

## 数学教育におけるより良いオンライン試験問題作成の検討

ーオンライン試験での理解度をはかる効果的な問題の作成を目指してー

安田 貴徳・小野 舞子・大熊 一正

岡山理科大学教育推進機構基盤教育センター

### 1. はじめに

新型コロナウイルス感染症拡大の影響で、大学では 2020 年度から対面授業に代わりオンライン授業を行う機会が多くなった。その中でオンライン授業の効果的な実施方法について検討され、多くの実践報告が行われている<sup>1)2)3)4)</sup>。しかし、オンラインを用いた試験の実施についてはまだまだ課題が多い。特に受験者が別々の場所で試験を受験することになるため、(公正性を担保した)試験監督が難しいことは大きな問題である。それでも、試験実施時期に新型コロナウイルスやインフルエンザ等の流行により大学への入構制限がかけられるなど、オンラインで試験を行わざるを得ない事態は今後も起こり得る。オンライン試験の監督問題は設備・システム等の対応も必要となってくるが、試験問題を適切に作成することで不正を防ぐことはできるはずである。本論文では適切な試験問題作成による不正防止策について議論し、さらに、オンライン試験で対面試験に近い問題が実現できるかについても議論する。対面試験であれば、筆記具を用いて紙媒体に解答することができるため、様々なタイプの試験問題に柔軟に対応することができる。しかし、オンライン試験の場合、対面試験と同じような試験を実施したいのであれば、各受験者にタッチペン対応のデバイスが必要となる。ただ、その実現は現在のところ難しいため、PC におけるマウス操作やキーボード操作(あるいはスマートフォン等の同等の操作)で対応し得るオンライン試験問題の作成について考察する。目標としては、対面試験で可能な試験問題(と本質的に同じ内容の問題)をオンライン試験問題として作成することである。そして、採点ミスを減らすことができるので、可能ならば自動採点できることが望ましい。

数学の対面試験では様々なタイプの試験問題が出題される。計算問題や証明問題、図を作成させる問題や計算過程を書かせる問題などがある。明らかに、図を作成させる問題はマウス操作やキーボード操作で解答することが難しい。こういった問題をオンラインで出題する場合、受験者にノートなどに図を描いてもらい、それを画像に変換して送信してもらうといった対応が自然であろう。しかし、この方法では図がぼやけたり、細かい部分が読み取れなかったりといったことがよく起こる。また、自動採点もできない。こういったことから、本論文ではノートを画像に変換して送信して解答してもらうような問題はあまり考察しない。また、証明問題や計算過程を書かせる問題もオンラインでは難点がある。一見、キーボード操作でテキストを入力して解答すれば良いように思えるが、数学の試験問題の場合、途中で数式が現れることがあるのでキーボード入力が難しい。また、受験者によってはキーボードでの長文の入力にかなり時間を要する場合があります。公正な学修達成

度の評価ができない。そこで、本論文では長文のテキスト入力で解答する試験問題も考察しない。以上のことから、本論文では選択回答、あるいは数字入力による短文回答が可能なオンライン試験問題でいかに対面試験の試験問題に近づけることができるかを考察する。

## 2. オンライン試験の実施

### 2-1 オンライン試験の実施状況

オンライン試験は2022年度春学期の基盤数学(線形代数)という同名の2つの講義(講義A, 講義Bと呼ぶ)で行った。基盤数学(線形代数)は基盤教育科目で、複数の学科の学生が合同で受講する。また、同時時間帯に並行して複数クラスが開講されることが多い。基本的に学生はどの学科に所属していても基盤数学(線形代数)を受講することができ、受講を希望すれば複数開講されている基盤数学(線形代数)の中から都合の良い時間帯の講義を1つ選び受講することができる。講義A, 講義Bもその中の2つ(別時間帯)であり、共に第1著者が講義を担当し、講義内容は全く同じである。講義A, 講義Bの授業形態はどちらも対面授業で、講義Aの履修者59名、講義Bの履修者40名であった。また、同時時間帯に並行して複数クラスが開講された。講義Aの同時時間帯に基盤数学(線形代数)がもう1クラスオンライン形式が開講され、講義Bの同時時間帯にも他に2クラス対面形式が開講された。試験は総合演習試験(中間試験に当たる試験)と学修達成度確認試験(期末試験に当たる試験)を行った。講義Aでは、同時間のもう一つのオンライン形式の授業と試験実施方法を近づけるため総合演習試験をオンラインで実施した。一方、講義Bでは同時間の他の授業が対面形式であったため、対面形式で総合演習試験を行った。学修達成度確認試験の方は講義A, Bどちらも対面形式で試験を行った。本来は講義Aの方は総合演習試験と同様にオンライン形式で試験を行う予定であったが、オンラインの総合演習試験のとき設定ミスがあり、若干の不安があったため大事をとって学修達成度確認試験は対面形式とした。但し、学修達成度確認試験の追試に関してはオンラインで試験を行った。講義A, B合わせて10名程度の追試受験者がいた。オンラインの総合演習試験は対面の総合演習試験と試験問題が同等になるように心がけた。また、オンライン追試も学修達成度確認試験と試験問題が同等になるように心がけた。(この詳細は3章で説明する。)オンライン試験は開始時間と終了時間を設定し、その時間内に解答、送信してもらうというスタイルであった。試験の場合は授業時間を使って実施し、追試の場合は追試受験者とコンタクトを取り、受験者の都合の良い時間で試験時間を設定した。教科書の持ち込みなどは(制限が難しいこともあり)特に制限しなかった。これに合わせて対面試験も持ち込みの制限をしなかった。これに関しては、数学の試験の場合、数値や関数の変更などにより教科書の問題と試験問題が一致しないようにできるため、持ち込みの影響はあまりないので問題はないと考えている。

### 2-2 オンライン試験の作成環境

オンライン試験には岡山理科大学が使用している学習管理システム mylog (日本システム技術株式会社製 UNIVERSAL PASSPORT) のテスト機能を利用した。mylog にログインすると学生の個人情報が見ることができるようになっていたため、ログインには ID とパスワードが必要である。オンライン試験に mylog を利用することは、なりすましなどの不正防

止策の一環でもある。以下、mylogのテスト機能のできることとできないことを簡単にまとめる。

- (1) 選択問題（複数選択もあり）、○×問題、対応付け問題、順序付け問題、テキスト入力問題が作成でき、これらは自動採点ができる。
- (2) テキスト記入問題（長文）、ファイル提出問題が作成できるが、自動採点はできない。
- (3) 大問小問設定ができる。（小問を複数含むような問題が設定できる。）
- (4) ランダム問題が作成できる。（上のいずれかのタイプの問題を複数作っておき、その中からランダムに1つ（または複数）を選んで出題することができる。）
- (5) （入力制限込みの）数字のみ入力可能な問題がない。例えば、“2”と“2.0”を同じものと判定できない。また、ある区間内にある数値を正解と判定する自動採点がない。
- (6) 作問側にも解答側にも数式入力機能はない。
- (7) 設定により試験のやり直しができる。（何回までとか、何点取るまでなどの設定ができる。）ただし、ランダム問題の場合、問題がランダムに選び直されてしまう。
- (8) 点数公開設定ができる。（受験者自身の点数が分かる。）
- (9) テスト受験可能期間を設定できる。
- (10) テスト時間を設定できる。（受験すると残り時間（あるいは経過時間）が表示される。）
- (11) 履修者の中から自由に受験対象者を定めることができる。

### 3. オンライン試験問題の作成について

#### 3-1 試験問題の作成方法

今回のオンライン試験では試験問題を作るとき、数式を直接入力することはできなかった。そこで図を張り付けることで対応した。試験問題は選択問題と数字の入力問題で作成し、自動採点できるように作った。ただし、前述の機能まとめ(5)にあるように数字のみの入力に制限する機能がないので、「半角数字で入力するように」という指示を書くことで対応した。全角数字の解答の場合、自動採点では対応できないためそれらは誤答として扱うことにした。また、すべての小問をランダム問題で作成した。これは不正防止策である。受験者数人が集まって答えを共有し合うことを防ぐ目的がある。これで十分ではないが、かなりの不正は防げるものと考えている。4問から8問の同難易度の問題を作成し、その中から受験者ごとにランダムに1,2問を出題した。同難易度にするため同じ問題の数値を単純に変えるというだけでなく、解く過程の難易度もそろえた。第1著者が解いてみて同難易度かどうか確かめた。総合演習試験、学修達成度確認試験の追試の問題構成は表1、表2の通りである。解答数は作成問題の中からランダムに選ばれる試験問題の数を表している。対面試験（総合演習試験、学修達成度確認試験）も構成を表と同じにし、難易度がなるべく同じになるように努めた。

表 1 オンライン中間試験の構成

問題番号	問題内容	作成問題数	解答数	解答方法
問 1	行列の成分	8	1	数字入力
問 2	行列の線形和	8	2	数字入力
問 3	行列の積	8	2	数字入力
問 4	線形方程式系の簡約化	8	1	数字入力
問 5	行列式 (2次)	8	1	数字入力
問 6	行列式 (3次)	8	1	数字入力
問 7	行列式 (4次)	4	1	数字入力
問 8	逆行列計算	8	1	数字入力

表 2 学修達成度確認試験の追試の構成

問題番号	問題内容	作成問題数	解答数	解答方法
問 1	ベクトルのノルム, 内積, 角度	8	1	数字入力
問 2	行列式と基底	8	1	数字入力 択一選択
問 3	行列の固有値 (2次)	8	1	複数選択
問 4	行列の固有値 (3次)	8	1	複数選択
問 5	行列の固有ベクトル	8	1	数字入力
問 6	直交行列の対角化	8	1	数字入力

## 3-2 具体的な作成問題について

総合演習試験の問6は図1のように答えの数値を入力させる問題とした。これは対面試験であろうがオンライン試験であろうが同じように出題できるので問題なかった。(対面試験とオンライン試験は同じ問題にならないよう数値を変えている。) オンライン総合演習試験の問3は行列の積を求める問題である。すべての成分を求めさせることもできるが、オンラインでは入力ミスが起こりやすいことや人によって入力に時間を要することを考慮し、図2のような問題とした。これに合わせて対面試験の対応する問題も同じ解答方法で答えさせる問題とした。問8は逆行列を求める問題であるが、これも(オンライン、対面共に)成分を1つだけ答えさせる問題とした(図3)。行列式の成分が有理数だと答えることが難しくなるので、答えが整数となるように試験問題を作成している。

次の行列式の値を半角数字で答えよ。

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

図1 オンライン総合演習試験 問6の一例

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & \blacksquare \\ -18 & 6 \\ \blacksquare & -16 \end{bmatrix}$$

上の計算式において、2つの■の和は何になるか。

図2 オンライン総合演習試験 問3の一例

次に結論に至った理由を問う試験問題についてである。学修達成度確認試験の対面試験の間2では図4のような問題を出した。これは行列式を計算してそれが0かどうかで基底かどうかを判断する問題である。対面試験では文章で説明すればよいので問題ないが、オンライン試験では難しい。特に行列式を書く手段がない。そこで図5のように、対応するオンライン追試問題を作成し、問2-1は数式入力、問2-2は単一選択で解答するようにした。若干誘導的ではあるが、問2-1で問2-2の結果の理由に必要な計算をさせている。もちろん、これで行列式を利用して問2-2の結果を導いているかは判断できないし、必ずしも行列式を利用しなければ基底かどうかを判断できないわけではない。しかし、結果(基底になるかどうか)のみだけを答えさせるよりは対面試験の試験問題に近いと思われる。

次に答えが何個あるか分からない試験問題についてである。学修達成度確認試験の対面試験の間4では図6のような問題を出した。固有値は3個以下であり、その個数も含めて問う問題である。対応するオンライン追試問題では、複数選択問題として作成した(選択肢は-3から3までの整数)。数式入力問題として作成することもできた(解答欄を3つ用意し、解が3個未満の場合はいくつか空欄にする)が、解答欄を空欄のまま解答することを不安に思う受験者もいるかもしれないと思い、選択回答式とした。但し、選択回答式の場合、選択肢によっては答えのパターンを読まれる可能性があるので注意が必要である。

次の正則行列の逆行列を計算し、その(2,2)成分を答えよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

図3 オンライン総合演習試験 問8の一例

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  とするとき、 $\{v_1, v_2, v_3\}$  が  $\mathbb{R}^3$  の基底となるかどうかを(理由を付けて)判定せよ。

図4 学修達成度確認試験 問2

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  とする。

問2-1  $A = [v_1 v_2 v_3]$  で3次正方行列を決める。Aの行列式を計算せよ。

問2-2  $\{v_1, v_2, v_3\}$  は  $\mathbb{R}^3$  の基底となるか。

図5 オンライン追試試験 問2の一例

次の行列の固有値を計算せよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 8 & -10 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

図6 学修達成度確認試験 問4

次に計算過程が知りたい試験問題についてである。学修達成度確認試験の対面試験の問6では図7のような問題を出した。この問題は対角化した結果を書くだけならそれほど難しくくない。対角化する過程でグラム・シュミットの正規直交化を行い、直交行列を求める必要があるため、対面試験ではその過程を答案に書くように指示した。対応するオンライン追試問題では、計算過程を記述する代わりに、計算過程で必ず通らなければならない計算を問う問題を何題か挿入することにより対面試験に近い試験問題を作成した。具体的には、グラム・シュミットの正規直交化で出力される3つのベクトルを解答する問題を間に挿入した。グラム・シュミットの正規直交化は適用するベクトルの順番が変わると結果が変わってくるので、計算する順番も指定した。図8がその問題の一例である。このオンライン試験問題は対面試験問題と近い問題にできたのではないかと感じている。

#### 4. 考察と今後の課題

##### 4-1 考察

数学のオンライン試験では作りやすい問題と作りにくい問題がある。単純な計算問題に関してはオンライン試験での作成は難しくない。行列のように答える成分が多い場合はその一部だけを答えさせるような問題に修正しても良いのではないかと考えている。それは入力ミスや入力に時間を要したりと学習評価とあまり関係のない部分の影響を減らすためである。証明問題や計算過程を見る問題は途中で必ず通過するポイントがあるならば、それを答えさせることによりオンラインの試験問題がある程度作れる。但し、他にも解法があるのに1つの解法に限定させてしてしまうなどの欠点もある。また、証明問題や計算過程を見る問題は途中で必ず通過するポイントが常にあるとは限らない。オンラインでは部分点を与えづらいということもあり、証明問題や計算過程を見る問題の作成はまだ課題が多い。

対称行列  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$  の固有値・固有ベクトルは次のようになっている。

- 固有値 1 に属する固有ベクトル：
 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0))$$
- 固有値 7 に属する固有ベクトル：
 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$$

これを使って、 $A$  を直交行列で対角化せよ。

図7 学修達成度確認試験 問6

対称行列  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  を直交行列で対角化してみよう。

まず、 $T_A$  の固有値・固有ベクトルは次のようになる。

1. 固有値  $\lambda = 0$  に属する固有ベクトル

$$a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

2. 固有値  $\lambda = 3$  に属する固有ベクトル

$$b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (b, c \in \mathbb{R}, (b, c) \neq (0, 0))$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおくと、上の結果より、}$$

$v_1, v_2, v_3$  は固有ベクトルからなる  $\mathbb{R}^3$  の基底である。

- 問 6-1  $v_1$  にシュミットの正規直交化を行って得られるベクトルを  $p_1$  とする。 $p_1$  を計算すると、

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{ア}}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。 に入る整数を半角数字で答えよ。

- 問 6-2  $v_2, v_3$  にシュミットの正規直交化を行って得られるベクトルを順に  $p_2, p_3$  とする。 $p_2$  を計算すると、

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{\text{イ}}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。 に入る整数を半角数字で答えよ。

- 問 6-3  $p_3$  を計算すると、

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{\text{ウ}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{エ} \\ 2 \end{bmatrix}$$

となる。,  に入る整数をこの順に半角数字で答えよ。

- 問 6-4 直交行列  $P$  を  $P = [p_1 p_2 p_3]$  で定める。このとき、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \text{オ} & 0 & 0 \\ 0 & \text{カ} & 0 \\ 0 & 0 & \text{キ} \end{bmatrix}$$

となる。, ,  に入る整数をこの順に半角数字で答えよ。

図 8 オンライン追試験 問 6 の一例

今回調査した基盤数学(線形代数)の試験ではないが, 微分積分のオンライン試験では, 図9のような問題を出したことがある. これは表とグラフを作成する問題である. これに関しては自動採点の問題を作ることができず, 自分のノートに解答を作成し, 写真を撮って送信するという課題方式で出題するしかなかった. このように数学のオンライン試験の作成にはまだまだ課題が多い.

不正防止策に関しては, ランダム問題を作ることである程度対処できると考えている. これと時間制限があれば, かなりの不正が防げるであろう. ただし, 問題作成に相当な時間が必要となることが欠点である. 試験問題もどの問題が選ばれても難易度に偏りがないように注意深く作成する必要がある. ただ, 一度作っておくと, 次回以降にも再利用でき, 試験問題の追加も楽である.

講義Aと講義Bの総合演習試験では, それぞれオンライン試験と対面試験を行ったので点数の比較などができるかと考えていたが, 履修者に学科の偏りなどもあり単純比較は難しいと判断したため, 本論文ではその比較結果は載せなかった.

#### 4-2 今後の課題

受験者にタッチペン対応のデバイスなどが用意できたら, 証明問題や計算過程を見る問題, グラフを作成する問題が出しやすいため, そういった環境の改善は課題であると感じた. ただ, こういった問題の場合, 自動採点はできないので, 計算問題など自動採点できるものとうまく組み合わせた方がよい. さらに, 不正防止策はまだまだ改善の余地がある. ランダム問題や時間制限に加えて, 可能ならば試験の実施状況が映せるようなカメラなどが設置できるとかなり不正を減らせると考えられる. また, 今回は対面試験に近いオンライン試験の作成を目標にしたが, 対面試験とオンライン試験の効果を実際どのように比較していくかも今後の課題である.

##### 問題

次の関数の凹凸付き増減表を書き, さらにグラフの概形を描け. (計算過程も残すこと)

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$$

図9 微分積分オンライン追試試験の問題

**謝辞** 本研究の一部は科研費(16K01138, 22K02926)の助成を受けたものである.

#### 参考文献

- 1) 中村 哲之: オンライン授業(オンデマンド型)における教育効果: 教育心理学的観点からの実践的検討, 東洋学園大学教職課程年報第3号(2021)
- 2) 半田 真: 高等学校数学科におけるオンライン授業の実践研究—数学演習授業におけるオンデマンド授業と対面授業での学習効果比較—, デジタル教科書研究(2020)
- 3) 服部 辰広, 松田 康宏, 伊藤 譲, 久保山和彦: 対面授業と比較した遠隔授業の学習効果に関する研究—保健医療学部整復医療学科学学生に対するアンケート調査より—, 日本体育大学紀要, 51, 1001-1009, (2022)
- 4) 安田 貴徳, 小野 舞子, 大熊 一正, 中川 重和, 濱谷 義弘: 微分積分学におけるオンデマンド型授業の取り組み—よりよいオンライン授業の導入を目指して—, 岡山理科大学教育実践研究第4号, 175-183, (2020)