

UNIVERZITET U BEOGRADU

MEHANIKA ROBOTA

Vukman Čović
Mihailo Lazarević



MEHANIKA ROBOTA - Vukman Čović, Mihailo Lazarević



ISBN : 978-86-6060-100-3

Mašinski fakultet
Beograd, 2021

UNIVERZITET U BEOGRADU

MEHANIKA ROBOTA

Vukman Čović

Mihailo Lazarević

Mašinski fakultet
Beograd, 2021

Dr *Vukman Čović*, redovni profesor

Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr *Mihailo P. Lazarević*, redovni profesor
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

MEHANIKA ROBOTA

II izdanje

Recenzenti

Prof. dr Josif Vuković, Mašinski fakultet, Beograd
Prof. dr Miroslav Vesković, Mašinski fakultet, Kraljevo

Izdavač
Univerzitet u Beogradu
MAŠINSKI FAKULTET,
Beograd, 11000 Beograd, Kraljice Marije 16
tel. (011) 3370-760, fax. (011) 3370-364 www.mas.bg.ac.rs

Za izdavača
Dekan, dr. Radivoje Mitrović, red. prof.

Urednik
dr. Milan Lečić, prof.
Predsednik komisije za izdavačku delatnost
Mašinskog fakulteta u Beogradu

Tiraž: 200 primeraka
Štampanje drugog izdanja odobrila
Komisija za izdavačku delatnost
Mašinskog fakulteta u Beogradu i
Dekan Mašinskog fakulteta u Beogradu

odlukom br. 07/2021 od 05.04. 2021. godine.

Štampa: PLANETA print
Stevana Tomića br.1, 11000 Beograd
www.planeta-print.rs
Beograd, 2021
ISBN-978-86-6060-100-3



Sva prava zadržavaju autori. Nije dozvoljeno da bez prethodne pismene dozvole autora bilo koji deo ove knjige bude snimljen, emitovan ili reprodukovan, uključujući, ali ne i ograničavajući se na fotokopiranje, fotografiju, magnetni ili bilo koji drugi vid zapisa.

PREDGOVOR

-drugom izdanju -

Udžbenik **Mehanika robota** napisan je prema programu istoimenog predmeta na Mašinskom fakultetu u Beogradu i namenjen je studentima Mašinskog fakulteta, ali može biti koristan i studentima drugih fakulteta čiji nastavni plan obuhvata program mehanike robotskih sistema i dinamike sistema krutih tela.

Godinama unazad predmet *Mehanika robota* bio je predavan na Mašinskom fakultetu na smerovima *Automatsko upravljanje i Industrijsko inženjerstvo* (integrisani program studija do 2005) a kasnije u okviru novog sistema studija kao izborni predmet na master studijama (moduli *Automatsko upravljanje i Biomedicinsko inženjerstvo*).

Glavni deo kursa Mehanika robota bio je dovršen još 1993. godine rukopisom prvog autora ove knjige., Prof. Čovića. U međuvremenu, na Katedri za Mehaniku Mašinskog fakulteta u Beogradu odbranjeno je više doktorskih disertacija i magistarskih teza na temu mehanike i upravljanja robotskih sistema, uz niz novih rezultata koji su neki uobličeni i prikazani u ovom udžbeniku.

Glavni rezultati ove knjige izloženi su matematičkim formalizmom koji je u velikoj meri uskladjen sa softverskim mogućnostima savremenih računara i koji dopušta jednostavno formiranje odgovarajućih kompjuterskih programa. Pri tome teorijsko izlaganje koje je prezentovano u ovom udžbeniku je potvrđeno i brojnim primerima koji su prezentovani posebno u *Zbirci zadataka iz mehanike robota (drugi autor ove knjige)*.

U ovoj knjizi je pokazano da se sve poznate metode svode na problem formiranja metričkog tenzora sistema tela i određivanje generalisanih sila sistema sila koje deluju na robotski sistem. Sa te tačke gledišta, sve metode za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema tela potpuno su ravnopravne.

Knjiga je prezentovana čitaocima sa nadom da je dovoljno rigorozno napisana i pri tome dovoljno jednostavno da studente uveri da i tako komplikovana materija, poput one koju sačinjava Analitička mehanika, može da se prepusti programerima čiji će programi zahtevati da njihov korisnik poznaje u opštim crtama glavne rezultate knjige a da mu se pri tome otvara mogućnost za svestranu dinamičku analizu tehničkih objekata.

U drugom izdanju su ispravljene sve uočeni nedostaci i štamparske greške u prvom izdanju.

Sa pijetetom ovde se sećamo prvog autora ove knjige prof. dr Vukmana Čovića (1943-2011) koji nas je napustio posle izlaska prvog izdanja ove knjige. Ovaj udžbenik predstavlja jedan neobrisiv trag koji je Prof. Čović ostavio u okviru njegovog naučno- pedagoškog rada na Katedri za Mehaniku Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Sadržaj

Uvod u mehaniku robota	1
1. Određivanje položaja sistema krutih tela	7
1.1 Određivanje položaja krutog tela	7
1.2 Određivanje broja stepeni slobode kretanja za slučaj osnovnih kretanja krutog tela.....	9
1.3 Opšte kretanje krutog tela.....	11
1.4 Sferno kretanje krutog tela.....	12
1.5 Obrtanje krutog tela oko nepomične ose.....	13
1.6 Ravno kretanje krutog tela.....	15
1.7 Translatorno kretanje krutog tela.....	17
1.7.1 Pravolinijska translacija.....	18
2. Ortogonalne transformacije koordinata	21
2.1 Definicija ortogonalnih matrica transformacija.....	21
2.2 Dualni objekti.....	24
2.2.1 Vektorski proizvod i dualni objekat.....	26
2.2.2 Dualni objekat i promena koordinatnog sistema.....	27
2.3 Veze između ugaone brzine, ugaonog ubrzanja i matrice transformacije u slučaju sfernog kretanja tela.....	28
3. Teorija konačnih rotacija	33
3.1 Ojler-Dalamberova teorema.....	33
3.2 Rodrigova matrica transformacije.....	34
3.3 Rodrigova matrica izražena preko vektora konačne rotacije.....	37
3.4 Slaganje konačnih rotacija.....	39
3.5 Osobine vektora konačne rotacije.....	43
3.5.1 Teorema o inverziji redosleda konačnih rotacija.....	44
3.5.2 Ostale značajne osobine konačnih rotacija.....	46

3.6	Veza između vektora konačne rotacije i vektora ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.....	47
3.7	Slaganje konačnih rotacija pri sfernom kretanju krutog tela.....	48
3.7.1	Alternativni postupak slaganja konačnih rotacija.....	52
3.8	Hamilton - Rodrigovi parametri.....	53
3.9	Matrica transformacije koordinata za slučaj sfernog kretanja krutog tela čiji položaj određuju Ojlerovi uglovi.....	56
4.	Kinematika otvorenog kinematičkog lanca.....	59
4.1	Uvodne napomene.....	59
4.2	Složena matrica transformacije.....	60
4.3	Izvod vektora vezanog za segment (V_i) po generalisanoj koordinati.....	63
4.4	Brzina centra inercije krutog tela (V_i)	66
4.5	Ubrzanje centra inercije krutog tela (V_i)	67
4.6	Ugaona brzina krutog tela (V_i)	70
4.7	Ugaono ubrzanje krutog tela (V_i)	71
4.8	Spoljašnje i unutrašnje koordinate robotskog sistema.....	72
4.9	Jakobijan matrica transformacije unutrašnjih u spoljašnje koordinate robotskog sistema.....	73
4.9.1	Opšte napomene.....	75
4.9.2	Slučaj pozicioniranja.....	77
4.9.3	Slučaj orijentacije.....	86
4.10	Neke specifičnosti kinematičkih zadataka robotskih sistema.....	93
5.	Direktni i inverzni kinematički zadatak.....	96
5.1	Direktni kinematički zadatak.....	96
5.2	Inverzni kinematički zadatak.....	103
5.3	Numeričko rešenje inverznog kinematičkog zadatka.....	109
6.	Redundantni robotski sistemi.....	111
6.1	Osnove redundantnih robotskih sistema.....	111
6.1.1	Pojam redundanse.....	111
6.1.2	Razrešenje prethodno ustanovljene redundanse u mehanici robota.....	115

6.2	Rešenje redundanse primenom optimizacije kriterijuma po generalisanim koordinatama.....	116
6.3	Rešenje redundanse primenom optimizacije kriterijuma po generalisanim brzinama.....	120
6.3	Rešenje redundanse primenom optimizacije kriterijuma po ubrzanjima...	122
7.	Dinamika robota - osnovne postavke, zakoni.....	125
7.1	Neki elementi geometrije masa.....	125
7.1.1	Gustina krutog tela.....	125
7.1.2	Masa.....	126
7.1.3	Centar inercije (središte masa) tela i sistema tela.....	126
7.1.4	Tenzor inercije tela (V).....	127
7.1.5	Transformacija tenzora inercije pri rotaciji koordinatnog sistema.....	130
7.2	Količina kretanja krutog tela. Zakon o promeni količine kretanja krutog tela.....	131
7.3	Kinetička energija robotskog sistema.....	139
8.	Diferencijalne jednačine kretanja robotskog sistema.....	142
8.1	Kovarijantni oblik diferencijalnih kretanja robotskog sistema.....	142
8.2	Generalisane sile robotskog sistema.....	146
8.2.1	Generalisane sile od sila teže robotskog sistema.....	148
8.2.2	Generalisane sile od sila u oprugama.....	150
8.2.3	Generalisane sile od sila viskoznog trenja.....	152
8.2.4	Generalisane sile od sistema pogonskih sila.....	153
8.3	Kontravarijantni oblik diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema.....	156
8.4	Princip idealnosti veza robotskog sistema.....	157
9.	Diferencijalni principi za sistem krutih tela.....	160
9.1	Langranž-Dalamberov princip.....	160
9.2	Žurdenov princip	164
9.3	Gausov princip.....	168

10. O različitim metodama za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema krutih tela.....	172
10.1 Opšti zakoni mehanike i diferencijalne jednačine kretanja.....	172
10.2 Dalamberov princip i diferencijalne jednačine kretanja.....	174
10.3 Langranž-Dalamberov princip i diferencijalne jednačine kretanja.....	176
10.4 Žurdenov i Gausov princip i diferencijalne jednačine kretanja.....	177
11. Robotski sistem u obliku zatvorenog kinematičkog lanca i lanca sa grananjem	179
11.1 Zatvoreni kinematički lanac.....	179
11.1.1 Slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob.....	181
11.1.2 Slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje cilindrični zglob.....	186
11.2 Diferencijalne jednačina kretanja zatvorenog kinematičkog lanca.....	191
11.3 Kinematički lanac sa grananjem.....	194
12. Uvod u teoriju upravljanja robotskim sistemima.....	200
12.1 Osnovna postavka problema.....	200
12.2 Upravljanje. Dopustivo upravljanje.....	205
12.3 Cilj upravljanja. Funkcija cilja. Kriterijum upravljivosti.....	206
12.4 Neki primeri formiranja algoritma upravljanja robotskim sistemom.....	210
12.5 Uvod u teoriju optimalnog upravljanja robotskim sistemima.....	217
12.5.1 Optimalno upravljanje, nestacionarni sistemi sa slobodnim desnim krajem trajektorije.....	222
Literatura.....	229

Uvod u mehaniku robota

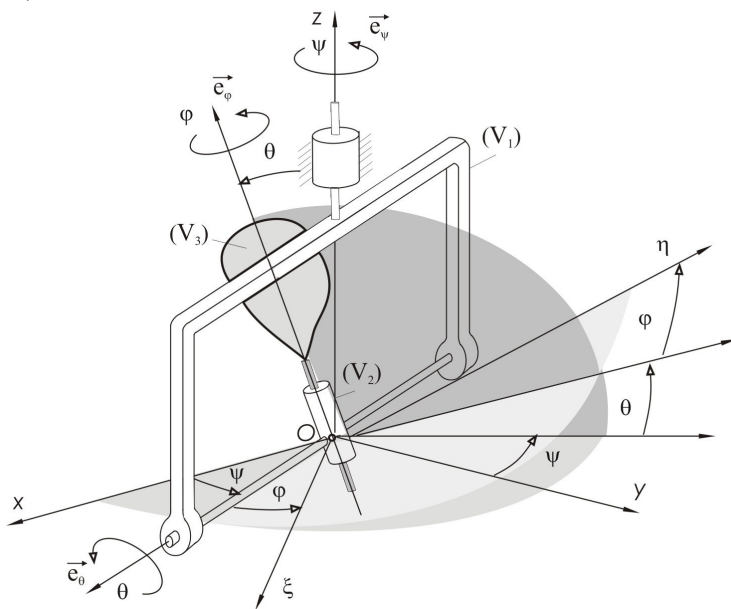
Može se reći da robotika ima svoje početke još u srednjem veku, u doba renesanse. Oko 1500 godine, Leonardo da Vinči izradio je mehaničkog lava u čast Luja XII. Kada je kralj ušao u dvoranu za prijem u Milanu, lav se pokrenuo, rastvorio grudni koš i kralju pokazao grb Francuske. Takvi mehanički automati postali su aktuelni tokom sledećih četiri veka. Tek početkom XX veka reč **robot** je ušla u engleski jezik kada je 1923 godine prevedena češka drama RUR (Rossumovi univerzalni roboti) filozofa Karela Čapeka. Izraz **robot** izveden je od češke reči *robota* koja znači prisilan rad. Iako bi tvorevine u drami danas pre bile nazvane androidima nego robotima, ta je pogrešna upotreba reči i do danas ostala univerzalna.

U široj literaturi se može naći da se robot tumači kao čovekoliki automat, poslušan i inteligentan ali bezlična mašina ili automatizovan uređaj koji obavlja funkcije koje su obično namenjene čoveku (vidi [1]). Preciznije određenje robota se može naći u stručnoj literaturi koja se odnosi na ovu problematiku, pri čemu se uočava da roboti predstavljaju složene sisteme, tako da IFR (International Federation of Robotics) definicija industrijskih robota, koja važi od 1991. godine, glasi:

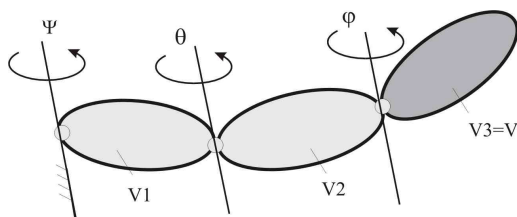
Automatski upravljana, reprogramibilna, multifunkcionalna, manipulaciona mašina sa tri ili više reprogramibilnih osa, fiksirana za postolje ili mobilna, koja se koristi u procesima industrijske automatizacije.

Ova knjiga bavi se u svom većem delu *mehanicom robota*. Upravljanje robotima u knjizi je dato u ograničenom obimu. Kompleksnim izlaganjem najvažnijih segmenata dinamike sistema tela, sa posebnim naglaskom na zadatke mehanike specifične za robotske sisteme, stvaraju se uslovi da se metode izložene u knjizi primene i na ostale segmente tehnike. Posebno ističemo da se metodologija formiranja i rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja sistema tela, izložena ovde, može da primeni i u oblasti složenih mehanizama u mašinstvu, transportnih mašina i uređaja, drumskih i šinskih vozila i vazduhoplova (detaljnije u [2]). Iz toga razloga ovde će robotski sistem, kao mehanički sistem, biti predstavljen sistemom tela pri čemu konačan broj tela u sistemu nije ograničen. Razmatrani sistem tela je u opštem slučaju vezan, ali se razmatranje veza pojednostavljuje njihovom dekompozicijom, čime se dobija slučaj karakterističan za robotske sisteme. Na taj način tehnički objekti

sa složenijim vezama od onih koje se javljaju u robotskim sistemima, dekompozicijom veza se svode na mehaničke objekte ekvivalentne robotskim sistemima čiji su elementi (tela) formiraju kinematičke parove V klase. Na primer, u slučaju sfernog kretanja krutog tela, sferni zglob se dekomponuje na tri cilindrična, uvode se u razmatranje tri tela od kojih dva (sl. u.1, tela (V_1) i (V_2)) imaju zanemarljivu masu. Treće telo ima geometriju masa identičnu geometriji masa originalnog tela, [3]. Ovakav model mehaničkog sistema, sa napomenom da sva tri tela imaju zadatu geometriju masa, javlja se u slučaju robota sa tri rotaciona stepena slobode kretanja (takozvana RRR robotska struktura), sl. u.2.



Slika u.1



Slika u.2

Pomenuta dekompozicija dovodi do razlaganja složenog oblika kretanja tela na niz kretanja koji predstavljaju translaciju ili rotaciju u apsolutnom ili relativnom kretanju. U navedenom primeru sfernog kretanja dekompozicijom sfernog na tri cilindrična zgloba, sferno kretanje se dekomponuje na tri

rotaciona – jedno apsolutno i dva relativna. Metod dekompozicije (u primeru koji sledi – dekompozicija kretanja) može da se primeni i na opšte kretanje krutog tela (odsustvuju veze). U tom slučaju takvo kretanje se modelira sistemom od šest tela pri čemu prvih pet tela imaju samo geometrijske odlike (masa tih tela se zanemaruje). Šesto telo ima geometriju masa identičnu originalnom telu. Ovakav sistem šest tela vezan je na sledeći način (navodimo jedan iz niza mogućih primera): treće telo u odnosu na drugo, drugo telo u odnosu na prvo i prvo u odnosu na nepomično postolje vrše pravolinijske translacije posredstvom prizmatičnih zglobova međusobno ortogonalnih osa. Šesto telo u odnosu na peto, peto u odnosu na četvrto i četvrto u odnosu na treće vrše čiste rotacije i taj deo sistema odgovara onome sa sl.u.1 (treba imati u vidu ovakvu zamenu u numeraciji tela: $(V_1) \rightarrow (V_4)$, $(V_2) \rightarrow (V_5)$, $(V_3) \rightarrow (V_6)$).

Najčešće veze koje ograničavaju kretanja sistema, na primeru veze tela (V_{i-1}) i (V_i) , prikazane su u donjoj tabeli, [4]. Svaka veza koja dopušta više od jednog stepena slobode kretanja tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) (klasa kinematičkog para je niža od V-te) dekomponuje se na odgovarajući broj veza sa jednim stepenom slobode kretanja.

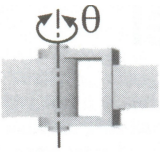

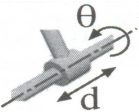
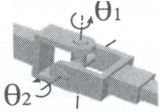
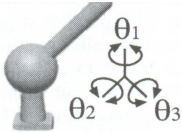
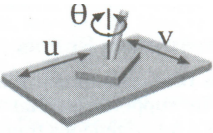
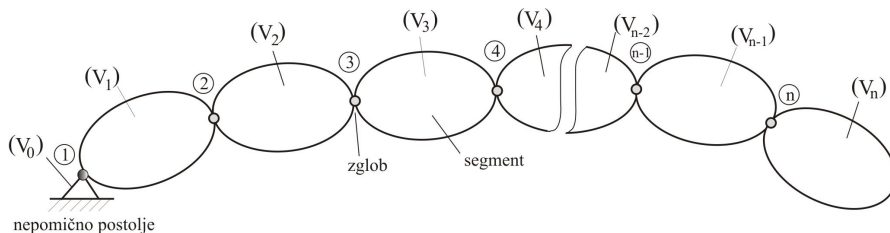
klasa kinem. para	broj stepeni slobode		
V	1		
IV	2		
III	3		

Tabela 1

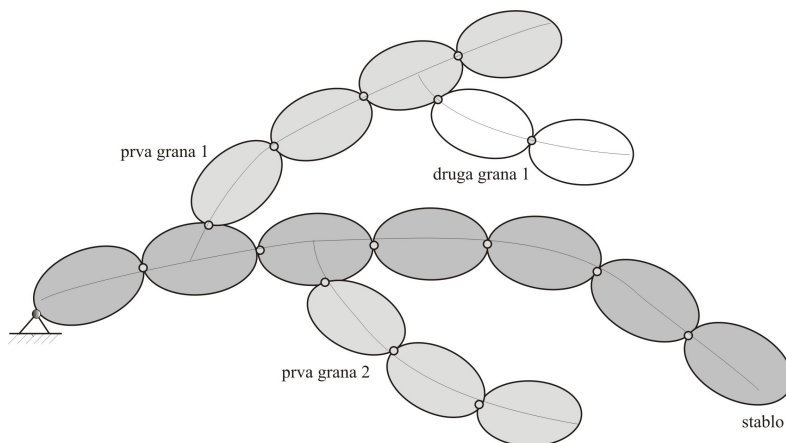
Osnovni oblik sistema tela čije kretanje proučavano je *otvoreni kinematički lanac*. Ovaj lanac predstavlja sistem od n tela (sl.u.3) numerisanih indeksima

koji uzimaju vrednosti od 1 do n . Pri tome tela (V_{i-1}) i (V_i) čine kinematički par V klase koji dopušta ili pravolinijsku translaciju ili rotaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}). U sličaju $i=1$ pojavljuje se telo (V_0) koje predstavlja deo prostora za koji je vezan inercijalni sistem referencije (postolje).

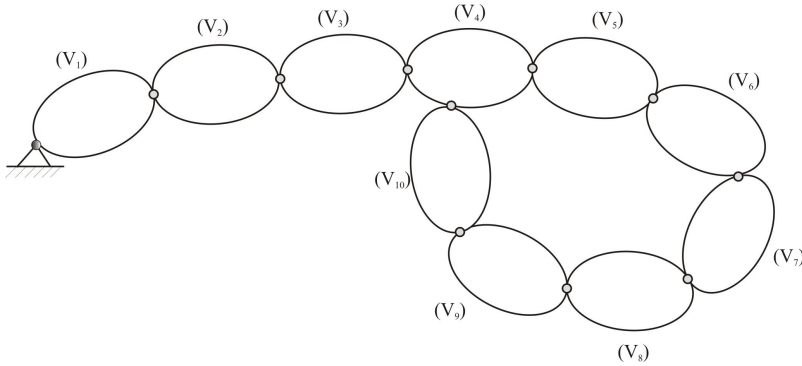


Slika u.3

Lanac tela može biti otvoren, ali sa grananjem (sl.u.4). Tada se kaže da sistem tela ima mehanički model sa strukturom *topološkog drveta*, [5]. Sistem tela može da bude u obliku *zatvorenog kinematičkog lanca* (sl.u.5). Kod otvorenog kinematičkog lanca put između dva proizvoljna tela, koji prolazi kroz tela sistema, je jedinstven. Kod zatvorenog kinematičkog lanca to nije uvek slučaj. Na primer, postoje dva različita puta (vidi sl.u.5) između tela (V_1) i tela (V_{10}). Zatvoreni kinematički lanac se uvek može uklanjanjem veze transformisati u otvoreni, pri čemu uklonjenu vezu treba nadomestiti relacijama koje predstavljaju matematičku formalizaciju uklonjene veze. Te relacije nazivaju se jednačinama veza. U ovom kursu proučavaju se samo takvi sistemi tela čije kretanje ograničavaju *holonomne skleronomne veze*.



Slika u.4

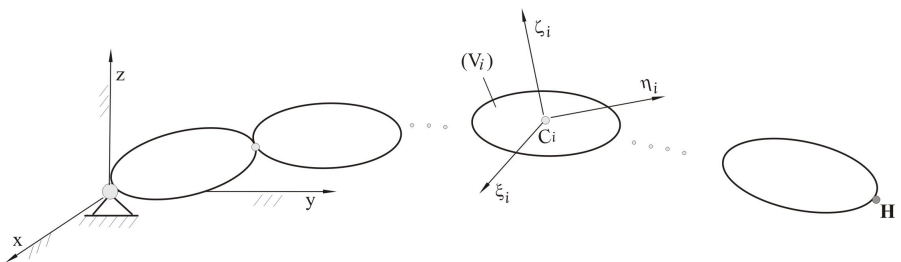


Slika u.5

Pod *robotskim sistemom* podrazumevaćemo sistem tela koji obrazuju kinematičke parove V klase, pri čemu nećemo ograničavati broj tela koja sačinjavaju sistem.

Konfiguraciju robotskog sistema određuje skup generalisanih koordinata (q^1, \dots, q^n) koji se u slučaju otvorenog kinematičkog lanca po pravilu poklapa sa skupom nezavisnih (Lagranževih) koordinata. U slučaju zatvorenog kinematičkog lanca nije moguće uvek eksplicitno izraziti zavisne generalisane koordinate preko nezavisnih. U tom slučaju skup (q^1, \dots, q^n) , osim nezavisnih, sadrži i onoliki broj zavisnih generalisanih koordinata koliki je broj nezavisnih jednačina veza koje nisu iskorišćene za eliminaciju zavisnih koordinata. Te veze se javljaju kao posledica transformacije zatvorenog u otvoreni kinematički lanac. Specijalno, kod ovako odabranog mehaničkog modela robotskog sistema sve generalisane koordinate određuju relativna kretanja proizvoljnog tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) .

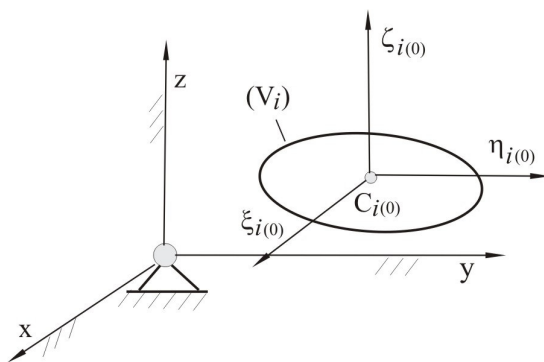
Telo koje ulazi u sastav robotskog sistema nazivamo *robotski segment* ili, kraće, *segment*. Nadalje, segmente ćemo smatrati krutim telima. Proizvoljnu konfiguraciju robotskog sistema određujemo u odnosu na *referentnu konfiguraciju* u kojoj su sve generalisane koordinate jednake nuli. Proizvoljnom segmentu (V_i) pridružićemo lokalni ortogonalni Dekartov koordinatni sistem $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$, (sl.u.6) gde je C_i središte masa segmenta (V_i) .



Slika u.6

Mehanika robota

U referentnoj konfiguraciji (označena sa (0)) važi $C_{i(0)}\xi_{i(0)} \parallel Ox$, $C_{i(0)}\eta_{i(0)} \parallel Oy$, $C_{i(0)}\zeta_{i(0)} \parallel Oz$, gde je $Oxyz$ inercijalni sistem referencije, (sl.u.7). Ovakva konvencija omogućuje da se matrice transformacija koordinata vektora ili tenzora određuju direktno kao proizvod Rodrigovih matrica transformacija koje se formiraju na relativno jednostavan način. Ta činjenica omogućava da se formuliše prost metod za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema. Specijalno, pomenuti metod dopušta iznalaženje jednostavnih programa za automatsko formiranje i rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema [3],[6]. Ako u referentnoj konfiguraciji nije ispunjen pomenuti uslov o paralelnosti odgovarajućih koordinatnih osa, jednostavnom transformacijom Rodrigove matrice dobijaju se stvarne matrice transformacija koordinata. U ovom slučaju u ostalim elementima metod formiranja diferencijalnih jednačina kretanja ostaje neizmenjen.

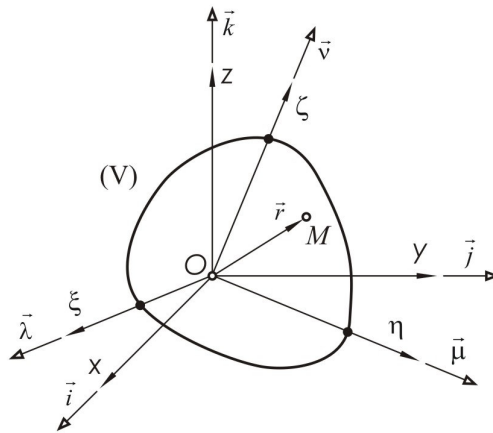


Slika u.7

2. Ortogonalne transformacije koordinata

2.1. Definicija ortogonalnih matrica transformacija

Razmotrimo dva pravouglata Dekartova koordinatna sistema: nepomični sistem $Oxyz$ i pokretni sistem $O\xi\eta\zeta$ vezan za kruto telo (V) (sl.2.1). Jedinичni vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orijentišu ose Ox, Oy, Oz koordinatnog sistema $Oxyz$, a jedinичni vektori $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}$ orijentišu ose $O\xi, O\eta, O\zeta$ koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$. Očigledno je da sfernim kretanjem koordinatni sistem $Oxyz$ možemo dovesti do poklapanja sa koordinatnim sistemom $O\xi\eta\zeta$.



Slika 2.1

Vektor položaja \vec{r} proizvoljne tačke M sa koordinatama (x, y, z) odnosno (ξ, η, ζ) , može se napisati u obliku

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.1)$$

ili

$$\vec{r} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}. \quad (2.2)$$

Projektovanjem vektorske jednačine (2.2) na ose koordinatnog sistema $Oxyz$, dobijamo vezu između koordinata tačke M u sledećoj formi

$$\begin{aligned} x &= \xi\vec{\lambda} \cdot \vec{i} + \eta\vec{\mu} \cdot \vec{i} + \zeta\vec{\nu} \cdot \vec{i}, \\ y &= \xi\vec{\lambda} \cdot \vec{j} + \eta\vec{\mu} \cdot \vec{j} + \zeta\vec{\nu} \cdot \vec{j}, \\ z &= \xi\vec{\lambda} \cdot \vec{k} + \eta\vec{\mu} \cdot \vec{k} + \zeta\vec{\nu} \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ili, u matičnom zapisu

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

gde je

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \vec{i} & \vec{\mu} \cdot \vec{i} & \vec{\nu} \cdot \vec{i} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{j} & \vec{\mu} \cdot \vec{j} & \vec{\nu} \cdot \vec{j} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{k} & \vec{\mu} \cdot \vec{k} & \vec{\nu} \cdot \vec{k} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Matrica $[A] \in R^{3 \times 3}$ predstavlja *matricu transformacije* koordinata tačke M iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem $Oxyz$. Ako matricu transformacije (2.5) napišemo u obliku

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

jasno je da veličine α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) predstavljaju kosinuse uglova između dve odgovarajuće ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema. Tako je, na primer,

$$\alpha_{21} = \vec{\lambda} \cdot \vec{j} = \cos \angle(\vec{\lambda}, \vec{j}). \quad (2.7)$$

Pošto kolone matrice $[A]$ predstavljaju koordinate jediničnih vektora $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}$ izražene u nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} &= \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{21}\vec{j} + \alpha_{31}\vec{k}, \\ \vec{\mu} &= \alpha_{12}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{32}\vec{k}, \\ \vec{\nu} &= \alpha_{13}\vec{i} + \alpha_{23}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

sledi da je

$$\det[A] = (\vec{\lambda} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nu} = 1. \quad (2.9)$$

Samim tim, matrica transformacije $[A]$ je nesingularna.

Elementi matrice $[A]$ nisu međusobno nezavisni jer, na osnovu (2.8) i uslova ortogonalnosti i normiranosti vektora $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}$, između koeficijenata α_{ij} postoje sledeće veze

$$\begin{aligned}
 f^1 &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 - 1 = 0, \\
 f^2 &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 - 1 = 0, \\
 f^3 &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 - 1 = 0, \\
 f^4 &= \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0, \\
 f^5 &= \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0, \\
 f^6 &= \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pokazuje se da drugih relacija oblika (2.10) nezavisnih od (2.10) nema i da je ($k=1, \dots, 6$; $\alpha=1, 2, 3$):

$$\text{rank}[E] = 6, [E] \in R^{6 \times 9}, [E] = \left[\left[\frac{\partial f^k}{\partial \alpha_{1\alpha}} \right] ; \left[\frac{\partial f^k}{\partial \alpha_{2\alpha}} \right] ; \left[\frac{\partial f^k}{\partial \alpha_{3\alpha}} \right] \right], \tag{2.11}$$

odakle sledi da su samo tri koordinate matrice transformacije (2.6) nezavisne. Očigledno je da te tri koordinate ne mogu da se nalaze u istoj koloni ili istoj vrsti.

Nesingularnost matrice $[A]$ dozvoljava da se odredi transformacija inverzna transformaciji (1.4)

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{2.12}$$

gde je

$$[A][A]^{-1} = [I] \quad ([I] \in R^{3 \times 3} \text{ - jedinična matrica}). \tag{2.13}$$

Ako se vektorska jednačina (2.1) projektuje na ose koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, dobijaju se relacije

$$\begin{aligned}
 \xi &= x\bar{\lambda} \cdot \bar{i} + y\bar{\lambda} \cdot \bar{j} + z\bar{\lambda} \cdot \bar{k}, \\
 \eta &= x\bar{\mu} \cdot \bar{i} + y\bar{\mu} \cdot \bar{j} + z\bar{\mu} \cdot \bar{k}, \\
 \zeta &= x\bar{\nu} \cdot \bar{i} + y\bar{\nu} \cdot \bar{j} + z\bar{\nu} \cdot \bar{k},
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

ili, u matricnoj formi

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{2.15}$$

gde je

$$[B] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \cdot \bar{i} & \bar{\lambda} \cdot \bar{j} & \bar{\lambda} \cdot \bar{k} \\ \bar{\mu} \cdot \bar{i} & \bar{\mu} \cdot \bar{j} & \bar{\mu} \cdot \bar{k} \\ \bar{\nu} \cdot \bar{i} & \bar{\nu} \cdot \bar{j} & \bar{\nu} \cdot \bar{k} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Matrica $[B] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ predstavlja matricu transformacije koordinata tačke M iz koordinatnog sistema $Oxyz$ u koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$. Iz (2.5) i (2.16) sledi da je

$$[B] = [A]^T \Leftrightarrow [A] = [B]^T. \quad (2.17)$$

Prva relacija u (2.17) omogućava da se izraz (2.15) napiše u obliku

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

što u kombinaciji sa relacijom (2.12) daje

$$\left([A]^{-1} - [A]^T \right) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Pošto koordinate x, y, z imaju proizvoljnu vrednost, izvodi se zaključak da važi

$$[A]^{-1} = [A]^T, \quad (2.20)$$

odnosno

$$[B] = [A]^T \Leftrightarrow [A] = [B]^T. \quad (2.21)$$

Prema relaciji (2.21), lako se pokazuje da je

$$[A][A]^{-1} = [B]^T [B] \Rightarrow [B]^{-1} = [B]^T. \quad (2.22)$$

Transformacija (2.4) sa osobinama (2.9) i (2.20) naziva se *ortogonalna transformacija*. Transformacija inverzna ortogonalnoj, u skladu sa (2.22), takođe je ortogonalna.

2.2. Dualni objekti

Vektoru \vec{a} koji se u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu izražava u obliku

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad (2.23)$$

može se pridružiti matrica

$$[a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Veličine $\{\bar{a}\}$ i $[a^d]$ nazivaju se dualnim objektima pri čemu je $[a^d]$ dualni objekat (drugog reda) objekta $\{\bar{a}\}$ (prvog reda). Važi i obrnuto: $\{\bar{a}\}$ je dualni objekat objekta $[a^d]$. Jasnoće radi, dualnim objektom nazivaćemo isključivo veličinu $[a^d]$ koja je, očigledno, antisimetrična:

$$[a^d]^T = -[a^d]. \quad (2.25)$$

Uočimo da je

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} -a_3^2 - a_2^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

što se može napisati u obliku

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

odakle se neposredno dobija

$$[a^d]^2 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad a_3) - a^2 [I], \quad (2.28)$$

odnosno

$$[a^d]^2 = \{\bar{a}\}(\bar{a}) - a^2 [I], \quad (2.29)$$

gde je $[I] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ - jedinična matrica, $a^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$. Daljim stepenovanjem dualnog objekta celim pozitivnim brojem, dobija se

$$[a^d]^3 = -a^2 [a^d], \quad (2.30)$$

jer je

$$[a^d]\{\vec{a}\} = [a^d] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Takođe je

$$\begin{aligned} [a^d]^4 &= -a^2 [a^d]^2, \\ [a^d]^5 &= -a^2 [a^d]^3 \Rightarrow [a^d]^5 = a^4 [a^d], \\ [a^d]^6 &= a^4 [a^d]^2, \\ [a^d]^7 &= -a^6 [a^d], \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

tako da važi sledeća opšta formula

$$\begin{aligned} [a^d]^{2i-1} &= (-1)^{i-1} a^{2i-2} [a^d], \\ [a^d]^{2i} &= (-1)^{i-1} a^{2i-2} [a^d]^2, \quad i=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Specijalno, ako je $\vec{a} = \vec{e}$, gde je \vec{e} jedinični vektor, dobija se

$$\begin{aligned} [e^d]^{2i-1} &= (-1)^{i-1} [e^d], \\ [e^d]^{2i} &= (-1)^{i-1} [e^d]^2, \quad i=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.2.1. Vektorski proizvod i dualni objekat

Neka je dat vektor \vec{b} čije su koordinate u odnosu na sistem $Oxyz$

$$\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Vektorski proizvod vektora (2.23) i (2.35) biće

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

Pošto je

$$[a^d]\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}, \quad (2.37)$$

sledi da je

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = [a^d] \{\vec{b}\}. \quad (2.38)$$

Vektorski proizvod je antisimetričan

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (2.39)$$

tako da je

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = -[b^d] \{\vec{a}\}, \quad (2.40)$$

odnosno, na osnovu relacija (2.38) i (2.40):

$$[a^d] \{\vec{b}\} = -[b^d] \{\vec{a}\}. \quad (2.41)$$

2.2.2. Dualni objekat i promena koordinatnog sistema

Neka su projekcije dva proizvoljna vektora \vec{a} i \vec{b} na ose koordinatnih sistema $Oxyz$ i $O\xi\eta\zeta$ (sl. 2.1)

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{a}^*\} = \begin{Bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{b}^*\} = \begin{Bmatrix} b_\xi \\ b_\eta \\ b_\zeta \end{Bmatrix}. \quad (2.42)$$

Projekcijama vektora \vec{a} odgovaraju dualni objekti

$$[a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \quad [a^{d*}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_\zeta & a_\eta \\ a_\zeta & 0 & -a_\xi \\ -a_\eta & a_\xi & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Uvedimo vektor \vec{c} definisan kao vektorski proizvod

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad (2.44)$$

čije su projekcije

$$\{\vec{c}\} = \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{c}^*\} = \begin{Bmatrix} c_\xi \\ c_\eta \\ c_\zeta \end{Bmatrix}, \quad (2.45)$$

na ose koordinatnih sistema $Oxyz$ i $O\xi\eta\zeta$, respektivno, na osnovu formule (2.4) vezane relacijom

$$\{\vec{c}\} = [A] \{\vec{c}^*\}. \quad (2.46)$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \{\vec{c}\} &= [a^d] \{\vec{b}\}, \\ \{\vec{c}^*\} &= [a^{d*}] \{\vec{b}^*\} = [a^{d*}] [A]^{-1} \{\vec{b}\} = [a^{d*}] [A]^T \{\vec{b}\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

prema (2.46) sledi da je

$$[a^d]\{\bar{b}\} = [A][a^{d*}][A]^T\{\bar{b}\}, \quad (2.48)$$

ili

$$\left([a^d] - [A][a^{d*}][A]^T\right)\{\bar{b}\} = 0. \quad (2.49)$$

Pošto je vektor \bar{b} izabran proizvoljno, proističe da je

$$[a^d] = [A][a^{d*}][A]^T. \quad (2.50)$$

Relacija (2.50) definiše transformaciju dualnog objekta iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem $Oxyz$. Lako se može pokazati da je relaciji (2.50) ekvivalentna relacija

$$[a^{d*}] = [A]^T[a^d][A], \quad (2.51)$$

koja definiše transformaciju dualnog objekta iz koordinatnog sistema $Oxyz$ u koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$.

2.3. Veze između ugaone brzine, ugaonog ubrzanja i matrice transformacije u slučaju sfernog kretanja tela

Neka je koordinatni sistem $Oxyz$ (sl. 2.1) nepokretan, a koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ vezan za kruto telo (V). Uočimo tačku M krutog tela (V) čije su koordinate u dva navedena koordinatna sistema (x, y, z) odnosno (ξ, η, ζ) . Diferenciranjem zakona transformacije koordinata (2.4) po vremenu dobija se

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \frac{d[A]}{dt} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \quad (2.52)$$

Pri diferenciranju smo uzeli u obzir da su koordinate tačke M u lokalnom koordinatnom sistemu vezanom za telo (V) konstantne:

$$\xi, \eta, \zeta = const. \quad (2.53)$$

Elementi matrice na levoj strani jednakosti (2.52) predstavljaju projekcije brzine tačke M na ose nepomičnog koordinatnog sistema $Oxyz$, tako da je

$$\{\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \frac{d[A]}{dt} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \quad (2.54)$$

Ako Ojlerov obrazac za brzinu tačke M (vidi [7])

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times O\bar{M}, \quad (2.55)$$

4. Kinematika otvorenog kinematičkog lanca

4.1 Uvodne napomene

Razmotrimo otvoreni kinematički lanac $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ bez grananja pri čemu je prvo kruto telo (V_1) u lancu (sl. 4.1) u vezi sa nepomičnim postoljem. Neka dva susedna tela (V_{i-1}) i (V_i) lanca, vezana zglobovom (i) čine kinematički par V -te klase koji dozvoljava ili pravolinijsku translaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) ili obrtanje tela (V_i) u odnosu na osu vezanu za telo (V_{i-1}) . Uvodimo sledeće matrice

$$\{\xi\} \in R^{n \times 1}, \{\bar{\xi}\} \in R^{n \times 1}, \quad (4.1)$$

čiji se elementi $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ odnosno $\bar{\xi}_i (i=1, 2, \dots, n)$ određuju na sledeći način. U slučaju da zglob (i) dozvoljava pravolinijsku translaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) važiće ((V_0) -nepomično postolje)

$$\xi_i = 1, \quad \bar{\xi}_i = 0. \quad (4.2)$$

U slučaju da zglob (i) dozvoljava rotaciju tela (V_i) u odnosu na osu vezanu za telo (V_{i-1}) važiće

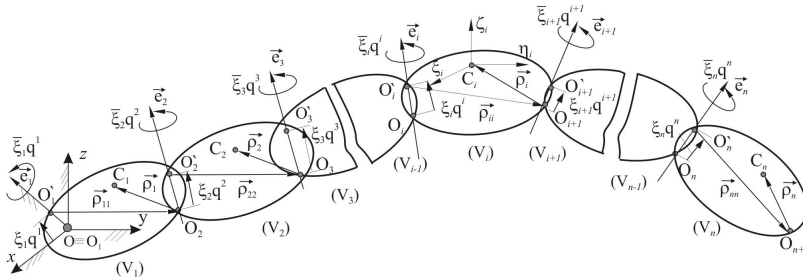
$$\xi_i = 0, \quad \bar{\xi}_i = 1. \quad (4.3)$$

Očigledno je da su zadavanjem elemenata jedne od matrica (4.1) određeni i elementi druge matrice jer uvek važi

$$\xi_i + \bar{\xi}_i = 1 \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Zglob (i) za koji je $\xi_i = 1$ naziva se *prizmatični* a zglob (i) za koji je $\bar{\xi}_i = 1$ *cilindrični*.

U cilju određivanja konfiguracija kinematičkog lanca uvodimo nepomični pravougli Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ (sl. 4.1) i n lokalnih koordinatnih sistema, takodje pravougljih Dekartovih. Na primer, lokalni koordinatni sistem $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ vezan je za telo (V_i) ($i=1, 2, \dots, n$), tačka C_i predstavlja centar inercije tela (V_i) . U nekoj konfiguraciji otvorenog kinematičkog lanca odgovarajuće ose lokalnih koordinatnih sistema paralelne



Slika 4.1

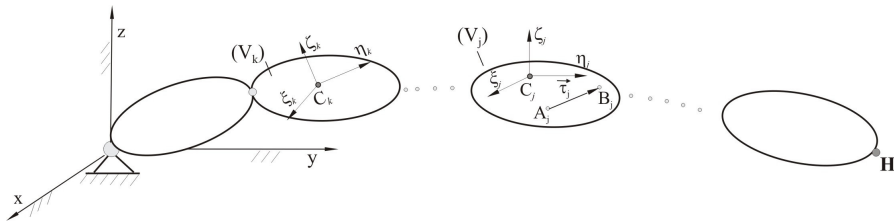
su odgovarajućim osama nepokretnog koordinatnog sistema. Tu konfiguraciju nazivamo *referentnom* i u njoj obično uzimamo da su koordinate koje određuju konfiguraciju lanca jednake nuli (iako to nije obavezno). Za tu konfiguraciju, koju ćemo označavati sa (0) , dakle važi

$$C_i \xi_{i(0)} \parallel Ox, C_i \eta_{i(0)} \parallel Oy, C_i \zeta_{i(0)} \parallel Oz, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (4.5)$$

gde $C_i \xi_{i(0)} \eta_{i(0)} \zeta_{i(0)}$ predstavlja lokalni koordinatni sistem tela (V_i) u referentnoj konfiguraciji.

4.2 Složena matrica transformacije

Razmotrimo u otvorenom kinematičkom lancu bez grananja na koji način se transformišu koordinate vektora $\vec{r}_j = \overline{A_j B_j}$, $A_j, B_j \in (V_j)$, date u lokalnom koordinatnom sistemu $C_j \xi_j \eta_j \zeta_j$, na koordinate date u lokalnom koordinatnom sistemu $C_k \xi_k \eta_k \zeta_k$ vezanom za segment (V_k) , $k < j$, sl. 4.2.



Slika 4.2

Očigledno je da će u slučaju prizmatičnog zgloba između segmenata (V_j) i (V_{j-1}) odgovarajuće koordinate pomenutog vektora, date u koordinatnom sistemu $C_{j-1} \xi_{j-1} \eta_{j-1} \zeta_{j-1}$, biti jednake koordinatama toga vektora u

koordinatnom sistemu $C_j \xi_j \eta_j \zeta_j$. Naime, ako su u koordinatnom sistemu $C_j \xi_j \eta_j \zeta_j$ te koordinate su date sa

$$\{\bar{r}_j^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix}, \quad (4.6)$$

u koordinatnom sistemu $C_{j-1} \xi_{j-1} \eta_{j-1} \zeta_{j-1}$ važiće

$$\{\bar{r}_j^{(j-1)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j-1)} \\ \eta_j^{(j-1)} \\ \zeta_j^{(j-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix}. \quad (4.7)$$

U slučaju cilindričnog zgloba između segmenata (V_k) i (V_{k-1}) očigledno je da su pre rotacije za ugao q^i koordinate vektora \bar{r}_j u lokalnom koordinatnom sistemu $C_{j-1} \xi_{j-1} \eta_{j-1} \zeta_{j-1}$ jednake odgovarajućim koordinatama toga vektora u lokalnom koordinatnom sistemu $C_j \xi_j \eta_j \zeta_j$, (u tom koordinatnom sistemu date su konstantnim vektorom $\{\bar{r}_j^{(j)}\}$). Jednom konačnom rotacijom za ugao q^i te koordinate u lokalnom koordinatnom sistemu $C_{j-1} \xi_{j-1} \eta_{j-1} \zeta_{j-1}$ prevodimo na oblik $\{\bar{r}_j^{(j-1)}\}$. To prikazujemo na sledeći način

$$\begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix} \xrightarrow{q^i} \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j-1)} \\ \eta_j^{(j-1)} \\ \zeta_j^{(j-1)} \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

ili, uzimajući u obzir osobine Rodrigove matrice transformacije

$$\begin{Bmatrix} \xi_j^{(j-1)} \\ \eta_j^{(j-1)} \\ \zeta_j^{(j-1)} \end{Bmatrix} = [A_j^r] \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Ako se Rodrigova matrica transformacije napiše u obliku

$$[A_j^r] = [I] + \bar{\xi}_j \left[(1 - \cos q^j) [e_j^d]^2 + \sin q^j [e_j^d] \right] \quad (4.10)$$

Tada će izraz (4.9) važiti i za slučaj prizmatičnog i za slučaj cilindričnog zgloba između segmenata (V_j) i (V_{j-1}) . Razmatranjem analognim prethodnom

6. Redundantni robotski sistemi

6.1 Osnove redundantnih robotskih sistema

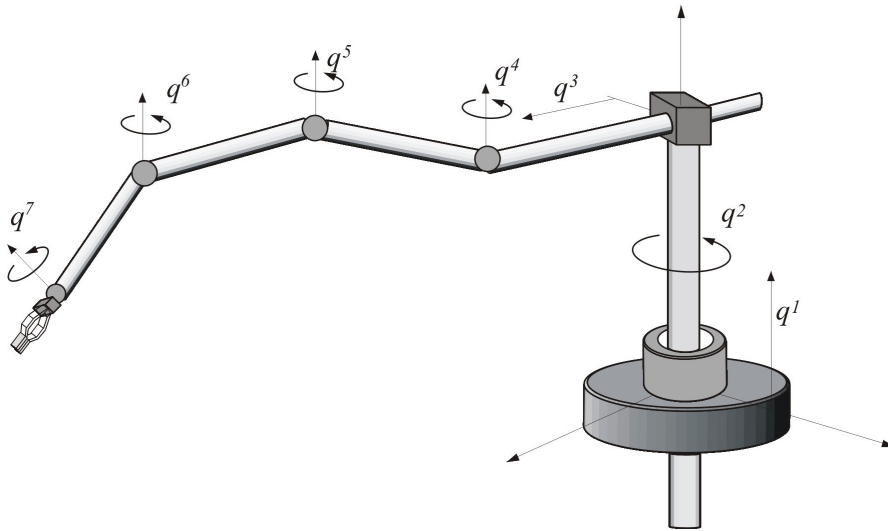
6.1.1 Pojam redundanse, tipovi redundanse

U zadacima gde je izražen zahtev za što većom pouzdanošću i veštinom u toku izvođenja samih zadataka često se koristi *redundansa*^{*}. Obezbeđivanje dovoljno sposobnosti u cilju pouzdanog ili kvalitetnog obavljanja datog zadatka jeste jedna od najneophodnijih karakteristika složenih sistema. Takva potencijalna rezerva naziva se *redundansom*. Biomehanički primer redundanse jeste ruka čoveka koja se može opisati pojednostavljenim modelom sa 7 stepeni slobode, odnosno zajedno sa celom šakom, ruka čoveka ima oko 50 stepeni slobode, [13]. Ovo omogućava izuzetnu fleksibilnost, pouzdanost kao i značajnu veštinu koja je ostvarena uvežbavanjem određene grupe pokreta u obavljanju izuzetno složenih zadataka. Korišćenjem analogije sa ljudskom rukom kod koje su se uočile prednosti korišćenja redundanse stvorena je osnova za uvođenje redundantnih struktura u postojeće robotske konfiguracije. Time je omogućeno da robot postane sposobniji za izvršavanje širokog spektra zadataka, poveća fleksibilnost, smanji troškove angažovanih resursa, u značajnoj meri poveća veštinu kretanja u radnom prostoru koji može obilovati mnogobrojnim preprekama, odnosno poboljša optimalnost uočenih veličina u odnosu na zadate optimizacione kriterijume, [14]. Sama redundantnost robota je definisana egzaktno u poglavlju knjige koji se odnosi na kinematiku poslednjeg robotskog segmenta, (vidi st. 92 i dalje). Ovde je prikazan na slici 6.1 jedan primer redundantnog robotskog mehanizma sa 7 stepeni slobode.

U cilju preciznijeg opisa redundanse može se razlikovati više tipova redundansi primenjenih kod robota. Jedna od mogućih podela redundanse jeste podela na:

- *Projektovanu redundantnost* ako mehanizam manipulacionog robota ima višak stepeni slobode u odnosu na hvataljku $n > m$. U cilju realizovanja postavljenog manipulacionog zadatka gde postoje dopunski zahtevi praktično je nemoguće izbeći primenu redundantnog robota. Dopunski zahtevi se odnose najčešće na zaobilazanje prepreka u radnom prostoru vrha robota, povećanje radnog prostora (dohvatljivosti) robota, postizanje brzina velikog inteziteta korišćenjem takozvanih paralelnih stepeni slobode, izbegavanje neželjenih singulariteta u određenim položajima robota.

^{*} Engl. redundance - suvišan, prekomeran



Slika 6.1

- *parametarsku redundantnost* koja se primenjuje u cilju poboljšanja nekih od parametara koji određuju izvođenje manipulacionog zadatka. Tu takođe postoji višak stepeni slobode robota u odnosu na hvataljku i oni se koriste sada za poboljšanje uočenih parametara koji karakterišu izvođenje manipulacionog zadatka. Poboljšanja se realizuju primenom različitih optimizacionih kriterijuma po uočenim parametrima. Ovde se, na primer, prevashodno misli na sledeće parametre: vreme izvršenja manipulacionog zadatka; utrošak energije u toku izvršenja manipulacionog zadatka; kinematički parametri koji karakterišu kvalitet realizacije manipulacionog zadatka (odstupanje stvarne trajektorije hvataljke od zadate trajektorije, odstupanje stvarne brzine (ubrzanja) hvataljke od zadate brzine (ubrzanja)). Međutim, prethodne osobine redundantnog robota ne mogu uvek doći do izražaja, jer se nailazi na poteškoće prilikom korišćenja istih, najčešće u realizaciji upravljanja takvim robotima, u realizaciji trajektorije odnosno prilikom samog projektovanja i konstruisanja samih redundantnih robota.

Druge moguća podela redundantse data je na sledeći način. Kod robota koji ima *kinematičku redundantnu* moguće je uz očuvanje položaja hvataljke robota menjati položaj segmenata mehanizma, ili unutrašnju strukturu robota. Jedan primer je ruka čoveka koja drži neki nepokretan predmet u šaci. Ona je u mogućnosti da oko uočenog položaja šake zauzme proizvoljan položaj jer ima sedam stepeni slobode. Važno je istaći da kinematičku redundantnu karakteriše osobina kauzalnosti (*uzročnosti*) koja pruža opštu postavku problema koji se kasnije rešava tokom kretanja. Kinematička redundantna je u robotici omogućila da se izbegnu granični položaji zglobova povećanjem manipulabilnosti kretanja robota prilikom izbegavanja prepreka, povećanje brzina kretanja, izbegavanje singulariteta u prostoru unutrašnjih koordinata kako u fazi planiranja

trajektorije vrha hvataljke tako i njenog realizovanja. Takođe, ona pruža povećanje preciznosti pozicioniranja i praćenja trajektorije, optimizacija utroška energetskih resursa aktuatora, odnosno poboljšanje ukupnih mehaničkih karakteristika robota.

Pri tome, kinematički redundantan robot ima više stepeni slobode nego što je broj koordinata njegovog radnog prostora tako da za zadato kretanje hvataljke u radnom prostoru daje *beskonačno mnogo rešenja* u prostoru unutrašnjih koordinata. U cilju dobijanja jedinstvenog rešenja prethodno definisanog matematički neodređenog problema postoje dva generalna pristupa. Prvi pristup je da se uvedu dodatne jednačine koje će odgovarati nekim fizičkim ograničenjima sredine tako da postavljeni problem postane jedinstveno rešiv. Drugi pristup predlaže uvođenje optimizacije kretanja po nekom od kriterijuma optimalnosti, primer izvođenje pokreta za minimalno vreme, minimizacija kinetičke energije, pogonskog momenta, potencijalne energije, minimalno odstupanje stvarne trajektorije od željene itd.

Ako je neophodno da robot ostvari dopunske pogone u zglobovima robota, onda je potrebno obezbediti isti sa rezervnom strukturom pogonskih mehanizama tako da robot ima sada tzv. *redundantne pogone*. U tom slučaju kažemo da redundantni robot poseduje *aktuatorsku redundansu* i koja je karakteristična za sisteme zatvorenih kinematičkih lanaca, kao što su na primer mehanizmi za hodanje. Ovakav vid redundanse *ne zavisi* od unutrašnje strukture robota i odnosi se na određivanje sila i momenata u pogonskom elementu robota. Za razliku od kinematičke redundanse za aktuatorsku redundansu ne važi osobina *kauzalnosti* (tj. ako je poznata sila u trenutku $t = t_0$, ne može se upotrebiti za određivanje sile u bilo kom sledećem trenutku) pa kao takva ona predstavlja lokalni problem koji se rešava u zavisnosti od potrebe.

Ako je neophodno da se robot prilagodi nepoznatoj sredini jedna od osobina koju je potrebno da ima robot jeste *fleksibilnost*. Ona je omogućena ako robot ima pristup informacijama sa redundantnog (proširenog) skupa senzora koji omogućavaju robotu da bolje shvate i "vide" sredinu što će omogućiti efikasnije prilagođavanje u skladu sa zahtevima postavljenog zadatka. Na taj način *senzorska* redundansa omogućava povećanje pouzdanosti i tačnosti merenja, time što se informacija o kritičnom parametru stanja robota dobija kombinacijom podataka sa skupa senzora.

U cilju sagledavanja značaja primene redundantnih robota, biće navedeni neki od rezultata koji su postignuti do sada u ovoj oblasti, gde se mogu uočiti najčešće zastupljeni pristupi primene redundanse, kako u industrijskoj, tako i u medicinskoj robotici, [15]. Većina složenih zadataka može se svesti na problem pozicioniranja sa potpunom orijentacijom koje može robot sa šest stepeni slobode uspešno da izvrši. Međutim, kod nekih manipulacionih zadataka postavljaju se i dopunski zahtevi tako da se mora primeniti redundantni robot. Na primer, dopunski zahtevi se postavljaju ako je potrebno zaobići prepreku,

postići velike brzine ili povećati radni prostor (dohvatljivost) robota, ili izbeći singularne tačke. Nadalje, navode se neki od mogućih dopunskih zahteva.

Zaobilaženje prepreke - ako se pojavi prepreka prilikom izvršenja manipulacionog zadatka, gde se sa višeg nivoa upravljanja dobijaju željeni podaci o prepreci; na primer, prenos tečnosti u posudi, u cilju zaobilaženja prepreke robot mora imati jedan ili više dodatnih stepeni slobode da bi se sprečilo prosipanja sadržaja posude – dakle, mora se očuvati orijentacija hvataljke.

Postizanje velikih brzina - nekada je potrebno povećati brzinu obavljanja manipulacionog zadatka što se postiže dodatnim (paralelnim) stepenima slobode. Pri tome se postiže veća brzina uz očuvanje postojeće orijentacije hvataljke i praćenjem zadate trajektorije.

Povećanje radnog prostora - ako se u fazi sinteze praćenja željene trajektorije uoči da postojeći robot ima nedovoljni opseg dohvatljivosti što će kao posledicu imati nemogućnost realizacije manipulacionog zadatka onda je potrebno dodati na primer, još jedan stepen slobode u cilju povećanja dohvatljivosti robotskog manipulatora.

Izbegavanje singularnih tačaka - u blizini singularnih tačaka za zadatak promenu vektora spoljašnjih koordinata \bar{q} odraziće se u velikoj promeni unutrašnjih koordinata q . Pri tome takva promena vektora q uzrokuje velike greške u praćenju zadate trajektorije. Na taj način dobiće se greška tipa zasićenja jer aktuatori ne mogu realizovati takvu promenu usled ograničenih amplituda ulaznih promenljivih u aktuatoru. Dodavanjem potrebnog broja stepeni slobode omogućio bi se prolaz hvataljke kroz singularnu tačku bez neželjenih efekata.

Primena u cilju poboljšanja optimizacije nekih od parametara koji određuju

izvođenje manipulacionog zadatka - ovde se višak stepeni slobode koristi u cilju poboljšavanja pojedinih parametara koji se odnose na izvođenje manipulacionog zadatka. U tu svrhu koristi se teorija optimizacije gde je kriterijum performanse najčešće dat kao: za minimalno vreme izvesti manipulacioni zadatak; minimizovati utrošak energije koji je potreban za obavljanje datog postavljenog zadatka; minimizovati pogonske momente; u praćenju željene trajektorije minimizovati odstupanje stvarne trajektorije koju opisuje vrh hvataljke od zadate $\Delta\bar{q}(t) = \bar{q}(t) - \bar{q}_{zad}(t)$, $t \in [0, T]$; minimizovati odstupanje inteziteta stvarne brzine vrha hvataljke od inteziteta zadate brzine na vremenskom intervalu kretanja, $\Delta\dot{q}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_{zad}(t)$, $t \in [0, T]$. Prethodne postavljene zahtevi u smislu optimizacije važe za sve klase manipulacionih zadataka. Takođe, može se izvršiti optimizacija parametara koji imaju lokalni karakter prema uzroku koji dovodi do slabijeg kvaliteta izvršenja operacije kao što je delovanje spoljašnjih sila u manipulacionim zadacima gde one postoje; primer manipulacioni zadatak zavarivanja.

6.1.2 Razrešenje prethodno ustanovljene redundanse u mehanici robota

Zahvaljujući postojanju kvalitetne rezerve (redundanse) u mehanici robota je razvijen čitav niz interesantnih pristupa za razrešenje redundanse. Važno je ovde istaći da osnovni problem koji se javlja u primeni redundanse jeste da se ona u opštem slučaju ne može izdvojiti kao konkretni deo robota, jer u prethodnom izlaganju pod redundansom se podrazumevao pojam koji daje nov kvalitet datom robotu. Prema tome, u zavisnosti od manipulacionog zadatka i konfiguracije robota određivaće se *onaj deo robota* koji će činiti *redundansu*. Stoga je lako uočiti da manipulacioni robot može biti redundantan za dati manipulacioni zadatak a da ne mora biti za drugi postavljeni zadatak. U razrešenju problema redundanse izdvojila su se dva pristupa: dekompozicija robota na brzi i spori sistem [16] i izdvajanje redundanse na osnovu prethodne definicije zadatka sa stepenom prvenstva. U cilju razrešenja redundanse odnosno, dobijanje inverznog kinematičkog modela redundantnog robota došlo se, može se reći, do dva uopštena postupka: prvi bazira na primeni lokalnog optimalnog upravljanja, a drugi na primeni globalnog optimalnog upravljanja, [17]. Ako je potrebno *on-line* upravljanje i gde ne postoje zahtevi za globalnom optimalnošću opravdano je u tim situacijama koristiti lokalno optimalno upravljanje. Pri tome sam postupak izračunavanja optimalnog upravljanja predstavlja jednostavan numerički zadatak. Ako je postavljen zahtev za globalnom optimalnošću manipulacionog zadatka, onda se generiše globalno optimalno upravljanje koje zahteva angažovanje dosta vremena zbog numeričkih izračunavanja tako da se ono koristi u *off-line* aplikacijama. Takođe, prilikom određivanja opšte strategije upravljanja redundantnim robotima javljaju se poteškoće. Na primer, upravljanje kinematičkim redundantnim robotima je usložnjeno i to na taktičkom nivou (koordinacionom) koje je posledica postojanja uvećanog broja stepeni slobode u odnosu na broj stepeni slobode postavljenog zadatka. I pored poteškoća u cilju upravljanja redundansom kinematičkih redundantnih robota sa potencijalno velikim kvalitetnim prednostima, razvili su se nekoliko različitih pristupa u kojima se redundansa može razmatrati sa različitih tačaka gledišta. Tako na primer, redundansa se može razmatrati sa *kinematičke* tačke gledišta u sledećim slučajevima: povećanje manevarskih sposobnosti, povećanje radnog prostora, izbegavanje prepreka u radnom prostoru, izbegavanje singulariteta, izbegavanje ograničenja po unutrašnjim koordinatama zglobova, izbegavanje ograničenja po unutrašnjim brzinama zglobova. Ako se uzme u obzir i dinamika redundantnog robotskog manipulatora, tada redundansu možemo posmatrati i sa *dinamičke* tačke gledišta koja tada omogućava: povećanje dinamičkih sposobnosti, minimizaciju pogonskih momenata, smanjenje utroška energetskih resursa kao i minimizaciju vremena potrebnog za izvođenje željenog kretanja. Pored

navedena dva pristupa u razmatranju redundanse, postoje slučajevi kada nije moguće jasno izdvojiti redundansu, odnosno gde je bitan kvalitet upravljanja redundansom. U takvim slučajevima redundansu je opravdano razmatrati sa *upravljačke* tačke gledišta. Na primer, to su slučajevi gde se traži tačnost odnosno preciznost zadanog pokreta, zadaci sa stepenom prvenstva, primena koncepta distribuiranog pozicioniranja, pojava algoritamskih singulariteta itd. U daljem tekstu predstavljeni su postupci razrešenja redundanse prevashodno sa kinematičke tačke gledišta i to na nivou generalisanih koordinata, generalisanih brzina i ubrzanja primenom postupka optimizacije, [10], [18], [19].

6.2 Rešenje redundanse primenom optimizacije kriterijuma po generalisanim koordinatama

Neka je poznat kinematički model koji dat je sledećim izrazom

$$\bar{q}^i(t) = f^i(q^1, q^2, \dots, q^n), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.1)$$

gde je

$$\{\bar{q}\} = (\bar{q}^1, \bar{q}^2, \dots, \bar{q}^m)^T, \quad m \leq 6. \quad (6.2)$$

Generalno postoje dva načina da se reši redundantni kinematički problem. Prvi način se sastoji u tome da se uvede $l = n - m$ dopunskih veza između generalisanih koordinata (q^1, q^2, \dots, q^n) tj.,

$$f^v(q^1, q^2, \dots, q^n) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, l = n - m. \quad (6.3)$$

Sada je sistem zatvoren i moguće je rešiti dati sistem algebarskih jednačina, odnosno rešiti inverzni kinematički problem za dati robotski sistem. Tako je sada

$$\bar{q}^\lambda(t) = f^\lambda(q^1, q^2, \dots, q^n), \quad \lambda = 1, 2, \dots, m, \quad (6.4)$$

$$0 = f^\lambda(q^1, q^2, \dots, q^n), \quad \lambda = m + 1, m + 2, \dots, n. \quad (6.5)$$

Jedan od načina rešavanja prethodnog problema jeste linearizacija u okolini radne tačke tj.:

$$\dot{\bar{q}}^i(t) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.6)$$

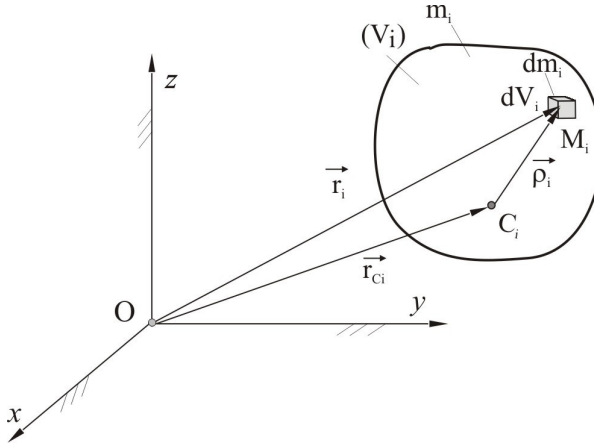
ili

$$\{\dot{\bar{q}}(t)\} = \left[\frac{\partial f^i}{\partial q^\alpha} \right] \{\dot{q}\} = [J_{OS}(q)] \{\dot{q}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (6.7)$$

i diferenciranjem izraza (6.3) po vremenu:

7.3 Kinetička energija robotskog sistema

Razmatramo robotski sistem sa n segmenata $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ koji ima oblik otvorenog kinematičkog lanca bez grananja. Diferencijal kinetičke energije robotskog segmenta (V_i) , mase m_i , iznosi (vidi sl. 7.6)



Slika 7.6

$$dE_{k(i)} = \frac{1}{2} dm_i v_{M_i}^2, \quad (7.92)$$

gde je brzina unutrašnje tačke M_i elementarne zapremine dV_i , kojoj odgovara elementarna masa dm_i , jednaka (C_i -centar inercije segmenta (V_i) , $\bar{\omega}_i$ - ugaona brzina segmenta (V_i)):

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_i = \vec{v}_{C_i} + \bar{\omega}_i \times \vec{\rho}_i. \quad (7.93)$$

Kinetička energija segmenta iznosi

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\vec{v}_{C_i} + \bar{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot (\vec{v}_{C_i} + \bar{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i. \quad (7.94)$$

Poslednji izraz može da se dovede na oblik

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} v_{C_i}^2 \int_{(V_i)} dm_i + (\vec{v}_{C_i} \times \bar{\omega}_i) \cdot \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i dm_i + \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\bar{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot (\bar{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i, \quad (7.95)$$

koji se, prema (7.5) i (7.7) (u izrazu (7.7) : $A \equiv C$), dalje transformiše na sledeći način:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i) \cdot (\bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i) dm_i \quad (7.96)$$

Kako je

$$(\bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i) \cdot (\bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i) = (\bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i) \cdot \{\bar{\omega}_i \times \bar{\rho}_i\} = -(\bar{\omega}_i) [\rho_i^d]^2 \{\bar{\omega}_i\}, \quad (7.97)$$

sledi da se (7.96) može napisati u formi:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} (\bar{\omega}_i) [J_{C_i}] \{\bar{\omega}_i\}, \quad (7.98)$$

gde je $[J_{C_i}]$ tenzor inercije segmenta (V_i) . Uzimajući u obzir poznate relacije (vidi (4.35) i (4.74)):

$$\bar{v}_{C_i} = \sum_{\alpha=1}^n \bar{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha, \quad (4.27)$$

$$\bar{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^n \bar{\Omega}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha, \quad (4.63)$$

izraz (7.98) dobija oblik

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha \right) \cdot \left\{ \sum_{\beta=1}^n \bar{T}_{\beta(i)} \dot{q}^\beta \right\} + \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^n \bar{\Omega}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha \right) [J_{C_i}] \left\{ \sum_{\beta=1}^n \bar{\Omega}_{\beta(i)} \dot{q}^\beta \right\}, \quad (7.99)$$

ili

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta(i)} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \quad (7.100)$$

gde je

$$a_{\alpha\beta(i)} = m_i (\bar{T}_{\alpha(i)}) \{\bar{T}_{\beta(i)}\} + (\bar{\Omega}_{\alpha(i)}) [J_{C_i}] \{\bar{\Omega}_{\beta(i)}\}. \quad (7.101)$$

Kinetička energija robotskog sistema iznosi

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{k(i)}, \quad (7.102)$$

ili

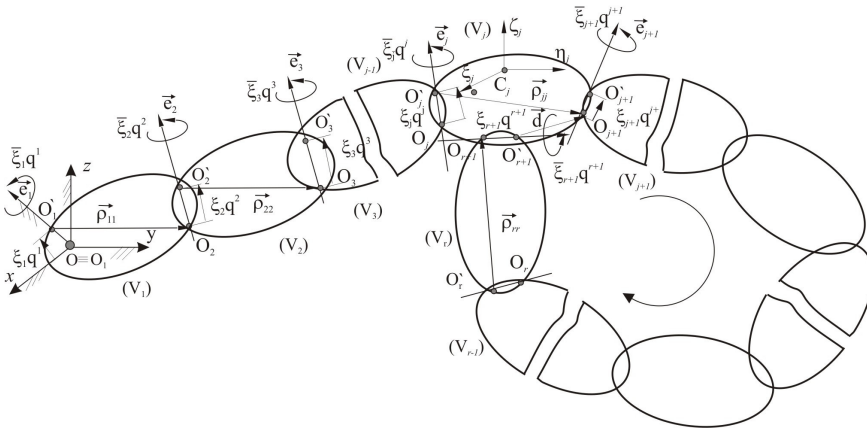
$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{i=1}^n a_{\alpha\beta(i)} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta. \quad (7.103)$$

Očigledno, kinetička energija razmatranog sistema (to je slučaj sa mehaničkim sistemima koji su podvrgnuti skleronomnim vezama) predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n$. Prema (7.92) i (7.94) sledi

11. Robotski sistem u obliku zatvorenog kinematičkog lanca i lanca sa grananjem

11.1 Zatvoreni kinematički lanac

Razmotrimo zatvoreni kinematički lanac (sl.11.1) sa r krutih segmenata, [29-34]. Relativno kretanje segmenta (V_α) u odnosu na segment $(V_{\alpha-1})$ određeno je koordinatom q^α čija je pozitivna orijentacija definisana vektorom \vec{e}_α (vidi [41]). Izuzetak od ovog pravila u redosledu odnosi se na segment (V_j) - taj segment vrši relativno kretanje i u odnosu na segment (V_r) . Osa u odnosu na koju segment (V_j) vrši translatorno (obrotno) kretanje u odnosu na (V_r) orijentisana je vektorom \vec{e}_{r+1} . Deo mehaničkog sistema koji se nalazi povezan u zatvoreni kinematički lanac orijentisan je kružnom strelicom (vidi sl.11.1) koja označava u odnosu na koje kruto telo posmatrano telo vrši relativno kretanje: U tom delu mehaničkog sistema prenosno kretanje vrši prvo telo na koje se nailazi pri kretanju od posmatranog tela u smeru suprotnom od smera pomenute kružne strelice.

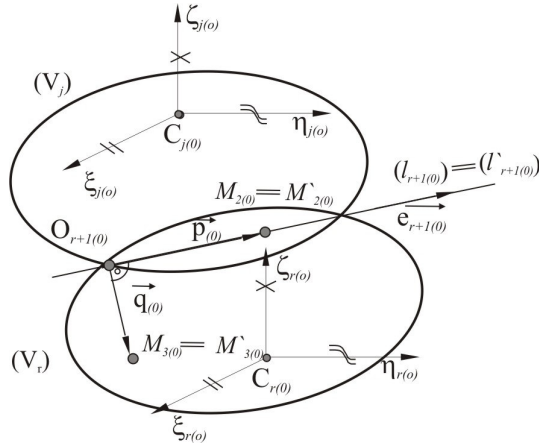


Slika. 11.1

Neka se posmatrani kinematički lanac nalazi u referentnoj konfiguraciji. Uočimo na telu (V_r) tri tačke M_1, M_2 i M_3 a na telu (V_j) takođe tri tačke M'_1, M'_2 i M'_3 , pri čemu važi (oznaka (0) odnosi se na referentnu konfiguraciju)

$$M_{\alpha(0)} = M'_{\alpha(0)}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

i osim toga (vidi sl. 11.2)



Slika. 11.2

$$\begin{aligned} M_{1(0)} &= O_{r+1(0)}, \\ M_{1(0)}, M_{2(0)} &\in (l_{r+1})_{(0)}, \\ M'_{1(0)}, M'_{2(0)} &\in (l'_{r+1})_{(0)}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

gde je (l_{r+1}) osa zgloba koji povezuje (V_j) i (V_r) , pri čemu je očigledno da važi

$$(l_{r+1})_{(0)} \equiv (l'_{r+1})_{(0)}. \quad (11.2)$$

Neka, osim toga, važi i

$$\overline{M_{1(0)}M_{3(0)}} \perp \overline{M_{1(0)}M_{2(0)}}. \quad (11.3)$$

Za „otvoren” lanac (konfiguracija u odsustvu zgloba $r+1$) uvodimo vektore

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2} &= \vec{p}, & \overline{M'_1M'_2} &= \vec{p}', \\ \overline{M_1M_3} &= \vec{q}, & \overline{M'_1M'_3} &= \vec{q}', \end{aligned} \quad (11.4)$$

pri čemu je

$$|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{p}'| = |\vec{q}'| = 1, \quad \vec{p} = \vec{e}_{r+1}. \quad (11.5)$$

U toj konfiguraciji biće očigledno ispunjeni uslovi (u prvoj fazi razmatranja pretpostavićemo da segmenti (V_j) i (V_r) mogu da zauzmu položaj kao da zgloba $r+1$ nema, pa se, u drugoj fazi, postavljaju uslovi kojima praktično ponovo “zatvaramo” lanac – ovi uslovi biće iskazani jednačinama veza):

$$\sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\beta\gamma,\alpha} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma - Q_\alpha + \sum_{v=1}^l \lambda_v \frac{\partial f^v}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha=1, \dots, n, \quad (11.100)$$

koje sa (11.85) sačinjavaju potpun skup diferencijalnih i algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $q^\alpha = q^\alpha(t)$ i $\lambda_v = \lambda_v(t)$. O određivanju generalisanih sila i koordinata metričkog tenzora bilo je ranije reći.

11.2 Kinematički lanac sa grananjem*

Da bi se proces formiranja diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema automatizovao potrebno je, posle “otvaranja” zatvorenih delova kinematičkog lanca i formiranja strukture topološkog drveta, da se izvrši numeracija segmenata kinematičkog lanca na sledeći način. Najpre se ustanovi, polazeći od segmenta koji vrši pravolinijsku translaciju ili rotaciju u odnosu na nepomično postolje, niz segmenata koji će formirati “stablo” topološkog drveta. Posle toga se formiraju “prve grane” topološkog drveta, polazeći od segmenata koji su zglobom vezani za segmente stabla. Zatim se formiraju “druge grane”, polazeći od segmenata vezanih za “prve grane” stabla. Postupak se nastavlja dalje, u zavisnosti od složenosti robotskog sistema formiranjem “trećih grana”, itd. Numeracija segmenata počinje od segmenta (V_1) zglobom vezanim za postolje i to na takav način da je indeks kojim je numerisan bilo koji segment, na putu od (V_1) prema vrhu “stabla” ili “grane”, veći od indeksa segmenta koji mu prethodi na tom putu.

Razmotrimo deo otvorenog kinematičkog lanca sa strukturom topološkog drveta (vidi sl. 11.3). Kao što je već rečeno, kruto telo koje se nalazi u podnožju stabla i vezano je cilindričnim (prizmatičnim) zglobom za nepomično postolje označeno je sa (V_1) i njemu pripada koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Ustanovimo direktan put (l_1) izmedju tela (V_1) i tela (V_{q_2}). Taj put prolazi samo jednom kroz tela koja se na njemu nalaze. Kako je rečeno, indeksi tela na tom putu su u rastućem poretku: (V_1), (V_2), ..., (V_j), (V_{p_1}), (V_{p_1+1}), ..., (V_{q_1}). Dalje, ustanovimo direktan put (l_2) izmedju tela (V_1) i tela (V_{q_2}). Taj put, takođe, prolazi samo jednom kroz tela koja se na njemu nalaze. Indeksi tela na tom putu su, takođe, u rastućem poretku: (V_1), (V_2), ..., (V_j), (V_{p_2}), (V_{p_2+1}), ..., (V_{q_2}). Ponavljajući taj postupak dolazimo do direktnog puta (l_s) izmedju tela (V_1) i tela (V_{q_s}). Indeksi tela na tom putu su u rastućem poretku: (V_1), (V_2), ..., (V_j), (V_{p_s}), (V_{p_s+1}), ..., (V_{q_s}). Na

* Preuzeto iz [35], iz dela monografije koji je napisao V. Čović.

telu (V_j), na kome se vrši grananje kinematičkog lanca (to jest, to telo je zglobovima vezano za više od dva tela) definisani su vektori položaja

$$\vec{\rho}_{jp_r} = \overline{O_j O'_{p_r}}, \quad r=1,2,\dots,s \quad (11.101)$$

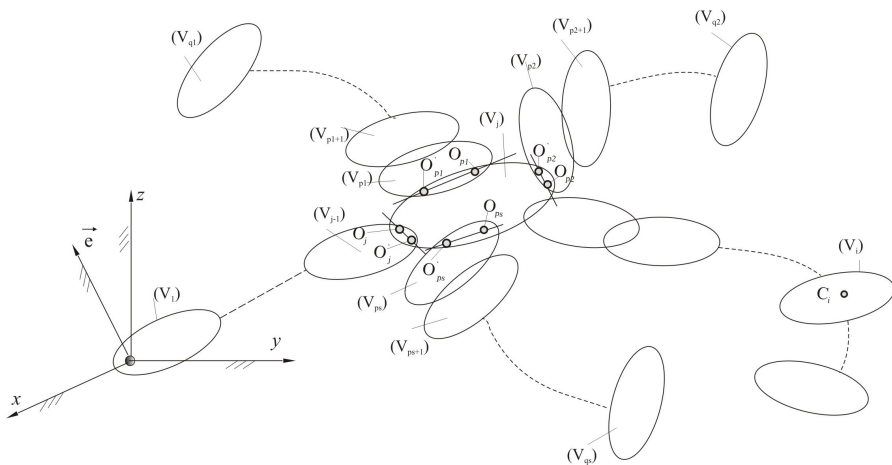
koji određuju vektor položaja $\vec{\rho}_{jj}$ na sledeći način ($\vec{\rho}_{jj}$ - vektor položaja koji figuriše u izrazu za vektor položaja centra inercije segmenta (V_i)):

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_{jj} &= \vec{\rho}_{jp_1} \text{ ako } (V_i) \in (l_1), \\ \vec{\rho}_{jj} &= \vec{\rho}_{jp_2} \text{ ako } (V_i) \in (l_2), \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{\rho}_{jj} &= \vec{\rho}_{jp_s} \text{ ako } (V_i) \in (l_s), \end{aligned} \quad (11.102)$$

pri čemu je numeracija izvedena tako da važi

$$j < p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < p_s < q_s. \quad (11.103)$$

Indeks i koji figuriše u (11.102) odnosi se na telo (V_i) (tj. na put od (V_1) do (V_i)).

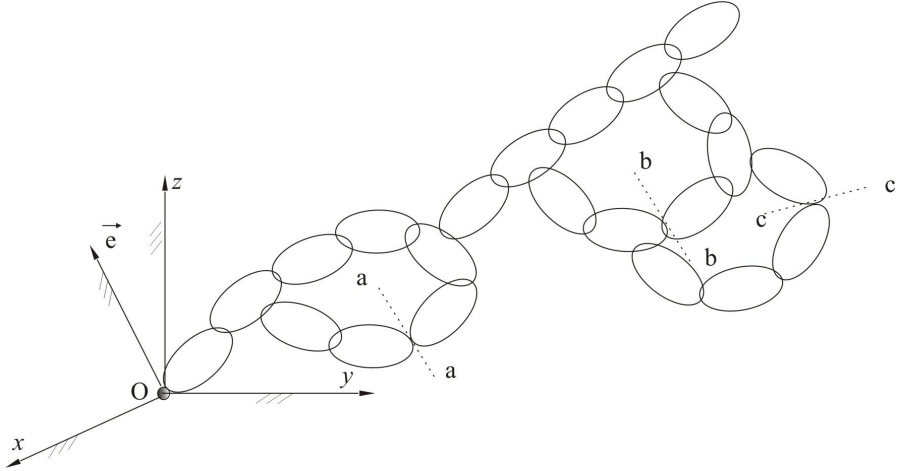


Slika 11.3

Izloženi postupak ilustrujemo sledećim primerom. Neka je (RS) dat u obliku zatvorenog kinematičkog lanca koji sačinjava skup od 22 segemenata, slika 11.4. Pretvorimo posmatrani lanac prekidanjem na mestima $a-a$, $b-b$ i $c-c$, u lanac sa strukturom topološkog drveta (vidi sl. 11.5). Uvedimo matrice

$$\{\eta_{(i)}\} \in R^{i \times 1}, \quad i=1,2,\dots,22 \quad (11.104)$$

na sledeći način. Element matrice $\eta_{k(i)}$ jednak je jedinici ako se na direktnom putu od segmenta (V_i) do segmenta (V_1) nalazi segment (V_k). Ukoliko se (V_k) ne nalazi na tom putu pomenuti element biće jednak nuli. Sve pomenute matrice su šematski prikazane u tabeli 11.1.



Slika 11.4

Vektor položaja centra inercije C_i proizvoljnog segmenta dat je izrazom

$$\overline{OC_i} = \bar{r}_i = \sum_{k=1}^i \eta_{k(i)} (\bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k) + \bar{\rho}_i. \quad (11.105)$$

odakle je

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\alpha(i)} &= \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \left[\sum_{k=\alpha}^i \eta_{k(i)} (\bar{\rho}_{kk} + \xi_k \bar{e}_k q^k) + \bar{\rho}_i \right] + \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \quad \forall \alpha \leq i, \\ \bar{T}_{\alpha(i)} &= 0 \quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \quad (11.106)$$

Takodje, u slučaju vektora \bar{r}_i , čiji su početak i kraj vezani za segment (V_i), važiće

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^\alpha} &= \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_\alpha \bar{e}_\alpha \times \bar{r}_i \quad \forall \alpha \leq i, \\ \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q^\alpha} &= 0 \quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \quad (11.107)$$

12. Uvod u teoriju upravljanja robotskim sistemima

12.1 Osnovna postavka problema

Evidentno je da zadatak upravljanja datim mehaničkim objektima (robotskim sistemima) predstavlja izazovan, složen i zahtevan zadatak. Pri tome, robotski sistem predstavlja *jedan nelinearni višestruko prenosni nestacionarni dinamički sistem*. Strukturno posmatrano, jedan ovakav sistem se sastoji iz upravljačkog sistema, koji je obično digitalnog tipa, i objekta, gde se pod objektom ovde podrazumeva robotski mehanizam zajedno sa aktuatorima. Upravljanje radom uočenog sistema treba da obezbedi da se stvarno ponašanje ili podudara ili da bude dovoljno blisko zadatom – željenom ponašanju tog sistema, [44],[45]. Upravljanje se može izabrati iz nekog višestranog skupa *dopustivih* i *ostvarljivih* upravljanja (vidi 12.2). U toku rada na sintezi upravljačkog sistema dobijaju se razne varijante sistema koje ispunjavaju uslove zadatka. Imajući u vidu ekonomske, energetske i druge uslove zadatka, na osnovu utvrđenih merila, poređenjem varijanti potrebno je pronaći sistem koji u zadatom smislu najbolje izvršava postavljeni zadatak, koji je *optimalan u tom smislu*. Posebno, teorija optimalnog upravljanja je nastala sintezom mnogih istraživanja koja su se, u svom začetku, razvijale kao zasebne grane u specijalnim tehničkim disciplinama, pri čemu je centralno mesto u korišćenim metodama zauzimao klasični varijacioni račun, [46].

Zadatak upravljanja robotskim sistemom se može iskazati i na sledeći način: *neophodno je obezbediti takvu promenu upravljačkih veličina tako da završni uređaj robotskog sistema ostvari zahtevano kretanje u prostoru*.

Samo projektovanje sistema upravljanja može se pojednostavljeno predstaviti u tri faze: upoznavanje sa fizičkim sistemom koji se razmatra, modeliranje, specifikacija upravljačkih zahteva (stabilnost, regulacija (poziciono upravljanje), praćenje trajektorija, (upravljanje kretanjem), optimizacija). Pri tome, jedna od najvažnijih osobina u upravljačkom sistemu jeste stabilnost istog (gde se najčešće primenjuje tzv. *Lyapunov-ska teorija stabilnosti* i *ulazno – izlazna (input – output) teorija stabilnosti*).

Takođe, pitanje određivanja egzaktnog modela predstavlja vrlo značajan zadatak u okviru projektovanja upravljačkog sistema robota. Pri tome, svaki sastavni deo robotskog sistema (mehanički sklop, senzor, aktuator, upravljački sistem (regulator)) može se uspešno modelovati na osnovu kataloških podataka, u matematičkom obliku ili u funkcionalnom obliku. Postoje u praksi ograničenja u postupku modeliranja i to realnim mogućnostima sa jedne strane i potrebama sa druge strane. Modeli se mogu podeliti prema više kriterijuma tako da uočavamo: *eksterne* (na osnovu mesta modela u hijerarhijskom upravljanju) i *interne* (sama struktura modela - linearni/nelinearni, stacionarni/nestacionarni

itd.), po načinu realizacije: *parametarske* (konvencionalni analitički i numerički modeli, standardna linearna regresija, sigmoidalne neuronske mreže) i *neparametarske* (metoda n najbližih suseda, lokalno težinska regresija iterativno upravljanje, itd.).



Slika 12.1

Ukoliko robotski sistem ima n stepeni slobode (na primer, dat u vidu otvorenog kinematičkog lanca bez grananja), pokazuje se da (q^i, \dot{q}^i) , $i=1,2,3,\dots,n$ određuju jednoznačno stanje robotskog sistema u datom trenutku vremena, tako da robotski sistem, prema tome, ima $2n$ veličina stanja, (sl.12.1). Matematički model robotskog sistema sa n stepeni slobode se može predstaviti sledećom vektorskom diferencijalnom jednačinom

$$[a(q)]\ddot{q} + [b(q, \dot{q})]\dot{q} = Q, \quad Q = Q^a + Q^c + Q^b + Q^g, \quad (12.1)$$

odnosno u kondezovanom obliku

$$[a(q)]\ddot{q} + c(q, \dot{q}) = Q^a(q, \dot{q}, t), \quad (12.2)$$

gde su $q \in \mathbb{R}^n, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ - vektor generalisanih koordinata robotskog sistema, odnosno vektor generalisanih brzina robotskog sistema respektivno; $Q^g \in \mathbb{R}^n, Q^c \in \mathbb{R}^n, Q^b \in \mathbb{R}^n, Q^a \in \mathbb{R}^n$ - generalisane sile od sila teže, od sila u oprugama, sila viskozno trenja, sistema pogonskih sila respektivno. Sa $[b(q, \dot{q})] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ označena je matrica čiji su elementi određeni sledećim izrazom

$$b_{\gamma\alpha}(q, \dot{q}) = \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta, \gamma} \dot{q}^\beta, \quad \gamma, \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (12.3)$$

Jednačinu (12.1) možemo predstaviti i na sledeći način

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ [a(q)]^{-1} \{ Q^a(q, \dot{q}, t) - c(q, \dot{q}) \} \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Ako se uvede vektor stanja $x = (q, \dot{q})^T$, i vektor upravljanja $u = Q^a(q, \dot{q}, t)$ onda se odgovarajuća vektorska *jednačina stanja* datog robotskog sistema može napisati u sledećem obliku (takođe, vidi odgovarajuće primere u zbirci [4]):

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad (12.5)$$

gde su

$$A(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -[a(q)]^{-1} c(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ [a(q)]^{-1} \end{bmatrix}. \quad (12.6)$$

Ako se uzme u obzir i odgovarajući kinematički model robotskog sistema

$$\bar{q} = f(q), \quad (12.7)$$

tj.

$$\dot{\bar{q}} = [\partial f / \partial q] \dot{q} = [J(q)] \dot{q}, \quad (12.8)$$

i uvede vektor izlaza $y = [y_1, y_2]^T = [\bar{q}, \dot{\bar{q}}]^T$ moguće je definisati i tzv. *jednačinu izlaza* robotskog sistema u sledećem obliku

$$y = C(x), \quad (12.9)$$

gde je matrica $C(x) = [f(q) \quad [J(q)] \dot{q}]^T$.

Takođe, nekada je potrebno u cilju primene savremenih metoda optimizacije na kretanje posmatranog mehaničkog sistema prikazati isti u obliku sistema diferencijalnih jednačina prvog reda u tzv. *normalnom obliku* odnosno odgovarajućih *kanonskih jednačina*. Naime, u delu 8.3 prikazane su diferencijalne jednačine kretanja robotskog sistema u *kontravarijantnom obliku* kao (8.100)

$$\ddot{q}^\delta + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = Q^\delta, \quad \alpha, \beta, \delta = 1, 2, \dots, n,$$

gde su (8.99)

$$Q^\delta = \sum_{\gamma=1}^n a^{\gamma\delta} Q_\gamma,$$

i odgovarajući Kristofelovi simboli druge vrste (8.101)

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \sum_{\gamma=1}^n a^{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma},$$

pri čemu veličine $a^{\alpha\beta}$ predstavljaju *kontravarijantne koordinate* osnovnog metričkog tenzora. Sistem (8.100) od n diferencijalnih jednačina drugog reda može se zameniti sa sistemom od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^i &= \dot{q}^\delta \\ \ddot{x}_2^i &= \ddot{q}^\delta = -\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + Q^\delta, \quad i, \alpha, \beta, \delta = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (12.10)$$

gde su za veličine stanja uzete generalisane koordinate $x_1^i = q^\delta$, $i, \delta = 1, 2, \dots, n$ i generalisane brzine $\dot{x}_2^i = \dot{q}^\delta$, $i, \delta = 1, 2, \dots, n$. Ove jednačine su u najvećem broju slučajeva *autonomne* (desne strane ne zavise eksplicitno od vremena) tako da se u tom slučaju početni trenutak t_0 može proizvoljno izabrati. Diferencijalne jednačine kretanja robotskog sistema se mogu dati u kanonskom obliku kao sistem od $2n$ tzv. Hamiltonovih jednačina

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.11)$$

gde q^i (generalisane koordinate), i p_i (generalisani impulsi) predstavljaju Hamiltonove fazne promenljive (veličine stanja). U rešavanju pojedinih praktičnih zadataka kanonske jednačine su se pokazale podesnije od Langraževih jednačina druge vrste zbog očuvanja kovarijantnog karaktera poslednjih n jednačina u izrazu (12.11). Pri tome su

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12.12)$$

gde je sa L označen Langranžijan sistema

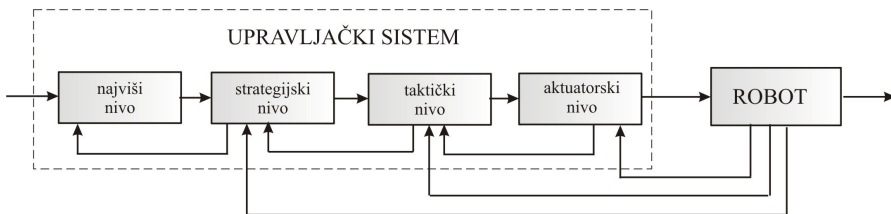
$$L(q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - \Pi(q). \quad (12.13)$$

Sa Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ označene su nekonzervativne upravljačke sile; $Q = Q(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $\Pi(q)$ predstavlja potencijalnu energiju robotskog manipulatora od dejstva gravitacionih sila; sa $E_k(q, \dot{q})$ je označena kinetička energija robotskog sistema. Hamiltonian $H(p, q)$ koji predstavlja Ležandrovu transformaciju Langranžijana L , dat je u formi

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}). \quad (12.14)$$

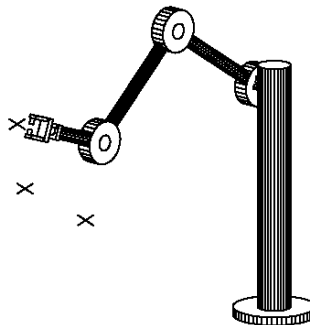
Upravljački sistem robota je uopšteno gledano, hijerarhijski organizovan, pri čemu svaki viši nivo priprema zadatak i upravlja radom nižeg nivoa, (sl.12.2). Najniži nivo predstavlja *aktuatorski (izvršni) nivo* koga čine servoupravljački aktuatori. Naredni nivo hijerarhijskog upravljanja predstavlja *taktički nivo* upravljanja gde se razmatraju i uočavaju veze između pojedinih delova robotskog sistema i vrši planiranje odnosno raspodela kretanja na podsisteme zglobova. Na ovom nivou se rešava tzv. *inverzni zadatak kinematike* tako da se određuju kretanja zglobova $q(t)$ i često se ovo upravljanje naziva i *kinematičko upravljanje*. Sledeći, viši nivo upravljanja jeste *strategijski nivo* gde se vrši

planiranje kretanja robotskog sistema. Pri tome zadaci koji se definišu na ovom nivou su opisne prirode, pri čemu se zadatak rasčlanjuje na elementarne funkcionalne pokrete. U zavisnosti od organizacije ovog nivoa razlikujemo *nadgledano upravljanje* (realizacija se odvija pod stalnim nadzorom) i *nenadgledano upravljanje* (bez nadzora tokom izvršenja). *Najviši nivo* upravljanja je još uvek bez univerzalno prihvaćenog naziva i odnosi se na prihvatanje zadatka uz sposobnost logičkog rasudjivanja da analizira sam zadatak i odredi odgovarajuće operacije za izvršenje postavljenog zadatka. Najčešće ovaj nivo sadrži elemente veštačke inteligencije tj. odgovarajući ekspertski sistem, ili neuronske mreže, primena fazi logike, genetskih algoritama. Time se omogućava da na ovom nivou sistem upravljanja ima odgovarajuće karakteristike koje su bitne na ovom nivou: manipulacija velikim bazama znanja, simboličko procesiranje, sposobnost paralelnog procesiranja itd.



Slika 12.2

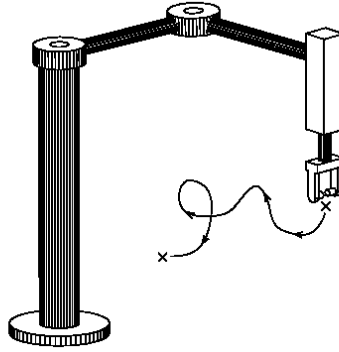
Na aktuatorskom nivou upravljanja uočavaju se dva osnovna tipa upravljanja i to upravljanje od tačke do tačke (*point-to-point control*) i upravljanje kontinualnim kretanjem (*continuous path control*). Prvim tipom upravljanja rešavaju se na primer, sledeći zadaci: tačkasto zavarivanje, prenošenje materijala itd. gde se robotskom sistemu zadaju niz različitih položaja u koje on mora redom da dođe, (sl.12.3), [47],[48].



Slika 12.3

Zadatke farbanja, pisanja, šavnog zavarivanja realizujemo primenom upravljanja kontinualnim kretanjem gde robotski sistem tj. završni uređaj treba

da prati zadatu putanju u prostoru uz propisanu brzinu završnog uređaja, (sl. 12.4),[47].



Slika 12.4

12.2 Upravljanje. Dopustivo upravljanje*

U opštem slučaju neka je stanje sistema određeno vektorom x u m – dimenzionom euklidskom prostoru stanja (faznom prostoru) V_m , pri čemu su koordinate stanja x^i ($i=1,2,\dots,m$) elementi vektora x . Ako je razmatrani sistem mehanički sa n stepena slobode njegovo kretanje opisano je u prostoru stanja V_m ($m=2n$) sistemom od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda. Ukoliko uporedo sa prostorom V_m postoji r – dimenzioni vektorski prostor U_r vektora u čiji elementi u_α ($\alpha=1,2,\dots,r$), figurišu u diferencijalnim jednačinama kretanja sistema, njihovim izborom na odgovarajući način može da se utiče na promenu stanja sistema, tj. može da se upravlja kretanjem sistema. Takav vektor se zove *vektor upravljanja* a njegove koordinate u_α *funkcije upravljanja* ili, samo, *upravljanja*. U opštem slučaju, upravljanja su ograničena kao posledica nekih nametnutih uslova ili realnih mogućnosti upravljačkih sistema. Neka je G_u neka oblast prostora U_r određena tim ograničenjima. Upravljanja koja ispunjavaju uslov

$$u \in G_u \subset U_r \quad (12.15)$$

nazivaju se *dopustiva upravljanja*, a oblast *skup dopustivih upravljanja*. Oblast G_u može da bude otvoren ili zatvoren skup, konstantan ili promenljiv.

* (Vuković,[49])

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

531.1/.3(075.8)
007.52:517.93(075.8)

ЧОВИЋ, Вукман, 1943-2011

Mehanika robota / Vukman Čović, Mihailo Lazarević. - 2. izd. - Beograd : Univerzitet, Mašinski fakultet, 2021 (Beograd : Planeta print). - 232 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200. - Napomene i bibliografske reference uz tekst. - Bibliografija: str. 229-232.

ISBN 978-86-6060-100-3

1. Лазаревић, Михаило, 1964- [аутор]
а) Роботи -- Механика б) Механика крутих тела

COBISS.SR-ID 55000329