DdM | Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (12), 129 - 141, DOI: 10.33683/ddm.22.12.7 OPEN ACCESS

Ci sono tanti modi per essere aleatori

Randomness is such a fickle notion

Anna Perrotta• e Enrico Rogora°
•Liceo Scientifico "Plinio Seniore", Roma – Italia
°Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma – Italia

annaxrotta@gmail.com, enrico.rogora@uniroma1.it

Sunto / Possiamo immaginare dei criteri che ci aiutino a distinguere sequenze binarie finite generate dal lancio ripetuto di una moneta da altre immaginate da un agente umano o simulate con una calcolatrice che usa un algoritmo deterministico? Si possono individuare proprietà caratteristiche delle sequenze delle diverse classi considerate?
Intorno a queste domande abbiamo costruito un percorso, proposto in una classe terza di liceo scientifico, che ha stimolato gli alunni a riflettere criticamente sulle loro convinzioni relative alla probabilità e al caso.

Parole chiave: probabilità; sequenze aleatorie; sequenze binarie; didattica laboratoriale.

Abstract / Is it possible to imagine criteria that may help to distinguish finite binary sequences generated by the repeated tossing of a coin from those imagined by a human agent or simulated by a calculator using a deterministic algorithm? Is it possible to identify characteristic properties of the sequences of these different classes?
Around these questions we built a learning path, proposed in an 11th grade class, that stimulated students to critically reflect on their beliefs about probability and chance.

Keywords: probability; random sequences; binary sequences; laboratory activities.

1 Introduzione

L'incertezza è la condizione abituale in cui ci si trova quando si devono prendere decisioni. Governare l'incertezza è quindi un'esigenza primaria della vita umana, che la scuola può e deve considerare. I meccanismi e le strategie, spesso inefficaci o addirittura controproducenti, che mettiamo in atto quando dobbiamo prendere una decisione sono oggetto di studio di psicologi, economisti e sociologi (Kahneman et al., 1982). È quindi di particolare interesse comprendere come sia possibile migliorare l'uso ottimale delle informazioni disponibili e le strategie per selezionare e cercare le informazioni più rilevanti. Il calcolo delle probabilità offre un utile strumento per evitare errori grossolani nel trasformare e combinare le informazioni disponibili al fine di ridurre l'incertezza. Purtroppo, la probabilità è un argomento intrinsecamente difficile e poco intuitivo (Gage & Spiegelhalter, 2016). L'interpretazione stessa della probabilità non è univoca e mescola indistricabilmente elementi di carattere *statistico* ed *epistemico*. I primi riguardano, ad esempio, il riconoscimento di caratteri quantificabili nell'osservazione di sequenze generate da processi aleatori e di regole matematiche che li collegano. I secondi riguardano, ad esempio, il processo di costruzione di misure capaci di esprimere il grado di fiducia che un soggetto attribuisce al verificarsi di un evento incerto. La teoria matematica della probabilità specifica le proprietà formali di queste misure e da esse procede a dedurne le conseguenze, ma la difficoltà di comprendere l'oggetto stesso di queste misure rende difficile capire quali calcoli vanno fatti e insidiose le applicazioni a problemi reali. L'equilibrio delicato tra l'oggettività di una misura (la probabilità) e la soggettività del suo contenuto (il grado di fiducia) è a nostro avviso cruciale nei processi di insegnamento e apprendimento della probabilità, ma nei curricula non trova l'attenzione che meriterebbe.

Oggi esiste un crescente interesse nei confronti di una introduzione sperimentale al calcolo delle probabilità che faccia debito uso di esperimenti con monete, dadi o trottole (spinner) e di simulazioni con il calcolatore o con la calcolatrice. L'uso combinato di questi strumenti permette di costruire facilmente processi aleatori complessi (Capone et al., 2017).

L'importanza di queste costruzioni si può paragonare, per certi versi e con le dovute cautele, a quella delle costruzioni con riga e compasso nei processi di apprendimento/insegnamento della geometria euclidea. Ad esempio, un'importante somiglianza riguarda il fatto che le attività legate alla costruzione o ricostruzione di un processo possono essere di grande aiuto nel facilitare l'acquisizione di concetti teorici. Un'importante differenza è, d'altra parte, che un processo aleatorio è più elusivo di una costruzione geometrica. Per esempio, una costruzione geometrica produce sempre (a meno di errori dovuti all'imprecisione degli strumenti utilizzati) la stessa figura a partire dagli stessi dati, mentre un processo aleatorio produce manifestazioni sperimentali, che variano ad ogni ripetizione. Ciò rende più difficile comprendere quello che può essere descritto in maniera matematicamente precisa e come questo si leghi al risultato sperimentale, cioè in cosa consistano esattamente le leggi matematiche di un processo stocastico.

Per la sua importanza nei processi di apprendimento è necessario inoltre, a nostro avviso, prestare particolare attenzione al processo di strumentazione e strumentalizzazione dell'artefatto (calcolatrice o calcolatore) che viene usato nelle applicazioni al fine di poterlo trasformare in un utile strumento per l'insegnamento/apprendimento del calcolo delle probabilità. Il presente lavoro è dedicato a un aspetto molto particolare di questo processo e precisamente a far emergere e a rimuovere le misconcezioni degli studenti sulla natura dei processi costruibili con uno strumento deterministico (calcolatore o calcolatrice) in confronto a quelli costruibili lanciando monete o dadi, estraendo palline da urne ben mescolate o facendo girare trottole.

Nel laboratorio proposto viene richiesto di produrre, analizzare e confrontare diverse tipologie di sequenze binarie aleatorie. Si tratta di attività progettate per essere svolte prima che l'insegnante decida di usare la calcolatrice o il calcolatore per simulare processi aleatori. Non necessita di alcun

prerequisito ma richiede molta attenzione da parte del docente nelle discussioni con gli studenti.
Le proprietà matematiche delle sequenze binarie sono infatti difficili da caratterizzare (Chaitin, 2000) e richiedono un linguaggio e una consapevolezza dei termini impiegati molto elevata. Per esempio, è delicato esprimere cosa ci aspettiamo di osservare, anche nel caso più semplice di una successione di lanci di una moneta non truccata. L'affermazione: «[...] all'aumentare del numero di lanci di una moneta non truccata la frequenza assoluta ("il numero di teste e di croci") dell'esito T tende a essere sempre più uguale alla frequenza assoluta dell'esito C» è un esempio di un errore in cui cadono frequentemente gli studenti e gli insegnanti interpretando in modo scorretto la legge empirica del caso o la legge dei grandi numeri. In realtà quello che si può dire è che "mediamente", all'aumentare del numero di lanci, ci si attende che la frequenza relativa dell'esito T converga alla frequenza relativa dell'esito C, dove quel "mediamente" vuol dire che si tratta di una "convergenza in probabilità" e cioè (detto in modo non del tutto preciso, ma, speriamo, chiaro) che tende a 1 la probabilità che, per il numero di lanci che tende a infinito, la frequenza relativa dell'esito T sia uguale alla frequenza relativa dell'esito C.[1]
Questo genere di errori e di imprecisioni nell'uso e nell'interpretazione dei concetti fondamentali della probabilità esemplificano chiaramente la difficoltà di descrivere in maniera matematicamente precisa ciò che ci aspettiamo di vedere nella realizzazione di un processo aleatorio. Il laboratorio mira a stimolare negli studenti una maggiore consapevolezza nell'uso del linguaggio e a evidenziare la sua importanza nella costruzione di appropriate immagini concettuali (Tall & Vinner, 1981) su cui basare la teoria.

2 Presentazione del laboratorio

Le attività descritte nel presente lavoro sono state inizialmente sperimentate da un gruppo di docenti appartenenti a scuole di differente ordine e grado in un laboratorio dal titolo "Governare l'incertezza" che si è svolto nell'a.s. 2018/19 presso il Polo romano del progetto "Con la mente e con le mani" dell'Accademia dei Lincei. Successivamente le attività sono state rielaborate e proposte nell'a.s. 2020/21 a una classe terza di liceo matematico[2] dell'ITIS Galilei di Roma composta da 13 studenti. Queste attività, inizialmente pensate per essere svolte in presenza, sono state per la maggior parte[3] proposte a distanza per le limitazioni didattiche imposte dall'emergenza COVID, modificandone solo parzialmente la struttura ma non gli obiettivi didattici che sono i seguenti:

- sviluppare una «base intuitiva» relativa ai fenomeni aleatori che aiuti gli studenti a evitare errori dovuti ad una loro scorretta interpretazione e a precisare il linguaggio con cui ci si riferisce ad essi;
- cercare possibili differenze tra collezioni di sequenze generate dal lancio di una moneta, da lanci immaginati dai partecipanti al laboratorio, da lanci simulati con una calcolatrice,[4] e riflettere sulla possibilità di quantificare queste differenze per distinguere i diversi meccanismi di produzione;
- esplorare alcune caratteristiche delle stringhe di simboli generate da fenomeni aleatori che a prima vista possono sembrare poco intuitive o «inaspettate»;
- indagare se esistono preconcetti che impediscono agli studenti di accettare che sequenze binarie prodotte da un calcolatore possano essere indistinguibili da quelle prodotte con il lancio di una moneta.

1. L'errore e il successivo commento ci sono stati suggeriti da uno dei referee, che ringraziamo.
2. Per una descrizione del progetto del Liceo Matematico, si veda Capone et al. (2017).
3. Solo la prima attività è stata svolta in presenza.
4. Le calcolatrici utilizzate nel laboratorio sono le fx-991EX CLASSWIZ della CASIO.

Non è stata ipotizzata alcuna conoscenza pregressa di calcolo delle probabilità da parte degli alunni ma si è partiti dalle loro conoscenze sui fenomeni aleatori acquisite nel precedente ciclo di studi e dalle convinzioni, più radicate delle precedenti e molto difficili da mettere in discussione, che si sono formate attraverso televisione, reti di comunità virtuali o discussioni con i propri genitori o tra pari.

3 Descrizione del laboratorio

Di seguito verranno descritte le attività del laboratorio e riportate e commentate alcune delle risposte degli studenti che a nostro avviso sono particolarmente significative.

3.1 Prima attività

È stata consegnata ad ogni alunno una scheda (Allegato 1) chiedendogli di svolgere le consegne in essa descritte e di riportare su di essa le risposte.
Lo scopo di questa attività era quello di produrre con tre diversi meccanismi le sequenze binarie che sarebbero state successivamente analizzate.

3.1.1 Consegne della prima attività

L'allievo si è confrontato individualmente con le seguenti consegne.

– Immagina di lanciare 20 volte una moneta non truccata e di riportare nella tabella seguente i risultati ottenuti (T = testa e C = croce).

– Lancia una moneta 20 volte e riporta la successione di teste (T) e croci (C) che osservi.

– Simula ora con la calcolatrice una serie di 20 lanci di moneta[5] trascrivendo sulla scheda T quando esce 0 e C quando esce 1.

5. È possibile simulare il lancio di una moneta con una qualsiasi calcolatrice scientifica avanzata. Con quella utilizzata nel laboratorio abbiamo ripetuto l'istruzione RandInt#(0,1) nell'applicazione foglio elettronico. Le istruzioni da seguire per produrre la sequenza con la calcolatrice, riportate nell'Allegato 1, non hanno creato difficoltà agli alunni.

3.1.2 Considerazioni sulla prima attività

Durante questa prima attività gli alunni hanno fatto numerose osservazioni, a nostro avviso particolarmente interessanti. Alcuni hanno notato che effettuando il lancio con la moneta uscivano "troppe croci" di seguito, altri che qualcosa non andava perché non venivano fuori i risultati "aspettati" nel senso che specificheremo più avanti.

In **Figura 1** viene riportato un esempio delle sequenze prodotte da un alunno:

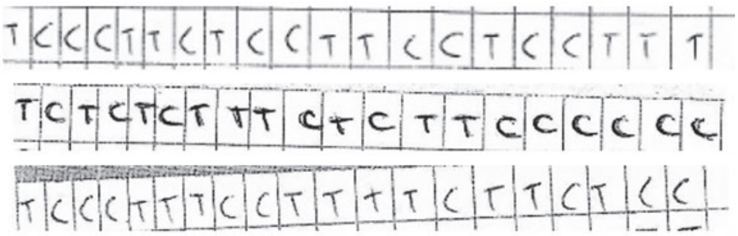

Figura 1. Risultati ottenuti rispettivamente nel caso di lancio immaginato, lancio della moneta e simulazione con la calcolatrice.[6]

3.2 Seconda attività

Senza fare osservazioni sui risultati ottenuti dagli allievi nella prima attività, l'insegnante ha quindi chiesto loro di raccogliere le sequenze ottenute in tre tabelle (Allegato 2, Fase 1): nella prima dovevano riportare tutte le sequenze immaginate, nella seconda quelle ottenute lanciando la moneta e nella terza quelle simulate con la calcolatrice.

Riportiamo in **Figura 2** la tabella delle sequenze immaginate.[7]

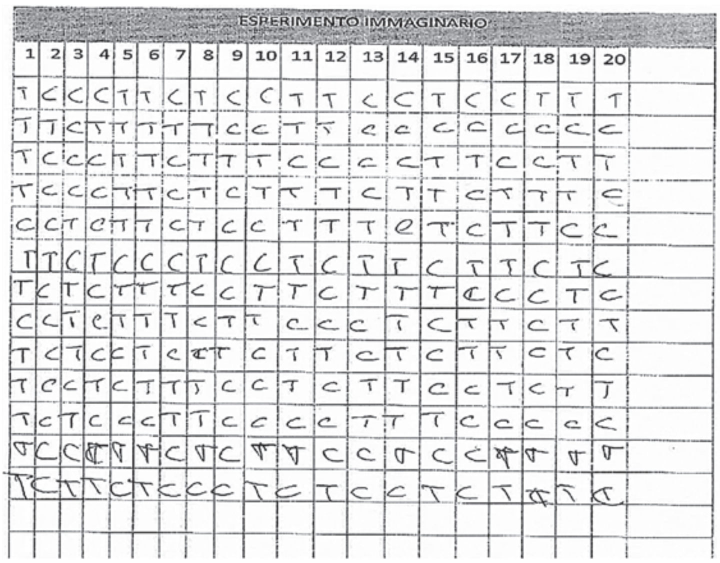

Figura 2. Tabella delle sequenze immaginate dai 13 alunni che hanno partecipato al laboratorio.

Abbiamo quindi proposto una seconda fase in cui chiedevamo di osservare attentamente le tabelle prodotte e di rispondere alle due domande presenti nella scheda (Allegato 2, Fase 2) che riportiamo qui sotto. Le schede, a partire dalla seconda attività, sono state compilate in forma scritta, singolarmente e, come già precedentemente specificato, a distanza.

6. La seconda stringa è stata ripassata dall'insegnante per renderla più leggibile.
7. Le altre due tabelle sono riportate nell'Allegato 3 e possono essere utilizzate in sostituzione di quelle raccolte nel caso in cui, nella ripetizione di un esperimento, non si dovessero presentare chiaramente i fenomeni che abbiamo evidenziato.

Gli obiettivi che ci eravamo proposti nella progettazione di questa attività erano: far riflettere gli alunni sulle differenze tra diversi possibili meccanismi di produzione di sequenze binarie, sulla possibilità di individuarne il meccanismo a partire dalle sequenze prodotte ed infine verificare se queste riflessioni erano adatte a mettere in luce le convinzioni pregresse relative a caso e probabilità e ad offrire, insieme a quelle raccolte nella terza attività, elementi efficaci per ripensare criticamente queste convinzioni.

3.2.1 Consegne della seconda fase della seconda attività

Gli allievi hanno risposto individualmente alle seguenti domande:

1. Riesci ad individuare qualche elemento che possa permettere di distinguere le sequenze immaginate da quelle ottenute lanciando una moneta o usando la calcolatrice?
2. È possibile trovare un criterio per individuare le sequenze generate in modo casuale?[8]

3.2.2 Considerazioni sulla seconda attività

Nella formulazione della prima domanda abbiamo volutamente evitato riferimenti al "caso", pensando di sollecitare i ragazzi a osservare le sequenze indipendentemente dai meccanismi che le avevano generate per poi ritornare su questi nella seconda domanda. Le risposte però sono risultate sostanzialmente sovrapponibili. Infatti, i ragazzi hanno introdotto già nelle risposte alla prima domanda i riferimenti alle loro idee di caso e casualità.
Otto ragazzi hanno ritenuto le sequenze indistinguibili mentre cinque di loro hanno osservato delle differenze nelle tre classi. Come vedremo, proseguendo il laboratorio gli studenti hanno progressivamente modificato le loro idee, sulla base delle discussioni sulle attività che abbiamo proposto.
Nelle risposte, come ci aspettavamo, i ragazzi non sono stati concordi nell'intendere il significato della parola "casuale".[9] Per molti, tutte le sequenze sono casuali e indistinguibili. Per gli altri ci sono gradi diversi di casualità ma l'ordinamento non è lo stesso per tutti. A titolo d'esempio riportiamo alcune risposte, ciascuna seguita da un breve commento:

> «Immaginate: senza un criterio ben definito, del tutto casuali, infatti, sono tutti diversi tra loro. Lancio della moneta: più "schematico" sembrerebbe quasi seguire un criterio di probabilità (forse). Calcolatrice: segue una sequenza precisa ad esempio 2 *c*, 3 *t*, 1 *c*».

In questa risposta, le tre tipologie sono state così ordinate per casualità decrescente: Agente umano; Moneta; Calcolatrice. Inoltre, massima casualità è descritta come "assenza di criterio"; media casualità come "criterio probabilistico"; non casualità, come "criterio preciso".

> «Nella sequenza immaginata, le lettere T e C si ripetono molte volte vicine fra loro (es. CCCTTCCTTTTC). Nella sequenza con la calcolatrice la cosa è più casuale, anche se qui molte volte si ripetono vicine fra loro le lettere (es. CCTTTCCTCTTCT). Nella sequenza con la moneta il risultato mi sembra puramente casuale, con poche ripetizioni di doppie (es. CTCTTCTCCTCCCTCTT)».

In questa risposta, le tre tipologie sono state così ordinate per casualità decrescente: Moneta; Calco-

8. Questa domanda è stata volontariamente posta in modo ambiguo in quanto, non avendo mai definito cosa si intendesse per "sequenza generata in modo casuale", volevamo capire come gli studenti avrebbero interpretato questa frase.
9. Uno degli scopi principali del laboratorio è quello di aiutare i ragazzi a usare in maniera "appropriata" alcuni termini fondamentali del calcolo delle probabilità. Tra questi, il termine "casuale" è uno dei più critici. Vista la confusione e la varietà di significati associati alla parola, crediamo che sarebbe più opportuno, come suggerito da De Finetti, evitare l'uso della parola casuale e sostituirla, dopo averne messo in evidenza tutte le criticità, con aleatorio (De Finetti, 1970, p. 38).

latrice; Agente umano. Massima casualità è stata descritta come "poca ripetizione di doppie".

> «Nelle sequenze immaginate si possono notare più frequentemente sequenze da 3 perché spesso le inseriamo cercando di rendere la sequenza il più casuale possibile. Nelle sequenze fatte alla calcolatrice si può notare che c'è una relazione del 50% tra testa e croce. Nelle tabelle fatte effettivamente con il lancio della moneta è molto difficile riconoscere una sequenza perché a volte si alternano T e C mentre altre volte si trovano gruppi di più T o C di fila».

In questa risposta le tre tipologie non sono ordinate, ma si osservano delle differenze per caratterizzarle. In particolare, abbiamo osservato che la sequenza generata dalla calcolatrice viene considerata da alcuni una sequenza casuale (come nel secondo dei brani riportati) da altri no (come nel primo).
Alla fine della seconda attività l'insegnante ha letto le risposte, senza fare commenti, e ha stimolato i ragazzi a discutere su quanto avevano scritto. In particolare, in seguito alla discussione, alcuni ragazzi si sono convinti che la presenza di successioni lunghe di teste o croci consecutive sono caratteristiche delle sequenze prodotte dal lancio della moneta.

3.3 Terza attività

Sono state fornite agli studenti tre nuove tabelle (Allegato 3) precedentemente riempite dai docenti partecipanti al laboratorio "Governare l'incertezza". In esse gli insegnanti avevano trascritto sequenze di teste e croci prodotte con le stesse procedure indicate agli studenti nella prima attività. Gli scopi prefissi nel proporre questa attività erano: osservare nuove sequenze per stimolare ulteriormente la formulazione di criteri di riconoscimento dei meccanismi che le hanno prodotte ed osservare come venivano eventualmente modificate le loro convinzioni su caso e casualità in un'attività in cui, a differenza della precedente, gli alunni non conoscevano i meccanismi di produzione delle diverse sequenze.

3.3.1 Consegna della terza attività

Lo studente si è confrontato individualmente con la seguente richiesta.

> Ti vengono fornite tre tabelle (si veda l'Allegato 3) nelle quali sono state trascritte delle sequenze ottenute: lanciando 20 volte una moneta non truccata; immaginando di lanciare 20 volte una moneta non truccata; utilizzando la calcolatrice.
> Associa ad ogni tabella il tipo di esperimento da cui secondo te è ottenuta motivando la scelta.

3.3.2 Considerazioni sulla terza attività

Tra le riflessioni che abbiamo raccolto, ci sembrano particolarmente interessanti quelle, circa un terzo del totale, che associano due meccanismi, distinguendoli dal terzo. Delle tre possibili associazioni – Calcolatrice e Moneta, Moneta e Lancio immaginato, Calcolatrice e Lancio immaginato – gli studenti hanno preso in considerazione solo la terza.
La calcolatrice viene associata al lancio immaginato perché è in grado di «esercitare un controllo».
Il lancio della moneta invece è sempre definito "casuale". Un solo studente definisce la successione prodotta dal lancio della moneta «meno casuale di quella immaginata».
Diversi studenti avanzano l'idea che le sequenze prodotte dalla calcolatrice possano essere distinte in base a uno schema/criterio logico, mentre quelle prodotte dal lancio della moneta possono essere riconosciute perché possono contenere una successione "molto" lunga di tutte teste o tutte croci consecutive.
Di seguito vengono riportate alcune delle riflessioni che riteniamo più significative tra quelle prodotte

dagli allievi, che abbiamo sintetizzato nelle osservazioni riportate in precedenza. Per rendere immediatamente riconoscibili le osservazioni relative alle diverse modalità di produzione delle sequenze abbiamo usato **il grassetto per mettere in evidenza le osservazioni relative alle sequenze prodotte con la calcolatrice**, *l'italico per quelle prodotte dal lancio della monet*a e ***l'italico grassetto per quelle prodotte dal lancio immaginato.***

- «Secondo me la prima è la calcolatrice perché segue un ordine più **logico** e **lineare** e sembra quella più **ordinata** tra le altre».
- «Nella prima è la calcolatrice poiché la sequenza è abbastanza **lineare** e **poco casuale**, alla fine le lettere tornano quasi uguali. La seconda è reale poiché le lettere *si ripetono molte* volte di seguito e *cambiano poche* volte. La terza è immaginata poiché ***non ha un senso logico*** la sequenza, e le lettere si ripetono in modo ***casuale*** e ***senza un motivo***».
- «La prima è la calcolatrice perché sembra **troppo precisa**. La seconda è inventata dato che ***sembra seguire un criterio*** e l'ultima *non segue nessuna logica*».
- «Tabella 1: lancio, ci sono *grandi gruppi di C o T sparsi* per la tabella. Tabella 2: calcolatrice, sembra la più **schematica** di tutte. Tabella 3: immaginato, ***non segue alcun "criterio"***».
- «La tabella 1 è immaginata perché come aspetto visivo sembrerebbe quella *con più alternanza*. La tabella 2 calcolatrice poiché sembra **seguire una sequenza**. Tabella 3 è il lancio della moneta non truccata poiché se fosse stata immaginata, non ci sarebbero state *3 C attaccate o otto T*, questo perché ***quando il nostro cervello immagina una cosa casuale alterna le due lettere per farlo sembrare tale*** e non potrebbe essere la calcolatrice per lo stesso motivo **le lettere sarebbero più alternate**».
- «Tabella 3: lancio della moneta perché ad esempio *in una serie c'erano 8 C* di fila e dubito che qualcuno o anche la calcolatrice possano aver fatto una serie del genere. Tabella 2: immaginata perché ci sono ***un sacco di serie da 3*** e quindi penso che sia immaginata».
- «No perché sono tutte sequenze casuali».

Ancora una volta la maggior parte degli alunni riferisce di non avere trovato elementi per distinguere le tabelle ma alcuni di loro, che avevano già individuato nel lancio della moneta delle singolarità che non si aspettavano, propongono di caratterizzare la tabella prodotta con il lancio della moneta con la presenza di sequenze che contengono lunghe ripetizioni dello stesso simbolo. Abbiamo inoltre osservato che in alcuni casi gli alunni individuano una stessa caratteristica nelle tabelle che però associano a due esperimenti differenti.
Nel corso dell'attività la classe ha utilizzato diversi termini per esprimere le caratteristiche di un fenomeno aleatorio (caos, casuale, mancanza di logica, mancanza di motivazione) e di un fenomeno non aleatorio (ordine, regolarità, alternanza, schema, logica, motivazione, linearità). Nella quinta attività l'insegnante ha discusso con i ragazzi l'uso di questi termini, mettendo in evidenza l'aspetto contraddittorio (per esempio, la possibilità di osservare regolarità in fenomeni aleatori), gli impliciti assegnati a tali termini (per esempio, caos come mancanza di qualunque tipo di ordine) e l'utilità di introdurre nuovi termini (per esempio, aleatorio e aleatorietà) che non siano già usati quotidianamente e quindi potenzialmente ambigui. Nella riflessione sull'uso delle parole nella descrizione dei risultati prodotti da questi semplici esperimenti, sulla necessità di impiegare queste parole con maggior precisione e sulla possibilità di usare le attività fatte in classe come guida per un uso più consapevole delle parole, ci è sembrato di ravvisare l'aspetto più interessante del laboratorio.
Nella discussione che ha seguito questa attività, la maggior parte degli allievi è stata concorde nell'osservare che c'erano troppi dati per cui era impossibile individuare una regola seppure dovesse esserci. Si è arrivati quindi alla conclusione che era il caso di individuare degli indici sintetici che permettessero di chiarire meglio se esistono delle caratteristiche distintive delle varie sequenze. Si è proposto quindi di contare il numero di teste e croci delle varie sequenze e di contare il numero di facce uguali che

si presentavano consecutivamente. Avevamo in effetti progettato la scheda della successiva quarta attività per fissare l'attenzione degli studenti sulla presenza di sequenze di simboli uguali consecutivi di lunghezza significativa e volevamo che nella discussione emergesse, in maniera condivisa e possibilmente partendo dai suggerimenti degli studenti stessi, la proposta di guardare a questo tipo di sequenze. Ciò si è verificato puntualmente e senza forzature.

3.4 Quarta attività

Nella quarta attività (Allegato 4) si è chiesto di completare le ultime quattro colonne delle tre tabelle fornite nella terza attività, inserendo:

1. il numero di teste in ogni sequenza;
2. il numero medio di teste di ogni tabella;
3. per ogni sequenza, "SÌ" se sono presenti 5 T consecutive, "NO" altrimenti;
4. per ogni sequenza, "SÌ" se sono presenti 5 C consecutive, "NO" altrimenti.

Lo scopo di questa quarta attività era quello di stimolare una discussione sulla possibilità che i suggerimenti emersi dalle riflessioni sulla terza attività potessero essere impiegati per "misurare" la distanza tra diversi meccanismi di produzione di sequenze binarie o comunque potessero indicare una strada per introdurre una tale misura.
Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti per la tabella dei lanci immaginati (**Figura 3**) e per quella dei lanci realmente effettuati (**Figura 4**).[10]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	N. Teste	Media	TTTTT	CCCCC
T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	11	10,1	NO	NO
T	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	T	T	C	C	C	C	T	C	T	C	C	T	C	9		NO	NO
T	C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	9		NO	NO
T	T	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	C	T	C	C	C	C	C	9		NO	SI
T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	T	C	13		NO	NO
T	T	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	T	C	T	10		NO	NO
C	T	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	10		NO	NO
C	C	T	T	T	C	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	10		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	C	T	T	C	T	10		NO	NO
C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	T	C	C	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
C	T	T	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	9		NO	NO
T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	T	C	C	T	11		NO	NO
T	T	T	C	C	T	C	T	T	T	T	T	C	C	C	C	T	T	C	T	12		SI	NO

Figura 3. Tabella relativa ai lanci immaginati.

10. Le ragazze e i ragazzi hanno analizzato, assieme a quelle riportate in **Figura 3** e **Figura 4**, anche la tabella ottenuta considerando le sequenze generate con la calcolatrice. Per non appesantire la lettura dell'articolo, quest'ultima viene fornita nell'Allegato 5.

T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	T	C	T	C	C	C	C	C	T	T	10	9,9	NO	SI
T	C	C	C	T	C	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	T	C	C	T	T	C	T	T	T	C	C	C	C	C	C	C	T	C	8		NO	SI
T	T	C	C	T	T	T	T	T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	13		SI	NO
T	C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	C	T	C	C	T	C	T	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	C	C	T	C	C	C	C	C	C	C	T	C	C	T	C	5		NO	SI
T	T	C	T	C	T	T	T	C	C	T	C	C	C	C	T	T	C	T	C	10		NO	NO
T	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	T	C	11		NO	NO
C	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	T	T	C	14		NO	NO
T	T	C	C	C	C	T	T	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	C	C	9		NO	NO
C	T	T	C	C	T	C	C	C	C	C	T	T	C	T	T	C	T	C	T	9		NO	SI
C	C	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	T	C	T	T	T	T	T	12		SI	NO
C	C	C	C	T	C	C	C	T	T	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	11		SI	NO
C	T	T	T	T	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	T	T	T	T	8		NO	SI
C	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	C	C	T	C	9		NO	NO
C	T	T	C	T	C	T	T	C	T	C	C	T	T	T	C	T	C	C	C	10		NO	NO
C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	9		NO	NO

Figura 4. Tabella relativa ai lanci della moneta realmente effettuati.

Una volta completate le tabelle, abbiamo chiesto se, sulla base del contenuto delle nuove colonne, fosse possibile fare nuove osservazioni in merito alla possibilità di distinguere i tre meccanismi di produzione di sequenze binarie. Alcuni alunni hanno scritto che il numero di sottostringhe di lunghezza almeno 5 di simboli adiacenti uguali che si osservano nelle sequenze della tabella (tutte teste o tutte croci) è un indicatore che sembra in grado di distinguere tra le sequenze prodotte lanciando la moneta da quelle prodotte dai lanci immaginati. Per esempio: «Nella tabella fatta con il lancio della moneta ci sono molte più serie da 5 di T o C mentre nella tabella della calcolatrice, ce ne stanno poche. Nella tabella fatta con l'immaginazione invece, ne sono presenti ancora di meno».

3.5 Quinta attività

Nella quinta attività abbiamo tirato le fila del laboratorio con una discussione tra gli alunni orchestrata dall'insegnante. L'obiettivo era quello di chiarire come sia possibile affrontare il problema di distinguere i diversi meccanismi di produzione di sequenze binarie, senza entrare nei dettagli degli strumenti del calcolo delle probabilità, ma appoggiando la discussione su quanto era stato sperimentato nelle quattro attività descritte.
I punti principali emersi nella discussione tra i ragazzi, che l'insegnante ha messo in evidenza e chiarito in maniera più rigorosa, sono stati i seguenti.

1. Lanciando una volta una moneta non truccata la fiducia, prima di effettuare il lancio, in un esito (testa) piuttosto che nell'altro (croce) è la stessa.
2. È possibile che in alcune particolari sequenze di lanci ripetuti della moneta non truccata (20 lanci nelle nostre attività) si possano osservare forti sbilanciamenti tra il numero di teste e di croci. Ripetendo più volte la sequenza dei lanci ci aspettiamo però che il numero totale delle

teste non sia significativamente diverso da quello delle croci, o più precisamente che la probabilità di osservare un numero di teste significativamente diverso da quello delle croci tenda a diventare nulla al crescere della lunghezza della sequenza. L'eventuale squilibrio osservato in una particolare sequenza si può interpretare come una "variabilità casuale". La nostra aspettativa che i risultati di altri esperimenti tendono a bilanciare questi numeri, non si spiega con l'ipotesi di un meccanismo volontario o meccanicamente determinato, ma per una "legge generale del caos" relativa alla nostra aspettativa sul comportamento di una lunga serie di eventi indipendenti.[11]

3. Anche gli altri meccanismi di produzione di sequenze binarie che abbiamo considerato producono, nelle tabelle riassuntive, lo stesso bilanciamento tra teste e croci osservato per il lancio della moneta. Questi meccanismi esercitano però un controllo di carattere diverso sulla produzione delle sequenze. Le sequenze immaginate sono controllate da chi le immagina, che interviene, di norma, quando si rende conto di uno sbilanciamento, cioè che stanno uscendo troppe croci o troppe teste. Le sequenze prodotte dalla calcolatrice sono invece controllate da un algoritmo. Conoscendo l'algoritmo e i dati iniziali, la successione prodotta dalla calcolatrice è completamente determinata. Ma guardando solo le sequenze prodotte, è possibile distinguerle da quelle prodotte dai lanci immaginati? E da quelle prodotte dal lancio della moneta? L'insegnante ha messo in evidenza come non sia possibile dare una risposta secca a domande di questo genere ma solo, data una sequenza, assegnare maggiore o minore fiducia all'ipotesi che sia stata prodotta da un meccanismo piuttosto che da un altro.
4. Siccome il controllo sulle sequenze immaginate si esercita a piccola scala, è naturale pensare che questo meccanismo eviti di produrre lunghe successioni di simboli uguali. Come suggerito dagli alunni si può cercare di cogliere la particolarità di questo meccanismo osservando la scarsa presenza di *sottostringhe omogenee* (costituite cioè da tutte teste o tutte croci) di lunghezza cinque.
5. Ipotizzando che nei lanci immaginati, chi immagina i lanci tenda a evitare di produrre sottostringhe omogenee di lunghezza cinque, si è quindi pensato di misurare la differenza tra le tabelle introducendo un indice che calcola il numero di sottostringhe omogenee di lunghezza cinque, come fatto nella quarta attività. Se si nota una grande differenza tra gli indici di due tabelle, possiamo ragionevolmente dubitare che il meccanismo di controllo sia lo stesso. Questa semplice idea non è così facile da realizzare. Innanzitutto, perché le differenze devono essere *statisticamente significative* in un senso che va specificato rigorosamente e che è fuori dagli obiettivi del laboratorio e poi perché questi indici non danno risposte certe ma solo probabili. In altre parole, una differenza statisticamente significativa tra gli indici associati a due tabelle non dà la certezza che queste siano prodotte da meccanismi diversi ma solo un'alta probabilità che ciò sia accaduto.
6. Nel nostro caso il conteggio delle sottostringhe omogenee di lunghezza cinque, permetterebbe di concludere, con il calcolo delle probabilità, che l'indice di una delle tabelle è significativamente minore di quello delle altre. Questa tabella si può quindi ragionevolmente identificare con quella prodotta dai lanci immaginati, come è in realtà. Il confronto degli indici delle altre due tabelle non dà invece sufficiente evidenza statistica per distinguerle, cioè non permette di distinguere le stringhe ottenute con il lancio della moneta da quelle ottenute con la calcolatrice.

11. Si veda anche la parte finale dell'introduzione dove abbiamo utilizzato le parole di uno dei referee per aiutarci ad esprimere meglio questo punto essenziale che, pur avendo necessità di usare strumenti avanzati per essere espresso in maniera chiara necessita a nostro avviso uno sforzo per cominciare ad essere affrontato anche all'inizio di un percorso di apprendimento/insegnamento della probabilità.

4 Conclusioni

Le attività descritte hanno permesso agli alunni di riflettere sul concetto di probabilità, mettendo in discussione alcune convinzioni molto comuni e difficili da superare e scoprendo che le sequenze aleatorie possono avere proprietà sorprendenti ed inaspettate (Chaitin, 2000).
Ad esempio, all'inizio del laboratorio, nell'effettuare 20 lanci di una moneta, gli alunni si aspettavano che:

1. Il numero di teste e croci dovesse *sempre* essere circa lo stesso.
2. Non si potessero *mai* presentare lunghe sequenze di croci o teste consecutive.

Al termine delle attività invece hanno modificato le loro aspettative rendendosi conto del fatto che:

1. Si *possono* osservare sequenze con molte più teste che croci.
2. Si *possono* osservare lunghe sequenze di croci o teste consecutive.

Questo laboratorio ha invitato e, noi crediamo, aiutato, gli studenti a prendere consapevolezza di alcuni aspetti elementari dei fenomeni aleatori, che risultano insidiosi e difficili da descrivere. Riteniamo particolarmente efficace la richiesta di riportare in forma scritta la descrizione dei fenomeni presi in considerazione e quello che ci si aspettava di osservare. Il lavoro sul linguaggio svolto dall'insegnante durante le discussioni collettive delle schede compilate dai ragazzi, cioè la discussione sul significato attribuito ai termini impiegati e l'adeguatezza delle descrizioni proposte, potrebbe risultare ancora più produttivo coinvolgendo attivamente l'insegnante di italiano.
Il laboratorio proposto non ha la pretesa di indicare un percorso esaustivo per comprendere la complessità delle sequenze binarie generate da modelli probabilistici, anche molto semplici. Si tratta soltanto di un primo tentativo di trattare questa problematica all'inizio di un percorso di insegnamento/apprendimento del calcolo delle probabilità, che spesso, a nostro avviso, viene ridotto a mero calcolo combinatorio. L'argomento delle sequenze binarie è particolarmente adatto allo scopo di mettere in luce alcuni aspetti caratteristici e insidiosi della probabilità.
Un aspetto interessante che è emerso dall'analisi delle schede, e che non avevamo previsto si manifestasse in maniera così evidente, riguarda la difficoltà di accettare che la calcolatrice possa produrre sequenze indistinguibili da quelle prodotte lanciando una moneta. Si è notato che la maggior parte degli alunni sono convinti che le sequenze prodotte dalla calcolatrice seguano necessariamente uno schema ben preciso e si avvicinino a quelle generate dalla mente umana (forse perché associano il calcolatore a programmi costruiti seguendo procedure ben definite) mentre in realtà le sequenze prodotte dalla calcolatrice, attraverso il generatore di numeri (pseudo) casuali, hanno una distribuzione di frequenze praticamente indistinguibile da quella generata dalle monete. La calcolatrice usa un algoritmo deterministico per simulare il lancio della moneta. Questi algoritmi sono stati sempre più raffinati nel corso degli anni e sono in grado di produrre sequenze che risultano praticamente indistinguibili da quelle ottenute con il lancio di una moneta non truccata, nel senso che nessuno dei test ideati per distinguerle, che generalizzano in modi sofisticati l'idea di contare le sottostringhe omogenee di lunghezza fissata, sono in grado di rilevare differenze statisticamente significative.[12] Possiamo quindi concludere che la fiducia nella possibilità di simulare il lancio di una moneta (e di molti altri fenomeni aleatori) con il calcolatore è ben riposta. Si tratta di una questione della massima importanza, che è per noi necessario ben chiarire prima di usare il calcolatore per fare simulazioni. Su questa fiducia che,

12. Sarebbe interessante approfondire le modalità di generazione di sequenze (pseudo) aleatorie anche con la collaborazione del docente di informatica, nelle scuole in cui è presente.

come abbiamo visto nelle riflessioni degli allievi, è tutt'altro che scontata a priori, si fonda la possibilità di utilizzare il calcolatore o la calcolatrice per simulare con un algoritmo deterministico un processo aleatorio e pertanto, rafforzare questa fiducia ci sembra un obiettivo didattico di primaria importanza nel processo di apprendimento/insegnamento della probabilità.

Bibliografia

Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F. S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società*, *2*(1), 293–304.

Chaitin, G. J. (2000). Casualità e dimostrazione matematica. *Le Scienze, Quaderni*, *98*, 10–15.

De Finetti, B. (1970). *Teoria della Probabilità.* Einaudi.

Gage, J., & Spiegelhalter, D. (2016). *Teaching Probability.* Cambridge University Press.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristic and biases*. Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.