ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Серия «Математика»
2023. Т. 43. С. 31—47

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.968.72
MSC 41A05, 41A15, 65D30, 65D32
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.31

Задача определения ядер в двумерной системе уравнений вязкоупругости

Д. К. Дурдиев[1,2]**, А. А. Болтаев**[1,3]✉

[1] Институт математики Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
[2] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
[3] Северо-Кавказский центр математических исследований Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Российская Федерация
✉ asliddinboltayev@mail.ru

Аннотация. Для двумерной системы интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости в изотропной среде изучаются прямая и обратная задачи определения вектора напряжения и скорости частиц, а также диагональной матрицы эредитарности. Вначале система двумерных уравнений вязкоупругости была преобразована в систему линейных уравнений первого порядка. Таким образом, составленная система интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с помощью собственной матрицы была приведена к нормальной форме относительно временной и одной из пространственных переменных. Затем с помощью преобразования Фурье по другой пространственной переменной и интегрированием по характеристикам уравнений на основе начальных и граничных условий она была заменена системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, эквивалентной исходной задаче. Приведена теорема существования и единственности решения прямой задачи. Для решения обратной задачи с использованием интегральных уравнений прямой задачи и дополнительных условий построена замкнутая система интегральных уравнений для неизвестных функций и их некоторых линейных комбинаций. Далее к этой системе применяется метод сжимающих отображений (принцип Банаха) в классе непрерывных функций с экспоненциальной весовой нормой. Таким образом, доказывается глобальная теорема существования и единственности решений поставленных задач. Доказательство теорем носит конструктивный характер, т. е. с помощью полученных интегральных уравнений, например методом последовательных приближений, может быть построено решение задач.

Ключевые слова: гиперболическая система, начально-краевая задача, система уравнений вязкоупругости, интегральное уравнение, принцип сжимающих отображений

Благодарности: Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 075-02-2022-896).

Ссылка для цитирования: Д. К. Дурдиев, А. А. Болтаев Задача определения ядер в двумерной системе уравнений вязкоупругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 43. С. 31–47.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.31

Research article

The Problem of Determining Kernels in a Two-dimensional System of Viscoelasticity Equations

Durdimurod K. Durdiev[1,2], **Asliddin A. Boltaev**[1,3]✉

[1] Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Toshkent, Uzbekistan
[2] Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
[3] North-Caucasus Center for Mathematical Research of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation
✉ asliddinboltayev@mail.ru

Abstract. For a two-dimensional system of integro-differential equations of viscoelasticity in an isotropic medium, the direct and inverse problems of determining the stress vector and particle velocity, as well as the diagonal hereditarity matrix, are studied. First, the system of two-dimensional viscoelasticity equations was transformed into a system of first-order linear equations. The thus composed system of first-order integro-differential equations with the help of its special matrix was reduced to a normal form with respect to time and one of the spatial variables. Then, using the Fourier transform with respect to another spatial variable and integrating over the characteristics of the equations based on the initial and boundary conditions, it was replaced by a system of Volterra integral equations of the second kind, equivalent to the original problem. An existence and uniqueness theorem for the solution of the direct problem is given. To solve the inverse problem using the integral equations of the direct problem and additional conditions, a closed system of integral equations for unknown functions and some of their linear combinations is constructed. Further, the contraction mapping method (Banach principle) is applied to this system in the class of continuous functions with an exponential weighted norm. Thus, we prove the global existence and uniqueness theorem for the solutions of the stated problems. The proof of the theorems is constructive, i.e. with the help of the obtained integral equations, for example, by the method of successive approximations, a solution to the problems can be constructed.

Keywords: hyperbolic system, initial-boundary problem, system of viscoelasticity equations, integral equation, contraction mapping principle

Acknowledgements: The research of the second author was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 075-02-2022-896).

For citation: Durdiev D. K., Boltaev A. A. The Problem of Determining Kernels in a Two-dimensional System of Viscoelasticity Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 43, pp. 31–47. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.31

1. Введение

В настоящей работе для системы уравнений теории упругости с учётом вязкоупругих свойств, написанной в двумерном случае в напряжениях и скоростях частиц как система уравнений первого порядка, изучаются прямая и обратная задачи. При этом прямая задача есть начально-краевая задача для этой системы, а в обратной задаче к определению подлежат неизвестные функции времени, отвечающие за вязкость изотропного плоского тела.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через σ_{ij} проекцию на ось x_i напряжения, действующего на площадку с нормалью, параллельной оси x_j, а $\overline{u}_i$ — проекция на ось x_i вектора смещения частицы. Согласно закону Гука, для вязкоупругих сред напряжения с деформациями связаны формулами [1]:

$$\sigma_{ij}(\overline{x},t) = \mu\left[\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right] + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div}\overline{u} +$$

$$+\int_0^t K_{ij}(t-\tau)\left[\mu\left[\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right] + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div}\overline{u}\right](\overline{x},\tau)\,d\tau,\ \ i,j=1,2, \quad (1.1)$$

здесь $\mu = \mu(x_2), \lambda = \lambda(x_2)$ — коэффициенты Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера, $K_{ij}(t)$ — функции, отвечающие за вязкость среды, при этом $K_{ij} = K_{ji}$.

Уравнения движения частиц плоского тела при отсутствии внешних сил имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, i=1,2, \quad (1.2)$$

где $\rho = \rho(x_2)$ — плотность среды.

Обратим внимание на то, что (1.1) могут быть рассмотрены как интегральные уравнения Вольтерра второго рода относительно выражения $\mu\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div}\overline{u}$. При каждой фиксированной паре (i,j) решая эти уравнения, получим

$$\sigma_{ij}(\overline{x},t) = \mu\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div}\overline{u} + \int_0^t r_{ij}(t-\tau)\sigma_{ij}(\overline{x},\tau)\,d\tau, \quad (1.3)$$

где r_{ij} — резольвенты ядер K_{ij} и они связаны между собой интегральными соотношениями [3]:

$$r_{ij}(t) = -K_{ij}(t) - \int_0^t K_{ij}(t-\tau) r_{ij}(\tau) d\tau, \quad i,j = 1,2. \tag{1.4}$$

Из условия $K_{ij} = K_{ji}$ следуют $r_{ij} = r_{ji}$.

Дифференцируя (1.3) по t и вводя обозначения $u_i = \frac{\partial}{\partial t}\overline{u}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{ij}(\overline{x},t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \mathrm{div} u +$$
$$+ r_{ij}(0)\sigma_{ij}(\overline{x},t) + \int_0^t r'_{ij}(t-\tau)\sigma_{ij}\left(\overline{x},\tau\right) d\tau, \ i,j = 1,2. \tag{1.5}$$

С учётом этого система уравнений (1.1) и (1.2) относительно скорости u_i и напряжения σ_{ij} может быть описана в виде системы пяти интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Для удобства обозначая $x_1 =: x, \ x_2 =: y$, имеем

$$A\frac{\partial U}{\partial t} - B\frac{\partial U}{\partial x} - C\frac{\partial U}{\partial y} - DU = \int_0^t R(t-\tau)U(\overline{x},\tau)d\tau, \tag{1.6}$$

где $U = (u_1, u_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21})^*$, $*$ — знак транспонирования,

$$A = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{I}_{2\times 2} & \mathbf{O}_{2\times 3} \\ \mathbf{O}_{2\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2\times 2} & \mathbf{O}_{2\times 3} \\ \mathbf{O}_{3\times 2} & \mathrm{diag}\left(r_{11}(0), r_{22}(0), r_{12}(0)\right) \end{pmatrix},$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2\times 2} & \mathbf{O}_{2\times 3} \\ \mathbf{O}_{3\times 2} & \mathrm{diag}\left(r'_{11}, r'_{22}, r'_{12}\right) \end{pmatrix}, \quad r'_{ij} = r'_{ij}(t) = \frac{d}{dt}r_{ij}(t), \ i,j = 1,2,$$

где $I_{n\times n}$ — единичная матрица размерности $n\times n$, $\mathbf{O}_{n\times m}$ — матрица размерности $n\times m$, элементы которой равны нулю.

Система (1.6) может быть сведена к симметрической гиперболической системе [2] относительно переменных t и y. Для этого умножим (1.6) слева на A^{-1} и составим уравнение

$$|A^{-1}C - \nu I| = 0. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) имеет корни

$$\nu_1 = -\nu_2 = \nu_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \nu_3 = -\nu_4 = \nu_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \nu_5 = 0. \tag{1.8}$$

Здесь ν_s и ν_p определяют соответственно скорости поперечной и продольной сейсмических волн.

Теперь выбирем невырожденную матрицу $T(y,t)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$T^{-1}A^{-1}CT = \Lambda, \tag{1.9}$$

где Λ — диагональная матрица, в диагонали которой стоят собственные значения (1.8) матрицы $A^{-1}C$.

Из формулы (1.9) следует равенство

$$A^{-1}CT = T\Lambda,$$

которое означает, что столбец с номером i матрицы T является собственным вектором матрицы $A^{-1}CT$, отвечающим собственному значению ν_i. Прямые вычисления показывают, что матрица T, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, может быть выбрана следующим образом (не единственным образом):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)}} & \frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\mu\rho} & \sqrt{\mu\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор-функцию U равенством

$$U = T\vartheta.$$

Выполнив данную замену в уравнении (1.6) и после этого умножив полученное уравнение слева на $T^{-1}A^{-1}$, получим

$$I\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + B_1\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + C_1\vartheta = \int_0^t R_1(y, t-\tau)\vartheta(\overline{x}, \tau)d\tau, \tag{1.10}$$

где $B_1 = T^{-1}A^{-1}BT = (b_{ij})\,,\; C_1(y,t) = T^{-1}A^{-1}C\frac{\partial T}{\partial y} + T^{-1}DT = (c_{ij})\,,$

$$R_1(y,t) = T^{-1}A^{-1}RT = (\widetilde{r}_{ij})_{5\times 5}\,, \tag{1.11}$$

$\widetilde{r}_{ij} = \widetilde{r}_{ij}(y,t),\; i,j = \overline{1,5}\quad \widetilde{r}_{lp} = \widetilde{r}_{pl} = 0,\; l = 1,2,\; p = 3,4,5,\quad \widetilde{r}_{35} = \widetilde{r}_{45} = 0,\quad \widetilde{r}_{11} = -\widetilde{r}_{12} = -\widetilde{r}_{21} = \widetilde{r}_{22} = -\frac{r'_{12}(t)}{2},\quad \widetilde{r}_{ij} = -\frac{r'_{22}(t)}{2},\quad i,j = 3,4,$ $\widetilde{r}_{53} = \widetilde{r}_{54} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(r'_{22}(t) - r'_{11}(t)\right),\quad \widetilde{r}_{55} = -r'_{11}(t).$

Система (1.10) удобна в том смысле, что она распалась относительно производных по t и y и оказывается зацепленной только через $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ и ϑ. Компоненты ϑ_i вектор - функции ϑ называются римановыми инвариантами системы (1.6). Они остаются постоянными вдоль характеристок системы определенной формулой (1.10) в том случае, когда $B_1 = 0, C_1 = 0, R_1 = 0$.

2. Постановка задач и исследование прямой задачи

Рассмотрим систему уравнений (1.10) в области

$$D = \{(x, y, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < H, t > 0\}, \quad H = const,$$

с границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$: $\Gamma_0 = \{(x, y, t) : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq H, t = 0\}$,

$\Gamma_1 = \{(x, y, t) : x \in \mathbb{R}, y = 0, t > 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, t) : x \in \mathbb{R}, y = H, t > 0\}$.

Для этой системы **прямую задачу** поставим следующим образом: определить решение системы уравнений (1.10) в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ по данным на Γ:

$$\vartheta_i\big|_{\Gamma_0} = \varphi_i(x, y),\ i = \overline{1,5}, \tag{2.1}$$

$$\vartheta_i\big|_{\Gamma_1} = \psi_i(x, t),\ i = 1, 3, \quad \vartheta_i\big|_{\Gamma_2} = \psi_i(x, t),\ i = 2, 4. \tag{2.2}$$

Известно, что задача (1.10), (2.1), (2.2) поставлена корректно [2]. Предположим, что функции $\varphi_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$ финитны по x при каждом фиксированном y, t и обладают гладкостью до некоторой степени. Заметим, что класс функций, удовлетворяющих этим условиям, не пуст (см. например [8]).

Пусть $\widetilde{\Gamma}_i$ — проекция Γ_j на плоскость $y, t,\ j = 0, 1, 2$.

Обратная задача заключается в определении ненулевых компонентов матричного ядра R_1 в (1.10), если известны следующие условия:

$$\widetilde{\vartheta}_1\big|_{\Gamma_2,\ \xi=0} = \widetilde{h}_1(t), \quad \widetilde{\vartheta}_3\big|_{\Gamma_2,\ \xi=0} = \widetilde{h}_2(t), \quad \widetilde{\vartheta}_5\big|_{\Gamma_1,\ \xi=0} = \widetilde{h}_3(t), \tag{2.3}$$

где $\widetilde{\vartheta}_j(\xi, y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \vartheta_j(x, y, t) dx,\ j = \overline{1,4}$ — преобразования Фурье функций ϑ_j, ξ — параметр преобразования, $h_i(t)$ — заданные гладкие функции. При этом $r_{11}(0)$, $r_{12}(0)$, $r_{22}(0)$ считаются заданными. Тогда, как следует из формул (1.4), числа $K_{11}(0)$, $K_{12}(0)$, $K_{22}(0)$ становятся известны.

К настоящему времени достаточно широко изучены задачи определения ядер из одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка [3–6; 9–12; 14; 15; 17; 20]. Как правило, уравнения второго порядка выводятся из систем уравнений в частных производных первого порядка при некоторых дополнительных предположениях.

Рассматриваемое в данной работе основное уравнение (1.6) (или (1.10)) содержит интегральный член типа свёртки. Задачи Коши для наиболее общих уравнений с интегральным оператором свёрточного типа в банаховых пространствах изучены в работах [13;16]. Предложен новый подход построения обобщенных решений уравнений.

Обратная задача определения ядер интегральных членов из системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка общего вида с двумя независимыми переменными изучена в работе [5]. Получена теорема локального существования и глобальной единственности.

Представляется совершенно естественным изучение обратных задач об определении ядер интегральных членов системы интегро-дифференциальных уравнений проводить непосредственно в терминах самой системы. Настоящая статья является естественным продолжением этого круга задач и в известной мере обобщает результаты [5] на случай двумерной системы уравнений вязкоупругости (1.1), (1.2).

Из существования для системы (1.10) конечной области зависимости и финитности по x данных (2.1) и (2.2) следует финитность по x решений v_i задачи (1.10), (2.1) и (2.2). Тогда к равенствам (1.10), (2.1) и (2.2) можно применить преобразование Фурье по x. Обозначим $V_i(y,t) := \widetilde{\vartheta}_i(\xi,y,t)\Big|_{\xi=0}$. Прямые вычисления показывают, что $V(y,t) = (V_1, V_2, \dots, V_5)$ удовлетворяет уравнению

$$I\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial V}{\partial y} + C_1 V = \int_0^t R_1(y,\tau)V(y,t-\tau)d\tau, \tag{2.4}$$

а условиям (2.1), (2.2) соответствуют условия

$$V_i\big|_{\widetilde{\Gamma}_0} = \widetilde{\varphi}_i(y),\ i = \overline{1,5}, \tag{2.5}$$

$$V_i\big|_{\widetilde{\Gamma}_1} = \widetilde{\psi}_i(t),\ i = 1,3,\quad V_i\big|_{\widetilde{\Gamma}_2} = \widetilde{\psi}_i(t),\ i = 2,4, \tag{2.6}$$

где $\widetilde{\varphi}_i(y),\ i = \overline{1,5},\ \widetilde{\psi}_i(t),\ i = \overline{1,4}$ — образы Фурье соответствующих функций из (2.1), (2.2) при $\xi = 0$. Обозначим через D_H проекцию D на плоскость y, t. В дальнейшем будем рассматривать систему уравнений (2.4) в области $D_H \cup \widetilde{\Gamma}$ при условиях (2.5) и (2.6).

С целью дальнейших исследований введем в рассмотрение вектор-функцию $\omega(y,t) = \frac{\partial V}{\partial t}(y,t)$. Чтобы получить задачу для функции $\omega(y,t)$, подобной (2.4), (2.6) дифференцируем уравнение (2.4) и граничные условия (2.6) по переменной t, а условие при $t = 0$ найдем с помощью уравнений (2.4) и начальных условий (2.5). При этом получим

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \nu_i\frac{\partial \omega_i}{\partial y} + \sum_{j=1}^{5} c_{ij}(y)\omega_j(y,t) =$$

$$= \int_0^t \sum_{j=1}^5 \widetilde{r}_{ij}(y,\tau)\omega_j(y,t-\tau)d\tau + \sum_{j=1}^4 \widetilde{r}_{ij}(y,t)\widetilde{\psi}_j(y), \quad i=\overline{1,5}, \tag{2.7}$$

$$\omega_i(y,t)\big|_{t=0} = -\nu_i \frac{d\widetilde{\varphi}_i(y)}{dy} - \sum_{j=1}^5 c_{ij}(y)\widetilde{\varphi}_i(y) =: \Phi_i(y), \quad i=\overline{1,5}, \tag{2.8}$$

$$\omega_i(y,t)\big|_{y=0} = \frac{d\widetilde{\psi}_i(t)}{dt}, i=1,3, \quad \omega_i\big|_{y=H} = \frac{d\widetilde{\psi}_i(t)}{dt}, i=2,4. \tag{2.9}$$

Для функций ω_i дополнительные условия (2.3) выглядят как

$$\omega_1\big|_{\Gamma_2,\xi=0} = \frac{d\widetilde{h}_1(t)}{dt}, \quad \omega_3\big|_{\Gamma_2,\xi=0} = \frac{d\widetilde{h}_2(t)}{dt}, \quad \omega_5\big|_{\Gamma_1,\xi=0} = \frac{d\widetilde{h}_3(t)}{dt}. \tag{2.10}$$

Перейдем от равенств (2.7)–(2.9) к интегральным соотношениям для компонент вектора V с помощью интегрирования вдоль соответствующих характеристик уравнений системы (2.7). Напомним, что характеристики, отвечающие ν_s и ν_p, имеют положительный наклон, а характеристики, отвечающие $-\nu_s$ и $-\nu_p$, отрицательный наклон. Обозначим

$$\mu_1(y) = -\mu_2(y) = \int_0^y \tfrac{d\beta}{\nu_s(\beta)}, \quad \mu_3(y) = -\mu_4(y) = \int_0^y \tfrac{d\beta}{\nu_p(\beta)}, \quad \mu_5(y)=0.$$

Обратные функции к $t=\mu_i(y),\ i=1,2,3,4$ будем обозначать через $y=\mu_i^{-1}(t),\ i=1,2,3,4$. С помощью введенных функций уравнения характеристок, проходящих через точки (y,t) на плоскости переменных η,τ, можно записать в виде

$$\tau = t + \mu_i(\eta) - \mu_i(y), \quad i=1,2,3,4,5. \tag{2.11}$$

Рассмотрим произвольную точку $(y,t)\in D_H$ на плоскости переменных η,τ и проведем через нее характеристику i-го уравнения системы (2.3) до пересечения в области $\tau\le t$ с границей $\widetilde{\Gamma}$. Точку пересечения обозначим через (y_0^i,t_0^i). Для первого и третьего уравнений эта точка лежит либо на $\widetilde{\Gamma}_0$, либо на $\widetilde{\Gamma}_1$, а для второго и четвёртого уравнений — либо на $\widetilde{\Gamma}_0$, либо на $\widetilde{\Gamma}_2$. Интегрируя уравнения системы (2.7) вдоль соответствующих характеристок от точки (y_0^i,t_0^i) до точки (y,t), находим

$$\omega_i(y,t) = \omega_i(y_0^i,t_0^i) + \int_{t_0^i}^t \Bigg[\sum_{j=1}^4 (-c_{ij}(\eta)\omega_j(\eta,\tau) + \widetilde{r}_{ij}(\eta,\tau)\widetilde{\varphi}_j(\eta)) +$$

$$+ \int_0^\tau \sum_{j=1}^4 \widetilde{r}_{ij}(\eta,\alpha)\omega_j(\eta,\tau-\alpha)d\alpha\Bigg]\Bigg|_{\eta=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(y)]} d\tau, \quad i=\overline{1,5}. \tag{2.12}$$

Определим в (2.12) t_0^i. Она зависит от координат точки (y,t). Нетрудно заметить, что $t_0^i(y,t)$ имеет вид

$$t_0^i(y,t) = \begin{cases} t-\mu_i(y), & t \geq \mu_i(y), \\ 0, & 0 < t < \mu_i(y), \end{cases} \quad i = 1,3,$$

$$t_0^i(y,t) = \begin{cases} t-\mu_i(y)+\mu_i(H), & t \geq \mu_i(y), \\ 0, & 0 < t < \mu_i(y), \end{cases} \quad i = 2,4, \quad t_0^5(y,t) = 0.$$

Тогда из условия того, что пара (y_0^i, t_0^i) удовлетворяет уравнению (2.12), следует

$$y_0^i(y,t) = \begin{cases} 0, & t \geq \mu_i(y), \\ \mu_i^{-1}\left(\mu_i(y)-t\right), & 0 < t < \mu_i(y), \end{cases} \quad i = 1,3,$$

$$y_0^i(y,t) = \begin{cases} H, & t \geq \mu_i(y), \\ \mu_i^{-1}\left(\mu_i(y)-t\right), & 0 < t < \mu_i(y), \end{cases} \quad i = 2,4, \quad y_0^5(y,t) = y.$$

Свободные члены интегральных уравнений (2.12) определяются через начальные и граничные условия (2.8) и (2.9) следующим образом:

$$\omega_0^i(y_0^i, t_0^i) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{d\widetilde{\psi_i}}{dt}\left(t-\mu_i(y)\right), & t \geq \mu_i(y), \\ \Phi_i\left(\mu_i^{-1}\left(\mu_i(y)-t\right)\right), & 0 < t < \mu_i(y), \end{cases} & i = 1,3, \\ \begin{cases} \frac{d\widetilde{\psi_i}}{dt}\left(t-\mu_i(y)+\mu_i(H)\right), & t \geq \mu_i(y), \\ \Phi_i\left(\mu_i^{-1}\left(\mu_i(y)-t\right)\right), & 0 < t < \mu_i(y), \end{cases} & i = 2,4, \\ \Phi_5(y) & i = 5. \end{cases}$$

Пусть выполнены условия

$$\widetilde{\varphi}_i(0) = \widetilde{\psi}_i(H_0), \ H_0 = 0, \ i = 1,3, \quad H_0 = H, \ i = 2,4, \tag{2.13}$$

$$-\lambda_i \left.\frac{d\widetilde{\varphi}_i(y)}{dy}\right|_{y=H_0} - \sum_{j=1}^{5} c_{ij}(0)\widetilde{\varphi}_i(0) = \left.\frac{d\widetilde{\psi}_i(t)}{dt}\right|_{t=0}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{2.14}$$

Здесь и далее значения функций $\widetilde{\psi}_i$, $\frac{d\widetilde{\psi}_i(t)}{dt}$ при $t = 0$ и функций $\widetilde{\varphi}_i$, $\frac{d\widetilde{\varphi}_i(y)}{dy}$ при $y = 0$ и $y = H$ понимаются как предел в этих точках при стремлении аргумента с той стороны точки, где эти функции определены.

Предположим, что все заданные функции, входящие в (2.12), являются непрерывными функциями своих аргументов в D_H. Тогда эта система уравнений является замкнутой системой интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода с непрерывными ядрами и свободными членами. Как обычно, такая система имеет единственное решение в ограниченной подобласти $D_{HT} = \{(y,t) : 0 < y < H, \ 0 < t < T\}$, $T > 0$ — некоторое фиксированное число, области D_H.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x,y)$, $\psi(x,t)$, входящие в (2.1), (2.2), являются финитными по x при каждом фиксированном y, t. Кроме того, $\rho(y) \in$*

$C^1[0,H]$, $\mu(y) \in C^1[0,H]$, $\lambda(y) \in C^1[0,H]$, $\widetilde{\varphi}(y) \in C^1[0,H]$, $\widetilde{\psi}(t) \in C^1[0,T]$, $\rho(y) > 0$, $\lambda(y) > 0$, $\mu(y) > 0$, $K_{ij}(t) \in C^1[0,T]$, $i,j = 1,2$ и выполнены условия (2.13) и (2.14). Тогда в области D_{HT} существует единственное решение задачи (2.7)–(2.9).

3. Исследование обратной задачи. Вывод эквивалентной системы интегральных уравнений

Рассмотрим произвольную точку $(y,0) \in \widetilde{\Gamma}_0$ и проведем через нее характеристики (2.11) до пересечения с боковыми границами области D_H. Интегрируя первую, третью и пятую компоненты уравнения (2.7), используя данные (2.10), находим

$$\omega_i(y,0) = \omega_i(0,t_1^i) + \int_0^{t_1^i} \sum_{j=1}^{4} \left(c_{ij}\omega_j(\eta,\tau) + \widetilde{r}_{ij}\widetilde{\varphi}_j(\eta)\right)\Big|_{\eta=\mu_i^{-1}[\tau+\mu_i(y)]} d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1^i}\int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{4} \widetilde{r}_{ij}(\eta,\alpha)\omega_j(\eta,\tau-\alpha)d\alpha\Big|_{\eta=\mu_i^{-1}[\tau+\mu_i(y)]} d\tau, \quad i = 1,3,5, \quad (3.1)$$

где $t_1^i = -\mu_i(y)$, $i = 1,3$, $t_1^5 = t$.

Учитывая в (3.1) начальные условия (2.8), дифференцируем (3.1) по y для $i = 1,3$ и по t для $i = 5$. После несложных вычислений приходим к интегральным уравнениям:

$$r'_{11}(t) = M_1^3 P_3 + M_1^5 P_5 + M_1^4 \int_0^t \left(r'_{22}(\tau) - r'_{11}(\tau)\right)[\omega_3+\omega_4](y,t-\tau)d\tau +$$

$$+M_1^1\int_0^t r'_{22}(\tau)\frac{\partial}{\partial y}[\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4](y)d\tau + M_1^2\int_0^t r'_{22}(\tau)\frac{d}{dt}\left[\widetilde{h}_2+\widetilde{\psi}_4\right](t-\tau)d\tau +$$

$$+M_1^1\int_0^t\int_0^{\tau} r'_{22}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}[\omega_3+\omega_4](y,\tau-\alpha)d\alpha d\tau - M_1^5\int_0^t r'_{11}(\tau)\omega_5(\eta,t-\tau)d\tau +$$

$$+M_1^3\int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left[c_{33}\omega_3(y,t-\tau) + c_{34}\omega_4(y,t-\tau)\right]d\tau, \quad (3.2)$$

$$r'_{12}(t) = M_2^3 P_1 + M_2^1\int_0^t r'_{12}(\tau)\frac{\partial}{\partial y}[\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_2](y)d\tau +$$

$$+M_2^2\int_0^t r'_{12}(\tau)\frac{d}{dt}\left[\widetilde{h}_1-\widetilde{\psi}_2\right](\tau)d\tau + M_2^3\int_0^t \frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_1-\omega_2\right](y,\tau-\alpha)d\tau +$$

$$+M_2^1\int_0^t\int_0^\tau r'_{12}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_1-\omega_2\right](y,\tau-\alpha)d\alpha d\tau, \tag{3.3}$$

$$r'_{22}(t)=M_3^3P_3+M_3^1\int_0^t r'_{22}(\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left[\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4\right](y)d\tau+$$

$$+M_3^2\int_0^t r'_{22}\frac{d}{dt}\left[\widetilde{h}_2+\widetilde{\psi}_4\right](t-\tau)d\tau+M_3^3\int_0^t\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{k=3}^4 c_{3k}\omega_k(y,t-\tau)\right]d\tau+$$

$$+M_3^1\int_0^t\int_0^\tau r'_{22}(\alpha)\frac{\partial}{\partial y}\left[\omega_3+\omega_4\right](y,\tau-\alpha)d\alpha d\tau, \tag{3.4}$$

где P_i определены формулами

$$P_i=\tfrac{d^2}{dtdy}\widetilde{h}_i(t_1^i)-\tfrac{d}{dy}\Phi_i(y)+\tfrac{(-1)^i}{\nu_i(y)}\sum_{j=1}^4 c_{ij}\left(H\right)\omega_j(H,t_1^i),\quad i=1,3,$$

здесь
$M_1^1=\frac{\nu_1\lambda}{\lambda(\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4+\widetilde{\varphi}_5)+2\mu\widetilde{\varphi}_5}$, $M_1^2=-\frac{\nu_1\lambda}{2\nu_2(\lambda(\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4+\widetilde{\varphi}_5)+2\mu\widetilde{\varphi}_5)}$, $M_3^1=\frac{\nu_2}{\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4}$,
$M_3^3=\frac{2\nu_2}{\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4}$, $M_1^3=\frac{2\nu_1\lambda}{\lambda(\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4+\widetilde{\varphi}_5)+2\mu\widetilde{\varphi}_5}$, $M_1^4=\frac{M_1^3}{2\nu_1}$, $M_3^2=-\frac{1}{\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4}$,
$M_1^5=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda(\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4+\widetilde{\varphi}_5)+2\mu\widetilde{\varphi}_5}$, $M_2^1=\frac{\nu_1}{\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_2}$, $M_2^2=-\frac{1}{\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_2}$, $M_2^3=\frac{2\nu_1}{\widetilde{\varphi}_1-\widetilde{\varphi}_2}$.

В дальнейшем будем считать, что

$$\widetilde{\varphi}_1\neq\widetilde{\varphi}_2,\quad \widetilde{\varphi}_3\neq-\widetilde{\varphi}_4,\quad \lambda\big[\widetilde{\varphi}_3+\widetilde{\varphi}_4+\widetilde{\varphi}_5\big]+2\mu\widetilde{\varphi}_5\neq 0. \tag{3.5}$$

В уравнениях (3.2) – (3.4) присутствуют неизвестные функции $\frac{\partial}{\partial y}\omega_i$, $i=\overline{1,5}$. Поэтому дифференцируем уравнения (2.12) по переменной y. При этом имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\omega_i(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}\omega_i(y_0^i,t_0^i)-\frac{\partial}{\partial y}t_0^i\left[\sum_{k=1}^4 c_{ik}\omega_k(y_0^i,t_0^i)+\sum_{k=1}^4\widetilde{r}_{ik}\widetilde{\varphi}_i(y_0^i)\right]+$$

$$+\int_{t_0^i}^t\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{k=1}^4 c_{ik}\omega_k(\eta,\tau)+\sum_{k=1}^4\widetilde{r}_{ik}(\eta,\tau)\widetilde{\varphi}_i(\xi)\right]\Bigg|_{\eta=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(y)]}d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}t_0^i\int_0^{t_0^i}\sum_{k=1}^4\widetilde{r}_{ik}(\eta,t_0^i-\tau)\omega_k(\eta,\tau)\Bigg|_{\eta=\mu_i^{-1}\left[t_0^i-t+\mu_i(y)\right]}d\tau+$$

$$+\int_0^{t_0^i}\int_0^\tau\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^4\widetilde{r}_{ik}\omega_k(\eta,\alpha)d\alpha\Bigg|_{\eta=\mu_i^{-1}[\tau-t+\mu_i(y)]}d\tau,\quad i=\overline{1,5}. \tag{3.6}$$

Требуем выполнение следующих условий согласования:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{h}_i(0)=-\nu_i\frac{d}{dy}\widetilde{\varphi}_i(y)\Bigg|_{y=0}-\sum_{j=1}^5 c_{ij}(0)\widetilde{\varphi}_i(0),\quad i=1,3,5. \tag{3.7}$$

4. Основной результат и его доказательство

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и вектор функция* $\widetilde{h}(x,t)$ *- финитна по* x *при каждом фиксированном* t*. Кроме того,* $\widetilde{\varphi}_i(y) \in C^2\left[0,H\right],\ i=\overline{1,5},\ \ \widetilde{\psi}_i(t) \in C^2\left[0,T\right],\ \widetilde{h}_i(t) \in C^2\left[0,T\right],\ i=\overline{1,3}$ *и выполнены условия согласования (2.13), (2.14), (3.7). Тогда для любого* $H>0$ *на отрезке* $\big[0,H\big]$ *существует единственное решение обратной задачи (2.7)–(2.9), (2.10) из класса* $r_{ij}(t) \in C^1\big[0,H\big]$, $i,j=1,2$.

Рассмотрим теперь квадрат $D_0 := \left\{(y,t): 0\le y\le H,\ 0\le t\le H\right\}$. Запишем уравнения (2.12), (3.2)–(3.4), (3.6) в виде замкнутой системы интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода. Для этого введем в рассмотрение векторную функцию $\upsilon(y,t)=(\upsilon_i^1,\ \upsilon_j^2,\ \upsilon_i^3)$, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,3}$, задав их компоненты равенствами:

$$\upsilon_i^1(y,t)=\omega_i(y,t),\ i=\overline{1,5},\ \upsilon_1^2(t)=r'_{11}(t),\ \upsilon_2^2(t)=r'_{22}(t), \tag{4.1}$$

$$\upsilon_3^2(t)=r'_{12}(t),\ \upsilon_5^3(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}\omega_5(y,t), \tag{4.2}$$

$$\upsilon_i^3(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}\omega_i(y,t)-\frac{r'_{12}(t_0^i)}{2}\left(\widetilde{\varphi}_2(y_0^i)-\widetilde{\varphi}_1(y_0^i)\right)\frac{\partial}{\partial y}t_0^i, \quad i=1,2, \tag{4.3}$$

$$\upsilon_i^3(y,t)=\frac{\partial}{\partial y}\omega_i(y,t)-\frac{r'_{22}(t_0^i)}{2}\left(\widetilde{\varphi}_3(y_0^i)+\widetilde{\varphi}_4(y_0^i)\right)\frac{\partial}{\partial y}t_0^i, \quad i=3,4. \tag{4.4}$$

Тогда система уравнений (2.12), (3.2)–(3.4), (3.6) принимает операторно-векторную форму

$$\upsilon=A\upsilon, \tag{4.5}$$

где оператор $A=(A_i^1,\ A_j^2,\ A_i^3),\ i=\overline{1,5},\ \ j=\overline{1,3}$ и компоненты оператора A определены правыми частями уравнений (2.12), (3.2)–(3.4), (3.6) соответственно, с учётом обозначений (4.1)-(4.4).

Определим на множестве непрерывных функций $C_s(D_0)$ норму посредством формулы

$$\|\upsilon\|_s=\max\Bigg\{\max_{1\le i\le 5}\max_{(y,t)\in D_0}\left|\upsilon_i^1(y,t)e^{-st}\right|,$$
$$\max_{1\le i\le 3}\max_{t\in[0,T]}\left|\upsilon_i^2(t)e^{-st}\right|,\ \max_{1\le i\le 5}\max_{(y,t)\in D_0}\left|\upsilon_i^3(y,t)e^{-st}\right|\Bigg\},$$

где $s\ge 0$ — некоторое число, которое будет выбрано позже. Подробно можно рассмотреть в работе [5], и для $\upsilon\in S(\upsilon^0,r)$ имеет место оценка $\|\upsilon\|_s\le\|\upsilon^0\|_s+r\le\|\upsilon^0\|+r:=r_0$. Таким образом, r_0 известно.

Заметим, что оператор A переводит пространство $C_s(D_0)$ в себя. Покажем, что при подходящем выборе s (напомним, что $H > 0$ — произвольное фиксированное число) он является на множестве $S(v^0, r)$ оператором сжатия. Убедимся вначале в том, что оператор A переводит множество $S(v^0, r)$ в себя, т.е. из условия $v(y,t) \in S(v^0, r)$ следует, что $Av \in S(v^0, r)$, если s удовлетворяет некоторым ограничениям. На самом деле для любых $(y,t) \in D_0$ и любого $v \in S(v^0, r)$ выполняются неравенства

$$\left|\left(Av - v^0\right) e^{-st}\right| \le \tfrac{r_0}{s}\alpha_i, \ i = \overline{1,13},$$

где $\varphi_0 := \max\limits_{i=\overline{1,5}} \left\|\widetilde{\varphi}_i\right\|_{C^2[0,H]}, h_0 := \max\left\{\max\limits_{i=\overline{1,4}} \left\|\psi_i\right\|_{C^2[0,H]}; \max\limits_{i=\overline{1,3}} \left\|h_i\right\|_{C^2[0,H]}\right\}$,

$$M^0 := \max\left\{\max_{i=1,2,3,\ j=1,2,3} \left\|M_i^j(y)\right\|_{C^1[0,H]}; \max_{i=\overline{1,5}} \left\|c_{ij}(y)\right\|_{C^1[0,H]}; \tfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}; \tfrac{1}{2}\right\}$$

и $\alpha_i = 2M_0\left[1 + \varphi_0 + r_0\right], i = \overline{1,4}$, $\alpha_5 = 4M_0r_0 + r_0 + 3M_0 + 4M_0\varphi_0 + \varphi_0$, $\alpha_6 = 2M_0\left[\varphi_0 + h_0 + \frac{5}{2}r_0 + M_0\right]$, $\alpha_i = 2M_0\left[\varphi_0 + h_0 + M_0\left[\frac{r_0}{2} + 1\right]\right]$, $\alpha_i = 2M_0\left[M_0r_0 + \varphi_0 + 1 + r_0\right], i = \overline{9,12}$, $\alpha_{13} = 4M_0\left[r_0 + \varphi_0 + 1\right] + \varphi_0 + r_0$. Отсюда имеем

$$\|Av - v^0\|_s = \max\left\{\max_{i=\overline{1,5}} \max_{(y,t)\in D_0} \left|\left(A_i^1 v - v_i^{01}\right) e^{-st}\right|,\right.$$

$$\left.\max_{i=\overline{1,3}} \max_{t\in[0,T]} \left|\left(A_i^2 v - v_i^{02}\right) e^{-st}\right|, \max_{i=\overline{1,5}} \max_{(y,t)\in D_0} \left|\left(A_i^3 v - v_i^{03}\right) e^{-st}\right|\right\},$$

где $\alpha_0 := \max\{\alpha_i\}$, $i = \overline{1,13}$. Выбирая $s > (1/r)\alpha_0$, получим, что оператор A переводит множество $S\left(v^0, r\right)$ в себя.

Возьмем теперь любые функции $v, \widetilde{v} \in S\left(v^0, r\right)$ и оценим норму разности $Av - A\widetilde{v}$. Аналогично приведенным выше получим

$$\left|(Av - A\widetilde{v})\, e^{-st}\right| \le \tfrac{1}{s}\gamma_i \|v - \widetilde{v}\|_s, \quad i = \overline{1,13},$$

где $\gamma_i = 2M_0\left(1 + 2\varphi_0 + r_0\right), i = \overline{1,4}$, $\gamma_5 = 10M_0r_0 + r_0 + 3M_0 + 4M_0\varphi_0 + \varphi_0$, $\gamma_6 = 2M_0\left(\varphi_0 + h_0 + 7r_0 + M_0\right)$, $\gamma_i = 2M_0\left(\varphi_0 + h_0 + 2r_0 + M_0\right)$, $i = 7, 8$, $\gamma_i = 2M_0\left(2M_0r_0 + \varphi_0 + 1 + 2r_0\right)$, $i = \overline{9,12}$,
$\gamma_{13} = 8M_0r_0 + \varphi_0 + 2r_0 + 3M_0 + 4M_0\varphi_0$.
Отсюда имеем

$$\|Av - A\widetilde{v}\|_s = \max\left\{\max_{i\in\overline{1,5}} \max_{(y,t)\in D_0} \left|\left(A_i^1 v - A_i^1 \widetilde{v}\right) e^{-st}\right|,\right.$$

$$\left.\max_{i=\overline{1,3}} \max_{t\in[0,T]} \left|\left(A_i^2 v - A_i^2 \widetilde{v}\right) e^{-st}\right|, \ \max_{i\in\overline{1,5}} \max_{(y,t)\in D_0} \left|\left(A_i^3 v - A_i^3 \widetilde{v}\right) e^{-st}\right|\right\},$$

где $\gamma_0 := \max(\gamma_i) \quad i = \overline{1,13}$. Выбирая теперь $s > \gamma^0$, получим, что оператор A сжимает расстояние между элементами $\upsilon, \widetilde{\upsilon}$ на $S\left(\upsilon^0, r\right)$.

Как следует из проделанных оценок, если число s выбрано из условия $s > s^* := max\{\alpha_0, \gamma_0\}$, то оператор A является сжимающим на $S\left(\upsilon^0, r\right)$. В этом случае, согласно принципу Банаха [7], уравнение (4.5) имеет единственное решение в $S\left(\upsilon^0, r\right)$ для любого фиксированного $H > 0$. Теорема 2 доказана.

По найденным функциям $r'_{11}(t)$, $r'_{22}(t)$, $r'_{12}(t)$ функции $r_{11}(t)$, $r_{22}(t)$, $r_{12}(t)$ находятся по формулам

$$r_{ij}(t) = r_{ij}(0) + \int\limits_0^t r'_{ij}(\tau)d\tau, \; i, j = 1, 2.$$

Заметим, что по функциям $r_{11}(t)$, $r_{22}(t)$, $r_{12}(t)$ функции $K_{11}(t)$, $K_{22}(t)$, $K_{12}(t)$ определяются как решения интегральных уравнений (1.4).

5. Заключение

В этой работе мы видим, что ядро K представляет собой диагональную матрицу размерности 5×5, которая зависит от времени и входит в уравнение (1.3) через функции R (см. также уравнение (1.6)). Для её определения задаются дополнительные условия (2.3) относительно преобразования Фурье решения прямой задачи (1.10), (2.1), (2.2). Методами характеристик и интегральных уравнений доказана теорема о глобальной однозначной разрешимости поставленной задачи.

Список источников

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. : Наука, 1980. 242 с.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.
3. Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А. Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 491–506. https://doi.org/10.4213/tmf9480.
4. Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.205
5. Дурдиев Д. К., Турдиев Х. Х. Обратная задача для гиперболической системы первого порядка с памятью // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1666-1675.
6. Дурдиев У. Д. Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сибирский журнал

индустриальной математики. 2019. Т. 22, № 4 (80). С. 26–32. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.403

7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
8. Романов В. Г. Задача об отыскании коэффициентов гиперболической системы // Дифференциалные уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 94–103.
9. Романов В. Г. Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
10. Романов В. Г. Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446, № 1. С. 18-20.
11. Тотиева Ж. Д. Одномерные обратные коэффициентные задачи анизотропной вязкоупругости // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 6. С. 786–811. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.053
12. Тотиева Ж. Д. К вопросу исследования задачи определения матричного ядра системы уравнений анизотропной вязкоупругости // Владикавказский математический журнал. 2019. Т. 21, № 2. https://doi.org/10.23671/VNC.2019.2.32117
13. Фалалеев М. В. О разрешимости в классе распределений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 2020, Т. 34. С. 77–92. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.77
14. Durdiev D. K., Rahmonov A. A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43, N 15. P. 8776–8796. https://doi.org/10.1134/S1990478920020076
15. Durdiev D. K., Totieva Z. D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. Vol. 28, N 1. P. 43–52. https://doi.org/10.1515/JIIP-2018-0024
16. Falaleev M. V. Convolutional integro-differential equations in Banach spaces with a Noetherian operator in the main part // Журнал СФУ. Серия: Математика и физика. 2022. Vol. 15, N 2. P. 150–161. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-2-150-161
17. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. Vol. 20, N 4. P. 291–314. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W
18. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl. 1994. Vol. 22, N 1. P. 21–44.
19. Romanov V. G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // Siberian Math. J. 2014. V. 55. no. 3. P. 503-510.
20. Safarov J. Sh. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // Журнал СФУ. Серия: Математика и физика. 2018. Vol. 11, N 6. P. 753–63. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763

References

1. Galin L.A. *Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity.* Moscow, Nauka Publ., 1980. (in Russian)
2. Godunov S.K. *Equations of Mathematical Physics.* Moscow, Nauka Publ., 1979. (in Russian)
3. Durdiev D.K., Rakhmonov A.A. An Inverse Problem for a System of Integro-Differential Equations of SH-waves in a Viscoelastic Porous Medium: Global Solvability. *Teor. Mat. Fiz.*, 2018, vol. 195, no. 3, pp. 491–506. https://doi.org/10.4213/tmf9480
4. Durdiev D.K., Rakhmonov A.A. The Problem of Determining the 2D Kernel in a System of Integro-Differential Equations of a Viscoelastic Porous Medium. *Sibir. Zh. Ind. Mat.*, 2020, vol. 23, no. 2, pp. 63–80. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.205
5. Durdiev D.K., Turdiev Kh.Kh. An Inverse Problem for a First Order Hyperbolic System with Memory. *Differentsial'nye Uravneniya,* 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1666–1675.
6. Durdiev U.D. An Inverse Problem for the System of Viscoelasticity Equations in Homogeneous Anisotropic Media. *Sibir. Zh. Ind. Mat.*, 2019, vol. 22, no. 4, pp. 26–32. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.403
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of Function Theory and Functional Analysis.* Moscow, Nauka Publ. 1989 [in Russian].
8. Romanov V.G. The problem of finding the coefficients of a hyperbolic system *Differentsial'nye Uravneniya*, 1978, vol. 14, no.1, pp. 94–103. [in Russian]
9. Romanov V.G. Estimates of the stability of a solution in the problem of determining the kernel of the viscoelasticity equation. *Sibir. Zh. Ind. Mat.,* 2012, vol. 15, no. 1, pp. 86–98. [in Russian]
10. Romanov V.G. The problem of determining the kernel in the equation of viscoelasticity. *Dokl. AN.,* 2012, vol. 446, no. 1, pp. 18–20. [in Russian]
11. Totieva Z.D. One-dimensional inverse coefficient problems of anisotropic viscoelasticity. *Sib. El. Math. I.*, 2019, vol.16, pp. 786–811. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.053
12. Totieva Z.D. On the issue of studying the problem of determining the matrix kernel of the system of equations of anisotropic viscoelasticity. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2019, vol. 21, no. 2. https://doi.org/10.23671/VNC.2019.2.32117
13. Falaleev M.V. On Solvability in the Class of Distributions of Degenerate Integro-Differential Equations in Banach Spaces. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 77–92. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.77
14. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, no. 15, pp. 8776–8796. https://doi.org/10.1134/S1990478920020076
15. Durdiev D.K., Totieva Z.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 43–52. https://doi.org/10.1515/JIIP-2018-0024
16. Falaleev M.V. Convolutional integro-differential equations in Banach spaces with a Noetherian operator in the main part. *Journal. SFU. Ser. Mat. and physical*, 2022, vol. 15, no. 2, pp. 150–161. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-2-150-161
17. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity. *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 4,

pp. 291–314. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W

18. Lorenzi A. An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation. *Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl.*, 1994, vol. 22, no. 1, pp. 21–44.
19. Romanov V.G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations. *Siberian Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 3, pp. 503–510.
20. Safarov J.Sh., Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics. *Journal. SFU. Ser. Mat. and physical*, 2018, vol. 11, no. 6, pp. 753–763. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763

Об авторах

Дурдиев Дурдимурод Каландарович, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт математики Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 100170, г. Ташкент, d.durdiyev@mathinst.uz, https://orcid.org/0000-0002-6054-2827

Болтаев Аслиддин Аскар Угли, Институт математики Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 100170, г. Ташкент, asliddinboltayev@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-0850-6400

About the authors

Durdimurod K. Durdiev, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 100170, Uzbekistan, d.durdiyev@mathinst.uz, https://orcid.org/0000-0002-6054-2827

Asliddin A. ogli Boltaev, Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 100170, Uzbekistan, asliddinboltayev@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-0850-6400

Поступила в редакцию / Received 06.09.2022
Поступила после рецензирования / Revised 15.12.2022
Принята к публикации / Accepted 16.01.2023