PENDEKATAN SEMIKLASIK UNTUK PERSAMAAN SCHRODINGER DENGAN POTENSIAL SCRAF II TRIGONOMETRI

Isnaini Lilis Elviyanti[1*], Beta Nur Pratiwi[2], dan Ahmad Aftah Syukron[3]

[1,3]Universitas Ma'arif Nahdlatul Ulama Kebumen, Kebumen, Indonesia
[2]UIN Sultan Maulana Hasanuddin Banten, Serang, Indonesia
*e-mail korespondensi: isnaelviyanti@gmail.com

ABSTRAK

Sistem partikel yang dipengaruhi oleh medan dengan energi potensial yang berubah secara lambat dapat diselesaikan dengan persamaan Schrodinger menggunakan pendekatan semiklasik. Persamaan Schrodinger dalam sistem partikel ini dipengaruhi oleh potensial Scraff II trigonometri. Solusi penyelesaian persamaan Schrodinger dengan potensial Scraff II trigonometri menggunakan pendekatan semiklasik yaitu menggunakan pendekatan WKB. Pendekatan WKB digunakan untuk memperoleh persamaan spektrum energi yang dipengaruhi oleh potensial Scraf II Trigonometri.

Kata kunci: Persamaan Schrodinger; potensial Scraf II trigonometri; pendekatan WKB

1. PENDAHULUAN

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan yang digunakan untuk menjelaskan sifat atau keadaan suatu partikel melalui spektrum energi dan fungsi gelombang. Persamaan Schrodinger menjelaskan partikel dalam kondisi non-relativistik[1]. Untuk suatu sistem partikel yang dipengaruhi potensial seperti Scraf Hyperbolic[2], Eckart[3], Manning Rosen[4], hyperbolic Scraff I[4], Scraff trigonometric [5], [6] Coloumb[7]dan lain sebagainya dapat diselesaikan dengan metode dalam mekanika kuantum. Dalam mekanika kuantum persamaan Schrodinger dapat diselesaikan menggunakan metode Hipergeometri[8], *Nikiforov-Uvarof* [2], *Asymptotic Iteration Method*[6], dan SUSY[4]. Sementara, apabila suatu partikel dalam keadaan dipengaruhi oleh medan dengan energi dan potensial yang berubah secara lambat sehingga panjang gelombang terdefinisi dengan baik pada sekitar sembarang titik, maka persamaan Schrodinger diselesaikan dengan pendekatan semiklasik[1]. Pendekatan semiklasik disebut dengan pendekatan WKB.

Pendekatan WKB (Wentzel, Kramer, dan Brillouin) merupakan pendekatan semiklasik yang sesuai untuk partikel yang tidak berada di daerah partikel bersifat klasik. Dengan istilah lain, pendekatan WKB sesuai untuk sistem partikel yang dipengaruhi oleh medan dengan energi potensial yang berubah secara lambat dalam rentang beberapa panjang gelombang dan untuk kondisi energi kinetik yang kurang dari energi potensial ($E<V$) [1].Fungsi pendekatan WKB yaitu untuk menentuan koefisien transmisi sistem partikel yang menerobos potensial tanggul, dimana potensial tanggul yang lebar seperti medan emisi elektron pada logam dan penetrasi medan Coloumb dari nukleus partikel yang bermuatan positif. Selain untuk sistem kuantum satu dimensi, pendekatan WKB dapat juga untuk sistem kuantum tiga dimensi yang dapat diuraikan dalam beberapa sistem kuantum satu dimensi. permisalan untuk sistem kuantum tiga dimensi yaitu berbentuk bola simetris yang diterapkan pada persamaan Schrodinger sehingga sistem tersebut dapat diuraikan menjadi persamaan diferensial bagian radial dan sudut. Bagian persamaan diferensial tersebut dianggap sebagai persamaan

diferensial untuk sistem kuantum satu dimensi. Ada beberapa potensial yang tingkat energinya dapat ditentukan secara eksak dengan pendekatan WKB yang telah dikoreksi dengan koreksi Langer antara lain potensial Coloumb, Poschl-Teller, Gendensthein, Maning Rosen, dan Morse[1].

Dalam penelitian ini, persamaan Schrodinger yang dipengaruhi potensial Scraf II trigonometri diselesaikan menggunakan pendekatan WKB. Potensial Scraf II trigonometri dapat ditulis sebagai berikut [5] [6],

$$V(x) = \frac{\hbar}{2m}\left[\frac{b^2 + a(a-1)}{sin^2 x} - \frac{2b\left(a-\frac{1}{2}\right)cosx}{sin^2 x}\right] \tag{1}$$

dimana a dan b adalah bilangan real positif. Potensial Scraf II trigonometri digunakan untuk menjelaskan gaya antara atom atau molekul[5] [6].

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perilaku partikel yang tidak mungkin berada pada daerah ditemukannya partikel saat bersifat klasik yang dipengaruhi potensial Scraf II trigonometri. Batasan pada penelitian ini yaitu hanya pada persamaan Schrodinger bagian radial yang diselesaikan dengan pendekatan WKB untuk memperoleh persamaan spektrum energi.

2. METODE PENELITIAN

Persamaan Schrodinger secara umum dalam satu dimensi yaitu:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0 \tag{2}$$

dimana E adalah energi kinetik dan $V(x)$ adalah energi potensial. Apabila sistem partikel dipengaruhi potensial terkungkung maka ada tiga keadaan yaitu $E>V(x)$ untuk partikel bergerak secara klasik, $E < V(x)$ untuk partikel dilarang bergerak secara klasik, dan $E = V(x)$ untuk titik batas keduanya (titik balik)[1]. Penentukan tingkat energi partikel yang bergerak di daerah yang dipengaruhi oleh energi potensial ($V(x)$), dimana ($V(x)$) berubah secara perlahan maka perubahan panjang gelombang secara relativ dalam jarak sangat kecil bila dibandingkan dengan satu satuan untuk kondisi $E = V(x)$ dan $E < V(x)$, maka pendekatan WKB dapat diaplikasikan pada 3 daerah yang dipisahkan oleh titik-titik balik klasik, tetapi tidak valid untuk titik yang sangat dekat dengan titik balik[1]. Pada saat sistem berada pada titik balik klasik maka persamaan Schrodinger yang ditunjukkan persamaan (2) berubah menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + g[x - \mathrm{a}]\psi(x) = 0 \tag{3}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + g'[x - \mathrm{b}]\psi(x) = 0 \tag{4}$$

dimana a dan b adalah titik balik klasik, Penyelesaian persamaan (3) dan (4) didekati dengan bentuk airy intergral Ai (ξ) yaitu:

$$\xi_a = (x - \mathrm{a})\left(\frac{2mg}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{5}$$

$$\xi_a = (x - \mathrm{b})\left(\frac{2mg'}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6}$$

lalu penyelesaian Persamaan (5) dan (6) diperluas kedalam daerah $x<a$ dan $x>b$, maka penyelesaiannya mendekati bentuk *asymtot* yaitu

$$Ai(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi(-\xi_{\mathrm{a}})^{\frac{1}{4}}}} sin\left[\frac{2}{3}(-\xi_{\mathrm{a}})^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{7}$$

$$Ai(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi(-\xi_{\mathrm{b}})^{\frac{1}{4}}}} sin\left[\frac{2}{3}(-\xi_{\mathrm{b}})^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{8}$$

sedangkan untuk daerah $x<a$ dekat dengan titik $x=a$ serta daerah $x<b$ dekat dengan titik $x=b$ maka berlaku:

$$\int k(x')dx' = \frac{1}{\hbar}\int_x^{\mathrm{a}} \sqrt{2\mu g[\mathrm{a} - x']}dx' = \frac{2}{3}(-\xi_{\mathrm{a}})^{\frac{3}{2}} \tag{9}$$

$$\int k(x')dx' = \frac{1}{\hbar}\int_x^{\mathrm{a}} \sqrt{2\mu g[x' - \mathrm{b}]}dx' = \frac{2}{3}(-\xi_{\mathrm{b}})^{\frac{3}{2}} \tag{10}$$

maka penyelesaian persamaan (9) dan (10) yang diperluas kedalam daerah $x<a$ dan $x<b$ adalah menggunakan kombinasi penyelesaian positif dan negatif berikut:

$$\psi_+(x) = C_1\sqrt{\frac{\kappa(x_0)}{\kappa(x)}}e^{(\int \kappa(x')dx')} \tag{11}$$

$$\psi_-(x) = C_2\sqrt{\frac{\kappa(x_0)}{\kappa(x)}}e^{(-\int \kappa(x')dx')} \tag{12}$$

dengan menggunakan persamaan (11) dan (12) yang diterapkan pada persamaan (9) dan (10), maka diperoleh:

$$sin\left[-\int_{\mathrm{a}}^{x} k(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right] = sin\left[\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} k(x')dx' - \int_{\mathrm{b}}^{x} k(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right] \tag{13}$$

$$sin\left[-\int_{\mathrm{a}}^{x} k(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right] \tag{14}$$

untuk daerah antara *a* dan *b*, maka persamaan (13) dan (14) harus diberi harga yang sama, dimana keduanya dikalikan dengan amplitude positif atau negatif, prasyarat agar keduanya sama yaitu

$$sin\left[\int_{b}^{a} k(x')dx' - \int_{b}^{x} k(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right] = \pm sin\left[\int_{b}^{x} k(x')dx' + \frac{\pi}{4}\right] \quad (15)$$

Penyelesaian persamaan (15) dapat menggunakan $sinP = \pm sin\, Q$, maka diperoleh $P + Q = m\pi$ atau $P - Q = m\pi$, dimana $\text{m} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Harga $P - Q = m\pi$ dari persamaan (15) dapat diperoleh:

$$\int_{b}^{a} k(x')dx' - 2\int_{b}^{x} k(x')dx' = m\pi \quad (16)$$

harga persamaan (16) tidak memenuhi syarat karena perlu fungsi x berharga konstan. Sementara, harga $P + Q = m\pi$ untuk persamaan (15) maka diperoleh,

$$\int_{b}^{a} k(x')dx' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (17)$$

untuk $n = 0,1,2,3, \ldots$. Untuk *k(x')* merupakan akar persamaan energi dari persamaan (2), sehingga harga *k(x')* yaitu

$$k(x') = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m[E - V(x)]} \quad (18)$$

persamaan (18) merupakan kondisi kuantiasi suatu sistem kuamtum yang dijabrakan secara semiklasikdan digunakan untuk memberikan harga pendekatan tingkat-tingkat energi suatu sistem. maka persamaan (18) dapat ditulis menjadi,

$$\int_{b}^{a} \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m[E - V(x)]}dx' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (19)$$

Persamaan (19) merupakan pendekatan semiklasik (pendekatan WKB) untuk memngestimasi tingkat-tingkat energi suatu sistem. Penyelesaian pendekatan WKB dengan menggunakan titik-titik balik klasik sedikit kurang baik namun hasilnya cukup sederhana[1].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Schrodinger yang telah didekati dengn pendekatan WKB pada persamaan (18) disubtistusi dengan potensial Scraf II Trigonometri pada persamaan (1), sehingga menjadi,

$$\int_{b}^{a} \sqrt{\begin{matrix} E - \\ \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{b^2 + a(a-1)}{sin^2 x} - \frac{2b\left(a - \frac{1}{2}\right)cosx}{sin^2 x}\right] \end{matrix}}\, dx = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (20)$$

kemudian untuk menyederhanakan persamaan (20) dilakukan permisalan *x=y*, *cosx=y*, dan menyamakan penyebut sehingga diperoleh,

$$-\int_b^a \sqrt{\left[\begin{array}{c} E - Ey^2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(b^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ +\frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right)y\right) \end{array}\right]} \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{21}$$

Dimana $\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dy}{2(1-y)} + \frac{dy}{2(1+y)}$, maka persamaan (21) menjadi,

$$\left[-\int_b^a \sqrt{\left[\begin{array}{c} E - Ey^2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(b^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ +\frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right)y\right) \end{array}\right]} \frac{dy}{2(1 - y)}\right] + \left[-\int_b^a \sqrt{\left[\begin{array}{c} E - Ey^2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(b^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ +\frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right)y\right) \end{array}\right]} \frac{dy}{2(1 + y)}\right] = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{22}$$

agar sesuai dengan pendekatan WKB maka persamaan (22) dimisalkan *p=(1-y)* dan *z=(1+y)*, sehingga dihasilkan,

$$\left[\frac{1}{2}\int_b^a \sqrt{\begin{array}{c} -Ep^2 \\ +\left(2E - \frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)\right)p \\ +\frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right) - \left(b^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right) \end{array}} \frac{dp}{p}\right] + \left[\frac{1}{2}\int_b^a \sqrt{\begin{array}{c} -Ez^2 \\ +\left(2E - \frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)\right)z \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2\right) \end{array}} \frac{dz}{z}\right] = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{23}$$

Persamaan (23) sudah seperti bentuk pendekatan WKB, yang dapat disederhanakan sebagai berikut,

$$\int \sqrt{R}\frac{d\rho}{\rho} \tag{24}$$

dengan $R = d + ex + fx^2$, bentuk penyelesaian dari ruas kiri persamaan (24) yaitu dengan formula berikut

$$\int \sqrt{R}\frac{d\rho}{\rho} = \sqrt{R} + \frac{e}{2}\int \frac{d\rho}{\sqrt{R}} + d\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{R}} \tag{25}$$

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-f}} sin^{-1}\left[\frac{2f\rho + e}{\sqrt{e^2 - 4df}}\right] \tag{26}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-d}} sin^{-1}\left[\frac{e\rho + 2d}{|\rho|\sqrt{e^2 - 4df}}\right] \tag{27}$$

dengan persamaan (25), (26) dan (27) dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan (23), agar perhitungan lebih sederhana maka masing-masing faktor dihitung dengan mencari akar-akarnya, dan dihasilkan persamaan (28)

$$-\left[\frac{\frac{\hbar^2}{2m}\left(b\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{E}} + \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\left(b^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}\left(2b\left(a-\frac{1}{2}\right)+\left(b^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)\right)}}\right] = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{28}$$

kemudian untuk memperoleh persamaan spektrum energi persamaan (28) diubah menjadi,

$$E = \left[\frac{\left[\frac{\frac{\hbar^2}{2m}\left(b\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\begin{array}{c}2b\left(a-\frac{1}{2}\right)\\ +\left(b^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)\end{array}\right)}}\right]}{\left[\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\begin{array}{c}2b\left(a-\frac{1}{2}\right)\\ +\left(b^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)\end{array}\right)} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(b^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]}\right] \tag{29}$$

Persamaan (29) merupakan persamaan spektrum energi pada persamaan Schrodinger untuk potensial Scraf II trigonometri menggunakan pendekatan WKB.

4. KESIMPULAN

Pendekatan WKB telah diterapkan pada persamaan Schrodinger untuk potensial Scraf II trigonometri. pendekatan WKB telah sesuai dengan penurunan persamaan Schrodinger satu dimensi bagian radial. Hasil persamaan spekrum energi persamaan Schrodinger untuk potensial Scraf II trigonometri menggunakan pendekatan WKB dipengaruhi oleh bilangan real positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Suparmi. Mekanika Kuantum II.2011.
[2] Deta U A, Suparmi A, Cari C. Approximate solution of schrodinger equation in d-dimensions for scarf hyperbolic plus non-central Poschl-Teller potential using Nikiforov-Uvarov method. Journal of Physics: Conference Series 2014;**539**:012018.
[3] Farizky M N, Suparmi A, Cari C, Yunianto M. Solution of three dimensional Schrodinger equation for Eckart and Manning-Rosen non-central potential using asymptotic iteration method. Journal of Physics: Conference Series 2016;**776** 012085.
[4] Suparmi A, Cari C, Deta U A, Handika J. Energy analysis of four dimensional extended hyperbolic Scarf I plus three dimensional separable trigonometric non-central potentials using SUSY QM approach. Journal of Physics: Conference Series 2016;**776**:012077.
[5] Widiyanto F, A Suparmi, C Cari, Anwar F, Yunianto M. Schrödinger equation solution for q-deformed Scarf II potential plus Pöschl-Teller potential and trigonometric Scarf potential. Journal of Physics: Conference Series 2017;**909**:012036.
[6] Pratiwi B N, Suparmi A, Cari C, Husein A S, Yunianto M. Approximate analytical solution of the Dirac equation for pseudospin symmetry with modified Poschl-Teller potential and trigonometric Scarf II non-central potential using asymptotic iteration method. Journal of Physics: Conference Series 2016;**739**:012020.
[7] Dianawati D A, Suparmi A, Cari, C. Solution of Schrodinger equation with q-deformed momentum in Coulomb potential using hypergeometric method. AIP Conference Proceedings 2018;020071(**2014**).
[8] Nurhayati, Suparmi, Variani V I, Cari, Wahyudi. Analisis fungsi gelombang dan spektrum energi potensial gendensthein ii menggunakan metode hipergeometrik. Prosiding Pertemuan Ilmiah XXVI HFI Jateng & DIY 2012;229.