1, pp. 53–59, 2000. [Online]. Available: <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/4/tm314.pdf>
- [41] D. Duval, “Rational Puiseux expansions,” *Compositio Mathematica*, vol. 70, no. 2, pp. 119–154, 1989. [Online]. Available: http://www.numdam.org/item/CM_1989__70_2_119_0/
- [42] G. Orzech and M. Orzech, “Plane algebraic curves: An introduction via valuations,” in *Plane algebraic curves*, ser. Pure and applied mathematics, 61. New York, NY, USA: Marcel Dekker, Inc., 1981.
- [43] J. R. Sendra, F. Winkler, and S. Pérez-Díaz, *Rational algebraic curves: A computer algebra approach*, ser. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73725-4>
- [44] P. Stadelmeyer, “On the computational complexity of resolving curve singularities and related problems,” PhD. Thesis, RISC, Johannes Kepler University, Linz, Austria, 2000.
- [45] R. J. Walker, *Algebraic curves*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1950.
- [46] W. Fulton, *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometry*. Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley Pub. Co., 1989.
- [47] J. L. Verger-Gaugry, “Beta-conjugates of real algebraic numbers as Puiseux expansions,” *Integers: The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory: Proceedings of the Leiden Numeration Conference 2010*, vol. 11B, no. A-17, pp. 1–21, 05 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1105.0574>
- [48] Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., “Maple 2021.1 [computer software],” Waterloo, ON, Canada.
- [49] L. Bernardin, P. Chin, P. DeMarco, K. O. Geddes, D. E. G. Hare, K. M. Heal, G. Labahn, J. P. May, J. McCarron, M. B. Monagan, D. Ohashi, and S. M. Vorkoetter, *Maple programming guide*. Waterloo, ON, Canada: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 1996-2021. [Online]. Available: <https://www.maplesoft.com/view.aspx?SF=103828/337201/ProgrammingGuide.pdf>

- [50] W. P. Fox and W. C. Bauldry, *Advanced problem solving with Maple*, ser. Textbook in Mathematics. Boca Ratón, FL, USA: CRC Press, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1201/9780429469633>
- [51] J. F. Imokrane, *Maple par l'exemple*. Cépaduès Editions, 2022.
- [52] B. V. Liengme, *Maple: A primer*. Morgan and Claypool Publishers, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab0bb3>
- [53] Maplesoft, *Maple user manual*. Waterloo, ON, Canada: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 1996-2021. [Online]. Available: https://www.maplesoft.com/documentation_center/maple18/usermanual.pdf
- [54] J. R. Sendra, S. Pérez-Díaz, J. Sendra, and C. Villarino, *Introducción a la computación simbólica y facilidades Maple*. Paracuellos de Jarama, Spain: Ra-Ma Editorial, 2012.
- [55] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*. London: McGraw-Hill, 1979.
- [56] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995, vol. I. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6313-5>
- [57] S. L. Salas, G. J. Etgen, and E. Hilles, *Calculus. One and several variables*. New Jersey, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [58] J. Gutierrez and T. Recio, “Rational function decomposition and Gröbner bases in the parameterization of plane curves,” in *LATIN '92. Lecture Notes in Computer Science*, I. Simon, Ed., vol. 583. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992, pp. 231–245. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BFb0023832>
- [59] T. W. Sederberg, “Improperly parametrized rational curves,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 3, no. 1, pp. 67–75, 1986. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(86\)90025-7](https://doi.org/10.1016/0167-8396(86)90025-7)
- [60] R. Zippel, “Rational function decomposition,” in *Proceedings of the 1991 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ser. ISSAC '91. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1991, pp. 1–6. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/120694.120695>
- [61] C. Alonso, J. Gutierrez, and T. Recio, “Reconsidering algorithms for real parametric curves,” *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 6, pp. 345–352, 1995. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01198014>
- [62] J. Gutierrez, R. Rubio San Miguel, and J. Schicho, “Polynomial parametrization of curves without affine singularities,” *Computer Aided Geometry Design*, vol. 19, no. 3, pp. 223–234, 2002. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(02\)00090-0](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(02)00090-0)
- [63] D. Manocha and J. Canny, “Rational curves with polynomial parameterization,” *Computer-Aided Design*, vol. 23, no. 9, pp. 645–652, 1991. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(91\)90042-U](https://doi.org/10.1016/0010-4485(91)90042-U)

- [64] S. Pérez-Díaz, “Analysis and construction of rational curve parametrizations with non-ordinary singularities,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 66, pp. 31–51, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2018.08.002>
- [65] —, “On the problem of proper reparametrization for rational curves and surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 23, no. 4, pp. 307–323, 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2006.01.001>
- [66] —, “Computation of the singularities of parametric plane curves,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 42, no. 8, pp. 835–857, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2007.06.001>
- [67] I. Szilágyi, B. Jüttler, and J. Schicho, “Local parametrization of cubic surfaces,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 41, no. 1, pp. 30–48, 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.06.001>
- [68] D. Adrovic and J. Verschelde, “Computing Puiseux series for algebraic surfaces,” in *Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ser. ISSAC ’12. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2012, pp. 20–27. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1145/2442829.2442837>
- [69] A. Parusinski and G. Rond, “The Abhyankar-Jung theorem,” *Journal of Algebra*, vol. 365, pp. 29–41, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.05.003>
- [70] I. Luengo, “A new proof of the Jung-Abhyankar theorem,” *Journal of Algebra*, vol. 85, no. 2, pp. 399–409, 1983. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(83\)90104-7](https://doi.org/10.1016/0021-8693(83)90104-7)
- [71] M. Angeles Zurro, “The Abhyankar-Jung theorem revisited,” *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 90, no. 3, pp. 275–282, 1993. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(93\)90045-U](https://doi.org/10.1016/0022-4049(93)90045-U)
- [72] J. R. Sendra and C. Villarino, “On the approximate parametrization of perturbed algebraic curves and surfaces,” in *ACM SIGSAM Bulletin*, vol. 41, no. 2, 2007, pp. 62–64.
- [73] S. Pérez-Díaz and L. Y. Shen, “A symbolic-numeric approach for parametrizing ruled surfaces,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 33, pp. 799–820, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s11424-019-8188-y>
- [74] M. Soto and J. Vicente, “The Newton procedure for several variables,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, no. 2, pp. 255–269, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.01.033>
- [75] S. Pérez-Díaz and J. Rafael Sendra, “A univariate resultant-based implicitization algorithm for surfaces,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 43, no. 2, pp. 118–139, 2008. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2007.10.001>

Apéndices

Apéndice A

Publicaciones

La realización de una tesis doctoral está recogida en el “Reglamento de elaboración, autorización y defensa de la tesis doctoral de la Universidad de Alcalá”, aprobado por el Consejo de Gobierno el día 23 de febrero de 2012, modificado por el Consejo de Gobierno el día 12 de diciembre de 2013, y nueva modificación aprobada por el Consejo de Gobierno el día 28 de septiembre de 2016, conforme al Real Decreto 99/2011, de 28 de enero (BOE, 10 de febrero de 2011), por el que se regulan las enseñanzas oficiales de doctorado.

La presente investigación se ubica dentro del programa de Doctorado de Ciencias (D411), en la línea de Matemáticas, y se enmarca en las áreas de geometría algebraica, computación simbólica y construcción de algoritmos.

En este contexto, la doctoranda apoya su tesis con un conjunto de artículos presentados en revistas y congresos de reconocido prestigio. Así, los capítulos que componen el eje principal de esta investigación, Capítulo 2 y Capítulo 3, se corresponden con publicaciones en revistas de impacto indexadas en el *Journal Citation Reports* (JCR) y en el Encuentro Álgebra Computacional y Aplicaciones (EACA). En este último caso, se trata de un congreso específico de área del investigación, perteneciente a la “Red Temática de Cálculo Simbólico, Álgebra Computacional y Aplicaciones”.

Por consiguiente, la Tabla A.1 muestra un resumen de cada una de las publicaciones realizadas, que dan soporte a las investigaciones de esta tesis doctoral. Para cada una de ellas se indica el nombre de la revista (o congreso), la fecha de publicación y, si procede, el cuartil en el que se ubica dicha publicación, considerando el *Journal Impact Factor* (JIF), que se trata de una métrica a nivel de revista calculada a partir de datos indexados en la colección del *Web of Science Core*. También se refiere el *Digital Object Identifier* (DOI) de la publicación electrónica, junto con el capítulo de la tesis doctoral en el que puede encontrarse un amplio desarrollo de la correspondiente investigación realizada.

Tabla A.1: Resumen de publicaciones.

Revista	Fecha publicac.	Ranking 2021	DOI	Capítulo tesis
Mathematics	25/04/2022	JCR/Q1	10.3390/math10091445	Cap. 3
Computer Aided Geometric Design	31/03/2022	JCR/Q3	10.1016/j.cagd.2022.102084	Cap. 2
Computer Aided Geometric Design	31/08/2022	JCR/Q3	10.1016/j.cagd.2022.102146	Cap. 2
SoftwareX	Enviado	JCR/Q2		Cap. 2
Annals of Mathematics and Artificial Intelligence	Enviado	JCR/Q3		Cap. 1 y 2
Journal of Symbolic Computation	Enviado	JCR/Q4		Cap. 2
EACA Proceedings	En prensa		www.fue.uji.es/eaca2022	Cap. 1 y 2

A continuación, se ofrece el listado con la información sobre cada una de las publicaciones:

- Título de la publicación.
- Autores.
- Nombre de la revista/congreso.
 - Editorial.
 - ISSN.
 - Licencia.
- Datos de la publicación.
 - Volumen.
 - Número.
 - N° artículo, páginas.
 - Fecha de publicación.
 - DOI.
- Clasificación.
 - Categoría.
 - Cuartil JIF.
- Resumen.

A.1 Asymptotic behavior of a surface implicitly defined

Autoras: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla y S. Pérez-Díaz.

Nombre de la revista: Mathematics.

- Editorial: MDPI.
- ISSN: 2227-7390.
- Licencia: Open access. Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Datos de la publicación:

- Volumen: 10.
- Número: 9.
- N° artículo: 1445, páginas 1-19.
- Fecha de publicación: 25 de abril de 2022.
- DOI: [10.3390/math10091445](https://doi.org/10.3390/math10091445).

Clasificación: Journal Citation Reports (JCR) 2021.

- Categoría: Mathematics.
Cuartil: Q1.

Resumen:

En este artículo se presenta la noción de ramas infinitas y de superficies aproximantes. Se obtiene un algoritmo que compara el comportamiento en el infinito de dos superficies algebraicas dadas, definidas por un polinomio irreducible. Además, se demuestra que si dos superficies tienen el mismo comportamiento asintótico, la distancia de Hausdorff entre ellas es finita.

Todos estos conceptos son nuevos y suponen un gran avance para el estudio de las superficies y sus aplicaciones.

Además, se sientan la base para futuros resultados a partir de la definición de superficie perfecta y g -asíntota para superficies, así como para el estudio de dichos conceptos en el caso de superficies paramétricas.

A.2 A simple formula for the computation of branches and asymptotes of curves and some applications

Autoras: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla y S. Pérez-Díaz.

Nombre de la revista: Computer Aided Geometric Design.

- Editorial: Elsevier.
- ISSN: 0167-8396.
- Licencia: Open access. Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0).

Datos de la publicación:

- Volumen: 94.
- N° artículo: 102084, páginas: 1-20.
- Fecha de publicación: 31 de marzo de 2022.
- DOI: [10.1016/j.cagd.2022.102084](https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102084).

Clasificación: Journal Citation Reports (JCR) 2021.

- Categoría: Mathematics, Applied.
Cuartil JIF: Q3.
- Categoría: Computer Science, Software Engineering.
Cuartil JIF: Q4.

Resumen:

Este trabajo proporciona una fórmula simple basada en el cálculo de algunas derivadas para determinar las ramas y las asíntotas de curvas que están definidas por una parametrización. Para ello, se utilizan algunos resultados y nociones previas presentadas en [31–34].

A partir de estos resultados, se muestra cómo se pueden calcular las asíntotas generalizadas de la curva de *input* y se presentan algunas aplicaciones relacionadas con el índice de ramificación y el grado de la asíntota, la forma infinita y la multiplicidad de los puntos infinitos. Además, a partir de estos resultados, el artículo incluye cómo construir todas las familias de curvas paramétricas.

El método proporcionado es aplicable al caso plano, pero se puede adaptar para tratar con curvas racionales en el espacio n -dimensional. Además, las fórmulas presentadas arrojan una idea de cómo abordar el cálculo de g -asíntotas para una parametrización no necesariamente racional.

A.3 Determining the asymptotic family of an implicit curve

Autores: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla, R. Magdalena Benedicto y S. Pérez-Díaz.

Nombre de la revista: Computer Aided Geometric Design.

- Editorial: Elsevier.
- ISSN: 0167-8396.
- Licencia: Open access. Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0).

Datos de la publicación:

- Volumen: 98.
- N° artículo: 102146, páginas: 1-17.
- Fecha de publicación: 31 de agosto de 2022.
- DOI: [10.1016/j.cagd.2022.102146](https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102146).

Clasificación: Journal Citation Reports (JCR) 2021.

- Categoría: Mathematics, Applied.
Cuartil JIF: Q3.
- Categoría: Computer Science, Software Engineering.
Cuartil JIF: Q4.

Resumen:

En este trabajo se trata el siguiente problema: dada una curva plana algebraica, \mathcal{C} , definida implícitamente, se determina su “familia asintótica”, es decir, el conjunto de curvas algebraicas que tienen el mismo comportamiento asintótico que \mathcal{C} .

A.4 Improving the hardware overload for the computation of generalized asymptotes

Autoras: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla y S. Pérez-Díaz.

Nombre de la revista: Software.

- Editorial: Elsevier.
- ISSN: 2352-7110.
- Licencia: Open access. Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0).

Datos de la publicación:

- Manuscrito enviado para publicación.

Clasificación: Journal Citation Reports (JCR) 2021.

- Categoría: Computer Science, Software Engineering.
Cuartil JIF: Q2.

Resumen:

Se presentan dos algoritmos que mejoran la efectividad del uso de las series de Puiseux, para el cálculo de las *g-asíntotas*, o *asíntotas generalizadas*, de una curva algebraica plana, C , definida de paramétrica.

En primer lugar y como preliminar, se explican los cálculos realizados mediante el desarrollo en series de Puiseux. A continuación, se presentan los pseudocódigos de los algoritmos mejorados, así como las implementaciones correspondientes.

El software de álgebra computacional empleado para construir las *g-asíntotas* de una curva algebraica plana definida paramétricamente es **Maple**. Con este software, se analiza el rendimiento de los dos algoritmos considerando catorce curvas paramétricas, seleccionadas de cien casos de estudio aleatorios. Su ejecución proporciona la información sobre los tiempos de ejecución y de estancia en el sistema, además de las necesidades de memoria, obteniendo así el grado de sobrecarga que introduce cada algoritmo.

De este modo se realiza un análisis comparativo de los algoritmos, tomando como base a algunas propiedades de las curvas de entrada y de sus resultados, lo cual permite analizar la eficiencia de los dos algoritmos y establecer criterios comparativos.

Ambos algoritmos son un punto de partida para generalizar este estudio a superficies o curvas definidas por una parametrización no necesariamente racional.

A.5 Design and implementation of symbolic algorithms for the computation of generalized asymptotes

Autoras: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla y S. Pérez-Díaz.

Nombre de la revista: Annals of Mathematics and Artificial Intelligence.

- Editorial: Springer.
- ISSN: 1012-2443.
- Licencia: Copyright.

Datos de la publicación:

- Manuscrito enviado para publicación.

Clasificación: Journal Citation Reports (JCR) 2021.

- Categoría: Mathematics, Applied.
Cuartil JIF: Q3.
- Categoría: Computer Science, Hardware & Architecture.
Cuartil JIF: Q4.

Resumen:

Se presentan dos algoritmos para calcular las *g-asíntotas*, o *asíntotas generalizadas*, de una curva algebraica plana, \mathcal{C} , definida de forma implícita o paramétrica.

Para ello, en primer lugar y como preliminar, se recuerda la noción de ramas infinitas y de ramas convergentes y se establecen los principales fundamentos que se utilizarán para definir las *g-asíntotas*, es decir, los conceptos de curvas perfectas y aproximantes.

En base a estas nociones, y utilizando el desarrollo en series de Puiseux, se presentan los pseudocódigos de estos algoritmos, así como las implementaciones correspondientes con el software de álgebra computacional Maple, que permiten construir las *g-asíntotas* de una curva algebraica plana definida implícita o paramétricamente.

Además, se analiza el rendimiento de los algoritmos considerando catorce curvas paramétricas, seleccionadas de cien casos de estudio aleatorios. Su ejecución proporciona la información sobre los tiempos de ejecución y de estancia en el sistema, además de las necesidades de memoria, obteniendo así el grado de sobrecarga que introduce cada algoritmo.

De este modo se realiza un análisis comparativo de los algoritmos, tomando como base a algunas propiedades de las curvas de entrada y de sus resultados, lo cual permite analizar la eficiencia de los algoritmos y establecer criterios comparativos.

Los algoritmos presentados en este trabajo son un punto de partida para generalizar este estudio a superficies o curvas definidas por una parametrización no necesariamente racional.

A.6 Computing branches and asymptotes of curves defined by a not rational parametrization

Autoras: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla y S. Pérez-Díaz.

Nombre de la revista: Journal of Symbolic Computation.

- Editorial: Elsevier.
- ISSN: 1095-855X.
- Licencia: Copyright.

Datos de la publicación:

- En prensa.

Clasificación: Journal Citation Reports (JCR) 2021.

- Categoría: Computer Science, Theory & Methods.
Cuartil JIF: Q4.
- Categoría: Mathematics, Applied.
Cuartil JIF: Q4.

Resumen:

En este artículo, en primer lugar se resumen los algoritmos que calculan todas las asíntotas generalizadas de una curva algebraica plana definida implícita o paramétricamente. De los resultados anteriores se deriva un método que permite calcular toda la rama y todas las asíntotas generalizadas de una curva definida en el espacio n -dimensional por una parametrización que no es necesariamente racional.

De este modo, se establecen algunos conceptos y métodos nuevos para este tipo de curvas. Esta solución se basa en la noción de curvas perfectas introducidas a partir de los conceptos y los resultados presentados en artículos anteriores.

A.7 Cálculo de asíntotas generalizadas de curvas algebraicas

Autoras: E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla y S. Pérez-Díaz.

Nombre del congreso: XVII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones (EACA 2022).

- ISSN:
- Licencia: Copyright.

Datos de la publicación:

- En prensa.
- DOI: www.fue.uji.es/eaca2022.

Resumen:

Se presenta un algoritmo para calcular las asíntotas generalizadas o g-asíntotas de una curva algebraica plana, \mathcal{C} , definida implícitamente en \mathbb{C}^2 . Las g-asíntotas generalizan el concepto clásico de asíntota de una curva definida por un polinomio de la forma $yg(x) - f(x)$.

Para ello, se definen los conceptos de ramas infinitas y de ramas convergentes, y se establecen los fundamentos a partir de los cuales se definirán las g-asíntotas, es decir, las curvas aproximantes y las curvas perfectas. Estos conceptos constituyen una herramienta fundamental para analizar el comportamiento de una curva en el infinito.

Apéndice B

Casos de estudio

En este apéndice se presentan tres secciones, [B.1](#), [B.2](#) y [B.3](#) que permiten ilustrar, mediante casos de uso y ejemplos de aplicación, los resultados obtenidos de la investigación presentada en esta tesis doctoral.

Así, en la primera sección se muestran catorce curvas algebraicas planas expresadas tanto en su forma implícita como paramétrica, junto con las ecuaciones que dan lugar a las asíntotas generalizadas representadas en las respectivas figuras. Cada una de estas curvas ha sido elegida por sus propiedades y particularidades, que la diferencian del resto de los casos de estudio.

En la siguiente sección se incluyen los puntos de infinito calculados para cada una de las curvas propuestas, implícitas y paramétricas y, por último, en la sección [B.3](#) se muestran los pares (raíz, multiplicidad) de las soluciones de los denominadores de las ecuaciones paramétricas de las curvas.

Cabe reseñar que, todos cálculos y representaciones gráficas, que se muestran a continuación, se han obtenido a partir de los algoritmos introducidos en esta tesis, y que se incluyen de forma esquemática en el Apéndice [C](#). Además, su implementación ha sido realizada con el sistema de álgebra Maple y se integra en el Apéndice [D](#).

B.1 Definición de curvas y cálculo de sus asíntotas

Curva 1:

$$f(x, y) := -500x^3y^4 + 120x^2y^5 + 140xy^6 + 20y^7 + 20000x^4y^2 + 200x^3y^3 - 5560x^2y^4 - 1160xy^5 - 128000x^5 - 81280x^4y - 11880x^3y^2 + 15480x^2y^3 + 220xy^4 + 20y^5 + 109440x^4 - 1080x^3y - 8600x^2y^2 - 1000xy^3 - 33940x^3 + 9360x^2y - 640x^2.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^2 + 1}{(s^3 - s + 1)(s^2 - 1)^2}, \frac{2s^3 + 5s^2 + 1}{s^5 - 2s^3 + s^2 + s - 1} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^2, 4\sqrt{2}t + 2)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, 2\sqrt{2}t + 3)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) := (t, \alpha t + 236/115 \alpha^2 + 606/155 \alpha - 376/23)$,
donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := t^3 + 7t^2 + 6t - 25$.

Obsérvese que la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_3(t)$ presenta tres soluciones algebraicas, que dan lugar a una asíntota en el cuerpo de \mathbb{R} y otras tres asíntotas en \mathbb{C} , obtenidas a partir de sus puntos conjugados (véase Observación 2.1.9).

Para facilitar su lectura, a continuación se expresan las tres parametrizaciones en coma flotante:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{3a}(t) := (t, 1,404313581 t - 4,90061882)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{3b}(t) := (t, -(4,202156790 + 0,3796972569 i) t - 2,549690581 + 4,547842070 i)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{3c}(t) := (t, -(4,202156790 - 0,3796972569 i) t - 2,549690581 - 4,547842070 i)$.

La siguiente figura representa las asíntotas calculadas en el cuerpo de los números reales.

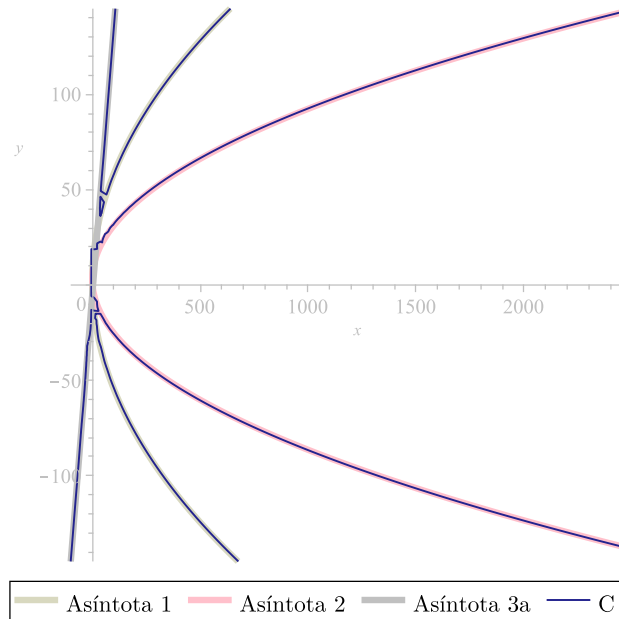


Figura B.1: Curva 1 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{3a}$.

Curva 2:

$$f(x, y) := 9885744y^7 - 1002375x^2y^4 + 28316408xy^5 + 42715176y^6 - 2511000x^3y^2 - 5394960x^2y^3 - 15748840xy^4 + 68282571y^5 + 759375x^4 - 3754125x^3y + 16864814x^2y^2 - 46416423xy^3 + 51792350y^4 - 1466975x^3 + 6376840x^2y - 20248382xy^2 + 18903990y^3 + 1045785x^2 - 2963235xy + 2682090y^2 - 268209x.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{(10s^3 - 1)s^2}{(s^2 - 1)^2(s - 2)^3}, \frac{s^3 + s^2 + 3}{(s - 2)^2(s^2 - 1)} \right).$$

Sus asíntotas vienen definidas por las siguientes ecuaciones paramétricas:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := \left(t^3, (15/24964\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{12482^2}) t^2 - (299/56169\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12482}) t + 30793/37446 \right).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, \sqrt{33}/11 t - 21/44).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) := (t^2, -5/3 i t - 35/12).$

La siguiente imagen representa las tres asíntotas reales de la curva dada. Obsérvese que $\tilde{\mathcal{P}}_3(t)$ tiene coeficientes en \mathbb{C} , pero la curva es real porque su expresión implícita es real: $\tilde{f}_3(x, y) := 144y^2 + 400x + 840y + 1225.$

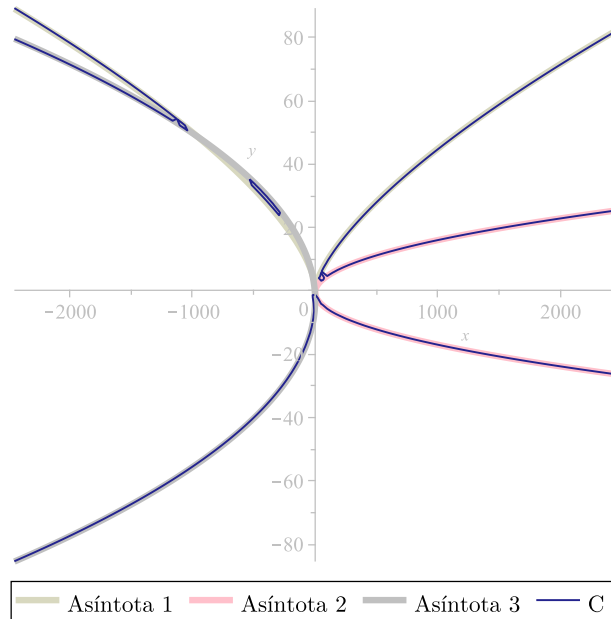


Figura B.2: Curva 2 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$.

Curva 3:

$$\begin{aligned}
f(x, y) := & -3215578176x^6y^{11} + 5254725312x^5y^{12} - 6960231504x^4y^{13} + 4984098912x^3y^{14} - \\
& -2956683708x^2y^{15} + 948227148xy^{16} - 246491883y^{17} - 51851198088x^6y^{10} + \\
& +378985079988x^5y^{11} + 5728255030710x^4y^{12} - 2828195078787x^3y^{13} - \\
& -1810631578116x^2y^{14} + 314274372288xy^{15} + 1820056497y^{16} - 50243409x^7y^8 - \\
& -379205389458x^6y^9 - 25559299685619x^5y^{10} - 525126352623318x^4y^{11} - \\
& -269043995408382x^3y^{12} - 179041141444683x^2y^{13} + 1666126598502xy^{14} - \\
& -5558924718y^{15} - 803894544x^7y^7 - 1633201334559x^6y^8 - 93578445828351x^5y^9 + \\
& +7754073855631434x^4y^{10} + 4374516609647226x^3y^{11} - 2154463716929082x^2y^{12} - \\
& -4827574642563xy^{13} + 8690391219y^{14} - 5828235444x^7y^6 - 4974012254457x^6y^7 + \\
& +323622688737735x^5y^8 - 4501777218678308x^4y^9 + 21787633472665494x^3y^{10} - \\
& -10220206809568386x^2y^{11} - 1834794269652xy^{12} - 6385703340y^{13} - \\
& -24920730864x^7y^5 - 9859024540512x^6y^6 + 1594464946144200x^5y^7 + \\
& +72252664769517870x^4y^8 - 23957949280499079x^3y^9 - 19459977547210176x^2y^{10} + \\
& +7608066183462xy^{11} - 70266069y^{12} - 68632496694x^7y^4 - 4759887515562x^6y^5 + \\
& +202409254499391x^5y^6 - 60817804909078776x^4y^7 - 57954158791202130x^3y^8 - \\
& -19334288998536654x^2y^9 + 1535446151202xy^{10} + 3544579902y^{11} - \\
& -124603654320x^7y^3 + 15079033115136x^6y^4 + 205273293463494x^5y^5 + \\
& +2219643812284044x^4y^6 - 27918953221242936x^3y^7 - 11485133474712705x^2y^8 - \\
& -3940226821476xy^9 - 1960071210y^{10} - 145705886100x^7y^2 + 9536702786235x^6y^3 - \\
& -1853959056745707x^5y^4 - 9728415383487369x^4y^5 - 6464604105727317x^3y^6 - \\
& -4501340130132195x^2y^7 - 1827003015681xy^8 - 143988708y^9 - 100486818000x^7y - \\
& -16181638423551x^6y^2 + 245006346664278x^5y^3 - 715984052629929x^4y^4 - \\
& -277830349661253x^3y^5 - 1188752814693369x^2y^6 + 322806780576xy^7 + \\
& +351610740y^8 - 31402130625x^7 - 8232418813851x^6y - 168713278386912x^5y^2 - \\
& -458087954937798x^4y^3 + 382209221413056x^3y^4 - 194047613521563x^2y^5 + \\
& +606847648956xy^6 - 28745178y^7 + 503758271763x^6 + 21158790559794x^5y - \\
& -75188215530777x^4y^2 + 45144031998681x^3y^3 - 13889916240720x^2y^4 + \\
& +298162712700xy^5 + 7484535y^6 - 16579194371163x^5 + 16668735699759x^4y - \\
& -8008843801578x^3y^2 + 927537112653x^2y^3 + 70389106599xy^4 - 23226456y^5 + \\
& +1689531953322x^4 - 1427421254820x^3y + 278760906183x^2y^2 + 7927544817xy^3 + \\
& +1436439y^4 - 54758847087x^3 + 22194921558x^2y - 188405256xy^2 + 1496250y^3 + \\
& +670647603x^2 - 142831761xy + 372480y^2 - 9767181x - 4509y - 5991.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^8 + 2s^4 - s^2 - s - 1}{(s^2 + 1)^4(s^2 + 2)^3s^3}, \frac{s^7 + s^6 - s^5 + s^2 + 1}{(s^2 + 2)^3s} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

$$\bullet \tilde{\mathcal{P}}_1(t) := \left(t^4, -\frac{73176468 \dots 70022160}{(2941595 + 1044237\alpha)^9} - \frac{31007116 \dots 24025488}{(2941595 + 1044237\alpha)^9} \alpha \right),$$

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := t^2 + 4t + 5$.

Nótese que $\tilde{\mathcal{P}}_1(t)$ puede reparametrizarse para dar lugar a la parametrización propia $\tilde{\mathcal{M}}_1(t) := \left(t, -\frac{73176468 \dots 70022160}{(2941595 + 1044237\alpha)^9} - \frac{31007116 \dots 24025488}{(2941595 + 1044237\alpha)^9} \alpha \right)$, donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := t^2 + 4t + 5$.

Utilizando la filosofía de los puntos conjugados (véase Observación 2.1.9), se tiene:

- $\widetilde{\mathcal{M}}_{1a}(t) := (t, -2 + i)$.
- $\widetilde{\mathcal{M}}_{1b}(t) := (t, -2 - i)$.
- $\widetilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^3, \frac{3175473 \dots 854113 \sqrt[3]{103^2} \sqrt[3]{(-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759)^2} \alpha t}{1299560599332066084366131105651465209158301825429328825664} - \frac{1254510 \dots 682965 \sqrt[3]{103^2} \sqrt[3]{(-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759)^2} t}{216593433222011014061021850941910868193050304238221470944} - \frac{13690955225473280 \sqrt[3]{103} \sqrt[3]{-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759} \alpha t^2}{26403789750400376029519659801} + \frac{8520846961643513 \sqrt[3]{103} \sqrt[3]{-1915307 \dots 970880\alpha + 7311410 \dots 926759} t^2}{17602526500266917353013106534} + \alpha t^3 - \frac{19425159575 \alpha}{15549038208} + \frac{12229619291}{2591506368})$,

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := 209 t^2 - 268 t + 492$.

A continuación, se muestran las parametrizaciones (obtenidas a partir de sus puntos conjugados) en coma flotante para facilitar su lectura:

- $\widetilde{\mathcal{P}}_{2a}(t) := (t^3, (0,64+1,39 i) t^3 - (12,60-6,16 i) t^2 - (8,16+17,81 i) t + 3,92-1,74 i)$.
- $\widetilde{\mathcal{P}}_{2b}(t) := (t^3, (0,64-1,39 i) t^3 - (12,60+6,16 i) t^2 + (8,16-17,81 i) t + 3,92+1,74 i)$.

Se puede comprobar que ambas parametrizaciones definen curvas complejas, dado que $\widetilde{f}_{2a}(x, y)$ y $\widetilde{f}_{2b}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$.

- $\widetilde{\mathcal{P}}_3(t) := (t^3, (1/8 - 1/8\sqrt{3} i) t - 1/24)$, que define la asíntota real $\widetilde{\mathcal{C}}_3$, dada por la expresión implícita $\widetilde{f}_3(x, y) := -13824 y^3 - 1728 y^2 - 216 x - 72 y - 1 \in \mathbb{R}[x, y]$.

La siguiente figura representa la curva y su única asíntota real, $\widetilde{\mathcal{C}}_3$.

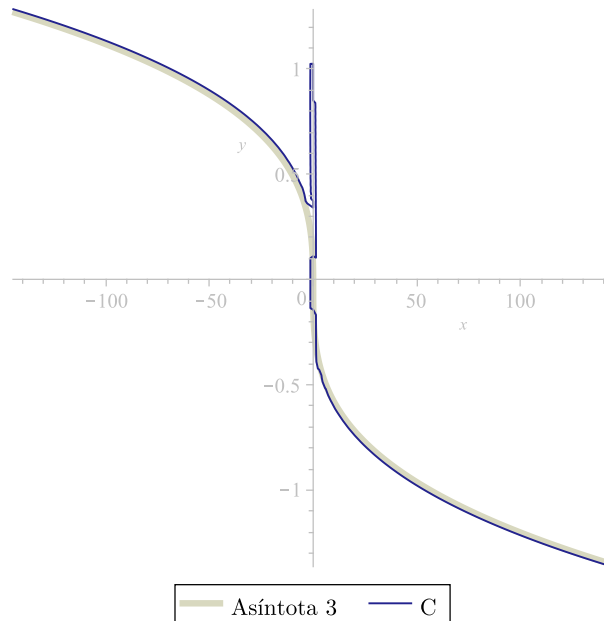


Figura B.3: Curva 3 y su asíntota real $\widetilde{\mathcal{C}}_3$.

Curva 4:

$$f(x, y) := -18xy^2 - 45y^3 + 121x^2 + 335xy + 25y^2 + 313x - 41y + 61.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{5 + s^2}{s(s-2)^2}, \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s-2)} \right).$$

Sus asíntotas se describen con las siguientes ecuaciones paramétricas:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^2, 11/6\sqrt{2}t + 65/72).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t, -2/5t - 5/4).$

La figura muestra las dos asíntotas calculadas.

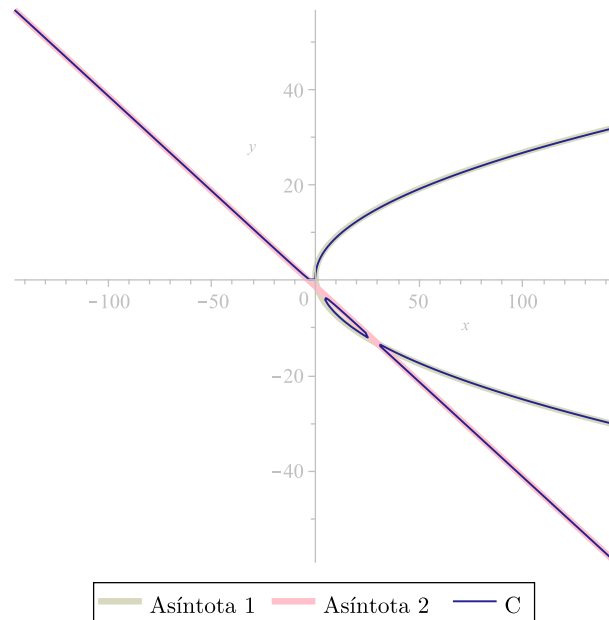


Figura B.4: Curva 4 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

Curva 5:

$$f(x, y) := 345371040x^6 + 298353456x^5y + 83354832x^4y^2 + 10499256x^3y^3 + 668498x^2y^4 + 21119xy^5 + 264y^6 - 944225584x^5 - 344735816x^4y + 15404760x^3y^2 + 23536978x^2y^3 + 2141565xy^4 + 51891y^5 + 67926944x^4 - 384092430x^3y + 146383229x^2y^2 + 29938910xy^3 + 6993472y^4 + 91255243x^3 - 128276420x^2y + 28877210xy^2 + 5920087y^3 + 9712244x^2 - 9712244xy + 2428061y^2.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^4 - s^3 + 5s^2 + 2s + 1}{s^4(s-1)(s-2)}, \frac{2s^4 - 3s^3 - 2s^2 - 26s - 18}{s^4(s-1)(s-2)} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^4, -18t^4 + 5\sqrt[4]{8}t^3 + 307/8\sqrt{2}t^2 - 4317/128\sqrt[4]{2}t - 1251/32).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t, -47/8t - 363/8).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) := (t, -70/33t + 457/88).$

En la siguiente figura se muestran las tres asíntotas reales de la curva dada.

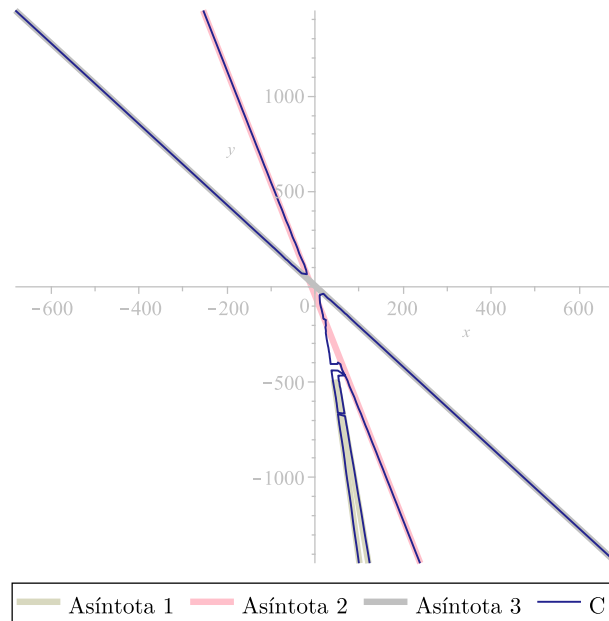


Figura B.5: Curva 5 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$.

Curva 6:

$$f(x, y) := -176xy^3 - 88y^4 + 2352x^2y + 1368xy^2 + 360y^3 - 1568x^2 - 1960xy - 520y^2 + 896x + 368y - 128.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1)(s - 2)^2}, \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2)(s^2 - 1)} \right).$$

Sus asíntotas se describen con las siguientes ecuaciones paramétricas:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t, -2t + 3)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, 7/11\sqrt{33}t + 7/33)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) := (t, 2/3)$.

La siguiente figura muestra la representación de las curvas definidas por las parametrizaciones anteriores.

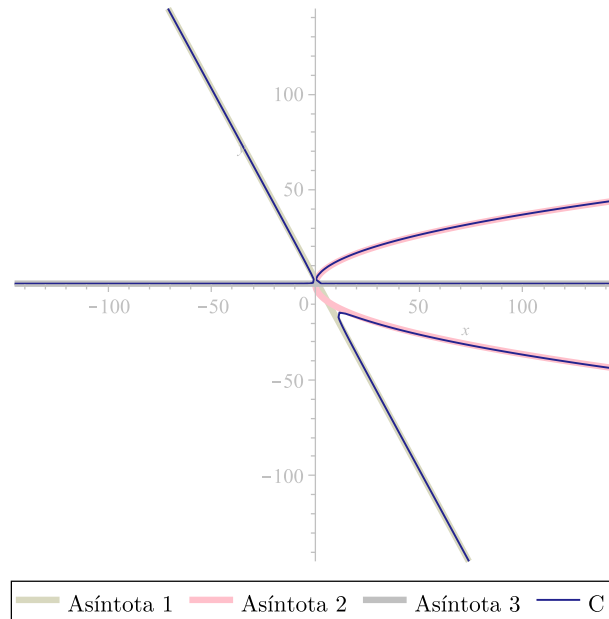


Figura B.6: Curva 6 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_2$ y $\tilde{\mathcal{C}}_3$.

Curva 7:

$$f(x, y) := 484xy^3 + 242y^4 - 37044x^3 - 27342x^2y - 7410xy^2 - 48y^3 - 13328x^2 - 9202xy - 622y^2 - 2512x - 436y - 128.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^3 + 2s - 1}{(s - 1)(s - 2)^3}, \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2)^2(s - 1)} \right).$$

Sus asíntotas se describen con las siguientes ecuaciones paramétricas:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t, -2t - 6)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := \left(t^3, 21/11 \sqrt[3]{11} t^2 + 35/121 \sqrt[3]{11^2} t + 250/121 \right)$.

En la figura se representan las dos asíntotas reales obtenidas.

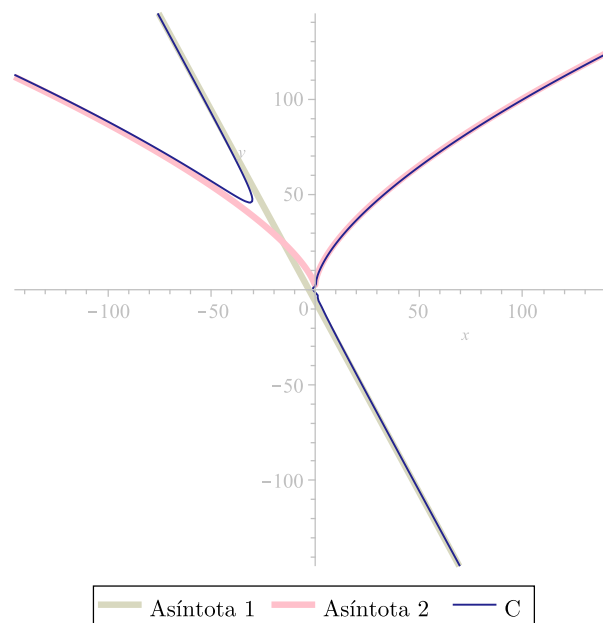


Figura B.7: Curva 7 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

Curva 8:

$$f(x, y) = -1600x^2y^3 + 6400xy^4 - 6400y^5 + 1331x^4 - 5016x^3y + 3168x^2y^2 - 6272xy^3 + 8704y^4 + 10544x^3 - 14752x^2y + 4992xy^2 - 3328y^3 + 1664x^2.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{4(s^2 + 1)}{s^2(s-2)^3}, \frac{2s^2 + 2s - 1}{s^2(s-2)^2} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^3, 11/20 \sqrt[3]{5} t^2 + 7/300 \sqrt[3]{25} t - 77/400)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, 1/2 t^2 - 5/8\sqrt{2} i t + 31/32)$.

La figura muestra las asíntotas reales definidas por las dos parametrizaciones anteriores. Se puede comprobar que $\tilde{\mathcal{C}}_2$ es una asíntota real, porque su expresión implícita está dada por $\tilde{f}_2(x, y) := 256x^2 - 1024xy + 1024y^2 + 1792x - 1984y + 961 \in \mathbb{R}[x, y]$.

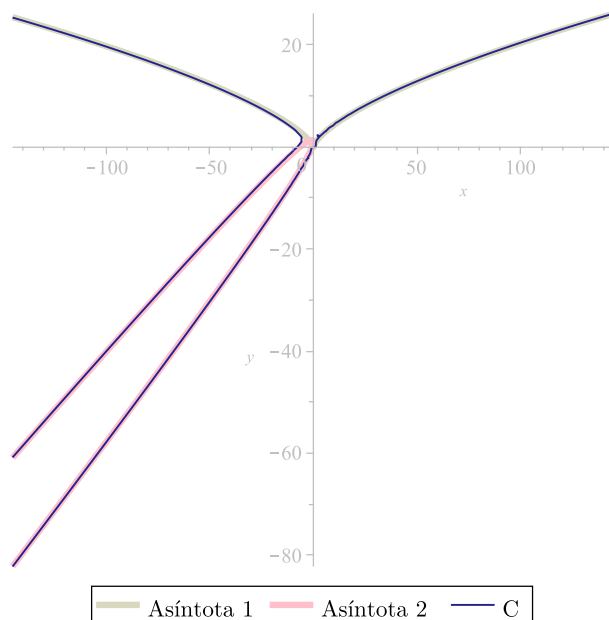


Figura B.8: Curva 8 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

Curva 9:

$$f(x, y) := -729x^2y^3 + 486xy^4 - 81y^5 + 1215x^2y^2 - 1512xy^3 + 369y^4 - 675x^2y + 1674xy^2 - 652y^3 + 125x^2 - 780xy + 552y^2 + 125x - 219y + 31.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{2s^2 - 9}{s^2(s+3)^3}, \frac{s^2 + s - 1}{s^2} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^3, 5/9)$, que puede reparametrizarse de manera propia como $\tilde{\mathcal{M}}_1(t) := (t, 5/9)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, 3t^2 + 13/9)$, que puede reparametrizarse de manera propia como $\tilde{\mathcal{M}}_2(t) := (t, 3t + 13/9)$.

La figura muestra ambas asíntotas reales.

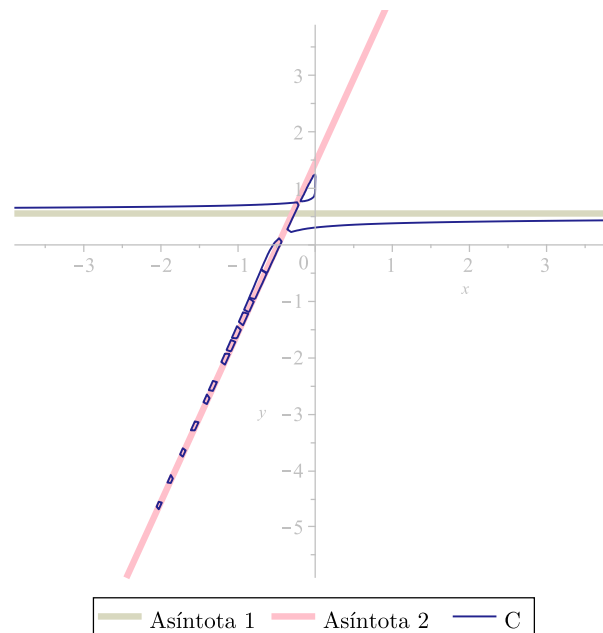


Figura B.9: Curva 9 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

Curva 10:

$$f(x, y) := -242y^7 + 92610x^2y^4 + 21680xy^5 - 162y^6 + 74088x^3y^2 + 157138x^2y^3 + 39104xy^4 + 2y^5 + 148176x^4 - 151704x^3y + 58762x^2y^2 + 18852xy^3 + 64y^4 - 90160x^3 - 22262x^2y - 3616xy^2 + 30784x^2 - 6176xy - 1024x.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 + 1)^2(s - 2)^3}, \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2)^2(s^2 + 1)} \right).$$

Sus asíntotas se describen con las siguientes ecuaciones paramétricas:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^3, 21/11 \sqrt[3]{55} t^2 + 868/3025 55^{2/3} t + 4248/15125).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := \left(t^2, \frac{20938752 t}{1953125 \alpha^9 \sqrt{\alpha}} + \frac{1294336 t}{1953125 \alpha^8 \sqrt{\alpha}} - \frac{49}{250} + \frac{91}{125 \alpha} \right),$

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := 5 t^2 + 4 t + 8.$

Operando con los puntos conjugados de la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_2(t)$, véase la Observación 2.1.9, se obtienen las dos parametrizaciones siguientes, que definen las asíntotas complejas $\tilde{\mathcal{C}}_{2a}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{2b}$.

- $\tilde{\mathcal{P}}_{2a} := \left(t^2, \frac{-2 - 4i}{\sqrt{15 + 5i}} t - \frac{189}{500} - \frac{273i}{500} \right).$
- $\tilde{\mathcal{P}}_{2b} := \left(t^2, \frac{-2 + 4i}{\sqrt{15 - 5i}} t - \frac{189}{500} + \frac{273i}{500} \right).$

En la siguiente figura se representa la única asíntota real, $\tilde{\mathcal{C}}_1$. Obsérvese que las parametrizaciones $\tilde{\mathcal{P}}_{2a}(t)$ y $\tilde{\mathcal{P}}_{2b}(t)$ describen dos curvas complejas, dadas por las expresiones implícitas $\tilde{f}_{2a}(x, y)$ y $\tilde{f}_{2b}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, respectivamente.

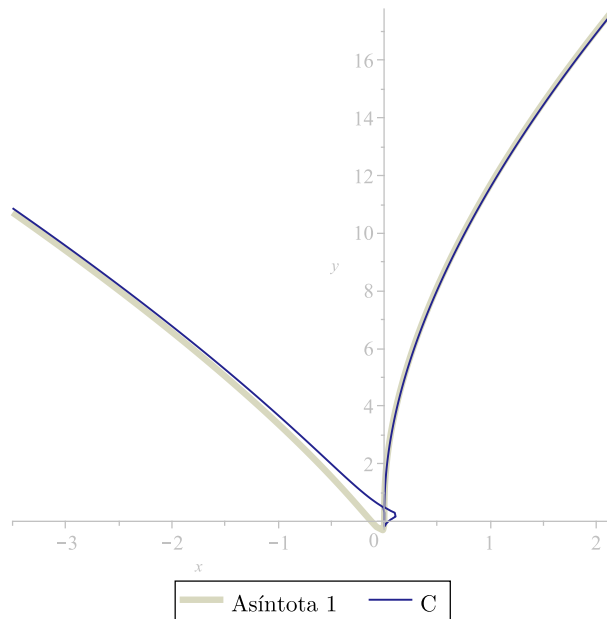


Figura B.10: Curva 10 y su asíntota real $\tilde{\mathcal{C}}_1$.

Curva 11:

$$\begin{aligned}
f(x, y) := & -19773y^{15} + 118638x^2y^{12} - 75816xy^{13} + 33273y^{14} + 1398843x^3y^{10} + 547560x^2y^{11} - \\
& -5679xy^{12} + 37467y^{13} + 30942x^5y^7 + 6921099x^4y^8 + 6553566x^3y^9 - 1177623x^2y^{10} + \\
& + 348183xy^{11} + 8856y^{12} + 1068300x^6y^5 + 13749606x^5y^6 + 16207182x^4y^7 - \\
& -1374183x^3y^8 - 1786446x^2y^9 + 182088xy^{10} - 4752y^{11} + 84375x^8y^2 + 1968750x^7y^3 + \\
& + 12432600x^6y^4 + 7818237x^5y^5 - 25548561x^4y^6 - 38888910x^3y^7 - 1988784x^2y^8 - \\
& -57168xy^9 + 576y^{10} - 168750x^8y - 4218750x^7y^2 - 31792500x^6y^3 - 71991405x^5y^4 - \\
& -80270001x^4y^5 - 36817632x^3y^6 - 461088x^2y^7 + 5184xy^8 + 84375x^8 + 2025000x^7y + \\
& + 12872475x^6y^2 + 5220855x^5y^3 - 17482248x^4y^4 - 3962016x^3y^5 + 277632x^2y^6 - \\
& -112500x^7 + 441900x^6y + 19271016x^5y^2 + 24396336x^4y^3 + 2777472x^3y^4 - 36864x^2y^5 - \\
& -338400x^6 - 4938192x^5y + 2435904x^4y^2 - 331776x^3y^3 + 254016x^5 - 3244032x^4y + \\
& + 589824x^4.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^5 + 2s^2 + s - 1}{s^2(s-1)^3(s^2+1)^5}, \frac{2s^4 - s^3 + s^2 + 1}{(s^2+1)^3(s-1)^2} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

$$\begin{aligned}
\bullet \tilde{\mathcal{P}}_1(t) := & (t^5, \frac{6208967\sqrt[5]{4394^2}\sqrt[5]{(-1493\dots 824\alpha - 6192\dots 625)^2}}{1914932769775390625} \left(\alpha + \frac{7491741216}{13641100499} \right) t^3 - \\
& - \frac{2892\dots 111\sqrt[5]{4394^3}\sqrt[5]{(-1493\dots 824\alpha - 6192\dots 625)^3}}{20335743339873061418533325195312500} t^2 + \\
& + \frac{\sqrt[5]{4394^4}\sqrt[5]{(-1493\dots 824\alpha - 6192\dots 625)^4}(-1396\dots 196\alpha + 16499\dots 586)}{518390330522050013731796003878116607666015625000000} t + \\
& + \frac{128889}{585760} \alpha - \frac{10961}{234304}), \text{ donde } m(\alpha) = 0 \text{ y } m(t) := 4394 t^2 + 1146 t + 3125.
\end{aligned}$$

Operando con los puntos conjugados de la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t)$, véase la Observación 2.1.9, se obtienen las dos parametrizaciones siguientes, con las que se definen las asíntotas complejas \tilde{C}_{1a} y \tilde{C}_{1b} :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}_{1a} := & \left(t^5, \frac{1-3i}{\sqrt[5]{(6+4i)^3}} t^3 + \frac{141-107i}{52\sqrt[5]{(6+4i)^2}} t^2 + \frac{8176-2621i}{13520\sqrt[5]{6+4i}} t - \frac{26531}{351520} - \frac{128889i}{703040} \right). \\
\tilde{\mathcal{P}}_{1b} := & \left(t^5, \frac{1+3i}{\sqrt[5]{(6-4i)^3}} t^3 + \frac{141+107i}{52\sqrt[5]{(6-4i)^2}} t^2 + \frac{8176+2621i}{13520\sqrt[5]{6-4i}} t - \frac{26531}{351520} + \frac{128889i}{703040} \right).
\end{aligned}$$

- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^3, \sqrt[3]{6} t^2 + 4/9\sqrt[3]{36} t + 7/48)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_3(t) := (t^2, 1)$, cuya reparametrización propia es $\tilde{\mathcal{M}}_3(t) := (t, 1)$.

En la siguiente figura se representan las dos asíntotas reales obtenidas. Obsérvese que las parametrizaciones $\tilde{\mathcal{P}}_{1a}(t)$ y $\tilde{\mathcal{P}}_{1b}(t)$ describen sendas curvas complejas, definidas por dos ecuaciones implícitas $\tilde{f}_{1a}(x, y)$ y $\tilde{f}_{1b}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$.

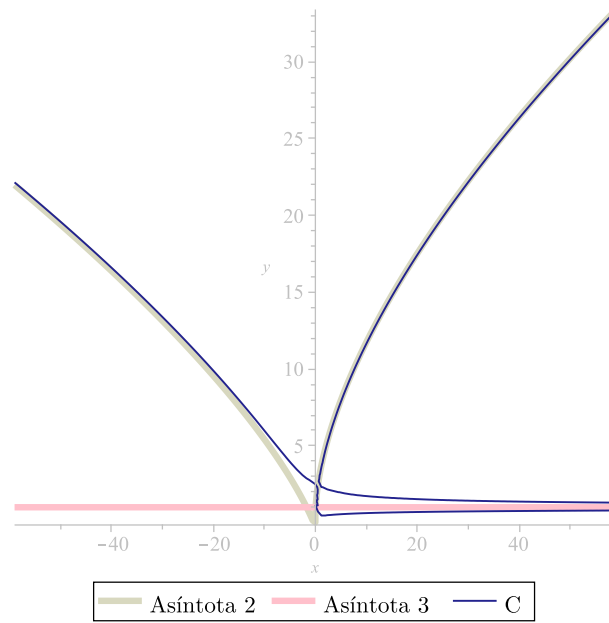


Figura B.11: Curva 11 y sus asíntotas reales \tilde{C}_2 y \tilde{C}_3 .

Curva 12:

$$f(x, y) := -3y^{13} - 24xy^{11} + y^{12} + 20xy^{10} + 172x^3y^7 + 73x^2y^8 + 5xy^9 - 318x^4y^5 + 40x^3y^6 - \\ -133x^2y^7 - 3xy^8 - 300x^5y^3 + 540x^4y^4 - 199x^3y^5 - 15x^2y^6 - 1250x^6y + 1825x^5y^2 - \\ -707x^4y^3 + 156x^3y^4 + 8x^2y^5 + 625x^6 - 625x^5y - 97x^4y^2 + 97x^3y^3 + 3x^2y^4 + 50x^5 - \\ -46x^4y - x^3y^2 + 29x^4 - 11x^3y - x^3.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s-1}{s(s^6+2)^2}, \frac{s^3-s+1}{(s^6+2)} \right).$$

Sus asíntotas se describen con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\bullet \tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^2, \frac{965084862034 \alpha^2 + 1657570956128 \alpha - 10958170857228}{7490349 \alpha^7 \sqrt{\alpha}} t + \\ + \frac{15127222542616 \alpha^2 + 5513812351100 \alpha + 62931415515000}{7490349 \alpha^{10} \sqrt{\alpha}} t - \\ - \frac{326894725 + 516120472\alpha + 64717862 \alpha^2 - 83621175 \alpha^3 + 27982896 \alpha^4 - 7640562 \alpha^5}{2496783000},$$

donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := 3 t^6 + 24 t^5 - 172 t^3 + 318 t^2 + 300 t + 1250$.

Operando con los puntos conjugados de la parametrización $\tilde{\mathcal{P}}_1(t)$, véase la Observación 2.1.9, se obtienen seis parametrizaciones con las que se definen las siguientes curvas complejas. Para facilitar su lectura, dichas parametrizaciones se expresan en coma flotante:

$$\circ \tilde{\mathcal{P}}_{1a}(t) := (t^2, (1,525609655 + 0,4470665102 i) t - 0,1148070203 - 0,3344253589 i). \\ \circ \tilde{\mathcal{P}}_{1b}(t) := (t^2, (1,525609655 - 0,4470665102 i) t - 0,1148070203 + 0,3344253589 i). \\ \circ \tilde{\mathcal{P}}_{1c}(t) := (t^2, (0,0273983428 + 2,35594719 i) t - 0,07093393239 - 0,4731660645 i). \\ \circ \tilde{\mathcal{P}}_{1d}(t) := (t^2, (0,0273983428 - 2,35594719 i) t - 0,07093393239 + 0,4731660645 i). \\ \circ \tilde{\mathcal{P}}_{1e}(t) := (t^2, (0,6622078155 - 1,008166188 i) t + 0,1440742862 + 0,3119943138 i). \\ \circ \tilde{\mathcal{P}}_{1f}(t) := (t^2, (0,6622078155 + 1,008166188 i) t + 0,1440742862 - 0,3119943138 i). \\ \bullet \tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t, 1/2).$$

En la siguiente figura se representa la única asíntota real que, en este caso, es una asíntota horizontal.

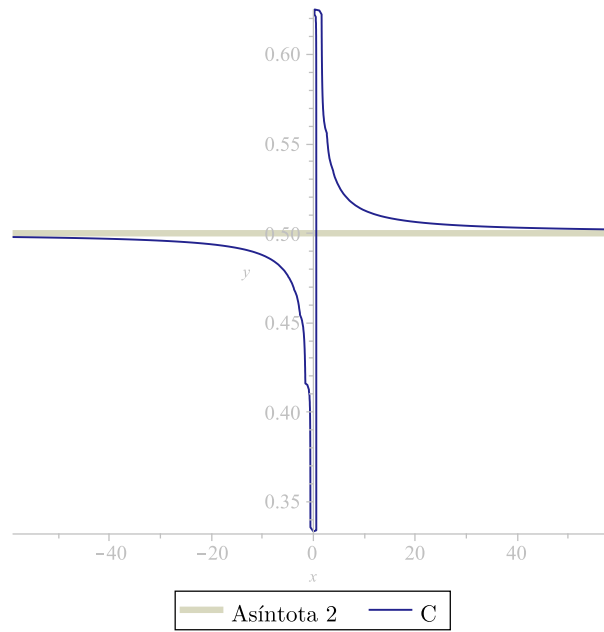


Figura B.12: Curva 12 y su asíntota real $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

Curva 13:

$$f(x, y) := y^9 - 32xy^7 + y^8 - 16x^2y^5 - 40xy^6 - 256x^3y^3 + 192x^2y^4 - 36xy^5 + 64x^4y - 448x^3y^2 + 304x^2y^3 - 16xy^4 - 64x^4 - 144x^3y + 128x^2y^2 - 4xy^3 - 48x^3 + 12x^2y - 4xy^2 - 12x^2 - 3xy - x.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s-1}{(s+1)(s^4-2)^2}, \frac{s^3}{s^4-2} \right).$$

Sus asíntotas vienen descritas por las siguientes ecuaciones paramétricas:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t, 1)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, \frac{39055753216 \alpha^3 + 28358758400 \alpha^2 + 303179759616 \alpha + 76378406912}{\alpha^9 \sqrt{\alpha}} t - \frac{112 - 8\alpha^{19} + 98\alpha^2 - 3\alpha^3}{384\alpha})$, donde $m(\alpha) = 0$ y $m(t) := t^4 - 32t^3 - 16t^2 - 256t + 64$.

Operando con los puntos conjugados de $\tilde{\mathcal{P}}_2(t)$, véase la Observación 2.1.9, se obtienen dos curvas complejas y dos reales. Las siguientes expresiones facilitan su lectura:

- $\tilde{\mathcal{P}}_{2a}(t) := (t^2, 5,720673881 t + 0,02711892246)$, cuya expresión implícita es $\tilde{f}_{2a}(x, y) := (1088 - 768\sqrt{2})y^2 + (512 - 2560\sqrt[4]{2} + 1792\sqrt[4]{2^3} - 384\sqrt{2})x - (224 - 1152\sqrt[4]{2} + 816\sqrt[4]{2^3} - 160\sqrt{2})y - 420 + 84\sqrt[4]{2^3} + 298\sqrt{2} - 120\sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{2b}(t) := (t^2, (-1,082392201 + 1,287188506 i) t + 0,1035533906 + 0,6306723113 i)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{2c}(t) := (t^2, (-1,082392201 - 1,287188506 i) t + 0,1035533906 - 0,6306723113 i)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_{2d}(t) := (t^2, -0,4944220183 t - 1,234225712)$, cuya expresión implícita es $\tilde{f}_{2a}(x, y) := (1088 - 768\sqrt{2})y^2 + (512 + 2560\sqrt[4]{2} - 1792\sqrt[4]{2^3} - 384\sqrt{2})x - (224 + 1152\sqrt[4]{2} - 816\sqrt[4]{2^3} - 160\sqrt{2})y - 420 - 84\sqrt[4]{2^3} + 298\sqrt{2} + 120\sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$.

La siguiente figura muestra la representación de las asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_{2a}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{2d}$.

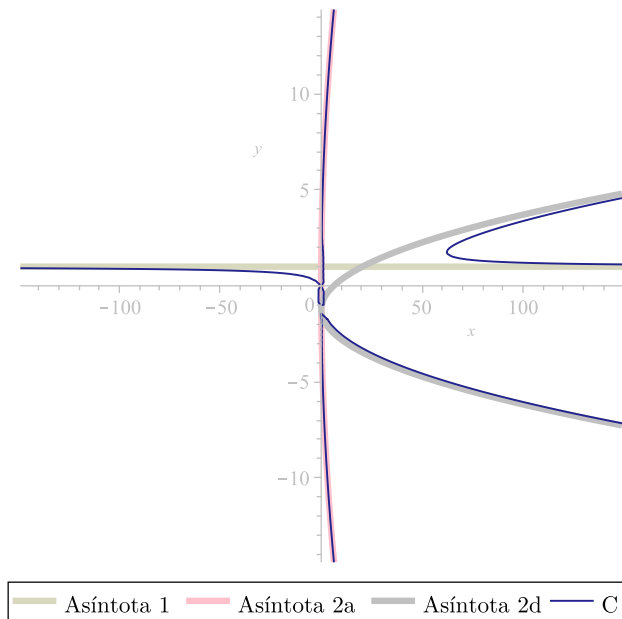


Figura B.13: Curva 13 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{\mathcal{C}}_{2a}$ y $\tilde{\mathcal{C}}_{2d}$.

Curva 14:

$$f(x, y) := -64x^2y^3 - 160xy^4 - 100y^5 + 240x^2y^2 + 504xy^3 + 480y^4 - 300x^2y - 564xy^2 - 921y^3 + 125x^2 + 256xy + 883y^2 - 36x - 423y + 81.$$

$$\mathcal{P}(s) := \left(\frac{s^2 + 10}{s^2(s-2)^3}, \frac{s^2 + 1}{s^2} \right).$$

Las ecuaciones paramétricas de sus asíntotas son:

- $\tilde{\mathcal{P}}_1(t) := (t^3, 5/4)$, cuya reparametrización propia es $\tilde{\mathcal{M}}_1(t) := (t, 5/4)$.
- $\tilde{\mathcal{P}}_2(t) := (t^2, -4/5 t^2 - 3/5\sqrt{5} t + 21/40)$.

En la siguiente figura se representan ambas asíntotas.

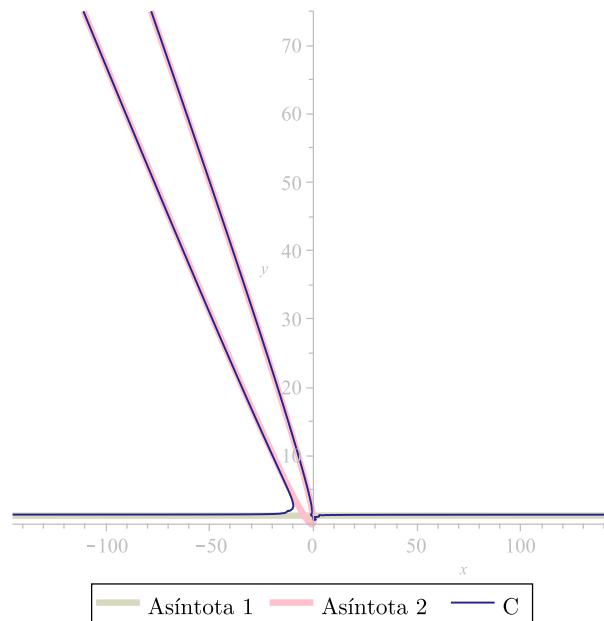


Figura B.14: Curva 14 y sus asíntotas reales $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$.

B.2 Puntos de infinito

En la Tabla B.1 se muestran los puntos de infinito de las curvas algebraicas planas de la Sección B.1. Obsérvese que estos puntos pueden calcularse, tanto desde la forma implícita como desde la forma paramétrica.

Tabla B.1: Puntos de infinito.

Curva	P1	P2	P3	P4
\mathcal{C}_1	(1, 0, 0)	(1, 1, 4, 0)	(1, -4, 2 - 0,4 i, 0)	(1, -4, 2 + 0,4 i, 0)
\mathcal{C}_2	(1, 0, 0)			
\mathcal{C}_3	(1, 0, 0)	$\left(1, \frac{246}{67 + 103\sqrt{2}i}, 0\right)$	$\left(1, \frac{-246}{67 + 103\sqrt{2}i}, 0\right)$	
\mathcal{C}_4	(1, 0, 0)	(1, -2/5, 0)		
\mathcal{C}_5	(1, -18, 0)	(1, -47/8, 0)	(1, -70/33, 0)	
\mathcal{C}_6	(1, 0, 0)	(1, -2, 0)		
\mathcal{C}_7	(1, 0, 0)	(1, -2, 0)		
\mathcal{C}_8	(1, 0, 0)	(1, 1/2, 0)		
\mathcal{C}_9	(1, 0, 0)	(1, 3, 0)		
\mathcal{C}_{10}	(1, 0, 0)			
\mathcal{C}_{11}	(1, 0, 0)			
\mathcal{C}_{12}	(1, 0, 0)			
\mathcal{C}_{13}	(1, 0, 0)			
\mathcal{C}_{14}	(1, 0, 0)	(1, -4/5, 0)		

B.3 Raíces y multiplicidad de las ecuaciones paramétricas

La siguiente tabla muestra la multiplicidad de las raíces de los denominadores, $p_{12}(s)$ y $p_{22}(s)$, de la parametrización que define cada una de las curvas del Apéndice B.1.

Tabla B.2: Raíces y multiplicidad de $p_{12}(s)$ y $p_{22}(s)$.

Id.	(raíz, multiplicidad) de $p_{12}(s)$	(raíz, multiplicidad) de $p_{22}(s)$
\mathcal{C}_1	$\left(\frac{(1-\sqrt{3}i) \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})^2+12(1+\sqrt{3}i)}}{12 \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})}}, 1 \right),$ $\left(\frac{(1+\sqrt{3}i) \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})^2+12(1-\sqrt{3}i)}}{12 \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})}}, 1 \right),$ $\left(-\frac{12 + \sqrt[3]{(108+12\sqrt{69})^2}}{6 \sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}}, 1 \right),$ $(1, 2), (-1, 2)$	$\left(\frac{(1-\sqrt{3}i) \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})^2+12(1+\sqrt{3}i)}}{12 \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})}}, 1 \right),$ $\left(\frac{(1+\sqrt{3}i) \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})^2+12(1-\sqrt{3}i)}}{12 \sqrt[3]{(108+12\sqrt{23}\sqrt{3})}}, 1 \right),$ $\left(-\frac{12 + \sqrt[3]{(108+12\sqrt{69})^2}}{6 \sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}}, 1 \right),$ $(1, 1), (-1, 1)$
\mathcal{C}_2	$(2, 3), (1, 2), (-1, 2)$	$(2, 2), (1, 1), (-1, 1)$
\mathcal{C}_3	$(\sqrt{2}i, 3), (-\sqrt{2}i, 3), (i, 4), (-i, 4), (0, 3)$	$(\sqrt{2}i, 3), (-\sqrt{2}i, 3), (0, 1)$
\mathcal{C}_4	$(2, 2), (0, 1)$	$(2, 1), (0, 1)$
\mathcal{C}_5	$(2, 1), (1, 1), (0, 4)$	$(2, 1), (1, 1), (0, 4)$
\mathcal{C}_6	$(2, 2), (1, 1), (-1, 1)$	$(2, 1), (1, 1), (-1, 1)$
\mathcal{C}_7	$(2, 3), (1, 1)$	$(2, 2), (1, 1)$
\mathcal{C}_8	$(2, 3), (0, 2)$	$(2, 2), (0, 2)$
\mathcal{C}_9	$(0, 2), (-3, 3)$	$(0, 2)$
\mathcal{C}_{10}	$(i, 2), (-i, 2), (2, 3)$	$(i, 1), (-i, 1), (2, 2)$
\mathcal{C}_{11}	$(i, 5), (-i, 5), (1, 3), (0, 2)$	$(i, 3), (-i, 3), (1, 2)$
\mathcal{C}_{12}	$\left(\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}+i)}{2}, 2 \right), \left(\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}-i)}{2}, 2 \right),$ $\left(-\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}-i)}{2}, 2 \right), \left(-\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}+i)}{2}, 2 \right),$ $(\sqrt[6]{2}i, 2), (-\sqrt[6]{2}i, 2), (0, 1)$	$\left(\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}+i)}{2}, 1 \right), \left(\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}-i)}{2}, 1 \right),$ $\left(-\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}-i)}{2}, 1 \right), \left(-\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{3}+i)}{2}, 1 \right),$ $(\sqrt[6]{2}i, 1), (-\sqrt[6]{2}i, 1)$
\mathcal{C}_{13}	$(-\sqrt[4]{2}, 2), (\sqrt[4]{2}i, 2), (-\sqrt[4]{2}i, 2), (\sqrt[4]{2}, 2),$ $(-1, 1)$	$(-\sqrt[4]{2}, 1), (\sqrt[4]{2}i, 1), (-\sqrt[4]{2}i, 1), (\sqrt[4]{2}, 1)$
\mathcal{C}_{14}	$(2, 3), (0, 2)$	$(0, 2)$

Obsérvese que en este caso, todas las raíces se han podido calcular simbólicamente y de manera exacta (véanse en concreto las curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_{13}$). En muchas ocasiones esto no es así y, en ese caso, como se ha comentado a lo largo de esta tesis, hay que recurrir al uso de los puntos conjugados. De hecho, las raíces de los denominadores de la parametrización que define a cada curva anteriormente mencionada, pueden expresarse utilizando la idea de los puntos conjugados, es decir, “recolectando” algebraicamente las raíces obtenidas y trabajando con ellas como raíces de un polinomio irreducible $m(t)$.

Apéndice C

Pseudocódigo de los algoritmos

En este apéndice se presenta el pseudocódigo del Algoritmo 1.1, que permite comprobar el comportamiento asintótico de dos curvas, así como el pseudocódigo de los cuatro algoritmos de investigación, que permiten construir las asíntotas de una curva dada, Algoritmo 1.2, Algoritmo 1.3, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2.

En primer lugar se incluyen los algoritmos del Capítulo 1, Algoritmo 1.1 y Algoritmo 1.2, seguidos del Algoritmo 1.3 y de los algoritmos del Capítulo 2, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2.

Se recuerda que el Algoritmo 1.1 determina el comportamiento asintótico de dos curvas, es decir, si se aproximan todas sus ramas infinitas entre sí. El Algoritmo 1.2, calcula las asíntotas de una curva a partir de su expresión implícita, considerando las ramas infinitas que convergen con la curva dada, mientras que el Algoritmo 1.3 realiza la construcción de las asíntotas a partir de la expresión paramétrica de la curva. Para ambos casos se requiere el cómputo de las series de Puiseux.

Así mismo, se presenta el Algoritmo 2.1 y el Algoritmo 2.2, que muestran un incremento de la eficiencia alcanzada con los métodos propuestos en esta investigación para la construcción de asíntotas, empleando límites y derivadas, respectivamente.

La correspondiente implementación ha sido realizada con el sistema de álgebra Maple y se integra en el Apéndice D.

Finalmente, es importante subrayar que se van a patentar los pseudocódigos presentados en el presente apéndice, así como las correspondientes implementaciones que se detallan en el Apéndice D. Así mismo, se han enviado a la revista *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* el pseudocódigo del Algoritmo 1.2 y del Algoritmo 1.3 [3].

C.1 Algoritmo de comportamiento asintótico

Data: \mathcal{C} y \mathcal{D} , curvas algebraicas planas definidas implícitamente.

Result: TRUE: \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen el mismo comportamiento asintótico,

FALSE: Cualquier otro caso.

```

begin
   $F(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(\mathcal{C})$ 
   $G(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(\mathcal{D})$ 
   $P_1, \dots, P_k \leftarrow \text{PuntosdeInfinito}(F(x, y, 0))$ 
   $Q_1, \dots, Q_l \leftarrow \text{PuntosdeInfinito}(G(x, y, 0))$ 
  if  $\text{PuntosdeInfinito}(\mathcal{C}) \neq \text{PuntosdeInfinito}(\mathcal{D})$  then
    return FALSE /* Observación 1.3.3 */
   $g(y, z) \leftarrow F(1, y, z)$ 
   $h(y, z) \leftarrow G(1, y, z)$ 
   $\phi_1, \dots, \phi_m \leftarrow \text{SeriesPuisseux}(g(y, 0))$ 
   $\psi_1, \dots, \psi_n \leftarrow \text{SeriesPuisseux}(h(y, 0))$ 

  foreach  $\phi_i$  de  $P_i$ ,  $i \leftarrow 1 \dots m$  do
     $r_i(z) \leftarrow z\phi_i(z^{-1})$ 
     $B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{r}_i(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(r_i(z))$ 
     $\tilde{B}_i \leftarrow \{(z, \tilde{r}_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$ 

  foreach  $\psi_j$  de  $Q_j$ ,  $j \leftarrow 1 \dots n$  do
     $\bar{r}_j(z) \leftarrow z\psi_j(z^{-1})$ 
     $\bar{B}_j \leftarrow \{(z, \bar{r}_j(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_j\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{\bar{r}}_j(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(\bar{r}_j(z))$ 
     $\tilde{\bar{B}}_j \leftarrow \{(z, \tilde{\bar{r}}_j(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_j\}$ 

  for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $\tilde{r}_i(z) \notin \{\tilde{\bar{r}}_j(z), j \in 1, \dots, n\}$  then
      return FALSE /* Lema 1.3.2 */

  for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
    if  $\tilde{\bar{r}}_j(z) \notin \{\tilde{r}_i(z), i \in 1, \dots, m\}$  then
      return FALSE /* Lema 1.3.2 */

  return TRUE

```

Algoritmo C.1: Comportamiento asintótico de dos curvas algebraicas planas \mathcal{C} y \mathcal{D} .

C.2 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas implícitas

Data: \mathcal{C} , curva algebraica plana irreducible definida por $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$.

Result: Asíntotas \mathcal{C}_i , $i \leftarrow 1, \dots, k$.

begin

```

     $F(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(\mathcal{C})$ 
     $P_1, \dots, P_m \leftarrow \text{PuntosInfinito}(F(x, y, 0))$ 
     $g(y, z) \leftarrow F(1, y, z)$ 
     $\phi_1(z), \dots, \phi_k(z) \leftarrow \text{SeriesPuisseux}(g(y, z), z = 0, y)$  /* Teorema 1.1.5 */
    foreach  $\phi_i(z)$  de  $P_j$  do
         $r_i(z) \leftarrow z\phi_i(z^{-1})$ 
         $B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$  /* Definición 1.2.1 */
         $\tilde{r}_i(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(r_i(z))$  /* Ecuación 1.4 */
         $n_i \leftarrow \text{grado}(B_i)$  /* Definición 1.5.6 */
         $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, \tilde{r}_i(t^{n_i})) \in \mathbb{C}[t]^2$  es propia /* Lema 1.6.1 */
    return  $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$ ,  $i \leftarrow 1, \dots, k$ 

```

Algoritmo C.2: Construcción de asíntotas de una curva plana \mathcal{C} definida implícitamente.

C.3 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas paramétricas

Data: \mathcal{C} , curva algebraica plana irreducible definida por $\mathcal{P}(s)$, /* Ecuación 1.6 */
 $\mathcal{P}(s) \leftarrow (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2$,
 $p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s)$, $\text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1$, $i = 1, 2$.

Result: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_i$, $i \leftarrow 1, \dots, k$.

```

begin
   $\mathcal{P}^*(s) \leftarrow \text{ParametrizaciónProyectiva}(\mathcal{P}(s))$  /* Ecuación 1.7 */
   $P_1, \dots, P_m \leftarrow \text{PuntosInfinito}(\mathcal{P}^*(s))$ 
   $\ell_1(t), \ell_2(t), \dots, \ell_k(t) \leftarrow \text{SeriesPuiseux}(p_{12}(s) - tp_{11}(s) = 0, t = 0, s)$  /* Ec. 1.8 */
  foreach  $\ell_i(t)$  de  $P_i$  do
     $r_i(z) \leftarrow p_2(\ell_i(z^{-1})) \in \mathbb{C}\langle\langle t \rangle\rangle$ ,  $z \leftarrow t^{-1}$  /* Observación 1.8.1 */
     $B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$  /* Definición 1.2.1 */
     $\tilde{r}_i(z) \leftarrow \text{TérminosNoNegativos}(r_i(z))$  /* Ecuación 1.4 */
     $n_i \leftarrow \text{grado}(B_i)$  /* Definición 1.5.6 */
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, \tilde{r}_i(t^{n_i})) \in \mathbb{C}[t]^2$  es propia /* Lema 1.6.1 */
  return  $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$ ,  $i \leftarrow 1, \dots, k$ 

```

Algoritmo C.3: Construcción de asíntotas de una curva \mathcal{C} definida de forma paramétrica.

C.4 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas paramétricas con límites

Data: \mathcal{C} , curva algebraica plana irreducible definida por $\mathcal{P}(s)$, /* Ecuación 1.6 */
 $\mathcal{P}(s) \leftarrow (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2$, $p_i(s) = p_{i1}(s)/p_{i2}(s)$, $\text{mcd}(p_{i1}(s), p_{i2}(s)) = 1$,
 $\text{grado}(p_{i1}) \leq \text{grado}(p_{i2})$, $i = 1, 2$.

Result: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_i$, $i \leftarrow 1, \dots, k$.

begin

```

 $\tau_1 \dots \tau_l \leftarrow \text{Raíces}(p_{12}(s)) \in \mathbb{C}$ 
 $n_{11} \dots n_{1l} \leftarrow \text{MultiplicidadRaíces}(p_{12}(s))$ 
 $\rho_1 \dots \rho_k \leftarrow \text{Raíces}(p_{22}(s)) \in \mathbb{C}$ 
 $n_{21} \dots n_{2k} \leftarrow \text{MultiplicidadRaíces}(p_{22}(s))$ 
foreach  $\tau_i \in \{\tau_1 \dots \tau_l\}$  do
  /* Calcula asíntotas horizontales, si existen. Corolario 2.1.4 */
  if  $p_{22}(\tau_i) \neq 0$  then
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t, p_{22}(\tau_i)) \in \mathbb{C}[t]^2$ 
    /* Coeficientes de la parametrización. Teorema 2.1.1 */
  else if  $n_{2i} \geq 1$  then
     $f_{n_{2i}}(s) \leftarrow \frac{p_2(s)}{p_1(s)^{n_{2i}/n_{1i}}}$ 
     $a_{n_{2i}} \leftarrow \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_{n_{2i}}(s)$ 
    for  $j \leftarrow n_{2i} - 1$  to 0 do
       $f_j(s) \leftarrow p_1(s)^{1/n_{1i}}(f_{j+1}(s) - a_{j+1})$ 
       $a_j \leftarrow \lim_{s \rightarrow \tau_i} f_j(s)$ 
     $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_{1i}}, a_{n_{2i}}t^{n_{2i}} + a_j t^j + \dots + a_0 t^0) \in \mathbb{C}[t]^2$ 
  /* Calcula asíntotas verticales, si existen. Corolario 2.1.5 */
  foreach  $\rho_j \in \{\rho_1 \dots \rho_k\} \ \&\& \ \rho_j \notin \text{Raíces}(p_{12}(s))$  do
    if  $\exists \rho_j, p_{12}(\rho_j) \neq 0$  then
       $\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (p_{12}(\rho_j), t) \in \mathbb{C}[t]^2$ 
       $i \leftarrow i + 1$ 
  return  $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$ ,  $i \leftarrow 1, \dots, k$ 

```

Algoritmo C.4: Construcción de asíntotas de la curva paramétrica, \mathcal{C} , con límites.

C.5 Algoritmo de construcción de asíntotas de curvas paramétricas con derivadas

Data: \mathcal{C} , curva plana irreducible definida por /* Ecuación 2.2 */
 $\mathcal{P}(s) = (p_1(s), p_2(s)) \in \mathbb{R}(s)^2$, $p_i(s) = q_i(s)/q(s)$
 $\text{mcd}(q_1(s), q_2(s), q(s)) = 1$, $i = 1, 2$

Result: Asíntotas $\tilde{\mathcal{C}}_i$, $i \leftarrow 1, \dots, k$

begin

$\tau_1 \dots \tau_k \leftarrow \text{Raíces}(q(s)) \in \mathbb{C}$

$n_1 \dots n_k \leftarrow \text{MultiplicidadRaíces}(q(s))$

$\sigma(s) \leftarrow \frac{q_2(s)}{q_1(s)}$ /* Teorema 2.2.1 */

foreach $\tau_i \in \{\tau_1 \dots \tau_k\}$ **do**

$\bar{q}_i(s) \leftarrow \frac{q(s)}{(s - \tau_i)^{n_i}}$

$\rho_i(s) \leftarrow \left(\frac{q_1(s)}{\bar{q}_i} \right)^{\frac{1}{n_i}}$

/* Coeficientes de la parametrización */

$a_{n_i} \leftarrow \sigma(\tau_i)$

for $j \leftarrow (n_i - 1)$ **to** 0 **do**

$a_j = \frac{1}{(n_j - j)!} \cdot \frac{\partial^{n_i-1-j} \sigma(s)}{\partial s^{n_i-1-j}} \cdot \rho_i^{(n_i-j)}(\tau_i)$

$\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, a_{n_i} t^{n_i} + \dots + a_0 t^0) \in \mathbb{C}[t]^2$

return $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t)$, $i \leftarrow 1, \dots, k$

Algoritmo C.5: Construcción de asíntotas de la curva paramétrica, \mathcal{C} , con derivadas.

Apéndice D

Implementación de los algoritmos

En este apéndice se presentan las implementaciones correspondientes a los cuatro algoritmos analizados en esta investigación, y que permiten construir las asíntotas de una curva plana: Algoritmo 1.2, Algoritmo 1.3, Algoritmo 2.1 y Algoritmo 2.2, cuyo pseudocódigo puede consultarse en el Apéndice C de esta tesis.

Es importante destacar que, para cada una de estas implementaciones se han de cumplir las siguientes condiciones de entrada:

1. Por cuestiones de aplicabilidad, asumimos que la curva dada es real (aunque los resultados pueden aplicarse al caso complejo).
2. $(0 : 1 : 0)$ no es un punto de infinito de la curva algebraica plana irreducible. En caso contrario, se considera un cambio lineal de coordenadas.
3. La curva algebraica plana irreducible de entrada está definida por:
 - La Ecuación 1.6 para el Algoritmo 1.3. Obsérvese que $\text{mcd}(p_{i1}, p_{i2}) = 1$.
 - La Ecuación 1.6 para el Algoritmo 2.1. Nótese que $\text{mcd}(p_{i1}, p_{i2}) = 1$ y $\text{grado}(p_{i1}) \leq \text{grado}(p_{i2})$.
 - La Ecuación 2.2 para el Algoritmo 2.2. Obsérvese $\text{mcd}(q_1, q_2, q) = 1$.

Para cada uno de los métodos propuestos, se implementa el correspondiente algoritmo y se añade un conjunto de órdenes que permiten calcular diversas características específicas de las curvas dadas. Estos procedimientos se definen a continuación.

1. Procedimientos generales:

`EIndex`: Calcula el índice de ramificación de una serie.

`NonNegativeOps`: Extrae los términos no negativos de una serie.

`ImplicitToParametric`: Calcula la ecuación paramétrica a partir de la implícita.

`ParametricToImplicit`: Determina la ecuación implícita a partir de la paramétrica.

2. Procedimientos aplicables a curvas definidas implícitamente:

`DegreeImplicit`: Calcula el grado total de una curva, o parcial en una determinada variable.

`NOpsImplicit`: Extrae el número de operandos del polinomio irreducible de la curva.

`PointsatInfinityImplicit`: Calcula los puntos de infinito de una curva dada.

`AsymptotesImplicit`: Construye las g-asíntotas de una curva definida implícitamente, mediante el desarrollo en series de Puiseux y devuelve, a partir de las ramas infinitas que convergen con dicha curva, las asíntotas en forma paramétrica.

`NPuiseuxRootsImplicit`: Calcula el número de series de Puiseux de una curva dada.

`ReportPropertiesImplicit`: Crea un informe sobre las propiedades generales de una curva (grado, nº de términos, nº de asíntotas, etc.) y obtiene el tiempo de uso del procesador, el tiempo de estancia en el sistema y los KiB de memoria necesarios para ejecutar el procedimiento `AsymptotesImplicit`.

`PlotCurveAsymptotesImplicit`: Representa una curva dada y sus g-asíntotas.

3. Procedimientos aplicables a curvas paramétricas:

`DegreeParametric`: Calcula el grado total de una curva dada.

`NOpsParametric`: Extrae el número de operandos de la parametrización de una curva.

`PointsatInfinityParametric`: Calcula los puntos de infinito de una curva dada.

`AsymptotesParametric`: Construye las g-asíntotas de una curva definida paramétricamente, mediante el desarrollo en series de Puiseux y devuelve, a partir de las ramas infinitas que convergen con dicha curva, las asíntotas en forma paramétrica.

`NPuiseuxRootsParametric`: Calcula el número de series de Puiseux de una curva.

`ReportPropertiesParametric`: Crea un informe sobre las propiedades generales de una curva (grado, nº de términos, nº de asíntotas, etc.) y obtiene el tiempo de uso del procesador, el tiempo de estancia en el sistema y los KiB de memoria necesarios para ejecutar el procedimiento `AsymptotesParametric`.

`PlotCurveAsymptotesParametric`: Representa una curva dada y sus g-asíntotas.

4. Procedimientos aplicables a curvas paramétricas para el caso del cálculo de asíntotas con límites:

Obsérvese que, en este caso, se incluyen las órdenes del ítem 3, excepto los procedimientos `AsymptotesParametric` y `ReportPropertiesParametric`, que se substituyen por las órdenes `AsymptotesParametricLimits` y `ReportPropertiesParametricLimits`, y se añade un nuevo procedimiento, `RootsMultiplicityParametric`, necesario para calcular las raíces de los denominadores de la ecuación paramétrica de la curva.

`RootsMultiplicityParametric`: Calcula los pares, raíz - multiplicidad, del denominador de uno de las componentes de la parametrización dada.

`AsymptotesParametricLimits`: Construye las g-asíntotas de una curva definida paramétricamente aplicando límites y devuelve, a partir de las ramas infinitas que convergen con dicha curva, las asíntotas en forma paramétrica.

`ReportPropertiesParametricLimits`: Crea un informe sobre las propiedades generales de una curva (grado, n° de términos, n° de asíntotas, etc.) y obtiene el tiempo de uso del procesador, el tiempo de estancia en el sistema y los KiB de memoria necesarios para ejecutar el procedimiento `AsymptotesParametricLimits`.

5. Procedimientos aplicables a curvas paramétricas para el caso del cálculo de asíntotas con derivadas:

Obsérvese que, en este caso, se incluyen los órdenes del ítem 3, excepto los procedimientos `AsymptotesParametric` y `ReportPropertiesParametric`, que se substituyen por los órdenes `AsymptotesParametricDerivatives` y `ReportPropertiesParametricDerivatives`. También se contempla el procedimiento `RootsMultiplicityParametric` del caso anterior.

`AsymptotesParametricDerivatives`: Construye las g-asíntotas de una curva definida por su expresión paramétrica aplicando derivadas y devuelve, a partir de las ramas infinitas que convergen con dicha curva, las asíntotas en forma paramétrica..

`ReportPropertiesParametricDerivatives`: Crea un informe sobre las propiedades generales de una curva (grado, n° de términos, n° de asíntotas, etc.) y obtiene el tiempo de uso del procesador, el tiempo de estancia en el sistema y los KiB de memoria necesarios para ejecutar el procedimiento `AsymptotesParametricDerivatives`.

La implementación que se entrega a continuación, se ha realizado con el software de álgebra `Maple2021`, con el soporte de los paquetes `algcurves`, `plots` y `CodeTools`.

Finalmente, es importante subrayar que se van a patentar los pseudocódigos presentados en el Apéndice C, así como las correspondientes implementaciones que se detallan a continuación. Así mismo, se han enviado a la revista *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* la implementación del Algoritmo 1.2 y del Algoritmo 1.3 [3].

GAsymptotes, implicit case

Overview of the GAsymptotesImplicit

Description

These procedures compute the generalized asymptotes of a real plane algebraic curve implicitly defined. Also, it has been included useful commands to calculate some properties of the curves and their g-asymptotes.

List of commands for curves implicitly defined

Commands for equations and miscellanea:

- [EIndex](#) (equation)
- [NonNegativeOps](#) (equation)

Commands for implicit curves:

- [ImplicitToParametric](#) (implicit_curve)
- [ParametricToImplicit](#) (parametric_curve)
- [DegreeImplicit](#) (implicit_curve, var)
- [NOpsImplicit](#) (implicit_curve)
- [PointsatInfinityImplicit](#) (implicit_curve)
- [AsymptotesImplicit](#) (implicit_curve, accur)
- [NPuiseuxRootsImplicit](#) (implicit_curve, accur)

Commands for outputs:

- [ReportPropertiesImplicit](#) (id, implicit_curve, accur, iters, header)
- [PlotCurveAsymptotesImplicit](#) (impl_curve, param_asymptotes, rx, ry)

Dependencies

```
> with(algcurves) :
  with(plots) :
  with(CodeTools) :
```


Commands for equations and miscellanea

Procedure EIndex (equation)

Description

Computes the ramification index of a given equation.

@param {expression} equation
@return {number} e_index

Code

```
> EIndex := proc(equation)
  local equation_aux, e_index, indet, i := 1;
  local indets_aux, opslis, index := NULL;

  indet := indets(equation)[1];
  equation_aux := series(equation, indet);
  indets_aux := indets(equation_aux);

  # Selects the indeterminates with rational exponent
  opslis := convert(indets(equation_aux, 'identical'(indet)'fraction'), list);
  for i to nops(opslis) do
    index := denom(op(2, opslis[i])), index;
  end do;

  e_index := ilcm(index);

  return e_index;

end proc;
```

Example

```
> f := 2*sqrt(z) - 5*sqrt(z) + z + 3/z + 7/z^1/3 - (9/z^3 + 2)^5/4 + 10/z^2;
  e_index := EIndex(f);
  f := -3*sqrt(z) + z + 3/z + 7/z^1/3 - (9/z^3 + 2)^5/4 + 10/z^2
  e_index := 12
```

(2.1.3.1)

Procedure NonNegativeOps(equation)

Description

Extracts the non negative terms of a given equation in a indeterminate.

@param {expression} equation
@return {polynomial} tilde_equation

Code

```
> NonNegativeOps := proc(equation)
  local i := 1;
  local tilde_equation := 0;
  local opslis;

  opslis := op(equation);
  for i to nops([opslis]) do
    if indets(denom(opslis[i])) = ∅ then
      tilde_equation := tilde_equation + opslis[i];
    end if;
  end do;

end proc;
```

```

    return sort(tilde_equation);
end proc:

```

Example

```

> r1 := 15/(5*z^7) - 24/(2*z^5) + 11*z^2/6 + 65/72*z;
   tilde_r1 := NonNegativeOps(r1);

```

$$\tilde{r}_1 := \frac{11}{6} z^2 + \frac{65}{72} z \quad (2.2.3.1)$$

Commands for implicit curves

Procedure ImplicitToParametric (implicit_curve)

Description

Computes the parametrization of a curve implicitly given.

@param {polynomial} implicit_curve

@return [{expression}, {expression}] parametric_curve

Code

```

> ImplicitToParametric := proc(implicit_curve)
   local var;
   local aux, parametric_curve;

   var := indets(implicit_curve);
   parametric_curve := parametrization(implicit_curve, var[1], var[2], s);

   return parametric_curve;
end proc:

```

Example

```

> f := -176 x y^3 - 88 y^4 + 2352 x^2 y + 1368 y^2 x + 360 y^3 - 1568 x^2 - 1960 y x - 520 y^2 + 896 x
   + 368 y - 128 :
   ImplicitToParametric(f);

```

$$\left[\frac{7355827511386641 s^4 + 6354240372648 s^3 - 16467095232 s^2 + 14224896 s - 8192}{12708480745296 s^3 - 65868380928 s^2 + 85349376 s}, \frac{-85766121 s^2 - 74088 s - 128}{74088 s - 192} \right] \quad (3.1.3.1)$$

Procedure ParametricToImplicit (parametric_curve)

Description

Computes the implicit polynomial of a given parametric curve.

@param {{expression}, {expression}} parametric_curve
@return {polynomial} implicit_curve

Code

```
> ParametricToImplicit := proc(parametric_curve)
  local aux, var, implicit_curve;

  var := indets(parametric_curve)[1];
  aux := resultant(numer(parametric_curve[1]-x), numer(parametric_curve[2]-y), var);
  implicit_curve := expand(simplify(factor(aux), radical, symbolic));

  return implicit_curve;
end proc;
```

Example

```
> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
f := ParametricToImplicit(P);
f := ParametricToImplicit( $\left[ \left( \frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1)(s - 2)^2}, \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2)(s^2 - 1)} \right) \right]$ )
```

(3.2.3.1)

Procedure DegreeImplicit (implicit_curve, var)

Description

Computes the total degree of a given implicit curve. If var appears, only the partial degree is returned with respect to var.

@param {polynomial} implicit_curve
@param {name} var [optional]
@return {number} polynomial_degree

Code

```
> DegreeImplicit := proc(implicit_curve, var)
  local polynomial_degree;

  if _params['var'] ≠ NULL then
    polynomial_degree := degree(implicit_curve, var);
  else
    polynomial_degree := degree(implicit_curve, indets(implicit_curve));
  end if;

  return polynomial_degree;
end proc;
```

Example

```
> f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x
  + 368 y - 128 :
degreef := DegreeImplicit(f);
degreefx := DegreeImplicit(f, x);
degreef := 4
degreefx := 2
```

(3.3.3.1)

Procedure NOpsImplicit (implicit_curve)

Description

Extracts the number of operands of the curve defined by the input irreducible polynomial.

@param {polynomial} implicit_curve
@return {number} number_operands

Code

```
> NOpsImplicit := proc(implicit_curve)
  local number_operands;

  number_operands := nops(implicit_curve);

  return number_operands;

end proc;
```

Example

```
> f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x
  + 368 y - 128 :
nopsf := NOpsImplicit(f);
```

nopsf := 11 (3.4.3.1)

Procedure PointsatInfinityImplicit (implicit_curve)

Description

Calculates a list of the points at infinity of a given implicit curve.

@param {polynomial} implicit_curve
@return [[{number}, {number}]...] points_infinitylist

Code

```
> PointsatInfinityImplicit := proc(implicit_curve)
  local ec_x, ec_y, F;
  local x0list, aux_y, x, y, i := 1;
  local points_infinity_ecs, points_infinitylist := NULL;

  x := indets(implicit_curve)[1];
  y := indets(implicit_curve)[2];
  F := numer(subs({x =  $\frac{x}{z}$ , y =  $\frac{y}{z}$ }, implicit_curve));
  points_infinity_ecs := solve(subs(z = 0, F));

  if points_infinity_ecs[1] = 0 then
    points_infinitylist := points_infinitylist, [1, 0, 0];

    return [points_infinitylist];

  end if;

  for i to nops(points_infinity_ecs) do
    if solve(points_infinity_ecs[i][1], x) = 0 then
      printf("\nThere exist the point at infinity (0: 1: 0). Please make a linear
change of coordinates\n");
      points_infinitylist := points_infinitylist, [0, 1, 0];

      return [points_infinitylist];

    end if;
    ec_x := points_infinity_ecs[i, 1];
    ec_y := points_infinity_ecs[i, 2];
  end for;
```

```

    if solve(ec_x, x)=0 then
        return points_infinitylist;
    else
        if nops(indets(ec_x)) = 1 then
            aux_y := subs(x=1, solve(ec_y, y));
        else
            aux_y := subs(x=1, solve(ec_x, y));
        end if;
        points_infinitylist := points_infinitylist, [1, aux_y, 0];
    end do;

    return [points_infinitylist];
end proc:

```

Example

```

> f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x
   + 368 y - 128 :
PointsatInfinityImplicit(f);

```

[[1, 0, 0], [1, -2, 0]] **(3.5.3.1)**

Procedure AsymptotesImplicit (implicit_curve, accuracy)

Description

Computes the parametrizations of the g-asymptotes of an implicit curve, considering Puiseux expansion up to a fixed accuracy.

@param {polynomial} implicit_curve
 @param {number} accuracy
 @return [[{expression}, {expression}]...] parametric_asymptotes list

Code

```

> AsymptotesImplicit := proc(implicit_curve, accuracy)
  local F, g;
  local x, y, nroots, i := 1;
  local points_inf_list;
  local Phi, parametric_asymptoteslist := NULL;
  local phi, l_YZ, l_aux, e_index, r, tilde_aux, tilde_r;

  x := indets(implicit_curve)[1];
  y := indets(implicit_curve)[2];
  F := numer(subs({x =  $\frac{x}{z}$ , y =  $\frac{y}{z}$ }, implicit_curve)); # Projective curve
  g := subs(x=1, F); # g(y,z)
  Phi := convert(puiseux(g, z=0, y, accuracy), list);
  nroots := nops(Phi);

  for i from 1 to nroots do # Leaves and braches
    phi := Phi[i];
    l_YZ :=  $\frac{\text{phi}_1}{z}$ ;

    l_aux := subs(z =  $\frac{1}{z}$ , l_YZ);
    e_index := EIndex(l_aux);
    r := simplify(subs(z = ze_index, l_aux), radical, symbolic);
    tilde_aux := NonNegativeOps(expand(simplify(r), radical, symbolic));
    tilde_r := subs(z=t, tilde_aux);
    parametric_asymptoteslist := [te_index, tilde_r], parametric_asymptoteslist;
  end do;

  return [parametric_asymptoteslist];
end proc:

```

Example

```

> f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x
  + 368 y - 128 :
AsymptotesImplicit(f, 3);

```

$$\left[[t, -2t + 3], \left[t^2, \frac{7\sqrt{33}t}{11} + \frac{7}{33} \right], \left[t, \frac{2}{3} \right] \right] \quad (3.6.3.1)$$

Procedure NPuiseuxRootsImplicit(implicit_curve, accuracy)

Description

Computes the number of Puiseux roots of an implicit curve under a fixed accuracy.

@param {polynomial} implicit_curve
 @param {number} nPuiseux_ac
 @return {number} nroots

Code

```

> NPuiseuxRootsImplicit := proc(implicit_curve, accuracy)
  local F, g;
  local x, y, nroots;
  local Phi;

  x := indets(implicit_curve)[1];
  y := indets(implicit_curve)[2];
  F := numer(subs({x =  $\frac{x}{z}$ , y =  $\frac{y}{z}$ }, implicit_curve)); # Projective curve
  g := subs(x=1, F); # g(y,z)
  Phi := convert(puiseux(g, z=0, y, accuracy), list);
  nroots := nops(convert(Phi, set));

  return nroots;
end proc;

```

Example

```

> f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x
  + 368 y - 128 :
n_roots := NPuiseuxRootsImplicit(f, 3);
n_roots := 3

```

(3.7.3.1)

Commands for outputs

Procedure

ReportPropertiesImplicit (id, implicit_curve, accur, iters, header)

Description

Creates a report about the properties of a given implicit curve under a fixed accuracy. The procedure reports the "CPU time" and the "real time", in milliseconds, and the KiB of "memory usage" after "iters" executions of the algorithm AsymptotesImplicit.

Header is an optional parameter that shows the table header.

@param {number} curve identifier
 @param {polynomial} implicit_curve
 @param {number} accuracyPuisseux
 @param {number} iterations
 @param {boolean} header [optional]

Code

```
> ReportPropertiesImplicit := proc(id, implicit_curve, accur, iters, header)
  local f, asymptote_aux;
  local asymptoteslist;
  local ac, nPuisseuxroots, nasympt, degree_aux, max_degree := 0, i := 1;
  local CPUt, realt, mem_used;

  f := implicit_curve;
  ac := accur;
  nPuisseuxroots := NPuisseuxRootsImplicit(f, ac);
  asymptoteslist := AsymptotesImplicit(implicit_curve, ac);
  nasympt := nops(asymptoteslist);
  for i to nasympt do
    asymptote_aux := ParametricToImplicit(asymptoteslist[i]);
    degree_aux := DegreeImplicit(asymptote_aux);
    if (degree_aux > max_degree) then
      max_degree := degree_aux;
    end if;
  end do;
  CPUt := Usage(AsymptotesImplicit(implicit_curve, ac), output=[cputime, output], quiet,
    iterations=iters).1000;
  realt := Usage(AsymptotesImplicit(implicit_curve, ac), output=[realtime, output], quiet,
    iterations=iters).1000;
  mem_used :=  $\frac{1}{1024}$ (Usage(AsymptotesImplicit(implicit_curve, ac), output=[bytesused,
    output], quiet, iterations=iters));

  if header then
    printf("\nCurveId\tDegree\t\nTerms \t\nPuisseuxroots \t\nAsymptotes \t AsymptotesMaxDeg
    \t PuisseuxAcc \t Iters ");
    printf("CPU time \t Real time \tMemory used\n");
    printf("-----");
    printf("-----\n");
  end if;
  printf("C%d \t %d \t %d \t %d \t \t %d \t\t %d\t\t %d \t\t %d \t\t " , id,
    DegreeImplicit(f), NOpsImplicit(f), nPuisseuxroots, nasympt, max_degree, ac, iters);
  printf("%.2f ms\t", CPUt);
  printf("%.2f ms \t", realt);
  printf("%.2f KiB \n", mem_used);

end proc;
```


Example

```
> f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x
+ 368 y - 128 :
ReportPropertiesImplicit(1, f, 3, 1, true);
```

CurvId	Degree	nTerms	nPuisseuxroots	nAsymptotes	AsymptotesMaxDeg
PuisseuxAcc	Iters CPU time	Real time	Memory used		
C1	4	11	3		
2		3		1	3
ms	8.00 ms	614.87 KiB			9.00

Procedure

PlotCurveAsymptotesImplicit (impl_curve, param_asymptotes, rx, ry)

Description

Plots a given implicit curve and its parametric g-asymptotes in the range rx and ry.

@param {polynomial} implicit_curve
 @param [{expression}, {expression}] parametric_asymptotes list
 @param {number} rx
 @param {number} ry
 @return {object} display_curves

Code

```
> PlotCurveAsymptotesImplicit := proc(impl_curve, param_asymptotes, rx, ry)
local nasymptotes, i := 1;
local colors := [wheat, pink, gray];
local f, A;
local graphA, graphC;
local display_curves;

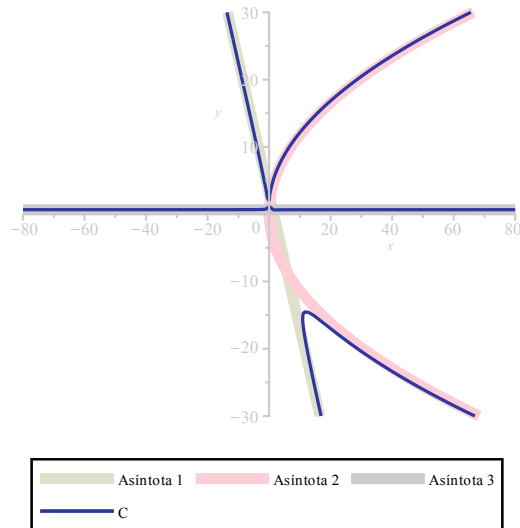
f := impl_curve;
graphC := implicitplot(f, x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=navy);
for i to nops(param_asymptotes) do
  A[i] := ParametricToImplicit(param_asymptotes[i]);
  if type(A[i], complex) then A[i] := 0;
  else
    graphA[i] := implicitplot(A[i], x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=colors[i], thickness
=5);
  end if;
end do;
nasymptotes := nops(param_asymptotes);
if nasymptotes=1 then
  display_curves := display(graphA[1], graphC, legend=["Asíntota 1 ", "C "], axis
=[colour=grey], legendstyle=[font=["Latin Modern Roman", 14]]);
elif nasymptotes=2 then
  display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphC, legend=["Asíntota 1 ",
"Asíntota 2 ", "C "], axis =[colour=grey], legendstyle=[font=["Latin Modern Roman",
14]]);
elif nasymptotes=3 then
  display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphA[3], graphC, legend
=["Asíntota 1 ", "Asíntota 2 ", "Asíntota 3 ", "C "], axis =[colour=grey], legendstyle
=[font=["Latin Modern Roman", 14]]);
end if;

return display_curves;

end proc;
```

Example

```
> rx := 80 : ry := 30 :  
f := -176 x·y3 - 88 y4 + 2352 x2·y + 1368 x·y2 + 360 y3 - 1568 x2 - 1960 x·y - 520 y2 + 896 x  
+ 368 y - 128 :  
param_asymptotes := AsymptotesImplicit(f, 3) :  
PlotCurveAsymptotesImplicit(f, param_asymptotes, rx, ry) ;
```



GAsymptotes, parametric case

Overview of the GAsymptotes Parametric

Description

These procedures compute the generalized asymptotes of a real plane algebraic curve parametrically described. Also, it has been included some commands to calculate some properties of the curves and their g-asymptotes.

List of commands for curves parametrically defined

Commands for equations and miscellanea:

- [EIndex](#) (equation)
- [NonNegativeOps](#) (equation)

Commands for parametric curves:

- [ParametricToImplicit](#) (parametric_curve)
- [DegreeParametric](#) (parametric_curve)
- [NOpsParametric](#) (parametric_curve)
- [PointsatInfinityParametric](#) (parametric_curve)
- [AsymptotesParametric](#) (parametric_curve, accPuisseux)
- [NPuisseuxRootsParametric](#) (parametric_curve, accPuisseux)

Commands for outputs:

- [ReportPropertiesParametric](#) (curve_id, parametric_curve, accPuisseux, iters, header)
- [PlotCurveAsymptotesParametric](#) (parametric_curve, parametric_asymptotes, rx, ry)

Dependencies

```
> with(algcurves) :
  with(plots) :
  with(CodeTools) :
```

Commands for equations and miscellanea

Procedure EIndex (equation)

Description

Computes the ramification index of a given equation.

@param {expression} equation
@return {number} e_index

Code

```
> EIndex := proc(equation)
  local equation_aux, e_index, indet, i := 1;
  local indets_aux, opslst, index := NULL;

  indet := indets(equation)[1];
  equation_aux := series(equation, indet);
  indets_aux := indets(equation_aux);

  # Selects the indeterminates with rational exponent
  opslst := convert(indets(equation_aux, 'identical'(indet)'fraction'), list);
  for i to nops(opslst) do
    index := denom(op(2, opslst[i])), index;
  end do;

  e_index := ilcm(index);

  return e_index;

end proc;
```

Example

```
> f := 2·√z - 5·√z + z + 3/z + 7/z1/3 - (9/z3 + 2)5/4 + 10/z2;
  e_index := EIndex(f);
  e_index := 12
```

(2.1.3.1)

Procedure NonNegativeOps(equation)

Description

Extracts the non negative terms of a given equation in a indeterminate.

@param {expression} equation
@return {polynomial} tilde_equation

Code

```
> NonNegativeOps := proc(equation)
  local i := 1;
  local tilde_equation := 0;
  local opslst;

  opslst := op(equation);
  for i to nops(opslst) do
    if indets(denom(opslst[i])) = ∅ then
      tilde_equation := tilde_equation + opslst[i];
    end if;
  end do;

  return sort(tilde_equation);
```

end proc:

Example

```
> r1 := 15/5*z^7 - 24/2*z^5 + 11*z^2/6 + 65/72*z;
   tilde_r1 := NonNegativeOps(r1);
                                     tilde_r1 := 11/6*z^2 + 65/72*z
```

(2.2.3.1)

Commds for parametric curves

Procedure ParametricToImplicit (parametric_curve)

Description

Computes the implicit polynomial of a given parametric curve.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return {polynomial} implicit_curve

Code

```
> ParametricToImplicit := proc(parametric_curve)
   local aux, var, implicit_curve;

   var := indets(parametric_curve)[1];
   aux := resultant( numer(parametric_curve[1]-x), numer(parametric_curve[2]-y), var);
   implicit_curve := expand(simplify(factor(aux), radical, symbolic));

   return implicit_curve;
end proc;
```

Example

```
> P := [ (s^3 + 2*s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), (2*s^3 + s^2 + 1) / ((s - 2) * (s^2 - 1)) ];
   C := ParametricToImplicit(P);
   C := -176*x*y^3 - 88*y^4 + 2352*x^2*y + 1368*x*y^2 + 360*y^3 - 1568*x^2 - 1960*x*y - 520*y^2 + 896*x + 368*y - 128
```

(3.1.3.1)

Procedure DegreeParametric (parametric_curve)

Description

Computes the total degree of a given parametrization of an algebraic curve.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return {number} param_curve_degree

Code

```
> DegreeParametric := proc(parametric_curve)
   local p11, p12, p21, p22;
   local s, param_curve_degree;

   s := indets(parametric_curve);
   p11 := numer(parametric_curve[1]);
   p12 := denom(parametric_curve[1]);
   p21 := numer(parametric_curve[2]);
   p22 := denom(parametric_curve[2]);
   param_curve_degree := max(degree(p11, s), degree(p12, s), degree(p21, s), degree(p22, s));
```

```

    return param_curve_degree;
end proc:

```

Example

```

> P := [ (s^3 + 2 s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), (2 s^3 + s^2 + 1) / ((s - 2) * (s^2 - 1)) ] :
degreeP := DegreeParametric(P);
degreeP := 4
(3.2.3.1)

```

Procedure NOpsParametric (parametric_curve)

Description

Extracts the number of operands of the parametrization of a curve.
 @param [(expression), {expression}] parametric_curve
 @return number_operands

Code

```

> NOpsParametric := proc(parametric_curve)
    local p11, p12, p21, p22;
    local number_operands;

    p11 := numer(parametric_curve[1]);
    p12 := denom(parametric_curve[1]);
    p21 := numer(parametric_curve[2]);
    p22 := denom(parametric_curve[2]);
    number_operands := max(nops(p11), nops(p12), nops(p21), nops(p22));

    return number_operands;
end proc:

```

Example

```

> P := [ (s^3 + 2 s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), (2 s^3 + s^2 + 1) / ((s - 2) * (s^2 - 1)) ] :
nOpsP := NOpsParametric(P);
nOpsP := 3
(3.3.3.1)

```

Procedure PointsatInfinityParametric (parametric_curve)

Description

Calculates a list of the points at infinity of a given parametric curve.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return [{ {number}, {number} }...] points_infinitylist

Code

```

> PointsatInfinityParametric := proc(parametric_curve)
  local PP;
  local p1, p2;
  local indet_valueslist, points_infinitylist := NULL;
  local aux_set;
  local value, aux, i := 1;

  p1 := parametric_curve[1];
  p2 := parametric_curve[2];
  PP := [1,  $\frac{p2}{p1}$ ,  $\frac{1}{p1}$ ];          # Projective curve
  aux_set := solve( numer(PP[3]) );    # Solve indets
  aux_set := convert([aux_set], set);   # Remove repeated items
  indet_valueslist := convert(aux_set, list);
  for i to nops(indet_valueslist) do
    value := indet_valueslist[i];
    aux := subs(s=value, denom(PP[2]));
    if aux ≠ 0 then
      aux := subs(s=value, PP[2]);
    else aux := 0;
    end if;
    points_infinitylist := points_infinitylist, [1, aux, 0];
  end do;

  points_infinitylist := convert(convert([points_infinitylist], set), list);

  return points_infinitylist;
end proc;

```

Example

```

> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
points_infinityL := PointsatInfinityParametric(P);
points_infinityL := [[1, -2, 0], [1, 0, 0]]

```

(3.4.3.1)

Procedure AsymptotesParametric (parametric_curve, accPuisseux)

Description

Computes the parametrizations of the g-asymptotes from a parametric curve, considering Puiseux expansions up to a fixed accuracy.

@param {{expression}, {expression}} parametric_curve
 @param {number} accPuisseux
 @return [{{expression}, {expression}}, ...] parametric_asymptotes list

Code

```

> AsymptotesParametric := proc(parametric_curve, accPuisseux)
  local PP, g;
  local p1, p2, ec_aux;
  local l, aux_l, aux_r, r, tilde_r;
  local s, e_index, i := 1;
  local parametric_asymptoteslist := NULL;

  s := indets(parametric_curve)[1];
  p1 := parametric_curve[1];
  p2 := parametric_curve[2];
  PP := [1,  $\frac{p2}{p1}$ ,  $\frac{1}{p1}$ ]; # Projective curve
  g := [ $\frac{p2}{p1}$ ,  $\frac{1}{p1}$  - t];
  ec_aux := numer(g[2]);
  l := convert(puisseux(ec_aux, t=0, s, accPuisseux), set);
  for i to nops(l) do
    aux_r := subs(s=l[i], p2);
    aux_r := convert(series(aux_r, t=0, accPuisseux), polynomial);
    r := subs(t=z^-1, aux_r);
    e_index := EIndex(r);
    r := expand(simplify(subs(z=z^e_index, r), radical, symbolic));
    tilde_r := NonNegativeOps(r);
    parametric_asymptoteslist := [te_index, subs(z=t, tilde_r)],
    parametric_asymptoteslist;
  end do;

  return [parametric_asymptoteslist];
end proc;

```

Example

```

> P := [ $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$ ];
parametric_asymptotesL := AsymptotesParametric(P, 4);

```

$$parametric_asymptotesL := \left[\left[t^2, \frac{7\sqrt{3}\sqrt{11}t}{11} + \frac{7}{33} \right], [t, -2t + 3], \left[t, \frac{2}{3} \right] \right]$$

(3.5.3.1)

Procedure NPuiseuxRootsParametric (parametric_curve, accPuisseux)

Description

Computes the number of Puiseux roots of an equation constructed from a parametric curve under a fixed accuracy.

```
@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@param {number} accPuisseux
@return {number} nroots
```

Code

```
> NPuiseuxRootsParametric := proc(parametric_curve, accPuisseux)
  local PP, g;
  local p1, p2, ec_aux;
  local l;
  local s, nroots;

  s := indets(parametric_curve)[1];
  p1 := parametric_curve[1];
  p2 := parametric_curve[2];
  PP := [1,  $\frac{p2}{p1}$ ,  $\frac{1}{p1}$ ];          # Projective curve
  g := [ $\frac{p2}{p1}$ ,  $\frac{1}{p1} - t$ ];
  ec_aux := numer(g[2]);
  l := convert(puiseux(ec_aux, t=0, s, accPuisseux), set);
  nroots := nops(l);

  return nroots;
end proc;
```

Example

```
> P := [ $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$ ];
n_roots := NPuiseuxRootsParametric(P, 3);
n_roots := 3
```

(3.6.3.1)

Commands for outputs

Procedure

ReportPropertiesParametric (*id*, *parametric_curve*, *accPuisseux*, *iters*,
header)

Description

Creates a report about the properties of a given parametrization of a curve, under a fixed accuracy. The procedure reports the "CPU time" and the "real time", in milliseconds, and also the KiB of "memory usage" after "iters" executions of the algorithm `AsymptotesParametric`.

Header is an optional parameter that shows the table header.

```
@param {number} id
@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@param {number} accPuisseux
@param {number} iterations
@param {boolean} header
```

Code

```
> ReportPropertiesParametric := proc(id, parametric_curve, accPuisseux, iters, header)
  local P;
  local asymptoteslist;
  local degreeP, nTerms, ac, nPuisseuxroots, nasympt, degree_aux, max_degree := 0, i := 1;
  local CPUt, realt, mem_used;

  P := parametric_curve;
  degreeP := DegreeParametric(P);
  nTerms := NOpsParametric(P);
  ac := accPuisseux;
  nPuisseuxroots := NPuisseuxRootsParametric(P, ac);
  asymptoteslist := AsymptotesParametric(parametric_curve, ac);
  nasympt := nops(asymptoteslist);
  for i to nasympt do
    degree_aux := DegreeParametric(asymptoteslist[i]);
    if (degree_aux > max_degree) then
      max_degree := degree_aux;
    end if;
  end do;
  CPUt := Usage(AsymptotesParametric(parametric_curve, ac), output=[cputime, output],
    quiet, iterations=iters).1000;
  realt := Usage(AsymptotesParametric(parametric_curve, ac), output=[realtime, output],
    quiet, iterations=iters).1000;
  mem_used :=  $\frac{1}{1024}$ (Usage(AsymptotesParametric(parametric_curve, ac), output=[bytesused,
    output], quiet, iterations=iters));

  if header then
    printf("\nCurveId\tDegree\t\nTerms \t\nPuisseuxroots \t nAsymptotes \t AsymptotesMaxDeg
\t PuisseuxAcc \t Iters ");
    printf("CPU time \t Real time\t          Memory used\n");
    printf("-----");
    printf("-----\n");
  end if;
  printf("C%d \t %d \t %d \t\t %d \t %a \t\t\t %a \t\t %d \t\t %d \t\t\t", id, degreeP,
    nTerms, nPuisseuxroots, nasympt, max_degree, ac, iters);
  printf("%.2f ms\t", CPUt);
  printf("%.2f ms \t", realt);
  printf("%.2f KiB \n", mem_used);
```

L **end proc:**

Example

```
> P := [ [ s^3 + 2 s - 1, 2 s^3 + s^2 + 1 ] :
         [(s^2-1)·(s-2)^2, (s-2)·(s^2-1)] ] :
ReportPropertiesParametric(1, P, 3, 1, true);
```

CurveId	Degree	nTerms	nPuiseuxroots	nAsymptotes	AsymptotesMaxDeg
PuiseuxAcc	Iters CPU time	Real time	Memory used		
C1	4	3		3	3
	2		3		1
	3.00 ms	5.00 ms	153.57 KiB		

Procedure

PlotCurveAsymptotesParametric (*parametric_curve*,
parametric_asymptotes, *rx*, *ry*)

Description

Plots a given parametrization of a curve and its g-asymptotes in the range *rx* and *ry*.

@param [{expression}, {expression}] *parametric_curve*
 @param [{expression}, {expression}] *list parametric_asymptotes*
 @param {number} *rx*
 @param {number} *ry*
 @return {object} *display_curves*

Code

```
> PlotCurveAsymptotesParametric := proc(parametric_curve, parametric_asymptotes, rx, ry)
local nasymptotes, i := 1;
local colors := [wheat, pink, gray];
local f, A;
local ec;
local graphA, graphC;
local display_curves;

f := ParametricToImplicit(parametric_curve);
graphC := implicitplot(f, x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=navy);

nasymptotes := nops(parametric_asymptotes);
for i to nasymptotes do
ec := parametric_asymptotes[i];
A[i] := ParametricToImplicit(ec);
if type(A[i], complex) then A[i] := 0;
else
graphA[i] := implicitplot(A[i], x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=colors[i], thickness
=5);
end if;
end do;

if nasymptotes=1 then
display_curves := display(graphA[1], graphC, legend=["Asintota 1 ", "C "], axis
=[colour=grey], legendstyle=[font=["Latin Modern Roman", 14]]);
elif nasymptotes=2 then
display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphC, legend=["Asintota 1 ",
"Asintota 2 ", "C "], axis =[colour=grey], legendstyle=[font=["Latin Modern Roman",
14]]);
elif nasymptotes=3 then
display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphA[3], graphC, legend
=["Asintota 1 ", "Asintota 2 ", "Asintota 3 ", "C "], axis =[colour=grey], legendstyle
```

```

    =[font=["Latin Modern Roman", 14]];
  end if;

  return display_curves;

end proc:

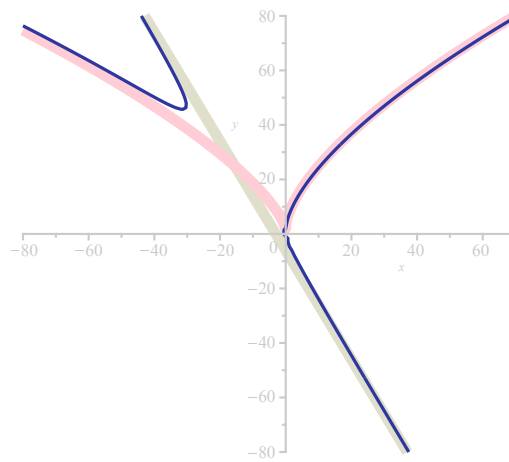
```

Example

```

> rx := 80 : ry := 80 :
P := [ [ s^3 + 2 s - 1, 2 s^3 + s^2 + 1 ] :
      [ (s - 1) · (s - 2)^3, (s - 2)^2 · (s - 1) ] :
param_asymptotes := AsymptotesParametric(P, 3);
PlotCurveAsymptotesParametric(P, param_asymptotes, rx, ry);

```

$$param_asymptotes := \left[[t, -2t - 6], \left[t^3, \frac{21111\sqrt{3}}{11}t^2 + \frac{35112\sqrt{3}}{121}t + \frac{250}{121} \right] \right]$$


Asíntota 1 Asíntota 2 C

GAsymptotes, parametric case using limits

Overview of the GAsymptotes, parametric case using limits

Description

These procedures compute the generalized asymptotes of a real plane algebraic curve parametrically described using limits. Also, it has been developed useful commands to calculate some properties of the curves and their g-asymptotes.

List of commands for curves parametrically defined

Commands for parametric curves:

- [ParametricToImplicit](#) (parametric)
- [DegreeParametric](#) (parametric_curve)
- [NOpsParametric](#) (parametric_curve)
- [RootsMultiplicityParametric](#) (parametric_curve, member)
- [AsymptotesParametricLimits](#) (parametric_curve)

Commands for outputs:

- [ReportPropertiesParametricLimits](#) (curve_id, parametric_curve, iters, header)
- [PlotCurveAsymptotesParametric](#) (parametric_curve, rx, ry);

Dependencies

```
> with(plots) :  
with(CodeTools) :
```

Comands for parametric curves

Procedure ParametricToImplicit (parametric_curve)

Description

Computes the implicit polynomial of a given parametric curve.
 @param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @return {polynomial} implicit_curve

Code

```
> ParametricToImplicit := proc(parametric_curve)
  local aux, var, implicit_curve;

  var := indets(parametric_curve)[1];
  aux := resultant(numer(parametric_curve[1]-x), numer(parametric_curve[2]-y), var);
  implicit_curve := expand(simplify(factor(aux), radical, symbolic));

  return implicit_curve;
end proc;
```

Example

```
> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
C := ParametricToImplicit(P);

C := -176 x y^3 - 88 y^4 + 2352 x^2 y + 1368 y^2 x + 360 y^3 - 1568 x^2 - 1960 y x - 520 y^2 + 896 x + 368 y - 128 (2.13.1)
```

Procedure DegreeParametric (parametric_curve)

Description

Computes the total degree of a given parametrization of an algebraic curve.
 @param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @return {number} param_curve_degree

Code

```
> DegreeParametric := proc(parametric_curve)
  local p11, p12, p21, p22;
  local s, param_curve_degree;

  s := indets(parametric_curve);
  p11 := numer(parametric_curve[1]);
  p12 := denom(parametric_curve[1]);
  p21 := numer(parametric_curve[2]);
  p22 := denom(parametric_curve[2]);
  param_curve_degree := max(degree(p11, s), degree(p12, s), degree(p21, s), degree(p22, s));

  return param_curve_degree;
end proc;
```

Example

```
> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
```

```

> degreeP := DegreeParametric(P);
degreeP := 4

```

(2.2.3.1)

Procedure NOpsParametric (parametric_curve)

Description

Extracts the number of operands of the parametrization of a curve.

Ⓜparam [[expression], {expression}] parametric_curve
 Ⓜreturn number_operands

Code

```

> NOpsParametric := proc(parametric_curve)
  local p11, p12, p21, p22;
  local number_operands;

  p11 := numer(parametric_curve[1]);
  p12 := denom(parametric_curve[1]);
  p21 := numer(parametric_curve[2]);
  p22 := denom(parametric_curve[2]);
  number_operands := max(nops(p11), nops(p12), nops(p21), nops(p22));

  return number_operands;
end proc:

```

Example

```

> P := [ (s^3 + 2*s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), (2*s^3 + s^2 + 1) / ((s - 2) * (s^2 - 1)) ];
NOpsP := NOpsParametric(P);
degreeP := 3

```

(2.3.3.1)

Procedure RootsMultiplicityParametric (parametric_curve, member)

Description

Computes the roots and the multiplicity of the polynomial denominator of one of the components the parametrization.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return {number} member

Code

```

> RootsMultiplicityParametric := proc(parametric_curve, member)
  local polynom;
  local roots, roots_set;
  local i, j, r, n, aux;
  local root_multiplicitylist := NULL;

  polynom := denom(parametric_curve[member]);
  roots := solve(polynom);
  roots_set := convert([roots], set);

  for i from 1 to nops(roots_set) do
    r := roots_set[i];
    n := 0;
    for j from 1 to nops([roots]) do
      aux := roots[j];
      if r=aux then
        n := n + 1;
      end if;
    end do;
    root_multiplicitylist := [r, n], root_multiplicitylist;
  end do;

  return [root_multiplicitylist];
end proc;

```

Example

```

> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
roots_multiplicityL := RootsMultiplicityParametric(P, 2);

roots_multiplicityL := [[2, 1], [1, 1], [-1, 1]]

```

(2.4.3.1)

Procedure AsymptotesParametricLimits (parametric_curve)

Description

Computes the parametrization of the g-asymptotes of a given parametric curve using limits.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return [{expression}, {expression}], ... parametric_asymptoteslist

Code

```

> AsymptotesParametricLimits := proc(parametric_curve)
  local s, tau, rho, n1, n2, i := 1, j, aux;
  local p1, p2, tilde_r;
  local parametric_asymptote;
  local rlist, rho_list, parametric_asymptoteslist := NULL;
  local f, a;

  s := indets(parametric_curve)[1];
  p1 := parametric_curve[1];
  p2 := parametric_curve[2];
  rlist := RootsMultiplicityParametric(parametric_curve, 1);
  rho_list := RootsMultiplicityParametric(parametric_curve, 2);

  for i to nops(rlist) do
    tau := rlist[i, 1];
    n1 := rlist[i, 2];
    aux := factor(subs(s=tau, denom(p2)));
    if aux # 0 then # Horizontal asymptote
      parametric_asymptote := [t, subs(s=tau, p2)];

    else # Parametrization asymptote
      for j from 1 to nops(rho_list) do
        rho := rho_list[j, 1];
        if tau=rho then
          break;
        end if;
      end do;
      n2 := rho_list[j, 2];
      f[n2] := simplify( $\frac{p2}{n2}, radical, symbolic$ );
      a[n2] := limit(f[n2], s=tau);
      tilde_r := a[n2].t^n2;
      for j from n2 - 1 by -1 to 0 do
        f[j] := simplify( $\rho^{n1} \cdot (f[j+1] - a[j+1])$ , radical, symbolic);
        a[j] := (limit(f[j], s=tau));
        tilde_r := tilde_r + a[j].t^j;
      end do;
      parametric_asymptote := [t^n1, tilde_r];
    end if;
    parametric_asymptoteslist := parametric_asymptote, parametric_asymptoteslist;
  end do;
  for j from 1 to nops(rho_list) do # Vertical asymptote
    rho := rho_list[j, 1];
    aux := factor(subs(s=rho, denom(p1)));
    if aux # 0 then
      parametric_asymptote := [subs(s=rho, p1), t];
      parametric_asymptoteslist := parametric_asymptote, parametric_asymptoteslist;
    end if;
  end do;

  return [parametric_asymptoteslist];
end proc:

```

Example

```
> P := [ [ s^3 + 2 s - 1, 2 s^3 + s^2 + 1 ] :
parametric_asymptotesL := AsymptotesParametricLimits(P);

parametric_asymptotesL := [ [ t, 2/3 ], [ t, -2 t + 3 ], [ t^2, 7*sqrt(33)*t/11 + 7/33 ] ]
```

(2.5.3.1)

Commands for outputs

Procedure

ReportParametricLimits (id, parametric_curve, iters, header)

Description

Creates a report about the properties of a given parametrization of a curve. The procedure reports the "CPU time" and the "real time", in milliseconds, and also the KiB of "memory usage" after "iters" executions of the algorithm `AsymptotesParametricLimits`.

Header is an optional parameter that shows the table header.

@param {number} id
 @param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @param {number} iterations
 @param {boolean} header

Code

```
> ReportParametricLimits := proc(id, parametric_curve, iters, header)
  local P;
  local asymptoteslist;
  local roots_p12, roots_p22;
  local degreeP, nTerms, nasympt, degree_aux, max_degree := 0, i := 1;
  local CPUt, realt, mem_used;

  P := parametric_curve;
  degreeP := DegreeParametric(P);
  nTerms := NOpsParametric(P);
  asymptoteslist := AsymptotesParametricLimits(parametric_curve);
  nasympt := nops(asymptoteslist);
  for i to nasympt do
    degree_aux := DegreeParametric(asymptoteslist[i]);
    if (degree_aux > max_degree) then
      max_degree := degree_aux;
    end if;
  end do;
  roots_p12 := RootsMultiplicityParametric(P, 1);
  roots_p22 := RootsMultiplicityParametric(P, 2);

  CPUt := Usage(AsymptotesParametricLimits(parametric_curve), output=[cputime, output],
    quiet, iterations=iters):1000;
  realt := Usage(AsymptotesParametricLimits(parametric_curve), output=[realtime, output],
    quiet, iterations=iters):1000;
  mem_used := 1/1024(Usage(AsymptotesParametricLimits(parametric_curve), output=[bytesused,
    output], quiet, iterations=iters));

  if header then
    printf("\nCurveId\tDegree\t nTerms \t nAsymptotes \t AsymptotesMaxDeg \t Roots p12 \t
    Roots p22 \t Iters ");
    printf("CPU time \t Real time\t Memory used\n");
    printf("-----");
    printf("-----");
  end if;
end proc;
```

```

-----\n");
end if;
printf("C%d \t %d \t %d \t\t %d \t\t %a \t ", id, degreeP, nTerms, nasympt,
max_degree);
printf("%a \t", roots_p12);
printf("%a \t\t %d \t", roots_p22, iters);
printf("%.2f ms\t", CPUt);
printf("%.2f ms \t", realt);
printf("%.2f KiB \n", mem_used);

end proc:

```

Example

```

> P := [ (s^3 + 2 s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), 2 s^3 + s^2 + 1 ] :
ReportParametricLimits(1, P, 1, true);

```

Curvld Roots p22	Degree Iters CPU time	nTerms Real time	nAsymptotes Memory used	AsymptotesMaxDeg	Roots p12
C1 [[2, 2], [1, 1], [-1, 1]] 10.00 ms	4 833.38 KiB	3 [[2, 1], [1, 1], [-1, 1]]	3	1	2 12.00 ms

Procedure

PlotCurveAsymptotesParametric (parametric_curve,
parametric_asymptotes, rx, ry)

Description

Plots a given parametric curve and its parametric g-asymptotes in the range rx and ry.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @param [{expression}, {expression}] list parametric_asymptotes
 @param {number} rx
 @param {number} ry
 @return {object} display_curves

Code

```

> PlotCurveAsymptotesParametric := proc(parametric_curve, parametric_asymptotes, rx, ry)
local nasymptotes, i := 1;
local colors := [wheat, pink, gray];
local A, f;
local ec;
local graphA, graphC;
local display_curves;

f := ParametricToImplicit(parametric_curve);
graphC := implicitplot(f, x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=navy);

nasymptotes := nops(parametric_asymptotes);
for i to nasymptotes do
ec := parametric_asymptotes[i];
A[i] := ParametricToImplicit(ec);
if type(A[i], complex) then A[i] := 0;
else
graphA[i] := implicitplot(A[i], x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=colors[i], thickness
=5);
end if;
end do:

```

```

if nasymptotes=1 then
  display_curves := display(graphA[1], graphC, legend=["Asíntota 1 ", "C "], axis
    =[colour=grey], legendstyle=[font=["Latin Modern Roman", 14]]);
elif nasymptotes=2 then
  display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphC, legend=["Asíntota 1 ",
    "Asíntota 2 ", "C "], axis =[colour=grey], legendstyle=[font=["Latin Modern Roman",
    14]]);
elif nasymptotes=3 then
  display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphA[3], graphC, legend
    =["Asíntota 1 ", "Asíntota 2 ", "Asíntota 3 ", "C "], axis =[colour=grey], legendstyle
    =[font=["Latin Modern Roman", 14]]);
end if;

return display_curves;

end proc;

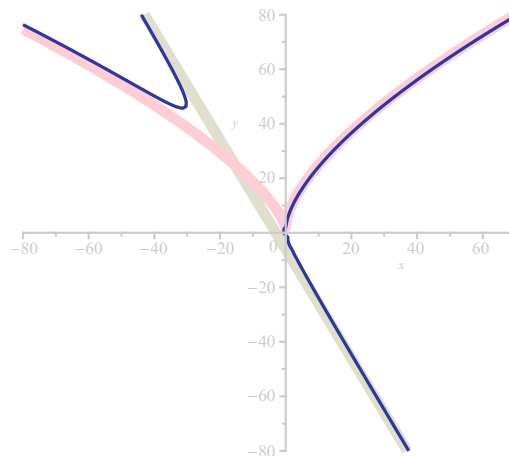
```

Example

```

> rx := 80 : ry := 80 :
  P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s-1) \cdot (s-2)^3}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s-2)^2 \cdot (s-1)}$  ] :
  param_asymptotes := AsymptotesParametricLimits(P);
  PlotCurveAsymptotesParametric(P, param_asymptotes, rx, ry);

```

$$param_asymptotes := \left[[t, -2t - 6], \left[t^3, \frac{2111t^3}{11} + \frac{3511t^2}{121} + \frac{250}{121} \right] \right]$$


Asíntota 1 Asíntota 2 C

GAsymptotes, parametric case using derivatives

Overview of the GAsymptotes, parametric case using derivatives

Description

These procedures compute the generalized asymptotes of a real plane algebraic curve parametrically described using derivatives. Also, it has been developed useful commands to calculate some properties of the curves and their g-asymptotes.

List of commands for curves parametrically defined

Commands for parametric curves:

- [ParametricToImplicit](#) (parametric)
- [DegreeParametric](#) (parametric_curve)
- [NOpsParametric](#) (parametric_curve)
- [RootsMultiplicityParametric](#) (parametric_curve, member)
- [AsymptotesParametricDerivatives](#) (parametric_curve)

Commands for outputs:

- [ReportPropertiesParametricDerivatives](#) (curve_id, parametric_curve, iters, header)
- [PlotCurveAsymptotesParametric](#) (parametric_curve, rx, ry);

Dependencies

```
[> with(plots) :  
with(CodeTools) :
```

Comands for parametric curves

Procedure ParametricToImplicit (parametric_curve)

Description

Computes the implicit polynomial of a given parametric curve.
 @param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @return {polynomial} implicit_curve

Code

```
> ParametricToImplicit := proc(parametric_curve)
  local aux, var, implicit_curve;

  var := indets(parametric_curve)[1];
  aux := resultant(numer(parametric_curve[1]-x), numer(parametric_curve[2]-y), var);
  implicit_curve := expand(simplify(factor(aux), radical, symbolic));

  return implicit_curve;
end proc;
```

Example

```
> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
C := ParametricToImplicit(P);

C := -176 x y^3 - 88 y^4 + 2352 x^2 y + 1368 y^2 x + 360 y^3 - 1568 x^2 - 1960 y x - 520 y^2 + 896 x + 368 y - 128 (2.13.1)
```

Procedure DegreeParametric (parametric_curve)

Description

Computes the total degree of a given parametrization of an algebraic curve.
 @param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @return {number} param_curve_degree

Code

```
> DegreeParametric := proc(parametric_curve)
  local p11, p12, p21, p22;
  local s, param_curve_degree;

  s := indets(parametric_curve);
  p11 := numer(parametric_curve[1]);
  p12 := denom(parametric_curve[1]);
  p21 := numer(parametric_curve[2]);
  p22 := denom(parametric_curve[2]);
  param_curve_degree := max(degree(p11, s), degree(p12, s), degree(p21, s), degree(p22, s));

  return param_curve_degree;
end proc;
```

Example

```
> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
```

```

> degreeP := DegreeParametric(P);
degreeP := 4

```

(2.2.3.1)

Procedure NOpsParametric (parametric_curve)

Description

Extracts the number of operands of the parametrization of a curve.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
 @return number_operands

Code

```

> NOpsParametric := proc(parametric_curve)
  local p11, p12, p21, p22;
  local number_operands;

  p11 := numer(parametric_curve[1]);
  p12 := denom(parametric_curve[1]);
  p21 := numer(parametric_curve[2]);
  p22 := denom(parametric_curve[2]);
  number_operands := max(nops(p11), nops(p12), nops(p21), nops(p22));

  return number_operands;

end proc:

```

Example

```

> P := [ (s^3 + 2*s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), (2*s^3 + s^2 + 1) / ((s - 2) * (s^2 - 1)) ];
NOpsP := NOpsParametric(P);
NOpsP := 3

```

(2.3.3.1)

Procedure RootsMultiplicityParametric (parametric_curve, member)

Description

Computes the roots and the multiplicity of the polynomial denominator of one of the components the parametrization.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return {number} member

Code

```

> RootsMultiplicityParametric := proc(parametric_curve, member)
  local polynom;
  local roots, roots_set;
  local i, j, r, n, aux;
  local root_multiplicitylist := NULL;

  polynom := denom(parametric_curve[member]);
  roots := solve(polynom);
  roots_set := convert([roots], set);

  for i from 1 to nops(roots_set) do
    r := roots_set[i];
    n := 0;
    for j from 1 to nops([roots]) do
      aux := roots[j];
      if r=aux then
        n := n + 1;
      end if;
    end do;
    root_multiplicitylist := [r, n], root_multiplicitylist;
  end do;

  return [root_multiplicitylist];
end proc;

```

Example

```

> P := [  $\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1) \cdot (s - 2)^2}$ ,  $\frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2) \cdot (s^2 - 1)}$  ] :
roots_multiplicityL := RootsMultiplicityParametric(P, 1);

roots_multiplicityL := [[2, 2], [1, 1], [-1, 1]]

```

(2.4.3.1)

Procedure AsymptotesParametricDerivatives (parametric_curve)

Description

Computes the parametrization of the g-asymptotes of a given parametric curve using derivatives.

@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@return [{expression}, {expression}], ... parametric_asymptoteslist

Code

```

> AsymptotesParametricDerivatives := proc(parametric_curve)
  local s, tau, n, i := 1, j;
  local q, q1, q2, sigma, rho, a, a_aux, tilde_r;
  local P, PP_aux, PP, overline_q;
  local rlist, alist, parametric_asymptoteslist := NULL;

  P := parametric_curve;
  s := indets(P)[1];
  PP_aux := [P[1], P[2], 1]; # Projective curve
  q := lcm(denom(P[1]), denom(P[2]));
  q1 := P[1]·q;
  q2 := P[2]·q;
  PP := [q1, q2, q];
  rlist := RootsMultiplicityParametric(P, 1);
  sigma := normal( $\frac{q2}{q1}$ );

  for i to nops(rlist) do
    tau := rlist[i, 1];
    n := rlist[i, 2];
    overline_q := radnormal( $\frac{q}{(s - \tau)^n}$ );
    rho :=  $\left(\frac{q1}{overline_q}\right)^{\frac{1}{n}}$ ;

    a := subs(s=tau, sigma);
    tilde_r := a·tau^n;
    for j from n-1 by -1 to 0 do
      a_aux := normal(diff(diff(sigma, s)·rho^(n-j), [s$(n-1-j)]));
      a :=  $\frac{1}{(n-j)!}$ ·subs(s=tau, a_aux);
      tilde_r := tilde_r + a·tj;
    end do;
    parametric_asymptoteslist := [t^n, tilde_r], parametric_asymptoteslist;
  end do;

  return [parametric_asymptoteslist];
end proc;

```

Example

```

> P :=  $\left[\frac{s^3 + 2s - 1}{(s^2 - 1)(s - 2)^2}, \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s - 2)(s^2 - 1)}\right]$ ;
parametric_asymptotesL := AsymptotesParametricDerivatives(P);

```

$$\text{parametric_asymptotesL} := \left[\left[t, \frac{2}{3} \right], [t, -2t + 3], \left[t^2, \frac{7\sqrt{11}\sqrt{3}}{11}t + \frac{7}{33} \right] \right]$$

(2.5.3.1)

Commands for outputs

Procedure

ReportParametricDerivatives (id, parametric_curve, iters, header)

Description

Creates a report about the properties of a given parametrization of a curve. The procedure reports the "CPU time" and the "real time", in milliseconds, and also the KiB of "memory usage" after "iters" executions of the algorithm AsymptotesParametricDerivatives.

Header is an optional parameter that shows the table header.

```
@param {number} id
@param [{expression}, {expression}] parametric_curve
@param {number} iterations
@param {boolean} header
```

Code

```
> ReportParametricDerivatives := proc(id, parametric_curve, iters, header)
  local P;
  local asymptoteslist;
  local roots_p12, roots_p22;
  local degreeP, nTerms, nasympt, degree_aux, max_degree := 0, i := 1;
  local CPUt, realt, mem_used;

  P := parametric_curve;
  degreeP := DegreeParametric(P);
  nTerms := NOpsParametric(P);
  asymptoteslist := AsymptotesParametricDerivatives(parametric_curve);
  nasympt := nops(asymptoteslist);
  for i to nasympt do
    degree_aux := DegreeParametric(asymptoteslist[i]);
    if (degree_aux > max_degree) then
      max_degree := degree_aux;
    end if;
  end do;
  roots_p12 := RootsMultiplicityParametric(P, 1);
  roots_p22 := RootsMultiplicityParametric(P, 2);

  CPUt := Usage(AsymptotesParametricDerivatives(parametric_curve), output=[cputime,
  output], quiet, iterations=iters).1000;
  realt := Usage(AsymptotesParametricDerivatives(parametric_curve), output=[realtime,
  output], quiet, iterations=iters).1000;
  mem_used :=  $\frac{1}{1024}$ (Usage(AsymptotesParametricDerivatives(parametric_curve), output
  =[bytesused, output], quiet, iterations=iters));

  if header then
    printf("\nCurveId\tDegree\t nTerms \t nAsymptotes \t AsymptotesMaxDeg\tIters \t Roots
    p12");
    printf("CPU time \t Real time\t          Memory used\n");
    printf("-----");
    printf("-----\n");

  end if;
  printf("C%d \t %d \t %d \t\t %d \t %d \t \t \t %d", id, degreeP, nTerms, nasympt,
  max_degree, iters);
  printf("%a \t\t", roots_p12);
  printf("%.2f ms\t", CPUt);
  printf("%.2f ms \t", realt);
  printf("%.2f KiB \n", mem_used);

end proc;
```

Example

```
> P := [ (s^3 + 2 s - 1) / ((s^2 - 1) * (s - 2)^2), 2 s^3 + s^2 + 1 ] :
ReportParametricDerivatives(1, P, 1, true);
```

CurveID	Degree	nTerms	nAsymptotes	AsymptotesMaxDeg	Iters
Roots p12	CPU time	Real time	Memory used		
C1	4	3	3	2	3.00 ms
285.62 KiB	1[[2, 2], [1, 1], [-1, 1]]				3.00 ms

Procedure

PlotCurveAsymptotesParametric (parametric_curve,
parametric_asymptotes, rx, ry)

Description

Plots a given parametric curve and its parametric g-asymptotes in the range rx and ry.

```
@param {{expression}, {expression}} parametric_curve
@param {{expression}, {expression}} list parametric_asymptotes
@param {number} rx
@param {number} ry
@return {object} display_curves
```

Code

```
> PlotCurveAsymptotesParametric := proc(parametric_curve, parametric_asymptotes, rx, ry)
local nasymptotes, i := 1;
local colors := [wheat, pink, gray];
local A, f;
local ec;
local graphA, graphC;
local display_curves;

f := ParametricToImplicit(parametric_curve);
graphC := implicitplot(f, x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=navy);

nasymptotes := nops(parametric_asymptotes);
for i to nasymptotes do
ec := parametric_asymptotes[i];
A[i] := ParametricToImplicit(ec);
if type(A[i], complex) then A[i] := 0;
else
graphA[i] := implicitplot(A[i], x=-rx..rx, y=-ry..ry, color=colors[i], thickness
=5);
end if;
end do;

if nasymptotes=1 then
display_curves := display(graphA[1], graphC, legend=["Asíntota 1 ", "C "], axis
=[colour=grey, legendstyle=[font=["Latin Modern Roman", 14]]]);
elif nasymptotes=2 then
display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphC, legend=["Asíntota 1 ",
"Asíntota 2 ", "C "], axis=[colour=grey, legendstyle=[font=["Latin Modern Roman",
14]]]);
elif nasymptotes=3 then
display_curves := display(graphA[1], graphA[2], graphA[3], graphC, legend
=["Asíntota 1 ", "Asíntota 2 ", "Asíntota 3 ", "C "], axis=[colour=grey, legendstyle
=[font=["Latin Modern Roman", 14]]]);
end if;
```

```

return display_curves;
end proc:

```

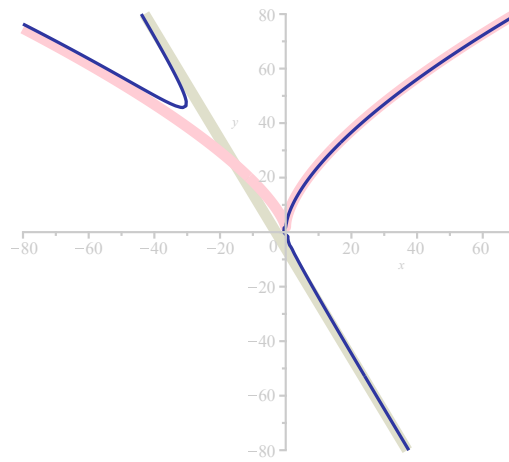
Example

```

> rx := 80 : ry := 80 :
P := [ [frac(s^3 + 2*s - 1, (s - 1) * (s - 2)^3), frac(2*s^3 + s^2 + 1, (s - 2)^2 * (s - 1))] ] :
param_asymptotes := AsymptotesParametricDerivatives(P);
PlotCurveAsymptotesParametric(P, param_asymptotes, rx, ry);

param_asymptotes := [[t, -2*t - 6], [t^3, frac(21*111*13*t^2, 11) + frac(35*112*13*t, 121) + frac(250, 121)]]

```



Asíntota 1 Asíntota 2 C