

# Voorwoord

Wiskunde heeft me altijd al geboeid. Reeds van in de lagere school had ik een uitgesproken voorkeur voor het vak dat zovele anderen vreesden, en ook tijdens het secundair onderwijs kon ik mijn liefde voor het vak niet verbergen. De inzet en motivatie van de onderwijzers in de gemeenschapsschool *Kouterbos* te Waasmunster en van de leerkrachten wiskunde van het *Sint-Lodewijkscollege* in Lokeren hebben hier vast en zeker toe bijgedragen. Ik kan hen alleen maar bedanken voor de manier waarop ze erin geslaagd zijn hun kennis op een interessante manier door te geven aan de volgende generatie. Het voorliggend proefschrift mag in die zin dan ook als een stukje van hun werk beschouwd worden.

De jaren op het college markeren op wiskundig vlak nog een andere belangrijke gebeurtenis in mijn leven. Het was tijdens de zomervakantie tussen het vierde en vijfde jaar van de *Wetenschappelijke A* (het laatste jaar waarin een richting deze benaming kreeg, nadien werd het eenheidstype ingevoerd), dat ik samen met mijn klasgenoot en goede vriend Jeroen Buysse het plan had opgevat om alle tot dan toe geziene leerstof wiskunde “eens op de computer te zetten”. Wat oorspronkelijk bedoeld was als een werk voor eigen gebruik, werd gedurende het vijfde en zesde jaar nauwgezet aangevuld en kwam via een ganse reeks toevalligheden als volwaardig manuscript in handen van *Uitgeverij Pelckmans*. En wat we enkel durfden dromen werd werkelijkheid: de uitgeverij zag wel brood in onze volgekrabbelde blaadjes en zette het licht op groen voor publicatie. Dat ze daarbij niet over één nacht ijs gingen zal niemand verbazen (we waren tenslotte nog maar achttien), maar in mei 1995 werd het *Wiskundig Vademecum* officieel boven de doopvont gehouden. Het boek, dat een 216 pagina's tellende synthese brengt van de leerstof wiskunde van het secundair onderwijs, werd een succes en is ondertussen met een totale oplage van meer dan 20.000 exemplaren reeds aan zijn zevende druk toe. Gedreven door dit succes, en ook omdat ik het gewoon graag deed, mocht ik het ganse avontuur nog eens overdoen. In september 1996 – ik maak een lang verhaal kort – verscheen het *Wetenschappelijk Vademecum*, een synthese van de leerstof chemie en fysica van het secundair onderwijs. En ook dit bleek een voltreffer. De oplage overschrijdt ondertussen de 10.000 exemplaren.

Als liefhebber van het vak was het een eenvoudige keuze om na mijn jaren in Lokeren vier jaar *Wiskunde* te gaan studeren aan de Universiteit van Gent. Ik studeerde er in juni 1998 af als *Licentiaat in de Wiskunde, Optie Toegepaste Wiskunde*. Gedurende de laatste twee jaar van deze studies werd ik in het bijzonder gecharmeerd door de vakken *Vaagheid- en Onzekerheidsmodellen* en *Capita Selecta uit de vaagverzamelingenleer* van Prof. Etienne Kerre. De cursussen werden met zo'n intense gedrevenheid gedoceerd, dat ze de interesse voor dit vakgebied in mij aanwakkerden. Het is dan ook niet te verwonderen dat ik mijn Licentiaatsverhandeling onder het promotorschap van Prof. Kerre heb afgewerkt. Het is bovendien in deze periode dat Prof. Kerre me vroeg of ik geen interesse had in wetenschappelijk onderzoek, en of ik niet geïnteresseerd zou zijn in een mandaat van doctoraatsbursaal. Ik mocht gerust enkele dagen nadenken over zijn voorstel, maar het heeft geen vijf seconden geduurd alvorens ik met een volmondig “ja” het aanbod aannam.

En zo komt het dat ik sinds september 1998 werkzaam ben als wetenschappelijk onderzoeker in de Vakgroep *Toegepaste Wiskunde en Informatica* van de Universiteit Gent. Samen met enkele andere doctoraatsstudenten werk ik nu bijna vier jaar actief mee aan het GOA-project *Vaaglogische en niet-lineaire modellen voor geavanceerde restauratie en compressie van multimedia data* van het Bijzonder Onderzoeksfonds van onze alma mater. Hierbij ben ik voornamelijk actief geweest op het vlak van vaaglogisch gebaseerde modellen voor grijswaardemorfologie en vaaglogisch gebaseerde filters voor de onderdrukking van ruis in beelden. Het voorliggend proefschrift bevat een groot deel van de resultaten die in het kader van dit project bereikt werden.

Mijn wetenschappelijke activiteiten van de voorbije vier jaar heb ik als enorm boeiend ervaren. Boeiend omwille van de theoretische en praktische uitdagingen die ermee gepaard gingen, maar ook boeiend omwille van de uiteenlopende kansen en mogelijkheden die ik gekregen én benut heb om mij op andere vlakken te ontplooien. Kansen en mogelijkheden die stuk voor stuk aangereikt of ondersteund werden door mijn promotor. Ik denk hierbij in het bijzonder aan publicaties in internationale tijdschriften, het bijwonen van en het geven van voordrachten op internationale conferenties, de studieverblijven aan buitenlandse universiteiten, het verzorgen van de redactie van twee internationaal gepubliceerde boeken (met name *Fuzzy Techniques in Image Processing* en *Fuzzy Filters for Image Processing*), het organiseren van sessies of workshops op internationale conferenties, en het co-management van de internationale FLINS conferentie die in september van dit jaar voor de vijfde maal georganiseerd wordt. Deze activiteiten hebben niet alleen bijgedragen tot de verspreiding van bekomen onderzoeksresultaten, maar hebben ook geleid tot de opbouw van een netwerk van internationale contacten. Dergelijke contacten zijn onmisbaar om het onderzoek in een internationaal perspectief te plaatsen. Daarnaast vermeld ik ook nog de succesvolle voltooiing van de *Doctoraatsopleiding Wiskunde* en de postacademische opleiding *Informatie- en communicatietechnologie voor managers*. In het kader van deze opleidingen maakte ik kennis met enkele verwante en interessante domeinen m.b.t. tot mijn onderzoeksonderwerp. Al deze aspecten van het wetenschappelijk onderzoek hebben ongetwijfeld bijgedragen tot mijn vorming en verdere ontplooiing als wetenschapper.

Dit alles mondt vandaag uit in het voorliggend proefschrift.

Een groot en welgemeend woord van dank gaat hierbij uit naar mijn promotor, Prof. Etienne Kerre. Gedurende vier jaar heeft hij me steeds met veel enthousiasme begeleid in mijn wetenschappelijk onderzoek, en heeft hij me hierbij heel wat kansen geboden. Zijn werkkijver is verbluffend, en de natuurlijke gave om zijn liefde voor onderzoek over te brengen op zijn doctoraatsstudenten werd en wordt ten zeerste geapprecieerd.

Dank ook aan de collega's en oud-collega's van de *Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica* waar ik de afgelopen jaren zowel een vriendschappelijke als professionele relatie mee heb opgebouwd. In het bijzonder vermeld ik Dietrich Van der Weken, Martine De Cock en Frederik Vynckier, met wie het vruchtbaar en aangenaam samenwerken was (de vergelijkende studie van vaagfilters verder in dit proefschrift is bijvoorbeeld het resultaat van gezamenlijk werk met Dietrich, en de studie van vaagrelationele operatoren is ontsproten uit een samenwerking met Martine). Dank ook aan de collega's van de *Faculteit Toegepaste Wetenschappen* met wie ik samen op het GOA-project werkzaam was. Hier vermeld ik in het bijzonder Dimitri Van De Ville, Prof. Ignace Lemahieu en Prof. Wilfried Philips, met wie ik eveneens een zeer goede samenwerking gekend heb (bijvoorbeeld bij de ontwikkeling van de GOA filter). De samenwerking tussen wiskundigen enerzijds en ingenieurs anderzijds was voor beide partijen ongetwijfeld een interessante ervaring. Dank tenslotte aan de talrijke buitenlandse collega's met wie ik de afgelopen jaren boeiende contacten heb gehad, hetzij op conferenties, hetzij via email. In het bijzonder vermeld ik Anja Radzikowska voor onze samenwerking op het vlak van verbanden tussen vaagmorfologie en vaagruwverzamelingsleer, en Prof. Henk Heijmans voor onze samenwerking op het vlak van vaagadjuncties.

De voorbije maanden waarin ik dit proefschrift heb neergeschreven zullen me blijven als één van de zwaarste uit mijn nog jeugdige leven. Er is natuurlijk het vele schrijfwerk, de stress die exponentieel toeneemt naarmate de deadline nadert, de nachtelijke uurtjes (die eveneens toenemen naarmate de deadline nadert), de opoffering van nagenoeg alle vrije tijd, en de tijdelijke stopzetting van het sociale leven. De voorbije maanden zullen me echter ook blijven omwille van een andere reden. Op welgeteld de tweede dag dat ik het schrijven had aangevangen vernam ik dat bij mijn moeder kanker aan de stembanden was vastgesteld. Kort daarop heeft zij twee operaties ondergaan en heeft men een laryngectomie uitgevoerd, dit is een operatie waarbij het volledige strottenhoofd, inclusief de stembanden, wordt verwijderd. Sinds de tweede helft van maart, een week voor de voltooiing van dit proefschrift, is mijn moeder terug thuis en staat ze voor een lange herstelperiode en een nog zwaardere aanpassingsperiode. Het hoeft niet gezegd dat een dergelijke dramatische gebeurtenis een diepe indruk op mij heeft nagelaten. Dat mijn moeder gedurende deze ganse tijd zichzelf steeds op de tweede plaats wilde stellen door me voortdurend aan te porren om me te concentreren op het proefschrift toont aan wat voor een bijzonder iemand zij is. Ook mijn vader was in deze moeilijke maanden een onmisbare steun voor mij. Hij heeft er alles aan gedaan om ervoor te zorgen dat ik in de beste omstandigheden aan mijn proefschrift kon werken. Het is dan ook welgemeend dat ik dit werk aan mijn ouders opdraag!

Mike Nachtegael  
Gent, 27 maart 2002.



# Inhoudsopgave

<b>Voorwoord</b>	<b>1</b>
<b>Inhoudsopgave</b>	<b>4</b>
<b>Inleiding</b>	<b>9</b>
<b>1 Basisbegrippen uit de vaagverzamelingenleer</b>	<b>11</b>
1.1 Van klassieke verzamelingen naar vaagverzamelingen . . . . .	11
1.1.1 Een inleidend voorbeeld . . . . .	12
1.1.2 Vaagverzamelingen . . . . .	13
1.1.3 Begrippen i.v.m. vaagverzamelingen . . . . .	15
1.2 Van klassieke logica naar vaaglogica . . . . .	16
1.2.1 De binaire of tweewaardige logica . . . . .	16
1.2.2 Vaaglogica en vaaglogische operatoren . . . . .	17
1.2.3 Hulpstellingen i.v.m. vaaglogische operatoren . . . . .	22
1.3 Bewerkingen met vaagverzamelingen . . . . .	26
1.3.1 Complement, doorsnede en unie van vaagverzamelingen . . . . .	26
1.3.2 Inclusie van vaagverzamelingen . . . . .	28
<b>2 Een studie van vaagrelationele operatoren</b>	<b>29</b>
2.1 Inleiding . . . . .	30
2.1.1 Klassieke relaties en vaagrelaties . . . . .	30
2.1.2 Vaagrelationele beelden . . . . .	33
2.2 Eigenschappen van de vaagrelationele operatoren . . . . .	35
2.2.1 Bijzondere gevallen . . . . .	35
2.2.2 Dualiteit en codualiteit . . . . .	37
2.2.3 Codualiteit . . . . .	40
2.2.4 Monotoniteit . . . . .	41
2.2.5 Interactie met unie van vaagrelaties . . . . .	42
2.2.6 Interactie met unie van vaagverzamelingen . . . . .	50
2.2.7 Interactie met doorsnede van vaagrelaties . . . . .	53
2.2.8 Interactie met doorsnede van vaagverzamelingen . . . . .	58
2.2.9 Interactie met translatie . . . . .	62
2.2.10 Interactie met schaling . . . . .	63
2.2.11 Expansiviteit en restrictiviteit . . . . .	64
2.2.12 Inclusie-eigenschap . . . . .	64
2.2.13 Idempotentie . . . . .	66
2.2.14 Interactie tussen de operatoren $\clubsuit$ en $\heartsuit$ . . . . .	68
2.3 Toepassingen . . . . .	69
2.3.1 Hoogte en plint van een vaagverzameling . . . . .	70
2.3.2 Samenstellen van vaagrelaties . . . . .	71
2.3.3 Vaagruwverzamelingen . . . . .	72

<b>3</b>	<b>Morfologie: basisbegrippen en klassieke modellen</b>	<b>75</b>
3.1	Binaire morfologie . . . . .	75
3.1.1	Representatie van binaire beelden . . . . .	75
3.1.2	Morfologische basisoperatoren . . . . .	76
3.1.3	Eigenschappen van de morfologische basisoperatoren . . . . .	81
3.1.4	Enkele toepassingen . . . . .	87
3.2	Klassieke grijswaardemorfologie van het eerste type: de schijfjesbenadering . . . . .	88
3.2.1	Representatie van grijswaardebeelden . . . . .	89
3.2.2	s-Morfologische basisoperatoren . . . . .	90
3.2.3	Eigenschappen van de s-morfologische basisoperatoren . . . . .	93
3.2.4	Enkele toepassingen . . . . .	95
3.3	Klassieke grijswaardemorfologie van het tweede type: de umbrabenadering . . . . .	97
3.3.1	Representatie van grijswaardebeelden . . . . .	97
3.3.2	u-Morfologische basisoperatoren . . . . .	99
3.3.3	Eigenschappen van de u-morfologische basisoperatoren . . . . .	104
3.3.4	Enkele toepassingen . . . . .	114
3.4	Verbanden tussen binaire en klassieke grijswaardemorfologie . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Een vergelijkende studie van vaagmorfologieën</b>	<b>119</b>
4.1	Structuur van het hoofdstuk . . . . .	120
4.2	Representatie van grijswaardebeelden in het kader van vaagmorfologie . . . . .	120
4.3	Vaagmorfologieën gebaseerd op de fuzzificatie van logische operatoren . . . . .	121
4.3.1	Het algemeen vaaglogisch model (AVLM): algemene vervaging van logische operatoren . . . . .	121
4.3.2	BM-model: specifieke vervaging van logische operatoren . . . . .	129
4.4	Vaagmorfologieën gebaseerd op de fuzzificatie van inclusie . . . . .	130
4.4.1	Z-model: vaaginclusie van Zadeh . . . . .	130
4.4.2	SD-model: vaaginclusie van Sinha & Dougherty . . . . .	134
4.4.3	K-model: vaaginclusie van Kitainik . . . . .	139
4.4.4	BK-model: vaaginclusie van Bandler & Kohout . . . . .	144
4.4.5	Afsluitende opmerking . . . . .	146
4.5	Andere modellen voor vaagmorfologie . . . . .	146
4.5.1	M-model: vervaging van de Minkowski optelling . . . . .	147
4.5.2	SI-model: vaagmorfologie gebaseerd op vaagintegralen . . . . .	148
4.5.3	DG-model: vaagmorfologieën gebaseerd op de erosies van di Gesu . . . . .	152
4.6	Verbanden tussen binaire morfologie, klassieke grijswaardemorfologie en vaagmorfologie . . . . .	158
4.6.1	Het AVLM . . . . .	158
4.6.2	De andere vaagmorfologische modellen . . . . .	161
4.7	Samenvatting . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Eigenschappen van het AVLM</b>	<b>165</b>
5.1	Het AVLM en vaagrelationele operatoren . . . . .	165
5.1.1	Formeel verband . . . . .	165
5.1.2	Eigenschappen van de geassocieerde relatie . . . . .	166
5.2	Eigenschappen van het AVLM . . . . .	169
5.2.1	Bijzondere gevallen . . . . .	171
5.2.2	Dualiteit . . . . .	172
5.2.3	Co-dualiteit . . . . .	172
5.2.4	Monotoniteit . . . . .	173
5.2.5	Interactie met unie van structuurelementen . . . . .	174
5.2.6	Interactie met unie van beelden . . . . .	175
5.2.7	Interactie met doorsnede van structuurelementen . . . . .	177
5.2.8	Interactie met doorsnede van beelden . . . . .	178

5.2.9	Interactie met translatie . . . . .	179
5.2.10	Interactie met schaling . . . . .	180
5.2.11	Expansiviteit en restrictiviteit . . . . .	181
5.2.12	Inclusie-eigenschappen . . . . .	181
5.2.13	Idempotentie . . . . .	182
5.2.14	Interactie tussen de operatoren $D_C$ en $E_I$ . . . . .	183
5.2.15	Commutativiteit en associativiteit van de vaagmorfologische dilatatie . . . . .	184
5.2.16	Combinaties van de vaagmorfologische dilatatie en erosie . . . . .	184
5.2.17	Het principe van lokale kennis . . . . .	185
5.2.18	Adjunctie eigenschap . . . . .	185
5.3	Opmerking . . . . .	186
<b>6</b>	<b>Vaagadjuncties</b> . . . . .	<b>189</b>
6.1	Klassieke adjuncties . . . . .	189
6.2	Het theoretisch kader . . . . .	190
6.2.1	Het oorspronkelijk logisch kader . . . . .	190
6.2.2	Veralgemening van het logisch kader . . . . .	191
6.2.3	De vaaginclusie . . . . .	191
6.3	Vaagadjuncties . . . . .	192
6.3.1	Definitie . . . . .	192
6.3.2	Eigenschappen van vaagadjuncties . . . . .	193
6.4	Voorbeelden van vaagadjuncties . . . . .	198
6.5	Verder onderzoek . . . . .	199
<b>7</b>	<b>Een vaaglogisch filter voor de reductie van gaussische ruis</b> . . . . .	<b>201</b>
7.1	Inleiding . . . . .	202
7.1.1	Representatie van beelden . . . . .	202
7.1.2	Ruistypes . . . . .	202
7.2	Constructie van de filter . . . . .	205
7.2.1	Bepaling van de vaag-gradiëntwaarden . . . . .	205
7.2.2	Bepaling van de correctieterm . . . . .	208
7.2.3	Bepaling van de adaptieve parameter $K$ . . . . .	209
7.2.4	Samenvatting . . . . .	211
7.3	Experimenteel onderzoek van de GOA filter . . . . .	211
7.3.1	Schatting van de ruis . . . . .	212
7.3.2	De parameter $\alpha$ en het aantal iteraties . . . . .	213
7.4	Numerieke en visuele resultaten . . . . .	216
<b>8</b>	<b>Een vergelijkende studie van vaaglogische filters voor ruisonderdrukking</b> . . . . .	<b>221</b>
8.1	Klassieke filters . . . . .	222
8.1.1	Lineaire filters . . . . .	222
8.1.2	Niet-lineaire filters . . . . .	223
8.2	Vaag-klassieke filters . . . . .	225
8.2.1	FM - vaag mediaan filter . . . . .	225
8.2.2	WFM - gewogen vaag gemiddelde filter . . . . .	227
8.2.3	AWFM1 - eerste adaptieve gewogen vaag gemiddelde filter . . . . .	229
8.2.4	AWFM2 - tweede adaptieve gewogen vaag gemiddelde filter . . . . .	230
8.2.5	FDD - vaagbeslissings gerichte filter . . . . .	232
8.2.6	CK - Choi & Krishnapuram filter . . . . .	233
8.3	Vaagfilters . . . . .	235
8.3.1	FIRE - vaaginferentie met anders-actie . . . . .	235
8.3.2	DS-FIRE - tweestaps FIRE filter . . . . .	238
8.3.3	PWL-FIRE - stuksgewijs lineaire FIRE filter . . . . .	241
8.3.4	IFC - iteratieve vaagcontrole filter . . . . .	243

8.3.5	MIFC - gewijzigde IFC filter . . . . .	244
8.3.6	EIFC - uitgebreide IFC filter . . . . .	245
8.3.7	SFC - uitvlakkende vaagcontrole filter . . . . .	245
8.3.8	SSFC - verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter . . . . .	246
8.3.9	GOA filter . . . . .	247
8.4	Classificatie van vaagfilters op basis van theoretische criteria . . . . .	247
8.4.1	Classificatie op basis van ruistype . . . . .	248
8.4.2	Classificatie op basis van vaaggehalte . . . . .	248
8.4.3	Classificatie op basis van vaagregels . . . . .	249
8.4.4	Classificatie op basis van het type algoritme . . . . .	249
8.4.5	Classificatie op basis van complexiteit . . . . .	250
8.4.6	Samenvattende tabel . . . . .	250
8.5	Bespreking van de vaagfilters op basis van experimentele resultaten . . . . .	252
8.5.1	Zout & peper ruis . . . . .	252
8.5.2	Gaussische ruis . . . . .	255
8.5.3	Samenvattende tabel . . . . .	258
	<b>Nawoord</b>	<b>259</b>
	<b>Bibliografie</b>	<b>263</b>



# Inleiding

Beelden spelen reeds van oudsher een zeer belangrijke rol in het menselijk leven. Hun voornaamste functie is het visueel vastleggen en overdragen van informatie. Deze informatie kan van zeer uiteenlopende aard zijn: recreatief (familiefoto's en vakantiefoto's), informatief (voor commerciële toepassingen), medisch (MRI-beelden en CT-scans), wetenschappelijk (ruimtefoto's van de Hubble telescoop) of militair (satellietbeelden van het aardoppervlak). Het is dan ook niet verwonderlijk dat beeldverwerking een belangrijk wetenschappelijk onderzoeksdomein is, met een steeds bredere waaier van toepassingen. Deze toepassingen resulteren uit de interactie van fundamenteel wetenschappelijk onderzoek enerzijds, en de ontwikkeling van nieuwe technologische mogelijkheden anderzijds.

In dit proefschrift leveren we een aantal bijdragen op het vlak van vaagmorfologische en vaaglogische technieken in beeldverwerking. Deze technieken zijn gebaseerd op de theorie van de vaagverzamelingenleer en de vaaglogica, en leiden tot nieuwe methodologieën die alternatief of complementair van aard zijn. Het proefschrift kan opgedeeld worden in drie delen: een eerste deel betreffende vaagverzamelingenleer in het algemeen (Hoofdstukken 1 en 2), een tweede deel betreffende klassieke en vaaglogische modellen voor morfologie (Hoofdstukken 3 t.e.m. 6), en een derde deel betreffende vaaglogisch gebaseerde filters voor ruisonderdrukking (Hoofdstukken 7 en 8).

**Vaagverzamelingenleer en vaagrelaties.** In Hoofdstuk 1 geven we de noodzakelijke theoretische ingrediënten die verder in het proefschrift veelvuldig gebruikt worden: we introduceren het concept vaagverzameling als model voor het modelleren van imprecieze informatie, we bestuderen vaaglogische operatoren als belangrijke noties in de vaaglogica, en verzamelen een aantal hulpresultaten ten behoeve van de volgende hoofdstukken. In Hoofdstuk 2 richten we dan onze aandacht op vaagrelaties, met name op twee types van vaagrelationele operatoren. De uitgebreide studie van deze operatoren is een zeer interessante theoretische uitdaging, en in die zin kan dit hoofdstuk als een zelfstandig geheel beschouwd worden. Het hoofdstuk is echter een onderdeel van dit proefschrift omwille van een andere reden. De vaagrelationele operatoren blijken zeer krachtige instrumenten te zijn met een sterk uniformiserend karakter. Verschillende theorieën uit het domein van de vaagverzamelingenleer kunnen m.b.v. deze operatoren beschreven worden, en verder zal blijken dat dit ook geldt voor de theorie der vaagmorfologie.

**Vaagmorfologische modellen.** Wiskundige morfologie is een apart onderzoeksdomein binnen de beeldverwerking. De theorie reikt een aantal morfologische transformaties aan die additionele informatie over een beeld en zijn inhoud kunnen opleveren. In Hoofdstuk 3 bespreken we de binaire morfologie (morfologie voor zwart-wit beelden) en twee klassieke uitbreidingen naar grijswaardemorfologie (morfologie voor beelden met grijstinten). We gaan onder meer in op de geometrische achtergrond, definiëren de morfologische basisoperatoren, en bestuderen de voornaamste eigenschappen. Deze kennis is noodzakelijk om de studie van vaaglogische modellen voor morfologie op een zinvolle manier te kunnen aanvatten en omkaderen.

Vaagmorfologische modellen zijn modellen voor grijswaardemorfologie, gebaseerd op technieken uit de vaagverzamelingenleer. De introductie en ontwikkeling van dergelijke modellen als mogelijk alternatief voor de klassieke uitbreidingen is zeker niet verwonderlijk, aangezien de binaire morfologie sterk gestoeld is op de klassieke verzamelingenleer. In Hoofdstuk 4 maken we een uitgebreide vergelijkende studie van vaagmorfologische modellen. We bespreken in totaal negen vaagmorfo-

logische modellen, waaronder een aantal nieuw geïntroduceerde modellen. Naast de studie van hun onderlinge verbanden, worden ook de verbanden met de binaire morfologie en de klassieke modellen voor grijswaardemorfologie onderzocht.

De vergelijkende studie van vaagmorfologische modellen leidt uiteindelijk tot de selectie van het meest algemeen vaaglogisch model (AVLM), d.w.z. het model waarin alle andere besproken modellen ingebed kunnen worden. Het is bijgevolg aangewezen om verder theoretisch onderzoek in dit model te verrichten. In Hoofdstuk 5 maken we dan ook een uitgebreide studie van de eigenschappen van het AVLM. We gaan na onder welke voorwaarden de eigenschappen van de binaire morfologie (zoals bestudeerd in Hoofdstuk 3) kunnen worden overgedragen, en steunen hierbij op het verband tussen de vaagmorfologische basisoperatoren enerzijds en de vaagrelationele operatoren uit Hoofdstuk 2 anderzijds. Op die manier wordt de kracht van deze vaagrelationele operatoren nogmaals geïllustreerd en gevaloriseerd.

In Hoofdstuk 6 tenslotte introduceren we het concept vaagadjunctie. Klassieke adjuncties spelen een belangrijke rol in de studie van morfologische operatoren zoals dilataties en erosies, in het bijzonder in het standaardwerk [31] van Henk Heijmans. Samen met Prof. Heijmans werden vaagadjuncties ingevoerd als een fuzzificatie van het klassieke begrip, met het oog op het ontwikkelen van een vaaglogisch gebaseerd model voor de generatie van algebraïsche dilataties en erosies. Hoofdstuk 6 bevat de reeds bekomen resultaten betreffende dit onderzoek.

**Vaaglogisch gebaseerde filters voor ruisonderdrukking.** Beelden kunnen om uiteenlopende oorzaken gecontamineerd zijn met ruis. Zo kan ruis bijvoorbeeld optreden door de aanwezigheid van stofdeeltjes op cameralenzen of scanners, ten gevolge van elektronische ruis in camera's en sensoren, of door elektromagnetische storingen bij transmissie van beelden uit de ruimte. Ruis komt in de praktijk vaak voor, en leidt in het algemeen tot een vermindering in beeldkwaliteit. Ruisonderdrukking is dan ook één van de belangrijkste uitdagingen en toepassingen in het domein van de beeldverwerking.

Er bestaan verschillende filters voor ruisonderdrukking, waaronder ook technieken die gebaseerd zijn op de vaagverzamelingenleer. In dit laatste deel van het proefschrift ontwikkelen we een nieuwe vaaglogisch gebaseerde filter, en maken we een vergelijkende studie van bestaande klassieke en vaaglogische filters teneinde hun performantie onderling te kunnen beoordelen.

In Hoofdstuk 7 introduceren we de zogenaamde GOA filter. Deze vaaglogisch gebaseerde filter is specifiek ontworpen voor de verwijdering van gaussische ruis, en dankt zijn naam aan het project waarin dit proefschrift tot stand is gekomen. Gaussische ruis is één van de meest voorkomende ruistypes in de praktijk, en in tegenstelling tot bijvoorbeeld zout & peper ruis, leveren bestaande ruisonderdrukkingfilters niet altijd even goede resultaten op. Met de GOA filter trachten we hieraan tegemoet te komen. Het achterliggende idee en de constructie van de filter worden uitgebreid besproken, en de invloed van de optredende parameters wordt nagegaan en beoordeeld m.b.v. enkele experimenten.

Om de performantie van de GOA filter ten volle te kunnen beoordelen is er niet alleen nood aan voldoende experimenten, maar is het ook noodzakelijk om de resultaten te vergelijken met deze van andere filters voor ruisonderdrukking. In Hoofdstuk 8 voeren we daarom een uitgebreide vergelijkende studie uit van verschillende klassieke en vaaglogisch gebaseerde ruisonderdrukkingfilters, waaronder de GOA filter. De studie wordt ondersteund door talrijke experimentele resultaten, en leidt enerzijds tot een classificatie van de betrokken filters op basis van theoretische criteria en anderzijds tot een classificatie op basis van performantie. Bovendien bevestigt de experimentele studie de goede resultaten van de GOA filter.

Nadat we de lezer doorheen deze verschillende hoofdstukken geleid hebben, vatten we de voornaamste bijdragen van dit proefschrift samen in het nawoord. We besteden er ook aandacht aan een ander belangrijk aspect van het onderzoek, namelijk de verspreiding ervan op internationaal niveau. Heel wat resultaten uit dit proefschrift zijn immers gepubliceerd in internationale tijdschriften of boeken en werden voorgesteld op internationale conferenties. We houden er dan ook aan hierover te rapporteren.

# Hoofdstuk 1

## Basisbegrippen uit de vaagverzamelingenleer

In dit hoofdstuk verzamelen we een aantal basisbegrippen uit de vaagverzamelingenleer en de vaaglogica. Het materiaal dat hier wordt gepresenteerd zal verder in het proefschrift, al dan niet expliciet, veelvuldig voorkomen en gehanteerd worden. Meteen raakt de lezer ook vertrouwd met een aantal notaties.

We hebben gepoogd de verschillende benodigde elementen op een zo logisch mogelijke wijze te bundelen. Naast een aantal definities bevat dit hoofdstuk ook een aantal theoretische resultaten. Hierbij hebben we ons zoveel mogelijk trachten te beperken tot het geven van die resultaten die we verder effectief gebruiken. In die zin mag het hoofdstuk niet opgevat worden als een klassieke inleiding tot de vaagverzamelingenleer, maar veeleer als een bundeling van noodzakelijke ingrediënten voor de verdere lectuur van dit proefschrift.

In een eerste paragraaf illustreren we met een voorbeeld hoe het concept “vaagverzameling” een zinvolle uitbreiding is van de klassieke verzamelingenleer, met als hoofdkenmerk dat vaagverzamelingenleer toelaat om imprecieze informatie te representeren. Alvorens in de derde paragraaf te komen tot bewerkingen op vaagverzamelingen, behandelen we in de tweede paragraaf eerst een aantal basisbegrippen uit de vaaglogica.

### 1.1 Van klassieke verzamelingen naar vaagverzamelingen

Een verzameling, in de algemene zin van het woord, kan omschreven worden als een “collectie van elementen”. Formeel specificceert men eerst het universum (dit is de collectie van alle mogelijke of toegelaten elementen, bijvoorbeeld de natuurlijke getallen), en vervolgens de verzameling (bijvoorbeeld de natuurlijke getallen kleiner dan 10).

Zij nu gegeven een universum  $\mathcal{X}$  en een verzameling  $A$  in  $\mathcal{X}$ , dan kenmerkt de klassieke verzamelingenleer zich door het feit dat een element  $x$  uit  $\mathcal{X}$  ofwel behoort tot de verzameling  $A$ , ofwel niet behoort tot de verzameling  $A$ . Met andere woorden, voor elk element kan ondubbelzinnig bepaald worden of het al dan niet tot de verzameling behoort. Men gebruikt deze eigenschap om een verzameling in een universum te representeren m.b.v. een *karakteristieke afbeelding*.

**Definitie 1.1** *Zij  $\mathcal{X}$  een universum en  $A \subseteq \mathcal{X}$ . De karakteristieke afbeelding  $k_A$  van  $A$  wordt gedefinieerd als de  $\mathcal{X} - \{0, 1\}$  afbeelding:*

$$\begin{array}{l} k_A : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto 1, \quad \text{als } x \in A \\ x \mapsto 0, \quad \text{als } x \notin A \end{array}$$

Men kan  $k_A(x)$  interpreteren als de lidmaatschapsgraad van  $x$  in de verzameling  $A$ . Merk op dat er in dit geval dus maar twee lidmaatschapsgraden zijn: 0 indien het element niet tot de verzameling behoort, 1 indien het element wel tot de verzameling behoort.

### 1.1.1 Een inleidend voorbeeld

Verzamelingen spelen een prominente rol in de wiskunde<sup>1</sup>. We illustreren hun gebruik bij zogenaamde evaluatieproblemen.

#### Goed gestelde evaluatieproblemen

Bij een evaluatieprobleem dient te worden nagegaan, gegeven een universum  $\mathcal{X}$  van objecten en gegeven een eigenschap of predicaat  $P$ , welke van deze objecten voldoen aan  $P$ . Indien de eigenschap  $P$  een klassiek-voorstelbare eigenschap is, d.w.z. indien men voor elk object van  $\mathcal{X}$  kan uitmaken of het voldoet aan  $P$ , dan kan de oplossing van het probleem voorgesteld worden m.b.v. een deelverzameling  $O_P$  van  $\mathcal{X}$ :

$$O_P = \{x \in \mathcal{X} \mid x \text{ voldoet aan } P\}.$$

Men spreekt dan van een goed gesteld evaluatieprobleem.

**Voorbeeld 1.1** *Zij  $\mathcal{X} = \mathbb{N}$  (het universum der natuurlijke getallen) en zij  $P$  de eigenschap “is groter dan of gelijk aan 25”. Dit is een voorbeeld van een goed gesteld evaluatieprobleem, waarvan de oplossing kan voorgesteld worden m.b.v. de volgende verzameling:*

$$O_P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 25\}.$$

*De corresponderende karakteristieke afbeelding wordt gegeven door:*

$$\begin{aligned} k_{O_P} : \mathbb{N} &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto 1, && \text{als } x \geq 25 \\ x &\mapsto 0, && \text{als } x < 25. \end{aligned}$$

#### Slecht gestelde evaluatieproblemen

Naast goed gestelde evaluatieproblemen zijn er echter ook evaluatieproblemen waarbij de eigenschap  $P$  niet klassiek-voorstelbaar is; men spreekt dan van slecht gestelde evaluatieproblemen. Zo is het bijvoorbeeld niet mogelijk om het probleem “bepaal alle reële getallen dicht bij 25” zinvol aan te pakken met de klassieke verzamelingenleer, hetgeen te wijten is aan de intrinsieke imprecisie van de eigenschap “dicht bij 25”.

Men heeft verschillende pogingen ondernomen om een goed model te vinden voor dergelijke slecht gestelde evaluatieproblemen. In het bijzonder vermelden we de wazigverzamelingen van Gentilhomme (waarbij het universum  $\mathcal{X}$ , gegeven een eigenschap  $P$ , wordt opgesplitst in een gebied met elementen die perfect voldoen aan  $P$ , een gebied met elementen die perfect niet voldoen aan  $P$ , en een zogenaamd waziggebied met elementen die niet in de voorgaande klassen ingedeeld kunnen worden), en de uitbreiding naar  $n$ -wazigverzamelingen (waarin het universum  $\mathcal{X}$  wordt opgesplitst in  $n+1$  i.p.v. 3 deelgebieden). Als onzekerheidsmodellen hebben deze theorieën echter gemeen dat ze te sterk gestoeld blijven op de klassieke verzamelingenleer, waarmee we hoofdzakelijk bedoelen dat ze een imprecieze eigenschap scherp trachten te maken door het invoeren van scherpe, doch artificiële grenzen. Deze werkwijze blijkt in de praktijk dan ook dikwijls ontoereikend te zijn.

<sup>1</sup>Er zijn zelfs wiskundig-filosofische strekkingen waarin de verzamelingenleer centraal gesteld wordt. De geïnteresseerde lezer verwijzen we graag door naar het kleine, doch zeer bevattelijke boekje *Filosofische grondslagen van de wiskunde*, door D. van Dalen.

### 1.1.2 Vaagverzamelingen

In 1965 werd het concept ‘vaagverzameling’ geïntroduceerd door Zadeh. Daar waar men voor een klassieke verzameling ondubbelzinnig kan bepalen of een element behoort tot de verzameling of niet, karakteriseert een vaagverzameling zich door continue gradaties van “behoren tot”. Anders gezegd: men gaat niet uit van de zwart-wit situatie “behoren tot” of “niet behoren tot”, maar laat een graduele overgang toe tussen deze beide uitersten.

Op het niveau van de karakteristieke afbeeldingen betekent dit dat men  $\mathcal{X} - [0, 1]$  afbeeldingen in plaats van  $\mathcal{X} - \{0, 1\}$  afbeeldingen beschouwt. Behalve de lidmaatschapsgraden 0 (als  $x$  perfect niet tot  $A$  behoort) en 1 (als  $x$  perfect wel tot  $A$  behoort), treden dus ook tussenliggende lidmaatschapsgraden uit  $]0, 1[$  op. Formeel wordt een vaagverzameling in een universum  $\mathcal{X}$  als volgt gedefinieerd.

**Definitie 1.2** [78] *Zij  $\mathcal{X}$  een universum. Een vaagverzameling  $A$  in  $\mathcal{X}$  wordt gekarakteriseerd door een  $\mathcal{X} - [0, 1]$  afbeelding  $\kappa_A$ :*

$$\begin{array}{l} \kappa_A : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \kappa_A(x), \forall x \in \mathcal{X}. \end{array}$$

Hierbij stelt  $\kappa_A(x)$  de lidmaatschapsgraad van het element  $x$  in  $A$  voor<sup>2</sup>. Met andere woorden: een element  $x$  in  $\mathcal{X}$  behoort tot de vaagverzameling  $A$  met lidmaatschapsgraad  $\kappa_A(x)$ .

In het vervolg zullen we, net zoals dit vaak het geval is in de literatuur, de lidmaatschapsgraad  $\kappa_A(x)$  steeds noteren als  $A(x)$ . Op het niveau van de notaties wordt dus geen onderscheid gemaakt tussen de vaagverzameling enerzijds, en de lidmaatschapsfunctie anderzijds.

Uit de definitie is het duidelijk dat elke klassieke of scherpe verzameling in  $\mathcal{X}$  opgevat kan worden als een vaagverzameling in  $\mathcal{X}$ . We zullen de klasse der scherpe verzamelingen in  $\mathcal{X}$  voorstellen door  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ , en de klasse der vaagverzamelingen in  $\mathcal{X}$  door  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . De voorgaande bewering laat zich dan vertalen tot<sup>3</sup>:

$$\mathcal{M}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{X}).$$

#### Enkele voorbeelden

Ter illustratie behandelen we kort het hoger gestelde evaluatieprobleem “bepaal alle reële getallen dicht bij 25” m.b.v. vaagverzamelingen.

**Voorbeeld 1.2** *Zij  $\mathcal{X} = \mathbb{R}$  (het universum der reële getallen) en zij  $P$  de eigenschap “dicht bij 25”. Dit is een voorbeeld van een evaluatieprobleem, waarvan de oplossing kan voorgesteld worden m.b.v. de vaagverzameling  $O_P$ , gekarakteriseerd door de volgende lidmaatschapsfunctie:*

$$\begin{array}{l} \mu_{O_P} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \frac{1}{1+(x-25)^2}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

*Men gaat eenvoudig na dat 25 het enige getal is met lidmaatschapsgraad 1, d.w.z. het enige getal dat perfect voldoet aan de gestelde eigenschap. Voor de andere getallen neemt de lidmaatschapsgraad af naarmate het getal verder van 25 gelegen is.* ◁

We geven ook nog een tweede voorbeeld.

<sup>2</sup>Dat we een vaagverzameling in  $\mathcal{X}$  karakteriseren m.b.v. een afbeelding impliceert dat de vaagverzameling bepaald is voor elk element  $x$  van  $\mathcal{X}$ , en dat elk element  $x$  dus ook een lidmaatschapsgraad  $\kappa_A(x)$  heeft. In de praktijk worden de lidmaatschapsgraden dikwijls maar voor een beperkt aantal  $x$ -waarden gespecificeerd. In dergelijke gevallen geldt de stilzwijgende afspraak dat de niet-gespecificeerde lidmaatschapsgraden steeds nul zijn.

<sup>3</sup>In de literatuur worden de klassen der scherpe deelverzamelingen en vaagverzamelingen in  $\mathcal{X}$  dikwijls voorgesteld door respectievelijk  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  en  $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ . Hierbij verwijst  $\mathcal{P}$  naar het Engelstalige *power set* (machtsverzameling) en  $\mathcal{F}$  naar het Engelstalige *fuzzy set* (vaagverzameling). We kiezen voor onze notatie echter om in overeenstemming te blijven met het Nederlands taalgebruik in dit proefschrift.

**Voorbeeld 1.3** Zij  $\mathcal{X}$  het universum der machines die opgesteld zijn in een bepaald bedrijf, en zij  $P$  de eigenschap “functioneert goed”. Om dit evaluatieprobleem op te lossen m.b.v. klassieke verzamelingenleer moet men de intrinsiek imprecieze eigenschap  $P$  scherp maken. Men zou dit kunnen realiseren door te stellen: “een machine functioneert goed indien ze op minstens 50% van haar capaciteit draait”. Op basis van dit criterium kan men het universum  $\mathcal{X}$  ondubbelzinnig opsplitsen in goed en niet goed functionerende machines. De nadelen van deze methodiek zijn echter vrij snel duidelijk. :

- Een machine die draait op 49% van de capaciteit wordt als “niet goed” beschouwd, terwijl een machine die draait op 51% wel als “goed” wordt beschouwd. Het introduceren van scherpe grenzen leidt in dit geval dus tot onnatuurlijke overgangen van een toestand in een andere toestand.
- Een machine die draait op 1% en een machine die draait op 49% worden als gelijk beschouwd, want ze worden beide als “niet goed” geklassificeerd. Binnen de klasse van “niet goede” machines is dus geen gradatie mogelijk.
- Waarom leggen we de grens voor goed of niet goed functioneren op 50%, en niet op bijvoorbeeld 30% of 75%? Het invoeren van scherpe grenzen voor imprecieze begrippen lijkt weinig zinvol.

Een analoge aanpak kan gevolgd worden m.b.v. de wazigverzamelingsleer van Gentilhomme, door één i.p.v. twee scherpe grenzen in te voeren. Men zou bijvoorbeeld kunnen stellen: “een machine functioneert goed indien haar capaciteit tussen 80% en 100% ligt” en “een machine functioneert niet goed indien haar capaciteit tussen 0% en 30% ligt”. De machines wiens capaciteit tussen 30% en 80% ligt behoren dan tot het zogenaamde waziggebied. Dit model vertoont echter dezelfde tekortkomingen zoals hoger beschreven.

Een zinvolle oplossing van het evaluatieprobleem kan echter wel voorgesteld worden m.b.v. de vaagverzameling  $O_P$  van goed functionerende machines, gekarakteriseerd door de volgende lidmaatschapsfunctie:

$$\begin{aligned} \mu_{O_P} : \mathcal{X} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{c(x)}{100}, \forall x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

waarbij  $c(x)$  gelijk is aan de capaciteit waarop machine  $x$  draait. Een machine die draait op 80% van haar capaciteit heeft dan bijvoorbeeld een lidmaatschapsgraad van 0.8 in de vaagverzameling van goed functionerende machines. Dergelijke modellering is meer in overeenstemming met de menselijke intuïtie.  $\triangleleft$

Met deze voorbeelden hebben we gepoogd om het begrip vaagverzameling, de herkomst en een mogelijke toepassing ervan te verduidelijken. Sinds de introductie in 1965 heeft de vaagverzamelingsleer zich in de loop der jaren ontpopt tot een zeer performant onzekerheidsmodel, hetgeen tot heel wat praktische toepassingen heeft geleid. Verder in dit proefschrift zullen we andere voorbeelden zien, specifiek in het domein van beeldverwerking.

### Opmerking i.v.m. lidmaatschapsfuncties

Vaagverzamelingsleer worden gekarakteriseerd door hun lidmaatschapsfunctie. De keuze van deze lidmaatschapsfunctie wordt meestal door de mens - in casu een expert - gemaakt, hetgeen onmiddellijk een zekere subjectiviteit impliceert. Het is immers niet ondenkbaar dat verschillende experts op basis van hun kennis en ervaring verschillende lidmaatschapsfuncties definiëren voor eenzelfde toepassing. Op zich mag deze *subjectiviteit* niet als een tekortkoming opgevat worden. Immers, één van de voornaamste karakteristieken van een vaagverzameling als onzekerheidsmodel is dat ze een *ordering* oplegt, met *graduele overgangen*. Als er al verschillen optreden tussen verschillende lidmaatschapsfuncties voor eenzelfde toepassing, dan zullen deze eerder detailistisch zijn, en bijvoorbeeld geen betrekking hebben op de *vorm* van de lidmaatschapsfuncties.

Om enigszins tegemoet te komen aan de *objectiviteit* werden in de literatuur een aantal geparametriseerde standaard-lidmaatschapsfuncties geïntroduceerd. Dergelijke lidmaatschapsfuncties hebben een vaste vorm, maar kunnen aangepast worden door specifieke keuzes van de parameters. We vermelden ter informatie de  $S$ - en  $\pi$ -lidmaatschapsfuncties.

**Definitie 1.3** Zij  $(a, b, c)$  in  $\mathbb{R}^3$ , zo dat  $a < b < c$  met  $b = \frac{a+c}{2}$ . De geparametriseerde  $S$ -lidmaatschapsfunctie  $S(\cdot; a, b, c)$  wordt gedefinieerd als de  $\mathbb{R} - [0, 1]$  afbeelding bepaald door:

$$S(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in ]-\infty, a[ \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{als } x \in [a, b] \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{als } x \in ]b, c] \\ 1 & \text{als } x \in ]c, +\infty[ \end{cases},$$

voor alle  $x$  in  $\mathbb{R}$ .

**Definitie 1.4** Zij  $(a, b)$  in  $\mathbb{R}^2$ , met  $b > 0$ . De geparametriseerde  $\pi$ -lidmaatschapsfunctie  $\pi(\cdot; a, b)$  wordt gedefinieerd als de  $\mathbb{R} - [0, 1]$  afbeelding bepaald door:

$$\pi(x; a, b) = \begin{cases} S(x; b-a, b-\frac{a}{2}, b) & \text{als } x \in ]-\infty, b[ \\ 1 - S(x; b, b+\frac{a}{2}, a+b) & \text{als } x \in [b, +\infty[ \end{cases},$$

voor alle  $x$  in  $\mathbb{R}$ .

De  $S$ -lidmaatschapsfunctie is in het bijzonder geschikt voor de modellering van “stijgende” noties, zoals *oud*, *hoog* en *groot*; de  $\pi$ -lidmaatschapsfunctie wordt dikwijls gebruikt om “benaderende” noties zoals *ongeveer 10* te modelleren.

### 1.1.3 Begrippen i.v.m. vaagverzamelingen

We vermelden een aantal basisbegrippen i.v.m. vaagverzamelingen die verder nog aan bod zullen komen.

**Definitie 1.5** [32] Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . De drager<sup>4</sup>  $d_A$  van  $A$  wordt gedefinieerd als:

$$d_A = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) > 0\}.$$

**Definitie 1.6** [32] Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . De kern<sup>5</sup>  $k_A$  van  $A$  wordt gedefinieerd als:

$$k_A = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) = 1\}.$$

De drager en de kern van een vaagverzameling zijn bijzondere gevallen van zwakke en sterke snedeverzamelingen.

**Definitie 1.7** [32] Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $\alpha$  in  $]0, 1]$ . De zwakke snedeverzameling  $A_\alpha$  van  $A$  is gedefinieerd als:

$$A_\alpha = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) \geq \alpha\}.$$

Men zou de zwakke snedeverzameling ook kunnen definiëren voor  $\alpha = 0$ , in welk geval zou gelden dat  $A_0 = \mathcal{X}$ . Op zich levert dit dus geen bijkomende informatie op, en bovendien blijkt dat men dit geval bij het beschouwen van verschillende eigenschappen meestal moet uitsluiten. Vandaar dat sommige auteurs, onszelf inbegrepen, ervoor kiezen om het geval  $\alpha = 0$  formeel niet te definiëren.

<sup>4</sup>Engelstalige benaming: *support*.

<sup>5</sup>Engelstalige benaming: *kernel*.

**Definitie 1.8** [32] Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $\alpha$  in  $[0, 1[$ . De sterke snedeverzameling  $A_{\overline{\alpha}}$  van  $A$  is gedefinieerd als:

$$A_{\overline{\alpha}} = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) > \alpha\}.$$

Indien men de sterke snedeverzameling ook zou definiëren voor  $\alpha = 1$ , dan zou  $A_{\overline{1}} = \emptyset$ . Er werd voor gekozen om het geval  $\alpha = 1$  formeel niet te definiëren.

Merk op dat voor  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  geldt:

$$\begin{aligned} d_A &= A_{\overline{0}}, \\ k_A &= A_1. \end{aligned}$$

**Definitie 1.9** Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Men noemt  $A$  een genormaliseerde vaagverzameling in  $\mathcal{X}$  indien geldt:

$$(\exists x \in \mathcal{X})(A(x) = 1).$$

Men noemt  $A$  een pseudo-genormaliseerde vaagverzameling in  $\mathcal{X}$  indien geldt:

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} A(x) = 1.$$

We definiëren ook de hoogte en plint van een vaagverzameling. Zoals de benaming doet vermoeden kan de hoogte gekarakteriseerd worden als de “grootste” lidmaatschapsgraad, de plint als de “kleinste” lidmaatschapsgraad.

**Definitie 1.10** [32] Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . De hoogte  $h(A)$  van  $A$  is gedefinieerd als:

$$h(A) = \sup_{x \in \mathcal{X}} A(x).$$

De plint  $p(A)$  van  $A$  is gedefinieerd als:

$$p(A) = \inf_{x \in \mathcal{X}} A(x).$$

**Definitie 1.11** Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . De reflectie  $-A$  van  $A$  is gedefinieerd door:

$$(-A)(x) = A(-x),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

De bovenstaande definitie is uiteraard pas zinvol indien  $A(-x)$  bepaald is voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

## 1.2 Van klassieke logica naar vaaglogica

### 1.2.1 De binaire of tweewaardige logica

In de klassieke logica, d.w.z. de binaire of tweewaardige logica, kunnen beweringen of uitspraken enkel waar of vals zijn. Aan dergelijke uitspraken kan men ook een waarheidswaarde hechten: indien een uitspraak waar is kennen we ze waarheidswaarde 1 toe, indien een uitspraak vals is heeft ze waarheidswaarde 0. Formeel betekent dit dat we op het universum  $\mathcal{U}$  der uitspraken de volgende waarheidsafbeelding definiëren:

$$\begin{aligned} w : \mathcal{U} &\rightarrow \{0, 1\} \\ u &\mapsto 1, && \text{als } u \text{ waar is} \\ u &\mapsto 0, && \text{als } u \text{ vals is.} \end{aligned}$$

De afbeelding  $w$  associeert met elke uitspraak  $u$  de waarheidswaarde  $w(u)$  van deze uitspraak.



## Propositielogica

In de propositielogica beschouwt men propositionele of logische variabelen. Deze variabelen stellen hypothetische proposities voor, en kunnen ontkend en samengesteld worden m.b.v. logische connectieven, zoals “niet”, “en”, “of” en “als . . . dan”. Op basis van de interpretatie van deze voegwoorden in het dagelijks taalgebruik kan men de corresponderende logische operatoren negatie ( $\neg$ ), conjunctie ( $\wedge$ ), disjunctie ( $\vee$ ) en implicatie ( $\rightarrow$ ) definiëren<sup>6</sup>. Met behulp van deze operatoren kan de waarheidswaarde van een ontkende of samengestelde propositie bepaald worden. Deze waarheidswaarde hangt af van de waarheidswaarde(n) van de afzonderlijke deelproposities.

**Definitie 1.12** *De binaire negatie  $\neg$  is de  $\{0,1\} - \{0,1\}$  afbeelding gedefinieerd door:*

$$\begin{aligned}\neg(0) &= 1 \\ \neg(1) &= 0\end{aligned}$$

*De binaire conjunctie  $\wedge$ , de binaire disjunctie  $\vee$  en de binaire implicatie  $\rightarrow$  zijn de  $\{0,1\} \times \{0,1\} - \{0,1\}$  afbeeldingen gedefinieerd door:*

$$\begin{array}{lll}\wedge(0,0) = 0 & \vee(0,0) = 0 & \rightarrow(0,0) = 1 \\ \wedge(0,1) = 0 & \vee(0,1) = 1 & \rightarrow(0,1) = 1 \\ \wedge(1,0) = 0 & \vee(1,0) = 1 & \rightarrow(1,0) = 0 \\ \wedge(1,1) = 1 & \vee(1,1) = 1 & \rightarrow(1,1) = 1\end{array}$$

In de praktijk worden doorgaans de notaties  $\neg a$ ,  $a \wedge b$ ,  $a \vee b$  en  $a \rightarrow b$  of  $a \Rightarrow b$  gehanteerd. Bovendien zullen we dezelfde symbolen gebruiken om enerzijds de logische voegwoorden en anderzijds de corresponderende binaire logische operatoren aan te duiden. Bijvoorbeeld, indien  $P$  een propositie is met waarheidswaarde  $w(P)$ , dan stelt  $\neg P$  de negatie van deze propositie voor, en wordt de waarheidswaarde van de genegeerde propositie gegeven door  $w(\neg P) = \neg w(P)$  (linkerlid: negatie als voegwoord, rechterlid: negatie als operator).

De binaire logica vertoont, net zoals de scherpe verzamelingenleer, een aantal tekortkomingen. De voornaamste is de tweewaardigheid: de enige proposities die toelaatbaar zijn, zijn deze waarvan ondubbelzinnig gesteld kan worden of ze waar of vals zijn. In heel wat praktische toepassingen is dit echter een onrealistische voorwaarde; beschouw bijvoorbeeld de uitspraak “machine  $x$  functioneert goed” in het kader van Voorbeeld 1.3. Daarnaast hebben ook de klassiek-logische inferenties een aantal beperkingen, en beschikt men ook over slechts twee kwantoren (namelijk de universele en de existentiële kwantor).

Zoals vaagverzamelingenleer een uitbreiding is van klassieke verzamelingenleer, zo is vaaglogica een uitbreiding van de binaire logica die deze tekortkomingen kan opvangen.

### 1.2.2 Vaaglogica en vaaglogische operatoren

Het uitgangspunt van vaaglogica is dat proposities waar of vals kunnen zijn *in een bepaalde mate*; we spreken in dit verband ook van vaagproposities. In plaats van de waarheidswaarden te beperken tot het doubleton  $\{0,1\}$  worden nu dus alle waarden uit het eenheidsinterval  $[0,1]$  toegelaten als waarheidswaarde. De waarheidsfunctie  $w$  wordt met andere woorden uitgebreid tot een  $\mathcal{P} - [0,1]$  afbeelding  $\omega$ , die met elke propositie  $P$  de mate  $\omega(P)$  waarin  $P$  waar is laat corresponderen. De analogie met de vaagverzamelingenleer is duidelijk.

De belangrijkste bouwstenen van de vaaglogica worden gevormd door de vaaglogische operatoren. Deze operatoren breiden de binaire logische operatoren uit tot operatoren die inwerken

<sup>6</sup>Wat de negatie en conjunctie betreft is dit voor de hand liggend. Wat de disjunctie betreft kent het taalgebruik twee interpretaties, namelijk de inclusieve disjunctie en de exclusieve disjunctie; de logische operator modelleert de exclusieve disjunctie. Wat de implicatie betreft kent het taalgebruik nog meer interpretaties, namelijk de logische, definitionele, causale en decisionele implicatie; de corresponderende operator modelleert het gemeenschappelijk aspect van deze interpretaties, namelijk dat een implicatie vals is indien het antecedent waar en het consequent vals is.

op elementen uit  $[0, 1]$ , en een resultaat uit  $[0, 1]$  genereren. Intuïtief moeten deze uitbreidingen voldoen aan twee basisvoorwaarden: de restrictie van de uitgebreide operator tot  $\{0, 1\}$  moet samenvallen met de corresponderende binaire operator, en er moet aan de uitgebreide operator een zinvolle logische interpretatie gehecht kunnen worden. De eerste voorwaarde wordt wiskundig vertaald in een randvoorwaarde, de tweede in een monotoniteitsvoorwaarde. Naast deze basisvoorwaarden kunnen nog additionele voorwaarden opgelegd worden, hetgeen resulteert in deelklassen van het beschouwde type operator. Deze bijkomende voorwaarden dienen uiteraard ook een logische interpretatie te hebben.

**Definitie 1.13** [77] *Een negator  $\mathcal{N}$  op  $[0, 1]$  is een dalende  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  afbeelding, die voldoet aan  $\mathcal{N}(0) = 1$  en  $\mathcal{N}(1) = 0$ .*

*Een involutieve negator is een negator die voldoet aan  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{N}(\mathcal{N}(a)) = a)$ .*

De voorwaarde van involutiviteit is een veralgemening van de klassieke equivalentie  $\neg\neg a \equiv a$  (een dubbele negatie is identiek aan een affirmatie). In [43] hebben we aangetoond dat elke involutieve negator ook continu is<sup>7</sup>. Volledigheidshalve merken we op dat de veralgemening van de klassieke negatie in de literatuur soms op verschillende manieren, en met verschillende benamingen, wordt gedefinieerd. Onze keuze is gebaseerd op het feit dat het om de meest elementaire uitbreiding gaat (wegens de randvoorwaarden), waaraan een logische interpretatie gehecht kan worden (wegens het dalend zijn).

**Voorbeeld 1.4** *De standaardnegator  $N_s$  wordt gegeven door*

$$N_s(a) = 1 - a,$$

*voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ . De kleinste negator  $N_k$  en de grootste negator  $N_g$  op  $[0, 1]$  worden gegeven door:*

$$N_k(a) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

*en*

$$N_g(a) = \begin{cases} 0 & \text{als } a = 1 \\ 1 & \text{anders} \end{cases},$$

*voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ . De negatoren  $N_k$  en  $N_g$  worden ook wel aangeduid als respectievelijk de intuïtionistische en duaal intuïtionistische negator. Deze negatoren zijn noch continu, noch strikt dalend. De standaardnegator daarentegen is een involutieve negator.  $\triangleleft$*

**Definitie 1.14** [22] *Een conjunctoor  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$  is een  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  afbeelding, die voldoet aan  $\mathcal{C}(0, 0) = \mathcal{C}(0, 1) = \mathcal{C}(1, 0) = 0$  en  $\mathcal{C}(1, 1) = 1$ , en waarvan de partiële afbeeldingen stijgend zijn.*

*Een semi-norm is een conjunctoor die voldoet aan  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(1, a) = \mathcal{C}(a, 1) = a)$ .*

*Een driehoeksnorm<sup>8</sup> is een commutatieve en associatieve semi-norm.*

De voorwaarde voor een semi-norm heeft een voor de hand liggende logische interpretatie, namelijk dat de waarheidswaarde van de conjunctie van een vaagpropositie met een perfect ware propositie gegeven wordt door de waarheidswaarde van de eerste vaagpropositie. De bijkomende commutativiteit en associativiteit voor een driehoeksnorm zijn niet alleen ingegeven door het feit dat de binaire conjunctie commutatief en associatief is, maar zijn ook noodzakelijke voorwaarden indien men de operator wil uitbreiden naar een operator met meer dan twee argumenten.

<sup>7</sup>Uit de literatuur blijkt dat verschillende auteurs hier geen rekening mee houden. In [77] wordt bijvoorbeeld expliciet gesteld dat de involutiviteit van een negator het strikt dalend gedrag impliceert, maar over continuïteit wordt niet gesproken. In [70] maakt men zelfs een onderscheid tussen involutieve negatoren en continue involutieve negatoren, terwijl beide concepten identiek zijn.

<sup>8</sup>Engelstalige benaming: *triangular norm*. De benaming wordt in de literatuur vaak afgekort tot *t-norm*. Dit verklaart meteen waarom een driehoeksnorm vaak als  $\mathcal{T}$  i.p.v. als  $\mathcal{C}$  wordt genoteerd. We merken volledigheidshalve op dat driehoeksnormen werden ingevoerd in [65], in het kader van probabilistische metrische ruimten en de veralgemening van de klassieke driehoeksongelijkheid naar een probabilistische context.

**Voorbeeld 1.5** Bekende driehoeksnormen worden gegeven door het minimum  $T_M$ , het algebraïsch product  $T_P$ , de Lukasiewicz driehoeksnorm  $T_W$  en de drastische driehoeksnorm  $T_Z$ , met:

$$\begin{aligned} T_M(a, b) &= \min(a, b), \\ T_P(a, b) &= ab, \\ T_W(a, b) &= \max(0, a + b - 1), \end{aligned}$$

en

$$T_Z(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{als } \max(a, b) = 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases},$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . ◁

In [66] toont men aan dat  $T_M$  de grootste en  $T_Z$  de kleinste driehoeksnorm op  $[0, 1]$  is. Men kan dit resultaat echter verruimen tot semi-normen, d.w.z.:

**Eigenschap 1.1** Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ . Er geldt:

$$T_Z \leq \mathcal{C} \leq T_M.$$

De orderrelatie tussen conjunctoren wordt algemeen gedefinieerd als een puntsgewijze uitbreiding van de orderrelatie op  $[0, 1]$ , d.w.z. dat bij definitie geldt dat

$$\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow (\forall (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(\mathcal{C}_1(a, b) \leq \mathcal{C}_2(a, b)).$$

Men toont ook gemakkelijk aan dat de gegeven driehoeksnormen uit Voorbeeld 1.5 zich als volgt laten ordenen:

**Eigenschap 1.2** [66] Er geldt:

$$T_Z \leq T_W \leq T_P \leq T_M.$$

**Definitie 1.15** [22] Een disjunctor  $\mathcal{D}$  op  $[0, 1]$  is een  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  afbeelding, die voldoet aan  $\mathcal{D}(1, 0) = \mathcal{D}(0, 1) = \mathcal{D}(1, 1) = 1$  en  $\mathcal{D}(0, 0) = 0$ , en waarvan de partiële afbeeldingen stijgend zijn.

Een semi-conorm is een disjunctor die voldoet aan  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{D}(0, a) = \mathcal{D}(a, 0) = a)$ .

Een driehoeksconorm is een commutatieve en associatieve semi-conorm.

**Voorbeeld 1.6** Bekende driehoeksconormen worden gegeven door het maximum  $S_M$ , de probabilistische som  $S_P$ , de Lukasiewicz driehoeksconorm  $S_W$  en de drastische driehoeksconorm  $S_Z$ , met:

$$\begin{aligned} S_M(a, b) &= \max(a, b), \\ S_P(a, b) &= a + b - ab, \\ S_W(a, b) &= \min(1, a + b), \end{aligned}$$

en

$$S_Z(a, b) = \begin{cases} \max(a, b) & \text{als } \min(a, b) = 0 \\ 1 & \text{anders} \end{cases},$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . ◁

Er gelden analoge eigenschappen als in het geval van driehoeksnormen.

**Eigenschap 1.3** Zij  $\mathcal{D}$  een semi-conorm op  $[0, 1]$ . Er geldt:

$$S_M \leq \mathcal{D} \leq S_Z.$$

In het bijzonder geldt:

$$S_M \leq S_P \leq S_W \leq S_Z.$$

**Definitie 1.16** [35]

Een implicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$  is een  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  afbeelding, die voldoet aan  $\mathcal{I}(0, 0) = \mathcal{I}(0, 1) = \mathcal{I}(1, 1) = 1$  en  $\mathcal{I}(1, 0) = 0$ , en waarvan de eerste partiële afbeeldingen dalend en de tweede partiële afbeeldingen stijgend zijn (men spreekt van een hybride monotone operator).

Elke implicator op  $[0, 1]$  induceert ook een negator op  $[0, 1]$ .

**Eigenschap 1.4** [9] Zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . De  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  operator  $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ , gedefinieerd door

$$\boxed{\mathcal{N}_{\mathcal{I}}(a) = \mathcal{I}(a, 0)},$$

voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ , is een negator op  $[0, 1]$ .

De klasse van implicatoren bevat ook nog een aantal interessante deelklassen.

**Definitie 1.17** [9] Een implicator  $\mathcal{I}$  is contrapositief t.o.v. een negator  $\mathcal{N}$  indien  $(\forall(a, b) \in [0, 1]^2)(\mathcal{I}(a, b) = \mathcal{I}(\mathcal{N}(b), \mathcal{N}(a)))$ .

Een implicator  $\mathcal{I}$  is een randimplicator indien  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{I}(1, a) = a)$ .

Een randimplicator  $\mathcal{I}$  is een modelimplicator indien  $\mathcal{I}$  contrapositief is t.o.v. zijn geïnduceerde negator en als  $\mathcal{I}$  voldoet aan het uitwisselingsbeginsel, i.e.  $(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b, c)) = \mathcal{I}(b, \mathcal{I}(a, c)))$ .

Contrapositiviteit is een veralgemening van de klassieke wet van de contrapositie, die stelt dat  $a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$ . Het uitwisselingsbeginsel is een veralgemening van de klassiek geldende equivalentie  $a \rightarrow (b \rightarrow c) \equiv b \rightarrow (a \rightarrow c)$ .

**Voorbeeld 1.7** Bekende modelimplicatoren worden gegeven door de Kleene-Dienes implicator  $I_{KD}$ , de Reichenbach implicator  $I_R$  en de Lukasiewicz implicator  $I_W$ , met:

$$\begin{aligned} I_{KD}(a, b) &= \max(1 - a, b), \\ I_R(a, b) &= 1 - a + ab, \\ I_W(a, b) &= \min(1, 1 - a + b), \end{aligned}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . De kleinste randimplicator  $I_k$  en de grootste randimplicator  $I_g$  op  $[0, 1]$  worden gegeven door [9]:

$$I_k(a, b) = \begin{cases} b & \text{als } a > 0 \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

en

$$I_g(a, b) = \begin{cases} b & \text{als } a = 1 \\ 1 & \text{anders} \end{cases},$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . ◁

Sommige types van vaaglogische operatoren induceren andere types van vaaglogische operatoren. De volgende constructies zullen verder in de proefschrift nog aan bod komen.

**Eigenschap 1.5** Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Indien  $\mathcal{C}$  voldoet aan de voorwaarde:

$$(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(1, a) = 0 \Rightarrow a = 0),$$

dan is de  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  operator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ , gedefinieerd door:

$$\boxed{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b) = \sup\{c \in [0, 1] | \mathcal{C}(a, c) \leq b\}},$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ , een implicator op  $[0, 1]$ . Men noemt  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  de residuele implicator geassocieerd met de conjunctor  $\mathcal{C}$ .

De definitie van residuele implicator is gebaseerd op het algemener concept van een residuele operator (niet noodzakelijk een implicator) geassocieerd met een binaire operator (niet noodzakelijk een conjunctor); cfr. [14]. Dit is op zijn beurt geïnspireerd door het werk in [73], waarbij de bovenstaande constructie wordt uitgevoerd m.b.v. een driehoeksnorm.

**Eigenschap 1.6** [9]

Zij  $\mathcal{N}$  en  $\mathcal{I}$  respectievelijk een negator en implicator op  $[0, 1]$ . De operator  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ , gedefinieerd door:

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}(a, b) = \mathcal{N}(\mathcal{I}(a, \mathcal{N}(b))),}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ , is een conjunctor op  $[0, 1]$ . Men noemt  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  de conjunctor geïnduceerd door de implicator  $\mathcal{I}$  en de negator  $\mathcal{N}$ .

Zij  $\mathcal{N}$  en  $\mathcal{C}$  respectievelijk een negator en conjunctor op  $[0, 1]$ . De operator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ , gedefinieerd door:

$$\boxed{\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}(a, b) = \mathcal{N}(\mathcal{C}(a, \mathcal{N}(b))),}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ , is een implicator op  $[0, 1]$ . Men noemt  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  de implicator geïnduceerd door de conjunctor  $\mathcal{C}$  en de negator  $\mathcal{N}$ .

**Voorbeeld 1.8** Voorbeelden van residuele implicatoren op  $[0, 1]$  zijn:

$$\mathcal{I}_{T_M}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ b & \text{anders} \end{cases},$$

in de literatuur ook bekend als de Standard Star implicator [61];

$$\mathcal{I}_{T_P}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{anders} \end{cases},$$

in de literatuur ook bekend als de Gaines implicator [61]; en

$$\mathcal{I}_{T_W}(a, b) = I_W(a, b),$$

telkens met  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Voorbeelden van geïnduceerde conjunctoren en implicatoren op  $[0, 1]$  zijn:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{I_{KD}, N_s} &= T_M \\ \mathcal{C}_{I_R, N_s} &= T_P \\ \mathcal{C}_{I_W, N_s} &= T_W \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T_M, N_s} &= I_{KD} \\ \mathcal{I}_{T_P, N_s} &= I_R \\ \mathcal{I}_{T_W, N_s} &= I_W, \end{aligned}$$

waarbij telkens gebruik wordt gemaakt van de standaardnegator  $N_s$ . ◁

Tot zover onze beknopte bespreking van de belangrijkste vaaglogische operatoren. Als slot vermelden we nog dat een zeer uitgebreide studie van logische operatoren, in het bijzonder implicatoren, op het  $[0, 1]$  werd uitgevoerd in onze Licentiaatsverhandeling [43].

### 1.2.3 Hulpstellingen i.v.m. vaaglogische operatoren

#### Rand-eigenschappen

**Lemma 1.1** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(0, a) = \mathcal{C}(a, 0) = 0).$$

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit de randvoorwaarden  $\mathcal{C}(0, 0) = \mathcal{C}(1, 0) = \mathcal{C}(0, 1) = 0$  en het stijgend zijn van de beide partiële afbeeldingen.  $\square$

**Lemma 1.2** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{I}(0, a) = \mathcal{I}(a, 1) = 1)$$

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit de randvoorwaarden, het dalend zijn van de eerste partiële afbeeldingen en het stijgend zijn van de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$ .  $\square$

#### Eigenschappen i.v.m. de operatoren $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ , $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ en $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$

**Lemma 1.3** [9] *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  zo dat  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(1, a) = 0 \Rightarrow a = 0)$ . Er geldt:*

1. *De implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  heeft rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen,*
2. *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn, dan geldt: de implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  heeft linkscontinue eerste partiële afbeeldingen.*

**Lemma 1.4** [9] *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ .*

1. *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn en indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is, dan geldt:  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  heeft linkscontinue eerste partiële afbeeldingen.*
2. *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn en indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is, dan geldt:  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  heeft rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen.*

**Lemma 1.5** [9] *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ , dan is de operator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  een randimplicator op  $[0, 1]$ .*

**Lemma 1.6** [9] *Zij  $\mathcal{N}$  een involutieve negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  is een randimplicator op  $[0, 1]$ .*  
 (b) *Indien  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm is:  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  is een modelimplicator op  $[0, 1]$ .*
2. (a) *Indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator is:  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  is een semi-norm op  $[0, 1]$ .*  
 (b) *Indien  $\mathcal{I}$  een modelimplicator is:  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  is een driehoeksnorm op  $[0, 1]$ .*

**Lemma 1.7** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor,  $\mathcal{I}$  een implicator en  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$\mathcal{N} \text{ is involutief} \Leftrightarrow (\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}} \Leftrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}).$$

BEWIJS. Door controle.  $\square$

**Lemma 1.8** [9] *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ .*

1. *Er geldt:  $(\forall (a, b) \in [0, 1]^2)(a \leq b \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b) = 1)$ .*
2. *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn, dan geldt:*

$$(\forall (a, b) \in [0, 1]^2)(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b) = 1 \Rightarrow a \leq b).$$

### Eigenschappen m.b.t. de interactie van vaaglogische operatoren met supremum en infimum

**Lemma 1.9** [7] *Zij  $(a_i)_{i \in I}$  een familie in  $[0, 1]$ . Voor een stijgende  $[0, 1] - [0, 1]$  afbeelding  $f$  geldt:*

1. (a)  $f(\sup_{i \in I} a_i) \geq \sup_{i \in I} f(a_i)$   
 (b) *Indien  $f$  linkscontinu is:  $f(\sup_{i \in I} a_i) = \sup_{i \in I} f(a_i)$*
2. (a)  $f(\inf_{i \in I} a_i) \leq \inf_{i \in I} f(a_i)$   
 (b) *Indien  $f$  rechtscontinu is:  $f(\inf_{i \in I} a_i) = \inf_{i \in I} f(a_i)$*

Voor een dalende  $[0, 1] - [0, 1]$  afbeelding  $f$  geldt:

1. (a)  $f(\sup_{i \in I} a_i) \leq \inf_{i \in I} f(a_i)$   
 (b) *Indien  $f$  linkscontinu is:  $f(\sup_{i \in I} a_i) = \inf_{i \in I} f(a_i)$*
2. (a)  $f(\inf_{i \in I} a_i) \geq \sup_{i \in I} f(a_i)$   
 (b) *Indien  $f$  rechtscontinu is:  $f(\inf_{i \in I} a_i) = \sup_{i \in I} f(a_i)$*

BEWIJS.

De (a)-eigenschappen volgen uit het stijgend en/of dalend zijn van de afbeelding  $f$ , en uit de karakterisatie van infimum en supremum. Eigenschap (1b) wordt aangetoond in [7]; de overige (b)-eigenschappen worden analoog bewezen.  $\square$

We merken op dat de omgekeerde beweringen uit Lemma 1.9 ook geldig zijn, d.w.z. indien bijvoorbeeld een stijgende  $[0, 1] - [0, 1]$  afbeelding  $f$  voldoet aan  $f(\sup_{i \in I} a_i) = \sup_{i \in I} f(a_i)$  voor elke familie  $(a_i)_{i \in I}$  in  $[0, 1]$ , dan is  $f$  linkscontinu. Het bewijs van deze omgekeerde bewering kan de lezer ook terugvinden in onze Licentiaatsverhandeling [43].

Lemma 1.9 leidt in het bijzonder tot de volgende resultaten; we beperken ons tot deze eigenschappen die verder nog gebruikt zullen worden.

**Lemma 1.10** *Zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ , en zij  $(a_i)_{i \in I}$  een familie in  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a)  $\mathcal{N}(\inf_{i \in I} a_i) \geq \sup_{i \in I} \mathcal{N}(a_i)$   
 (b) *Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $\mathcal{N}(\inf_{i \in I} a_i) = \sup_{i \in I} \mathcal{N}(a_i)$*
2. (a)  $\mathcal{N}(\sup_{i \in I} a_i) \leq \inf_{i \in I} \mathcal{N}(a_i)$   
 (b) *Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $\mathcal{N}(\sup_{i \in I} a_i) = \inf_{i \in I} \mathcal{N}(a_i)$*

BEWIJS. Dit volgt uit Lemma 1.9.  $\square$

**Lemma 1.11** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ , zij  $(a_i)_{i \in I}$  een familie in  $[0, 1]$ , en zij  $b$  in  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn:  $\mathcal{C}(\sup_{i \in I} a_i, b) = \sup_{i \in I} \mathcal{C}(a_i, b)$*
2. *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn:  $\mathcal{C}(b, \sup_{i \in I} a_i) = \sup_{i \in I} \mathcal{C}(b, a_i)$*

BEWIJS. Dit volgt uit Lemma 1.9.  $\square$

**Lemma 1.12** *Zij  $\mathcal{I}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ , zij  $(a_i)_{i \in I}$  een familie in  $[0, 1]$ , en zij  $b$  in  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a)  $\mathcal{I}(\sup_{i \in I} a_i, b) \leq \inf_{i \in I} \mathcal{I}(a_i, b)$   
 (b) *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  linkscontinu zijn:  $\mathcal{I}(\sup_{i \in I} a_i, b) = \inf_{i \in I} \mathcal{I}(a_i, b)$*
2. *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  rechtscontinu zijn:  $\mathcal{I}(b, \inf_{i \in I} a_i) = \inf_{i \in I} \mathcal{I}(b, a_i)$*

BEWIJS. Dit volgt uit Lemma 1.9. □

De volgende eigenschappen i.v.m. conjunctoren en disjunctoren zijn van hetzelfde genre, maar er worden nu suprema en infima in twee argumenten beschouwd.

**Lemma 1.13** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ , en zij  $(a_i)_{i \in I}$  en  $(b_i)_{i \in I}$  families in  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1.  $\sup_{i \in I} \mathcal{C}(a_i, b_i) \leq \mathcal{C}\left(\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i\right)$ ,
2.  $\inf_{i \in I} \mathcal{C}(a_i, b_i) \geq \mathcal{C}\left(\inf_{i \in I} a_i, \inf_{i \in I} b_i\right)$ .

BEWIJS.

1. Wegens het stijgend zijn van de partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  volgt dat

$$\mathcal{C}(a_j, b_j) \leq \mathcal{C}\left(\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i\right),$$

voor alle paren  $(a_j, b_j)$ . Bijgevolg is  $\mathcal{C}\left(\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i\right)$  een bovengrens voor de verzameling  $\{\mathcal{C}(a_j, b_j) | j \in I\}$ , zodat uit de karakterisatie van het supremum volgt dat

$$\sup_{i \in I} \mathcal{C}(a_i, b_i) \leq \mathcal{C}\left(\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i\right).$$

2. Analoog bewijs. □

**Lemma 1.14** *Zij  $\mathcal{S}$  een disjunctor op  $[0, 1]$ , en zij  $(a_i)_{i \in I}$  en  $(b_i)_{i \in I}$  families in  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1.  $\sup_{i \in I} \mathcal{S}(a_i, b_i) \leq \mathcal{S}\left(\sup_{i \in I} a_i, \sup_{i \in I} b_i\right)$ ,
2.  $\inf_{i \in I} \mathcal{S}(a_i, b_i) \geq \mathcal{S}\left(\inf_{i \in I} a_i, \inf_{i \in I} b_i\right)$ .

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van Lemma 1.13. □

### Enkele andere eigenschappen

**Lemma 1.15** *Zij  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  met  $\mathcal{C}$  een associatieve conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{N}$  een involutieve negator op  $[0, 1]$ , of zij  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  met  $\mathcal{C}$  een linkscontinue driehoeksnorm op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b, c)) = \mathcal{I}(\mathcal{C}(a, b), c)).$$

BEWIJS. We behandelen de twee gevallen afzonderlijk.



1. Stel eerst dat  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  met  $\mathcal{C}$  een associatieve conjunctor en  $\mathcal{N}$  een involutieve negator. Voor  $(a, b, c)$  in  $[0, 1]^3$ :

$$\mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b, c)) = \mathcal{N}[\mathcal{C}(a, \mathcal{N}(\mathcal{I}(b, c)))] \quad (1.1)$$

$$= \mathcal{N}[\mathcal{C}(a, \mathcal{N}(\mathcal{N}[\mathcal{C}(b, \mathcal{N}(c))]))] \quad (1.2)$$

$$= \mathcal{N}[\mathcal{C}(a, \mathcal{C}(b, \mathcal{N}(c)))] \quad (1.3)$$

$$= \mathcal{N}[\mathcal{C}(\mathcal{C}(a, b), \mathcal{N}(c))] \quad (1.4)$$

$$= \mathcal{I}(\mathcal{C}(a, b), c) \quad (1.5)$$

Toelichting: (1.1), (1.2) en (1.5) wegens de definitie van  $\mathcal{I}$ ; (1.3) wegens de involutiviteit van  $\mathcal{N}$ ; (1.4) wegens de associativiteit van  $\mathcal{C}$ .

2. De eigenschap voor  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  met  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$  is overgenomen uit [12]. Zonder te steunen op de linkscontinuïteit geldt enkel de  $\geq$ -ongelijkheid.  $\square$

**Lemma 1.16** *Zij  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm met linkscontinue partiële afbeeldingen. Er geldt:*

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3) (\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b, c)) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(a, b), c)).$$

BEWIJS.

Stel  $(p, q)$  in  $[0, 1]^2$ . Wegens de linkscontinuïteit van de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  volgt er:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(p, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(p, q)) &= \mathcal{C}(p, \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(p, \lambda) \leq q\}) \\ &= \sup\{\mathcal{C}(p, \lambda) \mid \lambda \in [0, 1] \wedge \mathcal{C}(p, \lambda) \leq q\}, \end{aligned}$$

waaruit:

$$\mathcal{C}(p, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(p, q)) \leq q. \quad (1.6)$$

Stel vervolgens dat  $p \leq q$ . Wegens  $\mathcal{C}$  een semi-norm hebben we dan  $\mathcal{C}(p, 1) = p \leq q$ . Bijgevolg is  $\sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(p, \lambda) \leq q\} = 1$ , d.w.z.

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(p, q) = 1. \quad (1.7)$$

Stel nu  $(a, b, c)$  in  $[0, 1]^3$ . We onderscheiden de volgende gevallen.

1. Geval  $a \leq b$ . Wegens (1.7) is  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b) = 1$ . Bijgevolg:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b), c) &= \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1, c) \\ &= \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(1, \lambda) \leq c\} \\ &= \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda \leq c\}, \end{aligned}$$

zodat

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b), c) = c. \quad (1.8)$$

- Geval 1.1:  $b \leq c$ . In dat geval is  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b, c) = 1$  (cfr. (1.7)), zodat  $\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b, c)) = \mathcal{C}(a, 1) = a$ . Uit (1.6) en (1.8), en de veronderstellingen omtrent  $a$ ,  $b$  en  $c$  volgt dan:

$$\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b)) \leq b \leq c = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b), c).$$

- Geval 1.2:  $b > c$ . Uit  $a \leq b$  en (1.6) volgt  $\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b, c)) \leq \mathcal{C}(b, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b, c)) \leq c$ . Wegens (1.8) is dan inderdaad voldaan aan  $\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b, c)) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b), c)$ .

2. Geval  $a > b$ .

- Geval 2.1:  $b \leq c$ . Wegens (1.6) is  $\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(a, b)) \leq b \leq c$ . Bijgevolg, mede wegens de commutativiteit van  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_C(\mathcal{I}_C(a, b), c) &= \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(\mathcal{I}_C(a, b), \lambda) \leq c\} \\ &= \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(\lambda, \mathcal{I}_C(a, b)) \leq c\} \\ &\geq a \end{aligned}$$

Anderzijds impliceert  $b \leq c$  dat  $\mathcal{I}_C(b, c) = 1$  (cfr. (1.7)), zodat  $\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c)) = \mathcal{C}(a, 1) = a$ . Combineren we dit resultaat met het voorgaande, dan bekomen we ook in dit geval  $\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c)) \leq \mathcal{I}_C(\mathcal{I}_C(a, b), c)$ .

- Geval 2.2:  $b > c$ . Stel (ongerijmde) dat:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c)) &> \mathcal{I}_C(\mathcal{I}_C(a, b), c) \\ &= \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(\mathcal{I}_C(a, b), \lambda) \leq c\} \end{aligned}$$

Dit impliceert dat:

$$\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c)) \notin \{\lambda \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(\mathcal{I}_C(a, b), \lambda) \leq c\},$$

en dus besluiten we dat:

$$\mathcal{C}(\mathcal{I}_C(a, b), \mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c))) > c. \quad (1.9)$$

Anderzijds hebben we:

$$\mathcal{C}(\mathcal{I}_C(a, b), \mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c))) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{I}_C(a, b), a), \mathcal{I}_C(b, c)) \quad (1.10)$$

$$= \mathcal{C}(\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(a, b)), \mathcal{I}_C(b, c)) \quad (1.11)$$

$$\leq \mathcal{C}(b, \mathcal{I}_C(b, c)) \quad (1.12)$$

$$\leq c \quad (1.13)$$

Toelichting: (1.10) wegens de associativiteit van  $\mathcal{C}$ ; (1.11) wegens de commutativiteit van  $\mathcal{C}$ ; (1.12) volgt uit (1.7) en de monotoniteit van  $\mathcal{C}$ ; (1.13) tenslotte volgt ook uit (1.7).

Aangezien (1.9) en (1.13) een strijdigheid opleveren, was onze veronderstelling

$$\mathcal{C}(a, \mathcal{I}_C(b, c)) > \mathcal{I}_C(\mathcal{I}_C(a, b), c)$$

fout. Dit bewijst het gestelde.  $\square$

## 1.3 Bewerkingen met vaagverzamelingen

Net zoals met klassieke verzamelingen, kunnen ook bewerkingen met vaagverzamelingen worden uitgevoerd. De complement-bewerking, de doorsnede en de unie zijn hiervan de belangrijkste. Daarnaast zullen we in deze paragraaf ook aandacht besteden aan de inclusie van vaagverzamelingen.

### 1.3.1 Complement, doorsnede en unie van vaagverzamelingen

In het scherpe geval gelden de volgende definities.

**Definitie 1.18** *Zij  $\mathcal{X}$  een universum en zij  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ . Het complement  $co A$ , de doorsnede  $A \cap B$  en de unie  $A \cup B$  worden gegeven door de volgende elementen van  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ :*

$$\begin{aligned} co A &= \{x \in \mathcal{X} \mid \neg(x \in A)\}, \\ A \cap B &= \{x \in \mathcal{X} \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \\ A \cup B &= \{x \in \mathcal{X} \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}. \end{aligned}$$

De binaire logische operatoren spelen een essentiële rol in deze definities. De uitbreiding van de bewerkingen complement, doorsnede en unie van scherpe verzamelingen naar vaagverzamelingen zal bijgevolg gestoeld zijn op de uitbreiding van de corresponderende binaire logische operatoren naar vaaglogische operatoren.

**Definitie 1.19** *Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $\mathcal{N}$  een negator. Het  $\mathcal{N}$ -complement  $co_{\mathcal{N}}A$  van  $A$  wordt gedefinieerd door de volgende vaagverzameling in  $\mathcal{X}$ :*

$$(co_{\mathcal{N}}A)(x) = \mathcal{N}(A(x)),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

Merk op dat  $co_{\mathcal{N}}(co_{\mathcal{N}}(A)) = A$  als en slechts als de negator  $\mathcal{N}$  involutief is (triviaal bewijs). De veralgemening van de corresponderende klassieke eigenschap is dus niet a priori geldig.

**Definitie 1.20** *Zij  $A$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor. De  $\mathcal{C}$ -doorsnede  $A \cap_{\mathcal{C}} B$  van  $A$  en  $B$  wordt gedefinieerd door de volgende vaagverzameling in  $\mathcal{X}$ :*

$$(A \cap_{\mathcal{C}} B)(x) = \mathcal{C}(A(x), B(x)),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

Indien  $\mathcal{C} = T_M$ , dan spreekt men van de Zadeh-doorsnede, en noteert men  $\cap_{T_M}$  als  $\cap$ .

Indien  $\mathcal{C}$  commutatief en associatief is (i.h.b. indien  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm is), dan kan de bovenstaande definitie onmiddellijk uitgebreid worden naar een eindige familie van vaagverzamelingen. Een uitbreiding naar oneindige families is enkel mogelijk indien de achterliggende conjunctor  $\mathcal{C}$  uitgebreid kan worden naar een oneindig aantal argumenten. Voor  $\mathcal{C} = T_M$  wordt dit gerealiseerd m.b.v. het infimum: voor een oneindige familie  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  wordt de Zadeh-doorsnede gedefinieerd door

$$(\cap_{i \in I} A_i)(x) = \inf_{i \in I} A_i(x),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

**Definitie 1.21** *Zij  $A$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $\mathcal{D}$  een disjunctoor. De  $\mathcal{D}$ -unie  $A \cup_{\mathcal{D}} B$  van  $A$  en  $B$  wordt gedefinieerd door de volgende vaagverzameling in  $\mathcal{X}$ :*

$$(A \cup_{\mathcal{D}} B)(x) = \mathcal{D}(A(x), B(x)),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

Indien  $\mathcal{D} = S_M$ , dan spreekt men van de Zadeh-unie, en noteert men  $\cup_{S_M}$  als  $\cup$ .

Net zoals bij conjunctoren kan de definitie uitgebreid worden naar eindige families van vaagverzamelingen indien  $\mathcal{D}$  commutatief en associatief is. Een uitbreiding naar oneindige families is enkel mogelijk indien de achterliggende disjunctoor uitgebreid kan worden naar een oneindig aantal argumenten. Voor  $\mathcal{D} = S_M$  wordt dit gerealiseerd m.b.v. het supremum: voor een oneindige familie  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  wordt de Zadeh-unie gedefinieerd door

$$(\cup_{i \in I} A_i)(x) = \sup_{i \in I} A_i(x),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

### 1.3.2 Inclusie van vaagverzamelingen

Er bestaan verschillende benaderingen voor de modellering van het begrip “inclusie” in de context van vaagverzamelingen. De volgende definitie is van Zadeh.

**Definitie 1.22** [78] *Zij  $\mathcal{X}$  een universum, en zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Men zegt dat  $A$  bevat is in  $B$ , genoteerd als  $A \subseteq_z B$ , als en slechts als:*

$$\boxed{(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) \leq B(x))}$$

Kenmerkend voor deze definitie is dat ze aan het begrip inclusie een scherp karakter verleent: een vaagverzameling is bevat in een andere vaagverzameling of is dat niet. Gelet op de filosofie achter vaagverzamelingen is het dan ook niet verwonderlijk dat er in de wetenschappelijke literatuur verschillende vage modellen voor de inclusie van vaagverzamelingen voorkomen, zoals bijvoorbeeld de vaaginclusie van Sinha en Dougherty [68], de vaaginclusie van Kitainik [34], en de vaaginclusie van Bandler en Kohout [3]. Deze modellen zullen uitvoerig aan bod komen in hoofdstuk 4, Paragraaf 4.4.

Merk op dat we in de notatie  $A \subseteq_z B$  het subscript  $z$  hebben gebruikt, om aan te geven dat het om de inclusie van vaagverzamelingen in de zin van Zadeh gaat. In het vervolg zullen we dit subscript gemakshalve weglaten.

## Hoofdstuk 2

# Een studie van vaagrelationele operatoren

Relaties spelen in het algemeen een zeer belangrijke rol in de wiskunde. Ze drukken verbanden uit tussen objecten uit dezelfde of verschillende klassen, en er bestaat een gans arsenaal aan wiskundige concepten (voorverzameling, naverzameling, directe beelden, inverse beelden, ...) en technieken (inverse bewerking, samenstellingen van relaties, ...) om bewerkingen op relaties uit te voeren, waardoor nieuwe informatie kan worden afgeleid.

De introductie van de vaagverzamelingenleer maakt het mogelijk om impreciese en vage informatie op een zinvolle manier te modelleren. Zo ook relaties, hetgeen aanleiding geeft tot de theorie der vaagrelaties. In dit hoofdstuk herhalen we kort de notie vaagrelatie, om ons vervolgens te concentreren op twee bijzondere vaagrelationele beelden van een vaagverzameling onder een vaagrelatie. Deze vaagrelationele beelden, met name het vaag direct beeld en het vaag pseudo-superinvers beeld, worden ontiaan van hun oorspronkelijke context door de introductie van de twee vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ , en het zijn deze twee operatoren die grondig bestudeerd zullen worden.

De reden die tot deze studie geleid heeft is van dubbele aard. Vooreerst zijn vaagrelationele beelden interessante theoretische concepten, en kan een uitgebreide studie van hun eigenschappen er beter inzicht in verschaffen. Onze bijdrage op dit vlak situeert zich enerzijds in de ruime veralgemening van sommige bestaande eigenschappen, en anderzijds in de toevoeging van nog niet onderzochte eigenschappen (Paragraaf 2.2). Daarnaast is een grondige studie van de vaagrelationele operatoren ook ingegeven door de vaststelling dat het enorm krachtige instrumenten blijken te zijn. Zo kunnen heel wat concepten uit de vaagverzamelingenleer of aanverwante domeinen beschreven worden in termen van deze vaagrelationele operatoren. Alle eigenschappen van de vaagrelationele operatoren kunnen bijgevolg bijna onmiddellijk vertaald worden in de context van deze toepassingen. We illustreren dit in Paragraaf 2.3 met enkele voorbeelden.

Met dit als argumentatie kan dit tweede hoofdstuk beschouwd worden als een zelfstandig geheel. Het hoofdstuk is echter een onderdeel van dit proefschrift om nog een andere reden. In de volgende hoofdstukken zullen we immers verschillende modellen voor grijswaardemorfologie bespreken, waaronder ook een algemeen vaaglogisch model (AVLM). We zullen aantonen dat de belangrijkste concepten in de model, met name de vaagdilatatie en de vaagerosie, formeel eveneens beschouwd kunnen worden als vaagrelationele operatoren. Heel wat eigenschappen van de vaagdilatatie en de vaagerosie zullen bijgevolg onmiddellijk afgeleid kunnen worden uit de corresponderende eigenschappen van de vaagrelationele operatoren.

## 2.1 Inleiding

### 2.1.1 Klassieke relaties en vaagrelaties

#### Van scherpe relaties naar vaagrelaties

In de klassieke wiskunde zijn de beschouwde relaties scherp, d.w.z. twee elementen zijn gerelateerd t.o.v. een bepaalde relatie of zijn dat niet. Formeel betekent dit dat een relatie  $\mathcal{R}$  tussen twee universa  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  gemodelleerd kan worden als een scherpe verzameling  $R$  in het cartesiaans product  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{(x, y) | x \in \mathcal{X} \wedge y \in \mathcal{Y}\}$ : een koppel  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  behoort dan tot de verzameling  $R$  als en slechts als  $x$  in relatie staat met  $y$  t.o.v. de relatie  $\mathcal{R}$ . We beschikken dus over de volgende definitie<sup>1</sup>.

**Definitie 2.1** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa. Een scherpe relatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$  is een deelverzameling van het cartesiaans product  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .*

*Een binaire relatie op  $\mathcal{X}$  is een scherpe relatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{X}$ .*

Heel wat relaties zijn echter niet scherp, maar zijn intrinsiek vaag of imprecies van aard. De klassieke wiskunde laat bijgevolg niet toe om dergelijke relaties te modelleren, en stelt ons evenmin in staat om op dergelijke relaties bewerkingen uit te voeren. Dit probleem is vergelijkbaar met hetgeen uit Hoofdstuk 1 bleek bij de scherpe verzamelingenleer, namelijk de onmogelijkheid van klassieke modellen om om te gaan met impreciese informatie. Deze vaststelling heeft geleid tot de introductie van de vaagverzamelingenleer, en naderhand ook tot de introductie van vaagrelaties. Een vaagrelatie wordt gekarakteriseerd door het feit dat een koppel  $(x, y)$  kan voldoen aan een gegeven relatie *in een bepaalde mate*. Formeel definieert men een vaagrelatie als volgt.

**Definitie 2.2** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa. Een vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$  is een vaagverzameling in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .*

*Een binaire vaagrelatie op  $\mathcal{X}$  is een vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{X}$ .*

We geven meteen ook de definitie van inverse vaagrelatie.

**Definitie 2.3** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa en zij  $R$  een vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ . De inverse vaagrelatie  $R^{-1}$  van  $R$  is de vaagrelatie van  $\mathcal{Y}$  naar  $\mathcal{X}$ , gedefinieerd door:*

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y),$$

voor alle  $(y, x)$  in  $\mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ .

Ter illustratie van het concept “scherpe relatie” versus dat van “vaagrelatie” geven we een voorbeeld uit de medische wereld.

**Voorbeeld 2.1** *Stel  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$  het universum der patiënten en  $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots\}$  het universum der symptomen. Medische diagnose bestaat erin dat men nagaat welke patiënten welke symptomen vertonen. In feite bepaalt men hier een relatie  $R$  tussen patiënten enerzijds en symptomen anderzijds, m.a.w. een relatie van  $\mathcal{P}$  naar  $\mathcal{S}$ .*

*Indien we  $R$  modelleren als een scherpe relatie, dan moet voor elk koppel  $(p, s)$  in  $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$  ondubbelzinnig bepaald worden of patiënt  $p$  het symptoom  $s$  vertoont. Beschouwen we bijvoorbeeld het symptoom “koorts” (genoteerd als  $k$ ), dan kan  $R$  klassiek als volgt gedefinieerd worden:*

$$R(p, k) = \begin{cases} 0 & \text{als } t(p) < 37.5 \\ 1 & \text{als } t(p) \geq 37.5, \end{cases}$$

*met  $t(p)$  de lichaamstemperatuur van patiënt  $p$ . Op deze werkwijze kunnen we echter dezelfde kritiek uiten als in het kader van klassieke verzamelingen versus vaagverzamelingen:*

<sup>1</sup>We zullen verder geen onderscheid meer maken tussen de relatie  $\mathcal{R}$  enerzijds en de representatie als verzameling  $R$  anderzijds; we gebruiken steeds een gewone hoofdletter  $R$ .

- *Er is geen mogelijkheid tot gradatie: zo is er een groot verschil tussen een lichaamstemperatuur van 37.5 graden en een lichaamstemperatuur van 41 graden, maar in het klassiek model wordt hiertussen geen onderscheid gemaakt; beide patiënten hebben gewoon koorts.*
- *De klassieke modellering geeft aanleiding tot onnatuurlijke overgangen: zo wordt een patiënt met een temperatuur van 37.4 graden niet beschouwd als koortsig, terwijl een patiënt met een temperatuur van 37.5 graden wel wordt beschouwd als koortsig.*
- *Men kan zich afvragen waarom men de grens op 37.5 graden legt, en bijvoorbeeld niet op 37.4 of 37.6 graden. Dit is een algemeen probleem bij het kunstmatig invoeren van scherpe grenzen.*

*Met behulp van vaagrelaties kan men het verband patiënt-symptoom modelleren op een manier die nauwer aansluit met de menselijke perceptie. In het geval van het symptoom koorts kunnen we de vaagrelatie  $R$  bijvoorbeeld definiëren als:*

$$R(p, k) = \begin{cases} 0 & \text{als } t(p) < 37.0 \\ 2(t(p) - 37)^2 & \text{als } t(p) \in ]37.0, 37.5] \\ 1 - 2(38 - t(p))^2 & \text{als } t(p) \in ]37.5, 38] \\ 1 & \text{als } t(p) \geq 38.0, \end{cases}$$

*Voor een patiënt  $p_1$  met  $t(p_1) = 37.3$  geldt dan  $R(p_1, k) = 0.18$ ; voor een patiënt  $p_2$  met  $t(p_2) = 37.8$  geldt  $R(p_2, k) = 0.92$ .* ◁

### Voor- en naverzamelingen

Voor- en naverzamelingen van een (scherpe of vage) relatie zijn concepten met een interessante interpretatie. Ze zullen verder optreden bij de definitie van vaagrelationele beelden, en komen ook nog terug bij de bespreking van een toepassing in Paragraaf 2.3.

**Definitie 2.4** [32] *Zij  $R$  een relatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ . De  $R$ -naverzameling van  $x$  in  $\mathcal{X}$  wordt gedefinieerd als:*

$$xR = \{y \in \mathcal{Y} \mid (x, y) \in R\};$$

*de  $R$ -voorverzameling van  $y$  in  $\mathcal{Y}$  wordt gedefinieerd als:*

$$Ry = \{x \in \mathcal{X} \mid (x, y) \in R\}.$$

De naverzameling  $xR$  bestaat dus uit alle objecten  $y$  uit  $\mathcal{Y}$  die met  $x$  gerelateerd zijn t.o.v. de relatie  $R$ . Een analoge interpretatie geldt voor de voorverzameling  $Ry$ .

**Definitie 2.5** [32] *Zij  $R$  een vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ . De  $R$ -naverzameling van  $x$  in  $\mathcal{X}$  wordt gedefinieerd als de vaagverzameling in  $\mathcal{Y}$  bepaald door:*

$$xR(y) = R(x, y),$$

*voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ . De  $R$ -voorverzameling van  $y$  in  $\mathcal{Y}$  wordt gedefinieerd als de vaagverzameling in  $\mathcal{X}$  bepaald door:*

$$Ry(x) = R(x, y),$$

*voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .*

### Potentiële eigenschappen van vaagrelaties

De volgende potentiële eigenschappen van binaire vaagrelaties zijn veralgemeningen van klassieke eigenschappen. Ze zullen verder in dit hoofdstuk nog opduiken.

**Definitie 2.6** *Zij  $R$  een binaire vaagrelatie op  $\mathcal{X}$ .  $R$  is reflexief indien*

$$\boxed{(\forall x \in \mathcal{X})(R(x, x) = 1);}$$

*$R$  is symmetrisch indien*

$$\boxed{(\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X})(R(x, y) = R(y, x));}$$

*$R$  is sup- $\mathcal{C}$  transitief, met  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$  indien*

$$\boxed{(\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X})(R(x, y) \geq \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, z), R(z, y))).}$$

De ongelijkheid in de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteitsvoorwaarde is in bijzondere omstandigheden een gelijkheid. We tonen dit aan in volgend lemma, waarin we met het oog op andere toepassingen ook nog een ander interessant resultaat vermelden.

**Lemma 2.1** *Zij  $R$  een reflexieve en sup- $\mathcal{C}$  transitieve vaagrelatie op  $\mathcal{X}$ , met  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1.  $(\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X})(R(x, y) = \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, z), R(z, y)))$ .
2. *Indien  $R$  bovendien symmetrisch is:*  $(\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X})(R(x, y) = \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, z), R(z, y)))$ .

BEWIJS.

1. Voor  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ :

$$R(x, y) \geq \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, z), R(z, y)) \quad (2.1)$$

$$\geq \mathcal{C}(R(x, x), R(x, y)) \quad (2.2)$$

$$= \mathcal{C}(1, R(x, y)) \quad (2.3)$$

$$= R(x, y) \quad (2.4)$$

Toelichting: (2.1) wegens de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit van  $R$ ; (2.2) wegens de karakterisatie van supremum; (2.3) wegens de reflexiviteit van  $R$ ; (2.4) wegens  $\mathcal{C}$  een semi-norm. Aangezien het linkerlid gelijk is aan het laatste rechterlid (namelijk  $R(x, y)$ ) zijn ook de tussenliggende leden gelijk. Bijgevolg is  $R(x, y) = \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, z), R(z, y))$ .

2. Stel  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Enerzijds hebben we:

$$\inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, z), R(z, y)) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, x), R(x, y)) \quad (2.5)$$

$$= \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1, R(x, y)) \quad (2.6)$$

$$= R(x, y) \quad (2.7)$$

Toelichting: (2.5) wegens de karakterisatie van infimum; (2.6) wegens de reflexiviteit van  $R$ ; (2.7) wegens  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  een randimplicator (dit volgt uit het feit dat  $\mathcal{C}$  een semi-norm is; cfr. Lemma 1.3).

Anderzijds impliceert de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit van  $R$  dat:

$$R(z_0, y) \geq \mathcal{C}(R(z_0, x), R(x, y))$$



voor elke  $z_0$  in  $\mathcal{X}$ . Hieruit volgt:

$$R(x, y) \in \{\lambda | \lambda \in [0, 1] \wedge \mathcal{C}(R(z_0, x), \lambda) \leq R(z_0, y)\}.$$

Bijgevolg hebben we:

$$R(x, y) \leq \sup\{\lambda | \lambda \in [0, 1] \text{ en } \mathcal{C}(R(z_0, x), \lambda) \leq R(z_0, y)\} \quad (2.8)$$

$$= \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(z_0, x), R(z_0, y)) \quad (2.9)$$

$$= \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, z_0), R(z_0, y)) \quad (2.10)$$

Toelichting: (2.8) wegens definitie van supremum; (2.9) wegens definitie van  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ ; (2.10) wegens  $R$  symmetrisch. Aangezien de ongelijkheid  $R(x, y) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, z_0), R(z_0, y))$  geldig is voor elke  $z_0$  in  $\mathcal{X}$ , volgt uit de karakterisatie van infimum dat:

$$R(x, y) \leq \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, z), R(z, y)),$$

waaruit samen met (2.7) de gewenste gelijkheid volgt.  $\square$

## 2.1.2 Vaagrelationele beelden

### Direct beeld

Behalve de notie “relatie”, werden ook aanverwante concepten en technieken uitgebreid naar concepten en technieken die toepasbaar zijn op vaagrelaties. Zo ook de notie van het direct beeld van een verzameling onder een relatie.

**Definitie 2.7** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa, zij  $A$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  en zij  $R$  een scherpe relatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ . Het direct beeld  $R(A)$  van  $A$  onder de relatie  $R$  wordt gedefinieerd als:*

$$\begin{aligned} R(A) &= \{y \in \mathcal{Y} | Ry \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \{y \in \mathcal{Y} | (\exists x \in \mathcal{X})((x, y) \in R \wedge x \in A)\}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt onmiddellijk de volgende interpretatie: het direct beeld  $R(A)$  van een verzameling  $A$  onder een relatie  $R$  is de set van objecten uit  $\mathcal{Y}$  die met *minstens één* element uit  $A$  gerelateerd zijn.

**Definitie 2.8** [32] *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa, zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $R$  een vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ , d.w.z.  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Het vaag direct beeld  $R(A)$  van  $A$  onder de vaagrelatie  $R$  wordt gedefinieerd door:*

$$R(A)(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \min(R(x, y), A(x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ .

Deze definitie kan echter veralgemeend worden door gebruik te maken van een willekeurige conjunctor  $\mathcal{C}$  i.p.v. van het minimum voor de modellering van  $\wedge$ .

**Definitie 2.9** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa, zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Het vaag direct  $\mathcal{C}$ -beeld  $R_{\mathcal{C}}(A)$  van  $A$  onder de vaagrelatie  $R$  wordt gedefinieerd door:*

$$R_{\mathcal{C}}(A)(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ .

Behalve het direct beeld van een verzameling onder een relatie bestaan nog verschillende andere types van beelden, elk met een eigen interpretatie; we vermelden in het bijzonder het superdirect, subdirect en vierkant direct beeld, alsook het invers, superinvers, subinvers en vierkant invers beeld [32]. In dit hoofdstuk zullen we nog een ander beeld beschouwen, dat nauw verwant is met het superinvers beeld.

### Pseudo-superinvers beeld

We herhalen de definitie van superinvers beeld.

**Definitie 2.10** [32] *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa, zij  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$  en zij  $R$  een scherpe relatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ . Het superinvers beeld  $(R^{-1})^{\triangleright}(B)$  van  $B$  onder de relatie  $R$  wordt gedefinieerd als:*

$$\begin{aligned}(R^{-1})^{\triangleright}(B) &= \{x \in \mathcal{X} \mid \emptyset \subset xR \subseteq B\} \\ &= \{x \in \mathcal{X} \mid (\exists y \in \mathcal{Y})((x, y) \in R) \wedge (\forall y \in \mathcal{Y})((x, y) \in R \Rightarrow y \in B)\}.\end{aligned}$$

Men kan het superinvers beeld  $(R^{-1})^{\triangleright}(B)$  interpreteren als de set van objecten uit  $\mathcal{X}$  die *enkel* met elementen uit  $B$ , en met *minstens één* object uit  $B$  gerelateerd zijn. Merk op dat de voorwaarde  $xR \neq \emptyset$  die in de definitie wordt opgelegd noodzakelijk is voor deze interpretatie. Inderdaad, zonder deze voorwaarde zouden immers ook de objecten  $x$  uit  $\mathcal{X}$  die met geen enkele  $y$  uit  $\mathcal{Y}$  gerelateerd zijn tot het superinvers beeld horen.

Het beeld dat we verder in dit hoofdstuk zullen beschouwen wordt op analoge wijze gedefinieerd, maar zonder de niet-ledigheidsvoorwaarde  $xR \neq \emptyset$ . We bestempelen dit beeld als het pseudo-superinvers beeld.

**Definitie 2.11** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa, zij  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$  en zij  $R$  een scherpe relatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Y}$ . Het pseudo-superinvers beeld  $(R^{-1})^{p\triangleright}(B)$  van  $B$  onder de relatie  $R$  wordt gedefinieerd als:*

$$\begin{aligned}(R^{-1})^{p\triangleright}(B) &= \{x \in \mathcal{X} \mid xR \subseteq B\} \\ &= \{x \in \mathcal{X} \mid (\forall y \in \mathcal{Y})((x, y) \in R \Rightarrow y \in B)\}.\end{aligned}$$

De fuzzificatie van het pseudo-superinvers beeld volgt onmiddellijk<sup>2</sup>.

**Definitie 2.12** *Zij  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  twee universa, zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{Y})$  en zij  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Het vaag pseudo-superinvers  $\mathcal{I}$ -beeld  $(R^{-1})_{\mathcal{I}}^{p\triangleright}(B)$  van  $B$  onder de vaagrelatie  $R$  wordt gedefinieerd door:*

$$(R^{-1})_{\mathcal{I}}^{p\triangleright}(B)(x) = \inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{I}(R(x, y), B(y)) = \inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{I}(R^{-1}(y, x), B(y)),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

### De operatoren $\clubsuit$ en $\heartsuit$

Het vaag direct beeld en het vaag pseudo-superinvers beeld zijn de vaagrelationele beelden die het onderwerp vormen van dit hoofdstuk. Aangezien het onze doelstelling is om de studie van deze vaagrelationele beelden zo algemeen mogelijk uit te voeren, koppelen we de definities los van hun oorspronkelijke context. We doen dit door twee vaagrelationele operatoren in te voeren, die in het bijzonder geïnterpreteerd kunnen worden als de hoger vermelde vaagrelationele beelden.

**Definitie 2.13** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . De operator  $\clubsuit$  wordt gedefinieerd door:*

$$\begin{aligned}\clubsuit: \mathcal{Y} &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)), \quad \forall y \in \mathcal{Y}\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Het feit dat men voor het pseudo-superinvers beeld geen rekening houdt met de niet-ledigheidsvoorwaarde zorgt voor een aanzienlijke vereenvoudiging in het fuzzificatie-proces. Indien men de niet-ledigheidsvoorwaarde mee in het fuzzificatie-proces opneemt bekomt men immers een meer ingewikkelde uitdrukking. We merken hier op dat men in het geval van het superinvers beeld eventueel zou kunnen argumenteren om in het klassieke geval de niet-ledigheidsvoorwaarde te omzeilen door elke  $x$  waarvoor  $xR = \emptyset$  uit het universum  $\mathcal{X}$  te nemen (het universum wordt dus aangepast aan de actuele situatie). Men zou deze procedure dan kunnen herhalen in het vage geval. Men ziet echter onmiddellijk in dat er aangaande de interpretatie nog steeds problemen zouden optreden in die gevallen waar de vaagverzameling  $xR$  ‘bijna’ ledig is. Een dergelijke aanpak is bijgevolg niet zinvol.

De operator  $\heartsuit$  wordt gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \heartsuit : \mathcal{Y} &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)), \quad \forall y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

Men kan makkelijk nagaan dat:

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{C}}(A) &= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A) \\ (R^{-1})_{\mathcal{I}}^{\text{pp}}(B) &= \heartsuit(\mathcal{I}, R^{-1}, B). \end{aligned}$$

Volledigheidshalve merken we op dat in onze oorspronkelijke studie [47] nog twee andere vaagrelationele operatoren bestudeerd werden, met name de operatoren  $\spadesuit$  en  $\diamond$ . Ze worden analoog gedefinieerd als respectievelijk de operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ , met dat verschil dat de argumenten  $R(x, y)$  en  $A(x)$  in de uitdrukkingen uit Definitie 2.13 van plaats verwisseld worden.

**Definitie 2.14** Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . De operator  $\spadesuit$  wordt gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \spadesuit : \mathcal{Y} &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(A(x), R(x, y)), \quad \forall y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

De operator  $\diamond$  wordt gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} \diamond : \mathcal{Y} &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(A(x), R(x, y)), \quad \forall y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

Aangezien de eigenschappen van  $\spadesuit$  en  $\diamond$  gelijkaardig zijn aan de eigenschappen van  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$  (inclusief de bewijsvoering), en aangezien deze operatoren verder in het proefschrift niet meer aan bod zullen komen in het kader van vaagmorfologie, hebben we ervoor geöpteerd om ons in dit hoofdstuk verder te beperken tot de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ .

## 2.2 Eigenschappen van de vaagrelationele operatoren

### 2.2.1 Bijzondere gevallen

We onderzoeken de uitwerking van de vaagrelationele operatoren indien  $A = \emptyset$  en indien  $A = \mathcal{X}$ . Bij definitie geldt dat  $(\forall x \in \mathcal{X})(\emptyset(x) = 0)$  en  $(\forall x \in \mathcal{X})(\mathcal{X}(x) = 1)$ , voor een willekeurig universum  $\mathcal{X}$ .

**Eigenschap 2.1** Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \emptyset) = \emptyset$ ,  
(b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ .
2. Indien  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  (d.w.z.  $R \in \mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ ) en indien  $R$  reflexief is, dan geldt:
  - (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \mathcal{X}) = \mathcal{X}$ ,
  - (b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \emptyset) = \emptyset$ .

BEWIJS.

1. (a) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \emptyset)(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), 0) = 0 = \emptyset(y),$$

waarbij we gebruik maken van Lemma 1.1.

(b) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \mathcal{X})(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), 1) = 1 = \mathcal{Y}(y),$$

waarbij we gebruik maken van Lemma 1.2.

2. (a) Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \mathcal{X})(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), 1) \geq \mathcal{C}(R(y, y), 1) = \mathcal{C}(1, 1) = 1 = \mathcal{X}(y),$$

waarbij we gebruik maken van de reflexiviteit van  $R$ .

(b) Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \emptyset)(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), 0) \leq \mathcal{I}(R(y, y), 0) = \mathcal{I}(1, 0) = 0 = \emptyset(y),$$

waarbij we gebruik maken van de reflexiviteit van  $R$ . □

Omtrent  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \mathcal{X})$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \emptyset)$  kan in het algemeen niets gezegd worden zonder supplementaire voorwaarden zoals in Eigenschap 2.1. Beschouw bijvoorbeeld de niet-reflexieve relatie  $R$  bepaald door

$$(\forall(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(R(x, y) = 0.5),$$

dan volgt voor elke semi-norm  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$ :

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \mathcal{X})(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), 1) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(0.5, 1) = 0.5,$$

zodat noch  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \mathcal{X}) = \emptyset$ , noch  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ . Men kan analoge voorbeelden geven voor  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \emptyset)$ .

Vervolgens onderzoeken we ook de gevallen  $R = \emptyset$  of  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

**Eigenschap 2.2** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:*

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, \emptyset, A) = \emptyset$ ,
- (b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, \emptyset, A) = \mathcal{Y}$ .

2. *Indien  $(\exists x_0 \in \mathcal{X})(A(x_0) = 1)$ , d.w.z. indien  $A$  genormaliseerd is, dan geldt:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A) = \mathcal{Y}.$$

3. *Indien  $(\exists x_0 \in \mathcal{X})(A(x_0) = 0)$ , dan geldt:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A) = \emptyset.$$

BEWIJS.

1. (a) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\clubsuit(\mathcal{C}, \emptyset, A)(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(0, A(x)) = 0 = \emptyset(y),$$

waarbij we gebruik maken van Lemma 1.1.

(b) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\heartsuit(\mathcal{I}, \emptyset, A)(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(0, A(x)) = 1 = \mathcal{Y}(y),$$

waarbij we gebruik maken van Lemma 1.2.

2. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\clubsuit(\mathcal{C}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(1, A(x)) \geq \mathcal{C}(1, A(x_0)) = \mathcal{C}(1, 1) = 1 = \mathcal{Y}(y),$$

waarbij we gebruik maken van de genormaliseerdheid van  $A$ .

3. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\heartsuit(\mathcal{I}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, A(x)) \leq \mathcal{I}(1, A(x_0)) = \mathcal{I}(1, 0) = 0 = \emptyset(y),$$

waarbij we gebruik maken van de voorwaarde op  $A$ .  $\square$

Men kan met analoge voorbeelden als hoger illustreren dat zonder de bijkomende voorwaarden uit Eigenschap 2.2 niets gezegd kan worden over  $\clubsuit(\mathcal{C}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)$ .

## 2.2.2 Dualiteit en codualiteit

### Dualiteit

De dualiteit van twee operatoren t.o.v. een negator  $\mathcal{N}$  wordt als volgt gedefinieerd.

**Definitie 2.15** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . De operator  $P$  is  $\mathcal{N}$ -dual t.o.v. de operator  $Q$  als en slechts als*

$$P = co_{\mathcal{N}} \circ Q \circ co_{\mathcal{N}},$$

*d.w.z. als  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(P(A) = co_{\mathcal{N}}(Q(co_{\mathcal{N}}(A))))$ .  $P$  en  $Q$  worden  $\mathcal{N}$ -dual genoemd indien  $P$   $\mathcal{N}$ -dual is t.o.v.  $Q$  en  $Q$   $\mathcal{N}$ -dual is t.o.v.  $P$ .*

Indien men van twee operatoren weet dat ze  $\mathcal{N}$ -dual zijn, dan impliceert dit dat de ene operator uit de andere geconstrueerd kan worden, en omgekeerd. We zullen verder nog een andere vorm van dualiteit zien, met eenzelfde interpretatie.

We voeren ook de zwakkere noties van  $\mathcal{N}$ -onderdual en  $\mathcal{N}$ -bovendual operatoren in.

**Definitie 2.16** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . De operator  $P$  is  $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v. de operator  $Q$  als en slechts als*

$$P \leq co_{\mathcal{N}} \circ Q \circ co_{\mathcal{N}},$$

*d.w.z. als  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(P(A) \subseteq co_{\mathcal{N}}(Q(co_{\mathcal{N}}(A))))^3$ .*

**Definitie 2.17** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . De operator  $P$  is  $\mathcal{N}$ -bovendual t.o.v. de operator  $Q$  als en slechts als*

$$P \geq co_{\mathcal{N}} \circ Q \circ co_{\mathcal{N}},$$

*d.w.z. als  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(P(A) \supseteq co_{\mathcal{N}}(Q(co_{\mathcal{N}}(A))))$ .*

Uit de definities volgt onmiddellijk dat een operator  $P$   $\mathcal{N}$ -dual is t.o.v. een operator  $Q$  als en slechts als  $P$   $\mathcal{N}$ -onderdual en  $\mathcal{N}$ -bovendual is t.o.v.  $Q$ .

**Eigenschap 2.3** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. *Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -dual t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .*
2. *Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -dual t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .*
3. *Indien  $\mathcal{N}$  continu is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  zijn  $\mathcal{N}$ -dual  $\Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ . In dit geval impliceert de continuïteit van  $\mathcal{N}$  ook de involutiviteit ervan.*

BEWIJS.

<sup>3</sup>De orderrelatie op de klasse der  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren wordt gedefinieerd als de puntsgewijze uitbreiding van de orderrelatie  $\subseteq$  op  $\mathcal{V}(\mathcal{Y})$ .

1. Zij  $\mathcal{N}$  een rechtscontinue negator en zij  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ , dan volgt voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
(\text{co}_{\mathcal{N}}(\heartsuit(\mathcal{I}, R, \text{co}_{\mathcal{N}}A)))(y) &= \mathcal{N}(\heartsuit(\mathcal{I}, R, \text{co}_{\mathcal{N}}A)(y)) \\
&= \mathcal{N}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))\right) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{N}(\mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}(R(x, y), A(x)) \\
&= \clubsuit(\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}, R, A)(y),
\end{aligned}$$

waarbij we voor de derde overgang gebruik maken van Lemma 1.10.

Merk op dat dit deel van de eigenschap niet geldig is indien  $\mathcal{N}$  niet rechtscontinu is. Beschouw bijvoorbeeld de negator  $N_k$ . Stel verder  $\mathcal{X} = ]0, 1[$ , definieer  $R$  als  $(\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(R(x, y) = 1 - \frac{1}{x})$ ,  $A$  als  $(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) = \frac{1}{x})$ , en kies  $I_{KD}$  als implicator. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$  hebben we dan:

$$\begin{aligned}
I_{KD}(R(x, y), N_k(A(x))) &= I_{KD}\left(1 - \frac{1}{x}, N_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= I_{KD}\left(1 - \frac{1}{x}, 0\right) \\
&= \max\left(1 - \left[1 - \frac{1}{x}\right], 0\right) \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Bijgevolg is:

$$\begin{aligned}
N_k\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} I_{KD}(R(x, y), N_k(A(x)))\right) &= N_k\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{x}\right) = N_k(0) = 1, \\
\sup_{x \in \mathcal{X}} N_k(I_{KD}(R(x, y), N_k(A(x)))) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} N_k\left(\frac{1}{x}\right) = \sup_{x \in \mathcal{X}} 0 = 0,
\end{aligned}$$

zodat  $(\text{co}_{N_k}(\heartsuit(I_{KD}, R, \text{co}_{N_k}A)))(y) \neq \clubsuit(\mathcal{C}_{I_{KD}, N_k}, R, A)(y)$ .

Zij omgekeerd  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -duaal t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$ . Neem dan willekeurig  $(a, b)$  in  $[0, 1]^2$  en definieer  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  als  $(\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(R(x, y) = a)$  en  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  als  $(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) = b)$ . Het gegeven impliceert dan voor een willekeurige  $y_0$  in  $\mathcal{Y}$  dat:

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y_0) &= \text{co}_{\mathcal{N}}(\heartsuit(\mathcal{I}, R, \text{co}_{\mathcal{N}}A))(y_0) \\
\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y_0), A(x)) &= \mathcal{N}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y_0), \mathcal{N}(A(x)))\right) \\
\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(a, b) &= \mathcal{N}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(a, \mathcal{N}(b))\right) \\
\Leftrightarrow \mathcal{C}(a, b) &= \mathcal{N}(\mathcal{I}(a, \mathcal{N}(b)))
\end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ . Bemerkt dat dit luik van de eigenschap ook geldt voor een niet-rechtscontinue negator  $\mathcal{N}$ .

2. Analooq aan het bewijs van (1).

3. Zij  $\mathcal{N}$  een continue negator, en zij  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  (het voldaan zijn van deze beide gelijkheden impliceert de involutiviteit van  $\mathcal{N}$ , cfr. Lemma 1.7). Uit de eigenschappen (1) en (2) volgt dat  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -duaal is t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  en dat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -duaal is t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$ . Bijgevolg zijn  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -duaal.

Zij omgekeerd  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -duaal, met  $\mathcal{N}$  een continue negator. Uit eigenschap (1) volgt dat  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  en uit eigenschap (2) dat  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ . Beide gelijkheden impliceren ook hier de involutiviteit van de negator  $\mathcal{N}$ .  $\square$

De volgende eigenschap is het analogon van Eigenschap 2.3 in termen van onderdualiteit en bovendualiteit. Merk op dat de voorwaarden op de conjunctor  $\mathcal{C}$  of de implicator  $\mathcal{I}$  zwakker zijn (er moeten slechts bepaalde ongelijkheden i.p.v. gelijkheden gelden), en dat de rechtscontinuïteit of linkscontinuïteit van de negator  $\mathcal{N}$  niet altijd vereist is. Deze laatste vaststelling was één van de redenen om de noties van onderdualiteit en bovendualiteit in te voeren.

**Eigenschap 2.4** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{C} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .  
 (b) Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .
2. (a) Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -bovendual t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{C} \geq \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .  
 (b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -bovendual t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{I} \geq \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .

BEWIJS.

1. (a) Zij  $\mathcal{N}$  een willekeurige negator op  $[0, 1]$  en zij  $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ , dan volgt voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
 co_{\mathcal{N}}(\heartsuit(\mathcal{I}, R, co_{\mathcal{N}}A))(y) &= \mathcal{N}(\heartsuit(\mathcal{I}, R, co_{\mathcal{N}}A)(y)) \\
 &= \mathcal{N}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))\right) \\
 &\geq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{N}(\mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))) \\
 &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}(R(x, y), A(x)) \\
 &\geq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)) \\
 &= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y),
 \end{aligned}$$

waarbij voor de derde overgang gebruik werd gemaakt van Lemma 1.10, en voor de vijfde overgang van de gegeven voorwaarde op  $\mathcal{C}$ .

Zij omgekeerd  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$ . Op volledig analoge wijze als in Eigenschap 2.3(1) toont men aan dat  $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .

- (b) Zij  $\mathcal{N}$  een linkscontinue negator en zij  $\mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ , dan volgt voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
 co_{\mathcal{N}}(\clubsuit(\mathcal{C}, R, co_{\mathcal{N}}A))(y) &= \mathcal{N}(\clubsuit(\mathcal{C}, R, co_{\mathcal{N}}A)(y)) \\
 &= \mathcal{N}\left(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))\right) \\
 &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{N}(\mathcal{C}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))) \\
 &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}(R(x, y), A(x)) \\
 &\geq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) \\
 &= \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)(y),
 \end{aligned}$$

waarbij voor de derde overgang gebruik werd gemaakt van Lemma 1.10, en voor de vijfde overgang van de gegeven voorwaarde op  $\mathcal{I}$ . Merk op dat de linkscontinuïteit van  $\mathcal{N}$  vereist is, omdat we anders in de derde overgang  $\leq$  i.p.v.  $=$  hadden moeten schrijven, hetgeen tot geen enkel resultaat zou geleid hebben. Dat de eigenschap niet geldig is indien  $\mathcal{N}$  niet linkscontinu is, kan men illustreren met een voorbeeld analoog aan dat gegeven in het bewijs van Eigenschap 2.3(2).

Zij omgekeerd  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$   $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$ . Op volledig analoge wijze als in Eigenschap 2.3(2) toont men aan dat  $\mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ . Bemerkt dat dit luik van de eigenschap ook geldt voor een niet-linkscontinue negator  $\mathcal{N}$ .

2. (a) Analooq bewijs als in (1b).  
 (b) Analooq bewijs als in (1a). □

Men gaat eenvoudig na dat Eigenschap 2.3 onmiddellijk volgt uit Eigenschap 2.4.

### 2.2.3 Codualiteit

Codualiteit wijst op een analoge relatie tussen twee operatoren als bij dualiteit. Op formeel vlak zit het verschil hem in het feit dat, in het algemeen, de ene operator niet expliciet in termen van de andere operator kan geschreven worden.

**Definitie 2.18** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren, en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . De operator  $P$  is  $\mathcal{N}$ -coduaal t.o.v. de operator  $Q$  als en slechts als*

$$\boxed{co_{\mathcal{N}} \circ P = Q \circ co_{\mathcal{N}}},$$

*d.w.z. als  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(P(A) = co_{\mathcal{N}}(P(A)) = Q(co_{\mathcal{N}}(A)))$ .  $P$  en  $Q$  worden  $\mathcal{N}$ -coduaal genoemd indien  $P$   $\mathcal{N}$ -coduaal is t.o.v.  $Q$  en  $Q$   $\mathcal{N}$ -coduaal is t.o.v.  $P$ .*

Net zoals dit het geval was bij de dualiteitseigenschappen, voeren we ook hier de zwakkere noties van  $\mathcal{N}$ -ondercoduale en  $\mathcal{N}$ -bovencoduale operatoren in.

**Definitie 2.19** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren, en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . De operator  $P$  is  $\mathcal{N}$ -ondercoduaal t.o.v. de operator  $Q$  als en slechts als*

$$\boxed{co_{\mathcal{N}} \circ P \leq Q \circ co_{\mathcal{N}}},$$

*d.w.z. als  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(co_{\mathcal{N}}(P(A)) \subseteq Q(co_{\mathcal{N}}(A)))$ .*

**Definitie 2.20** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  operatoren, en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . De operator  $P$  is  $\mathcal{N}$ -bovencoduaal t.o.v. de operator  $Q$  als en slechts als*

$$\boxed{co_{\mathcal{N}} \circ P \geq Q \circ co_{\mathcal{N}}},$$

*d.w.z. als  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(co_{\mathcal{N}}(P(A)) \supseteq Q(co_{\mathcal{N}}(A)))$ .*

Uit de definities volgt onmiddellijk dat een operator  $P$   $\mathcal{N}$ -coduaal is t.o.v. een operator  $Q$  als en slechts als  $P$   $\mathcal{N}$ -ondercoduaal en  $\mathcal{N}$ -bovencoduaal is t.o.v.  $Q$ .

Het verband tussen  $\mathcal{N}$ -dualiteit en  $\mathcal{N}$ -codualiteit is onmiddellijk duidelijk: de noties zijn equivalent voor involutieve negatoren.

**Lemma 2.2** *Zij  $P$  en  $Q$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{Y})$  afbeeldingen, en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Indien  $\mathcal{N}$  involutief is, dan geldt:*

1.  $P$  is  $\mathcal{N}$ -dual t.o.v.  $Q \Leftrightarrow P$  is  $\mathcal{N}$ -coduaal t.o.v.  $Q$ ,
2.  $P$  is  $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $Q \Leftrightarrow P$  is  $\mathcal{N}$ -bovencoduaal t.o.v.  $Q$ ,
3.  $P$  is  $\mathcal{N}$ -bovendual t.o.v.  $Q \Leftrightarrow P$  is  $\mathcal{N}$ -ondercoduaal t.o.v.  $Q$ .

BEWIJS. Onmiddellijk uit de involutiviteit van  $\mathcal{N}$ . □

We kunnen nu analoge eigenschappen onderzoeken als in het geval van dualiteit, onderdualiteit en bovendualiteit. Daar waar de eigenschappen i.v.m. dualiteit geformuleerd werden in termen van de operatoren  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  en  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ , worden de eigenschappen i.v.m. codualiteit geformuleerd m.b.v. vier nieuwe types van operatoren, namelijk de operatoren  $\mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{I}}$ ,  $\mathcal{O}^{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  en  $\mathcal{O}^{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .

**Definitie 2.21** *Zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . De operatoren  $\mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{I}}$ ,  $\mathcal{O}^{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  en  $\mathcal{O}^{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  worden gedefinieerd door*



$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{C}}(a,b) &= \mathcal{N}(\mathcal{C}(a,b)), \\
\mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{I}}(a,b) &= \mathcal{N}(\mathcal{I}(a,b)), \\
\mathcal{O}^{\mathcal{C},\mathcal{N}}(a,b) &= \mathcal{C}(a,\mathcal{N}(b)), \\
\mathcal{O}^{\mathcal{I},\mathcal{N}}(a,b) &= \mathcal{I}(a,\mathcal{N}(b)),
\end{aligned}$$

voor alle  $(a,b)$  in  $[0,1] \times [0,1]$ .

Merk op dat aan deze operatoren geen logische interpretatie gehecht kan worden.

**Eigenschap 2.5** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0,1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0,1]$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0,1]$ . Er geldt:*

1. Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -coduaal t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I},\mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{C}}$ .
2. Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -coduaal t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{C},\mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{I}}$ .
3. Indien  $\mathcal{N}$  continu is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  zijn  $\mathcal{N}$ -coduaal  $\Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I},\mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{C}}$  en  $\mathcal{O}^{\mathcal{C},\mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{I}}$ . In dit geval impliceert de continuïteit van  $\mathcal{N}$  ook de involutiviteit ervan.

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van Eigenschap 2.3. □

**Eigenschap 2.6** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0,1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0,1]$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0,1]$ . Er geldt:*

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -ondercoduaal t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I},\mathcal{N}} \geq \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{C}}$ .  
(b) Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -ondercoduaal t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{C},\mathcal{N}} \geq \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{I}}$ .
2. (a) Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -bovencoduaal t.o.v.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I},\mathcal{N}} \leq \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{C}}$ .  
(b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \cdot)$  is  $\mathcal{N}$ -bovencoduaal t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \cdot) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{C},\mathcal{N}} \leq \mathcal{O}^{\mathcal{N},\mathcal{I}}$ .

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van Eigenschap 2.4. □

Merk op dat Eigenschap 2.5 onmiddellijk volgt uit Eigenschap 2.6.

## 2.2.4 Monotoniteit

**Eigenschap 2.7** *Zij  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  conjunctoren op  $[0,1]$ ,  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  implicatoren op  $[0,1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 \Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}_1, R, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}_2, R, A)$ ,
2.  $\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{I}_2 \Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}_1, R, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}_2, R, A)$ .

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2 &\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(\mathcal{C}_1(R(x,y), A(x)) \leq \mathcal{C}_2(R(x,y), A(x))) \\
&\Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}_1(R(x,y), A(x)) \leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}_2(R(x,y), A(x)) \\
&\Leftrightarrow \clubsuit(\mathcal{C}_1, R, A)(y) \leq \clubsuit(\mathcal{C}_2, R, A)(y)
\end{aligned}$$

2. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{I}_2 &\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(\mathcal{I}_1(R(x,y), A(x)) \leq \mathcal{I}_2(R(x,y), A(x))) \\
&\Rightarrow \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_1(R(x,y), A(x)) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_2(R(x,y), A(x)) \\
&\Leftrightarrow \heartsuit(\mathcal{I}_1, R, A)(y) \leq \heartsuit(\mathcal{I}_2, R, A)(y). \quad \square
\end{aligned}$$

**Eigenschap 2.8** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R_1, R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ ,
2.  $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$ .

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$  volgt, gebruik makend van het stijgend zijn van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} R_1 \subseteq R_2 &\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(R_1(x, y) \leq R_2(x, y)) \\ &\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(\mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)) \leq \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\ &\Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)) \leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x)) \\ &\Leftrightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A)(y) \leq \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)(y) \end{aligned}$$

2. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$  volgt, gebruik makend van het dalend zijn van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$ :

$$\begin{aligned} R_1 \subseteq R_2 &\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(R_1(x, y) \leq R_2(x, y)) \\ &\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(\mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)) \geq \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\ &\Rightarrow \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)) \geq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x)) \\ &\Leftrightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A)(y) \geq \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)(y). \quad \square \end{aligned}$$

**Eigenschap 2.9** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2)$ ,
2.  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ .

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van Eigenschap 2.8. □

## 2.2.5 Interactie met unie van vaagrelaties

**Eigenschap 2.10** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R_1, R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup R_2, A) = \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ ,
2.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup R_2, A) = \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$ .

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup R_2, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((R_1 \cup R_2)(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\max(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \max(\mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\ &= \max(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\ &= \max(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A)(y), \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)(y)) \\ &= (\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y), \end{aligned}$$

waarbij de derde overgang steunt op het stijgend zijn van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$ , en de vierde overgang op de interactie tussen sup en max.

2. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup R_2, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}((R_1 \cup R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\max(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \min(\mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\
&= \min(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\
&= \min(\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A)(y), \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)(y)) \\
&= (\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A))(y),
\end{aligned}$$

waarbij de derde overgang steunt op het dalend zijn van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$ , en de vierde overgang op de interactie tussen  $\inf$  en  $\min$ .

De inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$  is triviaal.  $\square$

Eigenschap 2.10 kan onmiddellijk uitgebreid worden tot willekeurige *eindige* Zadeh-unies.

**Eigenschap 2.11** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R_1, R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{S}$  een disjunctor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ .*
- (b) *Indien  $A = \mathcal{X}$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_{\mathcal{S}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

- (c) *Indien  $(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(\mathcal{S}(a, b), c) \leq \mathcal{S}(\mathcal{C}(a, c), \mathcal{C}(b, c)))$ :*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_{\mathcal{S}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

2. *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

BEWIJS.

1. (a) Voor een willekeurige semi-conorm  $\mathcal{S}$  geldt dat  $\mathcal{S} \geq S_M$  (cfr. Lemma 1.3), zodat  $R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2 \supseteq R_1 \cup R_2$ . De monotoniteitseigenschappen van  $\clubsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) impliceren dan dat

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup R_2, A).$$

Uit eigenschap 2.10(1) volgt tenslotte dat

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

Omtrent dit luik van de eigenschap maken we nog de volgende opmerkingen:

- Merk op dat de gelijkheid geldig is voor de semi-conorm  $\mathcal{S} = S_M$  (cfr. Eigenschap 2.10(1)), maar dat dit niet noodzakelijk het geval is voor andere semi-conormen. Stel bijvoorbeeld  $\mathcal{S} = S_P$  (probabilistische som),  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [0, 1]$ ,  $A(x) = 1$  en  $R_1(x, y) = R_2(x, y) = \frac{1}{2}$  voor alle  $x, y$  in  $[0, 1]$ . Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke semi-norm  $\mathcal{C}$  geldt dat:

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2, A)(y) &= \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}((R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in [0,1]} \mathcal{C}(\mathcal{S}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), 1) \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \mathcal{S}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{I}, R_2, A))(y) &= \max(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A)(y), \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)(y)) \\
&= \max\left(\sup_{x \in [0,1]} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in [0,1]} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))\right) \\
&= \max\left(\sup_{x \in [0,1]} \mathcal{C}(\frac{1}{2}, 1), \sup_{x \in [0,1]} \mathcal{C}(\frac{1}{2}, 1)\right) \\
&= \max\left(\sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{2}, \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \not\subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ .

- Indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is, dan kan men trouwens algemeen aantonen dat  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) = \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$  noodzakelijkerwijs impliceert dat  $\mathcal{S} = S_M$ . Inderdaad, wegens Eigenschap 2.10(1) is is deze gelijkheid equivalent met  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) = \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup R_2, A)$ . Beschouwen we dan het specifieke geval waarin  $R_1(x, y) = a$  (voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , en met  $a$  in  $[0, 1]$ ),  $R_2(x, y) = b$  (voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , en met  $b$  in  $[0, 1]$ ), en  $A(x) = 1$  (voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ ), dan zou dit impliceren dat (voor elke  $y$  in  $\mathcal{Y}$ ):

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\max(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{S}(a, b), 1) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\max(a, b), 1) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{S}(a, b), 1) = \mathcal{C}(\max(a, b), 1).
\end{aligned}$$

Wegens  $\mathcal{C}$  een semi-norm volgt hieruit dat  $\mathcal{S}(a, b) = \max(a, b)$ . Aangezien  $a$  en  $b$  willekeurig waren besluiten we dat  $\mathcal{S} = S_M$ .

- Bemerkt tenslotte dat de eigenschap  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$  ons niks leert omtrent de positie van  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$  t.o.v.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A)$ . Zo zullen we in de eigenschappen (1b) en (1c) voldoende voorwaarden aantonen zo dat

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A),$$

maar we kunnen ook voorbeelden geven waarin

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \not\subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

Stel bijvoorbeeld dat  $R_1(x, y) = \frac{1}{4}$  en  $R_2(x, y) = \frac{3}{4}$  (voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ), en dat  $A(x) = \frac{1}{2}$  (voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ ). Stel verder dat  $\mathcal{C} = T_W$  (Lukasiewicz driehoeksnorm) en  $\mathcal{S} = S_P$  (probabilistische som), dan geldt:

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A)(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((R_1 \cup_S R_2)(x, y), A(x))$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}\left(\mathcal{S}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \frac{1}{2}\right) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}\left(\frac{13}{16}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{5}{16} \\
&= \frac{5}{16}, \\
(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)) + \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x)) \\
&\quad - \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)) \cdot \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \\
&\quad - \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cdot \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} 0 + \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{4} - \sup_{x \in \mathcal{X}} 0 \cdot \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{4} \\
&= 0 + \frac{1}{4} - 0 \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Bijgevolg is in dit geval  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \not\subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ .

(b) Stel dat  $A = \mathcal{X}$  en dat  $\mathcal{C}$  een semi-norm is, dan hebben we voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((R_1 \cup_S R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), 1) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y) &= \mathcal{S}\left(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))\right) \\
&= \mathcal{S}\left(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), 1), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), 1)\right) \\
&= \mathcal{S}\left(\sup_{x \in \mathcal{X}} R_1(x, y), \sup_{x \in \mathcal{X}} R_2(x, y)\right).
\end{aligned}$$

Het resultaat  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$  volgt dan uit Lemma 1.14.

Merk op dat de omgekeerde inclusie geldig is voor  $\mathcal{S} = S_M$ , cfr. Eigenschap 2.10(1), maar niet noodzakelijk voor andere disjunctoren. Stel bijvoorbeeld  $\mathcal{S} = S_P$  (probabilistische som),  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ,  $R_1(x, y) = x$  en  $R_2(x, y) = 1 - x$  (voor alle  $x, y$  in  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ). Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke semi-norm  $\mathcal{C}$  geldt dat  $(A = \mathcal{X})$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A)(y) &= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}((R_1 \cup_S R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(\mathcal{S}(x, 1-x), 1) \\
&= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x + (1-x) - x \cdot (1-x) \\
&= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} 1 - x \cdot (1-x) \\
&= \frac{13}{16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y) &= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)) + \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x)) \\
&\quad - \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)) \cdot \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(x, 1) + \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(1-x, 1) \\
&\quad - \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(x, 1) \cdot \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{C}(1-x, 1) \\
&= \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x + \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} (1-x) - \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x \cdot \sup_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} (1-x) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \\
&= \frac{15}{16},
\end{aligned}$$

zodat  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A) \not\subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ .

(c) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cup_S R_2, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((R_1 \cup_S R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&\leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(\mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\
&\leq \mathcal{S}(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\
&= \mathcal{S}(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A)(y), \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)(y)) \\
&= (\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cup_S \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y)
\end{aligned}$$

De eerste ongelijkheid volgt uit de gegeven veronderstelling omtrent  $\mathcal{S}$ ; de andere ongelijkheid uit Lemma 1.14.

2. De monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8), samen met  $\mathcal{S} \geq S_M$  (cfr. Lemma 1.3) impliceren dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup R_2, A).$$

Uit Eigenschap 2.10(3) volgt dan onmiddellijk dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

Aangezien bovendien elke semi-conorm  $\mathcal{S}$  voldoet aan  $T_M \leq \mathcal{S}$  (wegens  $T_M \leq S_M$  en Lemma 1.3) volgt er dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup_S \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

We sluiten het bewijs af met enkele opmerkingen:

- Merk op dat de inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$  geldig is voor  $\mathcal{S} = S_M$  (zie Eigenschap 2.10(2)), maar niet noodzakelijk voor andere semi-conormen. Stel bijvoorbeeld  $\mathcal{S} = S_P$  (probabilistische som),  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ,  $A(x) = 0$ ,  $R_1(x, y) = x$  en  $R_2(x, y) = 1 - x$  voor alle  $x, y$  in  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ . Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke randimplicator  $\mathcal{I}$  met geïnduceerde negator  $\mathcal{N}_{\mathcal{I}} = N_s$  geldt dat:

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A)(y) &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}((R_1 \cup_S R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(\mathcal{S}(x, 1 - x), 0) \\
&= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} 1 - \mathcal{S}(x, 1 - x) \\
&= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} 1 - (x + (1 - x) - x \cdot (1 - x)) \\
&= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x \cdot (1 - x) \\
&= \frac{3}{16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A))(y) &= \min\left(\inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))\right) \\
&= \min\left(\inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(x, 0), \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(1 - x, 0)\right) \\
&= \min\left(\inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} (1 - x), \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x\right) \\
&= \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

zodat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) \not\supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$ .

- Indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator met geïnduceerde negator  $\mathcal{N}_{\mathcal{I}} = N_s$  is, dan kan men algemeen aantonen dat de gelijkheid  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) = \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$ , of equivalent wegens Eigenschap 2.10(2)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) = \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup R_2, A)$ , impliceert dat  $\mathcal{S} = S_M$ . Inderdaad, beschouwen we het geval waarin  $R_1(x, y) = a$  (voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , en met  $a$  in  $[0, 1]$ ),  $R_2(x, y) = b$  (voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , en met  $b$  in  $[0, 1]$ ), en  $A(x) = 0$  (voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ ), dan volgt er (voor elke  $y$  in  $\mathcal{Y}$ ):

$$\begin{aligned}
&\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\max(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&\Leftrightarrow \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{S}(a, b), 0) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\max(a, b), 0) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{S}(a, b), 0) = \mathcal{I}(\max(a, b), 0) \\
&\Leftrightarrow 1 - \mathcal{S}(a, b) = 1 - \max(a, b) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{S}(a, b) = \max(a, b).
\end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\mathcal{S} = S_M$ . □

De voorwaarde gesteld aan de conjunctor  $\mathcal{C}$  en de disjunctor  $\mathcal{S}$  in Eigenschap 2.11(1c) is een veralgemening van de klassieke tautologie:

$$[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)],$$

hetgeen in feite een afgezwakte distributiviteitseigenschap is. De veralgemening ervan is bijvoorbeeld vervuld voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{S}) = (T_M, S_M)$ , maar niet voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{S}) = (T_W, S_P)$  (cfr. het voorbeeld gegeven onder het bewijs van (1a).

Merk verder ook op dat we in het geval van  $\heartsuit$  (cfr. Eigenschap 2.11(2)) geen dergelijke zinvolle voorwaarde aan  $\mathcal{S}$  kunnen opleggen. Zouden we bijvoorbeeld veronderstellen dat:

$$(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(\mathcal{S}(a, b), c) \geq \mathcal{S}(\mathcal{I}(a, c), \mathcal{I}(b, c)))$$

dan zouden we wel volgend bewijs kunnen leveren ( $y$  in  $\mathcal{Y}$ ):

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{S}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\ &\geq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(\mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\ &\geq \mathcal{S}(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\ &= \mathcal{S}(\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A)(y), \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)(y)) \\ &= (\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup_S \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A))(y), \end{aligned}$$

waaruit volgt dat:

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup_S \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A),$$

maar dit bewijs is ongeldig omdat de veronderstelde voorwaarde nooit vervuld kan zijn. Inderdaad, uit de randvoorwaarden opgelegd aan een disjunctor  $\mathcal{S}$  en een implicator  $\mathcal{I}$  volgt dat:

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}(0, 1), 0) = \mathcal{I}(1, 0) = 0 < 1 = \mathcal{S}(1, 0) = \mathcal{S}(\mathcal{I}(0, 0), \mathcal{I}(1, 0)),$$

hetgeen ook aangeeft dat de klassieke uitdrukking

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \leftarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)],$$

geen tautologie is. De gewijzigde uitdrukking

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)],$$

is wel een klassieke tautologie, maar de veralgemening ervan, die o.a. voldaan is voor  $(\mathcal{S}, \mathcal{I}) = (S_M, I_{KD})$ , leidt echter niet tot een eigenschap omtrent  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cup_S R_2, A)$  (cfr. bovenstaand schijnbewijs: de eerste ongelijkheid zou  $\leq$  worden; de tweede ongelijkheid blijft echter  $\geq$ ).

**Eigenschap 2.12** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(R_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Dan geldt:*

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \supseteq \bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)$ .

(b) *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) = \bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A).$$

2. (a)  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \subseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A) \subseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$ .

(b) *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  linkscontinu zijn:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) = \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A) \subseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A).$$

BEWIJS.

1. (a) Wegens de monotoniteitseigenschappen van  $\clubsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) hebben we voor alle  $j$  in  $I$ :

$$\bigcup_{i \in I} R_i \supseteq R_j \Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_j, A).$$



Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \supseteq \bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)$ .

De omgekeerde inclusie is niet noodzakelijk geldig. Beschouw bijvoorbeeld  $\mathcal{C} = T_Z$  (drastische driehoeksnorm). Stel verder dat  $A(x) = \frac{1}{2}$  en  $R_i(x, y) = 1 - \frac{1}{i}$  ( $i \in I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$  en alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ . Men gaat eenvoudig na dat:

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\sup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\sup_{i \in I} (1 - \frac{1}{i}), \frac{1}{2}) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(1, \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A))(y) &= \sup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)(y) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(1 - \frac{1}{i}, \frac{1}{2}) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in \mathcal{X}} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \not\subseteq \bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)$ .

- (b) Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor met linkscontinue eerste partiële afbeeldingen, dan volgt voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$  dat :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, \bigcup_{i \in I} R_i, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\sup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \sup_{i \in I} \mathcal{C}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)(y) \\ &= (\bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A))(y), \end{aligned}$$

waarbij we voor de derde overgang gebruik maken van Lemma 1.11.

2. (a) Wegens de monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) hebben we voor alle  $j$  in  $I$ :

$$\bigcup_{i \in I} R_i \supseteq R_j \Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_j, A).$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \subseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$ .

De omgekeerde inclusie is niet noodzakelijk geldig. Beschouw bijvoorbeeld de volgende implicator:

$$\mathcal{I}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } b \neq 0 \\ 1 - a^2 & \text{als } b = 0 \text{ en } 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{a} & \text{als } b = 0 \text{ en } \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Stel verder  $A(x) = 0$  en  $R_i(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{i}$  ( $i \in I = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ) voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$  en alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ . Men gaat eenvoudig na dat:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\bigcup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\sup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\sup_{i \in I} (\frac{1}{2} - \frac{1}{i}), 0) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\frac{1}{2}, 0) \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A))(y) &= \inf_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)(y) \\ &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\frac{1}{2} - \frac{1}{i}, 0) \\ &= \inf_{i \in I} 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{i}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A) \not\geq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$ .

- (b) Zij  $\mathcal{I}$  een implicator met linkscontinue eerste partiële afbeeldingen, dan volgt voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$  dat:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, \bigcup_{i \in I} R_i, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\bigcup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\sup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{i \in I} \mathcal{I}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)(y) \\ &= (\bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A))(y), \end{aligned}$$

waarbij we voor de derde overgang gebruik maken van Lemma 1.12. □

### 2.2.6 Interactie met unie van vaagverzamelingen

**Eigenschap 2.13** Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:

$$1. \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cup A_2) = \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2),$$

$$2. \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

BEWIJS.

1. Analooog aan het bewijs van Eigenschap 2.10(1).
2. Uit de monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het derde argument (cfr. Eigenschap 2.9) volgt dat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1)$  en  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ . Bijgevolg is

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

Dat de omgekeerde inclusie niet altijd geldig is kan geïllustreerd worden met volgend voorbeeld. Stel  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [0, 1]$ ,  $A_1(x) = x$ ,  $A_2(x) = 1 - x$  en  $R(x, y) = 1$  voor alle  $x, y$  in  $[0, 1]$ . Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke randimplicator  $\mathcal{I}$  geldt dat:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2)(y) &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cup A_2)(x)) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(R(x, y), \max(A_1(x), A_2(x))) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(1, \max(x, 1 - x)) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \max(x, 1 - x) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y) &= \max(\inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x))) \\ &= \max(\inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(1, x), \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(1, 1 - x)) \\ &= \max(\inf_{x \in [0, 1]} x, \inf_{x \in [0, 1]} 1 - x) \\ &= \max(0, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

zodat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \not\subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ . □

De bovenstaande eigenschap kan onmiddellijk uitgebreid worden tot willekeurige *eindige* Zadeh-unies.

**Eigenschap 2.14** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{S}$  een disjunctoor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cup \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2)$ .*  
 (b) *Indien  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2).$$

- (c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3) (\mathcal{C}(a, \mathcal{S}(b, c)) \leq \mathcal{S}(\mathcal{C}(a, b), \mathcal{C}(a, c)))$ :*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2).$$

2. (a) *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ .*  
 (b) *Indien  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator is:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

(c) Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{S}(b, c)) \geq \mathcal{S}(\mathcal{I}(a, b), \mathcal{I}(a, c)))$ :

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

BEWIJS.

1. Analooq aan het bewijs van Eigenschap 2.11(1).
2. (a) De monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het derde argument (cfr. Eigenschap 2.9), samen met  $\mathcal{S} \geq S_M$  (cfr. Lemma 1.3) impliceren dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2).$$

Uit Eigenschap 2.13(2) volgt dan onmiddellijk dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

De omgekeerde inclusie is niet geldig voor  $\mathcal{S} = S_M$  (cfr. Eigenschap 2.13(2)), en bijgevolg voor geen enkele semi-conorm  $\mathcal{S}$ . Dit laatste volgt uit het feit dat we anders zouden kunnen afleiden dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2),$$

terwijl we in Eigenschap 2.13(2) met een voorbeeld hebben aangetoond dat de inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup A_2) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$  niet algemeen geldig is.

- (b) Stel dat  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en dat  $\mathcal{I}$  een randimplicator is, dan hebben we voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, \mathcal{S}(A_1(x), A_2(x))) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(A_1(x), A_2(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y) &= \mathcal{S} \left( \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x)) \right) \\ &= \mathcal{S} \left( \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, A_1(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, A_2(x)) \right) \\ &= \mathcal{S} \left( \inf_{x \in \mathcal{X}} A_1(x), \inf_{x \in \mathcal{X}} A_2(x) \right). \end{aligned}$$

Uit Lemma 1.14 volgt dan onmiddellijk dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

Merk op dat de omgekeerde inclusie niet noodzakelijk geldig is, zoals reeds geïllustreerd in Eigenschap 2.13(2) voor  $\mathcal{S} = S_M$ .

- (c) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{S}(A_1(x), A_2(x))) \\ &\geq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{S}(\mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x))) \\ &\geq \mathcal{S} \left( \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x)) \right) \\ &= \mathcal{S}(\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1)(y), \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)(y)) \\ &= (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y), \end{aligned}$$

waaruit volgt dat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cup_{\mathcal{S}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ . De eerste ongelijkheid volgt uit de gegeven veronderstelling omtrent  $\mathcal{S}$ ; de tweede uit Lemma 1.12.  $\square$

De voorwaarde gesteld aan de conjunctor  $\mathcal{C}$  en de disjunctor  $\mathcal{S}$  in eigenschap (1c) is identiek aan de voorwaarde gesteld in Eigenschap 2.11(1c), en is bijvoorbeeld vervuld voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{S}) = (T_M, S_M)$ .

De voorwaarde gesteld aan de implicator  $\mathcal{I}$  en de disjunctor  $\mathcal{S}$  in eigenschap (2c) is een veralgemening van de klassieke tautologie

$$[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)],$$

en is bijvoorbeeld vervuld voor  $(\mathcal{I}, \mathcal{S}) = (I_{KD}, S_M)$ , maar niet voor  $(\mathcal{I}, \mathcal{S}) = (I_R, S_P)$ .

**Eigenschap 2.15** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

$$1. (a) \clubsuit(\mathcal{C}, R, \bigcup_{i \in I} A_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_i).$$

(b) *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_i).$$

$$2. \heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcup_{i \in I} A_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i).$$

BEWIJS.

1. Analooq aan het bewijs van Eigenschap 2.12(1).

2. Wegens de monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het derde argument (cfr. Eigenschap 2.9) hebben we voor alle  $j$  in  $I$ :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq A_j \Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcup_{i \in I} A_i) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_j)$$

Bijgevolg is

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcup_{i \in I} A_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i).$$

Dat de omgekeerde inclusie niet geldig is werd reeds geïllustreerd in eigenschap 2.13(2).  $\square$

### 2.2.7 Interactie met doorsnede van vaagrelaties

**Eigenschap 2.16** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R_1, R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

$$1. \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A),$$

$$2. \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

BEWIJS.

1. Uit de monotoniteitseigenschappen van  $\clubsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) volgt:

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 \subseteq R_1 &\Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \\ R_1 \cap R_2 \subseteq R_2 &\Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A) \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

Dat de omgekeerde inclusie niet geldig is kan geïllustreerd worden met een voorbeeld. Stel bijvoorbeeld  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [0, 1]$ ,  $A(x) = 1$ ,  $R_1(x, y) = x$ , en  $R_2(x, y) = 1 - x$  voor alle  $x, y$  in  $[0, 1]$ . Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke semi-norm  $\mathcal{C}$  geldt dat:

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A)(y) &= \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}((R_1 \cap R_2)(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(\min(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(\min(x, 1 - x), 1) \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \min(x, 1 - x) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y) &= \min\left(\sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))\right) \\ &= \min\left(\sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(x, 1), \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{C}(1 - x, 1)\right) \\ &= \min\left(\sup_{x \in [0, 1]} x, \sup_{x \in [0, 1]} 1 - x\right) \\ &= \min(1, 1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

zodat  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A) \not\supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ .

2. Uit de monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) volgt:

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 \subseteq R_1 &\Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \\ R_1 \cap R_2 \subseteq R_2 &\Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

Dat de inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$  niet geldig is kan geïllustreerd worden met volgend voorbeeld. Stel  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = [0, 1]$ ,  $A(x) = 0$ ,  $R_1(x, y) = x$ , en  $R_2(x, y) = 1 - x$  voor alle  $x, y$  in  $[0, 1]$ . Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke implicator  $\mathcal{I}$  met geïnduceerde negator  $\mathcal{N}_{\mathcal{I}} = N_s$  geldt dat:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A)(y) &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}((R_1 \cap R_2)(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(\min(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(\min(x, 1 - x), 0) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{N}_{\mathcal{I}}(\min(x, 1 - x)) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} 1 - \min(x, 1 - x) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \max(1 - x, x) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$(\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A))(y) = \max\left(\inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \max\left(\inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}(x, 0), \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}(1 - x, 0)\right) \\
&= \max\left(\inf_{x \in [0,1]} 1 - x, \inf_{x \in [0,1]} x\right) \\
&= \max(0, 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \not\subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$ , en dus ook dat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A) \not\subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$ .  $\square$

De bovenstaande eigenschap kan onmiddellijk uitgebreid worden tot willekeurige *eindige* Zadeh-doorsnedes.

**Eigenschap 2.17** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjuncteur op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R_1, R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{T}$  een conjuncteur op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)$ .*
- (b) *Indien  $A = \mathcal{X}$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

- (c) *Indien  $(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(\mathcal{T}(a, b), c) \leq \mathcal{T}(\mathcal{C}(a, c), \mathcal{C}(b, c)))$ :*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

2. (a) *Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

- (b) *Indien  $(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(\mathcal{T}(a, b), c) \geq \mathcal{T}(\mathcal{I}(a, c), \mathcal{I}(b, c)))$ :*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

BEWIJS.

1. (a) Wegens  $R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2 \subseteq R_1 \cap R_2$  (cfr. Lemma 1.1) en de monotoniteitseigenschappen van  $\clubsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) hebben we dat

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap R_2, A).$$

Uit Eigenschap 2.16(1) volgt tenslotte dat

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

De gelijkheid is niet geldig; dit werd reeds geïllustreerd in Eigenschap 2.16(1) voor  $\mathcal{T} = T_M$ .

- (b) Stel dat  $A = \mathcal{X}$  en dat  $\mathcal{C}$  een semi-norm is, dan hebben we voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)), 1) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y) &= \mathcal{T} \left( \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x)) \right) \\
&= \mathcal{T} \left( \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), 1), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), 1) \right) \\
&= \mathcal{T} \left( \sup_{x \in \mathcal{X}} R_1(x, y), \sup_{x \in \mathcal{X}} R_2(x, y) \right).
\end{aligned}$$

Wegens Lemma 1.13 volgt dan dat

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A).$$

De omgekeerde inclusie is niet algemeen geldig, zoals geïllustreerd in Eigenschap 2.16(1) voor  $\mathcal{T} = T_M$ .

(c) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&\leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\
&\leq \mathcal{T}(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_1(x, y), A(x)), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R_2(x, y), A(x))) \\
&= \mathcal{T}(\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A)(y), \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A)(y)) \\
&= (\clubsuit(\mathcal{C}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, A))(y)
\end{aligned}$$

De eerste ongelijkheid volgt uit de gegeven veronderstelling omtrent  $\mathcal{T}$ ; de tweede uit Lemma 1.13.

2. (a) De monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) impliceren, samen met  $\mathcal{T} \leq T_M$  (cfr. Lemma 1.1) dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap R_2, A).$$

Uit Eigenschap 2.16(2) volgt dan onmiddellijk dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

De omgekeerde inclusie is niet noodzakelijk geldig, zoals reeds geïllustreerd in Eigenschap 2.16(2) voor  $\mathcal{T} = T_M$ . Anderzijds is de inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cup \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)$  triviaal, aangezien elke semi-norm  $\mathcal{T}$  voldoet aan  $S_M \geq \mathcal{T}$  (wegens Lemma 1.1 en het feit dat  $T_M \leq S_M$ ).

(b) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{T}(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\
&\geq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\
&\geq \mathcal{T}(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))) \\
&= \mathcal{T}(\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A)(y), \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A)(y)) \\
&= (\heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A))(y),
\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_1, A) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, A).$$

De eerste ongelijkheid volgt uit de gegeven veronderstelling omtrent  $\mathcal{T}$ ; de tweede uit Lemma 1.13.  $\square$



De voorwaarden gesteld aan de conjunctor  $\mathcal{C}$  en de conjunctor  $\mathcal{T}$  in eigenschap (1c) en aan de implicator  $\mathcal{I}$  en de conjunctor  $\mathcal{T}$  in eigenschap (2b) zijn veralgemeningen van de respectievelijke klassieke tautologieën:

$$\begin{aligned} [(p \wedge q) \wedge r] &\rightarrow [(p \wedge r) \wedge (q \wedge r)], \\ [(p \wedge q) \rightarrow r] &\leftarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]. \end{aligned}$$

De voorwaarden zijn bijvoorbeeld vervuld voor respectievelijk  $(\mathcal{C}, \mathcal{T}) = (T_M, T_M)$  en  $(\mathcal{I}, \mathcal{T}) = (I_{KD}, T_M)$ .

**Eigenschap 2.18** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $(R_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $\clubsuit(\mathcal{C}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \subseteq \bigcap_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)$ ,
2.  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \supseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A) \supseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$ .

BEWIJS.

1. Wegens de monotoniteitseigenschappen van  $\clubsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) hebben we voor alle  $j$  in  $I$ :

$$\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq R_j \Rightarrow \clubsuit(\mathcal{C}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R_j, A)$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \subseteq \bigcap_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R_i, A)$ .

Dat de omgekeerde inclusie niet geldig is werd reeds geïllustreerd in Eigenschap 2.16(1).

2. Wegens de monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het tweede argument (cfr. Eigenschap 2.8) hebben we voor alle  $j$  in  $I$ :

$$\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq R_j \Rightarrow \heartsuit(\mathcal{I}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R_j, A)$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \supseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A) \supseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$  (de laatste inclusie is triviaal).

Dat de inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \subseteq \bigcup_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$ , en dus ook de inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, \bigcap_{i \in I} R_i, A) \subseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R_i, A)$ , niet geldig is werd reeds geïllustreerd in Eigenschap 2.16(2).  $\square$

Als we de interactie met de doorsnede met vaagrelaties vergelijken met de interactie met de unie van vaagrelaties, dan komen we tot volgende vaststellingen:

1. de interactie met eindige Zadeh-unies levert steeds gelijkheden op, terwijl de interactie met eindige Zadeh-doorsnedes enkel inclusies oplevert,
2. de interacties met zowel  $\mathcal{S}$ -unies als  $\mathcal{T}$ -doorsnedes leveren analoge eigenschappen op, met die uitzondering dat we in het geval van  $\heartsuit$  voor de interactie met  $\mathcal{T}$ -doorsnedes wel een voorwaarde op  $\mathcal{T}$  kunnen formuleren om tot een inclusie-eigenschap te komen, hetgeen niet mogelijk blijkt voor  $\mathcal{S}$  en de interactie met  $\mathcal{S}$ -unies.
3. voor de interactie met willekeurige Zadeh-unies kunnen we continuïteitsvoorwaarden formuleren opdat we gelijkheden zouden hebben. Voor de interactie met willekeurige Zadeh-doorsnedes is dit niet het geval; daar gelden enkel ongelijkheden.

### 2.2.8 Interactie met doorsnede van vaagverzamelingen

**Eigenschap 2.19** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cap A_2) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2)$ ,
2.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap A_2) = \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ .

BEWIJS.

1. Analooq aan het bewijs van Eigenschap 2.16(1).
2. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap A_2)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cap A_2)(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \min(A_1(x), A_2(x))) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \min(\mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x))) \\
&= \min(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x))) \\
&= \min(\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1)(y), \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)(y)) \\
&= (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y),
\end{aligned}$$

waarbij we voor de vierde overgang steunen op de interactie tussen inf en min.  $\square$

De bovenstaande eigenschap kan onmiddellijk uitgebreid worden tot willekeurige *eindige* Zadeh-doorsnedes.

**Eigenschap 2.20** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\mathcal{T}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2)$ .
- (b) Indien  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2).$$

- (c) Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(a, \mathcal{T}(b, c)) \leq \mathcal{T}(\mathcal{C}(a, b), \mathcal{C}(a, c)))$ :

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_2).$$

2. (a) Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ ,
- (b) Indien  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator is:

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

- (c) Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{T}(b, c)) \geq \mathcal{T}(\mathcal{I}(a, b), \mathcal{I}(a, c)))$ :

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

BEWIJS.

1. Analooq aan het bewijs van Eigenschap 2.17(1).

2. (a) De monotoniteitseigenschappen van  $\heartsuit$  in het derde argument (cfr. Eigenschap 2.9) en  $\mathcal{T} \leq T_M$  (cfr. Lemma 1.1) impliceren dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap A_2).$$

Uit Eigenschap 2.19(3) volgt dan onmiddellijk dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2).$$

De omgekeerde inclusie is geldig voor  $\mathcal{T} = T_M$  (cfr. Eigenschap 2.19(3)), maar niet noodzakelijk voor andere semi-normen. Stel bijvoorbeeld  $\mathcal{T} = T_P$  (product),  $\mathcal{X} = [0, 1]$ ,  $A_1(x) = A_2(x) = \frac{1}{2}$  en  $R(x, y) = 1$  voor alle  $x$  in  $[0, 1]$  en alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ . Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke randimplicator  $\mathcal{I}$  geldt dat:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2)(y) &= \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2)(x)) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{T}(A_1(x), A_2(x))) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}\left(1, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y) &= \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap A_2)(y) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cap A_2)(x)) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}(R(x, y), \min(A_1(x), A_2(x))) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \mathcal{I}\left(1, \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \inf_{x \in [0,1]} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

zodat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \not\supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ .

- (b) Stel  $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  en  $\mathcal{I}$  een randimplicator is, dan hebben we voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, \mathcal{T}(A_1(x), A_2(x))) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(A_1(x), A_2(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y) &= \mathcal{T}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x))\right) \\ &= \mathcal{T}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, A_1(x)), \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, A_2(x))\right) \\ &= \mathcal{T}\left(\inf_{x \in \mathcal{X}} A_1(x), \inf_{x \in \mathcal{X}} A_2(x)\right). \end{aligned}$$

Uit Lemma 1.13 volgt dan dat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ .

Merk op dat de omgekeerde inclusie geldig is voor  $\mathcal{T} = T_M$  (cfr. Eigenschap 2.19(2)), maar niet noodzakelijk voor andere conjunctoren. Stel bijvoorbeeld  $\mathcal{T} = T_P$  (produkt),  $\mathcal{X} = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ,  $A_1(x) = x$ ,  $A_2(x) = 1 - x$  en  $R(x, y) = 1$  voor alle  $x$  in  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  en alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$  ( $R = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ). Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke randimplicator  $\mathcal{I}$  geldt dat:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2)(y) &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(R(x, y), (A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2)(x)) \\ &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{T}(A_1(x), A_2(x))) \\ &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(1, x \cdot (1 - x)) \\ &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x \cdot (1 - x) \\ &= \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2))(y) &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(R(x, y), A_1(x)) \cdot \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(R(x, y), A_2(x)) \\ &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(1, x) \cdot \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \mathcal{I}(1, 1 - x) \\ &= \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x \cdot \inf_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} (1 - x) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2) \not\subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_1) \cap_{\mathcal{T}} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_2)$ .

(c) Analoog aan het bewijs van Eigenschap 2.17(2b).  $\square$

De voorwaarden gesteld aan de conjunctor  $\mathcal{T}$  in de eigenschappen (1c) en (2c) zijn vergelijkbaar met deze gesteld in de respectievelijke eigenschappen 2.17(1c) en (2b), en zijn bijvoorbeeld voldaan voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{T}) = (T_M, T_M)$  en  $(\mathcal{I}, \mathcal{T}) = (I_{KD}, T_M)$ .

**Eigenschap 2.21** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Er geldt:*

1.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A_i)$ ,
2. (a)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)$ .

(b) *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  rechtscontinu zijn:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i).$$

BEWIJS.

1. Analoog aan het bewijs van Eigenschap 2.18(1).
2. (a) De inclusie  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)$  volgt op analoge wijze als in Eigenschap 2.17(2).

De omgekeerde inclusie is niet noodzakelijk geldig. Beschouw bijvoorbeeld de volgende implicator:

$$\mathcal{I}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \neq 1 \\ b^2 & \text{als } a = 1 \text{ en } 0 \leq b \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{b} & \text{als } a = 1 \text{ en } \frac{1}{2} < b \leq 1 \end{cases}$$

Stel verder dat  $A_i(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i}$  ( $i \in I = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ) en  $R(x, y) = 1$  voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$  en alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ . Men gaat eenvoudig na dat:

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcap_{i \in I} A_i)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), (\bigcap_{i \in I} A_i)(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \inf_{i \in I} A_i(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, \inf_{i \in I} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{i}\right)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, \frac{1}{2}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)\right)(y) &= \inf_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)(y) \\
&= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_i(x)) \\
&= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{i}) \\
&= \inf_{i \in I} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{i}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcap_{i \in I} A_i) \not\geq \bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)$ .

- (b) Zij  $\mathcal{I}$  een implicator met rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen, dan volgt voor alle  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R, \bigcap_{i \in I} A_i)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), (\bigcap_{i \in I} A_i)(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \inf_{i \in I} A_i(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{i \in I} \mathcal{I}(R(x, y), A_i(x)) \\
&= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A_i(x)) \\
&= \inf_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)(y) \\
&= \left(\bigcap_{i \in I} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A_i)\right)(y),
\end{aligned}$$

waarbij we voor de derde overgang gebruik maken van Lemma 1.12.  $\square$

Als we de interactie met de doorsnede met vaagverzamelingen vergelijken met de interactie met de unie van vaagverzamelingen, dan komen we tot volgende vaststellingen.

1. De interactie met eindige Zadeh-unies levert een gelijkheid op voor  $\clubsuit$  en een inclusie voor  $\heartsuit$ , terwijl de interactie met eindige Zadeh-doorsnedes een inclusie oplevert voor  $\clubsuit$  en een gelijkheid voor  $\heartsuit$ .
2. De interacties met zowel  $\mathcal{S}$ -unies als  $\mathcal{T}$ -doorsnedes leveren analoge eigenschappen op.

3. Voor de interactie met willekeurige Zadeh-unies kunnen we voor  $\clubsuit$  continuïteitsvoorwaarden formuleren opdat we een gelijkheid zouden hebben; dit gaat niet voor  $\heartsuit$ . Voor de interactie met willekeurige Zadeh-doorsnedes daarentegen is de situatie omgekeerd: daar kunnen we enkel voor  $\heartsuit$  een continuïteitsvoorwaarde formuleren.

### 2.2.9 Interactie met translatie

**Definitie 2.22** Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $v$  in  $\mathcal{X}$ . De translatie  $T_v(A)$  van  $A$  wordt gedefinieerd door

$$T_v(A)(x) = A(x - v),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

**Definitie 2.23** Zij  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en zij  $(v, w)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . De translatie  $T_{v,w}(R)$  wordt gedefinieerd door

$$T_{v,w}(R)(x, y) = R(x - v, y - w),$$

voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

De bovenstaande definities zijn pas zinvol indien  $A(x - v)$  en  $R(x - v, y - w)$  steeds bepaald zijn voor respectievelijk alle  $x$  in  $\mathcal{X}$  en alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ; we gaan er verder dan ook stilzwijgend van uit dat deze voorwaarden vervuld zijn. Een triviaal voorbeeld waarvoor dit het geval is  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$  (voor  $v, w$  in  $\mathbb{R}^n$ ); voor  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{Z}^n$  zijn enkel  $v, w$  in  $\mathbb{Z}^n$  toegelaten.

**Eigenschap 2.22** Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $(v, w)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ . Er geldt:

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, T_v(A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, T_{-v,0}(R), A)$ ,  
 (b)  $\clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,w}(R), A) = T_w(\clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,0}(R), A))$ ,  
 (c)  $\clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,w}(R), T_v(A)) = T_w(\clubsuit(\mathcal{C}, R, A))$ .
2. (a)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, T_v(A)) = \heartsuit(\mathcal{I}, T_{-v,0}(R), A)$ ,  
 (b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, T_{v,w}(R), A) = T_w(\heartsuit(\mathcal{I}, T_{v,0}(R), A))$ ,  
 (c)  $\heartsuit(\mathcal{I}, T_{v,w}(R), T_v(A)) = T_w(\heartsuit(\mathcal{I}, R, A))$ .

BEWIJS.

1. (a) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R, T_v(A))(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), T_v(A)(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x - v)) \\ &= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(z + v, y), A(z)) \\ &= \clubsuit(\mathcal{C}, T_{-v,0}(R), A)(y) \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, T_v(A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, T_{-v,0}(R), A)$ .

- (b) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,w}(R), A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(T_{v,w}(R)(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x - v, y - w), A(x)) \\ &= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(T_{v,0}(R)(x, y - w), A(x)) \\ &= \clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,0}(R), A)(y - w) \\ &= T_w(\clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,0}(R), A))(y) \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,w}(R), A) = T_w(\clubsuit(\mathcal{C}, T_{v,0}(R), A))$ .

(c) Onmiddellijk uit (1a) en (1b).

2. Analooog bewijs. □

### 2.2.10 Interactie met schaling

**Definitie 2.24** Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $\lambda$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . De schaling  $H_\lambda(A)$  van  $A$  wordt gedefinieerd door

$$H_\lambda(A)(x) = A\left(\frac{1}{\lambda}x\right),$$

voor alle  $x$  in  $\mathcal{X}$ .

**Definitie 2.25** Zij  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en zij  $\lambda$  en  $\gamma$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . De schaling  $H_{\lambda,\gamma}(R)$  wordt gedefinieerd door

$$H_{\lambda,\gamma}(R)(x, y) = R\left(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\gamma}y\right),$$

voor alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

De bovenstaande definities zijn pas zinvol indien  $A(\frac{1}{\lambda}x)$  en  $R(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\gamma}y)$  steeds bepaald zijn voor respectievelijk alle  $x$  in  $\mathcal{X}$  en alle  $(x, y)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ; we gaan er verder dan ook stilzwijgend van uit dat deze voorwaarden vervuld zijn. Een triviaal voorbeeld waarvoor dit het geval is is  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$  (voor willekeurige  $\lambda$  en  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ), een niet-triviaal voorbeeld is  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ , met  $\lambda = \gamma = 2$ .

**Eigenschap 2.23** Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Zij verder  $\lambda, \gamma$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

1. (a)  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, H_\lambda(A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, H_{\frac{1}{\lambda}, 1}(R), A)$ ,  
 (b)  $\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda,\gamma}(R), A) = H_\gamma(\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda, 1}(R), A))$ ,  
 (c)  $\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda,\gamma}(R), H_\lambda(A)) = H_\gamma(\clubsuit(\mathcal{C}, R, A))$ .
2. (a)  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, H_\lambda(A)) = \heartsuit(\mathcal{I}, H_{\frac{1}{\lambda}, 1}(R), A)$ ,  
 (b)  $\heartsuit(\mathcal{I}, H_{\lambda,\gamma}(R), A) = H_\gamma(\heartsuit(\mathcal{I}, H_{\lambda, 1}(R), A))$ ,  
 (c)  $\heartsuit(\mathcal{I}, H_{\lambda,\gamma}(R), H_\lambda(A)) = H_\gamma(\heartsuit(\mathcal{I}, R, A))$ .

BEWIJS.

1. (a) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R, H_\lambda(A))(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), H_\lambda(A)(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A\left(\frac{1}{\lambda}x\right)) \\ &= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(\lambda z, y), A(z)) \\ &= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(H_{\frac{1}{\lambda}, 1}(R)(z, y), A(z)) \\ &= \clubsuit(\mathcal{C}, H_{\frac{1}{\lambda}, 1}(R), A)(y) \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, H_\lambda(A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, H_{\frac{1}{\lambda}, 1}(R), A)$ .

(b) Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda, \gamma}(R), A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(H_{\lambda, \gamma}(R)(x, y), A(x)) \\
&= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\gamma}y), A(x)) \\
&= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(H_{\lambda, 1}(R)(x, \frac{1}{\gamma}y), A(x)) \\
&= \clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda, 1}(R), A)(\frac{1}{\gamma}y) \\
&= H_{\gamma}(\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda, 1}(R), A))(y)
\end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda, \gamma}(R), A) = H_{\gamma}(\clubsuit(\mathcal{C}, H_{\lambda, 1}(R), A))$ .

(c) Onmiddellijk uit (1a) en (1b).

2. Analooog bewijs. □

### 2.2.11 Expansiviteit en restrictiviteit

Gegeven een conjunctor  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$ , een implicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$ , een vaagrelatie  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en een vaagverzameling  $A$  in  $\mathcal{X}$ , resulteren de operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$  in een vaagverzameling in  $\mathcal{Y}$ . Hieruit volgt onmiddellijk dat eigenschappen omtrent expansiviteit en restrictiviteit enkel een betekenis hebben indien  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ , d.w.z. indien  $R$  een binaire vaagrelatie op  $\mathcal{X}$  is.

**Eigenschap 2.24** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ . Indien  $R$  reflexief is, dan geldt:*

1.  $\clubsuit$  is expansief:  $A \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)$ ,
2.  $\heartsuit$  is restrictief:  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A) \subseteq A$ .

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned}
\clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)) \\
&\geq \mathcal{C}(R(y, y), A(y)) \\
&= \mathcal{C}(1, A(y)) \\
&= A(y)
\end{aligned}$$

2. Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned}
\heartsuit(\mathcal{I}, R, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) \\
&\leq \mathcal{I}(R(y, y), A(y)) \\
&= \mathcal{I}(1, A(y)) \\
&= A(y) \quad \square
\end{aligned}$$

### 2.2.12 Inclusie-eigenschap

**Eigenschap 2.25** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ . Indien  $R$  voldoet aan*

$$(\forall y \in \mathcal{Y})(\exists z \in \mathcal{X})(R(z, y) = 1),$$

dan geldt:

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A).$$



BEWIJS.

Stel  $(\forall y \in \mathcal{Y})(\exists z \in \mathcal{X})(R(z, y) = 1)$ , dan volgt voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) \\ &\leq \mathcal{I}(R(z, y), A(z)) \\ &= \mathcal{I}(1, A(z)) \\ &= A(z) \\ &= \mathcal{C}(1, A(z)) \\ &= \mathcal{C}(R(z, y), A(z)) \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)) \\ &= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y) \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)$ . □

Merk op dat deze eigenschap niet noodzakelijk geldt indien  $\mathcal{C}$  geen semi-norm of  $\mathcal{I}$  geen randimplicator is, of indien  $R$  niet voldoet aan  $(\forall y \in \mathcal{Y})(\exists z \in \mathcal{X})(R(x, z) = 1)$ . We illustreren dit met enkele voorbeelden.

- Stel eerst  $\mathcal{I} = I_{KD}$ , definieer  $R$  als  $(\forall(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(R(x, y) = 1)$ ,  $A$  als  $(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) = \frac{1}{2})$ , en stel

$$\mathcal{C}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } (a, b) = (1, 1) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan hebben we voor elke  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathcal{X}} I_{KD}(R(x, y), A(x)) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} I_{KD}(1, \frac{1}{2}) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \max(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(1, \frac{1}{2}) = \sup_{x \in \mathcal{X}} 0 = 0, \end{aligned}$$

zodat  $\heartsuit(I_{KD}, R, A)(y) > \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y)$ .

- Stel vervolgens  $\mathcal{C} = T_M$ , definieer  $R$  als  $(\forall(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(R(x, y) = 1)$ ,  $A$  als  $(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) = \frac{1}{2})$ , en stel

$$\mathcal{I}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{als } (a, b) = (1, 0) \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan hebben we voor elke  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, \frac{1}{2}) = \inf_{x \in \mathcal{X}} 1 = 1 \\ \sup_{x \in \mathcal{X}} T_M(R(x, y), A(x)) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} T_M(1, \frac{1}{2}) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

zodat  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, A)(y) > \clubsuit(T_M, R, A)(y)$ . Stel tenslotte  $\mathcal{C} = T_M$ ,  $\mathcal{I} = I_{KD}$ , definieer  $A$  als  $(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) = 1)$ , en definieer  $R$  als  $(\forall(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y})(R(x, y) = \frac{1}{2})$ . Dan hebben we voor elke  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathcal{X}} I_{KD}(R(x, y), A(x)) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} I_{KD}(\frac{1}{2}, 1) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \max(\frac{1}{2}, 1) = \inf_{x \in \mathcal{X}} 1 = 1 \\ \sup_{x \in \mathcal{X}} T_M(R(x, y), A(x)) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} T_M(\frac{1}{2}, 1) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \min(\frac{1}{2}, 1) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

zodat ook in dit geval  $\heartsuit(I_{KD}, R, A)(y) > \clubsuit(T_M, R, A)(y)$ .

De voorwaarde  $(\forall y \in \mathcal{Y})(\exists z \in \mathcal{X})(R(z, y) = 1)$  is steeds vervuld indien  $R$  reflexief is (dit houdt in dat  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ); het omgekeerde is niet geldig. Onder de strengere reflexiviteits-voorwaarde geldt echter wel het volgende sterkere resultaat:

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, A) \subseteq A \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A),$$

zoals volgt uit eigenschap 2.24.

### 2.2.13 Idempotentie

Algemeen wordt een idempotente operator als volgt gedefinieerd.

**Definitie 2.26** *Zij  $P$  een  $\mathcal{U} - \mathcal{U}$  operator, met  $\mathcal{U}$  een willekeurig universum.  $P$  wordt idempotent genoemd indien*

$$\boxed{P(P(U)) = U},$$

voor alle  $U$  in  $\mathcal{U}$ .

In het geval van de operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$  kan enkel idempotentie in het derde argument beschouwd worden<sup>4</sup>. Hiervoor is bovendien noodzakelijk dat, net zoals bij de eigenschappen m.b.t. expansiviteit en restrictiviteit,  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ .

We beschikken alvast over het volgende resultaat.

**Eigenschap 2.26** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  een reflexieve vaagrelatie op  $\mathcal{X}$ . Er geldt:*

1.  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, A) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A))$ ,
2.  $\heartsuit(\mathcal{I}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)$ .

BEWIJS.

Dit volgt onmiddellijk uit Eigenschap 2.24.  $\square$

We gaan vervolgens op zoek naar voldoende voorwaarden waaronder ook de omgekeerde inclusies gelden. In deze gevallen geldt de idempotentie in het derde argument.

**Eigenschap 2.27** *Zij  $\mathcal{C}$  een associatieve semi-norm op  $[0, 1]$  met linkscontinue partiële afbeeldingen,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  een reflexieve, symmetrische en sup- $\mathcal{C}$  transitieve vaagrelatie op  $\mathcal{X}$ . Er geldt:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, R, A).$$

BEWIJS.

Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A))(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(z, x), A(z))) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(y, x), \mathcal{C}(R(x, z), A(z))) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$= \sup_{z \in \mathcal{X}} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\mathcal{C}(R(y, x), R(x, z)), A(z)) \quad (2.12)$$

$$= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(y, x), R(x, z)), A(z)) \quad (2.13)$$

$$= \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(z, y), A(z)) \quad (2.14)$$

$$= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y),$$

Toelichting: (2.11) wegens Lemma 1.11 en de symmetrie van  $R$ ; (2.12) wegens de associativiteit van  $\mathcal{C}$ ; (2.13) wegens Lemma 1.11; (2.14) wegens Lemma 2.1 en de symmetrie van  $R$ .  $\square$

<sup>4</sup>Het resultaat van de operatoren is een vaagverzameling, en het eerste en tweede argument van de operatoren zijn respectievelijk een logische operator en een vaagrelatie.

**Eigenschap 2.28** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  met rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen. Zij verder  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  een reflexieve, symmetrische en sup- $\mathcal{C}$  transitieve vaagrelatie op  $\mathcal{X}$ , met  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. Indien  $\mathcal{I}$  en  $\mathcal{C}$  voldoen aan

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b, c)) \geq \mathcal{I}(\mathcal{C}(a, b), c)),$$

dan geldt:

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A).$$

2. Indien  $\mathcal{I}$  bijkomend een randimplicator is, dan geldt:

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)) = \heartsuit(\mathcal{I}, R, A).$$

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A))(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(x, y), \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(z, x), A(z))) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(y, x), \mathcal{I}(R(x, z), A(z))) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\geq \inf_{z \in \mathcal{X}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{C}(R(y, x), R(x, z)), A(z)) \quad (2.16)$$

$$\geq \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(y, x), R(x, z)), A(z)) \quad (2.17)$$

$$= \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(R(z, y), A(z)) \quad (2.18)$$

$$= \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)(y),$$

waaruit volgt dat

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A).$$

Toelichting: (2.15) wegens Lemma 1.12 en de symmetrie van  $R$  (zonder gebruik te maken van het lemma, en dus van de rechtscontinuïteit van de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$ , hadden we enkel  $\leq$  kunnen schrijven); (2.16) wegens de voorwaarde op  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$ ; (2.17) wegens Lemma 1.12 (we hoeven niet te steunen op linkscontinuïteit van de eerste partiële afbeeldingen); (2.18) wegens Lemma 2.1 en de symmetrie van  $R$ .

2. Indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  is, zijn ook alle voorwaarden van Eigenschap 2.26 vervuld, en geldt

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A).$$

Beide inclusies leiden tot de gewenste gelijkheid.  $\square$

De voorwaarde die in Eigenschap 2.28 opgelegd wordt aan de implicator  $\mathcal{I}$  en de semi-norm  $\mathcal{C}$  is geen ledige voorwaarde. Dit volgt uit Lemma 1.15, waar een aantal methoden aangereikt worden om koppels  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  te construeren die aan de voorwaarde voldoen. Dit is met name het geval voor

- elk koppel  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  met  $\mathcal{C}$  een associatieve semi-norm op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ ; hierbij is  $\mathcal{N}$  een willekeurige involutieve negator op  $[0, 1]$
- elk koppel  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  met  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ .

### 2.2.14 Interactie tussen de operatoren $\clubsuit$ en $\heartsuit$

**Eigenschap 2.29** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ . Indien  $R$  reflexief is, dan geldt:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}, R, A).$$

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit Eigenschap 2.24.  $\square$

Omwille van louter theoretische redenen zijn we natuurlijk ook geïnteresseerd in de gevallen waarin er gelijkheid optreedt. En in sommige gevallen blijkt die gelijkheid inderdaad geldig te zijn.

**Eigenschap 2.30** *Zij  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$  met continue partiële afbeeldingen,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$  een reflexieve, symmetrische en sup- $\mathcal{C}$  transitieve vaagrelatie in  $\mathcal{X}$ . Er geldt:*

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)) = \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A).$$

BEWIJS.

Voor  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R, \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A))(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(R(z, x), A(z))) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), \mathcal{I}_\mathcal{C}(R(z, x), A(z))) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\leq \inf_{z \in \mathcal{X}} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(R(x, y), \mathcal{I}_\mathcal{C}(R(z, x), A(z))) \quad (2.20)$$

$$\leq \inf_{z \in \mathcal{X}} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(\mathcal{I}_\mathcal{C}(R(x, y), R(z, x)), A(z)) \quad (2.21)$$

$$= \inf_{z \in \mathcal{X}} \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(\mathcal{I}_\mathcal{C}(R(y, x), R(x, z)), A(z)) \quad (2.22)$$

$$\leq \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(R(y, x), R(x, z)), A(z)) \quad (2.23)$$

$$= \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(R(y, z), A(z)) \quad (2.24)$$

$$= \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_\mathcal{C}(R(z, y), A(z)) \quad (2.25)$$

$$= \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)(y)$$

Bijgevolg is

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)) \subseteq \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A).$$

Toelichting: (2.19) wegens rechtscontinue partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$ ; (2.20) volgt uit de interactie tussen sup en inf; (2.21) volgt uit Lemma 1.16 (voldoende voorwaarden:  $\mathcal{C}$  een driehoeksnorm met linkscontinue tweede partiële afbeeldingen); (2.22) wegens de symmetrie van  $R$ ; (2.23) volgt uit Lemma 1.12; (2.24) volgt uit Lemma 2.1 (voldoende voorwaarden:  $\mathcal{C}$  is een semi-norm,  $R$  is reflexief, symmetrisch en sup- $\mathcal{C}$  transitief); (2.25) wegens de symmetrie van  $R$ .

Anderzijds volgt uit Eigenschap 2.29 dat  $\clubsuit(\mathcal{C}, R, \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)) \supseteq \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)$ . Aldus is

$$\clubsuit(\mathcal{C}, R, \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A)) = \heartsuit(\mathcal{I}_\mathcal{C}, R, A). \quad \square$$

**Eigenschap 2.31** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ . Indien  $R$  reflexief is, dan geldt:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A).$$

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit Eigenschap 2.24.  $\square$

Ook hier was de zoektocht naar gevallen waar de gelijkheid geldt succesvol. De voldoende voorwaarden zijn analoog als in Eigenschap 2.30, maar zijn iets zwakker voor  $\mathcal{C}$  (met name de commutativiteit en de rechtscontinuïteit van de partiële afbeeldingen is niet vereist).

**Eigenschap 2.32** *Zij  $\mathcal{C}$  een associatieve semi-norm op  $[0, 1]$  met linkscontinue partiële afbeeldingen,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$  een reflexieve, symmetrische en sup- $\mathcal{C}$  transitieve vaagrelatie in  $\mathcal{X}$ . Er geldt:*

$$\heartsuit(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, R, A).$$

BEWIJS.

Voor  $y$  in  $X$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A))(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(R(x, y), \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \sup\{a \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(R(x, y), a) \leq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(x)\} \end{aligned}$$

Nu geldt voor elke  $x$  en  $y$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(R(x, y), \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y)) &= \mathcal{C}(R(x, y), \sup_{z \in X} \mathcal{C}(R(z, y), A(z))) \\ &= \sup_{z \in X} \mathcal{C}(R(x, y), \mathcal{C}(R(z, y), A(z))) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= \sup_{z \in X} \mathcal{C}(\mathcal{C}(R(x, y), R(z, y)), A(z)) \quad (2.27)$$

$$= \sup_{z \in X} \mathcal{C}(\mathcal{C}(R(x, y), R(y, z)), A(z)) \quad (2.28)$$

$$\leq \sup_{z \in X} \mathcal{C}(R(x, z), A(z)) \quad (2.29)$$

$$= \sup_{z \in X} \mathcal{C}(R(z, x), A(z)) \quad (2.30)$$

$$= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(x)$$

zodat  $\sup\{a \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(R(x, y), a) \leq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(x)\} \geq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y)$ . Aldus:

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A))(y) &\geq \inf_{x \in \mathcal{X}} \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y) \\ &= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)(y) \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $\heartsuit(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)) \supseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)$ . Toelichting: (2.26) wegens linkscontinue tweede partiële afbeeldingen; (2.27) wegens de associativiteit van  $\mathcal{C}$ ; (2.28) wegens  $R$  symmetrisch; (2.29) wegens  $R$  sup- $\mathcal{C}$  transitief; (2.30) wegens  $R$  symmetrisch.

Anderzijds volgt uit Eigenschap 2.31 dat  $\heartsuit(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)) \subseteq \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)$ , zodat uiteindelijk  $\heartsuit(\mathcal{I}_{\mathcal{C}}, R, \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)) = \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)$ .  $\square$

## 2.3 Toepassingen

Zoals reeds aangegeven in de inleiding van dit hoofdstuk blijkt dat heel wat concepten uit de vaagverzamelingenleer en aanverwante domeinen beschreven kunnen worden in termen van de hoger beschouwde vaagrelationele operatoren. Zo bestaan er interessante verbanden tussen de vaagrelationele operatoren en:

- hoogte en plint van een vaagverzameling (zie Paragraaf 2.3.1)
- projectie van een relatie
- samenstellingen van vaagrelaties (zie Paragraaf 2.3.2)
- vaagruwverzamelingen (zie Paragraaf 2.3.3)
- modellering van linguïstische wijzigers
- compositieregel voor inferentie

- inductie van vaagtopologieën

De wijde waaier aan mogelijke applicaties illustreren het belang van de theoretische ontwikkeling van de theorie der vaagrelationele operatoren. Immers, als we een bepaalde toepassing beschouwen die beschreven kan worden m.b.v. vaagrelationele operatoren, dan kunnen alle geziene eigenschappen vertaald worden in termen van die specifieke toepassing. In die zin heeft de theorie een *uniformiserend* karakter, met alle praktische gevolgen van dien.

Het valt buiten het kader van dit proefschrift om al de vermelde toepassingen uitgebreid te behandelen; we beperken ons dan ook tot een korte en eerder illustratieve bespreking van een drietal toepassingen<sup>5</sup>.

### 2.3.1 Hoogte en plint van een vaagverzameling

De hoogte en de plint van een vaagverzameling  $A$  (cfr. Definitie 1.10) kunnen respectievelijk beschreven worden met behulp van de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ .

**Eigenschap 2.33** *Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ .*

1. Voor elke semi-norm  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$  geldt:

$$(\forall y \in \mathcal{Y})(\clubsuit(\mathcal{C}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)(y) = h(A)).$$

2. Voor elke randimplicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$  geldt:

$$(\forall y \in \mathcal{Y})(\heartsuit(\mathcal{I}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)(y) = p(A)).$$

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)(y) &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}((\mathcal{X} \times \mathcal{Y})(x, y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{C}(1, A(x)) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{X}} A(x) \\ &= h(A) \end{aligned}$$

2. Voor  $y$  in  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \heartsuit(\mathcal{I}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, A)(y) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}((\mathcal{X} \times \mathcal{Y})(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(1, A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} A(x) \\ &= p(A). \quad \square \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Hoewel dit hoofdstuk als een zelfstandig geheel beschouwd kan worden, zitten we in het bijzonder met de toepassing op het vlak van vaagmorfologie in het achterhoofd. Het is dan ook die toepassing die we verder in het proefschrift uitgebreid zullen bespreken, en het verklaart waarom we hier niet diep wensen in te gaan op andere toepassingen. De geïnteresseerde lezer kan hieromtrent echter steeds een intern rapport van de onderzoeksgroep “Vaagheid- en Onzekerheidsmodellen” raadplegen [47].

### 2.3.2 Samenstellen van vaagrelaties

Er bestaan verschillende types van samenstellingen van relaties. Er is de klassieke  $\circ$ -samenstelling, maar er zijn ook de  $\triangleleft$ -,  $\triangleright$ - en  $\triangle$ -samenstellingen. Deze klassieke bewerkingen zijn op verschillende manieren uitgebreid naar vaagrelaties. Elk van deze uitbreidingen kan gekarakteriseerd worden m.b.v. van de twee besproken vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ , en m.b.v. de twee vaagrelationele operatoren  $\spadesuit$  en  $\diamondsuit$ . We illustreren dit voor de  $\circ$ -samenstelling en de  $\triangleleft$ -,  $\triangleright$ - en  $\triangle$ -samenstelling voor vaagrelaties zoals gedefinieerd in [32]<sup>6</sup>.

**Definitie 2.27** [32] Zij  $R_1$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en  $R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$  en zij verder  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . De  $\circ_{\mathcal{C}}$ -samenstelling  $R_1 \circ_{\mathcal{C}} R_2$  is de vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Z}$  gedefinieerd door:

$$R_1 \circ_{\mathcal{C}} R_2(x, z) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_1(x, y), R_2(y, z));$$

de  $\triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}}$ -samenstelling  $R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2$  is de vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Z}$  gedefinieerd door:

$$R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2(x, z) = \min \left( \inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{I}(R_1(x, y), R_2(y, z)), \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_1(x, y), R_2(y, z)) \right);$$

De  $\triangleright_{\mathcal{I}, \mathcal{C}}$ -samenstelling  $R_1 \triangleright_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2$  is de vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Z}$  gedefinieerd door:

$$R_1 \triangleright_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2(x, z) = \min \left( \inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{I}(R_2(y, z), R_1(x, y)), \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_2(y, z), R_1(x, y)) \right);$$

De  $\triangle_{\mathcal{I}, \mathcal{C}}$ -samenstelling  $R_1 \triangle_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2$  is de vaagrelatie van  $\mathcal{X}$  naar  $\mathcal{Z}$  gedefinieerd door:

$$R_1 \triangle_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2(x, z) = (R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2 \cap R_1 \triangleright_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2)(x, z),$$

voor alle  $(x, z)$  in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ .

**Eigenschap 2.34** Zij  $R_1$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en  $R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$ , en zij verder  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Voor  $x$  in  $\mathcal{X}$  en  $z$  in  $\mathcal{Z}$  geldt:

1.  $(R_1 \circ_{\mathcal{C}} R_2)z = \clubsuit(\mathcal{C}, R_1^{-1}, R_2z)$ ,
2.  $x(R_1 \circ_{\mathcal{C}} R_2) = \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, xR_1)$ .

BEWIJS.

1. Voor  $x$  in  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \clubsuit(\mathcal{C}, R_1^{-1}, R_2z)(x) &= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_1^{-1}(y, x), R_2z(y)) \\ &= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_1(x, y), R_2(y, z)) \\ &= R_1 \circ_{\mathcal{C}} R_2(x, z) \\ &= (R_1 \circ_{\mathcal{C}} R_2)z(x) \end{aligned}$$

2. Analogo bewijs. □

**Eigenschap 2.35** Zij  $R_1$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  en  $R_2$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$ , en zij verder  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Voor  $x$  in  $\mathcal{X}$  en  $z$  in  $\mathcal{Z}$  geldt:

1.  $(R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2)z = \heartsuit(\mathcal{I}, R_1^{-1}, R_2z) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_1^{-1}, R_2z)$ ,

<sup>6</sup>De betreffende definities worden wel veralgemeend door gebruik te maken van willekeurige conjunctoren en implicatoren.

2.  $x(R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2) = \diamond(\mathcal{I}, R_2, xR_1) \cap \spadesuit(\mathcal{C}, R_2, xR_1)$ ,
3.  $(R_1 \triangleright_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2)z = \diamond(\mathcal{I}, R_1^{-1}, R_2z) \cap \spadesuit(\mathcal{C}, R_1^{-1}, R_2z)$ ,
4.  $x(R_1 \triangleright_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2) = \heartsuit(\mathcal{I}, R_2, xR_1) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_2, xR_1)$ .

BEWIJS.

We tonen enkel (1) aan; de overige bewijzen zijn analoog. Voor  $x$  in  $\mathcal{X}$  volgt:

$$\begin{aligned}
& (\heartsuit(\mathcal{I}, R_1^{-1}, R_2z) \cap \clubsuit(\mathcal{C}, R_1^{-1}, R_2z))(x) \\
&= \min(\heartsuit(\mathcal{I}, R_1^{-1}, R_2z)(x), \clubsuit(\mathcal{C}, R_1^{-1}, R_2z)(x)) \\
&= \min(\inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{I}(R_1^{-1}(y, x), R_2z(y)), \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_1^{-1}(y, x), R_2z(y))) \\
&= \min(\inf_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{I}(R_1(x, y), R_2(y, z)), \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{C}(R_1(x, y), R_2(y, z))) \\
&= (R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2)(x, z) \\
&= (R_1 \triangleleft_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} R_2)z(x)
\end{aligned}$$

Dit bewijst het gestelde. □

Uit deze uitdrukkingen voor voor- en naverzamelingen van de samengestelde van twee vaagrelaties, kunnen eigenschappen i.v.m. het samenstellen van vaagrelaties afgeleid worden [47].

### 2.3.3 Vaagruwverzamelingen

Ruwverzamelingen werden geïntroduceerd in de context van kennisrepresentatie om onvolledige informatie te modelleren [57]. Beschouw bijvoorbeeld een universum  $\mathcal{X}$  van objecten die elk gekarakteriseerd worden door hun eigenschappen, dan is het mogelijk dat op basis van de beschikbare informatie tussen sommige objecten geen onderscheid gemaakt kan worden. Dit leidt tot een zogenaamde *granulatie* van de informatie. In de theorie der ruwverzamelingen maakt men gebruik van equivalentierelaties<sup>7</sup>  $R$  (de beschikbare kennis) en klassen van deze relaties om deelverzamelingen  $A$  van  $\mathcal{X}$  te karakteriseren. Het paar  $(\mathcal{X}, R)$  noemt men de *approximatierruimte* of *benaderingsruimte*. De basisoperatoren in de theorie der ruwverzamelingen zijn de *boven-ruwapproximatie* en de *onder-ruwapproximatie*.

**Definitie 2.28** [57] *Zij  $(\mathcal{X}, R)$  een benaderingsruimte en zij  $A$  in  $\mathcal{X}$ . De *boven-ruwapproximatie*  $\overline{\text{AS}}(A, R)$  en de *onder-ruwapproximatie*  $\underline{\text{AS}}(A, R)$  van  $A$  worden gedefinieerd als:*

$$\begin{array}{l}
\overline{\text{AS}}(A, R) = \{y \in \mathcal{X} \mid [y]_R \cap A \neq \emptyset\}, \\
\underline{\text{AS}}(A, R) = \{y \in \mathcal{X} \mid [y]_R \subseteq A\},
\end{array}$$

met  $[y]_R$  de *equivalentieklasse* van  $R$  met representant  $y$ .

Vaagruwverzamelingen zijn een veralgemening van ruwverzamelingen om onvolledige en *impreciese* informatie te modelleren. Men beschouwt nu een binaire vaagrelatie  $R$  op  $\mathcal{X}$ , en men spreekt van de *vaagbenaderingsruimte*  $(\mathcal{X}, R)$ . M.b.v de begrippen *conjunctoor* en *implicator* kan men de *boven-ruwapproximatie* en de *onder-ruwapproximatie* uitbreiden tot operatoren op vaagverzamelingen in  $\mathcal{X}$ .

**Definitie 2.29** [60] *Zij  $(\mathcal{X}, R)$  een vaagbenaderingsruimte en zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Zij verder  $\mathcal{C}$  een *conjunctoor* op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een *implicator* op  $[0, 1]$ . De *boven-vaagruwbenadering*  $\overline{\text{FAS}}^{\mathcal{C}}(A, R)$  en de *onder-vaagruwbenadering*  $\underline{\text{FAS}}_{\mathcal{I}}(A, R)$  van  $A$  m.b.t.  $R$  worden gedefinieerd door :*

$$\begin{array}{l}
\overline{\text{FAS}}^{\mathcal{C}}(A, R)(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{C}(R(x, y), A(x)), \\
\underline{\text{FAS}}_{\mathcal{I}}(A, R)(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)),
\end{array}$$

<sup>7</sup>Een equivalentierelatie op  $\mathcal{X}$  is een relatie in  $\mathcal{X}$  die reflexief, symmetrisch en transitief is.



voor alle  $y$  in  $\mathcal{X}$ .

Men ziet onmiddellijk in dat deze basisoperatoren uitgedrukt kunnen worden in termen van de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ .

**Eigenschap 2.36** *Zij  $(\mathcal{X}, R)$  een vaagbenaderingsruimte en zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Zij verder  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1.  $\overline{\text{FAS}}^{\mathcal{C}}(A, R) = \clubsuit(\mathcal{C}, R, A)$ ,
2.  $\underline{\text{FAS}}_{\mathcal{I}}(A, R) = \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)$ .

BEWIJS. Dit volgt uit de respectievelijke definities. □



## Hoofdstuk 3

# Morfologie: basisbegrippen en klassieke modellen

Wiskundige morfologie<sup>1</sup> is ontstaan in de jaren zestig, in het bijzonder onder impuls van Matheron en Serra. De theorie was een resultaat van hun onderzoek naar relaties tussen de geometrie van poreuze media en hun permeabiliteiten<sup>2</sup>, en naar het kwantificeren van de petrografie<sup>3</sup> van ertsen. Morfologische basisbegrippen, zoals dilatatie, erosie, sluiting, opening, . . . zijn allemaal uit dit onderzoek ontsproten, en hebben de grondslag gelegd voor een theorie die vandaag algemeen bekend is in de context van beeldverwerking.

Morfologie is in eerste instantie een theorie voor de verwerking en bewerking van beelden. In hetgeen volgt beschouwen we in het bijzonder binaire beelden en grijswaardebeelden. Ze worden, op de klassieke manier, respectievelijk gemodelleerd m.b.v. scherpe verzamelingen en afbeeldingen. De theorie reikt dan een aantal operatoren aan, typisch gebaseerd op geometrische concepten, om de beelden m.b.v. deze morfologische operatoren te transformeren naar andere beelden. Deze morfologische transformaties kunnen additionele informatie over het beeld en zijn inhoud opleveren (deze informatie kan gaan over de vorm van objecten, oriëntatie van objecten, overlapping van objecten, enzoverder), of kunnen aangewend worden voor andere praktische doeleinden zoals ruisonderdrukking en randdetectie.

In dit hoofdstuk is het onze bedoeling om de basiskennis omtrent klassieke morfologie samen te bundelen. Concreet zullen we drie types van morfologie bestuderen, één voor binaire beelden en twee types voor grijswaardebeelden. Voor elk type gaan we dieper in op de geometrische achtergrond, definiëren we de morfologische basisoperatoren, en bestuderen we de voornaamste eigenschappen. Met behulp van voorbeelden illustreren we ook enkele praktische toepassingen van de morfologische operatoren.

In het volgende hoofdstuk zullen we dan dieper ingaan op vaagmorfologieën. Dit zijn alternatieve uitbreidingen van de klassieke morfologie voor binaire beelden naar morfologie voor grijswaardebeelden, gebaseerd op technieken uit de vaagverzamelingenleer.

### 3.1 Binaire morfologie

#### 3.1.1 Representatie van binaire beelden

Binaire morfologie is een morfologie ontworpen voor binaire beelden, d.w.z. beelden die enkel witte en zwarte beeldpunten bevatten. Zwart correspondeert hierbij met de achtergrond, wit

---

<sup>1</sup>In dit proefschrift zullen we steevast van *morfologie* spreken, waarbij we het adjectief *wiskundig* weglaten. We bedoelen hiermee dan uiteraard de wiskundige morfologie en niet de taalkundige morfologie. Ter informatie: taalkundige morfologie is de leer van de wijze waarop in een taal (afgeleide en samengestelde) woorden gevormd worden en van de verbuigings- en vervoegingsvormen van een taal.

<sup>2</sup>Permeabiliteit of doordringbaarheid: de eigenschap om bepaalde stoffen door te laten.

<sup>3</sup>Petrografie: beschrijving van gesteenten, van hun samenstelling en van hun eigenschappen.

met de voorgrond<sup>4</sup>. Abstractie makende van de beperkingen die ons opgedrongen worden door technologische en praktische aspecten, wordt een  $n$ -dimensionaal binair beeld gemodelleerd als een scherpe deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  in  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ );  $n = 2$  voor twee-dimensionale beelden en  $n = 3$  voor drie-dimensionale beelden<sup>5</sup>. Dergelijke representatie is mogelijk aangezien een binair beeld ondubbelzinnig bepaald wordt door de verzameling van de witte beeldpunten, of alternatief van de zwarte beeldpunten. Formeel: gegeven een  $n$ -dimensionaal binair beeld  $\mathcal{A}$ , dan stellen we dit wiskundig voor als een deelverzameling  $A$  van  $\mathbb{R}^n$  bepaald door:

$$\begin{array}{l} x \in A \quad \Leftrightarrow x \text{ is een wit punt in het beeld } \mathcal{A} \\ x \notin A \quad \Leftrightarrow x \text{ is een zwart punt in het beeld } \mathcal{A}. \end{array}$$

In het vervolg zullen we geen onderscheid maken tussen de notatie voor het beeld en de corresponderende representatie m.b.v. verzamelingen. In beide gevallen gebruiken we een gewone hoofdletter, bijvoorbeeld  $A$ .

### 3.1.2 Morfologische basisoperatoren

De morfologische basisoperatoren zijn alle gestoeld op hetzelfde principe:

- (1) Men heeft een beeld  $A$  gegeven. De bedoeling is om dit beeld te transformeren, teneinde een bepaalde doelstelling te bereiken.
- (2) De expert kiest een structuurelement  $B$ . Een structuurelement is zelf ook een binair beeld, meestal zeer klein in vergelijking met het beschouwde beeld. Structuurelementen spelen een belangrijke rol in morfologie: terwijl het beeld een gegeven feit is (objectief element), kan het structuurelement gekozen worden door de expert (subjectief element). Het spreekt voor zich dat de keuze van het structuurelement van groot belang is voor de uiteindelijke transformatie van het originele beeld.
- (3) Men transformeert het beeld  $A$  m.b.v. het structuurelement  $B$  naar een nieuw beeld  $P(A, B)$ , met  $P$  de beschouwde morfologische operator.

De vier morfologische basisoperatoren die we hier zullen bespreken zijn: de dilatatie, de erosie, de opening en de sluiting. De opening en de sluiting zijn in feite verschillende combinaties van de dilatatie en de erosie, en zijn in die zin eerder samengestelde operatoren i.p.v. basisoperatoren. Ze worden echter zo frequent gebruikt dat ze ook als basisoperatoren worden beschouwd.

Bij de definities speelt de notie van translatie een belangrijke rol. Dit begrip zal ook aanleiding geven tot een makkelijke en zeer interessante geometrische interpretatie van de morfologische basisoperatoren. Tenslotte hebben we ook de reflectie van een verzameling nodig.

**Definitie 3.1** Zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  en zij  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . De translatie van  $B$  over de vector  $v$  is gedefinieerd als:

$$T_v(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x - v \in B\}.$$

**Definitie 3.2** Zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De reflectie van  $B$  is gedefinieerd als:

$$-B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -x \in B\}.$$

<sup>4</sup>Dit is de conventie die wij zullen hanteren. Men kan desgewenst echter ook omgekeerd tewerk gaan.

<sup>5</sup>Merk op dat in de praktijk een binair beeld meestal wordt gerepresenteerd als een rooster bestaande uit een eindig aantal beeldpunten. De twee-dimensionale beelden in de voorbeelden van deze paragraaf zijn bijvoorbeeld allemaal gemodelleerd als begrensde deelverzamelingen van  $\mathbb{Z}^2$ . Deze representatie wordt opgedrongen door de limitaties van de beschikbare technologische middelen en door praktische aspecten, zoals beperkte opslagcapaciteit. Het dient echter opgemerkt te worden dat de theoretische ontwikkeling algemeen in  $\mathbb{R}^n$  gebeurt; de resultaten zijn meestal onmiddellijk overdraagbaar naar het discrete geval.

### De binaire dilatatie en de binaire erosie

**Definitie 3.3** [67] Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De binaire dilatatie  $D(A, B)$  is gedefinieerd als:

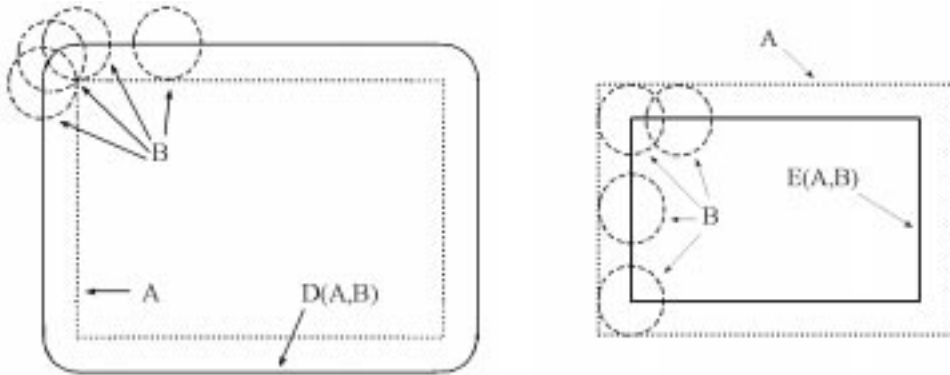
$$D(A, B) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid T_y(B) \cap A \neq \emptyset\}.$$

**Definitie 3.4** [67] Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De binaire erosie  $E(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$E(A, B) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid T_y(B) \subseteq A\}.$$

Men verifieert makkelijk dat equivalente uitdrukkingen voor  $D(A, B)$  en  $E(A, B)$  gegeven worden door:

$$\begin{aligned} D(A, B) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\exists b \in B)(y + b \in A)\} \\ &= \bigcup_{b \in B} T_{-b}(A), \\ E(A, B) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in B)(y + b \in A)\} \\ &= \bigcap_{b \in B} T_{-b}(A). \end{aligned}$$



Figuur 3.1: Geometrische interpretatie van de binaire dilatatie (links) en de binaire erosie (rechts). Het centrum van het structurelement  $B$  valt samen met de oorsprong van het coördinatenstelsel.

De binaire dilatatie en de binaire erosie hebben een mooie geometrische interpretatie, zoals geïllustreerd in Figuur 3.1. Zo bestaat de binaire dilatatie  $D(A, B)$  uit alle punten  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  waarvoor de translatie  $T_y(B)$  van het structurelement  $B$  een niet-ledige doorsnede heeft met het beeld  $A$ . Anders gezegd:  $y$  is een punt van de dilatatie  $D(A, B)$  als en slechts als de translatie  $T_y(B)$  en  $A$  elkaar *raken*. De binaire erosie daarentegen bestaat uit alle punten  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  waarvoor de translatie  $T_y(B)$  van het structurelement  $B$  bevat is in het originele beeld  $A$ . Anders gezegd:  $y$  is een punt van de erosie  $E(A, B)$  als en slechts als de translatie  $T_y(B)$  en het complement van  $A$  elkaar *missen*.

Uit deze geometrische interpretatie kunnen we ook het effect van de binaire dilatatie en erosie afleiden. Zo zal de dilatatie typisch de contouren van de objecten in het beeld uitbreiden, terwijl de erosie deze zal doen inkrimpen. Dit impliceert dus ook dat de grootte van de objecten in het beeld gewijzigd wordt. Verder is het ook duidelijk dat de dilatatie kleine gaatjes en nauwe kanaaltjes zal opvullen (d.w.z. achtergrondetails verwijderen), terwijl de erosie kleine voorgrondetails zal verwijderen, gaatjes groter en kanaaltjes wijder zal maken. Elk van deze karakteristieken worden geïllustreerd in Figuur 3.3. Het originele binaire beeld wordt voorgesteld in Figuur 3.2, en het structurelement wordt gegeven door:



Figuur 3.2: Origineel binair beeld.

Figuur 3.3: Binaire dilatatie  $D(A, B)$  (links) en binaire erosie  $E(A, B)$  (rechts). Het origineel beeld  $A$  wordt voorgesteld in Figuur 3.2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Het onderlijnde element correspondeert met de oorsprong van het coördinatenstelsel.

De typerende kenmerken van de binaire dilatatie en erosie verklaren ook de benaming. In het Groot Van Dale Woordenboek vinden we immers de volgende omschrijvingen terug van de begrippen dilatatie en erosie<sup>6</sup>:

- dilatatie: (natuurk.) uitzetting, toeneming van een of meer afmetingen van een lichaam door een uitwendige kracht of verandering van temperatuur; verwijding, met name van wonden of kanalen met een dilatatorium.
- erosie: afslijting van land door de werking van de wind, het ijs, stromend water en de zee.

Tenslotte vermelden we nog de definities van de zogenaamde algebraïsche dilatatie en de algebraïsche erosie. We zullen verder zien wat het verband is met de morfologische dilatatie en erosie; cfr. Eigenschappen 3.3 en 3.4.

**Definitie 3.5** [31] *Een algebraïsche dilatatie op  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  is elke  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  operator  $R$  die voldoet aan*

$$R\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} R(A_i),$$

voor elke familie  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

*Een algebraïsche erosie op  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  is elke  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  operator  $R$  die voldoet aan*

$$R\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} R(A_i),$$

voor elke familie  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

### De binaire sluiting en de binaire opening

Zoals reeds eerder aangegeven zijn de binaire sluiting en opening bijzondere combinaties van de binaire dilatatie en erosie. Ze worden als volgt gedefinieerd.

**Definitie 3.6** [67] *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De binaire sluiting  $S(A, B)$  is gedefinieerd als:*

$$S(A, B) = E(D(A, B), -B).$$

**Definitie 3.7** [67] *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De binaire opening  $O(A, B)$  is gedefinieerd als:*

$$O(A, B) = D(E(A, B), -B).$$

Gebruik makend van de definities van binaire dilatatie en erosie, kan men volgende expliciete uitdrukkingen afleiden:

$$\begin{aligned} S(A, B) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\forall z \in \mathbb{R}^n)(y \in T_z(B) \Rightarrow T_z(B) \cap A \neq \emptyset)\}, \\ O(A, B) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\exists z \in \mathbb{R}^n)(y \in T_z(B) \wedge T_z(B) \subseteq A)\}. \end{aligned}$$

Ook hieruit volgt een mooie geometrische interpretatie. De sluiting  $S(A, B)$  bestaat uit de punten  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  waarvoor elke translatie  $T_z(B)$  van het structurelement  $B$  die  $y$  bevat een niet-ledige doorsnede heeft met het beeld  $A$ . De opening  $O(A, B)$  daarentegen kan opgevat worden als de unie van alle getranslateerden  $T_z(B)$  die volledig bevat zijn in het originele beeld  $A$ .

<sup>6</sup>De dilatatie wordt, als morfologische operator, in het Nederlands soms *dilatatie* genoemd. In het dagelijks taalgebruik wordt aan “dilatatie” echter de betekenis van verschuiving gehecht, zodat deze benaming eigenlijk niet geschikt is voor de morfologische operator.

Karakteristiek voor de binaire sluiting is dat kleine gaatjes en nauwe kanaaltjes opgevuld worden; de binaire opening onderdrukt kleine piekjes en andere kleine details. In tegenstelling tot de binaire dilatatie en erosie, en afgezien van de verwijdering van kleine details, wordt de grootte van de verschillende structuren niet echt beïnvloed door deze operatoren. Dit is een belangrijke eigenschap in het kader van bijvoorbeeld ruisonderdrukking; in dergelijke gevallen is het immers wenselijk dat enkel de ruis wordt onderdrukt zonder dat er fundamenteel iets verandert aan het beeld.

De binaire sluiting en opening worden geïllustreerd in Figuur 3.4.



Figuur 3.4: De binaire sluiting  $S(A, B)$  (links) en de binaire opening  $O(A, B)$  (rechts). Het originele beeld  $A$  wordt voorgesteld in Figuur 3.2; het structuurelement  $B$  is hetzelfde als hoger.

Tenslotte vermelden we ook hier nog de definities van de zogenaamde algebraïsche sluiting en de algebraïsche opening. Het verband met de morfologische sluiting en opening wordt verduidelijkt in Paragraaf 3.1.3.

**Definitie 3.8** [31] *Een algebraïsche sluiting op  $\mathbb{R}^n$  is elke stijgende, anti-extensieve en idempotente  $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n$  afbeelding.*

*Een algebraïsche opening op  $\mathbb{R}^n$  is elke stijgende, extensieve en idempotente  $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n$  afbeelding.*

### Alternatieve definities

In de wetenschappelijke literatuur komen uiteenlopende definities en notaties voor de morfologische basisoperatoren voor. Zo wordt de binaire dilatatie van een beeld  $A$  door een structuurelement  $B$  soms gedefinieerd als de Minkowski optelling  $A \oplus B$ .

**Definitie 3.9** [41] *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De Minkowski optelling  $A \oplus B$  is gedefinieerd als:*

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} T_b(A).$$

Analoog hiermee wordt de binaire erosie ook soms gedefinieerd als:

$$A \otimes B = \bigcap_{b \in B} T_b(A).$$

Men ziet echter eenvoudig in dat  $A \oplus B = D(A, -B)$  en  $A \otimes B = E(A, -B)$ .

De diversiteit aan definities wordt geïllustreerd in Tabel 3.1.2. We citeren vijf verschillende bronnen die een verschillende definitie geven voor één of meerdere morfologische basisoperatoren, en geven in de tabel onmiddellijk aan hoe deze definities verbonden zijn met deze die wij hanteren. Merk op dat al deze definities samenvallen indien het structuurelement  $B$  symmetrisch is, d.w.z. indien  $B = -B$ . In dit proefschrift is gekozen voor de definities uit [67] (eerste rij in de tabel), omwille van de onmiddellijke geometrische interpretatie van de operatoren.



referentie	dilatatie	erosie	sluiting	opening
[67]	$D(A, B)$	$E(A, B)$	$S(A, B)$	$O(A, B)$
[29]	$D(A, -B)$	$E(A, B)$	$S(A, -B)$	$O(A, B)$
[16]	$D(A, B)$	$E(A, B)$	$E(D(A, B), B)$	$D(E(A, B), B)$
[5]	$D(A, B)$	$E(A, B)$	$S(A, -B)$	$O(A, -B)$
[69]	$D(A, -B)$	$E(A, B)$	$S(A, -B)$	$O(A, B)$

Tabel 3.1: Verschillende auteurs hanteren verschillende definities voor de morfologische basisoperatoren.

### 3.1.3 Eigenschappen van de morfologische basisoperatoren

In deze paragraaf geven en interpreteren we de voornaamste eigenschappen van de morfologische basisoperatoren, zonder hierbij absolute volledigheid te pretenderen. De meeste van deze eigenschappen zijn terug te vinden in standaardboeken over morfologie, zij het meestal zonder bewijs. Verder in dit proefschrift zullen we verifiëren welke van de eigenschappen behouden blijven in het geval van klassieke grijswaardemorfologie en verschillende vaagmorfologieën.

#### Dualiteit

**Definitie 3.10** *Zij  $P$  en  $Q$  morfologische operatoren op  $\mathbb{R}^n$ .  $P$  en  $Q$  zijn dual als en slechts als voor elk koppel  $(A, B)$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  geldt dat:*

$$P(A, B) = co Q(co A, B).$$

Men kan nagaan dat zowel de binaire dilatatie en erosie als de binaire sluiting en opening duale operatoren zijn. Wat de binaire dilatatie en erosie betreft is dit helemaal niet verwonderlijk. Immers, hoewel we dualiteit hier als een eigenschap beschouwen, werd het dualiteitsprincipe historisch gebruikt om de binaire dilatatie te definiëren m.b.v. de binaire erosie.

**Eigenschap 3.1** *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$$\begin{array}{ll} D(A, B) = co E(co A, B) & S(A, B) = co O(co A, B) \\ E(A, B) = co D(co A, B) & O(A, B) = co S(co A, B). \end{array}$$

Uit deze eigenschap volgt dat de binaire erosie, of alternatief de binaire dilatatie, volstaat om ook de overige morfologische basisoperatoren te definiëren.

#### Monotoniteit

Monotoniteitseigenschappen van de morfologische operatoren verschaffen ons informatie omtrent het gedrag van de operatoren in functie van een “toe- of afname” van hetzij het beeld, hetzij het structurelement.

**Definitie 3.11** *Zij  $P$  een operator op  $\mathbb{R}^n$ .  $P$  is stijgend als en slechts als:*

$$(\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n)(A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \subseteq P(A_2)).$$

*$P$  is dalend als en slechts als:*

$$(\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n)(A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \supseteq P(A_2)).$$

**Eigenschap 3.2**

- (i) De binaire dilatatie is stijgend in beide argumenten.
- (ii) De binaire erosie is stijgend in het eerste, en dalend in het tweede argument.
- (iii) De binaire sluiting is stijgend in het eerste argument.
- (iv) De binaire opening is stijgend in het eerste argument.

Over het monotoniteitsgedrag van de binaire sluiting en opening m.b.t. het tweede argument kan niets gezegd worden. Dit is te wijten aan het feit dat de dilatatie stijgend is in het tweede argument, terwijl de erosie dalend is in het tweede argument.

**Interactie met unie en doorsnede**

Het onderzoek naar de interactie van de morfologische basisoperatoren met unie en doorsnede kan van zeer praktisch nut zijn. Beschouwen we bijvoorbeeld de eigenschap

$$D(A, \cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} D(A, B_i),$$

die stelt dat de binaire dilatatie m.b.v. de unie van structuurelementen gelijk is aan de unie van de dilataties m.b.v. de afzonderlijke deel-structuurelementen. Deze eigenschap impliceert dat de dilatatie op een parallelle manier berekend kan worden: men kan het gegeven structuurelement opsplitsen in een aantal deel-structuurelementen (bijvoorbeeld standaard structuurelementen met een eenvoudigere vorm, waarvoor men een snel basisalgoritme kan toepassen) en dan een aantal dilataties parallel berekenen. Op het einde hoeft men dan enkel nog de unie van de bekomen resultaten te nemen.

**Eigenschap 3.3** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  en zij  $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$  families van deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$D(\cup_{i \in I} A_i, B) = \cup_{i \in I} D(A_i, B)$	$D(A, \cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} D(A, B_i)$
$E(\cup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \cup_{i \in I} E(A_i, B)$	$E(A, \cup_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} E(A, B_i)$
$S(\cup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \cup_{i \in I} S(A_i, B)$	$O(\cup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \cup_{i \in I} O(A_i, B)$ .

Uit deze eigenschap kunnen we besluiten dat de binaire dilatatie  $D(\cdot, B)$ , gegeven een structuurelement  $B$ , voldoet aan Definitie 3.5 van algebraïsche dilatatie op  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

**Eigenschap 3.4** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  en zij  $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$  families van deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$D(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} D(A_i, B)$	$D(A, \bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} D(A, B_i)$
$E(\bigcap_{i \in I} A_i, B) = \bigcap_{i \in I} E(A_i, B)$	$E(A, \bigcap_{i \in I} B_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} E(A, B_i)$
$S(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} S(A_i, B)$	$O(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} O(A_i, B)$ .

Uit deze eigenschap kunnen we dan weer besluiten dat de binaire erosie  $E(\cdot, B)$ , gegeven een structuurelement  $B$ , voldoet aan Definitie 3.5 van algebraïsche erosie op  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

**Invariantie onder translatie**

Invariantie van een operator onder translatie betekent dat de uitwerking van deze operator onafhankelijk is van de keuze van de oorsprong van het gehanteerde coördinatenstelsel. De translatie van een deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  werd reeds gedefinieerd in Definitie 3.1.

**Eigenschap 3.5** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  en zij  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$$\begin{array}{ll}
D(T_v(A), B) = T_v(D(A, B)) & E(T_v(A), B) = T_v(E(A, B)) \\
D(A, T_v(B)) = T_{-v}(D(A, B)) & E(A, T_v(B)) = T_{-v}(E(A, B)) \\
D(T_v(A), T_v(B)) = D(A, B) & E(T_v(A), T_v(B)) = E(A, B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
S(T_v(A), B) = T_v(S(A, B)) & O(T_v(A), B) = T_v(O(A, B)) \\
S(A, T_v(B)) = S(A, B) & O(A, T_v(B)) = O(A, B) \\
S(T_v(A), T_v(B)) = T_v(S(A, B)) & O(T_v(A), T_v(B)) = T_v(O(A, B)).
\end{array}$$

Meer specifiek volgt uit de bovenstaande eigenschap dat een translatie van het beeld *of* het structuurelement steeds een translatie impliceert van de dilatatie of erosie van het beeld. Indien het beeld *en* het structuurelement getranslateerd worden over dezelfde vector, dan heeft dit geen effect op de uitwerking van de dilatatie of de erosie.

Een translatie van het beeld, of een translatie van zowel het beeld als het structuurelement over dezelfde vector zal eveneens een translatie van de sluiting en opening impliceren. Hier valt het echter op dat de uitwerking van de sluiting en opening onafhankelijk zijn van de *plaats* van het structuurelement, en dus enkel afhangen van de *vorm* ervan.

Bijgevolg kunnen we steeds veronderstellen dat de oorsprong van het coördinatenstelsel bevat is in het beeld en/of structuurelement. Immers, indien dit niet het geval zou zijn volstaat een eenvoudige translatie om dit alsnog te bekomen, zonder dat het eindresultaat wezenlijk verandert.

### Invariantie onder schaling

Invariantie van een operator onder schaling betekent dat de uitwerking van deze operator onafhankelijk is van de gehanteerde schaling, d.w.z. onafhankelijk van vergroten of verkleinen van het argument van de operator.

**Definitie 3.12** Zij  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , en zij  $\lambda > 0$ . De schaling  $H_\lambda(V)$  van  $V$  is gedefinieerd als:

$$H_\lambda(V) = \{\lambda v \in \mathbb{R}^n \mid v \in V\}.$$

**Eigenschap 3.6** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  en zij  $\lambda > 0$ . Er geldt:

$$\begin{array}{ll}
D(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(D(A, B)) & S(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(S(A, B)) \\
E(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(E(A, B)) & O(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(O(A, B)).
\end{array}$$

Men kan nagaan dat deze eigenschap ook geldt voor  $\lambda < 0$  (met  $H_\lambda$  gedefinieerd op analoge wijze), en bijgevolg geldt voor alle  $\lambda \neq 0$ . Men verifieert dan ook dat  $H_\lambda(A) = H_{-\lambda}(-A)$ , hetgeen betekent dat de negatieve schaling van  $A$  gelijk is aan de positieve schaling van de reflectie van  $A$ . In het bijzonder hebben we, voor  $\lambda = -1$  dat  $H_{-1}(A) = H_1(-A) = -A$ . Dit leidt tot volgende symmetrie-eigenschap.

**Eigenschap 3.7** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$$\begin{array}{ll}
-D(A, B) = D(-A, -B) & -S(A, B) = S(-A, -B) \\
-E(A, B) = E(-A, -B) & -O(A, B) = O(-A, -B).
\end{array}$$

In het bijzonder volgt hieruit dat de morfologische transformatie van een symmetrisch beeld m.b.v. een symmetrisch structuurelement terug een symmetrisch beeld oplevert.

### Extensiviteit en idempotentie

**Definitie 3.13** Zij  $P$  een  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  operator.  $P$  wordt *extensief* genoemd indien:

$$(\forall A \subseteq \mathbb{R}^n)(A \subseteq P(A)).$$

$P$  is anti-extensief indien:

$$(\forall A \subseteq \mathbb{R}^n)(P(A) \subseteq A).$$

De interpretatie naar morfologische operatoren, gegeven een structuurelement, is duidelijk: een extensieve operator maakt de voorgrond van het beeld groter, een anti-extensieve operator maakt de voorgrond kleiner.

**Eigenschap 3.8** Zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:

(i) Indien het structuurelement de oorsprong bevat, dan is de binaire dilatatie extensief en de binaire erosie anti-extensief:

$$\mathbf{0} \in B \Rightarrow (\forall A \subseteq \mathbb{R}^n)(E(A, B) \subseteq A \subseteq D(A, B)).$$

(ii) De binaire sluiting is extensief en de binaire opening is anti-extensief, ongeacht het structuurelement  $B$ :

$$(\forall A \subseteq \mathbb{R}^n)(O(A, B) \subseteq A \subseteq S(A, B)).$$

Het dient opgemerkt te worden dat de voorwaarde  $\mathbf{0} \in B$  voldoende, maar niet noodzakelijk is opdat de binaire dilatatie en de binaire erosie respectievelijk extensief en anti-extensief zouden zijn. Omgekeerd impliceert  $A \subseteq D(A, B)$  of  $E(A, B) \subseteq A$  niet noodzakelijk dat  $\mathbf{0} \in B$ .

We merken ook op dat de voldoende voorwaarde  $\mathbf{0} \in B$  eigenlijk een zeer zwakke voorwaarde is, aangezien ze steeds gerealiseerd kan worden m.b.v. een translatie van  $B$ . Eigenschap 3.5 garandeert immers dat deze translatie geen wezenlijk effect heeft op de uitwerking van de binaire morfologische basisoperatoren.

**Eigenschap 3.9** De binaire sluiting en de binaire opening zijn idempotente operatoren, d.w.z. dat voor alle  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  geldt:

$$\begin{aligned} S(S(A, B), B) &= S(A, B) \\ O(O(A, B), B) &= O(A, B). \end{aligned}$$

Deze eigenschap heeft een belangrijk praktisch gevolg, met name dat het niet zinvol is om de binaire opening of sluiting meermaals na elkaar te herhalen.

Tenslotte brengen we ook in herinnering dat een algebraïsche opening gedefinieerd werd als een stijgende, anti-extensieve en idempotente operator; cfr. Definitie 3.8. De bovenstaande eigenschappen, met name Eigenschappen 3.2, 3.8 en 3.9, bevestigen dat de binaire opening  $O(\cdot, B)$  m.b.v. een structuurelement  $B$  voldoet aan deze definitie. Een analoge opmerking geldt voor de sluiting.

### Inclusie eigenschappen

In dit onderdeel bundelen we een aantal inclusie eigenschappen. Ze vertolken hoe de binaire dilatatie, erosie, sluiting en opening zich t.o.v. elkaar gedragen.

**Eigenschap 3.10** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} E(A, B) &\subseteq D(A, B) \\ O(A, B) &\subseteq S(A, B). \end{aligned}$$

**Eigenschap 3.11** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Indien het structuurelement  $B$  de oorsprong bevat, d.w.z. indien  $\mathbf{0} \in B$ , dan geldt:

$$\begin{aligned} D(A, B) &\supseteq S(A, B) & E(A, B) &\subseteq O(A, B) \\ D(A, B) &\supseteq O(A, B) & E(A, B) &\subseteq S(A, B) \\ D(A, B) &\supseteq O(A, -B) & E(A, B) &\subseteq S(A, -B). \end{aligned}$$

De resultaten van eigenschap 3.8 en 3.11 leiden tot de volgende conclusie.

**Eigenschap 3.12** *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Indien het structuurelement  $B$  de oorsprong bevat, d.w.z. indien  $\mathbf{0} \in B$ , dan geldt:*

$$E(A, B) \subseteq O(A, B) \subseteq A \subseteq S(A, B) \subseteq D(A, B).$$

### Commutativiteit en associativiteit van de binaire dilatatie

**Eigenschap 3.13** *Zij  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} D(A, B) &= -D(B, A) \\ D(D(A, B), C) &= D(A, D(B, -C)). \end{aligned}$$

De commutativiteits-eigenschap is enkel vanuit theoretisch oogpunt interessant, aangezien ze geen praktische voordelen kan bieden, en aangezien er geen fysische interpretatie aan gehecht kan worden. Het is immers zo dat de rollen van  $A$  (het beeld) en  $B$  (het structuurelement, hetgeen we zelf kunnen kiezen) volledig verschillend zijn, en dus niet zomaar gewisseld kunnen worden.

De associativiteits-eigenschap daarentegen kan wel praktisch geïnterpreteerd worden. De eigenschap stelt dat de dilatatie van een beeld  $A$  m.b.v. een structuurelement  $B$ , gevolgd door de dilatatie m.b.v. een (ander) structuurelement  $C$  gelijk is aan de dilatatie van  $A$  m.b.v. het structuurelement  $D(B, -C)$ . Twee opeenvolgende dilataties met de respectievelijke structuurelementen  $B$  en  $C$  zijn dus gelijk aan één dilatatie met het (iets grotere) structuurelement  $D(B, -C)$ .

### Combinaties van de binaire dilatatie en erosie

De volgende eigenschap impliceert dat opeenvolgende binaire dilataties of erosies van eenzelfde beeld m.b.v. verschillende structuurelementen onafhankelijk zijn van de volgorde waarin deze structuurelementen verwerkt worden.

**Eigenschap 3.14** *Zij  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} D(D(A, B), C) &= D(D(A, C), B) \\ E(E(A, B), C) &= E(E(A, C), B). \end{aligned}$$

Daarnaast gelden ook nog de volgende eigenschappen.

**Eigenschap 3.15** *Zij  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} E(A, D(B, -C)) &= E(E(A, B), C) \\ D(A, E(B, C)) &\subseteq E(D(A, B), -C) \\ D(E(A, B), C) &\subseteq E(D(A, C), B). \end{aligned}$$

De eigenschap  $E(A, D(B, -C)) = E(E(A, B), C)$  heeft eenzelfde praktische interpretatie als de associativiteits-eigenschap van de binaire dilatatie, namelijk dat het computationeel interessanter is om  $E(A, D(B, -C))$  te berekenen in plaats van  $E(E(A, B), C)$ . Verder merken we volledigheidshalve ook op dat  $D(E(A, B), C) \subseteq E(D(A, C), B)$  impliceert dat  $O(A, B) \subseteq S(A, -B)$  (men bekomt dit door  $C = -B$  te stellen in de bovenstaande eigenschap).

### Het principe van lokale kennis

Eén van de beperkingen die ons door praktische en technologische aspecten wordt opgedrongen, is het feit dat we van een beeld slechts beperkte - noem het lokale - informatie hebben. Hiermee bedoelen we dat we enkel dat gedeelte van een beeld kunnen capteren dat bevat is binnen een bepaald “masker”, bijvoorbeeld een rechthoek. Dit initiële masker duiden we aan met de letter  $Z$ .

Deze lokale kennis heeft ook gevolgen aangaande de berekening van morfologische operatoren. Zo is het te verwachten dat er problemen optreden indien morfologische operatoren toegepast worden aan de rand van een beeld<sup>7</sup>. De nu volgende eigenschap geeft aan binnen welk masker  $M$  een morfologische operator zonder problemen, en enkel gebruik makend van de beschikbare lokale kennis, toegepast kan worden. Voor de binaire dilatatie en erosie geldt met name dat dit masker gegeven wordt door  $M = E(Z, B)$ , d.w.z. de binaire erosie van het initiële masker  $Z$  m.b.v. het voorhanden zijnde structuurelement  $B$ . Een expert moet met deze eigenschap rekening houden indien hij of zij de binaire dilatatie of erosie wil implementeren op een computer.

**Eigenschap 3.16** *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ , en zij  $Z \subseteq \mathbb{R}^n$  het initiële masker. Er geldt:*

$$\begin{aligned} D(A \cap Z, B) \cap E(Z, B) &= D(A, B) \cap E(Z, B) \\ E(A \cap Z, B) \cap E(Z, B) &= E(A, B) \cap E(Z, B). \end{aligned}$$

### Adjunctie eigenschap

In [31] wordt het begrip adjunctie ingevoerd. De definitie is vrij algemeen, en beschouwt operatoren op complete tralies<sup>8</sup>.

**Definitie 3.14** [31] *Zij  $\delta$  en  $\epsilon$  operatoren op een complete tralie  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Het paar  $(\epsilon, \delta)$  is een adjunctie in  $\mathcal{L}$  als en slechts als:*

$$(\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L})(\delta(L_1) \leq L_2 \Leftrightarrow L_1 \leq \epsilon(L_2)).$$

De volgende eigenschap geeft aan dat, gegeven een structuurelement  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , het paar  $(E(\cdot, -B), D(\cdot, B))$  een adjunctie vormt in  $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ .

**Eigenschap 3.17** *Zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$$(\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n)(D(A_1, B) \subseteq A_2 \Leftrightarrow A_1 \subseteq E(A_2, -B)).$$

Het belang van adjuncties in de context van morfologische operatoren mag zeker niet onderschat worden. In [31] speelt het begrip zelfs een centrale rol in de ontwikkeling van de theorie van morfologische operatoren. De beschouwde universa zijn er complete tralies. Gegeven een complete tralie  $(\mathcal{L}, \leq)$  wordt een erosie in  $\mathcal{L}$  gedefinieerd als een  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  operator  $\epsilon$  die commuteert met het infimum, en een dilatatie in  $\mathcal{L}$  als een  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  operator  $\delta$  die commuteert met het supremum. We geven de definitie formeel.

**Definitie 3.15** [31] *Zij  $(\mathcal{L}, \leq)$  een complete tralie met infimum-operator  $\wedge$  en supremum-operator  $\vee$ . Een  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  operator  $\epsilon$  is een algebraïsche erosie in  $\mathcal{L}$  indien*

$$\epsilon\left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) = \bigwedge_{i \in I} \epsilon(x_i),$$

voor elke familie  $(x_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{L}$ . Een  $\mathcal{L} - \mathcal{L}$  operator  $\delta$  is een algebraïsche dilatatie in  $\mathcal{L}$  indien

$$\delta\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigvee_{i \in I} \delta(x_i),$$

<sup>7</sup>Zij bijvoorbeeld  $A$  een beeld (theoretisch bepaald in gans  $\mathbb{R}^n$ , in de praktijk enkel in het masker  $Z$ ), en  $B$  een rechthoekig structuurelement met de oorsprong in het centrum van de rechthoek. Beschouw dan een punt  $y$  op de rand van het beeld  $A$ . Als we de translatie  $T_y(B)$  van het structuurelement beschouwen is het bijvoorbeeld onmogelijk om te bepalen of  $T_y(B) \subseteq A$ , en dus of  $y \in E(A, B)$ , omdat we in de praktijk geen kennis hebben van  $A$  buiten het masker  $Z$ .

<sup>8</sup>Een tralie (Engelstalig: *lattice*) is een bijzondere poset. Een poset of partieel geordende verzameling  $(P, \leq)$  bestaat uit een niet-ledige verzameling  $P$ , uitgerust met een reflexieve, anti-symmetrische en transitieve ordening  $\leq$ . Men spreekt van een tralie indien elk doubleton een supremum en infimum heeft, en van een complete tralie indien elke deelverzameling een supremum en infimum heeft.

voor elke familie  $(x_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{L}$ .

Gegeven dan een adjunctie  $(\epsilon, \delta)$  in  $(\mathcal{L}, \leq)$  kan men aantonen dat  $\epsilon$  een erosie en  $\delta$  een dilatactie in  $\mathcal{L}$  vormen, in de zin van de zopas gegeven definities. Merk trouwens op dat deze definities veralgemeningen zijn van Definitie 3.5 van algebraïsche dilatactie en erosie.

In Hoofdstuk 6 gaan we dieper in op het begrip adjunctie, en zullen we er een fuzzificatie van introduceren. Dergelijke fuzzificatie zal leiden tot een alternatief model voor grijswaardemorfologie.

### 3.1.4 Enkele toepassingen

Met behulp van de binaire dilatactie en erosie kunnen verschillende interessante morfologische operatoren geconstrueerd worden. We hebben reeds twee voorbeelden gezien, namelijk de binaire sluiting en opening. Deze operatoren zijn samenstellingen van de dilatactie en erosie en zijn, gelet op hun constructie, geometrische interpretatie en eigenschappen, uitermate geschikt voor de onderdrukking van kleine details: de sluiting onderdrukt witte details (voorgond); de opening onderdrukt zwarte details (achtergrond). In het bijzonder kan de achtereenvolgende toepassing van deze operatoren aangewend voor *ruisonderdrukking*.

Daarnaast kan men verschillende operatoren construeren die geschikt zijn voor *randdetectie*. In sommige toepassingen is randdetectie een doel op zich (bijvoorbeeld als men enkel de objecten in een beeld wenst te kunnen onderscheiden), in andere toepassingen is het een onderdeel van “pre-processing” proces om een bepaalde doelstelling te bereiken (bijvoorbeeld segmentatie van een beeld).

In hetgeen volgt geven we een voorbeeld van beide toepassingen. Verder in dit hoofdstuk zullen we de uitbreiding van deze toepassingen naar grijswaardebeelden bespreken. Hierbij zijn we dan voornamelijk, gelet op het tweede deel van dit proefschrift, geïnteresseerd in de ruisonderdrukking.

#### Ruisonderdrukking

We illustreren het gebruik van de binaire sluiting en opening als ruisonderdrukkingsfilters in Figuur 3.5. Het structuurelement  $B$  wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De visuele resultaten kunnen als zeer goed omschreven worden: de ruis is grotendeels weggefilterd en de cirkels hebben hun oorspronkelijke grootte behouden. We merken ook op dat er enkele artefacten optreden. Zo zijn de randen van de cirkels door de filtering gekarteld, en kunnen er geïsoleerde vlekjes optreden.

#### Randdetectie

De nu volgende morfologische operatoren voor randdetectie zijn gebaseerd op de Eigenschappen 3.8 en 3.10.

**Definitie 3.16** [67] Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De morfologische gradiënt  $G^B$  is gedefinieerd als:

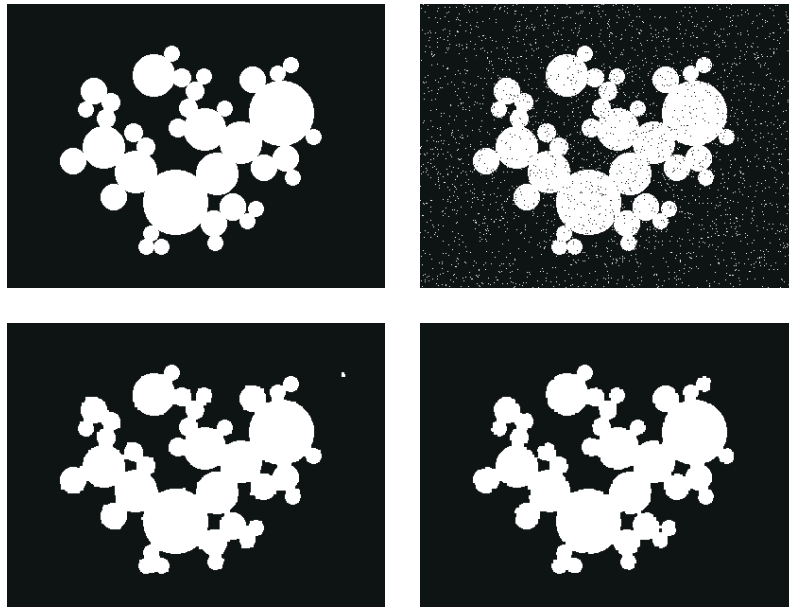
$$G_B(A) = D(A, B) \setminus E(A, B).$$

Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ , met  $\mathbf{0}$  in  $B$ . De externe morfologische gradiënt  $G^{B,e}$  is gedefinieerd als:

$$G^{B,e}(A) = D(A, B) \setminus A;$$

de interne morfologische gradiënt  $G^{B,i}$  is gedefinieerd als:

$$G^{B,i}(A) = A \setminus E(A, B).$$



Figuur 3.5: Bovenste rij: origineel binair beeld (links) en gecontamineerd binair beeld (rechts); het gecontamineerd beeld werd bekomen door aan het originele beeld 5% zout & peper ruis toe te voegen. Onderste rij: resultaat van de binaire sluiting gevolgd door de binaire opening (links) en de binaire opening gevolgd door de binaire sluiting (rechts) op het gecontamineerde beeld.

De morfologische gradiënten worden geïllustreerd in Figuur 3.6; het structurelement  $B$  is hetzelfde als hoger. De morfologische gradiënt leidt tot een zeer goed randbeeld. Zoals uit de figuren kan worden afgeleid resulteert de externe morfologische gradiënt in een randdetectie “langs de buitenkant van de randen”, terwijl de interne morfologische gradiënt resulteert in een randdetectie “langs de binnenkant van de randen”.

### Andere toepassingen

Morfologie kan aangewend worden voor nog tal van andere toepassingen. Het valt echter buiten het bestek van dit proefschrift om daar dieper op in te gaan. De geïnteresseerde lezer verwijzen we graag naar [71], waar een overzicht gegeven wordt van verschillende praktische toepassingen, aangevuld met een zeer uitgebreide literaturopgave.

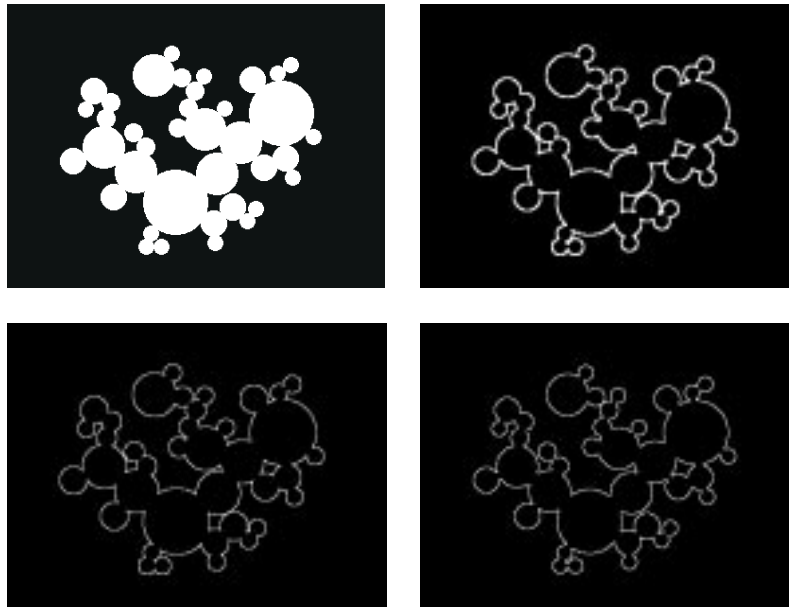
## 3.2 Klassieke grijswaardemorfologie van het eerste type: de schijfjesbenadering

Er zijn verschillende pogingen ondernomen om de binaire morfologie uit te breiden naar een morfologie, met bijhorend theoretisch kader en toepassingen, voor grijswaardebeelden. In deze volgende paragraaf bespreken we de twee bekende klassieke modellen: de eerste omschrijven we als de *schijfjesbenadering*<sup>9</sup>, de tweede als de *umbrabenadering*<sup>10</sup>. Aangezien het gaat om uitbreidingen, moet geëist kunnen worden dat de restrictie van grijswaardemorfologie tot binaire beelden identiek moet zijn aan, of herleidbaar moet zijn tot de binaire morfologie.

<sup>9</sup>Engelstalige benaming: *threshold approach*. De constructie van de corresponderende morfologische operatoren (zie verder) zal de herkomst van onze Nederlandse vertaling verduidelijken

<sup>10</sup>Engelstalige benaming: *umbra approach*





Figuur 3.6: Bovenste rij: origineel binair beeld  $A$  (links) en het resultaat van de morfologische gradiënt  $G_B(A)$  (rechts). Onderste rij: resultaat van de externe morfologische gradiënt  $G^{B,e}(A)$  (links) en de interne morfologische gradiënt  $G^{B,i}(A)$  (rechts).

Deze uitbreidingen leiden in eerste instantie tot morfologische modellen die toepasbaar zijn op grijswaardebeelden. Het structurelement blijft in de schijfjesbenadering gelimiteerd tot een binair object; het model gebaseerd op de umbrabenadering is echter zodanig opgebouwd dat het structurelement zelf ook een grijswaardeobject kan zijn. Hoewel beide modellen dezelfde objecten bestuderen, namelijk grijswaardebeelden, worden deze objecten formeel toch op verschillende wijze gerepresenteerd. Wat de schijfjesbenadering betreft gaan we hier onmiddellijk dieper op in.

### 3.2.1 Representatie van grijswaardebeelden

Grijswaardebeelden zijn beelden die, behalve wit en zwart, ook tussenliggende grijstinten kunnen bevatten. Een  $n$ -dimensionaal grijswaardebeeld kan daarom gerepresenteerd worden als een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  functie, waarbij  $\mathbb{R}^n$  het universum der beeldpunten is<sup>11</sup>, en waarbij  $[0, 1]$  het universum der grijswaarden is. Grijstinten worden dus gerepresenteerd m.b.v. waarden uit het open eenheidsinterval  $]0, 1[$ , waarbij geldt: hoe groter de grijswaarde, hoe lichter de grijstint.

Formeel: gegeven een  $n$ -dimensionaal grijswaardebeeld  $\mathcal{A}$ , dan stellen we dit wiskundig voor als een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  functie  $A$  op  $\mathbb{R}^n$  bepaald door:

$\begin{aligned} A(x) &= 0 \text{ indien } x \text{ een zwart beeldpunt van } \mathcal{A} \text{ is,} \\ A(x) &= 1 \text{ indien } x \text{ een wit beeldpunt van } \mathcal{A} \text{ is,} \\ A(x) &\in ]0, 1[ \text{ indien } x \text{ een punt met grijstint van } \mathcal{A} \text{ is.} \end{aligned}$
--

Voor punten  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  waar het beeld  $\mathcal{A}$  oorspronkelijk niet bepaald is (het beeld hoeft immers niet de ganse ruimte  $\mathbb{R}^n$  te beslaan) stellen we bij afspraak  $A(x) = 0$ . Op die manier worden  $n$ -dimensionale grijswaardebeelden gerepresenteerd als  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen i.p.v. als  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  functies.

<sup>11</sup>Praktische en technologische beperkingen leiden er in de praktijk ook hier toe dat men het universum der beeldpunten zal modelleren m.b.v. een discreet universum, bijvoorbeeld een deelverzameling van  $\mathbb{Z}^n$ . We verwijzen in dat verband ook naar Paragraaf 7.1.1 in Hoofdstuk 7. Zoals eerder al opgemerkt maken we in dit hoofdstuk, zoals trouwens ook gebruikelijk in de literatuur, abstractie van dit gegeven, en ontwikkelen we de theorie in een continu universum.

In het vervolg zullen we geen onderscheid maken tussen de notatie voor het beeld en de corresponderende representatie m.b.v. afbeeldingen. In beide gevallen gebruiken we een gewone hoofdletter, bijvoorbeeld  $A$ . De klasse der  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen, die we identificeren met de klasse der  $n$ -dimensionale grijswaardebeelden, noteren we als  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .

### Enkele noties

Merk op dat deze klasse  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  der  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen samenvalt met de klasse  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  der vaagverzamelingen in  $\mathbb{R}^n$ . Dit impliceert in het bijzonder dat de definities van drager (Definitie 1.5), zwakke snedeverzameling (Definitie 1.7) en reflectie (Definitie 1.11) onmiddellijk overgenomen kunnen worden.

**Definitie 3.17** Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ . Het drager  $d_F$  van  $F$  is gedefinieerd als:

$$d_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > 0\}.$$

**Definitie 3.18** Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ , en zij  $\alpha$  in  $]0, 1[$ . De zwakke snedeverzameling  $F_\alpha$  van  $F$  is gedefinieerd als:

$$F_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \geq \alpha\}.$$

Tenslotte definiëren we de reflectie van een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeelding.

**Definitie 3.19** Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ . De reflectie  $-F$  van  $F$  is gedefinieerd door:

$$(-F)(x) = F(-x),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.2.2 s-Morfologische basisoperatoren

We schetsen kort het constructieprincipe van de s-morfologische basisoperatoren. Zij  $A$  een grijswaardebeeld (d.w.z.  $A$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ ) en  $B$  een binair structurelement (d.w.z.  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Zij verder  $P$  een binaire morfologische basisoperator. Met behulp van de volgende constructiemethode kan de operator  $P$  op  $\mathbb{R}^n$  uitgebreid worden tot een operator  $P_s$  op  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ :

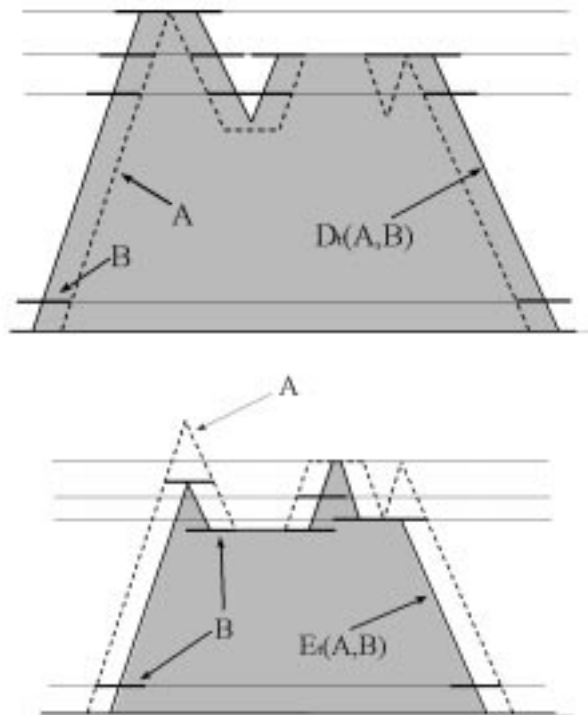
- (i) Het originele grijswaardebeeld  $A$  wordt gerepresenteerd d.m.v. de familie  $(A_\alpha)_{\alpha \in ]0, 1[}$  van zwakke snedeverzamelingen van  $A$ , d.w.z. als een familie van scherpe deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) De binaire morfologische operator  $P$  kan toegepast worden op elk van de snedeverzamelingen  $A_\alpha$ , gebruik makend van het binair structurelement  $B$ . Dit resulteert in een familie  $(P(A_\alpha, B))_{\alpha \in ]0, 1[}$  van scherpe deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) Met de familie  $(P(A_\alpha, B))_{\alpha \in ]0, 1[}$  associeert men de volgende  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeelding:

$$P_s(A, B)(y) = \sup \{\alpha \in ]0, 1[ \mid y \in P(A_\alpha, B)\},$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Deze constructie verklaart meteen de herkomst van onze terminologie *schijffjesbenadering*. Ze wordt geïllustreerd in Figuur 3.7 voor de dilatatie en de erosie. Formeel geven we de afleiding voor de dilatatie:

$$\begin{aligned} D_s(A, B)(y) &= \sup \{\alpha \in ]0, 1[ \mid y \in D(A_\alpha, B)\} \\ &= \sup \{\alpha \in ]0, 1[ \mid (\exists b \in B)(y + b \in A_\alpha)\} \\ &= \sup \{\alpha \in ]0, 1[ \mid (\exists x \in T_y(B))(x \in A_\alpha)\} \\ &= \sup \{\alpha \in ]0, 1[ \mid (\exists x \in T_y(B) \cap d_A)(A(x) \geq \alpha)\} \\ &= \sup \{A(x) \mid x \in T_y(B) \cap d_A\}; \end{aligned}$$



Figuur 3.7: Constructie van de s-dilatatie (boven) en de s-erosie (onder). Omwille van de aanschouwelijkheid werd gekozen voor het 1-dimensionale geval, d.w.z.  $n = 1$ .

voor de erosie gaat men analoog te werk. Dit leidt tot de volgende definities<sup>12</sup>:

**Definitie 3.20** [67] Zij  $A$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  en zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De  $s$ -morfologische dilatatie of  $s$ -dilatatie  $D_s(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$D_s(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} A(x),$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:  $D_s(A, B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .

De  $s$ -morfologische erosie of  $s$ -erosie  $E_s(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$E_s(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(B)} A(x),$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:  $E_s(A, B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .



Figuur 3.8: Origineel grijswaardebeeld.



Figuur 3.9: De  $s$ -dilatatie  $D_s(A, B)$  (links) en de  $s$ -erosie  $E_s(A, B)$  (rechts). Het origineel grijswaardebeeld  $A$  wordt voorgesteld in Figuur 3.8.

De definities van de  $s$ -dilatatie en de  $s$ -erosie geven meteen aanleiding tot een interessante interpretatie van deze morfologische operatoren. Aangezien de  $s$ -dilatatie een supremum van lokale grijswaarden is, zal de operator typisch donkere details onderdrukken en witte details versterken.

<sup>12</sup>In het bijzonder verklaart de gegeven afleiding de herkomst van de verzamelingen waarover de suprema en infima berekend moeten worden.

Op grotere schaal zullen donkere objecten groter en lichte objecten kleiner gemaakt worden. De s-erosie daarentegen zal, als infimum van lokale grijswaarden, een omgekeerd effect hebben: lichte details worden onderdrukt, donkere details versterkt, en op grotere schaal worden lichte objecten groter en donkere objecten kleiner. Deze karakteristieken worden geïllustreerd in Figuur 3.9; het originele grijswaardebeeld wordt weergegeven in Figuur 3.8, en het binaire structurelement  $B$  wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Louter op basis van de definitie kunnen we ook nog een ander typisch kenmerk van zowel de s-dilatatie als de s-erosie afleiden. Immers, door het feit dat een grijswaarde vervangen wordt door het supremum of infimum van een lokale omgeving van grijswaarden, zal er een blokjes-effect optreden. Dit wil zeggen dat in sommige gevallen een gebiedje met verschillende grijswaarden getransformeerd zal worden tot een gebiedje met één grijswaarde. Men ziet dit ook duidelijk in de figuren.

De s-morfologische sluiting en opening worden gedefinieerd als de gekende combinaties van de s-morfologische dilatatie en erosie.

**Definitie 3.21** [67] *Zij  $A$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  en zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De s-morfologische sluiting of s-sluiting  $S_s(A, B)$  en de s-morfologische opening of s-opening  $O_s(A, B)$  zijn gedefinieerd als:*

$$\begin{array}{l} S_s(A, B) = E_s(D_s(A, B), -B), \\ O_s(A, B) = D_s(E_s(A, B), -B). \end{array}$$

Er geldt:  $S_s(A, B), O_s(A, B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .

Men kan de volgende expliciete uitdrukkingen afleiden:

$$\begin{aligned} S_s(A, B)(y) &= \inf_{z \in T_y(-B)} \left( \sup_{x \in T_z(B)} A(x) \right), \\ O_s(A, B)(y) &= \sup_{z \in T_y(-B)} \left( \inf_{x \in T_z(B)} A(x) \right), \end{aligned}$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De s-morfologische sluiting en opening worden geïllustreerd in Figuur 3.10. Typisch gedrag bestaat erin dat de s-sluiting donkere details zal onderdrukken, terwijl de s-opening lichte details zal onderdrukken. Net zoals dit het geval was bij binaire morfologie, hebben de operatoren weinig invloed op de grootte van de objecten in het beeld.

### 3.2.3 Eigenschappen van de s-morfologische basisoperatoren

In Paragraaf 3.1.3 gaven we een overzicht van de voornaamste eigenschappen i.v.m. de binaire morfologische operatoren. In deze paragraaf geven we aan welke van deze eigenschappen behouden blijven in het geval van s-morfologische operatoren. Eerst geven we een overzicht van de relevante definities.

#### Relevante definities

**Definitie 3.22** *Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ . Het complement  $co F$  van  $F$  wordt gedefinieerd als:*

$$co F(x) = 1 - F(x),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .



Figuur 3.10: De s-sluiting  $S_s(A, B)$  (links) en de s-opening  $O_s(A, B)$  (rechts). Het originele grijs-waardebeeld  $A$  wordt voorgesteld in Figuur 3.8; het structurelement  $B$  is hetzelfde als hoger.

**Definitie 3.23** Zij  $P_s$  en  $Q_s$  operatoren op  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .  $P_s$  en  $Q_s$  zijn *duaal* als en slechts als voor elk koppel  $(A, B) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1]) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  geldt dat:

$$P(A, B) = coQ(co A, B).$$

**Definitie 3.24** De orderrelatie  $\subseteq$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  wordt gedefinieerd als:

$$F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(F_1(x) \leq F_2(x)),$$

voor alle  $(F_1, F_2)$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1]) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .

**Definitie 3.25** Zij  $P_s$  een operator op  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .  $P_s$  is *stijgend* als en slechts als:

$$(\forall A_1, A_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1]))(A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P_s(A_1) \subseteq P_s(A_2)).$$

Een analoge definitie is van toepassing voor het dalend zijn.

**Definitie 3.26** Zij  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ . De doorsnede  $\bigcap_{i \in I} A_i$  en de unie  $\bigcup_{i \in I} A_i$  worden respectievelijk gedefinieerd door:

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) (x) = \inf_{i \in I} A_i(x) \quad \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) (x) = \sup_{i \in I} A_i(x),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definitie 3.27** Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ , en zij  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . De translatie  $T_v(F)$  van de functie  $F$  over de vector  $v$  is gedefinieerd door:

$$T_v(F)(x) = F(x - v),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definitie 3.28** Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ , en zij  $\lambda > 0$ . De schaling  $H_\lambda(F)$  van  $F$  is gedefinieerd door:

$$H_\lambda(F)(x) = F\left(\frac{1}{\lambda}x\right),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definitie 3.29** Zij  $P_s$  een operator op  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .  $P_s$  wordt *extensief* genoemd indien:

$$(\forall A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1]))(A \subseteq P_s(A)).$$

$P_s$  is anti-extensief indien:

$$(\forall A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1]))(P_s(A) \subseteq A).$$

**Definitie 3.30** Zij  $P_s$  een operator op  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .  $P_s$  wordt idempotent genoemd indien:

$$(\forall A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1]))(P_s(P_s(A)) = A).$$

### Overdraagbare eigenschappen

Men kan nagaan dat bijna alle beschouwde eigenschappen, en bijgevolg ook hun interpretatie, van de binaire morfologische operatoren (zie Paragraaf 3.1.3) overgedragen kunnen worden naar het klassieke model voor grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering<sup>13</sup>.

Er is slechts één uitzondering, en die heeft betrekking op de commutativiteit van de dilatatie; cfr. Eigenschap 3.13. Deze eigenschap kan niet overgedragen worden omwille van het feit dat bij de s-morfologische dilatatie de aard van de twee argumenten verschillend is: het eerste argument is een element uit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ , het tweede argument is een deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.2.4 Enkele toepassingen

In Paragraaf 3.1.4 gingen we in op toepassingen op het vlak van ruisonderdrukking en randdetectie. We herhalen deze oefening voor de grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering.

#### Ruisonderdrukking

De combinaties s-sluiting & s-opening en s-opening & s-sluiting worden als ruisonderdrukkingfilters geïllustreerd in Figuur 3.12. Het originele beeld wordt weergegeven in Figuur 3.8 en twee met ruis gecontamineerde binaire beelden in Figuur 3.11; het structurelement  $B$  wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

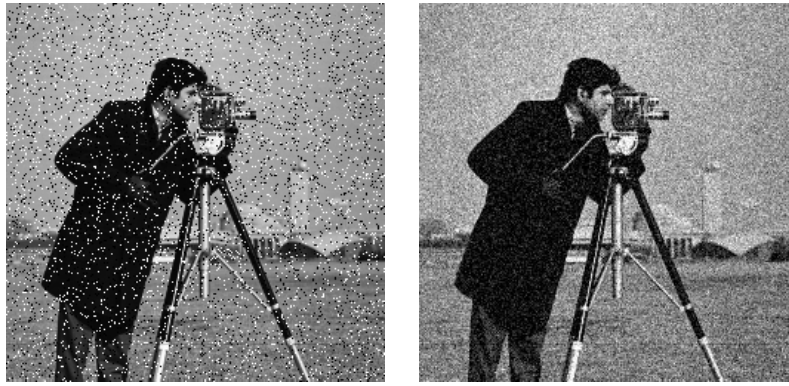
In Tabel 3.2 geven we de corresponderende MSE-waarden<sup>14</sup>. Zowel uit deze tabel als uit de visuele resultaten blijkt echter dat de performantie van de filters niet zo goed is, zeker niet in vergelijking met de resultaten in het binaire geval. Voor ruisonderdrukking werden er dan ook andere en performantere technieken ontwikkeld; cfr. de Hoofdstukken 7 en 8.

#### Randdetectie

Gelet op de overdraagbaarheid van de betrokken eigenschappen kunnen, net zoals in het binaire geval (cfr. Paragraaf 3.1.4), morfologische operatoren voor randdetectie geconstrueerd worden. We beperken ons hier tot het illustreren van de uitwerking van deze morfologische operatoren m.b.v. een voorbeeld.

<sup>13</sup>We beperken ons hier tot de *mededeling* dat de eigenschappen die gelden in het binaire geval overgedragen kunnen worden. De *bewijzen* vindt men echter niet allemaal terug in de literatuur en we geven ze ook hier niet expliciet. Verder in het proefschrift zal echter wel blijken dat er compatibiliteit geldt tussen de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering en een ganse klasse van vaagmorfologieën. De eigenschappen die gelden in het kader van deze klasse van vaagmorfologieën (we onderzoeken dezelfde eigenschappen als in het binaire geval; zie Hoofdstuk 5) zijn bijgevolg onmiddellijk overdraagbaar naar het klassieke model, zodat we ze hier niet nog eens afzonderlijk en expliciet aantonen.

<sup>14</sup>MSE = *mean square error* of *gemiddelde kwadratische fout*. We verwijzen naar Definitie 7.1 in Hoofdstuk 7 voor de definitie van deze foutmaat. In hetzelfde hoofdstuk wordt trouwens ook dieper ingegaan op de verschillende ruisstypes en hun karakteristieken.



Figuur 3.11: Gecontamineerde grijswaardebeelden; het originele beeld wordt weergegeven in Figuur 3.8. Links: beeld met 10% zout & peper ruis; rechts: beeld met gaussische ruis ( $\sigma = 18$ ).



Figuur 3.12: Bovenste rij: resultaat van de s-sluiting gevolgd door de s-opening (links) en de s-opening gevolgd door de s-sluiting (rechts) op het met zout & peper ruis gecontamineerde beeld uit Figuur 3.11; Onderste rij: resultaat van de s-sluiting gevolgd door de s-opening (links) en de s-opening gevolgd door de s-sluiting (rechts) op het met gaussische ruis gecontamineerde beeld uit Figuur 3.11.



	zout & peper ruis	gaussische ruis
origineel ruisbeeld	1994.76	585.98
s-sluiting & s-opening	521.15	688.47
s-opening & s-sluiting	491.08	657.81

Tabel 3.2: Evaluatie van de s-sluiting en s-opening als ruisonderdrukkingsfilters m.b.v. de MSE-waarden.

**Definitie 3.31** *Zij  $A$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  en zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . De s-morfologische gradiënt  $G_s^B$  is gedefinieerd als:*

$$G_s^B(A) = D_s(A, B) - E_s(A, B).$$

*Zij  $A$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  en zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , met  $\mathbf{0}$  in  $B$ . De externe s-morfologische gradiënt  $G_s^{B,e}$  is gedefinieerd als:*

$$G_s^{B,e}(A) = D_s(A, B) - A;$$

*de interne s-morfologische gradiënt  $G_s^{B,i}$  is gedefinieerd als:*

$$G_s^{B,i}(A) = A - E_s(A, B).$$

De s-morfologische gradiënten worden geïllustreerd in Figuur 3.13, telkens met  $B$  hetzelfde structuurelement als hoger. Net zoals in het binaire geval bevestigen de figuren de interpretatie van de s-morfologische gradiënten.

### 3.3 Klassieke grijswaardemorfologie van het tweede type: de umbrabenadering

De schijfjesbenadering hield in dat een grijswaardebeeld werd opgesplitst in zwakke snedeverzamelingen, dat op die snedeverzamelingen een binaire morfologische operator werd toegepast, en dat vervolgens de bekomen set van verzamelingen terug werd “samengevoegd” om zo het getransformeerde grijswaardebeeld te bekomen. In deze benadering moet het structuurelement een binair object zijn.

De klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering, die we in deze paragraaf bespreken, gaat uit van een geheel andere aanpak. Het is in dit geval ook niet vereist dat het structuurelement binair is, d.w.z. dat het structuurelement ook een grijswaardeobject kan zijn.

#### 3.3.1 Representatie van grijswaardebeelden

De representatie van grijswaardebeelden en dito structuurelementen zoals we die hoger gezien hebben, met name als  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen (cfr. Paragraaf 3.2.1), kan in de umbrabenadering niet overgenomen worden. De reden is dat het resultaat van sommige operatoren op  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen niet noodzakelijk terug  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen, maar bijvoorbeeld  $\mathbb{R}^n - [-1, 1]$  afbeeldingen zullen zijn. Hoewel men kan argumenteren dat een verschuiving en/of schaling van het grijswaardeninterval onmiddellijk terug de klassieke  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  representatie oplevert<sup>15</sup>, worden grijswaardebeelden in dit model initieel gemodelleerd als  $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}$  functies. Naar analogie met de representatie van grijswaardebeelden in het geval van de schijfjesbenadering stellen we bij afspraak echter  $A(x) = -\infty$  voor punten  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  waar het beeld  $\mathcal{A}$  (of de corresponderende afbeelding  $A$ )

<sup>15</sup>Merk op dat elke verschuiving en/of schaling van het grijswaardeninterval geïnterpreteerd kan worden als een herdefiniëring van de relatie tussen grijstinten enerzijds en corresponderende grijswaarden anderzijds. Het is echter niet aangewezen om de definities van de operatoren telkenmale te gaan manipuleren zodanig dat we steeds  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  functies bekomen.



Figuur 3.13: Bovenste rij: origineel grijswaardebeeld  $A$  (links) en het resultaat van de s-morfologische gradiënt  $G_s^B(A)$  (rechts). Onderste rij: resultaat van de externe s-morfologische gradiënt  $G_s^{B,e}(A)$  (links) en de interne s-morfologische gradiënt  $G_s^{B,i}(A)$  (rechts).

oorspronkelijk niet bepaald is. Op die manier kunnen we  $n$ -dimensionale grijswaardebeelden algemeen modelleren als  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeeldingen; de klasse der  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeeldingen noteren we als  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ .

### Enkele noties

**Definitie 3.32** *Zij  $F$  een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding. De drager  $d_F$  van  $F$  wordt gedefinieerd als:*

$$d_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > -\infty\}.$$

Hoewel we de noties nog niet in dit hoofdstuk zullen gebruiken, definiëren we nu reeds zwakke en sterke snedeverzamelingen van een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding. De definities zijn veralgemeningen van de corresponderende definities voor vaagverzamelingen (zie Definities 1.7 en 1.8).

**Definitie 3.33** *Zij  $F$  een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding, en zij  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ . De zwakke snedeverzameling  $F_\alpha$  van  $F$  is gedefinieerd als:*

$$F_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \geq \alpha\}.$$

*De sterke snedeverzameling  $F_{\overline{\alpha}}$  van  $F$  is gedefinieerd als:*

$$F_{\overline{\alpha}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > \alpha\}.$$

Het complement van een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding wordt als volgt gedefinieerd; bemerk het verschil met Definitie 3.22 die we hoger gaven in de context van de schijfjesbenadering.

**Definitie 3.34** *Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Het complement  $co F$  van  $F$  wordt gedefinieerd door:*

$$(co F)(x) = -F(x),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Tenslotte definiëren we de reflectie van een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding. De definitie is analoog aan deze voor  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen; cfr. Definitie 3.19.

**Definitie 3.35** *Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . De reflectie  $-F$  van  $F$  is gedefinieerd door:*

$$(-F)(x) = F(-x),$$

voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.3.2 u-Morfologische basisoperatoren

In de umbrabenadering spelen de noties *umbra* en *top-oppervlak* een belangrijke rol. Ze stellen ons namelijk in staat om de binaire morfologische basisoperatoren op een eenvoudige en visueel aanschouwelijke manier uit te breiden naar operatoren die inwerken op grijswaardebeelden, met behulp van grijswaarde structurelementen.

#### Umbras en top-oppervlakken

De uitbreiding is gebaseerd op het feit dat de punten onder en boven de grafiek van een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding niets anders dan een scherpe deelverzameling van  $\mathbb{R}^{n+1}$  vormen. Dergelijke deelverzamelingen noemt men umbras of duale umbras<sup>16</sup>, en op deze umbras kunnen de binaire morfologische operatoren worden toegepast. Op het bekomen resultaat, terug een scherpe deelverzameling van  $\mathbb{R}^{n+1}$ , past men dan een soort van inverse bewerking toe - met name het top-oppervlak - om zo wederom een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding te bekomen. We beschrijven deze noties nu formeel.

<sup>16</sup>In het Engels heeft *umbra* de betekenis van *schaduw*; de herkomst van de benaming van het wiskundig concept "umbra" is dan ook voor de hand liggend als men het zich visueel voorstelt.

**Definitie 3.36** [29] Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  met drager  $d_F$ . De umbra  $U[F]$  van  $F$  is een deelverzameling van  $\mathbb{R}^{n+1}$  gedefinieerd als:

$$U[F] = \{(x, r) \in d_F \times \mathbb{R} \mid r \leq F(x)\}.$$

De duale umbra  $U_d[F]$  van  $F$  is gedefinieerd als:

$$U_d[F] = \{(x, r) \in d_F \times \mathbb{R} \mid r \geq F(x)\}.$$

**Definitie 3.37** [29] Zij  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  en zij  $d_G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists r \in \mathbb{R})((x, r) \in G)\}$ . Het topoppervlak<sup>17</sup>  $T[G]$  van  $G$  is de  $d_G - \mathbb{R}$  functie gedefinieerd door:

$$T[G](x) = \sup \{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in G\},$$

voor alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Men kan het topoppervlak  $T[G]$  ook definiëren als

$$T[G](x) = \sup xG,$$

voor alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , met  $xG = \{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in G\}$  de  $G$ -naverzameling van  $x$ . Dit begrip is analoog aan het begrip van  $R$ -naverzameling zoals bepaald in Definitie 2.4, waarbij we nu  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  identificeren als een relatie van  $\mathbb{R}^n$  naar  $\mathbb{R}$ .

Het begrip umbra kan ook algemener gedefinieerd worden. Men kan nagaan dat de umbra van een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding, zoals hoger ingevoerd, beantwoordt aan de algemenere definitie van umbra.

**Definitie 3.38** [29] Zij  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Men noemt  $G$  een umbra als en slechts als:

$$(x, r) \in G \Rightarrow (\forall t \leq r)((x, t) \in G),$$

voor alle  $(x, r)$  in  $G$ .

De relatie tussen de noties topoppervlak en umbra wordt verduidelijkt in de volgende eigenschap.

**Eigenschap 3.18** [29]

- (i) Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:  $T[U[F]] = F$ .
- (ii) Zij  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , dan geldt:  $G \subseteq U[T[G]]$ .
- (iii) Zij  $G$  een umbra in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dan geldt:  $G = U[T[G]]$ .

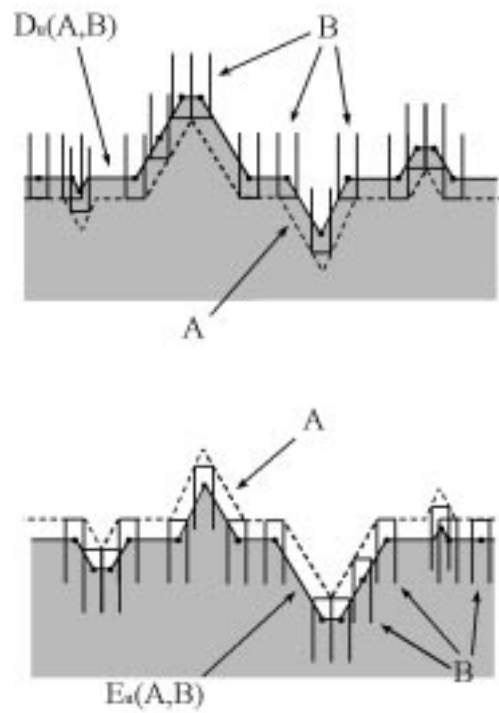
In het algemeen zijn de  $\mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  operatie “topoppervlak” en de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}) - \mathbb{R}^{n+1}$  operatie “umbra” dus niet elkaars inverse. Het nemen van het topoppervlak maakt de umbra-bewerking op een  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeelding wel steeds ongedaan, maar het omgekeerde geldt enkel onder een supplementaire voorwaarde.

### De u-morfologische basisoperatoren

Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Met enig geometrisch inzichtsvormogen komt men tot de volgende constructiemethode voor de dilatatie en de erosie. In Figuur 3.14 wordt deze constructie geïllustreerd.

- De u-erosie  $E_u(A, B)$  wordt bekomen door eerst de binaire erosie toe te passen op de umbra  $U[A]$  van het beeld  $A$  met behulp van de umbra  $U[B]$  van het structurelement  $B$ , en vervolgens het topoppervlak van het bekomen resultaat te nemen. Formeel:

<sup>17</sup>Engelstalig: *top surface*.



Figuur 3.14: Constructie van de u-dilatatie (boven) en de u-erosie (onder). Omwille van de aanschouwelijkheid werd gekozen voor het 1-dimensionale geval, d.w.z.  $n = 1$ .

$$E_u(A, B) = T[E(U[A], U[B])].$$

Indien  $A$  en  $B$  twee  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  functies zijn, dan verifieert men dat  $E_u(A, B)$  een  $\mathbb{R}^n - [-1, 1]$  functie is.

- De  $u$ -dilatatie  $D_u(A, B)$  wordt bekomen door eerst de binaire dilatatie toe te passen op de umbra  $U[A]$  van het beeld  $A$ . Men ziet geometrisch echter onmiddellijk in dat men in dit geval de duale umbra van het complement van het structuurelement  $B$  moet nemen, om een zinvolle uitbreiding te bekomen<sup>18</sup>. Vervolgens neemt men ook hier het top-oppervlak van het bekomen resultaat. Formeel:

$$D_u(A, B) = T[D(U[A], U_d[co B])].$$

Indien  $A$  en  $B$  twee  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  functies zijn, dan verifieert men dat  $D_u(A, B)$  een  $\mathbb{R}^n - [0, 2]$  functie is.

Deze constructie leidt tot de volgende expliciete formules.

**Definitie 3.39** [29] Zij  $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . De  $u$ -morfologische dilatatie of  $u$ -dilatatie  $D_u(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$D_u(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} [A(x) + B(x - y)],$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De  $u$ -morfologische erosie of  $u$ -erosie  $E_u(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$E_u(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} [A(x) - B(x - y)],$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Merk op dat het supremum en het infimum in principe genomen mogen worden over alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ . Men verifieert immers makkelijk dat andere dan de gespecificeerde  $x$ -waarden geen invloed hebben op de berekening van respectievelijk het supremum en infimum<sup>19</sup>.

Het filterend effect van de  $u$ -dilatatie en  $u$ -erosie is analoog aan dat van respectievelijk de  $s$ -dilatatie en  $s$ -erosie. Het uiteindelijke resultaat van de  $u$ -morfologische operatoren is nu wel sterker afhankelijk van de keuze van het grijswaarde structuurelement. In het bijzonder zal de niet-binaire aard van het structuurelement er mede voor kunnen zorgen dat het blokjes-effect, dat op natuurlijke wijze optrad bij het toepassen van de  $s$ -morfologische operatoren, minder prominent aanwezig is.

De  $u$ -dilatatie en  $u$ -erosie worden geïllustreerd in Figuur 3.15. Het corresponderende grijswaarde structuurelement  $B$  wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.86 & 0.86 \\ 0.86 & \underline{1.00} & 0.86 \\ 0.86 & 0.86 & 0.86 \end{pmatrix}.$$

<sup>18</sup>In [29] wordt de  $u$ -dilatatie gedefinieerd als

$$D_u(A, B) = T[D(U[A], U[B])],$$

en wordt dus geen gebruik gemaakt van complementen of duale umbras. Meetkundig komt onze beschrijving echter overeen met deze gegeven in het geciteerde artikel [29]. Het verschil is te wijten aan het feit dat men in [29] een andere definitie voor de binaire dilatatie gebruikt. Wat men daar als de dilatatie van  $A$  door  $B$  beschouwt komt in dit proefschrift overeen met de dilatatie van  $A$  door  $-B$ ; zie ook Tabel 3.1.2.

<sup>19</sup>Een analoge oefening zullen we wel expliciet maken in het kader van de vaagmorfologische dilatatie en erosie; cfr. Hoofdstuk 4, Definities 4.1 en 4.2.



Figuur 3.15: De u-dilatatie  $D_u(A, B)$  (links) en de u-erosie  $E_u(A, B)$  (rechts). Het originele grijswaardebeeld  $A$  wordt weergegeven in Figuur 3.8.

**Definitie 3.40** Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . De u-morfologische sluiting of u-sluiting  $S_u(A, B)$  en de u-morfologische opening of u-opening  $O_u(A, B)$  zijn gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} S_u(A, B) &= E_u(D_u(A, B), -B), \\ O_u(A, B) &= D_u(E_u(A, B), -B). \end{aligned}$$

Er geldt  $S_u(A, B), O_u(A, B) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ .

Na wat rekenwerk bekomt men volgende expliciete uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} S_u(A, B)(y) &= \inf_{z \in T_y(-d_B)} \left( \sup_{x \in T_z(d_B)} (A(x) + B(x - z)) - B(y - z) \right), \\ O_u(A, B)(y) &= \sup_{z \in T_y(-d_B)} \left( \inf_{x \in T_z(d_B)} (A(x) - B(x - z)) + B(y - z) \right), \end{aligned}$$

voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De u-morfologische sluiting en opening worden geïllustreerd in Figuur 3.16. Ook hier is het typisch gedrag in grote mate analoog als bij de s-morfologische operatoren.



Figuur 3.16: De u-sluiting  $S_u(A, B)$  (links) en de u-opening  $O_u(A, B)$  (rechts). Het originele grijswaardebeeld  $A$  wordt weergegeven in Figuur 3.8; het grijswaarde structuurelement is hetzelfde als hoger.

### 3.3.3 Eigenschappen van de u-morfologische basisoperatoren

Een uitgebreide studie van de eigenschappen van de u-morfologische basisoperatoren hebben we in de literatuur niet teruggevonden; in [29] wordt bijvoorbeeld slechts een beperkt aantal eigenschappen besproken in vergelijking met het overzicht dat we gaven in Paragraaf 3.1.3. Waar nodig, zullen we de eigenschappen dus zelf aantonen<sup>20</sup>.

Sommige eigenschappen van de u-morfologische operatoren kunnen gemakkelijk afgeleid worden uit de eigenschappen van de binaire morfologische operatoren enerzijds, en eigenschappen van umbras en top-oppervlakken anderzijds. Ten behoeve van de lezer sommen we verder in deze paragraaf de benodigde eigenschappen van de laatste categorie op. Eerst geven we de relevante definities.

#### Relevante definities

De definities die in Paragraaf 3.2.3 gegeven werden voor  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen kunnen onmiddellijk overgenomen worden voor  $\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}}$  afbeeldingen, met uitzondering van de definitie voor het complement (vergelijk Definitie 3.22 in de schijfjesbenadering met Definitie 3.34 in de umbrabenadering).

We vullen dit lijstje aan met enkele definities m.b.t. umbras. We geven ze expliciet, hoewel het in principe bijzondere instanties zijn van de definities die gegeven werden in het kader van de binaire morfologie; umbras zijn immers klassieke deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definitie 3.41** *Zij  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , en zij  $(v, t)$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . De translatie  $T_{v,t}(G)$  van  $G$  over de vector  $(v, t)$  is gedefinieerd door:*

$$T_{v,t}(G) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x - v, r - t) \in G\}.$$

**Definitie 3.42** *Zij  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , en zij  $\lambda, \gamma > 0$ . De schaling  $H_{\lambda,\gamma}(G)$  van  $G$  is gedefinieerd door:*

$$H_{\lambda,\gamma}(G) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\gamma}r) \in G\}$$

#### Dualiteit

Aangaande dualiteit biedt een rechtstreeks bewijs onmiddellijk uitsluitel.

**Eigenschap 3.19** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:*

$$\begin{array}{ll} D_u(A, B) = co E_u(co A, B) & S_u(A, B) = co O_u(co A, B) \\ E_u(A, B) = co D_u(co A, B) & O_u(A, B) = co S_u(co A, B). \end{array}$$

BEWIJS. We tonen aan dat  $D_u(A, B) = co E_u(co A, B)$ . Zij  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned} co E_u(co A, B)(y) &= -E_u(co A, B)(y) \\ &= -\inf_{x \in T_y d_B} [co A(x) - B(x - y)] \\ &= -\inf_{x \in T_y d_B} [-A(x) - B(x - y)] \\ &= \sup_{x \in T_y d_B} [A(x) + B(x - y)] \\ &= D_u(A, B)(y). \end{aligned}$$

Het bewijs voor  $E_u(A, B) = co D_u(co A, B)$  verloopt analogo; de dualiteitseigenschappen van de s-sluiting en s-opening volgen onmiddellijk uit deze van de s-dilatatie en s-erosie.  $\square$

<sup>20</sup>Hier kunnen we ons, zoals dit wel het geval was voor de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering, niet beroepen op enige compatibiliteit met (een bepaalde klasse van) vaagmorfologieën; cfr. Hoofdstuk 4. Het zelf geven van een bewijs is dus soms noodzakelijk.



### Monotoniteit

De volgende eigenschap beschrijft het monotoniteitsgedrag van de top-oppervlak en umbra operaties. Beide blijken stijgende operaties te zijn.

**Eigenschap 3.20** [29] (i) Zij  $F_1, F_2$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} F_1 \subseteq F_2 &\Leftrightarrow U[F_1] \subseteq U[F_2], \\ F_1 \subseteq F_2 &\Leftrightarrow U_d[F_1] \supseteq U_d[F_2]. \end{aligned}$$

(ii) Zij  $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Er geldt:

$$G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow T[G_1] \subseteq T[G_2].$$

Indien  $G_1$  en  $G_2$  umbras zijn, dan geldt:

$$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow T[G_1] \subseteq T[G_2].$$

Uit deze eigenschap volgt dat de monotoniteitseigenschappen uit Eigenschap 3.2 voor binaire morfologische basisoperatoren overdraagbaar zijn naar de u-morfologische basisoperatoren.

### Interactie met unie en doorsnede

Wat de interactie met unie en doorsnede betreft kunnen we onmiddellijk een aantal inclusie-eigenschappen afleiden, door gebruik te maken van de monotoniteitseigenschappen.

**Eigenschap 3.21** Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  en zij  $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$  families in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:

$D_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} D_u(A_i, B)$	$D_u(A, \bigcup_{i \in I} B_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} D_u(A, B_i)$
$E_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} E_u(A_i, B)$	$E_u(A, \bigcup_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} E_u(A, B_i)$
$S_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} S_u(A_i, B)$	$O_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} O_u(A_i, B)$

BEWIJS. We tonen enkel  $D_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} D_u(A_i, B)$  aan; de overige bewijzen verlopen volledig analoog.

Er geldt dat  $(\forall j \in I)(A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i)$ . Wegens het stijgend zijn van de eerste partiële afbeelding van de u-dilatatie volgt dat

$$(\forall j \in I)(D_u(A_j, B) \subseteq D_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B)).$$

Bijgevolg is ook  $\bigcup_{i \in I} D_u(A_i, B) \subseteq D_u(\bigcup_{i \in I} A_i, B)$ . □

**Eigenschap 3.22** Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  en zij  $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$  families in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:

$D_u(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} D_u(A_i, B)$	$D_u(A, \bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} D_u(A, B_i)$
$E_u(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} E_u(A_i, B)$	$E_u(A, \bigcap_{i \in I} B_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} E_u(A, B_i)$
$S_u(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} S_u(A_i, B)$	$O_u(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} O_u(A_i, B)$

BEWIJS. Analoog als voor Eigenschap 3.21.  $\square$

In het binaire geval zijn echter een aantal gelijkheden geldig, en vanzelfsprekend wensen we te onderzoeken of deze in het geval van de grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenedering behouden blijven.

In eerste instantie kunnen we trachten om de interactie van de u-morfologische operatoren met unie en doorsnede af te leiden uit de interactie van de binaire morfologische operatoren met unie en doorsnede enerzijds (cfr. Eigenschappen 3.3 en 3.4), en de interactie van de umbra en topoppervlak operaties anderzijds. Deze laatste tonen we nu aan.

**Eigenschap 3.23** *Zij  $(F_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} U\left[\bigcup_{i \in I} F_i\right] &\supseteq \bigcup_{i \in I} U[F_i], \\ U\left[\bigcap_{i \in I} F_i\right] &= \bigcap_{i \in I} U[F_i], \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} U_d\left[\bigcup_{i \in I} F_i\right] &= \bigcap_{i \in I} U_d[F_i], \\ U_d\left[\bigcap_{i \in I} F_i\right] &\supseteq \bigcup_{i \in I} U_d[F_i]. \end{aligned}$$

Indien  $(F_i)_{i=1}^k$  een eindige familie in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  is, dan geldt:

$$\begin{aligned} U\left[\bigcup_{i=1}^k F_i\right] &= \bigcup_{i=1}^k U[F_i], \\ U_d\left[\bigcap_{i=1}^k F_i\right] &= \bigcup_{i=1}^k U_d[F_i]. \end{aligned}$$

BEWIJS. (i) Interactie van umbra met unie:

$$\begin{aligned} (x, r) \in \bigcup_{i \in I} U[F_i] &\Leftrightarrow (\exists i \in I)((x, r) \in U[F_i]) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(r \leq F_i(x)) \\ &\Rightarrow r \leq \sup_{i \in I} F_i(x) \\ &\Leftrightarrow r \leq \left(\bigcup_{i \in I} F_i\right)(x) \\ &\Leftrightarrow (x, r) \in U\left[\bigcup_{i \in I} F_i\right]. \end{aligned}$$

De derde overgang is niet geldig in de omgekeerde richting. Stel bijvoorbeeld dat  $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  en dat  $F_i(x) = 1 - \frac{1}{i}$  voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , dan is

$$1 \leq \sup_{i \in I} F_i(x)$$

maar er bestaat geen enkele  $i$  in  $I$  waarvoor  $1 \leq F_i(x)$ . Men ziet wel in dat de overgang, en bijgevolg de gelijkheid, wel geldig is indien de  $F_i$ 's een eindige familie zijn.

(ii) Interactie van umbra met doorsnede:

$$(x, r) \in \bigcap_{i \in I} U[F_i] \Leftrightarrow (\forall i \in I)((x, r) \in U[F_i])$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall i \in I)(r \leq F_i(x)) \\
&\Leftrightarrow r \leq \inf_{i \in I} F_i(x) \\
&\Leftrightarrow r \leq \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) (x) \\
&\Leftrightarrow (x, r) \in U \left[ \bigcap_{i \in I} F_i \right].
\end{aligned}$$

(iii) Interactie van duale umbra met unie:

$$\begin{aligned}
(x, r) \in U_d \left[ \bigcup_{i \in I} F_i \right] &\Leftrightarrow r \geq \bigcup_{i \in I} F_i(x) \\
&\Leftrightarrow r \geq \sup_{i \in I} F_i(x) \\
&\Leftrightarrow (\forall i \in I)(r \geq F_i(x)) \\
&\Leftrightarrow (\forall i \in I)((x, r) \in U_d[F_i]) \\
&\Leftrightarrow (x, r) \in \bigcap_{i \in I} U_d[F_i].
\end{aligned}$$

(iv) Interactie van duale umbra met doorsnede:

$$\begin{aligned}
(x, r) \in U_d \left[ \bigcap_{i \in I} F_i \right] &\Leftrightarrow r \geq \bigcap_{i \in I} F_i(x) \\
&\Leftrightarrow r \geq \inf_{i \in I} F_i(x) \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in I)(r \geq F_i(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in I)((x, r) \in U_d[F_i]) \\
&\Leftrightarrow (x, r) \in \bigcup_{i \in I} U_d[F_i].
\end{aligned}$$

Dat de derde overgang niet in omgekeerde richting geldt kan met een analoog voorbeeld aangetoond worden als in (i). Indien het een eindige familie van  $F_i$ 's betreft geldt de overgang, en bijgevolg ook de gelijkheid.  $\square$

**Lemma 3.1** Zij  $(V_i)_{i \in I}$  een familie van deelverzamelingen in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$$\begin{aligned}
\sup \left( \bigcup_{i \in I} V_i \right) &= \sup \sup V_i, \\
\sup \left( \bigcap_{i \in I} V_i \right) &\leq \inf \sup V_i.
\end{aligned}$$

BEWIJS. (i) Uit  $(\forall j \in I)(V_j \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i)$  volgt dat

$$(\forall j \in I)(\sup V_j \leq \sup \bigcup_{i \in I} V_i).$$

Bijgevolg is  $\sup \bigcup_{i \in I} V_i$  een bovengrens voor alle  $\sup V_j$ , zodat:

$$\sup \bigcup_{i \in I} V_i \geq \sup \sup V_i.$$

Omgekeerd, stel  $a = \sup_{i \in I} \sup V_i$ , dan hebben we:

$$\begin{aligned} & (\forall i \in I)(\sup V_i \leq a) \\ \Rightarrow & (\forall i \in I)(\forall x \in V_i)(x \leq a) \\ \Rightarrow & (\forall x \in \bigcup_{i \in I} V_i)(x \leq a). \end{aligned}$$

Bijgevolg is  $a$  een bovengrens voor alle  $x$  uit  $\bigcup_{i \in I} V_i$ , en dus is  $a \geq \sup_{i \in I} \bigcup_{i \in I} V_i$ . Gelet op onze definitie van  $a$  besluiten we dus dat

$$\sup_{i \in I} \bigcup_{i \in I} V_i \leq \sup_{i \in I} \sup V_i.$$

Uit beide ongelijkheden volgt de gelijkheid.

(ii) Uit  $(\forall j \in I)(\bigcap_{i \in I} V_i \subseteq V_j)$  volgt dat

$$(\forall j \in I)(\sup \bigcap_{i \in I} V_i \leq \sup V_j).$$

Bijgevolg is  $\sup \bigcap_{i \in I} V_i$  een ondergrens voor alle  $\sup V_j$ , zodat:

$$\sup \bigcap_{i \in I} V_i \leq \inf_{i \in I} \sup V_i.$$

De omgekeerde ongelijkheid is in dit geval niet geldig. We illustreren dit met een voorbeeld: stel

$$V_i = [0, 1] \cup ]i, i + 1[$$

voor alle  $i$  in  $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Enerzijds hebben we dat  $\bigcap_{i \in I} V_i = [0, 1]$ , en dus dat

$$\sup \bigcap_{i \in I} V_i = 1.$$

Anderzijds is  $(\forall i \in I)(\sup V_i = i + 1)$ , zodat

$$\inf_{i \in I} \sup V_i = \inf \{2, 3, \dots\} = 2.$$

Bijgevolg is  $\sup \bigcap_{i \in I} V_i < \inf_{i \in I} \sup V_i$ . □

We beschouwen een bijzonder geval m.b.t. de tweede formule uit Lemma 3.1. We tonen met name aan dat de gelijkheid wel geldt indien de  $V_i$  een bepaalde gedaante hebben; hierbij beperken we ons tot deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 3.2** *Zij  $(V_i)_{i \in I}$  een familie van deelverzamelingen in  $\mathbb{R}$ , zo dat*

$$(\forall i \in I)(\exists v_i \in \mathbb{R})(V_i = ] - \infty, v_i] \vee V_i = ] - \infty, v_i[).$$

*Er geldt:*

$$\sup \left( \bigcap_{i \in I} V_i \right) = \inf_{i \in I} \sup V_i.$$

BEWIJS. Indien de  $V_i$ 's van de vooropgestelde gedaante zijn, dan is

$$\sup \left( \bigcap_{i \in I} V_i \right) = \inf_{i \in I} v_i.$$

Anderzijds geldt  $(\forall i \in I)(\sup V_i = v_i)$ , zo dat

$$\inf_{i \in I} \sup V_i = \inf_{i \in I} v_i.$$

Dit bewijst het gestelde.  $\square$

**Eigenschap 3.24** *Zij  $(G_i)_{i \in I}$  een familie van deelverzamelingen in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} T\left[\bigcup_{i \in I} G_i\right] &= \bigcup_{i \in I} T[G_i], \\ T\left[\bigcap_{i \in I} G_i\right] &\subseteq \bigcap_{i \in I} T[G_i]. \end{aligned}$$

*Indien  $(G_i)_{i \in I}$  een familie van umbras is in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dan geldt:*

$$T\left[\bigcap_{i \in I} G_i\right] = \bigcap_{i \in I} T[G_i].$$

BEWIJS. (i) Interactie van top-oppervlak met unie: voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  volgt:

$$T\left[\bigcup_{i \in I} G_i\right](x) = \sup x \left( \bigcup_{i \in I} G_i \right) \quad (3.1)$$

$$= \sup \bigcup_{i \in I} (xG_i) \quad (3.2)$$

$$= \sup \sup_{i \in I} xG_i \quad (3.3)$$

$$= \sup_{i \in I} T[G_i](x) \quad (3.4)$$

$$= \bigcup_{i \in I} T[G_i](x).$$

Toelichting: (3.1) en (3.4) wegens de representatie van top-oppervlak als naverzameling; (3.2) wegens de calculus van naverzamelingen; en (3.3) wegens Lemma 3.1.

(ii) Interactie van top-oppervlak met doorsnede: voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  volgt:

$$\begin{aligned} T\left[\bigcap_{i \in I} G_i\right](x) &= \sup x \left( \bigcap_{i \in I} G_i \right) \\ &= \sup \bigcap_{i \in I} (xG_i) \\ &\leq \inf_{i \in I} \sup xG_i \\ &= \inf_{i \in I} T[G_i](x) \\ &= \bigcap_{i \in I} T[G_i](x), \end{aligned} \quad (3.5)$$

waarbij we voor (3.5) gebruik hebben gemaakt van Lemma 3.1.

Indien  $G_i$  echter een umbra is, dan wordt de verzameling  $xG_i = \{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in G_i\}$  gegeven door  $] - \infty, T[G_i](x)[$  of  $] - \infty, T[G_i](x)[$ . Zijn alle  $G_i$ 's umbras, dan is bijgevolg voldaan aan de voorwaarde uit Lemma 3.2, en kunnen we in de bovenstaande afleiding een gelijkheid schrijven daar waar nu een ongelijkheid voorkomt.  $\square$

Tenslotte dienen we ook te weten hoe de interactie van het complement met unie en doorsnede is.

**Eigenschap 3.25** Zij  $(F_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} \text{co} \bigcup_{i \in I} F_i &= \bigcap_{i \in I} \text{co} F_i, \\ \text{co} \bigcap_{i \in I} F_i &= \bigcup_{i \in I} \text{co} F_i. \end{aligned}$$

BEWIJS. (i) Interactie van complement met unie: voor  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  volgt:

$$\begin{aligned} \text{co} \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right) (x) &= - \bigcup_{i \in I} F_i(x) \\ &= - \sup_{i \in I} F_i(x) \\ &= \inf_{i \in I} (-F_i(x)) \\ &= \inf_{i \in I} (\text{co} F_i)(x) \\ &= \bigcap_{i \in I} (\text{co} F_i)(x) \end{aligned}$$

(ii) Interactie van complement met doorsnede: analoog bewijs.  $\square$

We beschikken nu over voldoende resultaten om de interactie van de u-morfologische basisoperatoren met unie en doorsnede te onderzoeken m.b.v. umbras en top-oppervlakken, ons uiteraard beperkend tot de vier gevallen waarvoor in het binaire geval een gelijkheid geldt. Wat blijkt echter: slechts in één van deze vier gevallen kunnen we m.b.v. bovenstaande eigenschappen een gelijkheid aantonen.

**Eigenschap 3.26** Zij  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  en zij  $B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:

$$\boxed{E_u \left( \bigcap_{i \in I} A_i, B \right) = \bigcap_{i \in I} E_u(A_i, B)}$$

BEWIJS. Steunend op de Eigenschappen 3.4, 3.23 en 3.24 volgt:

$$E_u \left( \bigcap_{i \in I} A_i, B \right) = T \left[ E \left( U \left[ \bigcap_{i \in I} A_i \right], U[B] \right) \right] \quad (3.6)$$

$$= T \left[ E \left( \bigcap_{i \in I} U[A_i], U[B] \right) \right] \quad (3.7)$$

$$= T \left[ \bigcap_{i \in I} E(U[A_i], U[B]) \right] \quad (3.8)$$

$$= \bigcap_{i \in I} T[E(U[A_i], U[B])] \quad (3.9)$$

$$= \bigcap_{i \in I} E_u(A_i, B) \quad (3.10)$$

Toelichting: (3.6) en (3.10) wegens definitie van  $E_u$ ; (3.7) wegens Eigenschap 3.23; (3.8) wegens Eigenschap 3.4; en (3.9) wegens Eigenschap 3.24. Hierbij maken we gebruik van het feit dat de erosie van een umbra m.b.v. een umbra terug een umbra is; cfr. [29].  $\square$

In de andere drie gevallen moeten we telkenmale gebruik maken van de inclusies i.p.v. van de gelijkheden uit de bovenstaande eigenschappen, en zijn we bijgevolg niks wijzer in vergelijking met Eigenschap 3.21.

We volhardden echter<sup>21</sup>, en bewandelen een derde pad om de interactie te onderzoeken: we kunnen namelijk ook een rechtstreeks bewijs trachten te geven, vertrekkende van de uitdrukkingen gegeven in Definitie 3.39. En deze keer met succes: in één geval is het bewijs zeer kort, de twee andere gevallen vergen een iets langer bewijs.

**Eigenschap 3.27** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$  en zij  $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$  aftelbare families in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ . Er geldt:*

$$\boxed{\begin{aligned} D_u\left(\bigcup_{i \in I} A_i, B\right) &= \bigcup_{i \in I} D_u(A_i, B), \\ D_u\left(A, \bigcup_{i \in I} B_i\right) &= \bigcup_{i \in I} D_u(A, B_i), \\ E_u\left(A, \bigcup_{i \in I} B_i\right) &= \bigcap_{i \in I} E_u(A, B_i). \end{aligned}}$$

BEWIJS. (i) Voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  geldt:

$$\begin{aligned} D_u\left(\bigcup_{i \in I} A_i, B\right)(y) &= \sup_{x \in T_y(d_B)} \left( \bigcup_{i \in I} A_i(x) + B(x - y) \right) \\ &= \sup_{x \in T_y(d_B)} \left( \sup_{i \in I} [A_i(x) + B(x - y)] \right) \\ &= \sup_{i \in I} \left( \sup_{x \in T_y(d_B)} [A_i(x) + B(x - y)] \right) \\ &= \sup_{i \in I} D_u(A_i, B) \\ &= \bigcup_{i \in I} D_u(A_i, B) \end{aligned}$$

(ii) Voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  geldt:

$$\begin{aligned} D_u\left(A, \bigcup_{i \in I} B_i\right)(y) &= \sup_{x \in T_y(d_{\cup_{i \in I} B_i})} \left( A(x) + \bigcup_{i \in I} B_i(x - y) \right) \\ &= \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} \left( A(x) + \sup_{i \in I} B_i(x - y) \right) \\ &= \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} \sup_{i \in I} (A(x) + B_i(x - y)) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_i(x - y)] \end{aligned} \tag{3.11}$$

In deze fase van het bewijs mag men niet de fout maken om  $\sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_i(x - y)]$  gelijk te stellen aan  $D_u(A, B_i)$ ; het supremum wordt immers niet over  $T_y(d_{B_i})$  maar over  $\cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})$  genomen. We moeten dit supremum bijgevolg op een zinvolle manier trachten op te splitsen.

Laten we voor de eenvoud stellen dat  $I = \{1, 2, \dots\}$ . Voor  $i = 1$  geldt:

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_1(x - y)] \\ &= \sup \left\{ \sup_{x \in T_y(d_{B_1})} [A(x) + B_1(x - y)], \right. \\ &\quad \sup_{x \in T_y(d_{B_2}) \setminus T_y(d_{B_1})} [A(x) + B_1(x - y)], \dots, \\ &\quad \left. \sup_{x \in T_y(d_{B_j}) \setminus T_y(d_{B_1})} [A(x) + B_1(x - y)], \dots \right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

<sup>21</sup> Wegens gebrek aan tegenvoorbeelden.

Voor het eerste element in deze verzameling geldt:

$$\sup_{x \in T_y(d_{B_1})} [A(x) + B_1(x - y)] = D_u(A, B_1). \quad (3.13)$$

Hiervoor geldt ook dat:

$$\sup_{x \in T_y(d_{B_1})} [A(x) + B_1(x - y)] \geq \sup_{x \in T_y(d_{B_1})} A(x) \geq \sup_{x \in T_y(d_{B_1}) \setminus T_y(d_{B_j})} A(x) \quad (3.14)$$

voor alle  $j \neq 1$ . Voor de andere elementen in de verzameling geldt:

$$\sup_{x \in T_y(d_{B_j}) \setminus T_y(d_{B_1})} [A(x) + B_1(x - y)] = \sup_{x \in T_y(d_{B_j}) \setminus T_y(d_{B_1})} A(x) \quad (3.15)$$

voor alle  $j \neq 1$ , aangezien bij afspraak  $B_1(x - y) = -\infty$  voor  $x \notin T_y(d_{B_1})$ .

De bovenstaande redenering kan gemaakt worden voor elke  $i$  in  $I$ . Uitdrukking (3.11) kan dan herschreven worden als:

$$\begin{aligned} D_u(A, \bigcup_{i \in I} B_i)(y) &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_i(x - y)] \\ &= \sup \left\{ \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_1(x - y)], \right. \\ &\quad \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_2(x - y)], \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \sup_{x \in \cup_{i \in I} T_y(d_{B_i})} [A(x) + B_j(x - y)], \right. \\ &\quad \left. \dots \right\} \end{aligned}$$

Gelet op (3.12), (3.13) en (3.15) krijgen we:

$$\begin{aligned} D_u(A, \bigcup_{i \in I} B_i)(y) &= \sup \left\{ D_u(A, B_1)(y), \sup_{x \in T_y(d_{B_2}) \setminus T_y(d_{B_1})} A(x), \dots, \right. \\ &\quad D_u(A, B_2)(y), \sup_{x \in T_y(d_{B_1}) \setminus T_y(d_{B_2})} A(x), \dots, \\ &\quad \dots, \\ &\quad D_u(A, B_j)(y), \sup_{x \in T_y(d_{B_1}) \setminus T_y(d_{B_j})} A(x), \dots, \\ &\quad \left. \dots \right\} \end{aligned}$$

De resterende suprema verdwijnen echter allemaal. Immers, de suprema van de vorm

$$\sup_{x \in T_y(d_{B_1}) \setminus T_y(d_{B_j})} A(x)$$

voldoen wegens (3.14) aan

$$\sup_{x \in T_y(d_{B_1}) \setminus T_y(d_{B_j})} A(x) \leq D_u(A, B_1)(y),$$

en bijgevolg is:

$$\begin{aligned} D_u(A, \bigcup_{i \in I} B_i)(y) &= \sup \{ D_u(A, B_1)(y), D_u(A, B_2)(y), \dots, D_u(A, B_j)(y), \dots \} \\ &= \sup_{i \in I} D_u(A, B_i)(y) \\ &= \bigcup_{i \in I} D_u(A, B_i)(y). \end{aligned}$$

Dit bewijst het gestelde.

(iii) Analoog als in (ii). □



**Invariantie onder translatie en schaling**

**Eigenschap 3.28** *Zij  $F$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}})$ , en zij  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ .*

(i) *Zij  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} T_v(T[G]) &= T[T_{v,0}(G)], \\ U[T_v(F)] &= T_{v,0}(U[F]), \\ U_d[T_v(F)] &= T_{v,0}(U_d[F]). \end{aligned}$$

(ii) *Zij  $\lambda > 0$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} H_\lambda(T[G]) &= T[H_{\lambda,1}(G)], \\ U[H_\lambda(F)] &= H_{\lambda,1}(U[F]), \\ U_d[H_\lambda(F)] &= H_{\lambda,1}(U_d[F]). \end{aligned}$$

BEWIJS. We tonen als voorbeeld aan dat  $T_v(T[G]) = T[T_{v,0}(G)]$  en  $U[H_\lambda(F)] = H_{\lambda,1}(U[F])$ :

$$\begin{aligned} T_v(T[G])(x) &= T[G](x - v) \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R} \mid (x - v, r) \in G\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R} \mid (x, r) \in T_{v,0}(G)\} \\ &= T[T_{v,0}(G)](x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U[H_\lambda(F)] &= \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid r \leq H_\lambda(F)(x)\} \\ &= \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid r \leq F(\frac{1}{\lambda}x)\} \\ &= \{(\lambda x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid r \leq F(x)\} \\ &= H_{\lambda,1}\{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid r \leq F(x)\} \\ &= H_{\lambda,1}(U[F]) \end{aligned}$$

De andere bewijzen verlopen analoog. □

Uit de bovenstaande eigenschap kan men vervolgens makkelijk afleiden dat de invariantie-eigenschappen van de binaire morfologische basis-operatoren overgedragen kunnen worden op de u-morfologische basisoperatoren.

**Extensiviteit en idempotentie**

De extensiviteit van de u-dilatatie en de anti-extensiviteit van de u-erosie volgen onmiddellijk uit de corresponderende eigenschap in het binaire geval (cfr. Eigenschap 3.8) en de monotoniteits-eigenschappen van umbra en top-oppervlak (cfr. Eigenschap 3.20); in vergelijking met het binaire geval moet de voorwaarde  $\mathbf{0} \in B$  vervangen worden door<sup>22</sup>  $B(\mathbf{0}) \geq 0$ . De idempotentie van de u-sluiting en u-opening is eveneens geldig (cfr. [29]).

**Opmerkingen m.b.t. de andere eigenschappen**

Bewijzen voor sommige van de overige eigenschappen vindt men terug in [29], in het bijzonder eigenschappen i.v.m. commutativiteit en associativiteit van de dilatatie, combinaties van dilatatie en erosie, en de adjunctie eigenschap. Merk op dat voor de u-dilatatie, in tegenstelling tot voor de s-dilatatie, de commutativiteitseigenschap nu wel overgedragen kan worden aangezien beide argumenten van de dilatatie van hetzelfde type zijn.

<sup>22</sup> Binair geldt dat  $E(U[A], U[B]) \subseteq U[A]$  indien  $\mathbf{0} \in U[B]$ ; deze laatste voorwaarde is voldaan als  $B(\mathbf{0}) \geq 0$ . Analoog voor de dilatatie: binair geldt  $U[A] \subseteq D(U[A], U_d[coB])$  indien  $\mathbf{0} \in U_d[coB]$ , hetgeen eveneens voldaan is als  $B(\mathbf{0}) \geq 0$ .

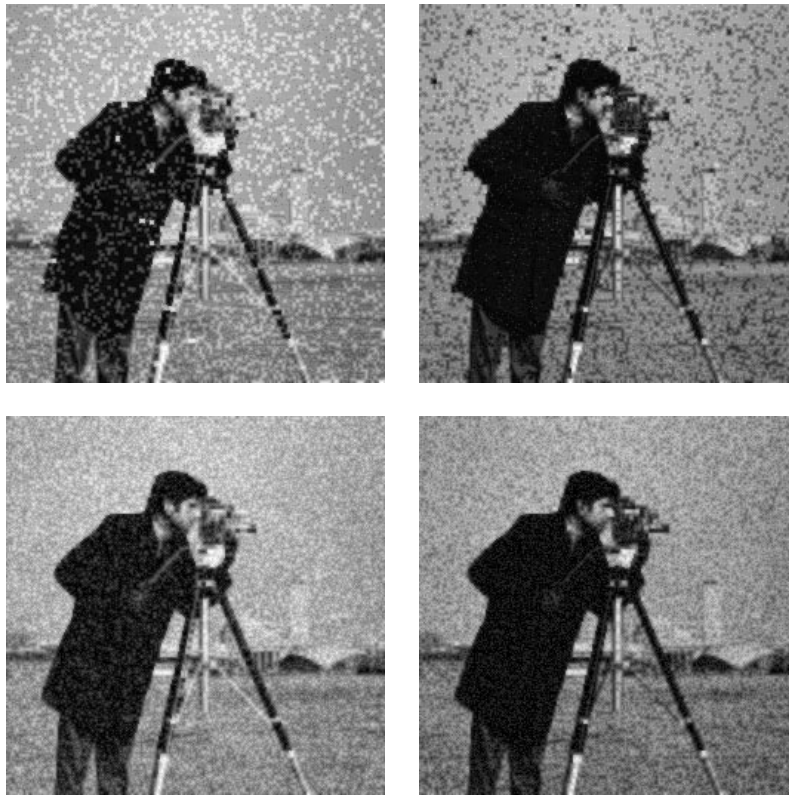
### 3.3.4 Enkele toepassingen

Ook voor de grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabnadering geven we enkele voorbeelden van toepassingen op het vlak van ruisonderdrukking en randdetectie.

#### Ruisonderdrukking

De u-sluiting en u-opening worden als ruisonderdrukkingsfilters geïllustreerd in Figuur 3.17. Het originele beeld wordt weergegeven in Figuur 3.8 en twee met ruis gecontamineerde binaire beelden in Figuur 3.11; het structurelement  $B$  wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.86 & 0.86 \\ 0.86 & \underline{1.00} & 0.86 \\ 0.86 & 0.86 & 0.86 \end{pmatrix}.$$



Figuur 3.17: Bovenste rij: resultaat van de u-sluiting gevolgd door de u-opening (links) en de u-opening gevolgd door de u-sluiting (rechts) op het met zout & peper ruis gecontamineerde beeld uit Figuur 3.11; Onderste rij: resultaat van de u-sluiting gevolgd door de u-opening (links) en de u-opening gevolgd door de u-sluiting (rechts) op het met gaussische ruis gecontamineerde beeld uit Figuur 3.11.

In Tabel 3.3 geven we de corresponderende MSE-waarden. Ook hier moeten we besluiten dat zowel de numerieke als de visuele resultaten niet optimaal zijn. We zullen in de Hoofdstukken 7 en 8 echter andere vaaglogisch gebaseerde technieken bestuderen die een betere performantie hebben op het vlak van ruisonderdrukking.

	zout & peper ruis	gaussische ruis
origineel ruisbeeld	1994.76	585.98
u-sluiting en u-opening	814.47	596.35
u-opening en u-sluiting	679.26	564.86

Tabel 3.3: Evaluatie van de u-sluiting en u-opening als ruisonderdrukkingsfilters m.b.v. de MSE-waarden.

### Randdetectie

**Definitie 3.43** Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ . De u-morfologische gradiënt  $G_u^B$  is gedefinieerd als:

$$G_u^B(A) = D_u(A, B) - E_u(A, B).$$

Zij  $A, B$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ , met  $\mathbf{0}$  in  $B_0$ . De externe u-morfologische gradiënt  $G_u^{B,e}$  is gedefinieerd als:

$$G_u^{B,e}(A) = D_u(A, B) - A;$$

de interne u-morfologische gradiënt  $G_u^{B,i}$  is gedefinieerd als:

$$G_u^{B,i}(A) = A - E_u(A, B).$$

De u-morfologische gradiënten worden geïllustreerd in Figuur 3.18; het structuurelement  $B$  is hetzelfde als hoger.

## 3.4 Verbanden tussen binaire en klassieke grijswaardemorfologie

In dit hoofdstuk hebben we gezien hoe binaire morfologie op verschillende manieren uitgebreid kan worden naar grijswaardemorfologie. We hebben met name twee benaderingen besproken: de schijfjesbenadering corresponderend met s-morfologische operatoren (grijswaardebeelden en binaire structuurelementen), en de umbrabenadering corresponderend met u-morfologische operatoren (grijswaardebeelden en grijswaarde structuurelementen).

In beide gevallen gaat het effectief om een uitbreiding van de binaire morfologie. Hiermee bedoelen we dat een restrictie van de s-morfologische en u-morfologische operatoren tot binaire beelden en binaire structuurelementen leidt tot operatoren die compatibel zijn met de binaire morfologische operatoren. We formaliseren dit in de volgende eigenschappen. Hierbij worden binaire objecten, die klassiek gemodelleerd worden als deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$ , ook als  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen opgevat. De afbeelding heeft in dat geval natuurlijk maar twee waarden: 0 (voor punten die niet tot het object behoren) of 1 (voor punten die wel tot het object behoren).

We geven eerst het verband tussen de binaire morfologische operatoren en de s-morfologische operatoren.

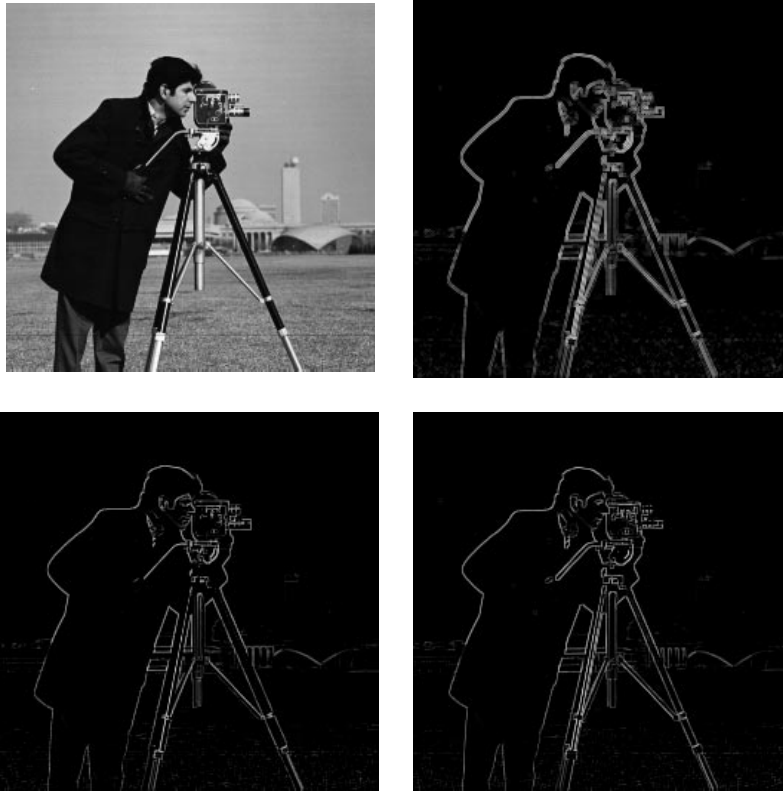
**Eigenschap 3.29** Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$$\begin{array}{ll} D_s(A, B) = D(A, B) & S_s(A, B) = S(A, B) \\ E_s(A, B) = E(A, B) & O_s(A, B) = O(A, B). \end{array}$$

BEWIJS.

Men gaat onmiddellijk na dat de inwerking van de s-morfologische basisoperatoren op binaire objecten ook tot binaire objecten leidt. Stel nu  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ , dan volgt voor elke  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ :

$$D_s(A, B)(y) = 1 \Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(B) \cap A} A(x) = 1$$



Figuur 3.18: Bovenste rij: origineel grijswaardebeeld  $A$  (links) en het resultaat van de u-morfologische gradiënt  $G_u^B(A)$  (rechts). Onderste rij: resultaat van de externe u-morfologische gradiënt  $G_u^{B,e}(A)$  (links) en de interne u-morfologische gradiënt  $G_u^{B,i}(A)$  (rechts).

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(B) \cap A)(A(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(B))(x \in A) \\
&\Leftrightarrow T_y(B) \cap A \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow y \in D(A, B).
\end{aligned}$$

Op analoge manier leidt men af dat

$$E_s(A, B)(y) = 1 \Leftrightarrow y \in E(A, B);$$

de resultaten m.b.t. sluiting en opening volgen uit de resultaten voor dilatatie en erosie.  $\square$

Vervolgens geven we het verband tussen de binaire morfologische operatoren en de u-morfologische operatoren.

**Eigenschap 3.30** *Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$D_u(A, B) = D(A, B) + 1$	$S_u(A, B) = S(A, B)$
$E_u(A, B) = E(A, B) - 1$	$O_u(A, B) = O(A, B)$

BEWIJS.

Men gaat onmiddellijk na dat de inwerking van de u-morfologische basisoperatoren op binaire objecten (gerepresenteerd als  $\mathbb{R}^n - \{0, 1\}$  afbeeldingen), ook tot binaire objecten leidt. Deze laatste binaire objecten worden echter niet noodzakelijk als  $\mathbb{R}^n - \{0, 1\}$  afbeeldingen gerepresenteerd; zo ziet men bijvoorbeeld in dat de u-dilatatie van een binair beeld  $A$  m.b.v. een binair structurelement  $B$  zal leiden tot een  $\mathbb{R}^n - \{1, 2\}$  afbeelding. In dat geval volgt, voor elke  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}
D_u(A, B)(y) = 2 &\Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(B) \cap A} A(x) + B(x - y) = 2 \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(B) \cap A)(A(x) = 1 \wedge B(x - y) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(B) \cap A)(A(x) = 1 \wedge T_y(B)(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(B))(x \in A) \\
&\Leftrightarrow T_y(B) \cap A \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow y \in D(A, B).
\end{aligned}$$

De overige eigenschappen volgen op analoge manier.  $\square$

Tenslotte onderzoeken we ook het verband tussen s-morfologische en u-morfologische operatoren. We gaan met name na of de u-morfologische operatoren compatibel zijn met de s-morfologische operatoren indien we ons beperken tot binaire structurelementen; de beelden mogen in beide gevallen grijswaardebeelden zijn.

**Eigenschap 3.31** *Zij  $A$  in  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$  en zij  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

$D_u(A, B) = D_s(A, B) + 1$	$S_u(A, B) = S_s(A, B)$
$E_u(A, B) = E_s(A, B) - 1$	$O_u(A, B) = O_s(A, B)$

BEWIJS.

Indien  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , dan herleiden de expliciete uitdrukkingen voor de u-morfologische basisoperatoren (cfr. Definitie 3.39 en Definitie 3.40) zich tot de volgende uitdrukkingen:

$$\begin{aligned}
D_u(A, B)(y) &= \sup_{x \in T_y(B) \cap A} A(x) + 1 \\
E_u(A, B)(y) &= \inf_{x \in T_y(B)} A(x) - 1 \\
S_u(A, B)(y) &= \sup_{z \in T_y(-B)} \left( \inf_{x \in T_z(B)} A(x) \right) \\
O_u(A, B)(y) &= \inf_{z \in T_y(-B)} \left( \sup_{x \in T_z(B)} A(x) \right).
\end{aligned}$$

Gelet op de uitdrukkingen voor de corresponderende *s*-morfologische operatoren (cfr. Definitie 3.20 en Definitie 3.21) volgt hieruit onmiddellijk het gestelde.  $\square$

We besluiten dat de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering compatibel is met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering.

## Hoofdstuk 4

# Een vergelijkende studie van vaagmorfologieën

In het voorgaande hoofdstuk hebben we gezien hoe binaire morfologie op verschillende manieren uitgebreid kan worden naar een grijswaardemorfologie, d.w.z. een morfologie voor grijswaardebeelden. Deze uitbreidingen waren ofwel eerder technisch van aard (schijfjesbenadering), ofwel meetkundig van aard (umbrabenadering). Beide uitbreidingen hebben ook elk hun beperkingen. Zo kunnen in de schijfjesbenadering enkel binaire structuurelementen worden gebruikt, en is de umbrabenadering niet intern op de klasse der  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen.

In dit hoofdstuk bestuderen we verschillende vaaglogische uitbreidingen van de binaire morfologie. Deze meeste van deze uitbreidingen zijn gebaseerd op de vervaging van een essentieel concept in de definitie van de morfologische basisoperatoren. Algemeen bedoelen we met vaagmorfologie elke uitbreiding van de binaire morfologie naar een morfologie voor grijswaardebeelden, gebruik makend van technieken uit de vaaglogica en vaagverzamelingenleer. Dergelijke aanpak leidt niet alleen tot een ruimer arsenaal aan morfologische operatoren voor beelden; het biedt een oplossing voor de vermelde beperkingen van de klassieke benaderingen: zowel het te bewerken beeld als het structuurelement kunnen grijswaardeobjecten zijn, en de vaagmorfologische operatoren werken steeds intern. Daarenboven is de studie van vaagmorfologische modellen ook een interessante theoretische uitdaging.

Op zich is het helemaal niet verwonderlijk dat vaagverzamelingenleer en vaaglogica toelaten om alternatieve uitbreidingen van de binaire morfologie te construeren. De analogie tussen binaire beelden en scherpe verzamelingen enerzijds en grijswaardebeelden en vaagverzamelingen anderzijds is immers treffend. De binaire morfologie is sterk gestoeld op concepten uit de klassieke verzamelingenleer, en het is dan ook te verwachten dat een fuzzificatie van de betrokken verzameltechnische concepten leidt tot alternatieve modellen voor grijswaardemorfologie. De wetenschappelijke literatuur van de afgelopen 10 jaar bevat dan ook een aantal bijdragen op dit vlak.

In dit hoofdstuk bespreken we verschillende modellen die de binaire morfologie uitbreiden naar een vaagmorfologie. De meeste van deze modellen vindt men terug in de literatuur, maar er worden ook enkele nieuwe modellen, gebaseerd op de vervaging van inclusie, specifiek ontwikkeld in de context van vaagmorfologie. De tweede en belangrijkste doelstelling van dit hoofdstuk is een vergelijkende studie van de bestaande en nieuw geïntroduceerde modellen. We voeren een uitgebreid onderzoek naar de onderlinge verbanden tussen de verschillende modellen voor vaagmorfologie, en naar de verbanden tussen de vaagmorfologieën enerzijds en de klassieke binaire morfologie en grijswaardemorfologieën anderzijds. Deze studie leidt tot een optimaal inzicht in de verschillende modellen, en zal ons onder meer toelaten om het meest algemene model te selecteren. Op dit model kan dan verder onderzoek aangaande vaagmorfologie gebeuren.

In Hoofdstuk 6 bespreken we nog een ander en laatste model voor een vaagmorfologie. Het model is gebaseerd op de fuzzificatie van het begrip adjunctie. Omwille van de originaliteit enerzijds en omwille van de andere aard van het model anderzijds, wordt het ondergebracht in een

apart hoofdstuk.

## 4.1 Structuur van het hoofdstuk

We bespreken in dit hoofdstuk negen modellen voor vaagmorfologie. Deze modellen brengen we onder in drie klassen:

- (1) modellen gebaseerd op de vervaging van logische operatoren (Paragraaf 4.3):
  - AVL: het algemeen vaaglogisch model van De Baets
  - BM-model: het model van Bloch & Maître
- (2) modellen gebaseerd op de vervaging van inclusie (Paragraaf 4.4):
  - Z-model: vaaginclusie van Zadeh
  - SD-model: vaaginclusie van Sinha & Dougherty
  - K-model: vaaginclusie van Kitainik
  - BK-model: vaaginclusie van Bandler & Kohout
- (3) andere modellen (Paragraaf 4.5):
  - M-model: fuzzificatie van de Minkowski optelling
  - SI-model: vaagmorfologie gebaseerd op vaagintegralen
  - DG-model: vaagmorfologie gebaseerd op de erosies van di Gesu

De modellen gebaseerd op de vaaginclusies van Zadeh en Kitainik worden in dit proefschrift voor het eerst ontwikkeld in het kader van vaagmorfologie. Deze en andere modellen komen uitvoerig aan bod in de volgende paragrafen. Naast een bespreking van de modellen onderzoeken we tegelijkertijd ook uitgebreid hun onderlinge verbanden, en in Paragraaf 4.6 onderzoeken we tevens de verbanden met de binaire morfologie en klassieke grijswaardemorfologie. De conclusies van deze vergelijkende studie vatten we overzichtelijk samen in Paragraaf 4.7.

## 4.2 Representatie van grijswaardebeelden in het kader van vaagmorfologie

We hebben in Hoofdstuk 3 gezien hoe grijswaardebeelden wiskundig gemodelleerd werden in het kader van de schijfjesbenadering (zie Paragraaf 3.2.1): een  $n$ -dimensionaal grijswaardebeeld werd voorgesteld als een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeelding, waarbij  $[0, 1]$  het interval der mogelijke grijswaarden representeert. Louter formeel kan een  $n$ -dimensionaal grijswaardebeeld bijgevolg opgevat worden als een vaagverzameling in  $\mathbb{R}^n$  (zie Definitie 1.2), en kunnen technieken uit de vaagverzamelingenleer aangewend worden om hierop operatoren te definiëren<sup>1</sup>. In het vervolg zullen we een grijswaardebeeld  $A$  dan ook formeel noteren als een element van  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  i.p.v. als een element van  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ .

---

<sup>1</sup>We benadrukken dat de representatie van een grijswaardebeeld als vaagverzameling inderdaad louter formeel is. Immers, in het kader van beeldverwerking stelt het eenheidsinterval  $[0, 1]$  de verzameling van mogelijke *grijswaarden* voor, terwijl in het kader van vaagverzamelingen (resp. vaaglogica)  $[0, 1]$  de verzameling van mogelijke *lidmaatschapsgraden* (resp. *waarheidswaarden*) is. Dit neemt uiteraard niet weg dat technieken uit de vaagverzamelingenleer op een zinvolle manier kunnen bijdragen tot de ontwikkeling van nieuwe modellen voor (vaag-)morfologie.

Volledigheidshalve merken we op dat men in een andere context beelden weldegelijk als vaagverzamelingen kan interpreteren, waarbij de waarde die aan een pixel gehecht wordt een lidmaatschapsgraad en geen grijswaarde is. Zo is het bij randdetectie bijvoorbeeld niet altijd mogelijk om een pixel ondubbelzinnig als een randpixel te classificeren. In dat geval kan aan elke pixel in het beeld een lidmaatschapsgraad gehecht worden die uitdrukt in welke mate de beschouwde pixel een randpixel is.



### 4.3 Vaagmorfologieën gebaseerd op de fuzzificatie van logische operatoren

Uit de definitie van de binaire dilatatie en de binaire erosie (zie Definities 3.3 en 3.4) blijkt dat de doorsnede en inclusie van scherpe verzamelingen een belangrijke rol spelen. Een mogelijke fuzzificatie van de binaire morfologie kan bijgevolg bekomen worden door een fuzzificatie van de onderliggende logische operatoren, zijnde de conjunctie (voor het modelleren van de doorsnede) en de implicatie (voor het modelleren van de inclusie). De fuzzificaties van deze operatoren, respectievelijk conjunctoren en implicatoren op het eenheidsinterval, werden reeds uitvoerig behandeld in Hoofdstuk 1.

In de literatuur vinden we twee modellen voor vaagmorfologie terug die expliciet gestoeld zijn op dit principe. De eerste is van de hand van Isabelle Bloch en Henri Maître [4], de tweede van Bernard De Baets [12]. We bespreken eerst het model van De Baets, aangezien dit - zoals verder zal blijken - algemener is dan het model van Bloch en Maître.

#### 4.3.1 Het algemeen vaaglogisch model (AVLM): algemene vervaging van logische operatoren

##### Methodologie en definities

De definitie van de binaire dilatatie kan als volgt herschreven worden<sup>2</sup>. Zij  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}
 y \in D(A, B) &\Leftrightarrow T_y(B) \cap A \neq \emptyset \\
 &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \wedge x \in A) \\
 &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(T_y(B)(x) = 1 \wedge A(x) = 1) \\
 &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(B(x - y) = 1 \wedge A(x) = 1) \\
 &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)([B(x - y) \wedge A(x)] = 1) \\
 &\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [B(x - y) \wedge A(x)] = 1.
 \end{aligned}$$

Het supremum kan bovendien beperkt worden tot de  $x$ -waarden uit  $T_y(B) \cap A$ . Immers, indien  $x \notin T_y(B) \cap A$ , dan is  $[B(x - y) \wedge A(x)] = 0$ , en levert deze  $x$ -waarde geen bijdrage tot het supremum.

Op analoge wijze bekomt men volgende alternatieve uitdrukking voor de binaire erosie:

$$y \in E(A, B) \Leftrightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [B(x - y) \rightarrow A(x)] = 1,$$

waarbij het infimum beperkt kan worden tot de  $x$ -waarden uit  $T_y(B)$ . Immers, indien  $x \notin T_y(B)$ , dan is  $B(x - y) = 0$  en dus  $[B(x - y) \rightarrow A(x)] = 1$ , en levert deze  $x$ -waarde geen bijdrage tot het infimum.

Geïnspireerd door deze uitdrukkingen, worden de volgende definities voor de vaagmorfologische dilatatie en erosie ingevoerd.

**Definitie 4.1** [12] Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ . De vaagmorfologische dilatatie of  $\mathcal{C}$ -dilatatie  $D_{\mathcal{C}}(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$D_{\mathcal{C}}(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} \mathcal{C}(B(x - y), A(x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>We maken hierbij geen notationeel onderscheid meer tussen een verzameling  $V$  enerzijds en diens karakteristieke afbeelding  $k_V$  anderzijds (zie Definitie 1.1), noch tussen logische voegwoorden en de corresponderende logische operatoren (zie Definitie 1.12). Herinner dat een analoge afspraak werd gemaakt voor vaagverzamelingen en de corresponderende lidmaatschapsfuncties.

**Definitie 4.2** [12] Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . De vaagmorfologische erosie of  $\mathcal{I}$ -erosie  $E_{\mathcal{I}}(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$E_{\mathcal{I}}(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{I}(B(x - y), A(x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

### Over de $x$ -waarden

Merk op dat het supremum en infimum in deze definities in principe genomen mag worden over alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ ; de bijkomende  $x$ -waarden zullen, naar analogie met het scherpe geval, immers geen bijdrage leveren tot de bepaling van het supremum of het infimum<sup>3</sup>. Voor de  $\mathcal{C}$ -dilatatie volgt dit uit:

$$\begin{aligned} x \in T_y(d_B) \cap d_A &\Leftrightarrow x \in T_y(d_B) \wedge x \in d_A \\ &\Leftrightarrow x - y \in d_B \wedge x \in d_A \\ &\Leftrightarrow B(x - y) > 0 \wedge A(x) > 0 \\ x \notin T_y(d_B) \cap d_A &\Leftrightarrow B(x - y) = 0 \vee A(x) = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{C}(B(x - y), A(x)) = 0, \end{aligned}$$

waaruit we besluiten dat  $\mathcal{C}(B(x - y), A(x))$  voor  $x \notin T_y(d_B) \cap d_A$  geen bijdrage levert tot het supremum.

Een analoge redenering kunnen we maken voor de  $\mathcal{I}$ -erosie:

$$\begin{aligned} x \notin T_y(d_B) &\Leftrightarrow x - y \notin d_B \\ &\Leftrightarrow B(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{I}(B(x - y), A(x)) = 1, \end{aligned}$$

ongeacht de waarde van  $A(x)$  (zie Lemma 1.2). Hieruit besluiten we dat  $\mathcal{I}(B(x - y), A(x))$  voor de gekozen  $x \notin T_y(d_B)$  geen bijdrage levert tot het infimum.

Verder in deze paragraaf zullen we nog verschillende types van vaagmorfologische dilataties en erosies definiëren en bespreken. In bijna alle gevallen gaat het hierbij om uitdrukkingen waarbij ook suprema en infima voorkomen. Waar mogelijk beschrijven we de  $x$ -waarden waarover deze suprema en infima genomen worden ook zo restrictief mogelijk, zonder daar zoals hier nog uitgebreid bij stil te staan.

### Over de $y$ -waarden

De vaagmorfologische dilatatie en erosie worden gedefinieerd voor elke  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . Dit volgt enerzijds uit de aard van de gevolgde werkwijze (er worden bewerkingen uitgevoerd op vaagverzamelingen die ook in gans  $\mathbb{R}^n$  bepaald zijn), maar is anderzijds niet consistent met het feit dat de in de praktijk gehanteerde beelden binnen eindige grenzen gesitueerd kunnen worden. Een aantal bemerkingen zijn dus op hun plaats.

Beschouw de vaagmorfologische dilatatie  $D_{\mathcal{C}}(A, B)$ , met  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Men kan nagaan dat voor  $y$ -waarden die niet tot binaire dilatatie  $D(d_A, d_B)$  behoren, geldt dat  $D_{\mathcal{C}}(A, B)(y) = 0$ :

$$\begin{aligned} y \notin D(d_A, d_B) &\Leftrightarrow \neg(T_y(d_B) \cap d_A \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow T_y(d_B) \cap d_A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \notin T_y(d_B) \vee x \notin d_A) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(B(x - y) = 0 \vee A(x) = 0) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Hoewel het notationaal iets eenvoudiger is om de suprema en infima steeds over alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  te nemen opteren we daar niet voor. Uit onze notaties blijkt immers onmiddellijk welke van de  $x$ -waarden daadwerkelijk een rol spelen bij de berekening.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(\mathcal{C}(B(x-y), A(x)) = 0) & (4.1) \\
&\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(x-y), A(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow D_{\mathcal{C}}(A, B)(y) = 0,
\end{aligned}$$

waarbij we voor (4.1) gebruik hebben gemaakt van Lemma 1.1. In de praktijk is het dus enkel nodig om de berekening van  $D_{\mathcal{C}}(A, B)$  uit te voeren voor  $y$ -waarden uit  $D(d_A, d_B)$ .

Een dergelijk verband tussen de vaagmorfologische dilatatie (van een vaagverzameling  $A$  m.b.v. een vaagverzameling  $B$ ) en de binaire dilatatie (van de drager  $d_A$  m.b.v. de drager  $d_B$ ) kan helaas niet afgeleid worden voor de erosie. Men ziet dit vlug in a.d.h.v. volgend voorbeeld: beschouw twee vaagverzamelingen  $A$  en  $B$  in  $\mathbb{R}^n$  (resp. een grijswaardebeeld en een grijswaarde structuurelement), bepaald door  $A(x) = 0.5$  voor alle  $x$  in  $d_A$  en  $B(x) = 0.5$  voor alle  $x$  in  $d_B$ . Voor de vaagmorfologische erosie  $E_{I_{KD}}$  geldt dan:

$$\begin{aligned}
E_{I_{KD}}(A, B)(y) &= \inf_{x \in T_y(d_B)} I_{KD}(B(x-y), A(x)) \\
&= \inf_{x \in T_y(d_B)} \max(1 - B(x-y), A(x)) \\
&= \inf_{x \in T_y(d_B)} \max(0.5, A(x)) \\
&= 0.5.
\end{aligned}$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

In de praktijk is het echter weinig zinvol om de  $E_{\mathcal{I}}(A, B)(y)$ -waarden voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  te berekenen. Een erosie is immers bedoeld om een beeld te transformeren, en bijgevolg zijn we absoluut niet geïnteresseerd in  $y$ -waarden die ons geen informatie m.b.t. het beeld  $A$  opleveren.  $y$ -waarden die dus van geen belang zijn m.b.t. de eigenlijk beeldtransformatie zijn deze waarvoor

$$\inf_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{I}(B(x-y), A(x))$$

onafhankelijk is van  $A$ , d.w.z. waarvoor alle  $x$  in  $T_y(d_B)$  niet tot  $d_A$  behoren, of nog waarvoor  $T_y(d_B) \cap d_A = \emptyset$ . Het zijn met andere woorden die  $y$ -waarden die buiten  $D(d_A, d_B)$  gelegen zijn; voor deze  $y$ -waarden hangt het resultaat van de vaagmorfologische erosie niet af van  $A$ , maar geldt:

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{I}}(A, B)(y) &= \inf_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{I}(B(x-y), A(x)) \\
&= \inf_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{I}(B(x-y), 0) \\
&= \inf_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{N}_{\mathcal{I}}(B(x-y))
\end{aligned}$$

Indien  $B$  genormaliseerd is, dan is in dat geval  $E_{\mathcal{I}}(A, B)(y) = 0$ .

### Vaagmorfologische sluiting en opening

De vaagmorfologische sluiting en opening worden gedefinieerd als de gekende combinaties van de vaagmorfologische dilatatie en erosie. Men kan deze definities ook afleiden uit de corresponderende scherpe uitdrukkingen.

**Definitie 4.3** [12] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor en zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . De vaagmorfologische sluiting of  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ -sluiting  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$  is gedefinieerd als:*

$$\boxed{S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B) = E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), -B),}$$

d.w.z.:

$$S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)(y) = \inf_{z \in T_y(-d_B)} \mathcal{I} \left[ B(y-z), \sup_{x \in T_z(d_B)} \mathcal{C}(B(x-z), A(x)) \right].$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De vaagmorfologische opening of  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ -opening  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$\boxed{O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B) = D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), -B),}$$

d.w.z.:

$$O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)(y) = \sup_{z \in T_y(-d_B)} \mathcal{C} \left[ B(y-z), \inf_{x \in T_z(d_B)} \mathcal{I}(B(x-z), A(x)) \right].$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

In het vervolg van dit proefschrift verwijzen we naar het bovenstaande model voor vaagmorfologie als het *algemeen vaaglogisch model*, hetgeen we afkorten als AVLMM.

### Voorbeelden

Verskillende vaagmorfologische dilataties, erosies, openingen en sluitingen worden geïllustreerd in de Figuren 4.1, 4.2 en 4.3, waarbij respectievelijk:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}, \mathcal{I}) &= (T_M, I_{KD}), \\ (\mathcal{C}, \mathcal{I}) &= (T_P, I_R), \\ (\mathcal{C}, \mathcal{I}) &= (T_W, I_W). \end{aligned}$$

Het gehanteerde structuurelement  $B$  wordt telkens gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.86 & 0.86 \\ 0.86 & \underline{1.00} & 0.86 \\ 0.86 & 0.86 & 0.86 \end{pmatrix}$$

Het originele beeld  $A$  wordt weergegeven in Figuur 4.4.

De typerende karakteristieken van de vaagmorfologische operatoren zijn sterk afhankelijk van de keuze van de onderliggende logische operatoren. Voor de drie gegeven voorbeelden, waarbij enkel driehoeksnormen en modelimplicatoren optreden, zijn deze algemene kenmerken analoog aan deze in het klassieke grijswaarden geval: de vaagmorfologische dilataties verwijderen donkere details (versterken lichte details) en reduceren donkere objecten (vergroten lichte objecten), de vaagmorfologische erosies hebben een omgekeerd effect, de vaagmorfologische sluitingen verwijderen typisch donkere details, en de vaagmorfologische openingen verwijderen typisch lichte details. De laatste twee wijzigen hierbij weinig aan de grootte van de objecten.

We kunnen ook een aantal interessante eigenschappen betreffende de vaagmorfologische dilatatie en erosies afleiden. Er geldt immers:

$$\begin{aligned} T_M &\geq T_P \geq T_W, \\ I_{KD} &\leq I_R \leq I_W, \end{aligned}$$

hetgeen onmiddellijk impliceert dat:

$$\begin{aligned} D_{T_M} &\geq D_{T_P} \geq D_{T_W}, \\ E_{I_{KD}} &\leq E_{I_R} \leq E_{I_W}, \end{aligned}$$

of equivalent hiermee, voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} D_{T_M}(A, B) &\supseteq D_{T_P}(A, B) \supseteq D_{T_W}(A, B), \\ E_{I_{KD}}(A, B) &\subseteq E_{I_R}(A, B) \subseteq E_{I_W}(A, B). \end{aligned}$$

De figuren bevestigen deze theoretische resultaten. Zo is de dilatatie  $D_{T_M}(A, B)$  bijvoorbeeld niet alleen lichter in het algemeen, maar worden de lichte details ook meer versterkt en de donkere details sterker onderdrukt in vergelijking met de andere dilataties. Eén van de gevolgen hiervan is dat de dilatatie  $D_{T_M}(A, B)$  minder scherp zal zijn dan de dilataties  $D_{T_P}(A, B)$  en  $D_{T_W}(A, B)$ . Een analoge observatie gaat op voor de vaagmorfologische erosies.

De bovenstaande eigenschap heeft ook gevolgen indien men m.b.v. de vaagmorfologische dilatatie en erosie operatoren voor randdetectie definieert. Uit de bovenstaande inclusies volgt immers dat



Figuur 4.1: Vaagmorfologische operatoren voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) = (T_M, I_{KD})$ : de dilatie  $D_{T_M}(A, B)$  (boven links), de erosie  $E_{I_{KD}}(A, B)$  (boven rechts), de sluiting  $S_{T_M, I_{KD}}(A, B)$  (onder links) en de opening  $O_{T_M, I_{KD}}(A, B)$  (onder rechts). Het originele beeld  $A$  wordt weergegeven in Figuur 4.4.



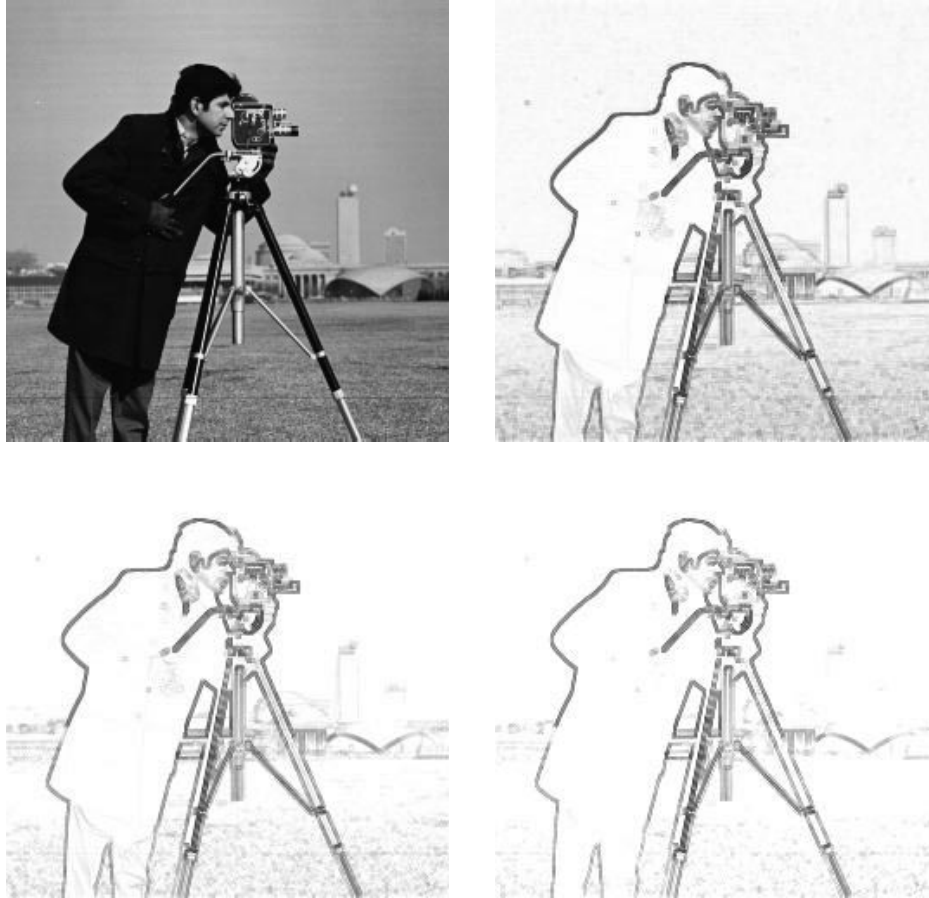
Figuur 4.2: Vaagmorfologische operatoren voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) = (T_P, I_R)$ : de dilatie  $D_{T_P}(A, B)$  (boven links), de erosie  $E_{I_R}(A, B)$  (boven rechts), de sluiting  $S_{T_P, I_R}(A, B)$  (onder links) en de opening  $O_{T_P, I_R}(A, B)$  (onder rechts). Het originele beeld  $A$  wordt weergegeven in Figuur 4.4.



Figuur 4.3: Vaagmorfologische operatoren voor  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) = (T_w, I_w)$ : de dilatie  $D_{T_w}(A, B)$  (boven links), de erosie  $E_{I_w}(A, B)$  (boven rechts), de sluiting  $S_{T_w, I_w}(A, B)$  (onder links) en de opening  $O_{T_w, I_w}(A, B)$  (onder rechts). Het originele beeld  $A$  wordt weergegeven in Figuur 4.4.

$$D_{T_M}(A, B) - E_{I_{KD}}(A, B) \supseteq D_{T_P}(A, B) - E_{I_R}(A, B) \supseteq D_{T_W}(A, B) - E_{I_W}(A, B).$$

De corresponderende randbeelden (met  $B$  het hoger gegeven structuurelement) bevestigen dit, en worden weergegeven in Figuur 4.4. Merk op dat het randbeeld m.b.v.  $(T_M, I_{KD})$  veel beter de



Figuur 4.4: Randbeelden (negatieven) bekomen m.b.v. de vaagmorphologische dilatatie en erosie. Boven links: het originele grijswaardebeeld; boven rechts: randbeeld m.b.v.  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) = (T_M, I_{KD})$ ; onder links: randbeeld m.b.v.  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) = (T_P, I_R)$ ; onder rechts: randbeeld m.b.v.  $(\mathcal{C}, \mathcal{I}) = (T_W, I_W)$ .

zwakke randen detecteert (bijvoorbeeld van de gebouwen in de achtergrond) dan de randbeelden m.b.v.  $(T_P, I_R)$  of  $(T_W, I_W)$ . Dit illustreert het belang van de keuze van de logische operatoren bij het toepassen van vaagmorphologische operatoren. Als men bijvoorbeeld enkel geïnteresseerd is in sterke randen, d.w.z. randen van objecten die prominent in het beeld aanwezig zijn, zal men eerder opteren voor  $(T_W, I_W)$  i.p.v. voor  $(T_M, I_{KD})$ .

### Dualiteit

Op dit punt is het niet onze bedoeling om de eigenschappen van de vaagmorphologische basisoperatoren te onderzoeken. In het licht van het volgende model voor vaagmorphologie is het echter wel belangrijk om één specifieke eigenschap te vermelden.

**Definitie 4.4** Zij  $P$  en  $Q$  vaagmorphologische operatoren, en zij  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ .  $P$  en  $Q$  zijn  $\mathcal{N}$ -dual als en slechts als voor elk koppel  $(A, B)$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  geldt dat:



$$P(A, B) = \text{co}_{\mathcal{N}} Q(\text{co}_{\mathcal{N}} A, B).$$

**Eigenschap 4.1** [12] *Zij  $\mathcal{N}$  een involutieve negator, zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor en zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt: de  $\mathcal{C}$ -dilatatie  $D_{\mathcal{C}}$  en de  $\mathcal{I}$ -erosie  $E_{\mathcal{I}}$  zijn  $\mathcal{N}$ -dual als en slechts als  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ , of equivalent daarmee  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .*

### 4.3.2 BM-model: specifieke vervaging van logische operatoren

#### Methodologie en definities

Het hoger beschreven model is een veralgemening van het model geïntroduceerd door Bloch en Maître in [4]. Beide modellen zijn gestoeld op hetzelfde principe, maar dat van Bloch en Maître, verder aangeduid als het BM-model, onderscheidt zich door een specifiekere keuze van de betrokken logische operatoren.

**Definitie 4.5** [5] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\mathcal{T}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$ . De vaagmorfologische dilatatie  $D_{\mathcal{T}}(A, B)$ , in de zin van Bloch en Maître, is gedefinieerd als:*

$$D_{\mathcal{T}}(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} \mathcal{T}(B(x - y), A(x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

*Zij verder  $\mathcal{N}$  een involutieve negator op  $[0, 1]$ . De vaagmorfologische erosie  $E_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(A, B)$ , in de zin van Bloch en Maître, is gedefinieerd als:*

$$E_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(B(x - y), A(x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De vaagmorfologische sluiting en opening, in de zin van Bloch en Maître, worden gedefinieerd zoals in het AVLMM, gebruik makend van de specifieke logische operatoren.

#### Verband met het AVLMM

Het BM-model is net als het AVLMM gebaseerd op de fuzzificatie van de logische operatoren. Er treden echter twee belangrijke verschillen op:

- Voor de dilatatie maakt men gebruik van een driehoeksnorm, en niet van een conjunctor.
- Voor de erosie maakt men gebruik van de modelimplicator geïnduceerd door deze driehoeksnorm en een involutieve negator, en niet van een willekeurige implicator (zie ook Lemma 1.6). Een gevolg hiervan is dat de vaagmorfologische dilatatie  $D_{\mathcal{T}}$  en de vaagmorfologische erosie  $E_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$  in het model van Bloch en Maître steeds  $\mathcal{N}$ -duale operatoren zijn (cfr. Eigenschap 4.1).

Uit de methodologie en de definities volgt onmiddellijk dat het BM-model vervat zit in het AVLMM. De specifieke keuze van een driehoeksnorm, alsook de ‘gedwongen’ dualiteit<sup>4</sup> van de vaagmorfologische dilatatie en erosie, maken het BM-model echter minder algemeen dan het AVLMM.

<sup>4</sup>We spreken hier van ‘gedwongen’, omdat vanuit formeel oogpunt dualiteit niet noodzakelijk is voor de vaagmorfologische dilatatie en erosie.

## 4.4 Vaagmorfologieën gebaseerd op de fuzzificatie van inclusie

Uit de definitie van de binaire erosie (zie Definitie 3.4) blijkt dat de inclusie van verzamelingen hierin een belangrijke rol speelt. Deze vaststelling suggereert een mogelijke uitbreiding van binaire morfologie naar vaagmorfologie, namelijk door de inclusie voor scherpe verzamelingen uit te breiden naar een operator op vaagverzamelingen, en vervolgens de definitie van de binaire erosie te fuzzificeren.

In Hoofdstuk 1 hebben we reeds de definitie van Zadeh gegeven voor de inclusie van vaagverzamelingen (zie Definitie 1.22). Een inclusie-operator voor vaagverzamelingen kan echter algemener gedefinieerd worden.

**Definitie 4.6** Een vaaginclusie  $Inc$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  is gedefinieerd als een  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$  afbeelding, waarvoor de restrictie tot  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  samenvalt met de inclusie-operator voor scherpe verzamelingen, d.w.z. dat voor elk koppel  $(A, B)$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  moet gelden dat:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow Inc(A, B) = 1, \\ A \not\subseteq B &\Rightarrow Inc(A, B) = 0. \end{aligned}$$

De waarde  $Inc(A, B)$  wordt geïnterpreteerd als een graad voor de mate waarin de vaagverzameling  $A$  bevat is in de vaagverzameling  $B$ .

Merk op dat de vaaginclusie  $\subseteq_z$  van Zadeh aan deze definitie voldoet. Zoals eerder al opgemerkt heeft deze vaaginclusie echter een scherp karakter, hetgeen verklaart waarom verschillende alternatieve modellen voor vaaginclusie in de literatuur voorkomen. De meest bekende onder deze modellen, die verder besproken zullen worden, zijn:

- het vaaginclusie-model van Sinha & Dougherty,
- het vaaginclusie-model van Kitainik,
- het vaaginclusie-model van Bandler & Kohout.

Als men nu over een dergelijke vaaginclusie  $Inc$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  beschikt, kan men de binaire erosie uitbreiden naar een operator op vaagverzamelingen door te stellen:

$$E_{Inc}(A, B)(y) = Inc(T_y(B), A),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . De corresponderende vaagmorfologische dilatatie wordt dan gedefinieerd op basis van dualiteit t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ .

In de volgende paragrafen bespreken we de hoger geciteerde modellen voor vaaginclusie, en de corresponderende modellen voor vaagmorfologie. Enkel het vaagmorfologisch model gebaseerd op de inclusie van Sinha & Dougherty is reeds onderzocht in de literatuur [69]. De ontwikkeling van de vaagmorfologische modellen gebaseerd op de inclusies van Zadeh, Kitainik en Bandler & Kohout daarentegen is nieuw.

### 4.4.1 Z-model: vaaginclusie van Zadeh

#### Methodologie en definities

De vaaginclusie  $\subseteq_z$  van Zadeh kan als volgt geformuleerd worden in termen van het hoger uiteengezet kader.

**Definitie 4.7** De vaaginclusie  $Inc_z$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , in de zin van Zadeh, is de  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \{0, 1\}$  afbeelding gedefinieerd door:

$$Inc_z(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{als } A \subseteq_z B \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Het scherpe karakter van deze vaaginclusie geeft ook aanleiding tot een ‘scherpe’ vaagmorfolologische erosie. Op basis van de vaaginclusie  $Inc_z$  wordt de corresponderende vaagmorfolologische erosie  $E_z$  immers bepaald door:

$$\begin{aligned} y \in E_z(A, B) &\Leftrightarrow Inc_z(T_y(B), A) = 1, \\ y \notin E_z(A, B) &\Leftrightarrow Inc_z(T_y(B), A) = 0, \end{aligned}$$

voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . In het bijzonder volgt:

$$\begin{aligned} y \in E_z(A, B) &\Leftrightarrow Inc_z(T_y(B), A) = 1 \\ &\Leftrightarrow T_y(B) \subseteq_z A \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(T_y(B)(x) \leq A(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(B(x - y) \leq A(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(A(x) - B(x - y) \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [A(x) - B(x - y)] \geq 0 \end{aligned}$$

Men ziet bovendien ook in dat de  $x$ -waarden waarover het infimum genomen wordt beperkt kan worden tot  $x$  in  $T_y(d_B)$ .

De vaagmorfolologische dilatatie  $D_z$  wordt gedefinieerd als de  $N_s$ -duale operator van de vaagmorfolologische erosie  $E_z$ , d.w.z.<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} y \in D_z(A, B) &\Leftrightarrow y \in co E_z(co_{N_s} A, B) \\ &\Leftrightarrow \neg(y \in E_z(co_{N_s} A, B)) \\ &\Leftrightarrow \neg \left( \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [co_{N_s} A(x) - B(x - y)] \geq 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [(1 - A(x)) - B(x - y)] < 0 \\ &\Leftrightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [1 - (A(x) + B(x - y))] < 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [A(x) + B(x - y)] < 0 \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [A(x) + B(x - y)] > 1 \end{aligned}$$

Ook hier kunnen de  $x$  waarden waarover het supremum genomen wordt drastisch gereduceerd worden. Men kan zich namelijk beperken tot de  $x$ -waarden in  $T_y(d_B) \cap d_A$ . Inderdaad, voor  $x$ -waarden buiten deze doorsnede geldt immers steeds dat  $A(x) + B(x - y) \leq 1$ .

We vatten als volgt samen.

**Definitie 4.8** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De vaagmorfolologische  $z$ -erosie  $E_z(A, B)$  wordt bepaald door, voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ :*

$$y \in E_z(A, B) \Leftrightarrow \inf_{x \in T_y(d_B)} [A(x) - B(x - y)] \geq 0.$$

*De vaagmorfolologische  $z$ -dilatatie  $D_z(A, B)$  wordt bepaald door, voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ :*

$$y \in D_z(A, B) \Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} [A(x) + B(x - y)] > 1.$$

De  $z$ -dilatatie en de  $z$ -erosie worden geïllustreerd in Figuur 4.5. De originele figuur werd weergegeven in Figuur 3.8; het structurelement  $B$  wordt gegeven door:

$$B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \underline{0.6} & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

<sup>5</sup>Aangezien het resultaat van de erosie  $E_z$  een scherpe deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  is, correspondeert het  $N_s$ -complement  $co_{N_s}$  van deze verzameling met het klassieke, scherpe complement  $co$ .



Figuur 4.5: De z-dilatatie  $D_z(A, B)$  (links) en de z-erosie  $E_z(A, B)$  (rechts). Het origineel grijs-waardebeeld  $A$  wordt voorgesteld in Figuur 3.8.

### Verband met de klassieke grijswaardemorfologie

De uitdrukkingen in Definitie 4.8 voor de z-dilatatie en de z-erosie vertonen enige overeenkomst met de corresponderende uitdrukkingen in Definitie 3.39 voor de u-dilatatie en de u-erosie. We kunnen deze overeenkomst vertalen in de volgende eigenschappen. Ze geven het formele verband tussen de vaagmorfologische z-dilatatie en z-erosie enerzijds, en de klassieke u-morfologische dilatatie en erosie anderzijds.

**Eigenschap 4.2** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$\begin{array}{l} y \in D_z(A, B) \Leftrightarrow D_u(A, B)(y) > 1, \\ y \in E_z(A, B) \Leftrightarrow E_u(A, B)(y) \geq 0. \end{array}$$

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit de definities van de betrokken morfologische operatoren.  $\square$

Dit verband kan ook geformuleerd worden in termen van zwakke en sterke snedeverzamelingen van de u-morfologische dilatatie en erosie.

**Eigenschap 4.3** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$\begin{array}{l} D_z(A, B) = (D_u(A, B))_{\overline{1}}, \\ E_z(A, B) = (E_u(A, B))_0. \end{array}$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 4.2 en Definitie 3.33 van zwakke en sterke snedeverzameling.  $\square$

### Verband met het AVLMM

Het Z-model kan opgevat worden als een bijzonder geval van het AVLMM. We kunnen daarnaast ook nog een ander interessant verband met het AVLMM blootleggen.

**Definitie 4.9** *De  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  afbeeldingen  $C_z$  en  $I_z$  worden gedefinieerd door:*

$$\begin{array}{l} C_z(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a + b > 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \\ I_z(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ 0 & \text{anders} \end{cases}, \end{array}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Eigenschap 4.4** *Er geldt:*

- (i)  $C_z$  is een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ ,
- (ii)  $I_z$  is een implicator op  $[0, 1]$ . Bovendien is  $I_z$  contrapositief t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ ,
- (iii)  $C_z = C_{I_z, N_s}$  en equivalent  $I_z = \mathcal{I}_{C_z, N_s}$ .

BEWIJS. Door rechtstreekse controle.  $\square$

Merk op dat de conjunctor  $C_z$  geen semi-norm is, en evenmin voldoet aan de associativiteit. De implicator  $I_z$  op zijn beurt is geen randimplicator, en voldoet niet aan het uitwisselingsbeginsel. We kunnen dit illustreren met de volgende voorbeelden:

$$\begin{aligned} C_z(0.5, 1) &= 1 \neq 0.5 \\ C_z(C_z(0.4, 0.5), 0.6) &= C_z(0, 0.6) = 0 \neq 1 = C_z(0.4, 1) = C_z(0.4, C_z(0.5, 0.6)) \\ I_z(1, 0.5) &= 0 \neq 0.5 \\ I_z(0.4, I_z(0.6, 0.5)) &= I_z(0.4, 0) = 0 \neq 1 = I_z(0.6, 1) = I_z(0.6, I_z(0.4, 0.5)) \end{aligned}$$

**Eigenschap 4.5** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$D_z(A, B) = D_{C_z}(A, B),$$

en

$$E_z(A, B) = E_{I_z}(A, B).$$

BEWIJS. Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er volgt:

$$\begin{aligned} y \in D_z(A, B) &\Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} [A(x) + B(x - y)] > 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(d_B) \cap d_A) (B(x - y) + A(x) > 1) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(d_B) \cap d_A) (C_z(B(x - y), A(x)) = 1) \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} C_z(B(x - y), A(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow D_{C_z}(A, B)(y) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Er bestaat dus een specifieke conjunctor en een specifieke implicator op  $[0, 1]$  zo dat de  $z$ -dilatatie en de  $z$ -erosie in het AVLM ingepast kunnen worden. We beschikken echter ook nog over de volgende karakterisatie in termen van dragers en kernen (cfr. Definities 1.5 en 1.6).

**Eigenschap 4.6** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} D_z(A, B) &= d_{D_{T_W}(A, B)}, \\ E_z(A, B) &= k_{E_{I_W}(A, B)}. \end{aligned}$$

BEWIJS. We tonen dit aan voor de  $z$ -dilatatie; zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , dan geldt:

$$\begin{aligned} y \in D_z(A, B) &\Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} [A(x) + B(x - y)] > 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(d_B) \cap d_A) (A(x) + B(x - y) > 1) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(d_B) \cap d_A) (B(x - y) + A(x) - 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(d_B) \cap d_A) (\max(0, B(x - y) + A(x) - 1) > 0) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in T_y(d_B) \cap d_A) (T_W(B(x - y), A(x)) > 0) \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} T_W(B(x - y), A(x)) > 0 \\ &\Leftrightarrow D_{T_W}(A, B)(y) > 0 \\ &\Leftrightarrow y \in d_{D_{T_W}(A, B)}. \end{aligned}$$

Het bewijs voor de z-erosie verloopt analoog. Deze eigenschappen volgen ook uit Eigenschap 4.5 en het feit dat  $C_z(a, b) = 1 \Leftrightarrow T_W(a, b) > 0$  en  $I_z(a, b) = 1 \Leftrightarrow I_W(a, b) = 1$ , voor  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .  $\square$

Gegeven  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  bestaat de z-dilatatie  $D_z(A, B)$  dus uit die punten waarvoor de waarde van  $D_{T_W}(A, B)$  niet nul is, terwijl de z-erosie  $E_z(A, B)$  enkel die punten bevat waarvoor de waarde van  $E_{I_W}$  één is. Deze vaststelling, samen met het feit dat de z-dilatatie en z-erosie scherpe verzamelingen genereren, impliceren dat de operatoren  $D_z$  en  $E_z$  zeer weinig informatie bevatten.

Volledigheidshalve besteden we ook aandacht aan de corresponderende z-sluiting  $S_z$  en z-opening  $O_z$ , respectievelijk gedefinieerd door:

$$\boxed{\begin{aligned} S_z(A, B) &= E_z(D_z(A, B), -B), \\ O_z(A, B) &= D_z(E_z(A, B), -B), \end{aligned}}$$

voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Voor de z-sluiting krijgen we:

$$\begin{aligned} y \in S_z(A, B) &\Leftrightarrow y \in E_z(D_z(A, B), -B) \\ &\Leftrightarrow \inf_{x \in T_y(-d_B)} [D_z(A, B)(x) - (-B)(x - y)] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(-d_B))(D_z(A, B)(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(-d_B))(x \in D_z(A, B)). \end{aligned}$$

De voorlaatste equivalentie volgt uit het feit dat  $D_z(A, B)(x)$  enkel maar de waarden 0 en 1 kan aannemen. We bekomen dus dat een punt  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  tot de z-sluiting  $S_z(A, B)$  behoort als elk punt  $x$  uit (het kleine gebiedje)  $T_y(-d_B)$  tot de z-dilatatie  $D_z(A, B)$  behoort. Op analoge manier kan men voor de z-opening afleiden dat:

$$y \in O_z(A, B) \Leftrightarrow (\exists x \in T_y(-d_B) \cap E(d_A, d_B))(x \in E_z(A, B)),$$

met corresponderende interpretatie.

#### 4.4.2 SD-model: vaaginclusie van Sinha & Dougherty

##### Methodologie en definities

In [68] introduceren Sinha & Dougherty een vaaginclusie  $Inc_{SD}$  die gebaseerd is op een negental intuïtieve axioma's.

**Definitie 4.10** [68] *Een vaaginclusie  $Inc_{SD}$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , in de zin van Sinha & Dougherty, is elke  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$  afbeelding die voldoet aan de volgende voorwaarden:*

$$\begin{aligned} (a_{SD}) Inc_{SD}(A, B) &= 1 \Leftrightarrow A \subseteq_z B, \\ (b_{SD}) Inc_{SD}(A, B) &= 0 \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(A(x) = 1 \wedge B(x) = 0), \\ (c_{SD}) B_1 \subseteq_z B_2 &\Rightarrow Inc_{SD}(A, B_1) \leq Inc_{SD}(A, B_2), \\ (d_{SD}) A_1 \subseteq_z A_2 &\Rightarrow Inc_{SD}(A_1, B) \geq Inc_{SD}(A_2, B), \\ (e_{SD}) Inc_{SD}(A, B) &= Inc_{SD}(T_\theta(A), T_\theta(B)), \\ (f_{SD}) Inc_{SD}(A, B) &= Inc_{SD}(co_{N_s} B, co_{N_s} A), \\ (g_{SD}) Inc_{SD}(A_1 \cup A_2, B) &= \min(Inc_{SD}(A_1, B), Inc_{SD}(A_2, B)), \\ (h_{SD}) Inc_{SD}(A, B_1 \cap B_2) &= \min(Inc_{SD}(A, B_1), Inc_{SD}(A, B_2)), \\ (i_{SD}) Inc_{SD}(A, B_1 \cup B_2) &\geq \max(Inc_{SD}(A, B_1), Inc_{SD}(A, B_2)), \end{aligned}$$

voor alle vaagverzamelingen  $A, B, A_1, A_2, B_1, B_2$  in  $\mathbb{R}^n$ . In voorwaarde  $(e_{SD})$  stelt  $\theta$  een permutatie van  $\mathbb{R}^n$  voor, en wordt de geïnduceerde transformatie  $T_\theta(V)$  van een vaagverzameling  $V$  in  $\mathbb{R}^n$  gedefinieerd door:

$$T_\theta(V)(x) = V(\theta(x)),$$

voor alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Een aantal van de negen axioma's werd ingevoerd met het oog op het vervuld zijn van een aantal belangrijke eigenschappen in het kader van morfologische operatoren<sup>6</sup>. Los daarvan hebben ze een vrij voor de hand liggende interpretatie; we verwijzen naar [68] voor een uitvoerige bespreking. Het is tevens in dat artikel dat beide auteurs de volgende specifieke vaaginclusie voorstellen, afgeleid uit hun eigen model:

$$\boxed{Inc_\lambda(A, B) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \min(1, \lambda(A(x)) + \lambda(1 - B(x))),}$$

met  $\lambda$  een  $[0, 1] - [0, 1]$  afbeelding die voldoet aan de volgende zes condities:

- (a $_\lambda$ )  $\lambda$  is een dalende afbeelding,
- (b $_\lambda$ )  $\lambda(0) = 1$ ,
- (c $_\lambda$ )  $\lambda(1) = 0$ ,
- (d $_\lambda$ ) de vergelijking  $\lambda(x) = 0$  heeft juist één oplossing,
- (e $_\lambda$ )  $(\forall \alpha \in [0.5, 1]) (\lambda(x) = \alpha$  heeft juist één oplossing),
- (f $_\lambda$ )  $(\forall x \in [0, 1]) (\lambda(x) + \lambda(1 - x) \geq 1)$ .

De klasse van  $[0, 1] - [0, 1]$  afbeeldingen die voldoen aan de zes voorwaarden (a $_\lambda$ ), ..., (f $_\lambda$ ) noteren we als  $\Lambda$ . Voorbeelden van mogelijke  $\lambda$ -afbeeldingen worden gegeven door:

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= 1 - x^n \quad (n \geq 1), \\ \lambda_n(x) &= \frac{1 - x}{1 + nx} \quad (n \in ] - 1, 0]). \end{aligned}$$

Steunend op de vaaginclusie  $Inc_\lambda$  bekommt men vervolgens de volgende fuzzificaties van de binaire dilatatie en erosie. Het corresponderende vaagmorfologisch model noemen we het SD-model.

**Definitie 4.11** [69] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\lambda$  in  $\Lambda$ . De vaagmorfologische  $\lambda$ -erosie  $E_\lambda(A, B)$  is gedefinieerd als:*

$$\boxed{E_\lambda(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} \min(1, \lambda(B(x - y)) + \lambda(1 - A(x))),}$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De vaagmorfologische  $\lambda$ -dilatatie  $D_\lambda(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$\boxed{D_\lambda(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} \max(0, 1 - \lambda(B(x - y)) + \lambda(A(x))),}$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

### Verband met het AVLM

Om het SD-model in te bedden in het AVLM moeten we in staat zijn om voor elke  $\lambda$  in  $\Lambda$  een conjunctor  $\mathcal{C}_\lambda$  en een implicator  $\mathcal{I}_\lambda$  op  $[0, 1]$  te construeren zodanig dat  $D_\lambda(A, B) = D_{\mathcal{C}_\lambda}(A, B)$  en  $E_\lambda(A, B) = E_{\mathcal{I}_\lambda}(A, B)$  voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definitie 4.12** *Zij  $\lambda$  in  $\Lambda$ . De  $[0, 1] \times [0, 1] - [0, 1]$  afbeeldingen  $\mathcal{C}_\lambda$  en  $\mathcal{I}_\lambda$  worden gedefinieerd door:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\lambda(a, b) &= \max(0, 1 - \lambda(a) - \lambda(b)), \\ \mathcal{I}_\lambda(a, b) &= \min(1, \lambda(a) + \lambda(1 - b)), \end{aligned}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

<sup>6</sup>Vermoedelijk hebben de auteurs zich hier ook op gefocust. Dit zou verklaren waarom ze in het begin zelf niet hebben opgemerkt dat hun axioma's niet onafhankelijk zijn. Men ziet bijvoorbeeld onmiddellijk in dat (d $_{SD}$ ) afgeleid kan worden uit (c $_{SD}$ ) en (f $_{SD}$ ), net zoals (h $_{SD}$ ) volgt uit (f $_{SD}$ ) en (g $_{SD}$ ).

**Eigenschap 4.7** *Zij  $\lambda$  in  $\Lambda$ . Er geldt:*

- (i)  $\mathcal{C}_\lambda$  is een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ .
- (ii) De conjunctor  $\mathcal{C}_\lambda$  is een semi-norm op  $[0, 1]$  als en slechts als  $\lambda(a) = 1 - a$ , voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ . In dat geval is  $\mathcal{C}_\lambda = T_W$ .

BEWIJS: (i) Zowel de randvoorwaarden als de monotoniteitsvoorwaarden voor  $\mathcal{C}_\lambda$  volgen onmiddellijk uit de eigenschappen van de afbeelding  $\lambda$ . De commutativiteit is triviaal.

(ii) Zij  $a$  in  $[0, 1]$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\lambda(1, a) = a &\Leftrightarrow \max(0, 1 - \lambda(1) - \lambda(a)) = a \\ &\Leftrightarrow \max(0, 1 - \lambda(a)) = a \\ &\Leftrightarrow 1 - \lambda(a) = a \\ &\Leftrightarrow \lambda(a) = 1 - a. \end{aligned}$$

Men rekent vervolgens eenvoudig na dat  $\mathcal{C}_\lambda(a, b) = T_W(a, b)$ , voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .  $\square$

**Eigenschap 4.8** *Zij  $\lambda$  in  $\Lambda$ . Er geldt:*

- (i)  $\mathcal{I}_\lambda$  is een implicator op  $[0, 1]$ . Deze implicator is bovendien contrapositief t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ .
- (ii) De implicator  $\mathcal{I}_\lambda$  is een randimplicator op  $[0, 1]$  als en slechts als  $\lambda(a) = 1 - a$ , voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ . In dat geval is  $\mathcal{I}_\lambda = I_W$ .

BEWIJS: analoog aan het bewijs van Eigenschap 4.7.  $\square$

**Eigenschap 4.9** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\lambda$  in  $\Lambda$ . Er geldt:*

$$D_\lambda(A, B) = D_{\mathcal{C}_\lambda}(A, B),$$

en:

$$E_\lambda(A, B) = E_{\mathcal{I}_\lambda}(A, B).$$

BEWIJS: uit de definities.  $\square$

We besluiten hieruit dat het SD-model een onderdeel vormt van het AVLm. Het valt er evenwel niet met samen. Dit volgt gewoon al uit het feit dat dualiteit in het AVLm geen noodzakelijkheid is, terwijl de  $\lambda$ -dilataatatie louter op basis van dualiteit uit de  $\lambda$ -erosie werd afgeleid. Men kan echter ook op een andere manier inzien dat het SD-model restrictiever is dan het AVLm.

**Eigenschap 4.10** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Indien er een  $\lambda_{\mathcal{I}}$  in  $\Lambda$  bestaat zo dat  $E_{\mathcal{I}} = E_{\lambda_{\mathcal{I}}}$ , dan geldt:*

- (i)  $\mathcal{I}$  is contrapositief t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ ,
- (ii)  $\lambda_{\mathcal{I}} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ ,
- (iii) De implicator  $\mathcal{I}$  voldoet aan:  $\mathcal{I}(a, b) = \min(1, \mathcal{I}(a, 0) + \mathcal{I}(1 - b, 0))$ , voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

BEWIJS. (i) Stel dat er een  $\lambda_{\mathcal{I}}$  in  $\Lambda$  bestaat, zo dat  $E_{\mathcal{I}} = E_{\lambda_{\mathcal{I}}}$ . Uit Eigenschap 4.9 volgt dan het bestaan van een implicator  $\mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}$  op  $[0, 1]$  zo dat  $E_{\lambda_{\mathcal{I}}} = E_{\mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}}$ . Bijgevolg is  $E_{\mathcal{I}} = E_{\mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}}$ , waaruit volgt dat  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}$ . Aangezien de implicator  $\mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}$  contrapositief is t.o.v. de standaardnegator (zie Eigenschap 4.8), geldt dit ook voor de implicator  $\mathcal{I}$ .

(ii) Uit  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}$  volgt dat  $\mathcal{I}(a, b) = \min(1, \lambda_{\mathcal{I}}(a) + \lambda_{\mathcal{I}}(1 - b))$  voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . In het bijzonder volgt, voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ :

$$\mathcal{I}(a, 0) = \min(1, \lambda_{\mathcal{I}}(a) + \lambda_{\mathcal{I}}(1)) = \min(1, \lambda_{\mathcal{I}}(a)) = \lambda_{\mathcal{I}}(a),$$

waaruit  $\lambda_{\mathcal{I}} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ .



(iii) Dit volgt uit  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}$  enerzijds en het feit dat

$$\lambda_{\mathcal{I}} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$$

anderzijds (zie (ii)). □

Uit (i) van deze eigenschap kunnen we besluiten dat er voor een implicator  $\mathcal{I}$  die niet contrapositief is t.o.v. de standaardnegator geen corresponderende afbeelding  $\lambda$  uit  $\Lambda$  bestaat. Dit bewijst dat het SD-model minder algemeen is dan het AVL-model.

Wegens (ii) kunnen we evenwel niet besluiten dat er voor een implicator  $\mathcal{I}$  die dan wel contrapositief is t.o.v. de standaardnegator wel een corresponderende afbeelding  $\lambda$  uit  $\Lambda$  bestaat. Inderdaad, als een dergelijke  $\lambda$  zou bestaan wordt ze gegeven door de negator geïnduceerd door de implicator, maar het is a priori niet gegarandeerd dat deze negator voldoet aan de voorwaarden die opgelegd worden aan afbeeldingen uit de klasse  $\Lambda$ . We illustreren dit met een voorbeeld in de bespreking van het verband met het Z-model (zie verder).

(iii) tenslotte leert ons dat een implicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$  waarvoor er een corresponderende  $\lambda$  uit  $\Lambda$  bestaat (een dergelijke implicator is dus al zeker contrapositief t.o.v. de standaardnegator) volledig wordt bepaald door de partiële afbeelding  $\mathcal{I}(\cdot, 0)$ , zijnde de geïnduceerde negator. Deze eigenschap geeft ons een goed beeld van de restrictiviteit van het SD-model: gegeven een bepaalde negator  $\mathcal{N}$  is het immers zo dat men massa's implicatoren kan construeren die  $\mathcal{N}$  als geïnduceerde negator hebben. Van al deze implicatoren zal er wegens (iii) echter maar één zijn waarvoor een corresponderende  $\lambda$  uit  $\Lambda$  kan bestaan. Kan bestaan, want wegens (ii) komen enkel die negatoren in aanmerking die voldoen aan de voorwaarden van de klasse  $\Lambda$ .

**Eigenschap 4.11** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ . Indien er een  $\lambda_{\mathcal{C}}$  in  $\Lambda$  bestaat zo dat  $D_{\mathcal{C}} = D_{\lambda_{\mathcal{C}}}$ , dan geldt:*

- (i)  $\mathcal{C}$  is commutatief,
- (ii)  $\lambda_{\mathcal{C}}(a) = 1 - \mathcal{C}(a, 1)$ , voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ ,
- (iii) De conjunctoor  $\mathcal{C}$  voldoet aan:  $\mathcal{C}(a, b) = \max(0, \mathcal{C}(a, 1) + \mathcal{C}(b, 1) - 1)$ , voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van Eigenschap 4.10. □

Eigenschap 4.11 kan op dezelfde wijze geïnterpreteerd worden als Eigenschap 4.10.

### Verband met het BM-model

Beschouw een vaagmorfologie in het BM-model, bepaald door een driehoeksnorm  $\mathcal{T}$  en een involutieve negator  $\mathcal{N}$  op  $[0, 1]$ ; de corresponderende implicator wordt dan gegeven door  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$ . Als er voor de driehoeksnorm  $\mathcal{T}$  een  $\lambda_{\mathcal{T}}$  in  $\Lambda$  zou bestaan waarvoor  $D_{\mathcal{T}} = D_{\lambda_{\mathcal{T}}}$ , dan geldt wegens Eigenschap 4.9 dat  $\mathcal{T} = \mathcal{C}_{\lambda_{\mathcal{T}}}$ . Nu is  $\mathcal{T}$  echter een driehoeksnorm, in het bijzonder een semi-norm op  $[0, 1]$ , en dus volgt uit Eigenschap 4.7 dat noodzakelijkerwijs  $\lambda_{\mathcal{T}} = N_s$  en  $\mathcal{C}_{\lambda_{\mathcal{T}}} = T_W$ .

Analoog, als er voor de implicator  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$  een  $\lambda_{\mathcal{I}}$  in  $\Lambda$  zou bestaan waarvoor  $E_{\mathcal{I}} = E_{\lambda_{\mathcal{I}}}$ , dan geldt wegens Eigenschap 4.9 dat  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}}$ . Nu is  $\mathcal{I}$  echter een modelimplicator, in het bijzonder een randimplicator op  $[0, 1]$ , en dus volgt uit Eigenschap 4.8 dat noodzakelijkerwijs  $\lambda_{\mathcal{I}} = N_s$  en  $\mathcal{I}_{\lambda_{\mathcal{I}}} = I_W$ .

Hieruit besluiten we dat het SD-model en het BM-model juist één specifieke vaagmorfologie gemeen hebben, namelijk deze die in het AVL-model bepaald wordt door het conjunctoor-implicator koppel  $(T_W, I_W)$ . Ze valt samen met de vaagmorfologie die in het SD-model bepaald wordt door  $\lambda = N_s$ .

### Verband met het Z-model

De implicator  $I_z$  is contrapositief t.o.v. de standaardnegator (zie Eigenschap 4.4), en dus kan er, gelet op Eigenschap 4.10, een  $\lambda_z$  in  $\Lambda$  bestaan zo dat  $E_{\lambda_z} = E_{I_z}$ . Wegens diezelfde eigenschap

moet in dat geval gelden dat  $\lambda_z = \mathcal{N}_{I_z}$ . Men kan narekenen dat:

$$\mathcal{N}_{I_z}(a) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases},$$

voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ . Deze afbeelding voldoet echter niet aan de voorwaarden  $(d_\lambda)$  en  $(e_\lambda)$  waaraan elke afbeelding uit de klasse  $\Lambda$  moet voldoen, en bijgevolg moeten we besluiten dat het  $Z$ -model niet op te vatten is als een onderdeel van het  $SD$ -model.

### Een alternatieve benadering

In [59] stelt Popov een vaaginclusie voor, die slechts in één axioma verschilt van de vaaginclusie van Sinha & Dougherty. Met name het eerste axioma  $(a_{SD})$ , dat stelt dat  $Inc_{SD}(A, B) = 1$  als en slechts als  $A \subseteq_z B$ , wordt niet opgenomen in de definitie. De verwijdering van dit axioma wordt ingegeven door de vaststelling dat het axioma zeer restrictief blijkt te zijn m.b.t. heel wat bestaande indicatoren voor vaaginclusie.

**Definitie 4.13** [59] *Een vaaginclusie  $Inc_P$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , in de zin van Popov, is een  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) - [0, 1]$  afbeelding die voldoet aan de volgende voorwaarden:*

- $(a_P)$   $Inc_P(A, B) = 0 \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(A(x) = 1 \wedge B(x) = 0)$ ,
- $(b_P)$   $B_1 \subseteq_z B_2 \Rightarrow Inc_P(A, B_1) \leq Inc_P(A, B_2)$ ,
- $(c_P)$   $A_1 \subseteq_z A_2 \Rightarrow Inc_P(A_1, B) \geq Inc_P(A_2, B)$ ,
- $(d_P)$   $Inc_P(A, B) = Inc_P(T_\theta(A), T_\theta(B))$ ,
- $(e_P)$   $Inc_P(A, B) = Inc_P(co_{N_s} B, co_{N_s} A)$ ,
- $(f_P)$   $Inc_P(A_1 \cup A_2, B) = \min(Inc_P(A_1, B), Inc_P(A_2, B))$ ,
- $(g_P)$   $Inc_P(A, B_1 \cap B_2) = \min(Inc_P(A, B_1), Inc_P(A, B_2))$ ,
- $(h_P)$   $Inc_P(A, B_1 \cup B_2) \geq \max(Inc_P(A, B_1), Inc_P(A, B_2))$ ,

voor alle vaagverzamelingen  $A, B, A_1, A_2, B_1, B_2$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Men stelt vervolgens de volgende indicator voor:

$$Inc_P(A, B) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max(1 - A(x), B(x)),$$

voor alle  $(A, B)$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Men kan nagaan dat deze indicator inderdaad voldoet aan de acht axioma's  $(a_P)$  t.e.m.  $(h_P)$ , en niet voldoet aan het gewraakte axioma  $(a_{SD})$ . De corresponderende vaagmorfologische erosie en dilatatie, die we bestempelen als respectievelijk  $P$ -erosie en  $P$ -dilatatie, worden als volgt gedefinieerd.

**Definitie 4.14** [59] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De vaagmorfologische  $P$ -erosie  $E_P(A, B)$  wordt gedefinieerd door:*

$$E_P(A, B)(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max(1 - B(x - y), A(x)).$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De vaagmorfologische  $P$ -dilatatie  $D_P(A, B)$  wordt gedefinieerd door:

$$D_P(A, B)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \min(B(x - y), A(x)).$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Aangezien  $Inc_P$  geen indicator is in de zin van Sinha & Dougherty kan het corresponderende vaagmorfologisch model niet ingebed worden in het  $SD$ -model. Het verband met de andere besproken vaagmorfologische modellen zal aan bod komen in Paragraaf 4.5.1. We bespreken er de vaagmorfologie gebaseerd op de fuzzificatie van de klassieke Minkowski optelling, en het zal blijken dat deze vaagmorfologie samenvalt met de vaagmorfologie gegenereerd door de indicator  $Inc_P$ <sup>7</sup>.

<sup>7</sup>De vaagmorfologie gebaseerd op de fuzzificatie van de Minkowski optelling werd ingevoerd vooraleer de indicator  $Inc_P$  in [59] werd besproken in het kader van de gewijzigde vaaginclusie van Sinha & Dougherty. Vandaar onze voorkeur om het eerste model verder als zelfstandig model te bespreken, en het model gebaseerd op  $Inc_P$  hier enkel kort te vermelden in de context van vaaginclusies.

### 4.4.3 K-model: vaaginclusie van Kitainik

#### Methodologie en definities

Behalve de vaaginclusie van Sinha & Dougherty, is ook de vaaginclusie van Kitainik welbekend in het vakgebied. Ook hier is de aanpak axiomatisch van aard.

**Definitie 4.15** [34] *Een vaaginclusie  $Inc_K$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , in de zin van Kitainik, is een  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) - [0, 1]$  afbeelding die voldoet aan de volgende voorwaarden:*

$$\begin{aligned} (a_K) \quad & Inc_K(A, B) = Inc_K(co_{N_s} B, co_{N_s} A), \\ (b_K) \quad & Inc_K(A, B_1 \cap B_2) = \min(Inc_K(A, B_1), Inc_K(A, B_2)), \\ (c_K) \quad & Inc_K(A, B) = Inc_K(T_\theta(A), T_\theta(B)), \end{aligned}$$

(d<sub>K</sub>) *De restrictie van  $Inc_K$  tot  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  valt samen met de scherpe inclusie  $\subseteq$ , voor alle vaagverzamelingen  $A, B, B_1, B_2$  in  $\mathbb{R}^n$ . In voorwaarde (c<sub>K</sub>) stelt  $\theta$  een permutatie van  $\mathbb{R}^n$  voor, zoals gespecificeerd in Definitie 4.10.*

Merk op dat er een duidelijk verband bestaat tussen de voorwaarden die opgelegd worden door Kitainik enerzijds, en enkele voorwaarden die opgelegd worden door Sinha & Dougherty anderzijds:

$$\begin{aligned} (a_K) &\Leftrightarrow (f_{SD}), \\ (b_K) &\Leftrightarrow (h_{SD}), \\ (c_K) &\Leftrightarrow (e_{SD}), \\ (d_K) &\Leftrightarrow (a_{SD}) \wedge (b_{SD}). \end{aligned}$$

In tegenstelling tot Sinha & Dougherty is Kitainik er echter wel in geslaagd om een karakterisatie te geven van alle vaaginclusies die voldoen aan de vier gestipuleerde axioma's.

**Definitie 4.16** [34] *De klasse  $\Phi$  is gedefinieerd als de klasse der afbeeldingen  $\varphi$  die voldoen aan:*

(a<sub>φ</sub>)  *$\varphi$  is een  $\Delta - [0, 1]$  afbeelding, met  $\Delta$  de driehoek bepaald door*

$$\Delta = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x \geq y\},$$

(b<sub>φ</sub>)  *$\varphi$  heeft dalende partiële afbeeldingen,*

(c<sub>φ</sub>)  *$\varphi(0, 0) = \varphi(1, 0) = 1$  en  $\varphi(1, 1) = 0$ .*

**Eigenschap 4.12** [34] *Zij  $Inc$  een  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) - [0, 1]$  afbeelding. Er geldt:  $Inc$  voldoet aan de voorwaarden van Definitie 4.15 als en slechts als er een afbeelding  $\varphi$  in  $\Phi$  bestaat zo dat  $Inc = Inc_\varphi$ , met:*

$$Inc_\varphi(A, B) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(\max(A(x), 1 - B(x)), \min(A(x), 1 - B(x))),$$

voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .

In hetgeen volgt zullen we een vaaginclusie in de zin van Kitainik steeds aanduiden m.b.v.  $Inc_\varphi$ . Eens men over een dergelijke vaaginclusie beschikt, kan men de corresponderende vaagmorphologische operatoren bepalen. We beperken ons tot de definitie van de erosie en dilatatie; sluiting en opening worden gedefinieerd als de gekende combinaties.

**Definitie 4.17** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De vaagmorphologische  $\varphi$ -erosie  $E_\varphi(A, B)$  is gedefinieerd als:*

$$E_\varphi(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} \varphi(\max(B(x - y), 1 - A(x)), \min(B(x - y), 1 - A(x))).$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De vaagmorphologische  $\varphi$ -dilatatie  $D_\varphi(A, B)$  is gedefinieerd als:

$$D_\varphi(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} (1 - \varphi[\max(B(x - y), A(x)), \min(B(x - y), A(x))]).$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Het corresponderend vaagmorfologisch model noemen we het K-model.

### Verband met het AVLM

We tonen aan dat ook het K-model ingebed kan worden in het AVLM. We doen dit door met elke  $\varphi$  in  $\Phi$  een gepast conjunctor-implicator koppel  $(\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{I}_\varphi)$  te associëren.

**Definitie 4.18** *Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ . De  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  afbeeldingen  $\mathcal{C}_\varphi$  en  $\mathcal{I}_\varphi$  worden gedefinieerd door:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varphi(a, b) &= 1 - \varphi(\max(a, b), \min(a, b)), \\ \mathcal{I}_\varphi(a, b) &= \varphi(\max(a, 1 - b), \min(a, 1 - b)), \end{aligned}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Eigenschap 4.13** *Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ . Er geldt:*

- (i)  $\mathcal{C}_\varphi$  is een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ .
- (ii) De conjunctor  $\mathcal{C}_\varphi$  is een semi-norm op  $[0, 1]$  als en slechts als  $\varphi(1, a) = 1 - a$ , voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ .

BEWIJS: (i) Zowel de randvoorwaarden als de monotoniteitsvoorwaarden voor  $\mathcal{C}_\varphi$  volgen onmiddellijk uit de eigenschappen van de afbeelding  $\varphi$ . De commutativiteit is triviaal.

(ii) Zij  $a$  in  $[0, 1]$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varphi(1, a) = a &\Leftrightarrow 1 - \varphi(\max(1, a), \min(1, a)) = a \\ &\Leftrightarrow 1 - \varphi(1, a) = a \\ &\Leftrightarrow \varphi(1, a) = 1 - a. \quad \square \end{aligned}$$

Uit (ii) besluiten we dat een deelklasse van  $\Phi$ , namelijk de deelklasse die gekarakteriseerd wordt door de randvoorwaarde  $\varphi(1, a) = 1 - a$ , aanleiding zal geven tot commutatieve semi-normen  $\mathcal{C}_\varphi$ . Hier onderscheidt het K-model zich van het SD-model, waar slechts juist één afbeelding  $\lambda$  in  $\Lambda$  correspondeerde met een commutatieve semi-norm.

Een analoge conclusie volgt uit de volgende eigenschap.

**Eigenschap 4.14** *Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ . Er geldt:*

- (i)  $\mathcal{I}_\varphi$  is een implicator op  $[0, 1]$ . Deze implicator is bovendien contrapositief t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ .
- (ii) De implicator  $\mathcal{I}_\varphi$  is een randimplicator op  $[0, 1]$  als en slechts als  $\varphi(1, a) = 1 - a$ , voor alle  $a$  in  $[0, 1]$ .

BEWIJS: analoog aan het bewijs van Eigenschap 4.13. □

**Eigenschap 4.15** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\varphi$  in  $\Phi$ . Er geldt:*

$$D_\varphi(A, B) = D_{\mathcal{C}_\varphi}(A, B),$$

en:

$$E_\varphi(A, B) = E_{\mathcal{I}_\varphi}(A, B).$$

BEWIJS: uit de definities.  $\square$

Hiermee is formeel aangetoond dat het K-model een onderdeel is van het AVLM. Het verband met het AVLM is echter nog precieser te beschrijven. Om dit aan te tonen maken we gebruik van de volgende definities en enkele hulpresultaten.

**Definitie 4.19** *Zij  $\mathcal{C}$  een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$  en zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  die contrapositief is t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ . De  $\Delta = [0, 1]$  afbeeldingen  $\varphi_{\mathcal{C}}$  en  $\varphi_{\mathcal{I}}$  worden gedefinieerd door:*

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}}(a, b) &= 1 - \mathcal{C}(a, b), \\ \varphi_{\mathcal{I}}(a, b) &= \mathcal{I}(a, 1 - b),\end{aligned}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $\Delta$ .

**Lemma 4.1** *Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ , en zij  $\mathcal{C}$  een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ .*

- (i) *De operator  $\mathcal{C}_{\varphi}$  is een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ .*
- (ii) *De operator  $\varphi_{\mathcal{C}}$  behoort tot de klasse  $\Phi$ .*
- (iii) *Er geldt:  $\mathcal{C}_{\varphi_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$  en  $\varphi_{\mathcal{C}_{\varphi}} = \varphi$ .*

BEWIJS. (i) en (ii) volgen door controle. We tonen (iii) aan. Zij hiertoe eerst  $\mathcal{C}$  een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ . Voor  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$  volgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\varphi_{\mathcal{C}}}(a, b) &= 1 - \varphi_{\mathcal{C}}(\max(a, b), \min(a, b)) \\ &= 1 - (1 - \mathcal{C}(\max(a, b), \min(a, b))) \\ &= \mathcal{C}(\max(a, b), \min(a, b)) \\ &= \mathcal{C}(a, b),\end{aligned}$$

waarbij we voor de laatste overgang gebruik maken van de commutativiteit van  $\mathcal{C}$ .

Zij vervolgens  $\varphi$  in  $\Phi$ . Voor  $(a, b)$  in  $\Delta$  (d.w.z.  $a \geq b$ ) volgt:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}_{\varphi}}(a, b) &= 1 - \mathcal{C}_{\varphi}(a, b) \\ &= 1 - (1 - \varphi(\max(a, b), \min(a, b))) \\ &= \varphi(\max(a, b), \min(a, b)) \\ &= \varphi(a, b),\end{aligned}$$

waarbij we voor de laatste overgang gebruik maken van het feit dat  $a \geq b$ .  $\square$

Bijgevolg bestaat er een 1-1 correspondentie tussen afbeeldingen uit de klasse  $\Phi$  enerzijds en commutatieve conjunctoren op  $[0, 1]$  anderzijds. Op een analoge manier kunnen we aantonen dat er ook een 1-1 correspondentie bestaat tussen afbeeldingen uit de klasse  $\Phi$  enerzijds en implicatoren op  $[0, 1]$  die contrapositief zijn t.o.v. de standaardnegator anderzijds.

**Lemma 4.2** *Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ , en zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  die contrapositief is t.o.v. de standaardnegator.*

- (i) *De operator  $\mathcal{I}_{\varphi}$  is een implicator op  $[0, 1]$  die contrapositief is t.o.v. de standaardnegator.*
- (ii) *De operator  $\varphi_{\mathcal{I}}$  behoort tot de klasse  $\Phi$ .*
- (iii) *Er geldt:  $\mathcal{I}_{\varphi_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$  en  $\varphi_{\mathcal{I}_{\varphi}} = \varphi$ .*

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van Lemma 4.1.  $\square$

Het volgende lemma is ook van belang.

**Lemma 4.3**

(i) Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ . Er geldt:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\varphi &= \mathcal{C}_{\mathcal{I}_\varphi, N_s}, \\ \mathcal{I}_\varphi &= \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\varphi, N_s}.\end{aligned}$$

(ii) Zij  $\mathcal{C}$  een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$  en zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  die contrapositief is t.o.v. de standaardnegator. Indien  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, N_s}$  of equivalent hiermee  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, N_s}$ , dan geldt:  
 $\varphi_{\mathcal{C}} = \varphi_{\mathcal{I}}$ .

BEWIJS. (i) Zij  $\varphi$  in  $\Phi$ . Dan volgt, voor  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{I}_\varphi, N_s}(a, b) &= 1 - \mathcal{I}_\varphi(a, 1 - b) \\ &= 1 - \varphi(\max(a, b), \min(a, b)) \\ &= \mathcal{C}_\varphi(a, b).\end{aligned}$$

De gelijkheid  $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{I}_{\mathcal{C}_\varphi, N_s}$  wordt analoog bewezen.

(ii) Zij  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$  respectievelijk een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$  en een implicator op  $[0, 1]$  die contrapositief is t.o.v. de standaardnegator. Indien  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, N_s}$ , dan volgt voor alle  $(a, b)$  in  $\Delta$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}}(a, b) &= 1 - \mathcal{C}(a, b) \\ &= 1 - (1 - \mathcal{I}(a, 1 - b)) \\ &= \mathcal{I}(a, 1 - b) \\ &= \varphi_{\mathcal{I}}(a, b). \quad \square\end{aligned}$$

Vervolgens introduceren we de klasse  $\Omega$ .

**Definitie 4.20** De klasse  $\Omega$  is gedefinieerd als de klasse der geordende paren  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  die voldoen aan:

- (a<sub>w</sub>)  $\mathcal{C}$  is een commutatieve conjunctor op  $[0, 1]$ ,
- (b<sub>w</sub>)  $\mathcal{I}$  is een implicator op  $[0, 1]$  die contrapositief is t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ ,
- (c<sub>w</sub>)  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$  zijn met elkaar verbonden door de relatie  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, N_s}$ , of equivalent  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, N_s}$ .

De voorgaande lemmas impliceren nu dat er een 1-1 correspondentie bestaat tussen de klasse  $\Phi$  en  $\Omega$ .

**Eigenschap 4.16** De  $\Phi \mapsto \Omega$  afbeelding  $M$ , gedefinieerd door:

$$M(\varphi) = (\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{I}_\varphi),$$

voor alle  $\varphi$  in  $\Phi$ , is een bijectie.

BEWIJS. Merk vooreerst op dat de afbeelding  $M$  goed gedefinieerd is, d.w.z. als  $\varphi \in \Phi$  dan  $(\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{I}_\varphi) \in \Omega$ . Dit volgt onmiddellijk uit de lemmas 4.1(i), 4.2(i) en 4.3(i).

We bewijzen eerst dat  $M$  surjectief is. Zij  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  in  $\Omega$ , dan volgt uit lemmas 4.1(ii), 4.2(ii) en 4.3(ii) dat de afbeelding

$$\varphi = \varphi_{\mathcal{C}} \equiv \varphi_{\mathcal{I}}$$

tot de klasse  $\Phi$  behoort, en dat  $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{I}$ .

Om aan te tonen dat  $M$  injectief is veronderstellen we dat  $(\mathcal{C}_{\varphi_1}, \mathcal{I}_{\varphi_1}) = (\mathcal{C}_{\varphi_2}, \mathcal{I}_{\varphi_2})$ , met  $\varphi_1, \varphi_2$  in  $\Phi$ . Uit lemmas 4.1(iii) en 4.2(iii) volgt dan dat  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Immers,  $\mathcal{C}_{\varphi_1} = \mathcal{C}_{\varphi_2}$  impliceert  $\varphi_{\mathcal{C}_{\varphi_1}} = \varphi_{\mathcal{C}_{\varphi_2}}$ , en wegens Lemma 4.1(iii) is dit equivalent met  $\varphi_1 = \varphi_2$ . De gelijkheid  $\mathcal{I}_{\varphi_1} = \mathcal{I}_{\varphi_2}$  leidt m.b.v. Lemma 4.2(iii) tot dezelfde conclusie.  $\square$

We kunnen bijgevolg besluiten dat er een 1-1 correspondentie bestaat tussen vaagmorfologieën afgeleid uit de vaaginclusie in de zin van Kitainik enerzijds, en vaagmorfologieën afgeleid uit conjunctor-implicator paren uit de klasse  $\Omega$ . Deze laatste klasse van vaagmorfologieën zijn een deelklasse van het AVL.M.

### Verband met het BM-model

Een vaagmorfologie in het BM-model wordt bepaald door het paar  $(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}})$ , bestaande uit een driehoeksnorm op  $[0, 1]$  en een geassocieerde modelimplicator, mede bepaald door een involutieve negator  $\mathcal{N}$ .

**Eigenschap 4.17** *Zij  $\mathcal{T}$  een driehoeksnorm en zij  $\mathcal{N}$  een involutieve negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}) \in \Omega \Leftrightarrow \mathcal{N} = N_s.$$

BEWIJS.

Stel dat  $(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}})$  tot de klasse  $\Omega$  behoort, dan volgt uit voorwaarde  $(c_\omega)$  dat  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}, N_s}$ , d.w.z.

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}(a, \mathcal{N}(b))) = 1 - \mathcal{T}(a, 1 - b),$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . In het bijzonder volgt voor  $b = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{T}(a, \mathcal{N}(0))) &= 1 - \mathcal{T}(a, 1) \\ \mathcal{N}(\mathcal{T}(a, 1)) &= 1 - \mathcal{T}(a, 1) \\ \mathcal{N}(a) &= 1 - a, \end{aligned}$$

en dus geldt  $\mathcal{N} = N_s$ .

Omgekeerd, indien  $\mathcal{N} = N_s$ , volgt onmiddellijk dat  $(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}})$  tot de klasse  $\Omega$  behoort.  $\square$

Uit deze Eigenschap besluiten we dat het BM-model een onderdeel vormt van het K-model indien  $\mathcal{N} = N_s$ . In dat geval is het BM-model wel nog restrictiever dan het K-model, aangezien er strengere eisen worden opgelegd aan de logische operatoren.

Indien in het BM-model geldt dat  $\mathcal{N} \neq N_s$ , dan genereren het K-model en het BM-model geen gemeenschappelijke vaagmorfologieën.

### Verband met het Z-model

**Eigenschap 4.18** *Zij  $C_z$  de conjunctor en  $I_z$  de implicator op  $[0, 1]$  zoals bepaald door Definitie 4.9. Er geldt:*

$$(C_z, I_z) \in \Omega.$$

BEWIJS. Dit volgt uit Eigenschap 4.4.  $\square$

De vaagmorfologie gegenereerd door het Z-model kan bijgevolg beschreven worden in het K-model. Gelet op Eigenschap 4.16 zal er immers een afbeelding  $\varphi$  in  $\Phi$  bestaan zo dat  $C_z = C_\varphi$  en  $I_z = \mathcal{I}_\varphi$ .

### Verband met het SD-model

De volgende eigenschap impliceert dat het SD-model ingebed kan worden in het K-model, d.w.z. dat het K-model algemener is dan het SD-model.

**Eigenschap 4.19** *Zij  $\lambda$  in  $\Lambda$ , en zij  $\mathcal{C}_\lambda$  de conjunctor en  $\mathcal{I}_\lambda$  de implicator op  $[0, 1]$  zoals bepaald door Definitie 4.12. Er geldt:*

$$(\mathcal{C}_\lambda, \mathcal{I}_\lambda) \in \Omega.$$

BEWIJS. De voorwaarden  $(a_\omega)$  en  $(b_\omega)$  zijn voldaan wegens respectievelijk de Eigenschappen 4.7 en 4.8, en de voorwaarde  $(c_\omega)$  volgt onmiddellijk door controle. Bijgevolg behoort  $(\mathcal{C}_\lambda, \mathcal{I}_\lambda)$  tot de klasse  $\Omega$ .  $\square$

We onderzoeken de link tussen beide modellen in iets meer detail. Gegeven een  $\lambda$  in  $\Lambda$  (corresponderend met een vaagmorfologie in het SD-model) en het bijhorend conjunctor-implicator paar

$(\mathcal{C}_\lambda, \mathcal{I}_\lambda)$  bestaat er wegens de Eigenschappen 4.16 en 4.19 een afbeelding  $\varphi_\lambda$  in  $\Phi$  (corresponderend met een vaagmorfologie in het K-model) zo dat:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\lambda &= \mathcal{C}_{\varphi_\lambda} \\ \mathcal{I}_\lambda &= \mathcal{I}_{\varphi_\lambda}.\end{aligned}$$

Wegens Eigenschap 4.2 geldt in het bijzonder dat  $\varphi_\lambda = \varphi_{\mathcal{I}_\lambda}$ , d.w.z. voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ :

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(a, b) &= \varphi_{\mathcal{I}_\lambda}(a, b) \\ &= \mathcal{I}_\lambda(a, 1 - b) \\ &= \min(1, \lambda(a) + \lambda(b)) \\ &= S_W(\lambda(a), \lambda(b)),\end{aligned}$$

met  $S_W$  de Lukasiewicz driehoeksconorm. Hierdoor beschikken we over een eenvoudige formule om, gegeven een  $\lambda$  in  $\Lambda$  (SD-model), een  $\varphi_\lambda$  in  $\Phi$  (K-model) te construeren zodanig dat deze correspondeert met dezelfde vaagmorfologie.

Dat het omgekeerde niet waar is volgt uit de vaststelling dat er bijvoorbeeld geen afbeelding  $\lambda$  in  $\Lambda$  bestaat zo dat  $\mathcal{I}_\lambda = I_{KD}$  (dit volgt uit Eigenschap 4.8), terwijl er wel een afbeelding  $\varphi$  in  $\Phi$  bestaat zo dat  $\mathcal{I}_\varphi = I_{KD}$  (dit volgt uit Lemma 4.2).

#### 4.4.4 BK-model: vaaginclusie van Bandler & Kohout

##### Methodologie en definities

Tenslotte onderzoeken we welke vaagmorfologieën corresponderen met de vaaginclusie van Bandler & Kohout. Daar waar de vaaginclusie van Sinha & Dougherty en de vaaginclusie van Kitainik gebaseerd zijn op een set van axioma's, is de vaaginclusie van Bandler & Kohout gestoeld op een logische aanpak. Hiermee bedoelen we dat ze de scherpe karakterisatie van inclusie, met name:

$$\begin{aligned}A \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in A \rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(A(x) = 1 \rightarrow B(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)([A(x) \rightarrow B(x)] = 1) \\ &\Leftrightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [A(x) \rightarrow B(x)] = 1\end{aligned}$$

fuzzificeren door de onderliggende binaire implicatie te veralgemenen naar een implicator op  $[0, 1]$ .

**Definitie 4.21** [3] *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . De  $\mathcal{I}$ -vaaginclusie  $Inc_{\mathcal{I}}$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  is de  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) - [0, 1]$  afbeelding, gedefinieerd door:*

$$Inc_{\mathcal{I}}(A, B) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(A(x), B(x)),$$

voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .

Men ziet onmiddellijk in dat de vaagmorfologische erosie die correspondeert met deze vaaginclusie, namelijk  $Inc_{\mathcal{I}}(T_y(B), A)$  samenvalt met de vaagmorfologische  $\mathcal{I}$ -erosie  $E_{\mathcal{I}}(A, B)$  uit het AVLm. De corresponderende dilatatie wordt, gelet op het principe dat deze gedefinieerd wordt m.b.t. dualiteit t.o.v. de standaardnegator, gegeven door de vaagmorfologische  $\mathcal{C}$ -dilatatie uit het AVLm, met  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, N_s}$ .

Het vaagmorfologisch model gebaseerd op de vaaginclusie van Bandler & Kohout noemen we het BK-model. Het model hangt af van één parameter, namelijk de implicator  $\mathcal{I}$ .



### Een alternatieve benadering

In [6] wordt een vaagmorfologisch model ingevoerd op basis van een afgezwakte vaaginclusie van Bandler & Kohout. Formeel is de definitie van de vaaginclusie  $Inc_{\mathcal{I}}$  dezelfde, maar de operator  $\mathcal{I}$  hoeft a priori geen implicator op  $[0, 1]$  te zijn. Het volstaat dat  $\mathcal{I}$  een  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  operator is die voldoet aan

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(1, 1) &= 1, \\ \mathcal{I}(1, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Men verantwoordt deze zwakkere voorwaarden door te stellen dat een dergelijke operator de meest ruime zinvolle veralgemening is van de binaire implicatie in het kader van de klassieke karakterisatie van inclusie m.b.v. de binaire implicatie (zie hoger). Het dient echter opgemerkt te worden dat aan de afgezwakte operator  $\mathcal{I}$  geen zinvolle logische interpretatie gehecht kan worden.

Vervolgens onderzoekt men aan welke voorwaarden de operator  $\mathcal{I}$  bijkomend moet voldoen opdat een aantal belangrijke eigenschappen in de context van morfologische operatoren vervuld zouden zijn. Men beschouwt in het bijzonder de compatibiliteit met binaire morfologie, interactie met eindige unie en doorsnede, het principe van de lokale kennis, en invariantie onder translatie en schaling<sup>8</sup>. Op basis van dit onderzoek besluit men dat de operator  $\mathcal{I}$ , om aanleiding te geven tot een zinvolle uitbreiding van de binaire erosie, ook moet voldoen aan:

- (i) de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  zijn dalend;
- (ii) de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  zijn stijgend;
- (iii)  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{I}(0, a) = 1)$ .

Met deze bijkomende voorwaarden wordt de operator  $\mathcal{I}$  echter een “gewone” implicator op  $[0, 1]$ . Hieruit besluiten we dat het voorgestelde vaagmorfologisch model niet verschilt van het originele BK-model.

### Verband met het AVLm

Uit de constructie volgt onmiddellijk dat een vaagmorfologie in het BK-model, bepaald door een implicator  $\mathcal{I}$ , correspondeert met de vaagmorfologie bepaald door het conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{C}_{\mathcal{I}, N_s}, \mathcal{I})$  in het AVLm.

### Verband met het BM-model

Het BM-model vertrekt van de keuze van een driehoeksnorm  $\mathcal{T}$ , waarmee een modelimplicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$  wordt geassocieerd, met  $\mathcal{N}$  een involutieve negator. In het AVLm correspondeert dit met het conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}})$ . Wegens Lemma 1.7 is dit echter equivalent met het conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{T}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}, \mathcal{I})$ , zodat het BM-model ook opgevat kan worden als vertrekkende van een modelimplicator  $\mathcal{I}$  waarmee een driehoeksnorm  $\mathcal{T}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  wordt geassocieerd.

Meteen verkrijgen we ook inzicht in het verband tussen het BK-model en het BM-model:

- Beschouw het BM-model met  $\mathcal{N} = N_s$ ; verder aangeduid als het BMs-model. Er volgt dan onmiddellijk dat het BMs-model ingebed kan worden in het BK-model. Het BK-model is echter algemener dan het BMs-model omwille van het feit dat de implicator  $\mathcal{I}$  in het BMs-model een modelimplicator moet zijn, terwijl dit in het BK-model een willekeurige implicator mag zijn.

---

<sup>8</sup>De auteurs van [6] gebruiken een foutieve definitie van het begrip *schaling van een vaagverzameling*. Ze stellen met name dat de schaling  $H_\lambda(A)$  van een vaagverzameling  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  bepaald wordt door  $H_\lambda(A)(x) = \lambda A(x)$ , voor alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , met  $\lambda$  een niet-negatief reëel getal. Men ziet echter onmiddellijk in dat deze definitie fout loopt van zodra  $\lambda > 1$ . Het is dan ook niet verwonderlijk dat de auteurs tot de conclusie komen dat de invariantie onder schaling niet geldig is. Voor de correcte definitie van schaling verwijzen we naar Definitie 2.24. De eigenschap in het kader van het AVLm wordt besproken in Hoofdstuk 5, net zoals de andere eigenschappen trouwens.

- Beschouw vervolgens het BM-model met  $\mathcal{N} \neq N_s$ . In dat geval zijn de corresponderende vaagmorfologische dilatatie en erosie in het BM-model wel  $\mathcal{N}$ -duaal, maar niet duaal t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ . Bijgevolg bestaat er geen verband met het BK-model: de klasse der vaagmorfologieën afgeleid uit het BM-model met  $\mathcal{N} \neq N_s$  en de klasse der vaagmorfologieën afgeleid uit het BK-model zijn disjunct.

### Verband met Z-model

Het Z-model is een bijzonder geval van het BK-model, aangezien de met het Z-model corresponderende vaagmorfologie in het BK-model gegenereerd wordt door de implicator  $I_z$ . Uit Eigenschap 4.4 volgt bovendien dat voldaan is aan de dualiteitsvoorwaarde tussen de z-dilatatie en de z-erosie.

### Verband met SD-model

De vaagmorfologieën gegenereerd door het SD-model corresponderen wegens de Eigenschappen 4.7 en 4.8 met conjunctor-implicator paren  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  in het AVLM, met  $\mathcal{C}$  commutatief (en in juist één geval een semi-norm),  $\mathcal{I}$  contrapositief t.o.v. de standaardnegator (en in juist één geval een randimplicator), en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, N_s}$  of equivalent  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, N_s}$  (door constructie; men kan dit ook rechtstreeks verifiëren). Hieruit volgt onmiddellijk dat het BK-model algemener is (het laat immers willekeurige implicatoren toe), en dat het SD-model bijgevolg ingebed kan worden in het BK-model.

### Verband met K-model

Op analoge gronden als voor het SD-model leiden we onmiddellijk af dat het K-model ingebed kan worden in het BK-model.

## 4.4.5 Afsluitende opmerking

In de bovenstaande paragrafen werden de vaaginclusies van Zadeh, Sinha & Dougherty, Kitainik en Bandler & Kohout gedefinieerd, en werden de corresponderende vaagmorfologische modellen besproken. Er komen in de literatuur echter ook nog andere indicatoren voor vaaginclusie voor. Sommige van deze andere vaaginclusies worden vermeld in het kader van vaagmorfologie, zoals bijvoorbeeld de Kosko-indicator of de Hausdorff-indicator in [59], maar de corresponderende vaagmorfologische modellen worden niet expliciet vermeld of bestudeerd. De reden hiervoor is dat deze vaaginclusies niet passen binnen één van de standaardmodellen voor vaaginclusie (cfr. de modellen die we hoger besproken hebben), en als minder geschikt worden beschouwd. Immers, hoe minder eigenschappen voldaan zijn door de vaaginclusie, hoe minder eigenschappen voldaan zullen zijn door het corresponderend vaagmorfologisch model.

Gelet op de geringe aandacht die aan alternatieve indicatoren voor vaaginclusie in de literatuur wordt geschonken in het kader van vaagmorfologie, zullen we het proefschrift ook niet “overladen” door deze alsnog in detail te bespreken en uit te werken. Met deze bemerking besluiten we deze paragraaf over vaagmorfologische modellen gebaseerd op vaaginclusies.

## 4.5 Andere modellen voor vaagmorfologie

De ontwikkeling van een vaagmorfologie kan, behalve op een fuzzificatie van de onderliggende logische operatoren of op een fuzzificatie van inclusie, ook gestoeld zijn op de fuzzificatie van andere concepten. In een eerste deelparagraaf bespreken we bijvoorbeeld een benadering die gebaseerd is op de fuzzificatie van de Minkowski optelling. Een eenvoudig verband tussen de klassieke Minkowski optelling en de binaire dilatatie leidt dan makkelijk tot een definitie voor een vaagmorfologische dilatatie; de corresponderende vaagmorfologische erosie wordt gedefinieerd op basis van dualiteit t.o.v. de standaardnegator.

Een ander model voor vaagmorfologie is gebaseerd op de theorie der vaagintegralen. Hoewel de domeinen van vaagmorfologie en vaagintegralen heel verschillend zijn, blijkt dat een bepaald type van vaagintegraal, met name de Sugeno integraal, opgevat kan worden als een vaagmorfologische dilatatie. Ook hier wordt de corresponderende vaagmorfologische erosie dan gedefinieerd op basis van dualiteit t.o.v. de standaardnegator.

Tenslotte bespreken we ook nog de vier vaagmorfologische erosies die werden ingevoerd door di Gesu. Als we louter de morfologische operatoren beschouwen stellen we vast dat ze niet gebaseerd zijn op vaaglogische operatoren, noch op vaaginclusies, noch op enige andere notie uit de vaagverzamelingenleer. Het zijn in feite “gewone” operatoren die intern inwerken op  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen, maar die door de context waarin ze werden ingevoerd als vaagmorfologisch werden bestempeld. We konden dan ook niet nalaten ze in onze studie op te nemen.

Een vierde en laatste model voor vaagmorfologie is gebaseerd op een fuzzificatie van het begrip adjunctie. Deze benadering is totaal nieuw en wordt daarom niet in dit, maar wel in een afzonderlijk hoofdstuk besproken (zie Hoofdstuk 6).

### 4.5.1 M-model: vervaging van de Minkowski optelling

#### Methodologie en definities

De klassieke Minkowski optelling  $\oplus$  werd reeds gedefinieerd in Definitie 3.9. Gegeven  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  geldt:

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} T_b(A),$$

en men leidt makkelijk af dat:

$$A \oplus B = D(A, -B).$$

Een fuzzificatie van de operator  $\oplus$  geeft bijgevolg op natuurlijke wijze aanleiding tot een fuzzificatie van de binaire dilatatie. Klassiek geldt:

$$\begin{aligned} y \in A \oplus B &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{b \in B} T_b(A) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(y \in T_b(A)) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(y - b \in A) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(x \in B \wedge y - x \in A) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)(B(x) = 1 \wedge A(y - x) = 1) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}^n)([B(x) \wedge A(y - x)] = 1) \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [B(x) \wedge A(y - x)] = 1. \end{aligned}$$

**Definitie 4.22** [10] Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De vage Minkowski optelling  $A \oplus B$  is gedefinieerd als<sup>9</sup>:

$$(A \oplus B)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \min(B(x), A(y - x)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definitie 4.23** [10] Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De vaagmorfologische  $\oplus$ -dilatatie  $D_{\oplus}(A, B)$  wordt gedefinieerd door:

$$D_{\oplus}(A, B)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \min(B(x - y), A(x)).$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

De vaagmorfologische  $\oplus$ -erosie  $E_{\oplus}(A, B)$  wordt gedefinieerd door:

<sup>9</sup>Merk op dat men de binaire operator  $\wedge$  hier fuzzificeert d.m.v. het minimum, d.w.z. een specifieke conjunctoor in plaats van een algemene.

$$E_{\oplus}(A, B)(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max(1 - B(x - y), A(x)).$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Het vaagmorfologisch model dat gebaseerd is op deze aanpak noemen we het M-model. Merk op dat het eerder besproken model van Popov in het kader van de vaaginclusie van Sinha & Dougherty (cfr. Definitie 4.14) inderdaad samenvalt met het M-model.

### Verband met het AVL M

**Eigenschap 4.20** [10] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$D_{\oplus}(A, B) = D_{T_M}(A, B),$$

en

$$E_{\oplus}(A, B) = E_{I_{KD}}(A, B).$$

BEWIJS. Onmiddellijk uit de respectievelijke definities. □

De vaagmorfologie gegenereerd door het M-model correspondeert dus met het conjunctor-implicator paar  $(T_M, I_{KD})$  in het AVL M.

### Verband met andere vaagmorfologische modellen

Naast inbedding in het AVL M, volgt vrijwel onmiddellijk dat het M-model ook ingebed kan worden in:

- het BM-model (want  $T_M$  is een driehoeksconorm, en  $I_{KD} = \mathcal{I}_{T_M, N_s}$ );
- het K-model (want het paar  $(T_M, I_{KD})$  behoort tot de klasse  $\Omega$ );
- het BK-model want  $I_{KD}$  is een implicator, en  $T_M = \mathcal{C}_{I_{KD}, N_s}$ ).

Verder is het ook duidelijk dat er geen verband bestaat met het Z-model. Tenslotte volgt uit de Eigenschappen 4.7 en 4.8 dat het M-model evenmin ingebed kan worden in het SD-model. De  $\oplus$ -dilatatie correspondeert immers met de driehoeksnorm  $T_M$ , terwijl een vaagmorfologische dilatatie in het SD-model enkel correspondeert met een driehoeksnorm indien deze gegeven wordt door  $T_W$ . Analoog correspondeert de  $\oplus$ -erosie met de modelimplicator  $I_{KD}$ , terwijl een vaagmorfologische erosie in het SD-model enkel correspondeert met een modelimplicator indien deze gegeven wordt door  $I_W$ .

### 4.5.2 SI-model: vaagmorfologie gebaseerd op vaagintegralen

Het vaagmorfologisch model gebaseerd op vaagintegralen is gestoeld op Definitie 3.15 van algebraïsche erosies en dilataties. In dit model spreekt men immers van vaagmorfologische erosies en dilataties van zodra ze voldoen aan de voorwaarde uit Definitie 3.15, zijnde dat erosies moeten commuteren met infimum en dilataties moeten commuteren met supremum.

Het model werd ontwikkeld in een discrete context. We zullen verder in deze paragraaf kort uitweiden over een veralgemening naar een continue context.

**Idee**

De morfologische s-dilatatie en de morfologische s-erosie (cfr. Definitie 3.20) worden gedefinieerd m.b.v. respectievelijk het supremum en het infimum. In het discrete geval, in het bijzonder indien  $A \in \mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$  en  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ , kunnen de definities herschreven worden als:

$$\begin{aligned} D_s(A, B)(y) &= \max_{x_i \in B} A(y + x_i), \\ E_s(A, B)(y) &= \min_{x_i \in B} A(y + x_i). \end{aligned}$$

Beide formules kunnen onder de volgende algemene vorm gebracht worden:

$$O(A, B)(y) = \mathcal{O}(A(y + x_1), A(y + x_2), \dots, A(y + x_m)).$$

Het SI-model is ontstaan door het onderzoek naar vaaglogische operatoren  $\mathcal{O}$ , andere dan het maximum en het minimum, die eveneens aanleiding geven tot algebraïsche dilataties en erosies. Voor dilataties kan dit gerealiseerd worden m.b.v. de discrete Sugeno integraal; vandaar dat we naar dit model verwijzen als het SI-model.

**Vaagmaten en vaagintegralen**

De discrete Sugeno-integraal wordt gedefinieerd t.o.v. een vaagmaat. Vaagmaten zijn uitbreidingen van klassieke additieve maten (bijvoorbeeld probabiliteitsmaten) naar een meer algemene klasse van niet-additieve maten, en worden als volgt gedefinieerd.

**Definitie 4.24** [25] *Zij  $\mathcal{X}$  een universum. Een vaagmaat op  $\mathcal{X}$  is een  $\mathcal{M}(\mathcal{X}) - [0, 1]$  afbeelding  $\mu$  die voldoet aan:*

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $(\forall (A, B) \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}(\mathcal{X}))(A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B))$ .

De additiviteitsvoorwaarde in het geval van klassieke maten is bij vaagmaten dus vervangen door een monotoniteitsvoorwaarde. Aangezien de additiviteit van klassieke maten automatisch ook de monotoniteit ervan impliceert, zijn vaagmaten effectief een uitbreiding van klassieke maten.

Bijzondere vaagmaten zijn de possibiliteitsmaten en de Sugeno  $\lambda$ -vaagmaten.

**Definitie 4.25** *Een  $\mathcal{M}(\mathcal{X}) - [0, 1]$  afbeelding  $\mu$  is een possibiliteitsmaat op  $\mathcal{X}$  indien geldt:*

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$  en  $\mu(\mathcal{X}) = 1$ ,
- (ii)  $(\forall (A, B) \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}(\mathcal{X}))(\mu(A \cup B) = \max(\mu(A), \mu(B)))$ .

De voorwaarde  $\mu(\mathcal{X}) = 1$  is de *regulariteit* of *genormaliseerdheid* van de vaagmaat; de tweede voorwaarde staat bekend als de *maxitiviteit*. Met elke possibiliteitsmaat  $\mu$  wordt een possibiliteitsdistributie  $\Pi_\mu$  geassocieerd, bepaald door:

$$\begin{aligned} \Pi_\mu : \mathcal{X} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mu\{x\}, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Van elke possibiliteitsdistributie  $\Pi$  kan aangetoond worden dat<sup>10</sup>

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \Pi(x) = 1;$$

hetgeen zich in het geval  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  herleid tot

$$\max_{i=1, \dots, m} \Pi(x_i) = 1.$$

In dergelijke gevallen kan de possibiliteitsmaat afgeleid worden uit de possibiliteitsdistributie, door gebruik te maken van de maxitiviteit van de vaagmaat. In het continue geval is de maxitiviteit

<sup>10</sup>Men zou deze eigenschap kunnen omschrijven als de *pseudo-genormaliseerdheid* van de possibiliteitsdistributie; vergelijk met Definitie 1.9 in het kader van vaagverzamelingen.

niet voldoende, maar moet de maat voldoen aan een strengere voorwaarde die gekend staat als *f-additiviteit*. Deze stelt dat

$$\mu \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sup_{i \in I} \mu(A_i),$$

voor elke familie  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ .

**Definitie 4.26** *Zij  $\lambda > -1$ . Een  $\mathcal{M}(\mathcal{X}) - [0, 1]$  afbeelding  $\mu$  is een Sugeno  $\lambda$ -vaagmaat op  $\mathcal{X}$  indien geldt:*

- (i)  $\mu(\mathcal{X}) = 1$ ,
- (ii)  $(\forall (A, B) \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \times \mathcal{M}(\mathcal{X}))(A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B))$ .

Hier staat de tweede voorwaarde bekend als de  $\lambda$ -regel<sup>11</sup>. Indien  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , en indien de waarden  $\mu_i = \mu(\{x_i\})$  gekend of toegewezen zijn, dan kan men  $\lambda$  berekenen uit

$$\mu(\mathcal{X}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \prod_{i=1}^m (1 + \lambda\mu_i) - 1 \right) = 1;$$

men kan immers aantonen dat deze vergelijking een unieke oplossing  $\lambda > -1$  bezit. Indien  $\lambda$  gekend is, kan  $\mu(A)$  voor elke  $A$  in  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  berekend worden door middel van

$$\mu(A) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot \left( \prod_{i: x_i \in A} (1 + \lambda\mu_i) - 1 \right) & \text{als } \lambda \neq 0 \\ \sum_{i: x_i \in A} \mu_i & \text{als } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Vervolgens definiëren we de discrete Sugeno integraal.

**Definitie 4.27** [26] *Zij  $\mu$  een vaagmaat op  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , en zij  $\mathcal{T}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$ . Zij verder  $f$  een  $\mathcal{X} - [0, 1]$  afbeelding. De discrete  $\mathcal{T}$ -Sugeno integraal  $S_\mu^{\mathcal{T}}$  van de afbeelding  $f$  t.o.v. de vaagmaat  $\mu$  is gedefinieerd als*

$$S_\mu^{\mathcal{T}}(f(x_1), f(x_1), \dots, f(x_m)) = \max_{i=1, \dots, m} \mathcal{T}(\mu(A_{(i)}), f(x_{(i)})),$$

waarbij  $\cdot_{(i)}$  aangeeft dat de indices zijn gepermuterd zodanig dat

$$0 \leq f(x_{(1)}) \leq f(x_{(2)}) \leq \dots \leq f(x_{(m)}) \leq 1,$$

en met  $A_{(i)}$  gedefinieerd als

$$A_{(i)} = \{x_{(i)}, x_{(i+1)}, \dots, x_{(m)}\},$$

voor alle  $i = 1, \dots, m$ .

Het verband tussen Sugeno integralen en algebraïsche dilataties wordt gelegd in de volgende eigenschap uit [27].

**Eigenschap 4.21** [27] *Zij  $\mathcal{T}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$ .  $[0, 1]^m - [0, 1]$  operatoren  $\mathcal{O}$  van de vorm*

$$\mathcal{O}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \max_{i=1, \dots, m} \mathcal{T}(w_i, a_i),$$

met  $(w_i)_{i=1, \dots, m}$  een familie in  $[0, 1]$  en

$$\max_{i=1, \dots, m} w_i = 1,$$

*zijn algebraïsche dilataties. Het zijn discrete  $\mathcal{T}$ -Sugeno integralen t.o.v. een possibiliteitsmaat  $\mu$ , waarvan distributie gegeven wordt door  $w_1, w_2, \dots, w_m$ .*

<sup>11</sup> Uit deze  $\lambda$ -regel kan men afleiden dat  $\mu(\emptyset) = 0$ , zodat we welgedelijk met een vaagmaat te maken hebben. Er geldt immers:  $1 = \mu(\mathcal{X} \cup \emptyset) = \mu(\mathcal{X}) + \mu(\emptyset) + \lambda\mu(\mathcal{X})\mu(\emptyset) = 1 + \mu(\emptyset) + \lambda\mu(\emptyset)$ , zodat  $\mu(\emptyset) \cdot (1 + \lambda) = 0$ . Aangezien  $\lambda > -1$  volgt hieruit dat  $\mu(\emptyset) = 0$ .

De voorwaarde  $\max_{i=1,\dots,m} w_i = 1$  is nodig om te kunnen stellen dat de operatoren  $\mathcal{O}$  discrete  $\mathcal{T}$ -Sugeno integralen zijn. Immers, de waarde van een discrete  $\mathcal{T}$ -Sugeno integraal hangt in het algemeen af van de ordening van de argumenten, terwijl dit niet het geval is voor de beschouwde operatoren  $\mathcal{O}$ . Men heeft in [42] echter aangetoond dat de waarde onafhankelijk is van de ordening indien de integraal gedefinieerd wordt t.o.v. een possibiliteitsmaat  $\mu$ . Met deze possibiliteitsmaat correspondeert een possibiliteitsdistributie  $\Pi$ . In bovenstaand geval wordt deze bepaald door de familie  $(w_i)_{i=1,\dots,m}$  in  $[0, 1]$ , en zoals dit geldt voor elke possibiliteitsdistributie moet ook hier voldaan zijn aan  $\max_{i=1,\dots,m} w_i = 1$  (zie hoger).

### Vaagmorfologische operatoren gebaseerd op vaagintegralen

Zoals eerder aangegeven worden de vaagmorfologische operatoren in het SI-model gedefinieerd in een discrete context. Een beeld  $A$  zullen we dan ook modelleren als een object uit  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$ . Het structurelement  $B$  wordt als een eindig binair object beschouwd; we stellen het voor als  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Eigenschap 4.21 laat nu toe om de volgende vaagmorfologische dilatatie te definiëren; de corresponderende erosie wordt gedefinieerd op basis van dualiteit t.o.v. de standaardnegator  $N_s$ .

**Definitie 4.28** [27] *Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$  en zij  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Zij verder  $\mathcal{T}$  een driehoeksnorm op  $[0, 1]$ , en zij  $(w_i)_{i=1,\dots,m}$  een familie in  $[0, 1]$  zo dat  $\max_{i=1,\dots,m} w_i = 1$ . De vaagmorfologische Sugeno dilatatie  $D_S(A, B)$  wordt gedefinieerd door:*

$$D_S(A, B)(y) = \max_{x_i \in B} \mathcal{T}(w_i, A(y + x_i)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$ . De vaagmorfologische Sugeno erosie  $E_S(A, B)$  wordt gedefinieerd door:

$$E_S(A, B)(y) = \min_{x_i \in B} \mathcal{T}^*(1 - w_i, A(y + x_i)),$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$ , en met  $\mathcal{T}^*$  de duale driehoeksnorm van  $\mathcal{T}$ , d.w.z.  $\mathcal{T}^*(a, b) = 1 - \mathcal{T}(1 - a, 1 - b)$  voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

We manipuleren de bovenstaande uitdrukkingen nu zodanig dat enerzijds het structurelement  $B$  als een eindig object uit  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$  kan worden beschouwd, en anderzijds dat de familie  $(w_i)_{i=1,\dots,m}$  uit de formules wordt geweerd. Immers, aan de elementen  $x_i$  uit het structurelement  $B$  kunnen de getallen  $w_i$  gehecht worden. Met andere woorden: we stellen  $d_B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , en vervolgens

$$B(x_i) = w_i,$$

voor alle  $i$  in  $\{1, 2, \dots, m\}$ . De voorwaarde  $\max_{i=1,\dots,m} w_i = 1$  vertaalt zich dan in

$$\max_{i=1,\dots,m} B(x_i) = 1.$$

Als we tenslotte ook de indices weglaten, dan herleiden de formules zich op deze manier respectievelijk tot

$$\begin{aligned} D_S(A, B)(y) &= \max_{x \in d_B} \mathcal{T}(B(x), A(y + x)) \\ &= \max_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{T}(B(x - y), A(x)), \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} E_S(A, B)(y) &= \min_{x \in d_B} \mathcal{T}^*(1 - B(x), A(y + x)) \\ &= \min_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{T}^*(1 - B(x - y), A(x)) \\ &= \min_{x \in T_y(d_B)} \mathcal{I}_{\mathcal{T}, N_s}(B(x - y), A(x)) \end{aligned}$$

De formules laten zich nu ook onmiddellijk veralgemenen naar het continue geval, d.w.z. het geval waarin  $A$  en  $B$  objecten uit  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  zijn.

### Verband met het AVL M

Uit de hoger gegeven uitdrukkingen volgt onmiddellijk dat het SI-model ingebed kan worden in het AVL M m.b.v. een conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{T}, \mathcal{I})$ , met volgende specificaties:

- $\mathcal{T}$  is een driehoeksnorm op  $[0, 1]$ ;
- $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}, N_s}$  is een modelimplicator op  $[0, 1]$  (cfr. Lemma 1.6);
- het structurelement  $B$  is pseudo-genormaliseerd (cfr. Definitie 1.9).

### Verband met andere vaagmorfologische modellen

Uit het voorgaande volgt onmiddellijk dat het SI-model eveneens ingebed kan worden in:

- het BMS-model (het SI-model is restrictiever omwille van de pseudo-normaliteitsvoorwaarde op het structurelement  $B$ ; zonder deze voorwaarde vallen het BMS-model en SI-model samen);
- het K-model (het conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{T}, \mathcal{I})$  met bovenstaande specificaties behoort tot de klasse  $\Omega$ ; dit volgt ook uit het feit dat het SI-model kan ingebed worden in het BM-model, dat op zijn beurt ingebed kan worden in het K-model);
- het BK-model.

Het SI-model kan daarentegen niet ingebed worden in het SD-model. Beide modellen hebben slechts één vaagmorfologie gemeen, en dat is deze die bepaald wordt door het conjunctor-implicator paar  $(T_W, I_W)$ . Het is ook duidelijk dat er geen verband bestaat met het Z-model. Anderzijds kan het M-model wel ingepast worden in het SI-model (rekening houdend met de restrictie aangaande de structurelementen) omdat het bepalende conjunctor-implicator paar  $(T_M, I_{KD})$  voldoet aan de gestelde specificaties van het SI-model.

### Opmerking: vaagmorfologische operatoren gedefinieerd m.b.v. Sugeno $\lambda$ -vaagmaten

De constructie die voorgesteld werd in [27] en hoger werd beschreven, wordt in [28] gevolgd om vaagmorfologische dilataties en erosies te definiëren m.b.v. discrete min-Sugeno integralen t.o.v. Sugeno  $\lambda$ -vaagmaten. Het gebruik van Sugeno  $\lambda$ -vaagmaten (cfr. Definitie 4.26) past echter niet binnen de context van de originele constructie. Immers, krachtens Eigenschap 4.21 leiden discrete Sugeno integralen enkel tot algebraïsche dilataties indien deze gedefinieerd worden t.o.v. een possibiliteitsmaat, en de Sugeno  $\lambda$ -vaagmaten behoren niet tot deze categorie. We gaan dan ook niet verder in op dit model.

### 4.5.3 DG-model: vaagmorfologieën gebaseerd op de erosies van di Gesu

In [16] worden vier definities voor een morfologische erosie voor grijswaardebeelden geïntroduceerd; ze komen nog veelvuldig voor in andere artikels van dezelfde auteur [15, 17, 18, 19] en worden ook in [36] toegepast in het kader van segmentatie van medische beelden.

Hoewel de gedefinieerde erosies niet expliciet gebruik maken van vaaglogische operatoren of vaaginclusies, wordt het resulterend model toch als vaagmorfologisch omschreven. Dit is ingegeven door de werkwijze die door de auteurs gevolgd wordt:

1. Een gegeven grijswaardebeeld wordt namelijk eerst samengesteld met een “vervager”<sup>12</sup>, i.h.b. met een lidmaatschapsfunctie zoals bijvoorbeeld de  $S$ - of  $\pi$ -lidmaatschapsfunctie (cfr. Definities 1.3 en 1.4), zo dat het getransformeerde grijswaardebeeld als een vaagverzameling kan beschouwd worden, ongeacht het domein waarin de oorspronkelijke pixelwaarden gelegen zijn. De “vervaagde” pixelwaarde wordt geïnterpreteerd als de lidmaatschapsgraad van die

---

<sup>12</sup>Engelstalig: *fuzzifier* [17].



pixel m.b.t. de oorspronkelijke data-set. Merk op dat deze transformatie van pixelwaarden naar het eenheidsinterval  $[0, 1]$  ook bekomen kan worden door een eenvoudige herschaling van de grijswaarden.

2. Voor deze getransformeerde beelden worden dan vier verschillende erosies gedefinieerd, die in de literatuur als vaagmorfologische erosies omschreven worden. De operatoren werken in op vaagverzamelingen en genereren ook een vaagverzameling als resultaat. Het is in dit stadium dat de auteurs ook bepaalde vaaglogische operatoren invoeren teneinde bepaalde morfologische filters te definiëren<sup>13</sup>.
3. Na het uitvoeren van de erosies op de getransformeerde beelden wordt nog een inverse transformatie toegepast, zo dat de pixelwaarden terug tot het originele grijswaardeninterval behoren. Een dergelijke inverse transformatie kan uiteraard maar succesvol toegepast worden indien de gebruikte transformatiefunctie, zoals een  $S$ - of  $\pi$ -lidmaatschapsfunctie, inverteerbaar is; we verwijzen naar [16] voor een discussie hieromtrent.

In het kader van dit proefschrift zijn we enkel geïnteresseerd in de vaagmorfologische erosies. We plukken deze operatoren uit hun hoger beschreven context, en beschouwen ze als zelfstandige morfologische operatoren op - als vaagverzamelingen gemodelleerde - beelden. Voor het vervolg maken we dus abstractie maken van de pre-transformatie (m.b.v. lidmaatschapsfuncties) en de inverse post-transformatie (m.b.v. de inverse lidmaatschapsfuncties).

De vier vaagmorfologische erosies worden DG1-erosie, DG2-erosie, DG3-erosie en DG4-erosie genoemd<sup>14</sup>; we zullen er echter naar verwijzen als respectievelijk de DG1-, DG2-, DG3- en DG4-erosie. De corresponderende dilataties worden gedefinieerd op basis van dualiteit t.o.v. de standaardnegator.

Het dient opgemerkt te worden dat de morfologische operatoren in [16] gedefinieerd worden in een discrete context. De DG1-erosie en de DG2-erosie kunnen echter onmiddellijk uitgebreid worden naar een continue context, hetgeen we dan ook van in het begin doen.

**Definitie 4.29** [16] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De DG1-erosie  $E_{DG1}(A, B)$  wordt gedefinieerd door:*

$$E_{DG1}(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} (1 - |B(x - y) - A(x)|);$$

de DG2-erosie  $E_{DG2}$  door:

$$E_{DG2}(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} (1 - \Delta(A(x), B(x - y)));$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , en met  $\Delta$  de  $[0, 1] - [0, 1]$  operator gedefinieerd door:

$$\Delta(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{als } a \geq b \\ 1 & \text{als } a < b \end{cases},$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

De DG3-erosie en de DG4-erosie worden zoals eerder opgemerkt discreet gedefinieerd, d.w.z. dat de beelden formeel gemodelleerd worden als elementen van  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$ . Het structurelement  $B$  wordt verondersteld een eindig aantal beeldpunten te bevatten; we stellen dit aantal voor door  $\#B$ .

**Definitie 4.30** [16] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$ . De DG3-erosie  $E_{DG3}$  wordt gedefinieerd door:*

$$E_{DG3}(A, B)(y) = 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} |B(x - y) - A(x)|;$$

<sup>13</sup>Men gebruikt de term vaaglogische operator voor elke  $[0, 1] \times [0, 1] - [0, 1]$  operator, ook al kan aan sommige van de door de auteurs ingevoerde operatoren moeilijk een logische interpretatie gehecht worden.

<sup>14</sup>Engelstalig: respectievelijk *minimum erosion*, *exact erosion*, *average erosion* en *delta erosion*.

de vaagmorfologische DG4-erosie  $E_{DG4}$  door:

$$E_{DG4}(A, B)(y) = 1 - \frac{1}{\sharp B} \sum_{x \in T_y(d_B)} \Delta(A(x), B(x - y));$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$ .

Een aantal opmerkingen m.b.t. deze definities:

1. De bovenstaande operatoren worden door de auteur als morfologische erosies bestempeld, maar noch het verband met de binaire erosie, noch de corresponderende meetkundige interpretatie van de operatoren worden in [16] uiteengezet. We zullen verder echter zien dat de gegeven operatoren inderdaad uitbreidingen zijn van de binaire erosie, in die zin dat de restrictie van de gedefinieerde erosies tot binaire objecten compatibel is met de binaire erosie. Er zijn echter andere criteria waarop men zich kan beroepen om van erosies te kunnen spreken:
  - Zo spreken sommige auteurs enkel van een erosie indien de beschouwde operator voldoet aan de definitie van algebraïsche erosie (cfr. Definitie 3.15), hetgeen betekent dat de operator moet commuteren met het infimum. Men gaat vrij eenvoudig na dat van de erosies in het DG-model enkel de DG1-erosie aan deze voorwaarde voldoet<sup>15</sup>.
  - Verder zullen we ook zien dat enkel de DG2-erosie ingebed kan worden in het AVLM, hetgeen impliceert dat aan deze operator ook een zinvolle betekenis kan worden gehecht. Voor de overige drie erosies is dit niet het geval.
  - Tenslotte gaat men ook na dat de DG1-erosie en de DG3-erosie geen dalend gedrag vertonen t.o.v. het structurelement, terwijl dit in het kader van morfologische erosies toch gewenst is. De DG2-erosie en DG4-erosie vertonen dit dalend gedrag in het tweede argument wel, omdat de operator  $\Delta$  stijgend is in het tweede argument.

Al deze vaststellingen liggen mede aan de basis waarom er in de literatuur weinig aandacht geschonken wordt aan de “vaagmorfologische erosies” van di Gesu. We bespreken ze echter ter wille van de volledigheid.

2. Betreffende de DG2-erosie  $E_{DG2}$  merken we op dat  $E_{DG2}(A, B)(y)$  ofwel 0, ofwel 1 is, ongeacht de keuze van  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Dit binaire gedrag is volledig te wijten aan het binaire karakter van de operator  $\Delta$ , en aan het feit dat, in tegenstelling tot de DG4-erosie, de minimum-operator gebruikt.
3. Tenslotte verdient het ook opgemerkt worden dat de beperking van de  $x$ -waarden tot elementen uit  $T_y(d_B)$  in de bepaling van de DG1-erosie en DG3-erosie noodzakelijk is.

### Compatibiliteit met de binaire morfologie

De vaagmorfologische erosies zoals gedefinieerd in Definities 4.29 en 4.30 blijken compatibel te zijn met de binaire erosie, en kunnen in die zin beschouwd worden als uitbreidingen ervan.

**Eigenschap 4.22** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$E_{DG1}(A, B) = E(A, B).$$

BEWIJS.

Zij  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , dan geldt:

<sup>15</sup>Voor de erosies uit het AVLM, en de erosies uit alle modellen die in het AVLM ingebed kunnen worden, zal deze eigenschap onderzocht worden in Hoofdstuk 5.

$$\begin{aligned}
y \in E_{DG1}(A, B) &\Leftrightarrow E_{DG1}(A, B)(y) = 1 \\
&\Leftrightarrow \inf_{x \in T_y(B)} (1 - |B(x - y) - A(x)|) = 1 \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(B))(1 - |B(x - y) - A(x)| = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow 1 - |B(x - y) - A(x)| = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow 1 - |1 - A(x)| = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow A(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow x \in A) \\
&\Leftrightarrow T_y(B) \subseteq A \\
&\Leftrightarrow y \in E(A, B),
\end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van het feit dat  $B(x - y) = 1$  voor  $x$  in  $T_y(B)$ . □

**Eigenschap 4.23** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$\boxed{E_{DG2}(A, B) = E(A, B).}$$

BEWIJS.

Zij  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}
y \in E_{DG2}(A, B) &\Leftrightarrow E_{DG2}(A, B)(y) = 1 \\
&\Leftrightarrow \inf_{x \in T_y(d_B)} (1 - \Delta(A(x), B(x - y))) = 1 \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(B))(1 - \Delta(A(x), B(x - y))) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(B))(\Delta(A(x), B(x - y)) = 0) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow \Delta(A(x), B(x - y)) = 0) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow A(x) \geq B(x - y)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow A(x) \geq 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow A(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow x \in A) \\
&\Leftrightarrow T_y(B) \subseteq A \\
&\Leftrightarrow y \in E(A, B), \quad \square
\end{aligned}$$

**Eigenschap 4.24** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}^n)$ . Er geldt:*

$$\boxed{E_{DG3}(A, B) = E(A, B).}$$

BEWIJS.

Zij  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}
y \in E_{DG3}(A, B) &\Leftrightarrow E_{DG3}(A, B)(y) = 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} |B(x - y) - A(x)| = 1 \\
&\Leftrightarrow \sum_{x \in T_y(d_B)} |B(x - y) - A(x)| = 0 \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(B))(|B(x - y) - A(x)| = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow |B(x-y) - A(x)| = 0) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow |1 - A(x)| = 0) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow A(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}^n)(x \in T_y(B) \Rightarrow x \in A) \\
&\Leftrightarrow T_y(B) \subseteq A \\
&\Leftrightarrow y \in E(A, B), \quad \square
\end{aligned}$$

**Eigenschap 4.25** Zij  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}^n)$ . Er geldt:

$$E_{DG4}(A, B) = E(A, B).$$

BEWIJS.

Zij  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}
y \in E_{DG4}(A, B) &\Leftrightarrow E_{DG4}(A, B)(y) = 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} \Delta(A(x), B(x-y)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \sum_{x \in T_y(d_B)} \Delta(A(x), B(x-y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in T_y(B))(\Delta(A(x), B(x-y)) = 0),
\end{aligned}$$

waaruit we op analoge wijze als in het bewijs van Eigenschap 4.23 afleiden dat dit equivalent is met  $y \in E(A, B)$ .  $\square$

### Compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering

De vaagmorfologische DG1-erosie blijkt ook compatibel te zijn met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering.

**Eigenschap 4.26** Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en zij  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:

$$E_{DG1}(A, B) = E_s(A, B).$$

BEWIJS.

Zij  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}
E_{DG1}(A, B)(y) &= \inf_{x \in T_y(B)} (1 - |B(x-y) - A(x)|) \\
&= \inf_{x \in T_y(B)} (1 - |1 - A(x)|) \\
&= \inf_{x \in T_y(B)} A(x) \\
&= E_s(A, B)(y) \quad \square
\end{aligned}$$

Men gaat eenvoudig na dat deze compatibiliteit niet opgaat voor de drie andere vaagmorfologische erosies. Voor de DG3-erosie hebben we bijvoorbeeld het volgende resultaat.

**Eigenschap 4.27** Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^n)$  en zij  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{Z}^n)$ . Voor  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$  geldt:

$$E_{DG3}(A, B)(y) = \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} A(x),$$

m.a.w.:  $E_{DG3}(A, B)(y)$  is het gemiddelde van de grijswaarden  $A(x)$  binnen het rooster  $T_y(B)$ .

BEWIJS.

Zij  $y$  in  $\mathbb{Z}^n$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}
E_{DG3}(A, B)(y) &= 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} |B(x - y) - A(x)| \\
&= 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} |1 - A(x)| \\
&= 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} (1 - A(x)) \\
&= 1 - \left( 1 - \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} A(x) \right) \\
&= \frac{1}{\#B} \sum_{x \in T_y(d_B)} A(x) \quad \square
\end{aligned}$$

### Verband met het AVLM

De enige erosies die mogelijks in te bedden zijn in het AVLM zijn de vaagmorfologische DG1-erosie en DG2-erosie; cfr. Definitie 4.29. Dit zijn immers de enige erosies die gedefinieerd zijn m.b.v. de infimum-operator. Bijgevolg moet de vraag beantwoord worden of er een implicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$  bestaat zo dat:

$$\begin{aligned}
E_{DG1}(A, B) &= E_{\mathcal{I}}(A, B) \\
E_{DG2}(A, B) &= E_{\mathcal{I}}(A, B).
\end{aligned}$$

**Eigenschap 4.28** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en definieer de  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  operator  $I_{DG1}$  door:*

$$I_{DG1}(a, b) = 1 - |a - b|,$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Er geldt:

$$\boxed{E_{DG1}(A, B) = E_{I_{DG1}}(A, B).}$$

BEWIJS. Onmiddellijk uit de definities. □

Hoewel dit op het eerste zicht een inbedding in het AVLM suggereert, is dit niet het geval. Men ziet namelijk onmiddellijk in dat de operator  $I_{DG1}$  geen implicator op  $[0, 1]$  is: zo is  $I_{DG1}$  bijvoorbeeld commutatief, en geldt dat  $I_{DG1}(0, 1) = 0$ . Deze vaststelling wordt onder meer in [5] aangegrepen om te stellen dat de DG1-erosie geen correcte uitbreiding is van de binaire erosie.

**Eigenschap 4.29** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en definieer de  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  operator  $I_{DG2}$  door:*

$$I_{DG2}(a, b) = 1 - \Delta(b, a) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ 0 & \text{als } a > b \end{cases}$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Er geldt:

$$\boxed{E_{DG2}(A, B) = E_{I_{DG2}}(A, B).}$$

BEWIJS. Onmiddellijk uit de definities. □

De operator  $I_{DG2}$  is wel een implicator op  $[0, 1]$ , en staat in de literatuur bekend als de ‘‘Standard Strict’’ implicator [61]. Hieruit besluiten we dat het vaagmorfologisch model gebaseerd op de DG2-erosie ingebed kan worden in het AVLM.

### Verband met andere vaagmorfologische modellen

De modellen gebaseerd op de DG1-erosie, DG3-erosie en DG4-erosie kunnen niet ingebed worden in het AVLMM, en bijgevolg bestaan er ook geen verbanden met de andere besproken vaagmorfologische modellen.

Anders is het gesteld met het vaagmorfologisch model gebaseerd op de DG2-erosie. De verbanden met de andere vaagmorfologische modellen volgen uit de volgende eigenschap.

**Eigenschap 4.30** *Er geldt:*

$$I_{DG2} = I_z,$$

met  $I_z$  de implicator op  $[0, 1]$  zoals gedefinieerd in Definitie 4.9.

BEWIJS. Onmiddellijk uit de respectievelijke definities.  $\square$

De vaagmorfologische DG2-erosie is bijgevolg identiek aan de vaagmorfologische z-erosie uit het Z-model (cfr. Paragraaf 4.4.1). Ook de corresponderende dilataties zijn identiek, aangezien ze in beide gevallen gedefinieerd worden als de duale operatoren van de erosie. De eerder onderzochte verbanden tussen het Z-model en de andere vaagmorfologische modellen zijn dus overdraagbaar naar het DG2-model.

## 4.6 Verbanden tussen binaire morfologie, klassieke grijswaardemorfologie en vaagmorfologie

Tijdens de bespreking van de verschillende modellen voor vaagmorfologie hebben we deze modellen ook onderling met elkaar vergeleken. Tot op heden hebben we echter nog niet onderzocht hoe deze modellen zich verhouden tot de klassieke binaire morfologie, en tot de klassieke grijswaardemorfologieën (schijfjesbenadering en umbrabenadering). We maken dit goed in deze paragraaf. We spitsen ons hierbij toe op de dilataties en de erosies, aangezien andere (vaag)morfologische operatoren uit deze basisoperatoren afgeleid kunnen worden.

### 4.6.1 Het AVLMM

#### Compatibiliteit met de binaire morfologie

De restrictie van het AVLMM tot binaire beelden en structuurelementen valt samen met de binaire morfologie zoals besproken in Paragraaf 3.1. Dit volgt onmiddellijk uit de constructie van de vaagmorfologische operatoren.

**Eigenschap 4.31** [12] *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$\begin{array}{l} D_{\mathcal{C}}(A, B) = D(A, B), \\ E_{\mathcal{I}}(A, B) = E(A, B). \end{array}$$

#### Compatibiliteit met grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering

Vervolgens onderzoeken we het verband met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering; zie Paragraaf 3.2. Compatibiliteit blijkt gegarandeerd onder vrij zwakke voorwaarden op de conjunctoor en implicator.

**Eigenschap 4.32** *Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en zij  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{C}$  een conjunctoor en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$\begin{array}{l} D_{\mathcal{C}}(A, B) = D_s(A, B) \Leftrightarrow (\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(1, a) = a), \\ E_{\mathcal{I}}(A, B) = E_s(A, B) \Leftrightarrow (\forall a \in [0, 1])(\mathcal{I}(1, a) = a). \end{array}$$

BEWIJS.

(i) Zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Veronderstel eerst dat  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(1, a) = a)$ . Voor  $x$ -waarden in  $T_y(B) \cap d_A$  geldt dat  $B(x - y) = 1$ , en bijgevolg is  $\mathcal{C}(B(x - y), A(x)) = A(x)$ . Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{C}}(A, B)(y) &= \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} \mathcal{C}(B(x - y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} A(x) \\ &= D_s(A, B)(y). \end{aligned}$$

Veronderstel omgekeerd dat  $D_{\mathcal{C}}(A, B) = D_s(A, B)$ , voor alle  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . In het bijzonder geldt dit voor  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , bepaald door:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(A(x) = a),$$

met  $a$  in  $[0, 1]$ . Er volgt dan, voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{C}}(A, B)(y) &= D_t(A, B)(y) \\ \Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} \mathcal{C}(B(x - y), A(x)) &= \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} A(x) \\ \Leftrightarrow \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} \mathcal{C}(1, a) &= \sup_{x \in T_y(B) \cap d_A} a \\ \Leftrightarrow \mathcal{C}(1, a) &= a. \end{aligned}$$

(ii) Analooft bewijs. □

De voorwaarde op  $\mathcal{I}$  is equivalent met de eis dat het een randimplicator moet zijn. De voorwaarde op  $\mathcal{C}$  is vervuld voor een semi-norm, maar het is niet vereist dat ook  $(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(a, 1) = a)$  geldt.

### Compatibiliteit met grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabnadering

Tenslotte onderzoeken we het verband met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabnadering; zie Paragraaf 3.3. Dit onderzoek leidt tot interessante resultaten.

Vooreerst brengen we in herinnering, gegeven  $A$  en  $B$  gemodelleerd als  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen, dat de u-morfologische dilatatie en de u-morfologische erosie niet noodzakelijk terug  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen zijn. In het algemeen zal de u-dilatatie  $D_u(A, B)$  een  $\mathbb{R}^n - [0, 2]$  afbeelding, en de u-erosie  $E_u(A, B)$  een  $\mathbb{R}^n - [-1, 1]$  afbeelding zijn. Om terug een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeelding te bekomen bestaan er verschillende mogelijkheden, zoals het uitvoeren van translaties en schalingen. In hetgeen volgt beschrijven we echter een andere methode, en onderzoeken we het verband van de resulterende operatoren met het AVLM.

- Om de u-dilatatie  $D_u(A, B)$  te transformeren naar een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeelding kan men eerst de waarde  $D_u(A, B)(y)$  met 1 verminderen (men bekomt een waarde in  $[-1, 1]$ ), en vervolgens het maximum nemen van deze nieuwe waarde en nul (men bekomt een waarde in  $[0, 1]$ ). Dit komt erop neer dat men voor alle  $x$ -waarden in  $T_y(d_B) \cap d_A$  de getalwaarde  $A(x) + B(x - y)$  met 1 vermindert, en alle bekomen getalwaarden in  $[-1, 0]$  reduceert naar 0. Noteren we deze gemodificeerde u-dilatatie als  $D_u^*$ , dan geldt:

$$D_u^*(A, B)(y) = \sup_{x \in T_y(d_B) \cap d_A} \max(0, A(x) + B(x - y) - 1).$$

- Om de u-erosie  $E_u(A, B)$  te transformeren naar een  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeelding kan men eerst de waarde  $E_u(A, B)(y)$  vermeerderen met 1 (men bekomt een waarde in  $[0, 2]$ ), en vervolgens het minimum nemen van deze nieuwe waarde en één (men bekomt een waarde in  $[0, 1]$ ). Noteren we deze gemodificeerde u-erosie als  $E_u^*$ , dan volgt op analoge wijze als voor de u-dilatatie:

$$E_u^*(A, B)(y) = \inf_{x \in T_y(d_B)} \min(1, A(x) - B(x - y) + 1).$$

We zien onmiddellijk in dat de alzo bekomen gemodificeerde u-dilatatie  $D_u^*$  en u-erosie  $E_u^*$  samenvallen met respectievelijk de vaagmorfologische dilatatie  $D_{T_W}$  en vaagmorfologische erosie  $E_{I_W}$ .

**Eigenschap 4.33** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} D_{T_W}(A, B) &= D_u^*(A, B), \\ E_{I_W}(A, B) &= E_u^*(A, B). \end{aligned}$$

BEWIJS. Onmiddellijk uit de respectievelijke definities.  $\square$

Hoewel de constructie van de gemodificeerde u-dilatatie en u-erosie aanleiding geeft tot een interessant verband met het AVLM, moet opgemerkt worden dat deze constructie leidt tot een aanzienlijk verlies van informatie t.o.v. de originele u-morfologische operatoren. Beschouwen we bijvoorbeeld de dilatatie: alle waarden die, na vermindering met 1, in het interval  $[-1, 0]$  liggen worden gereduceerd tot nul. Dit betekent dat *maximaal* 50% van de informatie die bevat zit in  $D_u$  verloren gaat tijdens het modificatie-proces. Een analoge redenering leidt tot een analoge conclusie voor de gemodificeerde u-erosie.

Dit betekent ook dat de vaagmorfologische dilatatie  $D_{T_W}$  en erosie  $E_{I_W}$  gemiddeld veel minder informatie bevatten dan de klassieke u-morfologische operatoren. De preciese hoeveelheid informatie die verloren gaat in het modificatie-proces, of anders gezegd de hoeveelheid informatie die de vaagmorfologische dilatatie  $D_{T_W}$  en erosie  $E_{I_W}$  minder bevatten dan de klassieke u-morfologische tegenhangers, hangt natuurlijk af van het beeld  $A$  en het gehanteerde structurelement  $B$ . Er zullen dus situaties zijn waarin bijna alle informatie verloren gaat, anderzijds zullen er ook situaties zijn waarin geen informatie verloren gaat.

Het is interessant om na te gaan onder welke voorwaarden het laatste, d.w.z. geen informatieverlies, zich voordoet. Voor de gemodificeerde u-dilatatie  $D_u^*(A, B)$  zal dit het geval zijn als en slechts als:

$$(\forall y \in D(d_A, d_B))(D_u(A, B)(y) \geq 1);$$

voor de gemodificeerde u-erosie  $E_u^*(A, B)$  als en slechts als:

$$(\forall y \in E(d_A, d_B))(E_u(A, B)(y) \leq 0).$$

Deze voorwaarden kunnen niet op een zinvolle wijze vertaald worden in voorwaarden op het beeld  $A$ <sup>16</sup>. Bovendien kan men het beeld  $A$  niet zelf kiezen, en zou een voorwaarde op de beelden bijgevolg zeer restrictief zijn. Anders is het gesteld met het structurelement  $B$ : dit kan men wel zelf kiezen, en men gaat eenvoudig na dat de bovenstaande voorwaarden vervuld zullen zijn indien  $B$  pseudo-genormaliseerd is. Deze voorwaarde is voldoende, niet noodzakelijk.

**Eigenschap 4.34** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B$  pseudo-genormaliseerd is, dan geldt:*

$$\begin{aligned} D_{T_W}(A, B) &= D_u(A, B) - 1, \\ E_{I_W}(A, B) &= E_u(A, B) + 1. \end{aligned}$$

Onder deze voorwaarde op het structurelement besluiten we dat de vaagmorfologische dilatatie  $D_{T_W}$  en erosie  $E_{I_W}$  equivalent zijn met de corresponderende u-morfologische operatoren. Indien  $B$  niet pseudo-genormaliseerd is hangt het van de specifieke parameters van het beeld  $A$  en het structurelement  $B$  af of de equivalentie zal gelden. We illustreren dit met twee voorbeelden.

<sup>16</sup>Om de u-dilatatie en de u-erosie te bepalen wordt er voor elke  $y$  een supremum of infimum berekend waarin  $A(x)$  optreedt, waarbij de  $x$ -waarden maximaal uit  $T_y(d_B)$  genomen worden. Een voorwaarde op  $A$  zou dus voor elke  $y$ -waarde een voorwaarde op een deelgebiedje van  $A$ , namelijk het gebied bedekt door  $T_y(d_B)$ , impliceren.



**Voorbeeld 4.1** *Beschouw een beeld  $A$  gekarakteriseerd door*

$$0 < A(x) \leq \frac{2}{3},$$

*voor elke  $x$  in  $d_A$ , en een (niet pseudo-genormaliseerd) structurelement  $B$  gekarakteriseerd door*

$$0 < B(x) \leq \frac{1}{3},$$

*voor elke  $x$  in  $d_B$ . Voor elke  $y$  in  $D(d_A, d_B)$  geldt dan dat  $D_{T_w}(A, B)(y) = 0$ , terwijl  $0 < D_u(A, B)(y) \leq 1$ . Alle informatie bevat in  $D_u(A, B)$  gaat in dit geval dus verloren in  $D_{T_w}(A, B)$ .*  $\triangleleft$

**Voorbeeld 4.2** *Beschouw een beeld  $A$  gekarakteriseerd door*

$$A(x) = \frac{2}{3},$$

*voor elke  $x$  in  $d_A$ , en een (niet pseudo-genormaliseerd) structurelement  $B$  gekarakteriseerd door*

$$B(x) = 23,$$

*voor elke  $x$  in  $d_B$ . Voor elke  $y$  in  $D(d_A, d_B)$  geldt dan dat  $D_{T_w}(A, B)(y) = \frac{1}{3}$ , en dat  $D_u(A, B)(y) = \frac{4}{3} = D_{T_w}(A, B)(y) + 1$ . Alle informatie bevat in  $D_u(A, B)$  blijft in dit geval dus behouden in  $D_{T_w}(A, B)$ .*  $\triangleleft$

## 4.6.2 De andere vaagmorfologische modellen

Aangezien alle hoger beschreven vaagmorfologische modellen ingebed kunnen worden in het AVL<sup>M</sup><sup>17</sup>, kunnen we reeds stellen dat ze alle compatibel zijn met de binaire morfologie. Er rest ons dus enkel nog om na te gaan of deze modellen al dan niet compatibel zijn met de klassieke grijswaardemorfologieën gebaseerd op de schijfjesbenadering of umbrabenadering. Hiervoor kunnen we vertrekken van het resultaat voor het AVL<sup>M</sup>, zoals gesteld in de Eigenschappen 4.32 en 4.34.

### Het BM-model

Het BM-model is onder alle omstandigheden compatibel met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering. Elk conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}})$  met  $\mathcal{T}$  een driehoeksnorm en  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$  de geassocieerde modelimplicator ( $\mathcal{N}$  is een involutieve negator) voldoet immers aan de voorwaarden gesteld in Eigenschap 4.32.

Compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering is voldaan zoals gesteld in Eigenschap 4.34.

### Het Z-model

Het conjunctor-implicator paar  $(C_z, I_z)$  voldoet niet aan de voorwaarden gesteld in Eigenschap 4.32 (cfr. de voorbeelden na Eigenschap 4.4), en bijgevolg is het Z-model niet compatibel met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering.

Gelet op Eigenschap 4.34 is er evenmin compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering.

<sup>17</sup>De DG1-, DG3- en DG4-modellen kunnen niet ingebed worden in het AVL<sup>M</sup>, maar in Paragraaf 4.5.3 werd reeds afzonderlijk de compatibiliteit met de binaire morfologie en de klassieke grijswaardemorfologieën onderzocht.

**Het SD-model**

Gelet op de Eigenschappen 4.7 en 4.8 zal het conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{C}_\lambda, \mathcal{I}_\lambda)$  voldoen aan de voorwaarden gesteld in Eigenschap 4.32 als en slechts als:

$$(\forall a \in [0, 1])(\lambda(a) = 1 - a).$$

Enkel in dit geval is compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering dus gearandeerd. Bovendien weten we dat dan geldt:

$$(\mathcal{C}_\lambda, \mathcal{I}_\lambda) = (T_W, I_W),$$

in welk geval ook compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering, zoals geformuleerd in Eigenschap 4.34, geldt.

**Het K-model**

Gelet op de Eigenschappen 4.13 en 4.14 zal het conjunctor-implicator paar  $(\mathcal{C}_\varphi, \mathcal{I}_\varphi)$  voldoen aan de voorwaarden gesteld in Eigenschap 4.32 als en slechts als:

$$(\forall a \in [0, 1])(\varphi(1, a) = 1 - a).$$

Heel wat vaagmorfologieën uit het K-model zijn dus compatibel met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering.

Compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering kan enkel gelden voor het conjunctor-implicator paar  $(T_W, I_W)$ . In het K-model correspondeert dit paar met de keuze (cfr. Definitie 4.19):

$$(\forall (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(\varphi(a, b) = \min(1, 2 - a - b)).$$

**Het BK-model**

Compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologieën geldt zoals beschreven in de Eigenschappen 4.32 en 4.34.

**Het M-model**

Wegens Eigenschap 4.20 correspondeert het M-model met het conjunctor-implicator paar  $(T_M, I_{KD})$ . Dit impliceert compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering (cfr. Eigenschap 4.32), maar geen compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering (cfr. Eigenschap 4.34).

**Het SI-model**

Het SI-model is onder alle omstandigheden compatibel met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering; dit volgt trouwens ook onmiddellijk het nauwe verband met het BM-model.

Compatibiliteit met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering is voldaan zoals gesteld in Eigenschap 4.34. De voorwaarde in deze eigenschap dat het structurelement  $B$  pseudo-genormaliseerd moet zijn zit a priori ingebakken in het SI-model.

## 4.7 Samenvatting

De onderlinge verbanden tussen de besproken vaagmorfologische modellen, alsook de connecties met de klassieke binaire en grijswaardemorfologieën, worden overzichtelijk gepresenteerd in Figuur 4.6.

De voornaamste conclusies kunnen we als volgt samenvatten:

Figuur 4.6: Verschillende modellen voor vaagmorfologie, onderlinge verbanden, en verbanden met de klassieke binaire en grijswaardemorfologieën.

- (1) De besproken vaagmorfologische modellen zijn alle compatibel met de klassieke binaire morfologie. De modellen zijn dus *echte* uitbreidingen.
- (2) Met uitzondering van het Z-model en de DG2-, DG3- en DG4-modellen zijn alle besproken vaagmorfologische modellen geheel of gedeeltelijk compatibel met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de schijfjesbenadering.
- (3) Er is slechts één vaagmorfologie, namelijk deze die correspondeert met het conjunctor-implicator paar  $(T_W, I_W)$ , die *onder bepaalde voorwaarden op het structurelement* compatibel is met de klassieke grijswaardemorfologie gebaseerd op de umbrabenadering.
- (4) Van alle besproken vaagmorfologische modellen is het AVLM het meest algemene, waarin alle andere modellen ingebed kunnen worden. Enkel de DG1-, DG3- en DG4-modellen vormen hierop een uitzondering, maar deze modellen worden om hoger vermelde redenen weinig beschouwd in de literatuur.

De laatste conclusie, die stelt dat het AVLM het meest algemene model is voor vaagmorfologie, is in het algemeen zeer belangrijk. Ze geeft immers aan dat theoretisch onderzoek aangaande vaagmorfologie best in dit model verder wordt gezet. Op basis van de verbanden van de andere modellen met het AVLM kunnen eigenschappen van het AVLM immers onmiddellijk vertaald worden naar eigenschappen van deze specifieke en restrictievere modellen; het is m.a.w. niet nodig om de eigenschappen in elk model afzonderlijk te gaan beschouwen.

Gelet op deze observatie, onderzoeken we in het volgende hoofdstuk een ganse reeks van belangrijke eigenschappen van het AVLM.

# Hoofdstuk 5

## Eigenschappen van het AVL<sub>M</sub>

In het voorgaande hoofdstuk werden verschillende vaaglogisch gebaseerde modellen voor grijswaardemorfologie besproken, en uit onze studie bleek dat het AVL<sub>M</sub> het meest algemene model is. Dit was een zeer belangrijke conclusie, aangezien ze aangeeft dat verder onderzoek op het vlak van vaagmorfologie zich op het AVL<sub>M</sub> moet toespitsen. In dit hoofdstuk gaan we dan ook dieper in op de eigenschappen van het AVL<sub>M</sub>.

Het onderzoek naar deze eigenschappen is zowel van theoretisch als praktisch belang: theoretisch omwille van de resultaten op zich, praktisch omwille van de interpretatie ervan. Bestaande eigenschappen uit de literatuur worden geciteerd, worden uitgebreid en veralgemeend, en nieuwe eigenschappen worden toegevoegd. Onze benadering onderscheidt zich bovendien door het feit dat we heel wat eigenschappen van het AVL<sub>M</sub> afleiden door te steunen op het verband tussen de vaagmorfologische operatoren enerzijds (cfr. Hoofdstuk 4), en de vaagrelationele operatoren anderzijds (cfr. Hoofdstuk 2). Naast de reeks toepassingen die reeds eerder vermeld werden in het kader van deze vaagrelationele operatoren, voegen we daar nu dus vaagmorfologie aan toe. Dit illustreert nogmaals de kracht en het uniformiserend karakter van de vaagrelationele operatoren, en bijgevolg ook het nut van de studie ervan.

### 5.1 Het AVL<sub>M</sub> en vaagrelationele operatoren

#### 5.1.1 Formeel verband

De basisoperatoren in het AVL<sub>M</sub> zijn de vaagmorfologische dilatatie  $D_C$  en de vaagmorfologische erosie  $E_{\mathcal{I}}$ , met  $C$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Gegeven  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  worden ze als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} D_C(A, B)(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} C(B(x - y), A(x)), \\ E_{\mathcal{I}}(A, B)(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(B(x - y), A(x)), \end{aligned}$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ . We herhalen de opmerking uit Hoofdstuk 4 dat de  $x$ -waarden waarover deze suprema en infima genomen worden in principe beperkt kunnen worden tot respectievelijk  $x \in T_y(d_B) \cap d_A$  en  $x \in T_y(d_B)$ ; dit heeft geen effect op het uiteindelijke resultaat.

Beschouwen we anderzijds de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ , in het geval  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ . Zij  $C$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ , en zij gegeven  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $R$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , dan geldt:

$$\begin{aligned} \clubsuit(C, R, A)(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} C(R(x, y), A(x)), \\ \heartsuit(\mathcal{I}, R, A)(y) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)), \end{aligned}$$

voor alle  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Men ziet onmiddellijk een sterke gelijkens tussen de uitdrukkingen voor  $D_C$  en  $\clubsuit$  enerzijds, en tussen de uitdrukkingen voor  $E_T$  en  $\heartsuit$  anderzijds. We gaan dit verband nu formaliseren. Dit houdt in eerste instantie in dat met de vaagverzameling  $B$  een vaagrelatie  $R_B$  geassocieerd dient te worden.

**Definitie 5.1** *Zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De geassocieerde vaagrelatie  $R_B$  in  $\mathbb{R}^n$  wordt gedefinieerd door:*

$$R_B = B \circ V,$$

met  $V$  de verschilfunctie in  $\mathbb{R}^n$ , d.w.z.:  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)(V(x, y) = x - y)$ . In het bijzonder geldt:

$$R_B(x, y) = B(x - y),$$

voor alle  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

De interpretatie van de relatie  $R_B$  is uiteraard afhankelijk van de (eventuele) interpretatie die aan het structuurelement  $B$  gehecht wordt. In de meeste gevallen kan de grijswaarde van de pixels in het structuurelement  $B$  bijvoorbeeld opgevat worden als een indicatie voor het belang van deze pixels t.o.v. de centraal beschouwde pixel. Neem als voorbeeld het volgende structuurelement:

$$B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.6 & 0.9 & \underline{1.0} & 0.9 & 0.6 \\ 0.4 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Hier zijn de waarden afhankelijk van de afstand van de pixels tot de centrale pixel, namelijk: hoe groter de afstand, hoe kleiner de waarde. In dit geval heeft de geassocieerde vaagrelatie  $R_B$  een prachtige interpretatie: voor alle  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  kan  $R_B(x, y)$  namelijk geïnterpreteerd worden als de mate waarin de pixels  $x$  en  $y$  dicht bij elkaar liggen.

**Eigenschap 5.1** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $C$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} D_C(A, B) &= \clubsuit(C, R_B, A) \\ E_T(A, B) &= \heartsuit(\mathcal{I}, R_B, A). \end{aligned}$$

BEWIJS. Dit volgt uit de respectievelijke definities. □

### 5.1.2 Eigenschappen van de geassocieerde relatie

Het uitgangspunt van een morfologist is een gegeven beeld  $A$  en een zelf gekozen structuurelement  $B$ . Eigenschappen van het AVLM moeten dan ook steeds in termen van deze gegevens beschreven worden. Op formeel vlak hebben we met het structuurelement  $B$  echter een vaagrelatie  $R_B$  in  $\mathbb{R}^n$  geassocieerd, en is het onze bedoeling om eigenschappen van het AVLM af te leiden uit eigenschappen van vaagrelationele operatoren, waarbij de relatie  $R_B$  een sleutelrol speelt. Gelet op de voorwaarden die in sommige eigenschappen aangaande vaagrelationele operatoren gesteld worden, is het noodzakelijk om vooraf te onderzoeken hoe de reflexiviteit, symmetrie of sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit van de relatie  $R_B$  in equivalente termen kan beschreven worden m.b.v. het oorspronkelijke structuurelement  $B$ .

**Eigenschap 5.2** *Zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$R_B \text{ is reflexief} \Leftrightarrow B(\mathbf{0}) = 1.$$

BEWIJS.

Zij  $R_B$  reflexief, d.w.z.  $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(R_B(x, x) = 1)$ . Gelet op de definitie van  $R_B$  volgt hieruit onmiddellijk dat  $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(B(x - x) = 1)$ , dus  $B(\mathbf{0}) = 1$ .

De omgekeerde implicatie volgt op analoge manier.  $\square$

**Eigenschap 5.3** *Zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$R_B \text{ is symmetrisch} \Leftrightarrow B = -B.$$

BEWIJS.

Zij  $R_B$  symmetrisch, d.w.z.  $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)(R_B(x, y) = R_B(y, x))$ . Gelet op de definitie van  $R_B$  volgt hieruit onmiddellijk dat  $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)(B(x - y) = B(y - x))$ , of door substitutie  $z = x - y$  dat  $(\forall z \in \mathbb{R}^n)(B(z) = B(-z))$ . Bijgevolg is  $B = -B$ .

De omgekeerde implicatie volgt op analoge manier.  $\square$

Terwijl de reflexiviteit en symmetrie van de geassocieerde relatie  $R_B$  vrij eenvoudig uitgedrukt kunnen worden in termen van het structurelement  $B$ , is dit minder voor de hand liggend aangaande de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit. We tonen twee resultaten aan, afhankelijk van de klasse waartoe de conjunctor  $\mathcal{C}$  behoort.

**Definitie 5.2** *De klasse  $C^+$  wordt gedefinieerd als de klasse van conjunctoren  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$  die voldoen aan:*

$$(\forall a \in ]0, 1]) (\mathcal{C}(a, a) > 0);$$

*de klasse  $C^0$  wordt gedefinieerd als de klasse van conjunctoren  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$  die voldoen aan:*

$$(\exists a \in ]0, 1]) (\mathcal{C}(a, a) = 0).$$

In [23] wordt de eerste klasse gedefinieerd voor driehoeksnormen  $[0, 1]$ , en men spreekt van driehoeksnormen zonder nuldelers. Als we deze terminologie aanhouden kunnen we  $C^+$  bestempelen als de klasse der conjunctoren zonder nuldelers, en  $C^0$  als de klasse der conjunctoren met nuldelers. Merk op dat in de voorwaarden  $a = 0$  wordt uitgesloten, omdat bij definitie geldt dat  $\mathcal{C}(0, 0) = 0$ . Men gaat verder na dat  $T_M$  en  $T_P$  tot de klasse  $C^+$  behoren, terwijl  $T_W$  tot de klasse  $C^0$  behoort.

**Eigenschap 5.4** *Zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  zo dat  $d_B$  begrensd en niet-ledig is, en zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm uit de klasse  $C^+$ . Er geldt:*

$$R_B \text{ is sup-}\mathcal{C} \text{ transitief} \Leftrightarrow d_B = \{\mathbf{0}\}.$$

BEWIJS.

Veronderstel eerst dat  $R_B$  sup- $\mathcal{C}$  transitief is, d.w.z.:

$$(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)(R_B(x, y) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(R_B(x, z), R_B(z, y))).$$

Wegens de definitie van  $R_B$  is dit equivalent met

$$(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)(B(y - x) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(z - x), B(y - z))),$$

of, wegens de karakterisatie van het supremum, met

$$(\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)(B(y - x) \geq \mathcal{C}(B(z - x), B(y - z))). \quad (5.1)$$

Stel nu (ongerijmde) dat er een  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  bestaat, met  $p \neq \mathbf{0}$ , zo dat  $B(p) > 0$ . We kiezen dan een  $z_0$  in  $\mathbb{R}^n$  en stellen  $x_0 = z_0 - p$  en  $y_0 = z_0 + p$ . Uit (5.1) volgt dan dat

$$B(2p) \geq \mathcal{C}(B(p), B(p)),$$

waaruit

$$B(2p) > 0$$

wegens  $\mathcal{C} \in C^+$ . Op analoge wijze volgt dat  $B(4p) > 0$ , enzoverder. Uiteindelijk bekomen we een oneindige rij van punten  $p, 2p, 4p, \dots = \{p\} \cup \{2m \cdot p | m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ , zo dat:

$$B(2m \cdot p) > 0.$$

Bijgevolg is  $d_B$  niet begrensd, hetgeen een tegenstrijdigheid oplevert met het gegeven. We besluiten hieruit dat er geen  $p \neq \mathbf{0}$  in  $\mathbb{R}^n$  bestaat zo dat  $B(p) > 0$ . Samen met de niet-ledigheidsvoorwaarde op  $d_B$  volgt hieruit dat  $d_B = \{\mathbf{0}\}$ .

Stel omgekeerd dat  $d_B = \{\mathbf{0}\}$ , en zij  $(x, y, z)$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Indien  $z \neq x$  of  $z \neq y$ , dan is respectievelijk  $B(z - x) = 0$  of  $B(y - z) = 0$ , zodat ook  $\mathcal{C}(B(z - x), B(y - z)) = 0$ . Bijgevolg is zeker voldaan aan  $B(y - x) \geq \mathcal{C}(B(z - x), B(y - z))$ . Indien  $z = x = y$ , dan is  $B(y - x) = B(\mathbf{0})$  en  $\mathcal{C}(B(z - x), B(y - z)) = \mathcal{C}(B(\mathbf{0}), B(\mathbf{0}))$ . Aangezien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is volgt uit Lemma 1.1 dat  $\mathcal{C}(B(\mathbf{0}), B(\mathbf{0})) \leq \min(B(\mathbf{0}), B(\mathbf{0})) = B(\mathbf{0})$ . Bijgevolg is ook in dit geval voldaan aan  $B(y - x) \geq \mathcal{C}(B(z - x), B(y - z))$ . Hieruit besluiten we dat  $R_B$  sup- $\mathcal{C}$  transitief is.  $\square$

De voorwaarde dat  $d_B$  begrensd en niet-ledig moet zijn is op zich zeker niet restrictief. Immers, een ledig structuurelement is zinloos, en een onbegrensd structuurelement is in de praktijk fysisch onmogelijk.

Merk wel op dat  $\mathcal{C}$  geen willekeurige conjunctor maar een semi-norm uit de klasse  $C^+$  moet zijn, om de implicatie  $\Leftarrow$  te kunnen aantonen.

**Voorbeeld 5.1** Stel  $d_B = \{\mathbf{0}\}$  met  $B(\mathbf{0}) = 0.5$ , en stel:

$$\mathcal{C}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{als } a = 0 \vee b = 0 \\ 1 & \text{anders} \end{cases}.$$

Men verifieert dat  $\mathcal{C}$  een conjunctor uit de klasse  $C^+$  is, maar geen semi-norm. Er volgt dan dat

$$\mathcal{C}(B(\mathbf{0}), B(\mathbf{0})) = 1 > 0.5 = B(\mathbf{0}),$$

waaruit we besluiten dat de corresponderende relatie  $R_B$  niet sup- $\mathcal{C}$  transitief is.  $\triangleleft$

**Eigenschap 5.5** Zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm uit de klasse  $C^0$ . Er geldt:

$$\boxed{d_B = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow R_B \text{ is sup-}\mathcal{C} \text{ transitief.}}$$

BEWIJS.

Analoog zoals in het bewijs van Eigenschap 5.4.  $\square$

De voorwaarde  $d_B = \{\mathbf{0}\}$  in Eigenschap 5.5 is voldoende, maar niet nodig. We illustreren dit met een voorbeeld.

**Voorbeeld 5.2** Stel  $\mathcal{C} = T_W$  ( $T_W \in C^0$ ) en beschouw  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$  gegeven door:

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = \mathbf{0} \\ 0.5 & \text{als } x \in [-1, 1]^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Er geldt dat  $d_B = [-1, 1]^2 \neq \{\mathbf{0}\}$ , maar toch is de geassocieerde relatie  $R_B$  sup- $T_W$  transitief. We gaan dit na:  $R_B$  is sup- $T_W$  transitief als en slechts als

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)(R_B(x, y) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^2} T_W(R_B(x, z), R_B(z, y))),$$

hetgeen wegens  $R_B = B \circ V$  equivalent is met

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)(B(x - y) \geq T_W(B(x - z), B(z - y))).$$



$B(x-z)$	$B(z-y)$	$T_W(B(x-z), B(z-y))$
0	0	0
0	0.5	0
0	1	0
0.5	0	0
0.5	0.5	0
0.5	1	0.5
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

Tabel 5.1: Mogelijke waarden van  $B(x-z)$ ,  $B(z-y)$  en  $T_W(B(x-z), B(z-y))$ .

Beschouw nu enkel het rechterlid  $T_W(B(x-z), B(z-y))$ . De argumenten  $B(x-z)$ ,  $B(z-y)$  kunnen slechts drie waarden aannemen, namelijk 0, 0.5 en 1. In Tabel 5.2 geven we de corresponderende waarden van  $T_W(B(x-z), B(z-y))$ .

In de gevallen waarin  $T_W(B(x-z), B(z-y)) = 0$  is zeker  $B(x-y) \geq T_W(B(x-z), B(z-y))$ , zodat er slechts drie gevallen over blijven.

1.  $B(x-z) = 0.5$  en  $B(z-y) = 1$ . Dan volgt:

$$\begin{aligned}
 B(z-y) = 1 &\Leftrightarrow z-y = 0 \\
 &\Leftrightarrow z = y \\
 &\Leftrightarrow x-z = x-y \\
 &\Rightarrow B(x-y) = B(x-z) = 0.5,
 \end{aligned}$$

zodat in dit geval  $0.5 = B(x-y) \geq T_W(B(x-z), B(z-y)) = 0.5$ .

2.  $B(x-z) = 1$  en  $B(z-y) = 0.5$ . Dan volgt op analoge wijze dat  $B(x-y) = 0.5 = T_W(B(x-z), B(z-y))$ .
3.  $B(x-z) = 1$  en  $B(z-y) = 1$ . In dit geval is  $x = z$  en  $z = y$ , en dus ook  $x = y$ . Bijgevolg is  $B(x-y) = B(0) = 1$ , zodat  $1 = B(x-y) \geq T_W(B(x-z), B(z-y)) = 1$ .

We besluiten dus dat in alle gevallen voldaan is aan

$$B(x-y) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^2} T_W(B(x-z), B(z-y)). \quad \triangleleft$$

Uit bovenstaande eigenschappen besluiten we dat de reflexiviteit en symmetrie van de geassocieerde relatie  $R_B$ , indien deze om een of andere reden vereist zouden zijn, geen al te sterke restricties op de keuze van het structurelement  $B$  impliceren. Anders is het gesteld met de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit. Voor  $\mathcal{C}$  een semi-norm uit de klasse  $C^+$  is deze transitiviteit equivalent met  $d_B = \{0\}$ , hetgeen een zeer restrictieve voorwaarde is. Voor semi-normen uit de klasse  $C^0$  kan een dergelijke equivalentie niet aangetoond worden, en moeten we de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit van  $R_B$  letterlijk vertalen naar een voorwaarde op  $B$ ; we noemen in dit geval bij definitie  $B$  sup- $\mathcal{C}$  transitief indien  $R_B$  sup- $\mathcal{C}$  transitief is.

## 5.2 Eigenschappen van het AVLMM

Wegens het zopas beschreven verband tussen de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$  enerzijds en de vaagmorfologische dilatatie  $D_C$  en erosie  $E_{\mathcal{I}}$  anderzijds, kunnen de eigenschappen van de vaag-

relationele operatoren uit Hoofdstuk 2 onmiddellijk vertaald worden in termen van de vaagmorfologische dilatatie en erosie; met behulp van de eigenschappen uit Paragraaf 5.1.2 kunnen eventuele voorwaarden op de vaagrelatie omgezet worden naar voorwaarden op het structurelement. Zodoende bekomen we onmiddellijk eigenschappen m.b.t.:

- bijzondere gevallen,
- dualiteit, onder-dualiteit en boven-dualiteit,
- codualiteit, onder-codualiteit en boven-codualiteit,
- monotoniteit,
- interactie met unie van structurelementen (eindige unie, oneindige unie en  $\mathcal{S}$ -unie),
- interactie met unie van beelden (eindige unie, oneindige unie en  $\mathcal{S}$ -unie),
- interactie met doorsnede van structurelementen (eindige doorsnede, oneindige doorsnede en  $\mathcal{S}$ -doorsnede),
- interactie met doorsnede van beelden (eindige doorsnede, oneindige doorsnede en  $\mathcal{S}$ -doorsnede),
- interactie met translatie,
- interactie met schaling,
- expansiviteit en restrictiviteit,
- inclusie-eigenschappen,
- idempotentie,
- interactie tussen de operatoren  $D_C$  en  $E_T$ .

Sommige van deze eigenschappen vinden we ook terug in de literatuur, met name in [12] (AVLM) en [5] (BM-model, minder algemeen), waar ze rechtstreeks in het vaagmorfologisch kader beschouwd worden. Het gaat om de eigenschappen m.b.t. dualiteit, monotoniteit, interactie met *eindige* unie van structurelementen, interactie met *eindige* unie van beelden, interactie met *eindige* doorsnede van beelden, interactie met translatie, interactie met schaling, expansiviteit en restrictiviteit. De overige eigenschappen werden nog niet beschouwd in het AVL<sub>M</sub>.

Uit deze eigenschappen van de vaagmorfologische dilatatie en erosie kunnen bovendien vrij makkelijk corresponderende eigenschappen m.b.t. de vaagmorfologische sluiting en opening afgeleid worden.

Tenslotte zullen we ook nog enkele andere eigenschappen onderzoeken, met name:

- commutativiteit en associativiteit van de vaagmorfologische dilatatie,
- combinaties van de vaagmorfologische dilatatie en erosie,
- het principe van lokale kennis,
- adjunctie eigenschap.

Ook van deze eigenschappen komen sommige reeds voor in de literatuur; we zullen dit expliciet aangeven in het overzicht.

Op die manier zullen we alle eigenschappen die we beschouwd hebben in het binaire geval (zie Hoofdstuk 3) ook onderzocht hebben in het kader van het AVL<sub>M</sub>. Meteen kan men nagaan onder welke voorwaarden de binaire eigenschappen overdraagbaar zijn naar een vaagmorfologische context.

### 5.2.1 Bijzondere gevallen

**Eigenschap 5.6** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. (a)  $D_{\mathcal{C}}(\emptyset, B) = \emptyset$ ,  
(b)  $E_{\mathcal{I}}(\mathbb{R}^n, B) = \mathbb{R}^n$ .
2. *Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt:*
  - (a)  $D_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n, B) = \mathbb{R}^n$ ,
  - (b)  $E_{\mathcal{I}}(\emptyset, B) = \emptyset$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.1. □

**Eigenschap 5.7** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. (a)  $D_{\mathcal{C}}(A, \emptyset) = \emptyset$ ,  
(b)  $E_{\mathcal{I}}(A, \emptyset) = \mathbb{R}^n$ .
2. *Indien  $A$  genormaliseerd is, dan geldt:  $D_{\mathcal{C}}(A, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .*
3. *Indien  $(\exists x_0 \in \mathbb{R}^n)(A(x_0) = 0)$ , dan geldt:  $E_{\mathcal{I}}(A, \mathbb{R}^n) = \emptyset$ .*

BEWIJS. Uit eigenschap 2.2. □

**Eigenschap 5.8** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. (a)  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \emptyset) = \mathbb{R}^n$ ,  
(b)  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \emptyset) = \mathbb{R}^n$ .
2. *Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt:*
  - (a)  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\emptyset, B) = \emptyset$ ,
  - (b)  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\mathbb{R}^n, B) = \mathbb{R}^n$ ,
  - (c)  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\emptyset, B) = \emptyset$ ,
  - (d)  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\mathbb{R}^n, B) = \mathbb{R}^n$ .
3. *Indien  $A$  genormaliseerd is, dan geldt:  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .*
4. *Indien  $(\exists x_0 \in \mathbb{R}^n)(A(x_0) = 0)$ , dan geldt:  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \mathbb{R}^n) = \emptyset$ .*

BEWIJS. Dit volgt onmiddellijk uit de Eigenschappen 5.6 en 5.7. We tonen als voorbeeld aan dat  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \emptyset) = \mathbb{R}^n$ . Er geldt:

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \emptyset) &= E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A, \emptyset), \emptyset) \\ &= E_{\mathcal{I}}(\emptyset, \emptyset) \\ &= \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Voor de laatste overgang maken we gebruik van Eigenschap 5.7(1b). Merk hier op dat geen gebruik gemaakt kan worden van Eigenschap 5.6(2b) omdat daar een voorwaarde op het structurelement wordt gelegd die niet voldaan is voor  $\emptyset$ . □

### 5.2.2 Dualiteit

**Eigenschap 5.9** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. *Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -dual t.o.v.  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .*
2. *Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -dual t.o.v.  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .*
3. *Indien  $\mathcal{N}$  continu is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  en  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  zijn  $\mathcal{N}$ -dual  $\Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ . In dit geval impliceert de continuïteit van  $\mathcal{N}$  ook de involutiviteit ervan.*

BEWIJS. Uit eigenschap 2.3. □

**Eigenschap 5.10** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a)  *$D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{C} \leq \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .*  
(b) *Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -onderdual t.o.v.  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{I} \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .*
2. (a) *Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -bovendual t.o.v.  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{C} \geq \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$ .*  
(b)  *$E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -bovendual t.o.v.  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{I} \geq \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .*

BEWIJS. Uit eigenschap 2.4. □

De dualiteit van de vaagmorfologische dilatatie en erosie werd beschouwd in Eigenschap 5.9; nu beschouwen we de dualiteit van de vaagmorfologische sluiting en opening.

**Eigenschap 5.11** [12] *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een involutieve negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. *Indien  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  of equivalent  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ , dan geldt:  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\cdot, B)$  en  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\cdot, B)$  zijn  $\mathcal{N}$ -dual.*
2. *Indien  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\cdot, B)$  en  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\cdot, B)$   $\mathcal{N}$ -dual zijn, en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  is, dan geldt:  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{N}}$  of equivalent  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$ .*

Het is duidelijk dat (1) een onmiddellijk gevolg is van Eigenschap 5.9(3).

### 5.2.3 Co-dualiteit

**Eigenschap 5.12** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. *Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -codual t.o.v.  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I}, \mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{C}}$ .*
2. *Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -codual t.o.v.  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{C}, \mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{I}}$ .*
3. *Indien  $\mathcal{N}$  continu is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  en  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  zijn  $\mathcal{N}$ -codual  $\Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I}, \mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{C}}$  en  $\mathcal{O}^{\mathcal{C}, \mathcal{N}} = \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{I}}$ . In dit geval impliceert de continuïteit van  $\mathcal{N}$  ook de involutiviteit ervan.*

BEWIJS. Uit eigenschap 2.5. □

**Eigenschap 5.13** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{N}$  een negator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{N}$  willekeurig is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -ondercodual t.o.v.  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I}, \mathcal{N}} \geq \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{C}}$ .*  
(b) *Indien  $\mathcal{N}$  rechtscontinu is:  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -ondercodual t.o.v.  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{C}, \mathcal{N}} \geq \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{I}}$ .*
2. (a) *Indien  $\mathcal{N}$  linkscontinu is:  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -bovencodual t.o.v.  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{I}, \mathcal{N}} \leq \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{C}}$ .*

(b) Indien  $\mathcal{N}$  willekeurig is:  $E_{\mathcal{I}}(\cdot, B)$  is  $\mathcal{N}$ -bovencoduaal t.o.v.  $D_{\mathcal{C}}(\cdot, B) \Leftrightarrow \mathcal{O}^{\mathcal{C}, \mathcal{N}} \leq \mathcal{O}^{\mathcal{N}, \mathcal{I}}$ .

BEWIJS. Uit eigenschap 2.6.  $\square$

Codualiteitseigenschappen m.b.t. de vaagmorfologische opening en sluiting kunnen, net zoals voor de dualiteitseigenschappen enkel geformuleerd worden voor involutieve negatoren. In dat geval is codualiteit echter equivalent met dualiteit, zoals opgemerkt in Paragraaf 2.2.3.

## 5.2.4 Monotoniteit

**Eigenschap 5.14** *Zij  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  conjunctoren op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  implicatoren op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \Rightarrow D_{\mathcal{C}_1}(A, B) \subseteq D_{\mathcal{C}_2}(A, B)$ ,
2.  $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \Rightarrow E_{\mathcal{I}_1}(A, B) \subseteq E_{\mathcal{I}_2}(A, B)$ .

BEWIJS. Uit eigenschap 2.7.  $\square$

**Eigenschap 5.15** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B_1, B_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_2)$ ,
2.  $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_2)$ .

BEWIJS. Uit eigenschap 2.8.  $\square$

**Eigenschap 5.16** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_2, B)$ ,
2.  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \subseteq E_{\mathcal{I}}(A_2, B)$ .

BEWIJS. Uit eigenschap 2.9.  $\square$

De monotoniteitseigenschappen van de vaagmorfologische opening en sluiting volgen onmiddellijk uit de corresponderende monotoniteitseigenschappen van de vaagmorfologische dilatatie en erosie. Net zoals in het binaire geval, kunnen we echter niets zeggen over het monotoniteitsgedrag m.b.t. structuurelementen.

**Eigenschap 5.17** *Zij  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  conjunctoren op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  implicatoren op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. Indien  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ :

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{C}_1, \mathcal{I}}(A, B) &\subseteq S_{\mathcal{C}_2, \mathcal{I}}(A, B), \\ O_{\mathcal{C}_1, \mathcal{I}}(A, B) &\subseteq O_{\mathcal{C}_2, \mathcal{I}}(A, B). \end{aligned}$$

2. Indien  $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ :

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}_1}(A, B) &\subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}_2}(A, B), \\ O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}_1}(A, B) &\subseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}_2}(A, B). \end{aligned}$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 5.14.  $\square$

**Eigenschap 5.18** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B)$ ,
2.  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \subseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 5.16.  $\square$

### 5.2.5 Interactie met unie van structurelementen

#### Eindige Zadeh unies

**Eigenschap 5.19** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B_1, B_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cup B_2) = D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cup D_{\mathcal{C}}(A, B_2)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cup B_2) = E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cap E_{\mathcal{I}}(A, B_2) \subseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cup E_{\mathcal{I}}(A, B_2)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.10. □

Uit deze en een eigenschap die verder aan bod komt (met name Eigenschap 5.32) kunnen we ook nog de volgende interactie tussen de vaagmorfologische opening enerzijds en de eindige Zadeh unie van structurelementen anderzijds afleiden.

**Eigenschap 5.20** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B_1, B_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

$$O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_1 \cup B_2) \subseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_1) \cap O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_2).$$

BEWIJS.

Voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  geldt:

$$O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_1 \cup B_2) = D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cup B_2), -(B_1 \cup B_2)) \quad (5.2)$$

$$= D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cup B_2), -B_1 \cup -B_2) \quad (5.3)$$

$$= D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cap E_{\mathcal{I}}(A, B_2), -B_1 \cup -B_2) \quad (5.4)$$

$$\subseteq D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1), -B_1 \cup -B_2) \cap D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_2), -B_1 \cup -B_2) \quad (5.5)$$

$$= (D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1), -B_1) \cup D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1), -B_2)) \cap (D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_2), -B_1) \cup D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_2), -B_2)) \quad (5.6)$$

$$\subseteq D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_1), -B_1) \cap D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B_2), -B_2) \quad (5.7)$$

$$= O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_1) \cap O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_2). \quad (5.8)$$

Toelichting: (5.2) en (5.8) wegens de definitie van  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}$ ; (5.3) wegens  $-(B_1 \cup B_2) = -B_1 \cup -B_2$  (eenvoudige verificatie); (5.4) wegens Eigenschap 5.19; (5.5) wegens Eigenschap 5.32 (zie verder); (5.6) wegens Eigenschap 5.19; en (5.7) tenslotte is triviaal. □

Men gaat na dat men een analoge redenering niet kan maken aangaande de vaagmorfologische sluiting.

#### Eindige $\mathcal{S}$ -unies

**Eigenschap 5.21** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B_1, B_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{S}$  een disjunctoor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:  $D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cup_{\mathcal{S}} B_2) \supseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cup D_{\mathcal{C}}(A, B_2)$ .*  
 (b) *Indien  $A = \mathbb{R}^n$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cup_{\mathcal{S}} B_2) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cup_{\mathcal{S}} D_{\mathcal{C}}(A, B_2).$$

- (c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(\mathcal{S}(a, b), c) \leq \mathcal{S}(\mathcal{C}(a, c), \mathcal{C}(b, c)))$ :*

$$D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cup_{\mathcal{S}} B_2) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cup_{\mathcal{S}} D_{\mathcal{C}}(A, B_2).$$

2. *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:*

$$E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cup_{\mathcal{S}} B_2) \subseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cap E_{\mathcal{I}}(A, B_2) \subseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cup_{\mathcal{S}} E_{\mathcal{I}}(A, B_2).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.11. □

**Willekeurige Zadeh-unies**

**Eigenschap 5.22** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $(B_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. (a)  $D_{\mathcal{C}}(A, \bigcup_{i \in I} B_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} D_{\mathcal{C}}(A, B_i)$ .

(b) *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn:*

$$D_{\mathcal{C}}(A, \bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} D_{\mathcal{C}}(A, B_i).$$

2. (a)  $E_{\mathcal{I}}(A, \bigcup_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A, B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A, B_i)$ .

(b) *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  linkscontinu zijn:*

$$E_{\mathcal{I}}(A, \bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A, B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A, B_i).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.12. □

De interactie van de vaagmorfologische opening met eindige Zadeh unies van structurelementen (cfr. Eigenschap 5.20) blijkt ook geldig te zijn voor oneindige Zadeh unies.

**Eigenschap 5.23** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $(B_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn, dan geldt:*

$$O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, \bigcup_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_i).$$

BEWIJS.

Het bewijs is analoog aan het bewijs van Eigenschap 5.20, waarbij nu gebruik gemaakt moet worden van de Eigenschappen 5.22 en 5.35 (zie verder) i.p.v. de Eigenschappen 5.19 en 5.32.

Opmerkingen: 5.4 is in dit geval geen gelijkheid, maar een inclusie  $\subseteq$  (dit verandert niks aan het bewijs); 5.6 is in dit geval in het algemeen een inclusie  $\supseteq$  (hetgeen wegens het elders voorkomen van de inclusie  $\subseteq$  niet tot een besluit zou leiden), maar hier een gelijkheid wegens de veronderstelde linkscontinuïteit van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$ . □

**5.2.6 Interactie met unie van beelden****Eindige Zadeh unies**

**Eigenschap 5.24** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A_1 \cup A_2, B) = D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cup D_{\mathcal{C}}(A_2, B)$ ,

2.  $E_{\mathcal{I}}(A_1 \cup A_2, B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cup E_{\mathcal{I}}(A_2, B)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.13. □

**Eigenschap 5.25** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1 \cup A_2, B) \supseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \cup S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B)$ ,

2.  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1 \cup A_2, B) \supseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \cup O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B)$ .

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  geldt:

$$S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1 \cup A_2, B) = E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A_1 \cup A_2, B), -B) \quad (5.9)$$

$$= E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cup D_{\mathcal{C}}(A_2, B), -B) \quad (5.10)$$

$$\supseteq E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A_1, B), -B) \cup E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A_2, B), -B) \quad (5.11)$$

$$= S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \cup S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B). \quad (5.12)$$

Toelichting: (5.9) en (5.12) wegens de definitie van  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}$ ; (5.10) en (5.11) wegens Eigenschap 5.24.

2. Analoog bewijs. □

### Eindige $\mathcal{S}$ -unies

**Eigenschap 5.26** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{S}$  een disjunctor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:  $D_{\mathcal{C}}(A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2, B) \supseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cup D_{\mathcal{C}}(A_2, B)$ .*

(b) *Indien  $B = \mathbb{R}^n$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$D_{\mathcal{C}}(A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cup_{\mathcal{S}} D_{\mathcal{C}}(A_2, B).$$

(c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(a, \mathcal{S}(b, c)) \leq \mathcal{S}(\mathcal{C}(a, b), \mathcal{C}(a, c)))$ :*

$$D_{\mathcal{C}}(A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cup_{\mathcal{S}} D_{\mathcal{C}}(A_2, B).$$

2. (a) *Indien  $\mathcal{S}$  een semi-conorm is:  $E_{\mathcal{I}}(A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2, B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cup E_{\mathcal{I}}(A_2, B)$ .*

(b) *Indien  $B = \mathbb{R}^n$  en indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator is:*

$$E_{\mathcal{I}}(A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2, B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cup_{\mathcal{S}} E_{\mathcal{I}}(A_2, B).$$

(c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{S}(b, c)) \geq \mathcal{S}(\mathcal{I}(a, b), \mathcal{I}(a, c)))$ :*

$$E_{\mathcal{I}}(A_1 \cup_{\mathcal{S}} A_2, B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cup_{\mathcal{S}} E_{\mathcal{I}}(A_2, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.14. □

### Willekeurige Zadeh unies

**Eigenschap 5.27** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. (a)  $D_{\mathcal{C}}(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} D_{\mathcal{C}}(A_i, B)$ .

(b) *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn:*

$$D_{\mathcal{C}}(\bigcup_{i \in I} A_i, B) = \bigcup_{i \in I} D_{\mathcal{C}}(A_i, B).$$

2.  $E_{\mathcal{I}}(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A_i, B)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.15. □

Ook hier is Eigenschap 5.25 uitbreidbaar naar oneindige Zadeh-unies, zonder dat hiervoor bijkomende voorwaarden dienen opgelegd te worden aan de onderliggende logische operatoren.



**Eigenschap 5.28** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_i, B)$ ,
2.  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\bigcup_{i \in I} A_i, B) \supseteq \bigcup_{i \in I} O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_i, B)$ .

BEWIJS.

1. Het bewijs is analoog aan het bewijs van Eigenschap 5.25, waarbij nu gebruik gemaakt moet worden van Eigenschap 5.27 i.p.v. Eigenschap 5.24. We merken wel op dat 5.10 in dit geval geen gelijkheid, maar een inclusie  $\supseteq$  is; dit verandert niks aan het bewijs.
2. Analoog bewijs. □

## 5.2.7 Interactie met doorsnede van structuurelementen

### Eindige Zadeh doorsnedes

**Eigenschap 5.29** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B_1, B_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cap B_2) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cap D_{\mathcal{C}}(A, B_2)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cap B_2) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cup E_{\mathcal{I}}(A, B_2) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cap E_{\mathcal{I}}(A, B_2)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.16. □

Voor de vaagmorfologische sluiting en opening kunnen geen interactie-eigenschappen met doorsnede van structuurelementen geformuleerd worden. Als men bijvoorbeeld  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B_1 \cap B_2)$  tracht te herschrijven m.b.v. relevante eigenschappen van de vaagmorfologische dilatatie en erosie, komt men tot de conclusie dat men omgekeerde inclusies  $\subseteq$  en  $\supseteq$  moet schrijven. Hieruit kan uiteraard geen besluit getrokken worden.

### Eindige $\mathcal{T}$ -doorsnedes

**Eigenschap 5.30** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B_1, B_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{T}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:  $D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cap_{\mathcal{T}} B_2) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cap D_{\mathcal{C}}(A, B_2)$ .*  
 (b) *Indien  $A = \mathbb{R}^n$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cap_{\mathcal{T}} B_2) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cap_{\mathcal{T}} D_{\mathcal{C}}(A, B_2).$$

- (c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(\mathcal{T}(a, b), c) \leq \mathcal{T}(\mathcal{C}(a, c), \mathcal{C}(b, c)))$ :*

$$D_{\mathcal{C}}(A, B_1 \cap_{\mathcal{T}} B_2) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B_1) \cap_{\mathcal{T}} D_{\mathcal{C}}(A, B_2).$$

2. (a) *Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:  $E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cap_{\mathcal{T}} B_2, A) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cup E_{\mathcal{I}}(A, B_2) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cap_{\mathcal{T}} E_{\mathcal{I}}(A, B_2)$ .*  
 (b) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(\mathcal{T}(a, b), c) \geq \mathcal{T}(\mathcal{I}(a, c), \mathcal{I}(b, c)))$ :*

$$E_{\mathcal{I}}(A, B_1 \cap_{\mathcal{T}} B_2) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B_1) \cap_{\mathcal{T}} E_{\mathcal{I}}(A, B_2).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.17. □

### Willekeurige Zadeh doorsnedes

**Eigenschap 5.31** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $(B_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A, \bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} D_{\mathcal{C}}(A, B_i)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}(A, \bigcap_{i \in I} B_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A, B_i) \supseteq \bigcap_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A, B_i)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.18. □

## 5.2.8 Interactie met doorsnede van beelden

### Eindige Zadeh doorsnedes

**Eigenschap 5.32** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A_1 \cap A_2, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cap D_{\mathcal{C}}(A_2, B)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}(A_1 \cap A_2, B) = E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cap E_{\mathcal{I}}(A_2, B)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.19. □

**Eigenschap 5.33** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1 \cap A_2, B) \subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \cap S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B)$ ,
2.  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1 \cap A_2, B) \subseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_1, B) \cap O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_2, B)$ .

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van 5.25. □

### Eindige $\mathcal{T}$ -doorsnedes

**Eigenschap 5.34** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $A_1, A_2$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\mathcal{T}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

1. (a) *Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:*  $D_{\mathcal{C}}(A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cap D_{\mathcal{C}}(A_2, B)$ .  
 (b) *Indien  $B = \mathbb{R}^n$  en indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm is:*

$$D_{\mathcal{C}}(A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cap_{\mathcal{T}} D_{\mathcal{C}}(A_2, B).$$

- (c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(a, \mathcal{T}(b, c)) \leq \mathcal{T}(\mathcal{C}(a, b), \mathcal{C}(a, c)))$ :*

$$D_{\mathcal{C}}(A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \cap_{\mathcal{T}} D_{\mathcal{C}}(A_2, B).$$

2. (a) *Indien  $\mathcal{T}$  een semi-norm is:*  $E_{\mathcal{I}}(A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2, B) \subseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cap E_{\mathcal{I}}(A_2, B)$ .  
 (b) *Indien  $B = \mathbb{R}^n$  en indien  $\mathcal{I}$  een randimplicator is:*

$$E_{\mathcal{I}}(A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2, B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cap_{\mathcal{T}} E_{\mathcal{I}}(A_2, B).$$

- (c) *Indien  $(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{T}(b, c)) \geq \mathcal{T}(\mathcal{I}(a, b), \mathcal{I}(a, c)))$ :*

$$E_{\mathcal{I}}(A_1 \cap_{\mathcal{T}} A_2, B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A_1, B) \cap_{\mathcal{T}} E_{\mathcal{I}}(A_2, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.20. □

**Willekeurige Zadeh doorsnedes**

**Eigenschap 5.35** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} D_{\mathcal{C}}(A_i, B)$ .

2. (a)  $E_{\mathcal{I}}(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A_i, B)$ .

(b) *Indien de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  rechtscontinu zijn:*

$$E_{\mathcal{I}}(\bigcap_{i \in I} A_i, B) = \bigcap_{i \in I} E_{\mathcal{I}}(A_i, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.21. □

**Eigenschap 5.36** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_i, B)$ ,

2.  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(\bigcap_{i \in I} A_i, B) \subseteq \bigcap_{i \in I} O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A_i, B)$ .

BEWIJS. Analoog aan het bewijs van 5.28. □

**5.2.9 Interactie met translatie**

Merk op dat:

$$\begin{aligned} T_{v,w}(R_B)(x, y) &= R_B(x - v, y - w) \\ &= B((x - v) - (y - w)) \\ &= B((x - y) - (v - w)) \\ &= T_{v-w}(B)(x - y). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\boxed{T_{v,w}(R_B) = T_{v-w}(B) \circ V,}$$

met  $(v, w)$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en  $V$  de verschilfunctie in  $\mathbb{R}^n$ . Met dit gegeven kan Eigenschap 2.22 als volgt vertaald worden.

**Eigenschap 5.37** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

1. (a)  $D_{\mathcal{C}}(T_v(A), B) = T_v(D_{\mathcal{C}}(A, B))$ ,
- (b)  $D_{\mathcal{C}}(A, T_v(B)) = T_{-v}(D_{\mathcal{C}}(A, B))$ ,
- (c)  $D_{\mathcal{C}}(T_v(A), T_v(B)) = D_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

2. (a)  $E_{\mathcal{I}}(T_v(A), B) = T_v(E_{\mathcal{I}}(A, B))$ ,
- (b)  $E_{\mathcal{I}}(A, T_v(B)) = T_{-v}(E_{\mathcal{I}}(A, B))$ ,
- (c)  $E_{\mathcal{I}}(T_v(A), T_v(B)) = E_{\mathcal{I}}(A, B)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.22. □

**Eigenschap 5.38** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . Er geldt:*

1. (a)  $S_{C,\mathcal{I}}(T_v(A), B) = T_v(S_{C,\mathcal{I}}(A, B)),$   
 (b)  $S_{C,\mathcal{I}}(A, T_v(B)) = S_{C,\mathcal{I}}(A, B),$   
 (c)  $S_{C,\mathcal{I}}(T_v(A), T_v(B)) = T_v(S_{C,\mathcal{I}}(A, B)).$
2. (a)  $O_{C,\mathcal{I}}(T_v(A), B) = T_v(O_{C,\mathcal{I}}(A, B)),$   
 (b)  $O_{C,\mathcal{I}}(A, T_v(B)) = O_{C,\mathcal{I}}(A, B),$   
 (c)  $O_{C,\mathcal{I}}(T_v(A), T_v(B)) = T_v(O_{C,\mathcal{I}}(A, B)).$

BEWIJS. Deze eigenschappen volgen onmiddellijk na herhaalde toepassing van Eigenschap 5.37.  $\square$

### 5.2.10 Interactie met schaling

Merk op dat:

$$\begin{aligned}
 H_{\lambda,\lambda}(R_B)(x, y) &= R_B\left(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\lambda}y\right) \\
 &= B\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}y\right) \\
 &= B\left(\frac{1}{\lambda}(x - y)\right) \\
 &= H_\lambda(B)(x - y).
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$H_{\lambda,\lambda}(R_B) = H_\lambda(B) \circ V,$$

met  $\lambda$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  en  $V$  de verschilfunctie in  $\mathbb{R}^n$ . Met dit gegeven kan Eigenschap 2.23 als volgt vertaald worden.

**Eigenschap 5.39** *Zij  $C$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\lambda$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Er geldt:*

1.  $D_C(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(D_C(A, B)),$
2.  $E_{\mathcal{I}}(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(E_{\mathcal{I}}(A, B)).$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.23.  $\square$

**Eigenschap 5.40** *Zij  $C$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $\lambda$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dan geldt:*

1.  $S_{C,\mathcal{I}}(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(S_{C,\mathcal{I}}(A, B)),$
2.  $O_{C,\mathcal{I}}(H_\lambda(A), H_\lambda(B)) = H_\lambda(O_{C,\mathcal{I}}(A, B)).$

BEWIJS. Deze eigenschappen volgen onmiddellijk na herhaalde toepassing van Eigenschap 5.37.  $\square$

Uit de Eigenschappen 5.39 en 5.40 kunnen we de volgende symmetrie-eigenschap afleiden (stel  $\lambda = -1$ ).

**Eigenschap 5.41** *Zij  $C$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1.  $-D_C(A, B) = D_C(-A, -B),$
2.  $-E_{\mathcal{I}}(A, B) = E_{\mathcal{I}}(-A, -B),$
3.  $-S_{C,\mathcal{I}}(A, B) = S_{C,\mathcal{I}}(-A, -B),$
4.  $-O_{C,\mathcal{I}}(A, B) = O_{C,\mathcal{I}}(-A, -B).$

### 5.2.11 Expansiviteit en restrictiviteit

**Eigenschap 5.42** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  en  $A, B \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}$  is expansief:  $A \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}$  is restrictief:  $E_{\mathcal{I}}(A, B) \subseteq A$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.24. □

In tegenstelling tot de vrij zwakke voorwaarden voor de expansiviteit en restrictiviteit van de vaagmorfologische dilatatie en erosie, dient er voor de corresponderende eigenschappen van de vaagmorfologische sluiting en opening voldaan te zijn aan bepaalde relaties tussen de onderliggende logische operatoren.

**Eigenschap 5.43** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Er geldt:*

1. Indien  $(\forall(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(b \leq \mathcal{I}(a, \mathcal{C}(a, b)))$ :  $A \subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$ ,
2. Indien  $(\forall(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(\mathcal{C}(a, \mathcal{I}(a, b)) \leq b)$ :  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B) \subseteq A$ .

De resultaten van de Eigenschappen 5.42 en 5.43 leiden tot de volgende conclusie.

**Eigenschap 5.44** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$  en indien  $(\forall(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(\mathcal{C}(a, \mathcal{I}(a, b)) \leq b \leq \mathcal{I}(a, \mathcal{C}(a, b)))$ , dan geldt:*

$$E_{\mathcal{I}}(A, B) \subseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B) \subseteq A \subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B).$$

### 5.2.12 Inclusie-eigenschappen

**Eigenschap 5.45** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B$  genormaliseerd is, dan geldt:*

$$E_{\mathcal{I}}(A, B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.25. De voorwaarde

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n)(\exists z \in \mathbb{R}^n)(R(z, y) = 1),$$

die in Eigenschap 2.25 aan de vaagrelatie  $R$  werd opgelegd, is voor de relatie  $R_B$  equivalent met

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n)(\exists z \in \mathbb{R}^n)(B(z - y) = 1).$$

Men ziet onmiddellijk in dat dit equivalent is met de genormaliseerdheid van  $B$ . □

**Eigenschap 5.46** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A, B) \supseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$ ,
2.  $D_{\mathcal{C}}(A, B) \supseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, -B)$ ,
3.  $E_{\mathcal{I}}(A, B) \subseteq O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$ ,
4.  $E_{\mathcal{I}}(A, B) \subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, -B)$ .

BEWIJS.

Onder de gestelde voorwaarden is de vaagmorfologische dilatatie  $D_{\mathcal{C}}$  expansief en de vaagmorfologische erosie  $E_{\mathcal{I}}$  restrictief; cfr. Eigenschap 5.42. De gestelde eigenschappen kunnen hieruit onmiddellijk afgeleid worden, door ook gebruik te maken van de monotoniteitseigenschap 5.16:

1.  $S_{C,\mathcal{I}}(A, B) = E_{\mathcal{I}}(D_C(A, B), -B) \subseteq D_C(A, B)$ .
2.  $O_{C,\mathcal{I}}(A, -B) = D_C(E_{\mathcal{I}}(A, -B), B) \subseteq D_C(A, B)$ .
3.  $O_{C,\mathcal{I}}(A, B) = D_C(E_{\mathcal{I}}(A, B), -B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B)$ .
4.  $S_{C,\mathcal{I}}(A, -B) = E_{\mathcal{I}}(D_C(A, -B), B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B)$ . □

In het binaire geval gelden ook de inclusies  $D(A, B) \supseteq O(A, B)$  en  $E(A, B) \subseteq S(A, B)$ . Ze volgen onmiddellijk uit de inclusies  $D(A, B) \supseteq S(A, B)$  en  $E(A, B) \subseteq O(A, B)$  enerzijds, en de in het binair geval steeds geldende inclusie  $O(A, B) \subseteq A \subseteq S(A, B)$ . Zoals uit Eigenschap 5.43 echter blijkt, is deze laatste inclusie in het algemeen niet meer geldig in het AVLM.

### 5.2.13 Idempotentie

#### De vaagmorfologische dilatatie en erosie

**Eigenschap 5.47** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt:*

1.  $D_C(A, B) \subseteq D_C(D_C(A, B), B)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), B) \subseteq E_{\mathcal{I}}(A, B)$ .

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.26. □

**Eigenschap 5.48** *Zij  $\mathcal{C}$  een associatieve semi-norm op  $[0, 1]$  met linkscontinue partiële afbeeldingen, en zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B$  voldoet aan  $B(\mathbf{0}) = 1$ ,  $B = -B$  en sup- $\mathcal{C}$  transitief is, dan geldt:*

$$D_C(D_C(A, B), B) = D_C(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.27. □

Voor semi-normen uit de klasse  $C^+$  is de sup- $\mathcal{C}$  transitiviteit van  $B$  equivalent met  $d_B = \{\mathbf{0}\}$  (cfr. Eigenschap 5.4). Als dan ook moet gelden dat  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan volgt hieruit dat  $B$  een binair object is dat enkel bestaat uit de oorsprong. In dergelijk geval is  $D_C(A, B) = A$ , zodat de bovenstaande idempotentie-eigenschap triviaal is.

Voor semi-normen uit de klasse  $C^0$  ligt dit anders. Zo hebben we in Voorbeeld 5.2 een niet-triviaal structurelement  $B$  beschouwd dat voldoet aan de in Eigenschap 5.48 gestelde voorwaarden (met  $\mathcal{C} = T_W$ ), en bijgevolg aanleiding zal geven tot een idempotente vaagmorfologische dilatatie  $D_{T_W}(\cdot, B)$ . We gaan hier even dieper op in.

**Voorbeeld 5.3** *Het structurelement uit Voorbeeld 5.2 wordt gegeven door:*

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = \mathbf{0} \\ 0.5 & \text{als } x \in [-1, 1]^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

*De corresponderende vaagmorfologische  $T_W$ -dilatatie wordt dan bepaald door:*

$$\begin{aligned} D_{T_W}(A, B)(y) &= \sup_{x \in T_y(d_B)} T_W(B(x - y), A(x)) \\ &= \sup_{x \in T_y(d_B)} \max(0, B(x - y) + A(x) - 1) \\ &= \max(0, \sup_{x \in T_y(d_B)} [B(x - y) + A(x)] - 1) \\ &= \max(0, A(y), \sup_{x \in T_y(d_B), x \neq y} A(x) - 0.5) \\ &= \max(A(y), \sup_{x \in T_y(d_B), x \neq y} A(x) - 0.5). \end{aligned}$$

De  $T_W$ -dilatatie geeft dus ofwel de originele grijswaarde  $A(y)$  als resultaat (er gebeurt niks), ofwel de waarde  $\sup_{x \in T_y(d_B), x \neq y} A(x) - 0.5$ . Het laatste gebeurt pas indien  $\sup_{x \in T_y(d_B), x \neq y} A(x) \geq A(y) + 0.5$ , hetgeen in heel wat gevallen niet voldaan zal zijn. Zo is dit bijvoorbeeld onmogelijk in homogene gebieden, of voor pixels waarvoor  $A(y) > 0.5$ .

We zouden dus kunnen stellen dat de  $T_W$ -dilatatie m.b.v. het gegeven structurelement  $B$  een in het algemeen weinig actieve dilatatie is. Dit sluit enigzins aan bij idempotente dilataties  $D_C$  met  $\mathcal{C}$  in  $C^0$ : deze dilataties zijn idempotent als ze het oorspronkelijke beeld niet transformeren, d.w.z. compleet inactief zijn.  $\triangleleft$

**Eigenschap 5.49** Zij  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  met rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen, en zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B$  voldoet aan  $B(\mathbf{0}) = 1$ ,  $B = -B$  en sup- $\mathcal{C}$  transitief is met  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ , dan geldt:

1. Indien  $\mathcal{I}$  en  $\mathcal{C}$  voldoen aan

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b, c)) \geq \mathcal{I}(\mathcal{C}(a, b), c)),$$

dan geldt:

$$E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B).$$

2. Indien  $\mathcal{I}$  bijkomend een randimplicator is, dan geldt:

$$E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), B) = E_{\mathcal{I}}(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.28.  $\square$

Hier geldt een analoge opmerking aangaande de semi-norm  $\mathcal{C}$  als bij de voorgaande eigenschap.

### De vaagmorfologische sluiting en opening

De expansiviteit van de vaagmorfologische sluiting en de restrictiviteit van de vaagmorfologische opening blijken voldoende om te besluiten tot de idempotentie van beide operatoren. Zoals bekend is deze idempotentie van belang in het kader van filtering: het herhaaldelijk toepassen van een idempotente sluiting en opening leidt immers niet tot een wijziging in het resultaat na de eerste toepassing.

**Eigenschap 5.50** [12] Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $(\forall (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(\mathcal{C}(a, \mathcal{I}(a, b)) \leq b \leq \mathcal{I}(a, \mathcal{C}(a, b)))$ , dan geldt:

1.  $S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B), B) = S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$ ,
2.  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B), B) = O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B)$ .

#### 5.2.14 Interactie tussen de operatoren $D_C$ en $E_{\mathcal{I}}$

**Eigenschap 5.51** Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt:

$$D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), B) \supseteq E_{\mathcal{I}}(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.29.  $\square$

**Eigenschap 5.52** Zij  $\mathcal{C}$  een  $t$ -norm op  $[0, 1]$  met continue partiële afbeeldingen en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B$  voldoet aan  $B(\mathbf{0}) = 1$ ,  $B = -B$  en sup- $\mathcal{C}$  transitief is, dan geldt:

$$D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}}(A, B), B) = E_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}}(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.30.  $\square$

**Eigenschap 5.53** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een randimplicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B(\mathbf{0}) = 1$ , dan geldt:*

$$E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), B) \subseteq D_{\mathcal{C}}(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.31. □

**Eigenschap 5.54** *Zij  $\mathcal{C}$  een associatieve semi-norm op  $[0, 1]$  met linkscontinue partiële afbeeldingen, en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Indien  $B$  voldoet aan  $B(\mathbf{0}) = 1$ ,  $B = -B$  en sup- $\mathcal{C}$  transitief is, dan geldt:*

$$E_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), B) = D_{\mathcal{C}}(A, B).$$

BEWIJS. Uit Eigenschap 2.32. □

### 5.2.15 Commutativiteit en associativiteit van de vaagmorfologische dilatatie

**Eigenschap 5.55** [12] *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $A, B, C$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .*

1. *Indien  $\mathcal{C}$  commutatief is, dan geldt:  $D_{\mathcal{C}}(A, B) = -D_{\mathcal{C}}(B, A)$ .*
2. *Indien  $\mathcal{C}$  associatief is en linkscontinue partiële afbeeldingen heeft, dan geldt:*

$$D_{\mathcal{C}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), C) = D_{\mathcal{C}}(A, D_{\mathcal{C}}(B, -C)).$$

### 5.2.16 Combinaties van de vaagmorfologische dilatatie en erosie

**Eigenschap 5.56** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B, C$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .*

1. *Indien  $\mathcal{C}$  commutatief is, associatief is en linkscontinue tweede partiële afbeeldingen heeft, dan geldt:*
- $$D_{\mathcal{C}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), C) = D_{\mathcal{C}}(D_{\mathcal{C}}(A, C), B).$$
2. *Indien  $\mathcal{I}$  voldoet aan het uitwisselingsbeginsel en rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen heeft, dan geldt:*

$$E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), C) = E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, C), B).$$

BEWIJS.

1. Voor  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  geldt:

$$D_{\mathcal{C}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), C)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(C(x - y), D_{\mathcal{C}}(A, B)(x))$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C} \left( C(x - y), \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(z - x), A(z)) \right)$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(C(x - y), \mathcal{C}(B(z - x), A(z))) \quad (5.13)$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(z - x), \mathcal{C}(C(x - y), A(z))) \quad (5.14)$$

$$= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(z - x), \mathcal{C}(C(x - y), A(z)))$$

$$= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(u - y), \mathcal{C}(C(z - u), A(z))) \quad (5.15)$$

$$= \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(u - y), \mathcal{C}(C(z - u), A(z)))$$

$$= \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C} \left( B(u - y), \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(C(z - u), A(z)) \right) \quad (5.16)$$

$$= \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(u - y), D_{\mathcal{C}}(A, C)(u)) \quad (5.17)$$

$$= D_{\mathcal{C}}(D_{\mathcal{C}}(A, C), B)(y). \quad (5.18)$$



Toelichting: (5.13) en (5.16) wegens de linkscontinuïteit van de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$ ; (5.14) wegens de associativiteit en commutativiteit van  $\mathcal{C}$ ; (5.15) door substitutie  $x = z - u + y$  (overgang van variabele  $x$  naar variabele  $u$ ).

2. Analoog aan het bewijs van (1). Het analogon van (5.14) volgt nu uit het feit dat  $\mathcal{I}$  voldoet aan het uitwisselingsbeginsel.  $\square$

Deel (2) van de bovenstaande eigenschap komt ook voor in [12], maar wordt er bewezen onder strengere voorwaarden op  $\mathcal{I}$ . Dit is te wijten aan het feit dat men de eigenschap afleidt uit de Eigenschappen 5.41 en 5.55, en uit deel (1) van de volgende eigenschap (Eigenschap 5.57)<sup>1</sup>, hetgeen een verband vereist tussen de implicator  $\mathcal{I}$  en de conjuncter  $\mathcal{C}$ . Bij het beschouwen van de associativiteit van  $E_{\mathcal{I}}$  hoeft men echter geen rekening te houden met conjunctoren.

Daarnaast gelden ook nog de volgende eigenschappen.

**Eigenschap 5.57** [12] *Zij  $\mathcal{C}$  een conjuncter op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B, C$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .*

1. *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn, de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  rechtscontinu zijn, en  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$  voldoen aan*

$$(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{I}(\mathcal{C}(a, b), c) = \mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b, c))),$$

*dan geldt*

$$E_{\mathcal{I}}(A, D_{\mathcal{C}}(B, -C)) = E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), C).$$

2. *Indien de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  rechtscontinu zijn, de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  linkscontinu zijn, en  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$  voldoen aan*

$$(\forall(a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(\mathcal{I}(a, b), c) \leq \mathcal{I}(a, \mathcal{C}(b, c))),$$

*dan geldt*

$$D_{\mathcal{C}}(A, E_{\mathcal{I}}(B, C)) \subseteq E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A, B), -C).$$

3. *Onder dezelfde voorwaarden als in (2) en met  $\mathcal{C}$  bijkomend commutatief geldt:*

$$D_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), C) \subseteq E_{\mathcal{I}}(D_{\mathcal{C}}(A, C), B).$$

Net als in het binaire geval volgt uit (3) dat  $O_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, B) \subseteq S_{\mathcal{C}, \mathcal{I}}(A, -B)$  (stel  $C = -B$ ).

### 5.2.17 Het principe van lokale kennis

**Eigenschap 5.58** [12] *Zij  $\mathcal{C}$  een conjuncter op  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$  en  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Zij verder  $Z \subseteq \mathbb{R}^n$  het initiële masker. Er geldt:*

1.  $D_{\mathcal{C}}(A \cap Z, B) \cap E(Z, d_B) = D_{\mathcal{C}}(A, B) \cap E(Z, d_B)$ ,
2.  $E_{\mathcal{I}}(A \cap Z, B) \cap E(Z, d_B) = E_{\mathcal{I}}(A, B) \cap E(Z, d_B)$ .

<sup>1</sup>Uit deel (1) van Eigenschap 5.57 volgt dat  $E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, B), C) = E_{\mathcal{I}}(A, D_{\mathcal{C}}(B, -C))$  en  $E_{\mathcal{I}}(E_{\mathcal{I}}(A, C), B) = E_{\mathcal{I}}(A, D_{\mathcal{C}}(C, -B))$ . Anderzijds volgt uit de Eigenschappen 5.41 en 5.55 dat  $D_{\mathcal{C}}(C, -B) = -D_{\mathcal{C}}(-B, C) = D_{\mathcal{C}}(B, -C)$ , waaruit deel (2) van Eigenschap 5.56 volgt.

### 5.2.18 Adjunctie eigenschap

De volgende eigenschap drukt uit dat het paar  $(E_{\mathcal{I}}(\cdot, -B), D_{\mathcal{C}}(\cdot, B))$ , onder bepaalde voorwaarden op de conjunctor  $\mathcal{C}$  en de implicator  $\mathcal{I}$ , een adjunctie is in  $(\mathcal{V}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ , met  $\subseteq$  de Zadeh-inclusie (cfr. Definitie 1.22).

**Eigenschap 5.59** *Zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Indien  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$  voldoen aan het residu-principe*

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3) (\mathcal{C}(a, c) \leq b \Leftrightarrow \mathcal{I}(a, b) \geq c),$$

dan geldt:

$$(\forall A_1, A_2 \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)) (D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \subseteq A_2 \Leftrightarrow A_1 \subseteq E_{\mathcal{I}}(A_2, -B)).$$

BEWIJS.

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{C}}(A_1, B) \subseteq A_2 &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}^n) (D_{\mathcal{C}}(A_1, B)(y) \leq A_2(y)) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}^n) (\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(B(x-y), A_1(x)) \leq A_2(y)) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}^n) (\forall x \in \mathbb{R}^n) (\mathcal{C}(B(x-y), A_1(x)) \leq A_2(y)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (\forall y \in \mathbb{R}^n) (\mathcal{C}(B(x-y), A_1(x)) \leq A_2(y)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (\forall y \in \mathbb{R}^n) (\mathcal{I}(B(x-y), A_2(y)) \geq A_1(x)) \quad (5.19) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (\forall y \in \mathbb{R}^n) (\mathcal{I}((-B)(y-x), A_2(y)) \geq A_1(x)) \quad (5.20) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}((-B)(y-x), A_2(y)) \geq A_1(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (E_{\mathcal{I}}(A_2, -B)(x) \geq A_1(x)) \\ &\Leftrightarrow A_1 \subseteq E_{\mathcal{I}}(A_2, -B). \end{aligned}$$

Toelichting: (5.19) wegens de veronderstelling omtrent  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$ ; (5.20) wegens de definitie van  $-B$ .  $\square$

### 5.3 Opmerking

Tot slot van dit hoofdstuk nog volgende opmerking. We hebben gezien dat de vaagmorfologische dilatatie  $D_{\mathcal{C}}$  en de vaagmorfologische erosie  $E_{\mathcal{I}}$  beschreven kunnen worden binnen het kader van de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ . Eén van de gevolgen hiervan was dat de eigenschappen van de vaagmorfologische operatoren onmiddellijk konden worden afgeleid uit de eigenschappen van de corresponderende vaagrelationele operatoren.

Dit heeft echter ook nog andere interessante gevolgen. Zo hebben we in Hoofdstuk 2 bijvoorbeeld gezien dat ook vaagruwverzamelingenleer beschreven kan worden m.b.v. de vaagrelationele operatoren  $\clubsuit$  en  $\heartsuit$ . Er geldt met name dat (cfr. Eigenschap 2.36)

$$\begin{aligned} \overline{\text{FAS}}^{\mathcal{C}}(A, R) &= \clubsuit(\mathcal{C}, R, A), \\ \underline{\text{FAS}}_{\mathcal{I}}(A, R) &= \heartsuit(\mathcal{I}, R, A), \end{aligned}$$

voor  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  en met  $R$  een binaire vaagrelatie in  $\mathbb{R}^n$ . Hieruit volgt onmiddellijk een formeel verband tussen het AVLM enerzijds en de vaagruwverzamelingenleer anderzijds, namelijk:

**Eigenschap 5.60** *Zij  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en zij  $\mathcal{C}$  een conjunctor op  $[0, 1]$  en  $\mathcal{I}$  een implicator op  $[0, 1]$ . Er geldt:*

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{C}}(A, B) &= \overline{\text{FAS}}^{\mathcal{C}}(A, R_B) \\ E_{\mathcal{I}}(A, B) &= \underline{\text{FAS}}_{\mathcal{I}}(A, R_B), \end{aligned}$$

met  $R_B$  de vaagrelatie in  $\mathbb{R}^n$  geassocieerd met  $B$ , zoals bepaald in Definitie 5.1.

Op het verband tussen beide theorieën zijn we uitvoerig ingegaan in [48]; de discussie hierover valt echter buiten het opzet van dit hoofdstuk.



# Hoofdstuk 6

## Vaagadjuncties

In Hoofdstuk 3 hebben we reeds het begrip adjunctie gedefinieerd, en aangehaald dat deze notie een centrale rol speelt in het standaardwerk [31] van Heijmans omtrent morfologische operatoren. Het belang van het begrip zit hem in het feit dat een adjunctie steeds bestaat uit een algebraïsche dilatatie en een algebraïsche erosie, en in die zin dus steeds een morfologisch model genereert. Bovendien voldoen adjuncties aan een aantal interessante eigenschappen, en kan men hieruit onmiddellijk eigenschappen van de corresponderende algebraïsche dilatatie en erosie afleiden.

Samen met Prof. Heijmans van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam werd het plan opgevat om een fuzzificatie van de notie adjunctie te introduceren en te bestuderen, met het oog op het ontwikkelen van een vaaglogisch gebaseerd model voor de generatie van algebraïsche dilataties en erosies. In dit hoofdstuk rapporteren we de reeds bekomen resultaten.

In de eerste paragraaf herhalen we het klassieke begrip adjunctie, en geven we acht eigenschappen waaraan elke adjunctie a priori voldoet. Vervolgens beschrijven we in Paragraaf 6.2 het theoretisch kader, in het bijzonder het logisch kader, alvorens in Paragraaf 6.3 een fuzzificatie van het begrip adjunctie voor te stellen. We noemen deze fuzzificaties vaagadjuncties. In het laatste deel van dit hoofdstuk onderzoeken we dan of en hoe de eigenschappen van klassieke adjuncties overgedragen kunnen worden naar vaagadjuncties. We sluiten het hoofdstuk af met enkele voorbeelden.

### 6.1 Klassieke adjuncties

We herhalen de definitie van adjunctie<sup>1</sup>.

**Definitie 6.1** [31] *Zij  $\delta$  en  $\epsilon$  operatoren op een complete tralie  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Het paar  $(\epsilon, \delta)$  is een adjunctie in  $\mathcal{L}$  als en slechts als:*

$$\boxed{(\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L})(\delta(L_1) \leq L_2 \Leftrightarrow L_1 \leq \epsilon(L_2)).}$$

De elementaire eigenschappen van adjuncties worden samengevat in de volgende eigenschap.

**Eigenschap 6.1** [31] *Zij  $(\mathcal{L}, \leq)$  een complete tralie, en zij  $(\epsilon, \delta)$  een adjunctie in  $\mathcal{L}$ . Zij verder  $A$  in  $\mathcal{L}$  en  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{L}$ . Er geldt:*

$$\epsilon\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i) \tag{6.1}$$

---

<sup>1</sup>De definitie die we geven is niet de meest algemene, in die zin dat we enkel adjuncties in één complete tralie beschouwen. In [31] beschouwt men twee complete tralies  $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$  en  $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$ , en een operator  $\epsilon$  van  $\mathcal{L}_1$  naar  $\mathcal{L}_2$  en een operator  $\delta$  van  $\mathcal{L}_2$  naar  $\mathcal{L}_1$ . De restrictie die we onszelf opleggen is enerzijds ingegeven door de praktische achtergrond (beelden en getransformeerde beelden worden voorgesteld in dezelfde beeldruimte, bijvoorbeeld  $\mathbb{R}^n$ ), en anderzijds door het feit dat ze op theoretisch vlak weinig of geen impact heeft, en dus niet schaadt aan de algemeenheid.

$$\delta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \delta(A_i) \quad (6.2)$$

$$A \leq \epsilon\delta(A) \quad (6.3)$$

$$\delta\epsilon(A) \leq A \quad (6.4)$$

$$\epsilon\delta\epsilon(A) = \epsilon(A) \quad (6.5)$$

$$\delta\epsilon\delta(A) = \delta(A) \quad (6.6)$$

$$\epsilon(A) = \bigcup\{B \in \mathcal{L} \mid \delta(B) \leq A\} \quad (6.7)$$

$$\delta(A) = \bigcap\{B \in \mathcal{L} \mid B \leq \epsilon(A)\}. \quad (6.8)$$

De eerste twee eigenschappen (6.1) en (6.2) zijn zeer belangrijk, aangezien ze uitdrukken dat  $\epsilon$  en  $\delta$  respectievelijk een algebraïsche erosie en een algebraïsche dilatatie op  $\mathcal{L}$  zijn. Gegeven een adjunctie in  $\mathcal{L}$  beschikken we dus steeds over een (algebraïsche) dilatatie en erosie in  $\mathcal{L}$ ; hierin schuilt de kracht van het begrip adjunctie. Eigenschappen (6.3) en (6.4) drukken uit dat de operatoren  $\epsilon\delta$  en  $\delta\epsilon$  respectievelijk extensief en restrictief zijn; uit de Eigenschappen (6.5) en (6.6) volgt dat deze samengestelde operatoren bovendien idempotent zijn. De Eigenschappen (6.7) en (6.8) geven dan weer aan hoe, gegeven een adjunctie, de ene operator van de adjunctie geconstrueerd kan worden uit de andere operator van de adjunctie.

## 6.2 Het theoretisch kader

### 6.2.1 Het oorspronkelijk logisch kader

De fuzzificatie van het begrip adjunctie zoals we die verder zullen voorstellen is gestoeld op vaag-inclusies, en dit behelst de keuze van een implicator op  $[0, 1]$ . In eerste instantie werd het logisch kader als volgt bepaald<sup>2</sup>:

- Selectie van een conjunctor  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$ .
- De implicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$  wordt gekozen als de residuele operator geassocieerd met  $\mathcal{C}$  (cfr. Eigenschap 1.5), d.w.z.  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ , met:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a, b) = \sup\{c \in [0, 1] \mid \mathcal{C}(a, c) \leq b\}, \quad (6.9)$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Deze keuze werd ondersteund door een aantal interessante theoretische eigenschappen; zie verder. Merk ook op dat er ook een zekere analogie bestaat tussen uitdrukking (6.9) enerzijds en de klassieke eigenschap (6.7) anderzijds.

De specifieke keuze van de implicator  $\mathcal{I}$  als  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  legt impliciet een beperking op aan de keuze van de conjunctor  $\mathcal{C}$ . Gelet op Eigenschap 1.5 moet immers voldaan zijn aan

$$(\forall a \in [0, 1])(\mathcal{C}(1, a) = 0 \Rightarrow a = 0),$$

opdat  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  effectief een implicator zou zijn. Deze voorwaarde is in het bijzonder voldaan indien  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$  is.

Een tweede beperking op de keuze van  $\mathcal{C}$  wordt ingegeven door de volgende eigenschap<sup>3</sup>.

**Eigenschap 6.2** *Zij  $\mathcal{C}$  een semi-norm op  $[0, 1]$ . De semi-norm  $\mathcal{C}$  en de residuele implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  voldoen aan het residu-principe*

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3)(\mathcal{C}(a, c) \leq b \Leftrightarrow c \leq \mathcal{I}(a, b))$$

*als en slechts als de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{C}$  linkscontinu zijn.*

<sup>2</sup>Het bepalen van het logisch kader heeft algemeen als doelstelling het vastleggen van de logische operatoren alvorens de studie van vaagadjuncties aan te vatten, teneinde steeds te kunnen terugvallen op een gesloten logisch kader.

<sup>3</sup>De eigenschap is een veralgemening van een eigenschap uit [24]; ze wordt er geformuleerd voor driehoeksnormen op  $[0, 1]$ , zonder bewijs. Een bewijs is echter wel terug te vinden in onze Licentiaatsverhandeling [43], en uit dit bewijs blijkt dat noch de commutativiteit, noch de associativiteit van een driehoeksnorm effectief nodig is.

Men bemerkt onmiddellijk enige analogie tussen het residu-principe enerzijds, en de klassieke adjunctie-voorwaarde uit Definitie 6.1 anderzijds, hetgeen verklaart waarom aan deze eigenschap belang gehecht wordt. Het residu-principe legt bijgevolg de linkscontinuïteit van de tweede partiële afbeeldingen op aan de keuze van de conjunctor  $\mathcal{C}$ .

Samengevat werd het oorspronkelijk logisch kader vastgelegd door de keuze van een semi-norm  $\mathcal{C}$  met linkscontinue tweede partiële afbeeldingen op  $[0, 1]$ , waaruit de residuele implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  geconstrueerd wordt. Met deze implicator werd vervolgens verder gewerkt. De keuze van dergelijke implicator werd ondersteund door een aantal interessante eigenschappen: zo voldoet  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  aan het residu-principe, aan de begrenzingseigenschap (cfr. Lemma 1.8), en aan enkele continuïteitseigenschappen (cfr. Lemma 1.3).

Het is echter mogelijk om het logisch kader algemener op te bouwen.

## 6.2.2 Veralgemening van het logisch kader

Het is onze betrachtning om het logisch kader zo algemeen mogelijk te houden. Hiermee bedoelen we dat we a priori zo weinig mogelijk restricties wensen op te leggen aan de optredende logische operatoren. Vandaar dat we voor de bepaling van een vaaginclusie niet zullen vertrekken van een conjunctor  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$  (om daar de residuele implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  met te associëren), maar rechtstreeks van een implicator  $\mathcal{I}$  op  $[0, 1]$ .

Zoals verder zal blijken is het voldaan zijn van de begrenzingseigenschap door de implicator  $\mathcal{I}$  van essentieel belang voor de theoretische ontwikkeling van vaagadjuncties. We voeren dan ook de volgende klasse van implicatoren in.

**Definitie 6.2** *De klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$  is de klasse der implicatoren op  $[0, 1]$  die voldoen aan de begrenzingseigenschap, d.w.z.:*

$$\mathcal{I} \in \mathcal{I}^{\leq} \Leftrightarrow (\forall (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1])(\mathcal{I}(a, b) = 1 \Leftrightarrow a \leq b).$$

Tot deze klasse behoren bijvoorbeeld de residuele implicatoren  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ , bepaald door een semi-norm  $\mathcal{C}$  op  $[0, 1]$  met linkscontinue tweede partiële afbeeldingen (cfr. Lemma 1.8).

## 6.2.3 De vaaginclusie

Gegeven een willekeurige implicator  $\mathcal{I}$  gebruiken we de geassocieerde vaaginclusie van Bandler & Kohout (cfr. Definitie 4.21). Deze vaaginclusie is immers een rechtstreekse veralgemening van de klassieke definitie

$$A \subseteq B \Rightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(x \in A \Rightarrow x \in B),$$

met  $\mathcal{X}$  het beschouwde universum.

Omwille van notationale eenvoud zullen we verder de notatie  $|A \subseteq_{\mathcal{I}} B|$  i.p.v.  $Inc_{\mathcal{I}}(A, B)$  gebruiken om de vaaginclusie aan te duiden. Met andere woorden:

$$|A \subseteq_{\mathcal{I}} B| = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(A(x), B(x)),$$

voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ .

De vaaginclusie  $|\cdot \subseteq_{\mathcal{I}} \cdot|$ , bepaald door een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , voldoet aan de volgende eigenschappen. Het zijn resulaten waar we verder nog veelvuldig gebruik van zullen maken.

**Eigenschap 6.3** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Er geldt:*

1. Voor  $(A, B)$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \mathcal{V}(\mathcal{X})$  geldt:

$$|A \subseteq_{\mathcal{I}} B| = 1 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(A(x) \leq B(x)),$$

2.  $(\forall A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}))(|A \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1)$ ,

$$3. (\forall (A, B) \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \mathcal{V}(\mathcal{X}))(|A \subseteq_{\mathcal{I}} B| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1 \Rightarrow A = B).$$

BEWIJS.

1. Wegens definitie van de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$  voldoet de implicator  $\mathcal{I}$  aan de begrenzingseigenschap. Bijgevolg:

$$\begin{aligned} |A \subseteq_{\mathcal{I}} B| = 1 &\Leftrightarrow \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(A(x), B(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(\mathcal{I}(A(x), B(x)) = 1) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(A(x) \leq B(x)). \end{aligned}$$

2. Dit volgt uit (1) en het feit dat  $(\forall x \in \mathcal{X})(A(x) \leq A(x))$ .

3. Dit volgt eveneens onmiddellijk uit (1). □

Merk tenslotte ook op dat

$$|A \subseteq_{\mathcal{I}} B| = 1 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{X})(A(x) \leq B(x)),$$

equivalent is met

$$\boxed{|A \subseteq_{\mathcal{I}} B| = 1 \Leftrightarrow A \subseteq_z B,}$$

met  $\subseteq_z$  de vaaginclusie van Zadeh (cfr. Definitie 1.22). Men ziet trouwens ook onmiddellijk in dat de implicator die geassocieerd is met de vaaginclusie van Zadeh, met name de implicator  $I_z$  uit Definitie 4.9, tot de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$  behoort. Er geldt immers:

$$I_z(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq b \\ 0 & \text{anders} \end{cases},$$

voor alle  $(a, b)$  in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

## 6.3 Vaagadjuncties

### 6.3.1 Definitie

Zij gegeven een universum  $\mathcal{X}$ . Met behulp van de vaaginclusie  $|\cdot \subseteq_{\mathcal{I}} \cdot|$ , met  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , definiëren we het begrip vaagadjunctie op  $\mathcal{V}(\mathcal{X})^4$ .

**Definitie 6.3** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , en zij  $|\cdot \subseteq_{\mathcal{I}} \cdot|$  de geassocieerde vaaginclusie. Zij verder  $\epsilon$  en  $\delta$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{X})$  afbeeldingen. Het paar  $(\epsilon, \delta)$  is een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  indien geldt:*

$$\boxed{(\forall (A, B) \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \mathcal{V}(\mathcal{X}))(|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)|).}$$

De belangrijkste karakteristiek van een vaagadjunctie is dat ze gedefinieerd wordt t.o.v. een vaaginclusie. In die zin vormt het begrip een uitbreiding van het klassieke adjunctie-begrip; een klassieke adjunctie is immers steeds bepaald t.o.v. een binaire inclusie.

Aangezien de keuze van de implicator  $\mathcal{I}$  beperkt wordt tot implicatoren uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$  is er onder de corresponderende vaaginclusies  $|\cdot \subseteq_{\mathcal{I}} \cdot|$  slechts één binaire inclusie, namelijk deze corresponderend met de implicator  $I_z$ . Dit volgt onmiddellijk uit de definitie van deze implicator (zie hoger). Het is in dit geval ook interessant om even dieper in te gaan op de definitie van een

<sup>4</sup>De toepassing in het achterhoofd is  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  en  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) = \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , waarbij het laatste universum gehanteerd wordt voor de modellering van grijswaardebeelden.



$I_z$ -vaagadjunctie. Gelet op de binaire aard van de inclusie is de in Definitie 6.3 gestelde voorwaarde dan immers equivalent met

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \mathcal{V}(\mathcal{X}))(\delta(B) \subseteq_z A \Leftrightarrow B \subseteq_z \epsilon(A)),$$

hetgeen op zijn beurt equivalent is met de uitspraak dat het koppel  $(\epsilon, \delta)$  van  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{X})$  afbeeldingen een klassieke adjunctie is in  $(\mathcal{V}(\mathcal{X}), \subseteq_z)$ . Anders gesteld:

**Eigenschap 6.4** *Zij  $\epsilon$  en  $\delta$  twee  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) - \mathcal{V}(\mathcal{X})$  afbeeldingen. Er geldt:*

$$\begin{array}{c} (\epsilon, \delta) \text{ is een } I_z\text{-vaagadjunctie in } \mathcal{V}(\mathcal{X}) \\ \Updownarrow \\ (\epsilon, \delta) \text{ is een klassieke adjunctie in } (\mathcal{V}(\mathcal{X}), \subseteq_z). \end{array}$$

De introductie van  $\mathcal{I}$ -vaagadjuncties in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , voor willekeurige implicatoren uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , leidt dus tot uitbreidingen van de klassieke adjunctie in  $(\mathcal{V}(\mathcal{X}), \subseteq_z)$ .

### 6.3.2 Eigenschappen van vaagadjuncties

We onderzoeken of en hoe de eigenschappen (6.1) t.e.m. (6.8) uit Eigenschap 6.1 uitgebreid kunnen worden naar vaagadjuncties. We beginnen met eigenschap (6.1), die uitdrukt dat de  $\epsilon$ -operator van een adjunctie  $(\epsilon, \delta)$  in  $\mathcal{X}$  een algebraïsche erosie is.

**Eigenschap 6.5** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , met rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen<sup>5</sup>. Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:*

$$\boxed{\epsilon\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i).$$

BEWIJS.

Zij  $(A_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:

$$|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)| = |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} \bigcap_{i \in I} A_i| \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\delta(B)(x), \bigcap_{i \in I} A_i(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\delta(B)(x), \inf_{i \in I} A_i(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{i \in I} \mathcal{I}(\delta(B)(x), A_i(x)) \quad (6.11) \\ &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\delta(B)(x), A_i(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{i \in I} |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A_i| \\ &= \inf_{i \in I} |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A_i)| \quad (6.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(B(x), \epsilon(A_i)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{i \in I} \mathcal{I}(B(x), \epsilon(A_i)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(B(x), \inf_{i \in I} \epsilon(A_i)(x)) \quad (6.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(B(x), \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i)(x)) \\ &= |B \subseteq_{\mathcal{I}} \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i)| \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Voor een residuele implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  geassocieerd met een semi-norm  $\mathcal{C}$  is dit steeds vervuld; cfr. Lemma 1.3.

Toelichting: (6.10) en (6.12) wegens  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie; (6.11) en (6.13) wegens het feit dat  $\mathcal{I}$  rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen heeft<sup>6</sup>.

Wegens Eigenschap 6.3 geldt dat

$$\begin{aligned} |\epsilon(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(\bigcap_{i \in I} A_i)| &= 1, \\ |\bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i) \subseteq_{\mathcal{I}} \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i)| &= 1. \end{aligned}$$

Kiezen we nu in bovenstaande afleiding  $B = \epsilon(\bigcap_{i \in I} A_i)$ , dan volgt:

$$|\epsilon(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq_{\mathcal{I}} \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i)| = 1;$$

kiezen we anderzijds  $B = \bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i)$ , dan volgt:

$$|\bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(\bigcap_{i \in I} A_i)| = 1.$$

Uit Eigenschap 6.3 volgt dan dat

$$\bigcap_{i \in I} \epsilon(A_i) = \epsilon(\bigcap_{i \in I} A_i). \quad \square$$

**Eigenschap 6.6** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , met linkscontinue eerste partiële afbeeldingen<sup>7</sup>. Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $(B_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:*

$$\delta(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} \delta(B_i).$$

BEWIJS.

Zij  $(B_i)_{i \in I}$  een familie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  en zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:

$$|\delta(\bigcup_{i \in I} B_i) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\bigcup_{i \in I} B_i(x), \epsilon(A)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\sup_{i \in I} B_i(x), \epsilon(A)(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{i \in I} \mathcal{I}(B_i(x), \epsilon(A)(x)) \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(B_i(x), \epsilon(A)(x)) \\ &= \inf_{i \in I} |B_i \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| \\ &= \inf_{i \in I} |\delta(B_i) \subseteq_{\mathcal{I}} A| \end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\delta(B_i)(x), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{i \in I} \mathcal{I}(\delta(B_i)(x), A(x)) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\sup_{i \in I} \delta(B_i)(x), A(x)) \end{aligned} \tag{6.17}$$

<sup>6</sup>Indien  $I$  een eindige indexverzameling is hoeft men geen gebruik te maken van de rechtscontinuïteit van de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$ . De betrokken gelijkheden volgen dan onmiddellijk uit het stijgend zijn van de tweede partiële afbeeldingen.

<sup>7</sup>Voor een residuale implicator  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  geassocieerd met een semi-norm  $\mathcal{C}$  met linkscontinue eerste partiële afbeeldingen is dit steeds vervuld; cfr. Lemma 1.3.

$$\begin{aligned}
&= \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{I} \left( \bigcup_{i \in I} \delta(B_i)(x), A(x) \right) \\
&= \left| \bigcup_{i \in I} \delta(B_i) \subseteq_{\mathcal{I}} A \right|
\end{aligned}$$

Toelichting: (6.14) en (6.16) wegens  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie; (6.15) en (6.17) wegens het feit dat  $\mathcal{I}$  linkscontinue eerste partiële afbeeldingen heeft<sup>8</sup>.

Wegens Eigenschap 6.3 geldt dat

$$\begin{aligned}
\left| \delta \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \right| &= 1, \\
\left| \bigcup_{i \in I} \delta(B_i) \subseteq_{\mathcal{I}} \bigcup_{i \in I} \delta(B_i) \right| &= 1.
\end{aligned}$$

Kiezen we nu in bovenstaande afleiding  $A = \delta \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right)$ , dan volgt:

$$\left| \bigcup_{i \in I} \delta(B_i) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \right| = 1;$$

kiezen we anderzijds  $A = \bigcup_{i \in I} \delta(B_i)$ , dan volgt:

$$\left| \delta \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \subseteq_{\mathcal{I}} \bigcup_{i \in I} \delta(B_i) \right| = 1.$$

Uit Eigenschap 6.3 volgt dan dat

$$\delta \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} \delta(B_i). \quad \square$$

**Eigenschap 6.7** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:*

$$\boxed{|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon \delta(B)| = 1.}$$

BEWIJS.

Wegens  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  is  $|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)|$ . Kiezen we  $A = \delta(B)$ , dan volgt:

$$|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta(B)| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(\delta(B))|,$$

en bijgevolg, wegens Eigenschap 6.3:

$$|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(\delta(B))| = 1. \quad \square$$

**Eigenschap 6.8** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:*

$$\boxed{|\delta \epsilon(A) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1.}$$

BEWIJS.

Wegens  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  is  $|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)|$ . Kiezen we  $B = \epsilon(A)$ , dan volgt:

$$|\delta(\epsilon(A)) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |\epsilon(A) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)|,$$

<sup>8</sup>Indien  $I$  een eindige indexverzameling is hoeft men geen gebruik te maken van de linkscontinuïteit van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$ . De betrokken gelijkheden volgen dan onmiddellijk uit het dalend zijn van de eerste partiële afbeeldingen.

en bijgevolg, wegens Eigenschap 6.3:

$$|\delta(\epsilon(A)) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1. \quad \square$$

Om het analogon van eigenschap (6.5) te onderzoeken, hebben we het volgende hulpresultaat nodig.

**Lemma 6.1** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , dan is  $\epsilon$  een stijgende operator, in de zin dat:*

$$|A_1 \subseteq_{\mathcal{I}} A_2| = 1 \Rightarrow |\epsilon(A_1) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A_2)| = 1,$$

voor alle  $(A_1, A_2)$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \mathcal{V}(\mathcal{X})$ .

BEWIJS.

Zij  $|A_1 \subseteq_{\mathcal{I}} A_2| = 1$ , dan volgt uit Eigenschap 6.3 dat  $(\forall x \in \mathcal{X})(A_1(x) \leq A_2(x))$ , of nog dat  $A_1 \cap A_2 = A_1$ . Uit Eigenschap 6.5 volgt dan dat<sup>9</sup>

$$\epsilon(A_1) = \epsilon(A_1 \cap A_2) = \epsilon(A_1) \cap \epsilon(A_2),$$

hetgeen op zijn beurt equivalent is met

$$|\epsilon(A_1) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A_2)| = 1. \quad \square$$

**Eigenschap 6.9** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:*

$$\boxed{\epsilon\delta\epsilon(A) = \epsilon(A)}.$$

BEWIJS.

Kiezen we in Eigenschap 6.7  $B = \epsilon(A)$ , dan volgt:

$$|\epsilon(A) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon\delta\epsilon(A)| = 1.$$

Anderzijds volgt uit  $|\delta\epsilon(A) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1$  (cfr. Eigenschap 6.8) en het stijgend zijn van  $\epsilon$  (cfr. Lemma 6.1) dat

$$|\epsilon\delta\epsilon(A) \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1.$$

Uit Eigenschap 6.3 volgt dan dat

$$\epsilon\delta\epsilon(A) = \epsilon(A). \quad \square$$

Ook voor het analogon van eigenschap (6.6) is eerst een hulpresultaat nodig.

**Lemma 6.2** *Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , dan is  $\delta$  een stijgende operator, in de zin dat:*

$$|B_1 \subseteq_{\mathcal{I}} B_2| = 1 \Rightarrow |\delta(B_1) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta(B_2)| = 1,$$

voor alle  $(B_1, B_2)$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X}) \times \mathcal{V}(\mathcal{X})$ .

BEWIJS.

Zij  $|B_1 \subseteq_{\mathcal{I}} B_2| = 1$ , dan volgt uit Eigenschap 6.3 dat  $(\forall x \in \mathcal{X})(B_1(x) \leq B_2(x))$ , of nog dat  $B_1 \cup B_2 = B_2$ . Uit Eigenschap 6.6 volgt dan dat<sup>10</sup>

$$\delta(B_2) = \delta(B_1 \cup B_2) = \delta(B_1) \cup \delta(B_2),$$

hetgeen op zijn beurt equivalent is met

$$|\delta(B_1) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta(B_2)| = 1. \quad \square$$

<sup>9</sup>Merk op dat de rechtscontinuïteit van de tweede partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  niet vereist is; cfr. het bewijs van Eigenschap 6.5.

<sup>10</sup>Merk op dat de linkscontinuïteit van de eerste partiële afbeeldingen van  $\mathcal{I}$  niet vereist is; cfr. het bewijs van Eigenschap 6.6.

**Eigenschap 6.10** Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:

$$\delta\epsilon\delta(B) = \delta(B).$$

BEWIJS.

Kiezen we in Eigenschap 6.8  $A = \delta(B)$ , dan volgt:

$$|\delta\epsilon\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta(B)| = 1.$$

Anderzijds volgt uit  $|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon\delta(B)| = 1$  (cfr. Eigenschap 6.7) en het stijgend zijn van  $\delta$  (cfr. Lemma 6.2) dat

$$|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} \delta\epsilon\delta(B)| = 1.$$

Uit Eigenschap 6.3 volgt dan dat

$$\delta\epsilon\delta(B) = \delta(B). \quad \square$$

**Eigenschap 6.11** Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $A$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:

$$\epsilon(A) = \bigcup\{B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1\}.$$

BEWIJS.

Wegens  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  is  $|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1$  equivalent met  $|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1$ , hetgeen wegens Eigenschap 6.3 equivalent is met

$$(\forall z \in \mathcal{X})(B(z) \leq \epsilon(A)(z)).$$

Voor een vaste  $x$  in  $\mathcal{X}$  impliceert deze voorwaarde dat  $B(x) \leq \epsilon(A)(x)$ . In het bijzonder volgt hieruit:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup\{B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1\}\right)(x) &= \sup\{B(x) \in [0, 1] \mid B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \wedge |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1\} \\ &\leq \sup\{B(x) \in [0, 1] \mid B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \wedge B(x) \leq \epsilon(A)(x)\} \\ &= \epsilon(A)(x) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Anderzijds is  $|\delta\epsilon(A) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1$  wegens Eigenschap 6.8. Hieruit volgt dat

$$\epsilon(A) \in \{B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1\},$$

en bijgevolg is

$$\epsilon(A)(x) \leq \left(\bigcup\{B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1\}\right)(x). \quad (6.19)$$

Uit (6.18) en (6.19) volgt dan dat

$$\epsilon(A) = \bigcup\{B \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1\}. \quad \square$$

**Eigenschap 6.12** Zij  $\mathcal{I}$  een implicator uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ . Zij  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ , en zij  $B$  in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . Er geldt:

$$\delta(B) = \bigcap\{A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1\}.$$

BEWIJS.

Wegens  $(\epsilon, \delta)$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  is  $|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1$  equivalent met  $|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = 1$ , hetgeen wegens Eigenschap 6.3 equivalent is met

$$(\forall z \in \mathcal{X})(\delta(B)(z) \leq A(z)).$$

Voor een vaste  $x$  in  $\mathcal{X}$  impliceert deze voorwaarde dat  $\delta(B)(x) \leq A(x)$ . In het bijzonder volgt hieruit:

$$\begin{aligned} \left( \bigcap \{A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1\} \right) (x) &= \inf \{A(x) \in [0, 1] \mid A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \wedge |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1\} \\ &\geq \inf \{A(x) \in [0, 1] \mid A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \wedge A(x) \geq \delta(B)(x)\} \\ &= \delta(B)(x) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Anderzijds is  $|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon\delta(B)| = 1$  wegens Eigenschap 6.7. Hieruit volgt dat

$$\delta(B) \in \{A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1\},$$

en bijgevolg is

$$\delta(B)(x) \geq \left( \bigcap \{A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1\} \right) (x). \quad (6.21)$$

Uit (6.20) en (6.21) volgt dan dat

$$\delta(B) = \bigcap \{A \in \mathcal{V}(\mathcal{X}) \mid |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| = 1\}. \quad \square$$

Hiermee hebben we aangetoond dat de klassieke eigenschappen (6.1) t.e.m. (6.8) in het kader van adjuncties uitbreidbaar zijn naar analoge eigenschappen in het kader van vaagadjuncties.

## 6.4 Voorbeelden van vaagadjuncties

Wegens Eigenschap 6.4 zijn alle klassieke adjuncties in  $(\mathcal{V}(\mathcal{X}), \subseteq_z)$  tevens  $I_z$ -vaagadjuncties in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$ . De klassieke adjuncties in  $(\mathcal{V}(\mathbb{R}^n), \subseteq_z)$  die aan bod kwamen in Eigenschap 5.59 zijn bijgevolg allemaal  $I_z$ -vaagadjuncties in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .

We illustreren het bestaan van andere  $\mathcal{I}$ -vaagadjuncties in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  m.b.v. de vaagmorfologische dilatatie  $D_C$  en de vaagmorfologische erosie  $E_{\mathcal{I}}$ . Beschouw hiertoe een willekeurige implicator  $\mathcal{I}$  uit de klasse  $\mathcal{I}^{\leq}$ , met geassocieerde vaaginclusie  $|\cdot \subseteq_{\mathcal{I}} \cdot|$ . Een paar  $(\epsilon, \delta)$  van  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  afbeeldingen is een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$  indien geldt dat

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)) (|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)|),$$

hetgeen equivalent is met

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(\delta(B)(y), A(y)) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(B(x), \epsilon(A)(x)),$$

voor alle  $A, B$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Stel nu:

$$\begin{aligned} \delta(B) &= D_C(B, S) \\ \epsilon(A) &= E_{\mathcal{I}}(A, -S), \end{aligned}$$

voor een vast gekozen structurelement  $S$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , en met  $C$  een conjunctoor op  $[0, 1]$ . Er geldt dan dat

$$\begin{aligned} \delta(B)(y) &= D_C(B, S)(y) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} C(S(x - y), B(x)) \\ \epsilon(A)(x) &= E_{\mathcal{I}}(A, -S)(x) \\ &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}((-S)(y - x), A(y)) \\ &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(S(x - y), A(y)), \end{aligned}$$

voor respectievelijk  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  en  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ . Indien we veronderstellen dat  $\mathcal{I}$  linkscontinue eerste partiële afbeeldingen en rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen heeft, dan volgt er respectievelijk:

$$\begin{aligned}
|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(\delta(B)(y), A(y)) \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(S(x-y), B(x)), A(y) \right) \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(\mathcal{C}(S(x-y), B(x)), A(y)) \\
|B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)| &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(B(x), \epsilon(A)(x)) \\
&= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I} \left( B(x), \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(S(x-y), A(y)) \right) \\
&= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(B(x), \mathcal{I}(S(x-y), A(y)))
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat  $|\delta(B) \subseteq_{\mathcal{I}} A| = |B \subseteq_{\mathcal{I}} \epsilon(A)|$  als en slechts als de implicator  $\mathcal{I}$  bijkomend voldoet aan de volgende voorwaarde:

$$(\forall (a, b, c) \in [0, 1]^3) (\mathcal{I}(\mathcal{C}(a, b), c) = \mathcal{I}(b, \mathcal{I}(a, c))).$$

Deze voorwaarde is zeker niet ledig. Uit Lemma 1.15 volgt immers dat ze voldaan is voor de volgende conjunctor-implicator paren  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ :

- $\mathcal{C}$  een commutatieve en associatieve conjunctor op  $[0, 1]$ , en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}, \mathcal{N}}$  met  $\mathcal{N}$  een involutieve negator op  $[0, 1]$ ;
- $\mathcal{C}$  een linkscontinue driehoeksnorm op  $[0, 1]$ , en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ .

In het tweede geval weten we ook dat  $\mathcal{I}$  linkscontinue eerste en rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen heeft (cfr. Lemma 1.3), en dat  $\mathcal{I}$  voldoet aan de begrenzingseigenschap (cfr. Lemma 1.8). Bijgevolg zijn alle hoger gestelde voorwaarden vervuld en besluiten we dat het paar  $(D_{\mathcal{C}}(\cdot, S), E_{\mathcal{I}}(\cdot, -S))$  in dat geval een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie is in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . Formeel:

**Eigenschap 6.13** *Zij  $\mathcal{C}$  een linkscontinue driehoeksnorm op  $[0, 1]$ , en zij  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ . Er geldt: het paar*

$$\boxed{(D_{\mathcal{C}}(\cdot, S), E_{\mathcal{I}}(\cdot, -S))},$$

*is een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ , voor elke  $S$  in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ .*

In het eerste geval zal  $\mathcal{I}$  linkscontinue eerste en rechtscontinue tweede partiële afbeeldingen hebben indien  $\mathcal{C}$  bijkomend linkscontinu is (cfr. Lemma 1.4). In dat geval blijft enkel nog na te gaan of de implicator  $\mathcal{I}$  wel voldoet aan de begrenzingseigenschap om ook hier te besluiten dat  $(D_{\mathcal{C}}(\cdot, S), E_{\mathcal{I}}(\cdot, -S))$  een  $\mathcal{I}$ -vaagadjunctie is in  $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ . De begrenzingseigenschap is immers niet a priori voldaan. Beschouw bijvoorbeeld  $\mathcal{C} = T_P$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{T_P, N_s} = I_R$ : er geldt  $0.25 \leq 0.50$ , maar men gaat eenvoudig na dat  $I_R(0.25, 0.50) = 1 - 0.25 + 0.25 \cdot 0.50 = 0.875 \neq 1$ . Voor  $\mathcal{C} = T_W$  en  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{T_W, N_s} = I_W$  gaat men dan weer na dat wel voldaan is aan de begrenzingseigenschap; dit volgt ook uit het feit dat  $I_W$  een residuele implicator is, namelijk deze corresponderend met  $\mathcal{C} = T_W$  (zie Voorbeeld 1.8).

## 6.5 Verder onderzoek

We zijn er in geslaagd om een aantal interessante theoretische eigenschappen van vaagadjuncties te formuleren. Een volgende stap kan er, naar analogie met de ontwikkeling van de klassieke theorie van adjuncties, uit bestaan om gegeven een algebraïsche erosie  $\epsilon$  op  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  een operator  $\delta$  op  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$

te construeren zo dat het paar  $(\epsilon, \delta)$  een vaagadjunctie in  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  vormt<sup>11</sup>. Een dergelijke eigenschap is van groot praktisch belang omdat ze toelaat om op relatief eenvoudige manier vaag-adjuncties te construeren; zonder deze eigenschap moet voor elk paar  $(\epsilon, \delta)$  van operatoren op  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  expliciet nagegaan worden of ze aan de definitie van vaagadjunctie voldoet.

Een analogon van het klassieke constructie-mechanisme is tot op heden echter nog niet gevonden. Momenteel bevindt het onderzoek naar vaagadjuncties zich op dit punt.

---

<sup>11</sup>In het klassieke geval kan de bedoelde eigenschap als volgt beschreven worden: gegeven een algebraïsche erosie  $\epsilon$  in het universum  $\mathcal{X}$ , en gegeven de operator  $\delta$  op  $\mathcal{X}$  *gedefinieerd* door formule (6.8), dan geldt dat het paar  $(\epsilon, \delta)$  een adjunctie is in  $\mathcal{X}$ . Een analoge eigenschap geldt voor een gegeven algebraïsche dilatatie  $\delta$  en een operator  $\epsilon$  gedefinieerd door formule (6.7).



## Hoofdstuk 7

# Een vaaglogisch filter voor de reductie van gaussische ruis

In het eerste deel van dit proefschrift hebben we uitgebreid onderzoek verricht op het vlak van morfologische modellen. Met de studie van vaagmorfologische modellen werd het domein van de wiskundige morfologie aangevuld en verrijkt met nieuwe, vaaglogisch gebaseerde operatoren. Operatoren die op zich een interessant voorwerp van studie vormen, en die bijgevolg ook stuk voor stuk aan een uitgebreid theoretisch onderzoek onderworpen werden.

In Hoofdstuk 3 hebben we ook een aantal mogelijke toepassingen van morfologische operatoren aangehaald, met name ruisonderdrukking en randdetectie. Op het vlak van randdetectie worden goede resultaten geboekt. Op het vlak van ruisonderdrukking daarentegen zijn de resultaten niet altijd performant, zoals mocht blijken uit numerieke en visuele resultaten. Voor optimale ruisonderdrukking moet dus naar andere oplossingen gezocht worden.

In de loop der jaren werden dan ook heel wat filters voor ruisonderdrukking ontwikkeld. Ze kunnen ingedeeld worden in twee grote groepen: lineaire filters en niet-lineaire filters. In het eerste geval wordt de gefilterde waarde van een pixel bekomen door een lineaire combinatie te nemen van pixels in een gebied rond de beschouwde pixel (zoals bijvoorbeeld bij de gemiddelde waarde filter of de gaussische filter); in het geval van niet-lineaire filters bestaat dergelijk verband tussen de gefilterde pixel en de omliggende pixels niet (zoals bijvoorbeeld bij de adaptieve gewogen gemiddelde filter, de mediaan filter, de wiener filter of de morfologische filters).

Naast de klassieke lineaire en niet-lineaire filters, werden recent ook vaaglogisch gebaseerde filters voor ruisonderdrukking geïntroduceerd. Deze filters maken gebruik van vaaglogica en vaagverzamelingsleer, i.h.b. van vaagregels, om expertkennis te modelleren en in het ruisonderdrukking algoritme in te bouwen. In veel gevallen blijken deze filters effectief beter te presteren dan de klassieke filters. Dit is een discussie waar we in Hoofdstuk 8 nog uitvoerig op terugkomen.

In dit hoofdstuk bespreken we een vaaglogisch gebaseerde filter die ontworpen werd in het kader van het GOA-project waarop ondergetekende als doctorandus werkzaam was. De ontwikkeling ervan werd ingegeven door de vaststelling dat heel wat klassieke en vaaglogisch gebaseerde filters zeer goed presteren voor impulsruis, maar heel wat minder goede resultaten genereren indien het beeld gecontamineerd is met additieve ruis, i.h.b. gaussische ruis<sup>1</sup>. Om hieraan tegemoet te komen is onze filter, die GOA filter werd gedoopt, dan ook specifiek ontworpen voor de reductie van gaussische ruis.

De performantie van de GOA filter wordt in dit hoofdstuk geïllustreerd met enkele voorbeelden. In Hoofdstuk 8 worden deze experimenten uitgebreid en nemen we de filter op in een uitgebreide vergelijkende studie van klassieke en vaaglogisch gebaseerde filters, om zo na te gaan hoe de filter presteert in vergelijking met andere filters. Enkel op die manier kan de werkelijke meerwaarde van de GOA filter immers aangetoond worden.

---

<sup>1</sup>Impulsruis en gaussische ruis zijn in de praktijk de meest frequent voorkomende ruistypes. Het onderzoek naar ruisonderdrukkingfilters wordt dan ook meestal voor die ruistypes verricht.

## 7.1 Inleiding

De GOA filter is ontworpen voor de verwijdering van gaussische ruis in tweedimensionale grijs-waardebeelden. Deze twee belangrijke specificaties worden in deze inleiding kort behandeld en omkaderd.

De eerste specificatie betreft het feit dat we werken met tweedimensionale grijs-waardebeelden. In Paragraaf 7.1.1 verduidelijken we hoe dergelijke beelden in de praktijk gerepresenteerd worden. De tweedimensionaliteit is geen al te grote beperking, aangezien dit in de praktijk het meest voorkomt. De beperking tot grijs-waardebeelden is in die zin veel restrictiever, aangezien, mede door toenemende technologische capaciteiten, steeds meer gebruik gemaakt wordt van kleurbeelden.

De tweede specificatie betreft het feit dat we ons richten op de reductie van gaussische ruis. Gaussische ruis is een bijzonder type van additieve ruis, en naast additieve ruis komen nog andere ruistypes voor. In Paragraaf 7.1.2 gaan we hier dieper op in. De beperking tot gaussische ruis is zeker geen minpunt, integendeel. Gaussische ruis komt in de praktijk immers zeer veel voor (bijvoorbeeld ten gevolge van elektronische ruis die aanwezig is in camera's en sensoren), en de visuele resultaten van bestaande ruisonderdrukkingfilters zijn niet altijd even bevredigend. Zoals reeds aangegeven in de inleiding trachten we met de ontwikkeling van de GOA filter op dit vlak een bijdrage te leveren.

### 7.1.1 Representatie van beelden

In de voorgaande hoofdstukken werden grijs-waardebeelden gerepresenteerd als  $\mathbb{R}^n - [0, 1]$  afbeeldingen. Deze representatie is zeer algemeen, en wordt gebruikt voor theoretische beschouwingen. In de praktijk dringen zich echter een aantal restricties op, die op hun beurt het gevolg zijn van technologische beperkingen. Om beelden digitaal op te slaan en te bewerken moeten ze immers representeerbaar zijn m.b.v. een eindig aantal tekens.

Tweedimensionale digitale beelden worden bijgevolg gemodelleerd als eindige en begrensde deelverzamelingen van  $\mathbb{Z}^2$ , met een eindig aantal mogelijke grijs-waarden. We nemen in dit en volgend hoofdstuk aan dat een beeld bestaat uit een eindig aantal beeldpunten  $(i, j)$ , met  $1 \leq i \leq M_1$  en  $1 \leq j \leq M_2$  ( $M_1, M_2$  in  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ), waarbij  $(i, j)$  opgevat kan worden als het coördinatenpaar van de beschouwde pixel in de tweedimensionale ruimte  $\mathbb{Z}^2$ . We veronderstellen dus steeds te werken met rechthoekige beelden, bestaande uit  $M_1$  rijen en  $M_2$  kolommen. Wat de grijs-waarden betreft zijn dit er in praktijk typisch 256, met name<sup>2</sup>:  $0, 1, 2, \dots, 254, 255$ ; hierbij correspondeert grijs-waarde 0 met zwart en grijs-waarde 255 met wit. Deze grijs-waarden kunnen op een computer worden opgeslagen met 8 bits per pixel ( $2^8 = 256$ ).

### 7.1.2 Ruistypes

Beelden kunnen door allerhande omstandigheden onderhevig zijn aan ruis. Zo zal typisch de kwaliteit van een beeld afnemen als het over een kanaal verzonden wordt (bijvoorbeeld transmissie van satellietbeelden vanuit de ruimte, waarbij ruis veroorzaakt wordt door elektromagnetische storingen), of indien de omstandigheden waarin de opname of ontwikkeling van het beeld gebeurt niet ideaal zijn (bijvoorbeeld bij het inscannen van beelden op een computer, wegens de aanwezigheid van stofdeeltjes).

Wat de ruis zelf betreft kan onderscheid gemaakt worden tussen verschillende ruistypes, in het bijzonder impulsruis, additieve ruis en multiplicatieve ruis. De bekendste voorbeelden van deze ruistypes zijn respectievelijk zout & peper ruis, gaussische ruis en spikkelruis. Ze worden telkens gekarakteriseerd d.m.v. hun waarschijnlijkheidsdichtheid. We veronderstellen hierbij steeds dat de ruis ongecorrleerd is, met nul als verwachtingswaarde.

Bij wijze van voorbeeld wordt in Figuur 7.1 een beeld gecontamineerd met zout & peper ruis (impulsruis), gaussische ruis (additief) en spikkelruis (multiplicatief).

---

<sup>2</sup>Met behulp van een herschaling kan men er steeds voor zorgen dat de grijs-waarden tot het interval  $[0, 1]$  behoren, maar dit is in de praktijk niet vereist.



Figuur 7.1: Illustratie van de drie ruistypes. Boven links: origineel “lena” beeld; boven rechts: gecontamineerd met zout & peper ruis ( $\delta = 5\%$ ); onder links: gecontamineerd met gaussische ruis ( $\sigma = 31$ ); onder rechts: gecontamineerd met spikkelruis ( $\sigma = 60$ ). De MSE van de ruisbeelden schommelt telkens rond de 950.

### Impulsruis

In een beeld dat onderhevig is aan impulsruis kunnen er met een beeldpixel drie dingen gebeuren: de pixel blijft onveranderd, de pixel krijgt grijswaarde  $g_1$  of de pixel krijgt grijswaarde  $g_2$ . Algemeen wordt de waarschijnlijkheidsdichtheid van dit type ruis gegeven door:

$$w(x) = \begin{cases} w & \text{als } x = g_1 \\ w & \text{als } x = g_2 \\ 1 - 2w & \text{anders} \end{cases} .$$

Zout & peper ruis<sup>3</sup> correspondeert met het geval  $g_1 = 0$  en  $g_2 = 255$ ; pixels blijven dus onveranderd, worden zwart (d.w.z. krijgen grijswaarde 0) of worden wit (d.w.z. krijgen grijswaarde 255). Op die manier worden er aan het beeld dus zwarte en witte “korrels” toegevoegd, hetgeen meteen de benaming van dit ruistype verklaart.

De belangrijkste parameter bij zout & peper ruis is de ruisdichtheid  $\delta$ . Dit getal drukt uit welke fractie van het totaal aantal beeldpixels door ruis gecontamineerd is; merk op dat  $\delta \in [0, 1]$ . Voor een  $M_1 \times M_2$  beeld zullen dit bijgevolg  $\delta \cdot (M_1 \cdot M_2)$  pixels zijn.

### Additieve ruis

Additieve ruis is elk type ruis waarvoor het corresponderende gecontamineerd beeld  $B$  opgevat kan worden als de som van het originele beeld  $A$  en een zogenaamd ruisbeeld  $R$ , d.w.z.:

$$\boxed{B(i, j) = A(i, j) + R(i, j).}$$

Gaussische ruis correspondeert met het geval waarin de ruis een normale verdeling heeft met gemiddelde 0 en standaarddeviatie  $\sigma$ . Een dergelijke verdeling wordt bepaald door de volgende waarschijnlijkheidsdichtheid:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} .$$

Hoe groter  $\sigma$ , hoe sterker de ruis. Merk op dat sterkere ruis niet enkel betekent dat meer pixels gecontamineerd worden, maar ook dat de contaminatie in het algemeen groter zal zijn. Zoals hoger reeds opgemerkt komt gaussische ruis vaak voor ten gevolge van elektronische ruis in camera's.

### Multiplicatieve ruis

Multiplicatieve ruis is elk type ruis waarvoor het corresponderend gecontamineerd beeld  $B$  opgevat kan worden als het product van het originele beeld  $A$  en een ruisbeeld  $R$ , d.w.z.:

$$\boxed{B(i, j) = A(i, j) + R(i, j) \cdot A(i, j) = [1 + R(i, j)] \cdot A(i, j).}$$

Spikkelruis correspondeert met het geval waarin de ruis een uniforme verdeling heeft met standaarddeviatie  $\sigma$ . Een dergelijke verdeling wordt bepaald door de volgende waarschijnlijkheidsdichtheid:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}} & \text{als } |x| \leq \sigma\sqrt{3} \\ 0 & \text{anders} \end{cases} .$$

Ook hier geldt dat de sterkte van de ruis toeneemt naar mate  $\sigma$  toeneemt. Spikkelruis blijkt dikwijls voor te komen bij satellietbeelden.

---

<sup>3</sup>Engelstalig: *salt en pepper noise*.

## 7.2 Constructie van de filter

Het algemene idee achter de GOA filter is om een pixel uit te middelen m.b.v. de pixels uit zijn omgeving, daarbij tegelijkertijd rekening houdend met beeldstructuren zoals bijvoorbeeld randen. Het is immers noodzakelijk om een onderscheid te kunnen maken tussen lokale variaties in grijswaarden ten gevolge van ruis enerzijds, en ten gevolge van de beeldstructuren zoals randen anderzijds: in het eerste geval dient de pixel gefilterd te worden om de aanwezige ruis te verwijderen of te onderdrukken, terwijl in het tweede geval de pixel niet gefilterd dient te worden. Filtering in het tweede geval zou immers aanleiding geven tot het waziger worden van het beeld.

Informatie over de beeldstructuur zal in de constructie van de filter verwerkt worden m.b.v. zogenaamde vaag-gradiëntwaarden. Dergelijke vaag-gradiëntwaarden worden voor elke pixel beschouwd in elke richting, en kunnen opgevat worden als een indicatie voor de aanwezigheid van hetzij ruis, hetzij een rand in het beeld. Op die manier kan het gewenste onderscheid tussen lokale variaties ten gevolge van ruis en lokale variaties ten gevolge van de beeldstructuur gemaakt worden. De bepaling van de vaag-gradiëntwaarden is bijgevolg de eerste stap in de constructie van de GOA filter.

De tweede stap in de constructie van de GOA filter bestaat uit de eigenlijke filtering. Indien een pixel opgevat wordt als een ruispixel, dan is het voor de hand liggend om de correctieterm te bepalen op basis van de klassieke gradiëntwaarden, zijnde de lokale variaties in grijswaarden. Deze klassieke gradiëntwaarden zijn dan immers een indicatie voor de sterkte van de aanwezige ruis in de beschouwde pixel. Hoe groter de variaties (zowel positief als negatief), hoe groter ook de uiteindelijke correctieterm dient te zijn (zowel positief als negatief).

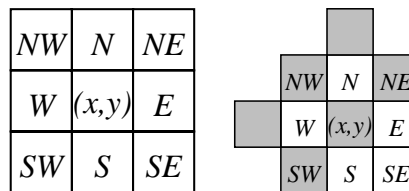
Samengevat bestaat de GOA filter essentieel dus uit de volgende twee stappen:

1. *Bepaling van de vaag-gradiëntwaarden.* Er wordt een vaag-gradiëntwaarde beschouwd in elk van de acht richtingen rond de betreffende pixel. We merken hier reeds op dat we deze waarden in feite niet berekenen, maar wel hun lidmaatschapsgraad in de vaagverzameling klein bepalen. Dit gebeurt m.b.v. een vaagregel.
2. *Bepaling van de correctieterm.* Indien een pixel opgevat wordt als een ruispixel, dan wordt deze gefilterd m.b.v. de klassieke gradiëntwaarden. Het bepalen van de correctieterm wordt gerealiseerd door middel van zestien vaagregels, d.w.z. twee vaagregels voor elke richting. De gefilterde pixelwaarde wordt dan bekomen door bij de oorspronkelijke waarde de correctieterm op te tellen<sup>4</sup>.

We bespreken nu deze twee stappen in meer detail.

### 7.2.1 Bepaling van de vaag-gradiëntwaarden

Beschouw een beeld  $A$ , en beschouw de omgeving van een pixel  $(i, j)$  zoals weergegeven in Figuur 7.2.



Figuur 7.2: Links: de onmiddellijke omgeving van de beschouwde pixel  $(i, j)$ ; rechts: de pixels die betrokken zijn in de berekening van de vaag-gradiëntwaarde in de NW-richting (rechts).

<sup>4</sup>Deze laatste stap is typisch voor filters voor de onderdrukking van additieve ruis; het verschil tussen de verschillende filters situeert zich op het vlak van de *bepaling* van de correctieterm.

De klassieke gradiënt van de centrale pixel  $(i, j)$  in de richting  $r$ , met  $r$  een element van

$$\rho = \{NW, W, ZW, Z, ZO, O, NO, N\},$$

wordt gedefinieerd als het verschil tussen de grijswaarde van de pixel  $(i, j)$  en de grijswaarde van de aangrenzende pixel in de richting  $r$ . We noteren deze gradiëntwaarde als  $\nabla_r(i, j)$ . Er geldt<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}\nabla_{NW}(i, j) &= A(i-1, j-1) - A(i, j), \\ \nabla_W(i, j) &= A(i-1, j) - A(i, j), \\ \nabla_{ZW}(i, j) &= A(i-1, j+1) - A(i, j), \\ \nabla_Z(i, j) &= A(i, j+1) - A(i, j), \\ \nabla_{ZO}(i, j) &= A(i+1, j+1) - A(i, j), \\ \nabla_O(i, j) &= A(i+1, j) - A(i, j), \\ \nabla_{NO}(i, j) &= A(i+1, j-1) - A(i, j), \\ \nabla_N(i, j) &= A(i, j-1) - A(i, j).\end{aligned}$$

Elk van deze klassieke gradiëntwaarden afzonderlijk verschaffen ons echter niet voldoende informatie. Stel bijvoorbeeld dat de waarde  $\nabla_{NW}(i, j)$  zeer groot is: dit kan enerzijds te wijten zijn aan het feit dat de beschouwde pixel een ruispixel is, maar ook aan het feit dat er ten noordwesten van deze pixel een rand door het beeld loopt, bijvoorbeeld in  $ZW - NO$  richting.

Om een onderscheid te maken tussen variaties veroorzaakt door ruis of door randen hebben we dus, voor elke richting  $r$ , nood aan een getal dat aangeeft in welke mate een hoge gradiëntwaarde in die richting veroorzaakt wordt door hetzij ruis, hetzij een rand in het beeld. We realiseren dit m.b.v. zogenaamde vaag-gradiëntwaarden.

Het principe illustreren we met volgend voorbeeld. Beschouw een pixel  $(i, j)$ :

- Stel dat er een rand door de omgeving van de pixel loopt in de  $ZW - NO$  richting; cfr. Figuur 7.2. In dat geval zal niet alleen de gradiënt  $\nabla_{NW}(i, j)$  groot zijn, maar ook de gradiëntwaarden  $\nabla_{NW}(i-1, j+1)$  en  $\nabla_{NW}(i+1, j-1)$  van de aangrenzende pixels in de richting van de rand.
- Stel dat de beschouwde pixel  $(i, j)$  een ruispixel is, en dat er in de  $ZW - NO$  richting van deze pixel geen rand voorkomt. In dat geval zal enkel de gradiëntwaarde  $\nabla_{NW}(i, j)$  groot zijn, terwijl de gradiëntwaarden van de aangrenzende pixels  $(i-1, j+1)$  en  $(i+1, j-1)$  in het algemeen klein zullen zijn.

Dit voorbeeld illustreert dat we door het in acht nemen van de gradiëntwaarden van aangrenzende pixels informatie kunnen bekomen m.b.t. de aanwezigheid van randen in de omgeving van de beschouwde pixel. Om bij het voorbeeld te blijven is het met name aannemelijk om te stellen dat er in  $ZW - NO$  richting geen rand zal zijn indien twee van de drie hoger beschouwde gradiëntwaarden klein zijn, en in dat geval beschouwen we de pixel  $(i, j)$  als een ruispixel.

We aggregeren nu deze informatie in één getal voor elke richting. Algemeen gaan we hiertoe als volgt tewerk. Stel  $(i, j)$  de beschouwde pixel en  $r$  de beschouwde richting:

1. We berekenen de gradiëntwaarde  $\nabla_r(i, j)$ .
2. We berekenen de gradiëntwaarde in de richting  $r$  van de twee naburige pixels van  $(i, j)$  die samen met  $(i, j)$  een lijn vormen die loodrecht op de richting  $r$  staat. In Tabel 2 vermelden we voor elke richting expliciet van welke pixels de gradiëntwaarde berekend moet worden.
3. De vaag-gradiëntwaarde  $\nabla_r^*(i, j)$  in de richting  $r$  wordt bepaald d.m.v. een vaagregel. Deze vaagregel bepaalt de lidmaatschapsgraad van de vaag-gradiëntwaarde in de vaagverzameling

<sup>5</sup>We veronderstellen dat de  $i$ -as (horizontaal) oploopt naar rechts, en dat de  $j$ -as (vertikaal) oploopt naar onder.

richting	referentiepixel	betrokken pixels t.o.v. $(i, j)$
<i>NW</i>	$(i - 1, j - 1)$	$\{(-1,1), (0,0), (1,-1)\}$
<i>W</i>	$(i - 1, j)$	$\{(0,1), (0,0), (0,-1)\}$
<i>ZW</i>	$(i - 1, j + 1)$	$\{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}$
<i>Z</i>	$(i, j + 1)$	$\{(1,0), (0,0), (-1,0)\}$
<i>ZO</i>	$(i + 1, j + 1)$	$\{(1,-1), (0,0), (-1,1)\}$
<i>O</i>	$(i + 1, j)$	$\{(0,-1), (0,0), (0,1)\}$
<i>NO</i>	$(i + 1, j - 1)$	$\{(-1,-1), (0,0), (1,1)\}$
<i>N</i>	$(i, j - 1)$	$\{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$

Tabel 7.1: Betrokken pixels bij de berekening van de vaag-gradiëntwaarde in elk van de richtingen *NW*, *W*, *ZW*, *Z*, *ZO*, *O*, *NO* en *N*. Kolom 1: de beschouwde richting; kolom 2: de referentiepixel voor de richting uit kolom 1 (zie ook Figuur 7.2); kolom 3: de pixels t.o.v. de centraal beschouwde pixel  $(i, j)$  van dewelke de gradiëntwaarde in de betrokken richting berekend moet worden.

**klein**. We geven de vaagregel hier voor de richting  $r = NW$ ; de vaagregels voor de andere richtingen zijn analoog:

$$\begin{aligned}
 \text{ALS} \quad & (\nabla_{NW}(i, j) \text{ is klein EN } \nabla_{NW}(i - 1, j + 1) \text{ is klein}) \text{ OF} \\
 & (\nabla_{NW}(i, j) \text{ is klein EN } \nabla_{NW}(i + 1, j - 1) \text{ is klein}) \text{ OF} \\
 & (\nabla_{NW}(i - 1, j + 1) \text{ is klein EN } \nabla_{NW}(i + 1, j - 1) \text{ is klein}) \\
 \text{DAN} \quad & \nabla_{NW}^*(i, j) \text{ is klein.}
 \end{aligned}$$

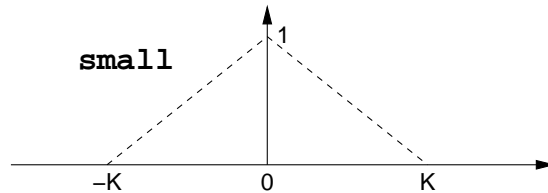
De regels worden geïmplementeerd m.b.v. het minimum voor de EN-operator en het maximum voor de OF-operator.

Merk op dat deze vaagregels gebaseerd zijn op de hoger gemaakte redenering dat indien twee van de drie gradiëntwaarden klein zijn, we de pixel  $(i, j)$  als een ruispixel kunnen beschouwen. Dit wordt hier vertaald in een hoge lidmaatschapsgraad van de vaag-gradiëntwaarde in de vaagverzameling **klein**.

De vaagverzameling **klein** op zijn beurt wordt bepaald door de lidmaatschapsfunctie  $\mu_K$ :

$$\mu_K(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{K} & \text{als } 0 \leq |x| \leq K \\ 0 & \text{als } |x| > K \end{cases},$$

met  $K$  een adaptieve parameter (zie Paragraaf 7.2.3). De lidmaatschapsfunctie wordt geïllustreerd in Figuur 7.3.



Figuur 7.3: De vaagverzameling **klein**, bepaald door de adaptieve parameter  $K$ .

In totaal worden dus acht vaagregels toegepast die aanleiding geven tot evenveel vaag-gradiëntwaarden, meer precies tot lidmaatschapsgraden van deze vaag-gradiëntwaarden in de vaagverzameling **klein**. Het zijn deze lidmaatschapsgraden die ook in de volgende stap gebruikt zullen worden.

## 7.2.2 Bepaling van de correctieterm

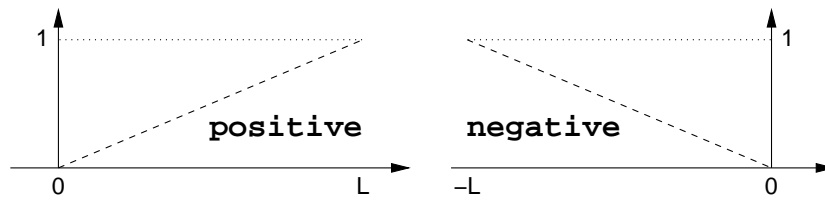
De correctieterm  $c(i, j)$  voor pixel  $(i, j)$  wordt bepaald door twee vaagregels voor elke richting, d.w.z. zestien vaagregels in totaal. De vaagregels zijn een vertaling van de redenering die we eerder maakten:

- Een kleine vaag-gradiëntwaarde  $\nabla_r^*(i, j)$ , d.w.z. een vaag-gradiëntwaarde met een hoge lidmaatschapsgraad in de vaagverzameling **klein**, geeft aan dat er zich in de richting  $r$  geen rand bevindt, en dat we de pixel  $(i, j)$  als een ruispixel kunnen beschouwen.
- In het geval dat  $(i, j)$  als een ruispixel wordt beschouwd, dan kan en wordt de klassieke gradiëntwaarde  $\nabla_r(i, j)$  gebruikt om de correctieterm te bepalen. Voor deze filtering moeten we wel een onderscheid maken tussen positieve en negatieve gradiëntwaarden.

Samengevat worden voor elke richting  $r$  uit  $\rho$  de volgende vaagregels afgevuurd:

ALS ( $\nabla_r^*(i, j)$  is klein EN  $\nabla_r(i, j)$  is positief) DAN ( $c(i, j)$  is positief),  
 ALS ( $\nabla_r^*(i, j)$  is klein EN  $\nabla_r(i, j)$  is negatief) DAN ( $c(i, j)$  is negatief).

De termen **positief** en **negatief** worden gemodelleerd als vaagverzamelingen met respectievelijke lineaire lidmaatschapsfuncties  $\mu_{pos}$  en  $\mu_{neg}$ ; cfr. Figuur 7.4. De vaagregels worden ook in dit geval geïmplementeerd m.b.v. het minimum voor de EN-operator en het maximum voor de OF-operator.



Figuur 7.4: De vaagverzamelingen **positief** (links) en **negatief** (rechts).

De correctieterm  $c(i, j)$  corresponderend met de pixel  $(i, j)$  wordt dan gegeven door

$$c(i, j) = \frac{L}{8} \sum_{r \in \rho} [\lambda_r^+(i, j) - \lambda_r^-(i, j)],$$

met  $\lambda_r^+(i, j)$  de activatiegraad van de eerste regel voor de richting  $r$ :

$$\lambda_r^+(i, j) = \min(\mu_K(\nabla_r^*(i, j)), \mu_{pos}(\nabla_r(i, j))),$$

$\lambda_r^-(i, j)$  de activatiegraad van de tweede regel voor de richting  $r$ :

$$\lambda_r^-(i, j) = \min(\mu_K(\nabla_r^*(i, j)), \mu_{neg}(\nabla_r(i, j))),$$

en met  $L$  het totaal aantal grijswaarden (in de voorbeelden is  $L = 256$ ). Merk op dat in de formule voor  $c(i, j)$  gedeeld wordt door 8, omdat in acht richtingen werd uitgemiddeld.

Het uiteindelijke resultaat van de filtering voor de pixel  $(i, j)$  wordt gegeven door:

$$A'(i, j) = A(i, j) + c(i, j).$$



### 7.2.3 Bepaling van de adaptieve parameter $K$

De GOA filter is een iteratieve filter, d.w.z. dat de filter verschillende malen na elkaar wordt toegepast tot een optimaal resultaat wordt bereikt. Zeker in gevallen van sterke ruis leidt dit in het algemeen tot betere resultaten. Niet alleen omdat er meer gefilterd wordt, maar omdat een iteratief schema het ook mogelijk maakt om de filter adaptief te maken, d.w.z. de mogelijkheid biedt om specifieke informatie van het betrokken beeld in het algoritme te verwerken.

In het geval van de GOA filter wordt het adaptieve element gegeven door de lidmaatschapsfunctie `klein`. De vaagverzameling `klein` wordt adaptief gemaakt door de parameter  $K$ , een parameter die in elke iteratie aangepast kan worden. En een dergelijke aanpassing is inderdaad zinvol: na elke iteratie neemt de hoeveelheid ruis af, waardoor ook de gradiëntwaarden in het algemeen afnemen. In dergelijke omstandigheden is het aangewezen om de modellering van `klein` mee aan te passen, teneinde de filtercapaciteit van de filter te behouden. Immers, beschouw bijvoorbeeld twee gradiëntwaarden  $g_1$  en  $g_2$  die in de eerste iteratie een lidmaatschapsgraad van respectievelijk 0.1 en 0.9 hebben in de vaagverzameling `klein`. De eerste waarde  $g_1$  correspondeert dus met een *enigszins groot* grijswaardeverschil tussen  $(i, j)$  en de beschouwde naburige pixel; de tweede waarde  $g_2$  correspondeert met een *zeer klein* grijswaardeverschil. Na een aantal iteraties is het ruisniveau door de herhaalde filtering gedaald (althans in theorie), en kunnen de waarden  $g_1$  en  $g_2$  niet meer op dezelfde manier beoordeeld worden als tijdens de eerste iteratie: het grote grijswaardeverschil  $g_1$  zal nu eerder als *zeer groot* worden aanzien, en het zeer kleine grijswaardeverschil  $g_2$  zal eerder als *eerder klein* geïnterpreteerd worden. In beide gevallen moet dit zich vertalen in een kleinere lidmaatschapsgraad in de vaagverzameling `klein`.

Dit voorbeeld maakt duidelijk waar de adaptatie zich op moet richten: de lidmaatschapsfunctie van de vaagverzameling `klein` moet aangepast worden op basis van een schatting van de (resterende) hoeveelheid ruis in het beeld: neemt de ruis af, dan moet de lidmaatschapsfunctie scherper gesteld worden, d.w.z. een kleinere drager krijgen (dit correspondeert met een kleinere  $K$ -waarde); neemt de ruis toe, dan moet de lidmaatschapsfunctie als het ware uitgerokken worden, d.w.z. een bredere drager krijgen (dit correspondeert met een grotere  $K$ -waarde). Anders gesteld: de parameter  $K$  moet evolueren zoals de standaardafwijking  $\sigma$  van de aanwezige ruis.

Op basis van deze laatste vaststelling werd volgend adaptatieschema ontwikkeld. Een essentieel onderdeel van het schema bestaat uit het bepalen van een schatting  $\bar{\sigma}$  van de resterende hoeveelheid ruis. Hiervoor maken we de initiële veronderstelling dat een bepaald percentage  $p$  van het beeld homogeen is, hetgeen voor heel wat beelden vrij realistisch is. We komen op deze veronderstelling nog terug, nadat we het adaptatieschema besproken hebben.

1. *Berekenen van de homogeniteitswaarden van  $N \times N$  blokken.* We verdelen het beeld in kleine  $N \times N$  niet-overlappende blokken. Voor elk blok  $B$  bepalen we de grootste en kleinste pixelwaarde, en op basis daarvan berekenen we een maat voor de homogeniteit  $h(B)$  van het blok  $B$ :

$$h(B) = 1 - \frac{\max_{(i,j) \in B} A(i,j) - \min_{(i,j) \in B} A(i,j)}{L};$$

dergelijke maat is welbekend in het domein van beeldverwerking; cfr. [30].

2. *Bepalen van het histogram van de homogeniteitswaarden.*
3. *Bepalen van het percentiel  $p$  van meest homogene blokken.* Uit het histogram van de homogeniteitswaarden leiden we het percentiel  $p$  van de meest homogene blokken af (hier maken we gebruik van de initiële veronderstelling dat een percentage  $p$  van het beeld homogeen is), en van dit percentiel berekenen we de homogeniteitswaarde  $h_p$ .
4. *Bepalen van de schatting  $\bar{\sigma}$ .* De homogeniteitswaarde  $h_p$  kunnen we gebruiken om een schatting  $\bar{\sigma}$  te maken van de standaardafwijking van de resterende hoeveelheid ruis. Er bestaat immers een lineair verband tussen de globale homogeniteit  $h$  van het beeld en de globale standaardafwijking  $\sigma$  van de ruis:

$$\sigma = (1 - h) \cdot \gamma,$$

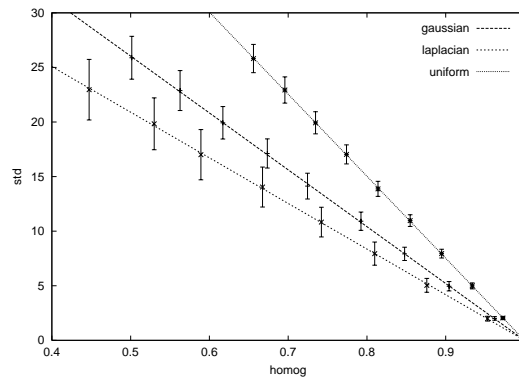
Men kan dit lineair verband vaststellen m.b.v. experimenten (zie verder), maar het kan ook theoretisch aangetoond worden; cfr. [75]. Op basis van dit verband kan de standaardafwijking van de hoeveelheid ruis in een beeld geschat worden d.m.v.:

$$\bar{\sigma} = (1 - h_p) \cdot \gamma_{N^2},$$

met  $h_p$  de homogeniteitswaarde van het percentiel  $p$  van de meest homogene  $N \times N$  blokken in het beeld, en  $\gamma_{N^2}$  een nader te bepalen factor.

5. *Bepalen van de parameter  $\gamma_{N^2}$ .* Om de schatting  $\bar{\sigma}$  te bepalen moeten twee andere getallen bepaald worden: de homogeniteitswaarde  $h_p$  (zie stap 3) en de factor  $\gamma_{N^2}$ . Deze laatste kan als volgt experimenteel bepaald worden:

- Genereer een groot aantal kunstmatige  $N \times N$  blokken, waarbij elk blok ruis met een vooraf veronderstelde distributie bevat (dit kan in het bijzonder gaussische ruis zijn, maar bijvoorbeeld ook laplaciaanse ruis of uniforme ruis).
- Bereken de standaardafwijking en de homogeniteit van elk blok.
- Bereken van beide parameters de gemiddelde waarde over de ganse testset, en zet deze waarden in een grafiek t.o.v. elkaar uit. Bereken van beide parameters ook de standaardafwijking over de ganse testset om in de grafiek de foutenmarge te kunnen uitzetten. In de praktijk zal enkel de standaardafwijking van de standaardafwijking relevant zijn, omdat de standaardafwijking van de homogeniteit zeer klein en dus verwaarloosbaar is.
- Herhaal dit experiment voor verschillende ruisniveaus, gaande van weinig ruis tot veel ruis.



Figuur 7.5: Verband tussen de homogeniteit en het ruisniveau  $\sigma$ , zoals experimenteel bekomen m.b.v.  $9 \times 9$  blokken (d.w.z.  $N = 9$ ).

Op deze manier bekomt men een grafiek, waaruit men het lineaire verband tussen de homogeniteit en de standaardafwijking van de ruis kan afleiden. Figuur 7.5 toont de resultaten voor  $N = 9$  en 200 experimenten voor verschillende ruisniveaus. Het experiment werd uitgevoerd voor gaussische, laplaciaanse en uniforme ruis, resulterende in  $\gamma_{81}$ -waarden van respectievelijk 52.1, 41.8 en 75.2.

6. *Bepalen van de parameter  $K$ .* De parameter  $K$  wordt uiteindelijk bepaald door:

$$K = \alpha \cdot \bar{\sigma} = \alpha \cdot (1 - h_p) \cdot \gamma_{N^2},$$

en is op die manier rechtstreeks gerelateerd met de hoeveelheid ruis, zoals oorspronkelijk onze bedoeling was. Er wordt gebruik gemaakt van een versterkingsfactor  $\alpha$ , waarvan het gebruik verder wordt toegelicht.

Bovenstaand adaptatieschema wordt gebruikt voor elke iteratie. In de veronderstelling dat na elke iteratie de ruis afneemt, zullen ook de schattingen  $\bar{\sigma}$  afnemen. Bijgevolg verkleinen ook de waarden van de parameter  $K$ , waardoor de corresponderende lidmaatschapsfunctie van de vaagverzameling klein vernauwd wordt. Dit garandeert een blijvende filtercapaciteit van de filter.

We vestigen ook nog eens de aandacht op de gevolgde werkwijze, met name op het gebruik van een percentiel van de meest homogene blokken. We zouden bijvoorbeeld ook geöpteerd kunnen hebben om gewoon de standaardafwijking van (een deel van) het beeld te berekenen, en dit als schatting gebruikt te hebben voor de standaardafwijking van de ruis. We doen dit echter niet. De gevolgde werkwijze laat ons immers toe om een onderscheid te maken tussen die delen van het beeld die homogeen zijn, en die delen van het beeld die beeldstructuren zoals randen bevatten. Dit onderscheid wordt hier gerealiseerd door de sortering die het histogram van de homogeniteitswaarden impliceert. Door nu enkel dat deel van het beeld in beschouwing te nemen dat overeenstemt met het percentiel  $p$  van de meest homogene blokken, is ook onze schatting  $\bar{\sigma}$  van de standaardafwijking van de ruis enkel gebaseerd op homogene blokken. En dit leidt uiteraard tot een meer nauwkeurige schatting.

#### 7.2.4 Samenvatting

De constructie van de filter kan uiteindelijk als relatief eenvoudig omschreven worden. Samengevat gaat men als volgt tewerk:

1. Bepaling van de parameter  $K$ . Dit houdt in: opdeling van het beeld in blokken, opstellen van het histogram der homogeniteitswaarden, en afleiden van het percentiel  $p$  van de meest homogene blokken. Dit hoeft slechts één enkele keer te gebeuren voor de aanvang van elke iteratie.
2. Vervolgens voor elke pixel: berekening van een aantal gradiëntwaarden, afvuren van acht vaagregels m.b.t. de vaag-gradiëntwaarden, en afvuren van zestien vaagregels m.b.t. het bepalen van de correctieterm. De vaagregels kunnen relatief eenvoudig geïmplementeerd worden.

Deze relatieve eenvoud vertaalt zich in relatief snelle uitvoeringstijden in vergelijking met andere vaaglogisch gebaseerde filters (zie Hoofdstuk 8).

### 7.3 Experimenteel onderzoek van de GOA filter

De GOA filter telt drie belangrijke parameters:

- de parameter  $K$  (die de lidmaatschapsfunctie van de vaagverzameling klein bepaalt);
- de parameter  $\alpha$  (een versterkingsfactor die wordt gebruikt voor de bepaling van  $K$ );
- het aantal iteraties (de GOA filter is een iteratieve filter).

De parameter  $K$  hangt in eerste instantie af van een schatting  $\bar{\sigma}$  van de standaarddeviatie van de ruis, en het constructie-schema van de GOA filter geeft expliciet aan hoe deze schatting bepaald moet worden. In Paragraaf 7.3.1 gaan we m.b.v. een aantal voorbeelden na hoe nauwkeurig deze schatting is.

Daarnaast zijn ook de versterkingsfactor  $\alpha$  en het aantal iteraties twee belangrijke parameters voor de filtering. Het effect van deze parameters onderzoeken we experimenteel in Paragraaf 7.3.2. We doen dit door de GOA filter toe te passen op verschillende testbeelden. De werkwijze

bestaat er algemeen uit dat we zelf een ruisvrij beeld kiezen, hieraan gaussische ruis toevoegen, en vervolgens de GOA filter toepassen om het gefilterd beeld te bekomen. Door deze werkwijze kunnen we het resultaat van de filtering zowel visueel als m.b.v. numerieke maten beoordelen. In de praktijk is dit meestal niet mogelijk, aangezien we in principe niet over het originele ruisvrije beeld beschikken.

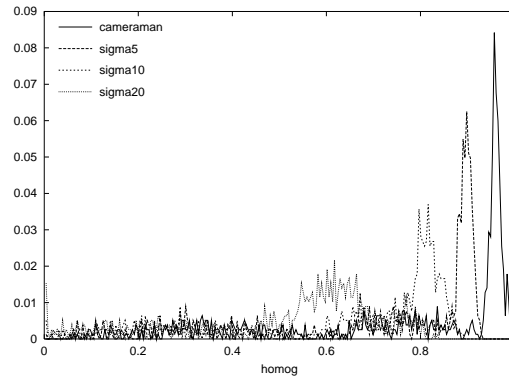
De twee testbeelden, namelijk het “cameraman” beeld en het “boats” beeld, worden weergegeven in Figuur 7.6. Aan deze testbeelden wordt gaussische ruis van verschillende sterkte toegevoegd, met name  $\sigma = 5$ ,  $\sigma = 10$  en  $\sigma = 20$ . Een aantal van deze ruisbeelden wordt visueel weergegeven in de Figuren 7.11 en 7.12.



Figuur 7.6: De twee testbeelden. Boven: “cameraman”; onder: “boats”.

### 7.3.1 Schatting van de ruis

Voor de schatting van de hoeveelheid ruis wordt gebruik gemaakt van het histogram van de homogeniteitswaarden van het ruisbeeld. In Figuur 7.7 tonen we het (genormaliseerd) histogram van de homogeniteitswaarden van het originele “cameraman” beeld, alsook van de drie verschillende ruisbeelden; er werd telkens gebruik gemaakt van  $9 \times 9$  blokken (d.w.z.  $N = 9$ ) om de homogeniteitswaarden te berekenen. We maken verder de veronderstelling dat 20% van het beeld



Figuur 7.7: Histogram van de homogeniteitswaarden voor het “cameraman” testbeeld, en voor drie verschillende ruisbeelden ( $\sigma = 5, 10, 20$ ). Het 20% percentiel van meest homogene blokken verschuift naar links naarmate het ruisniveau sterker wordt: er geldt respectievelijk  $h_{20} = 0.96$  (origineel beeld) en  $h_{20} = 0.90, 0.82, 0.66$  (ruisbeelden).

homogeen is, d.w.z.  $p = 20$ . Op basis van de histogrammen kan de homogeniteit  $h_{20}$  van de 20% percentielen bepaald worden, en op basis daarvan komen we tot een schatting voor het ruisniveau: voor de drie ruisbeelden bekomen we respectievelijk

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= 5.2, \\ \bar{\sigma}_2 &= 9.4, \\ \bar{\sigma}_3 &= 17.7,\end{aligned}$$

terwijl we weten dat de originele  $\sigma$ -waarden gegeven worden door respectievelijk

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 5, \\ \sigma_2 &= 10, \\ \sigma_3 &= 20.\end{aligned}$$

We kunnen de bekomen schattingen bijgevolg als vrij nauwkeurig beschouwen; de afwijkingen schommelen slechts tussen 5 en 10%. Deze nauwkeurige schattingen zijn belangrijk aangezien ze impliceren dat de parameter  $K$  zal voldoen aan het oorspronkelijk opzet, namelijk dat deze evolueert zoals het aanwezige ruisniveau.

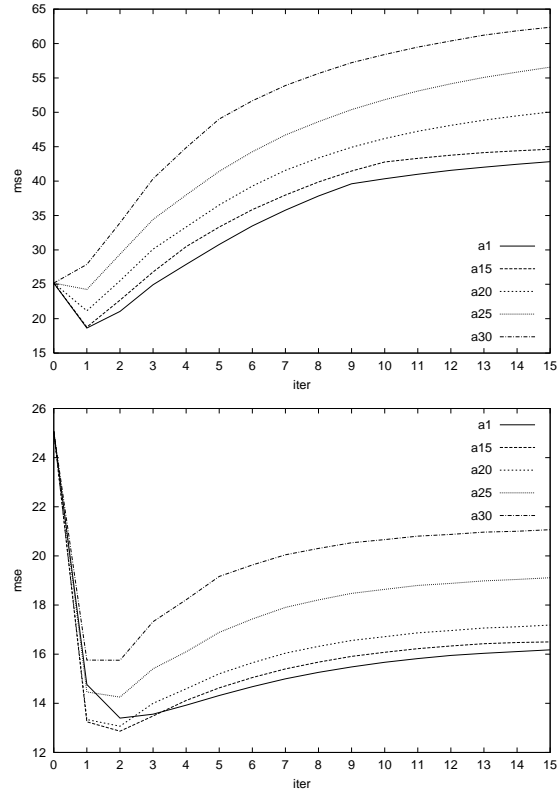
### 7.3.2 De parameter $\alpha$ en het aantal iteraties

De parameter  $K$  wordt gegeven door  $K = \alpha \cdot \bar{\sigma}$ , met  $\alpha$  een versterkingsfactor. Om de invloed van deze laatste parameter na te gaan, passen we de GOA filter toe voor verschillende  $\alpha$ -waarden, namelijk voor  $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ . Tegelijkertijd onderzoeken we aan de hand van deze experimenten de invloed van het aantal iteraties op de performantie van de GOA filter.

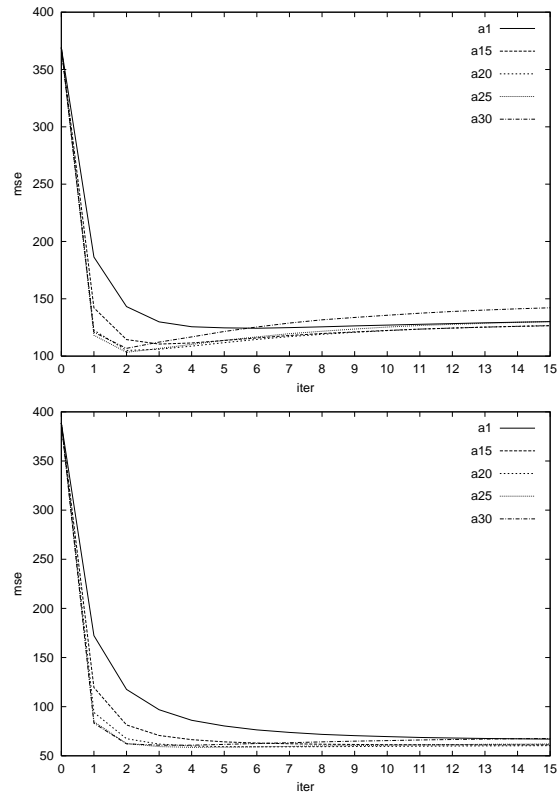
De experimenten worden in eerste instantie geëvalueerd op basis van de MSE-waarden tussen het originele beeld en het gefilterd ruisbeeld. Deze foutmaat is een standaardmaat in het domein van beeldverwerking.

**Definitie 7.1** Zij  $A_1$  en  $A_2$  twee  $M_1 \times M_2$  grijswaardebeelden. De MSE of gemiddelde kwadratische fout  $MSE(A_1, A_2)$  wordt gedefinieerd als

$$MSE(A_1, A_2) = \frac{1}{M_1 \cdot M_2} \sum_{1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq M_2} [A_1(i, j) - A_2(i, j)]^2$$



Figuur 7.8: MSE-waarden i.f.v. het aantal iteraties voor het “cameraman” beeld (boven) en het “boats” beeld (onder), voor het geval  $\sigma = 5$ . Zowel in deze als in volgende figuren corresponderen de lijnen  $a_1, a_{15}, a_{20}, a_{25}, a_{30}$  respectievelijk met de  $\alpha$ -waarden 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0.



Figuur 7.9: MSE-waarden i.f.v. het aantal iteraties voor het “cameraman” beeld (boven) en het “boats” beeld (onder), voor het geval  $\sigma = 20$ .

De Figuren 7.8 en 7.9 geven grafisch de MSE weer in functie van het aantal iteraties en in functie van de parameter  $\alpha$ , respectievelijk voor de ruisniveaus  $\sigma = 5$  en  $\sigma = 20$ . We stellen hierbij het volgende vast:

- Voor lage ruisniveaus (Figuur 7.8) volstaat 1 iteratie om de aanwezige ruis efficiënt te onderdrukken, en blijkt een lage versterkingsfactor  $\alpha$  tot de beste resultaten te leiden. De MSE-waarden vertonen, naargelang de aard van het beeld, een licht tot sterk stijgend karakter bij een toenemend aantal iteraties<sup>6</sup>.
- Voor hoge ruisniveaus (Figuur 7.9) wordt het optimale resultaat van de filter bereikt na 3 tot 4 iteraties, en blijkt een hogere versterkingsfactor  $\alpha$  tot de beste resultaten te leiden. In deze gevallen vertonen de MSE-waarden een zeer stabiel karakter bij een toenemend aantal iteraties.

Op basis van deze observaties kunnen we het volgende criterium voorstellen aangaande de keuze van de parameter  $\alpha$  en het aantal iteraties:

- voor lage ruisniveaus: neem een kleine  $\alpha$ -waarde ( $\alpha = 1$ ), en stop na 2 iteraties;
- voor hoge ruisniveaus: neem een grotere  $\alpha$ -waarde ( $\alpha = 3$ ), en stop na 4 iteraties.

Men kan ook een algemener criterium opstellen. Een dergelijk criterium kan onmogelijk gebaseerd zijn op de MSE-waarden, aangezien die in de praktijk niet berekend kunnen worden (het originele beeld is in principe niet beschikbaar). Het ligt echter voor de hand om gebruik te maken van de parameter  $K$ . Deze parameter hangt immers af van een schatting  $\bar{\sigma}$  van de resterende hoeveelheid ruis (een daling van het ruisniveau resulteert in een daling van  $K$ ), en bijgevolg kunnen de iteraties stopgezet worden indien deze waarden onder een vooraf bepaalde drempel komen, of indien deze weinig of niet meer veranderen bij toenemende iteraties (beschouw ter illustratie Figuur 7.10, die de evolutie van de parameter  $K$  weergeeft in functie van het aantal iteraties). De schatting  $\bar{\sigma}$  kan bovendien ook gebruikt worden om de parameter  $\alpha$  te bepalen, met als principe: hoe hoger de schatting van het ruisniveau, hoe hoger de corresponderende waarde van  $\alpha$ .

## 7.4 Numerieke en visuele resultaten

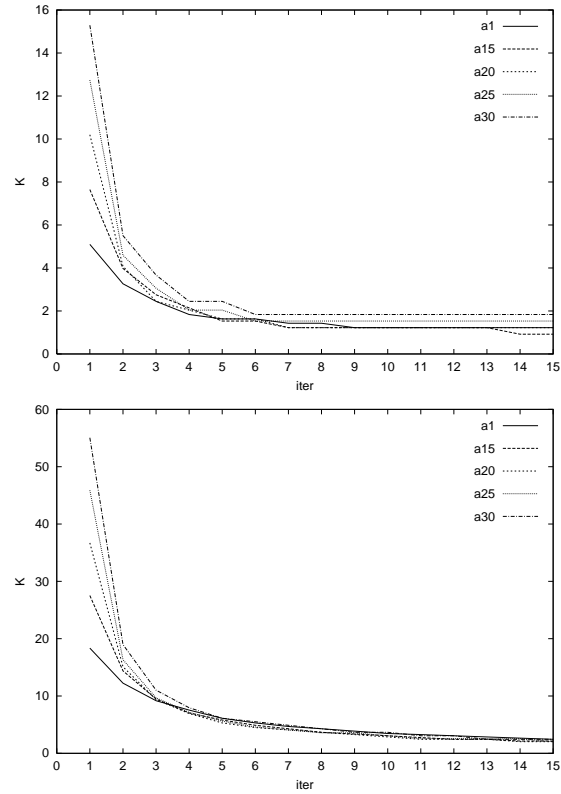
In de voorgaande paragraaf hebben we reeds verschillende numerieke resultaten gegeven; cfr. de Figuren 7.8 (MSE-waarden na filtering van ruisbeelden met  $\sigma = 5$ ) en 7.9 (MSE-waarden na filtering van ruisbeelden met  $\sigma = 20$ ). Op basis van deze resultaten kunnen we besluiten dat de GOA filter in alle gevallen tot een significante reductie van de MSE-waarde leidt. Deze reductie is des te uitgesprokener naarmate het ruisniveau hoger is:

- “cameraman” beeld: in het geval van  $\sigma = 5$  wordt de MSE teruggedrongen met een factor  $\frac{1}{4}$ ; in het geval van  $\sigma = 20$  wordt de MSE teruggedrongen met een factor 3 tot 4.
- “boats” beeld: in het geval van  $\sigma = 5$  wordt de MSE teruggedrongen met een factor 2; in het geval van  $\sigma = 20$  wordt de MSE teruggedrongen met een factor 7 tot 8.

Enkele visuele resultaten worden weergegeven in de Figuren 7.11 (het “cameraman” beeld,  $\sigma = 5$ ) en 7.12 (het “boats” beeld,  $\sigma = 20$ ). In beide gevallen stellen we vast dat de GOA filter een goede uitwerking heeft. De detailbeelden in de Figuren 7.13 en 7.14 tonen ook aan dat de filter relatief goed details en de scherpte van objecten behoudt.

<sup>6</sup>In het geval van een laag ruisniveau stellen we bij het “cameraman” beeld vast dat de MSE-waarden zeer sterk toenemen na een aantal iteraties, zelfs in die mate dat het oorspronkelijk MSE-niveau overschreden wordt. Dit is te wijten aan de typische inhoud van dit beeld: het beeld bevat namelijk veel gras en dit lijkt zeer goed op ruis. Dit wordt door de filter ook zo geïnterpreteerd, waardoor zowel dit gedeelte als de andere gedeeltes van het beeld voortdurend gefilterd worden, hetgeen aanleiding geeft tot hogere MSE-waarden. Voor een hoger ruisniveau daarentegen zijn de MSE-waarden veel stabiel. Dit kan toegeschreven worden aan het feit dat bij sterke ruis een voortdurende filtering de ruis verder afvlakt.





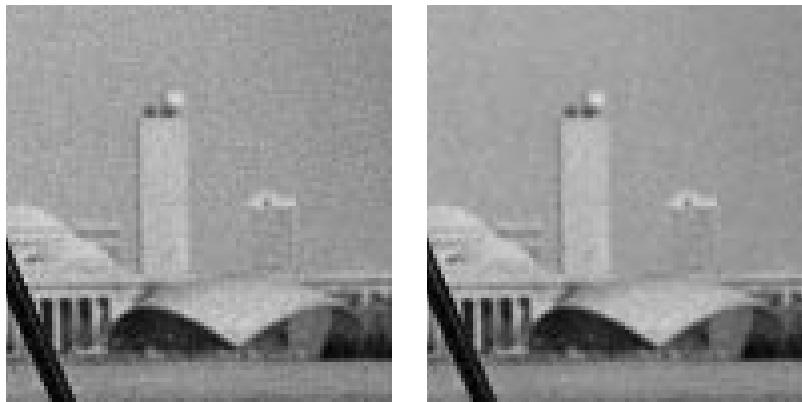
Figuur 7.10: Evolutie van de parameter  $K$  i.f.v. het aantal iteraties voor het “boats” beeld. Boven:  $\sigma = 5$ ; onder:  $\sigma = 20$ .



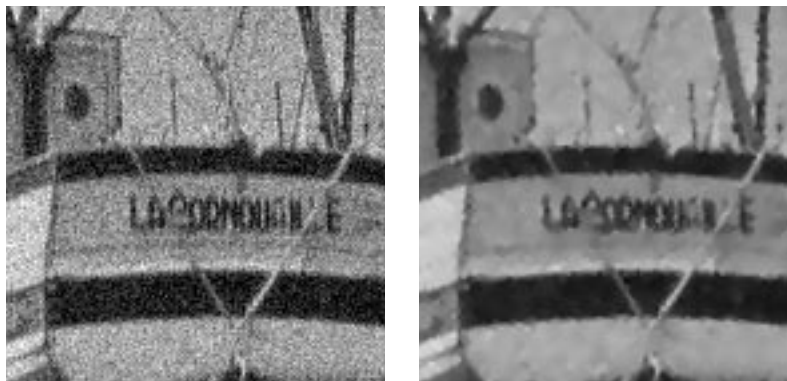
Figuur 7.11: Het “cameraman” beeld. Links: ruisbeeld met  $\sigma = 5$ ; rechts: resultaat na filtering met de GOA filter ( $\alpha = 1$ , 1 iteratie).



Figuur 7.12: Het “boats” beeld. Links: ruisbeeld met  $\sigma = 20$ ; rechts: resultaat na filtering met de GOA filter ( $\alpha = 2$ , 4 iteraties).



Figuur 7.13: Details van het “cameraman” beeld uit Figuur 7.11.



Figuur 7.14: Details van het “boats” beeld uit Figuur 7.12.

We beperken ons in dit hoofdstuk tot deze voorbeelden. In Hoofdstuk 8 worden heel wat meer experimenten uitgevoerd, zowel voor zout & peper ruis als voor gaussische ruis, en voor sterk uiteenlopende ruisniveaus. Het laatste hoofdstuk is immers gewijd aan een vergelijkende studie van klassieke en vaaglogisch gebaseerde filters, waaronder de GOA filter. Op die manier krijgen we ook een goed beeld van de prestaties van de GOA filter t.o.v. de prestaties van andere filters.



## Hoofdstuk 8

# Een vergelijkende studie van vaaglogische filters voor ruisonderdrukking

In Hoofdstuk 7 werd de GOA filter besproken. Deze nieuwe vaaglogisch gebaseerde filter is specifiek ontworpen voor de verwijdering van gaussische ruis, en uit een aantal experimentele resultaten bleek een goede werking voor dit ruistype. Om de performantie van de filter echter ten volle te kunnen beoordelen is het noodzakelijk om een vergelijking te maken met andere, al dan niet vaaglogisch gebaseerde filters. In feite kunnen we deze probleemstelling nog verder veralgemenen. Er bestaan immers heel wat klassieke en vaaglogisch gebaseerde filters, maar nergens in de literatuur vinden we een allesomvattende vergelijkende studie van deze filters. In de meeste gevallen wordt een nieuw geïntroduceerde filter vergeleken met een zeer beperkt aantal andere filters, maar van een systematische aanpak is geen sprake. Bijgevolg is het zo goed als onmogelijk om uit te maken hoe de prestaties van al deze filters zich ten opzichte van elkaar verhouden.

In dit hoofdstuk maken we een vergelijkende studie van bestaande klassieke en vaaglogisch gebaseerde filters. De doelstelling is tweevoudig. Ten eerste willen door het opstellen van een overzicht van bestaande vaagfilters komen tot een classificatie op basis van een aantal theoretische criteria, en ten tweede willen we door het maken van een onderlinge vergelijking van de performantie van deze vaagfilters komen tot een classificatie op basis van kwaliteit.

Onze vergelijkende studie van vaagfilters pretendeert geen volledigheid, en heeft ongetwijfeld ook zijn beperkingen. Zo is het bijna onmogelijk om te garanderen dat alle bestaande vaagfilters in de studie opgenomen zijn; we stellen immers vast dat er in de internationale literatuur nog steeds artikels met nieuwe vaagfilters gepubliceerd worden. Het is ook belangrijk om op te merken dat de studie zich beperkt tot filters voor grijswaardebeelden, terwijl er ook heel wat filters bestaan voor bijvoorbeeld kleurbeelden. Een andere beperking situeert zich op het vlak van de experimentele vergelijking. Deze beperkt zich tot één beeldtype, namelijk “natuurlijke beelden”, terwijl er ook andere beeldtypes bestaan, we denken bijvoorbeeld aan medische beelden of satellietbeelden. Deze vaststellingen maken de voorliggende studie echter niet minder zinvol, integendeel. De reflectie over volledigheid en beperkingen plaatst de studie in het juiste kader, en geeft meteen aan op welke vlakken de studie verdergezet kan worden.

We nemen in onze studie drie categorieën van filters op, namelijk klassieke filters, vaag-klassieke filters en vaagfilters. Met vaag-klassieke filters bedoelen we vaaglogisch gebaseerde filters die opgevat kunnen worden als een uitbreiding of modificatie van bestaande klassieke filters; met vaagfilters bedoelen we dan zuiver vaaglogisch gebaseerde filters, die niet onmiddellijk met een bestaande klassieke filter gelinkt kunnen worden. Voor elke filter bespreken we kort de achterliggende idee en de constructie. Het is echter niet onze bedoeling om hiervan uitgebreide en gedetailleerde uiteenzettingen te geven; we schetsen de grote lijnen en streven hierbij naar uniformiteit in de notaties. Wat de experimenten betreft beschouwen we twee uiteenlopende ruistypes:

zout & peper ruis (impulsruis) en gaussische ruis (additieve ruis). Deze ruistypes werden reeds besproken in Hoofdstuk 7.

## 8.1 Klassieke filters

Er zijn heel wat klassieke filters ontworpen voor ruisonderdrukking. In deze paragraaf geven we een overzicht van enkele bekende klassieke filters, onderverdeeld in lineaire en niet-lineaire filters. Later zullen we de beschouwde vaagfilters niet alleen onderling, maar ook met deze klassieke filters vergelijken.

### 8.1.1 Lineaire filters

Een lineaire filter vervangt elke pixel in een beeld door een lineaire combinatie van de grijswaarden in een  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  omgeving van die pixel. Formeel: als  $A$  het ruisbeeld is en  $A'$  het gefilterde beeld, dan geldt:

$$A'(i, j) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N w(k, l) \cdot A(i - k, j - l).$$

Merk op dat de coëfficiënten  $w(k, l)$  plaatsonafhankelijk zijn, d.w.z. onafhankelijk van de beschouwde pixel  $(i, j)$ . Verder bestaan er geen restricties op de coëfficiënten  $w(k, l)$ . In veel gevallen eist men wel dat

$$\sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N w(k, l) = 1,$$

waardoor men kan spreken van een *lineaire gewogen gemiddelde filter*; de coëfficiënten  $w(k, l)$  noemt men dan de gewichten. Voorbeelden van dergelijke filters worden gegeven door de gemiddelde waarde filter en de gaussische filter; zie verder.

Voor een beeld dat onderhevig is aan gaussische ruis met gemiddelde 0 en variantie  $\sigma^2$  kan men aantonen dat de ruisversterkingsfactor gegeven wordt door [58]:

$$\sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N w(k, l)^2,$$

die berekend kan worden van zodra de coëfficiënten  $w(k, l)$  gekend zijn. De ruisversterkingsfactor is de verhouding tussen de variantie van de ruis na filtering en de variantie van de oorspronkelijke ruis. Om ruis te onderdrukken moet de ruisversterkingsfactor uiteraard zo klein mogelijk zijn, en in ieder geval kleiner dan 1. Merk op dat er verschillende lineaire filters zijn die niet aan deze voorwaarde voldoen, bijvoorbeeld laplaciaanse filters. Dergelijke filters beschouwen we dan ook niet in dit hoofdstuk.

Het feit dat men de invloed van lineaire filters op gaussische ruis zo goed kan voorspellen verklaart, samen met de aard van deze filters, waarom lineaire filters veelal toegepast worden op beelden onderhevig aan gaussische ruis. Voor beelden die bijvoorbeeld onderhevig zijn aan zout & peper ruis zal men eerder niet-lineaire filters gebruiken.

We geven twee voorbeelden van lineaire filters. We beschouwen telkens het geval  $N = 1$ , hetgeen wil zeggen dat de filters gebruik maken van een  $3 \times 3$  venster om een pixel te filteren.

#### Gemiddelde waarde filter

De  $3 \times 3$  gemiddelde waarde filter wordt bepaald door de volgende coëfficiënten-matrix  $w$ :

$$w = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De ruisversterkingsfactor (in het geval van gaussische ruis) van deze filter is  $\frac{1}{3}$ , d.w.z. dat de ruis met een factor 3 verzwakt wordt.

### Gaussische filter

De  $3 \times 3$  gaussische filter wordt bepaald door de volgende coëfficiënten  $w(k, l)$ , voor  $k, l = -1, 0, 1$ :

$$w(k, l) = \frac{w_0(k, l)}{\sum_{k, l=-1}^1 w_0(k, l)},$$

met:

$$w_0(k, l) = e^{-\frac{k^2+l^2}{2\sigma^2}},$$

waarbij  $\sigma$  een nader te specificeren parameter is. In het geval dat men te maken heeft met gaussische ruis, dan neemt men voor  $\sigma$  de corresponderende standaarddeviatie of een schatting ervan.

De ruisversterkingsfactor (in het geval van gaussische ruis) van deze filter is uiteraard afhankelijk van de keuze van  $\sigma$ . Voor  $\sigma = 0.5$  bijvoorbeeld komt men op een factor 0.64, d.w.z. dat de ruis met een factor van ruim 1.5 verzwakt zal worden.

### 8.1.2 Niet-lineaire filters

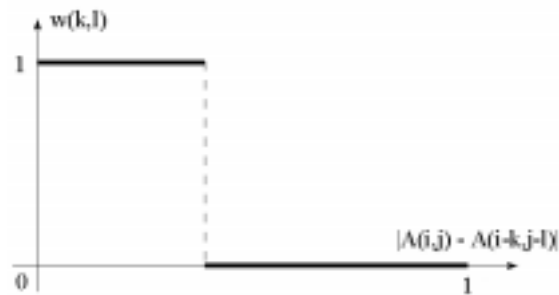
We bespreken achtereenvolgens de adaptieve gewogen gemiddelde filter, de mediaan filter en de adaptieve wiener filter.

#### Adaptieve gewogen gemiddelde filter

De adaptieve gewogen gemiddelde filter vervangt elke pixel in een beeld door een pixelafhankelijk gewogen gemiddelde van de grijswaarden in een  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  omgeving van die pixel:

$$A'(i, j) = \frac{\sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N w_{ij}(k, l) \cdot A(i-k, j-l)}{\sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N w_{ij}(k, l)}.$$

De  $w_{ij}(k, l)$  stellen de gewichten voor die aan de verschillende pixels uit de omgeving rond de pixel  $(i, j)$  gegeven worden voor de berekening van het gemiddelde. Een praktisch probleem is de keuze van deze gewichten. Klassiek gaat men voor het gewicht  $w_{ij}(k, l)$  kijken naar het verschil  $|A(i, j) - A(i-k, j-l)|$ : als dit verschil een bepaalde drempelwaarde overschrijdt gaat men ervan uit dat de corresponderende pixel een ruispixel is, of nog dat de pixel tot een andere homogene zone van het beeld behoort, en stelt men  $w_{ij}(k, l) = 0$ ; anders stelt men  $w_{ij}(k, l) = 1$  (zie Figuur 8.1). Voor natuurlijke beelden, waar randen niet altijd duidelijk zijn en waar verschillende zones vloeiend in elkaar overgaan, is het echter niet vanzelfsprekend om een dergelijke drempelwaarde in te stellen.



Figuur 8.1: Keuze van de gewichten bij de adaptieve gewogen gemiddelde filter.

De toepassing van een adaptieve gewogen gemiddelde filter veroorzaakt dikwijls het waziger worden van het origineel beeld. Dit is te wijten aan het feit dat een pixel in het algemeen uitgemiddeld wordt m.b.v. al zijn burenen. Vaagfilters kunnen dit nadeel opvangen m.b.v. vaagregels. We vermelden in het bijzonder de WFM filter (*weighted fuzzy mean* of *gewogen vaag gemiddelde filter*); cfr. Paragraaf 8.2.

Bijzondere gevallen:

- kiest men de gewichten onafhankelijk van de beschouwde pixel dan bekomt men een lineaire gewogen gemiddelde filter; cfr. Paragraaf 8.1.1;
- kiest men alle gewichten gelijk dan bekomt men de gewone gemiddelde waarde filter, d.w.z. een grijswaarde wordt vervangen door het gemiddelde van de grijswaarden uit de omgeving;
- kiest men  $w_{ij}(0,0) = 1$  en de andere  $w_{ij}(k,l) = 0$  dan gebeurt er niets.

Tenslotte merken we nog op dat de adaptieve gewogen gemiddelde filter behoort tot de klasse der *beste-buur filters*. Dergelijke filters werken volgens het volgende principe: (1) sorteert de pixels uit een omgeving volgens hun verschil in grijswaarde met de centrale pixel uit die omgeving; (2) de output is een gewogen gemiddelde waarbij de gewichten groter zijn naargelang het verschil in grijswaarde kleiner is, d.w.z. naargelang de pixel een betere buur is van de centrale pixel. Geeft men in (2) de  $k$  beste burenen een zelfde gewicht en stelt men de andere gewichten gelijk aan 0, dan spreekt men van de *k-dichtste buur filter*.

### Mediaan filter

De mediaan filter vervangt elke pixel in een beeld door de mediaan van een  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  omgeving van die pixel:

$$A'(i, j) = \text{mediaan}_{-N \leq k, l \leq N} A(i - k, j - l).$$

Aangezien een grijswaarde van een pixel vervangen wordt door de mediaan van de grijswaarden van de pixels in een omgeving, zullen “extreme” grijswaarden geëlimineerd worden. Bijgevolg is de mediaan filter uitermate geschikt voor het verwijderen van zout & peper ruis. Nadelige effecten zijn echter het waziger worden van fijne texturen en het feit dat fijne structuren zoals bijvoorbeeld lijntjes uit het gefilterd beeld verdwijnen<sup>1</sup>. Deze nadelen kan men trachten op te vangen m.b.v. vaagregels. De FM filter (*fuzzy median* of *vaag mediaan filter*) is een dergelijke vaagfilter; cfr. Paragraaf 8.2.

De mediaan filter behoort tot de klasse der *rangorde filters*. Dergelijke filters werken volgens het volgende principe: (1) sorteert de grijswaarden uit een omgeving van groot naar klein; (2) verwijdert een bepaald aantal van de grootste en van de kleinste grijswaarden; (3) de output wordt gegeven door een (gewogen) gemiddelde van de resterende grijswaarden. Kiest men in stap (3) voor een gewoon gemiddelde, d.w.z. met alle gewichten gelijk, dan spreekt men van een *getrimde gemiddelde waarde filter*.

### Adaptieve wiener filter

De adaptieve wiener filter is specifiek ontworpen voor de verwijdering van gaussische ruis [39]. Voor een centrale pixel  $(i, j)$  wordt de gefilterde grijswaarde  $A'(i, j)$  bekomen als de som van een lokale schatting  $\mu(i, j)$  van de gemiddelde waarde en een fractie, afhankelijk van een lokale schatting  $\sigma^2(i, j)$  van de variantie, van het contrast  $A(i, j) - \mu(i, j)$ :

$$A'(i, j) = \mu(i, j) + \frac{\sigma^2(i, j) - \sigma^2}{\sigma^2(i, j)} \cdot (A(i, j) - \mu(i, j)),$$

<sup>1</sup>Beschouw bijvoorbeeld een  $3 \times 3$  omgeving waarin de bovenste en onderste rij een kleine grijswaarde hebben en waarin de middelste rij een hoge grijswaarde heeft (deze rij correspondeert dan met een lijntje). De hoge grijswaarde van de centrale pixel van deze omgeving zal door de mediaan filter vervangen worden door een kleine grijswaarde, waardoor het lijntje uiteindelijk uit het gefilterd beeld zal verdwijnen



waarbij:

$$\begin{aligned}\mu(i, j) &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N A(i-k, j-l), \\ \sigma^2(i, j) &= \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N A^2(i-k, j-l) - \mu^2(i-k, j-l),\end{aligned}$$

en waarbij  $\sigma^2$  de globale variantie van de ruis is. Is deze waarde niet gekend, dan maakt men een schatting door het gemiddelde te nemen van alle lokale varianties. De lokale schattingen maken gebruik van een  $(2N+1) \times (2N+1)$  omgeving van de beschouwde pixel  $(i, j)$ .

In het algemeen wordt de gefilterde waarde  $A'(i, j)$  met de adaptieve wiener filter bekomen als een combinatie van  $\mu(i, j)$  en  $A(i, j)$ . Indien in het bijzonder  $\sigma^2 \approx \sigma^2(i, j)$  (d.w.z. als de lokale variantie volledig te wijten is aan de ruis), dan zal  $A'(i, j) \approx \mu(i, j)$  (d.w.z. de pixel  $(i, j)$  wordt gefilterd, namelijk m.b.v. een lokaal gemiddelde).

## 8.2 Vaag-klassieke filters

Vaag-klassieke filters zijn vaaglogisch gebaseerde filters die uitbreidingen of modificaties inhouden van bestaande klassieke filters. In deze paragraaf bespreken we achtereenvolgens volgende filters:

- FM: vaag mediaan filter (*fuzzy median filter*);
- WFM: gewogen vaag gemiddelde filter (*weighted fuzzy mean filter*);
- AWF1: eerste adaptieve WFM filter (*first adaptive WFM filter*);
- AWF2: tweede adaptieve WFM filter (*second adaptive WFM filter*);
- FDD: vaagbeslissings gerichte filter (*fuzzy decision directed filter*);
- CK: Choi & Krishnapuram filter.

### 8.2.1 FM - vaag mediaan filter

De vaag mediaan filter is een modificatie van de klassieke mediaan filter, en is ontworpen voor het verwijderen van impulsruis [1, 2].

#### Idee

Bij de bespreking van de klassieke mediaan filter hebben we reeds opgemerkt dat elke pixel gefilterd wordt, ongeacht of deze pixel gecontamineerd is met ruis of niet. Dit leidt tot het waziger worden van het beeld en het verdwijnen van fijne structuren, aangezien ook niet-gecontamineerde pixels vervangen worden door de mediaan van hun omgeving. Het idee van de vaag mediaan filter is om m.b.v. vaagregels eerst na te gaan in hoeverre een pixel een ruispixel is alvorens tot filtering over te gaan. Men baseert zich hiervoor op de volgende intuïtieve criteria:

1. Als een pixel geen impulsruispixel is, dan moet de output gelijk zijn aan de input; er is dan immers geen reden om een andere waarde te nemen.
2. Als de pixel wel een impulsruispixel is, dan moet de output een gewogen som zijn van de input en de klassieke mediaan filter. In dit geval zal het gewicht van de mediaan filter groter zijn naarmate de betreffende pixel in hogere mate als een impulsruispixel geklasseerd wordt.

### Constructie

Gelet op de idee achter de vaag mediaan filter zal de output in de pixel  $(i, j)$  gegeven worden door:

$$A'(i, j) = m(i, j) + \omega(i, j) \cdot (A(i, j) - m(i, j)),$$

met  $m(i, j)$  de output van de klassieke mediaan filter, en  $\omega$  een lidmaatschapsfunctie die aangeeft in welke mate een pixel niet als een impulsruispixel beschouwd wordt;  $\omega(i, j) = 1$  betekent dus geen impulsruis.

In [1] wordt de lidmaatschapsfunctie  $\omega$  in eerste instantie opgebouwd a.d.h.v. volgende vaagregels:

ALS  $(u(i, j)$  is klein EN  $v(i, j)$  is klein), DAN  $(\omega(i, j)$  is groot)  
 ALS  $(u(i, j)$  is klein EN  $v(i, j)$  is groot), DAN  $(\omega(i, j)$  is klein)  
 ALS  $(u(i, j)$  is groot EN  $v(i, j)$  is klein), DAN  $(\omega(i, j)$  is klein)  
 ALS  $(u(i, j)$  is groot EN  $v(i, j)$  is groot), DAN  $(\omega(i, j)$  is zeer klein),

met

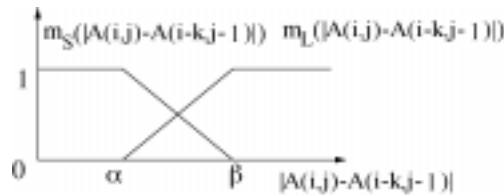
$$u(i, j) = |A(i, j) - m(i, j)|,$$

$$v(i, j) = \frac{|A(i, j) - s_1| + |A(i, j) - s_2|}{2}.$$

Hierbij zijn  $s_1$  en  $s_2$  grijswaarden uit de  $3 \times 3$  omgeving rond  $(i, j)$  die het dichtst bij  $A(i, j)$  gelegen zijn<sup>2</sup>, en worden klein en groot gemodelleerd m.b.v. geschikte lidmaatschapsfuncties. Expliciete uitdrukkingen voor de lidmaatschapsfuncties  $\mu_K$  en  $\mu_G$  van respectievelijk klein en groot kunnen bijvoorbeeld zijn<sup>3</sup>; cfr. Figuur 8.2:

$$\mu_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in [0, \alpha[ \\ \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot (x - \beta) & \text{als } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{als } x > \beta \end{cases}$$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0, \alpha[ \\ \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha) & \text{als } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{als } x > \beta \end{cases}.$$

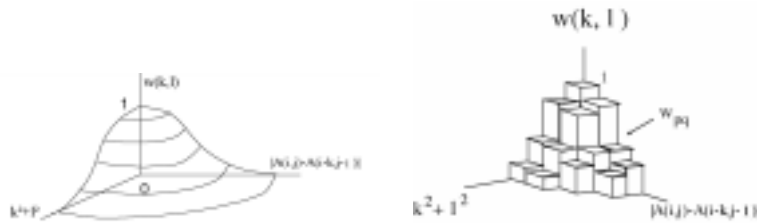


Figuur 8.2: Lidmaatschapsfuncties  $\mu_K$  en  $\mu_G$  voor de respectievelijke vaagverzamelingen klein en groot.

De bovenstaande vaagregels resulteren in een twee-dimensionale functie  $\omega$ ; cfr. Figuur 8.3. Deze functie is afhankelijk van de vaagregels (die betreffen lokale karakteristieken van het beeld),

<sup>2</sup>Meteen wordt de intuïtieve idee achter de vaagregels duidelijk. Een grote waarde voor zowel  $u(i, j)$  als  $v(i, j)$  wijst immers op het bestaan van impulsruis in pixel  $(i, j)$ .  $u(i, j)$  is algemeen zeer geschikt voor de detectie van impulsruispixels; door ook de waarde  $v(i, j)$  in rekening te brengen, wordt rekening gehouden met het feit dat impulsruispixels geïsoleerd voorkomen. Beschouw bijvoorbeeld een fijn lijntje ter dikte van een pixel door een homogeen gebied. Door enkel rekening te houden met  $u(i, j)$  zou deze pixel als een ruispixel geklasseerd worden.

<sup>3</sup>De lidmaatschapsfunctie voor **zeer klein** kan bekomen worden uit de lidmaatschapsfunctie van **klein** door een geschikte modellering van de wijziger **zeer**. In veel gevallen gebeurt dit m.b.v. de concentratiebewerking (kwadratering).



Figuur 8.3: De functie  $\omega$ . Links: afgeleid uit de vaagregels; rechts: benadering m.b.v. een trapfunctie.

de gekozen lidmaatschapsfuncties en de gebruikte defuzzificatiemethode (op het einde van de procedure moet men immers een scherpe output-waarde hebben). In principe zouden deze parameters geoptimaliseerd moeten worden, maar in [2] benadert men de functie m.b.v. een trapfunctie<sup>4</sup> die men rechtstreeks optimaliseert. Deze optimalisatie houdt twee aspecten in: het bepalen van de stapgrootte van de staafjes en het bepalen van de hoogte van de staafjes. Betreffende de stapgrootte van de staafjes wordt in [2] gesteld dat de waarde ervan geen grote invloed heeft op de resultaten, maar algemeen gekozen mag worden als een tiende van het bereik van de beschouwde parameter. De optimalisatie van de hoogte van de staafjes daarentegen wordt gerealiseerd m.b.v. de kleinste kwadraten methode. Als men de waarde van  $\omega$  in het  $(p, q)$ -de gebiedje noteert als  $\omega_{p,q}$ , dan wordt deze m.b.v. een trainingsbeeld  $A$  als volgt bepaald:

$$\omega_{p,q} = \frac{\sum_{(i,j) \in G_{p,q}} [A(i,j) - m(i,j)] \cdot [D(i,j) - m(i,j)]}{\sum_{(i,j) \in G_{p,q}} [A(i,j) - m(i,j)]^2}.$$

Hierbij is  $D$  de gewenste output corresponderend met het trainingsbeeld  $A$ . Merk op dat er gesommeerd wordt over  $G_{p,q}$ , dit is de verzameling van pixels  $(i, j)$  waarvoor  $u(i, j)$  tot het  $p$ -de en  $v(i, j)$  tot het  $q$ -de interval behoort.

### 8.2.2 WFM - gewogen vaag gemiddelde filter

De gewogen vaag gemiddelde filter kan opgevat worden als een modificatie van de klassieke adaptieve gewogen gemiddelde filter [37, 38].

#### Idee

Bij de klassieke adaptieve gewogen gemiddelde filter bepaalt men voor elke pixel  $(i, j)$  het verschil  $|A(i, j) - A(i - k, j - l)|$ , en stelt men het gewicht  $w_{ij}(k, l) = 1$  indien dit verschil kleiner is dan een vooraf geselecteerde drempelwaarde; in het andere geval stelt men  $w_{ij}(k, l) = 0$ . Er worden bijgevolg twee scherpe keuzes gemaakt: één voor de drempelwaarde, en één voor de waarde van de gewichten.

Het idee achter de WFM filter is om deze beide scherpe keuzes op te heffen, door de gewichten waarden te laten aannemen in gans  $[0, 1]$ , en deze gewichten niet te laten afhangen van een drempelwaarde. In plaats daarvan baseert men zich op het intuïtieve criterium dat aan gecontamineerde pixels een klein gewicht toegekend moet worden, zodat hun bijdrage tot de gefilterde grijswaarde van de beschouwde pixel minder significant is. Op die manier poogt men de WFM filter robuster te maken dan zijn klassieke tegenhanger.

De manier om ruispixels te detecteren is bij de WFM filter gebaseerd op de observatie dat een ruispixel in een homogeen gebiedje contrasteert met de homogene grijswaarde van dat gebiedje. Als

<sup>4</sup>De benadering door een twee-dimensionale trapfunctie houdt in dat men de beide assen onderverdeeld in kleine intervallen. Het  $(p, q)$ -de gebiedje wordt dan bepaald door het  $p$ -de interval langs de eerste as en het  $q$ -de interval langs de tweede as.

bijvoorbeeld de meeste pixels in een donker gebiedje gelegen zijn, en dus gekenmerkt worden door een hoge lidmaatschapsgraad in de vaagverzameling **donker**, dan zal een ruispixel niet donker zijn en bijgevolg gekenmerkt worden door een kleine lidmaatschapsgraad in de vaagverzameling **donker**. Bijgevolg kunnen deze lidmaatschapsgraden gebruikt worden als gewichten in de berekening van het gewogen gemiddelde.

### Constructie

De constructie van de WFM filter bestaat uit een aantal vaag gemiddelde processen en een beslissingsproces.

- In de vaag gemiddelde processen berekent men evenveel vage gewogen gemiddelden, gebaseerd op het hoger beschreven idee. Men werkt hierbij steeds met een  $3 \times 3$  venster rond een pixel  $(i, j)$ . Het aantal processen hangt af van het aantal beschrijvende termen dat men gebruikt. In [37, 38] maakt men gebruik van drie termen, namelijk **donker** (DK), **medium** (MD) en **helder** (BR, van *bright*). Deze termen worden gerepresenteerd m.b.v. van geschikte lidmaatschapsfuncties.
- Het beslissingsproces bepaalt welk van de drie berekende vaaggewogen gemiddelden als output geselecteerd wordt. Hiervoor maakt men een schatting van de output m.b.v. een vaaginterval. De uiteindelijke output wordt dan gegeven door het gewogen gemiddelde dat het dichtst bij deze schatting ligt.

*De vaag gemiddelde processen.* Zoals reeds opgemerkt correspondeert met elk van de termen **donker**, **medium** en **helder** een vaag gemiddelde proces. De lidmaatschapsfuncties voor **donker**, **medium** en **helder** zijn van de vorm:

$$\mu_R(x) = \begin{cases} f\left(\frac{m_R - x}{\alpha_R}\right), & x \leq m_R, \\ f\left(\frac{x - m_R}{\beta_R}\right), & x \geq m_R, \end{cases}$$

met  $f(y) = \max(0, 1 - y)$ ,  $\alpha_R$  en  $\beta_R$  positieve parameters (linkse en rechtse uitwijking van de lidmaatschapsfuncties) en  $m_R$  de top van de lidmaatschapsfunctie. De lidmaatschapsfuncties worden geïllustreerd in Figuur 8.4. De keuze van de parameters kan experimenteel gebeuren. Een andere mogelijkheid bestaat erin om de lidmaatschapsfuncties adaptief te bepalen; dit leidt dan tot de AWFMI en AWFMI2 filters (zie verder).

Het vaag gemiddelde proces voor bijvoorbeeld **donker** wordt als volgt gegeven:

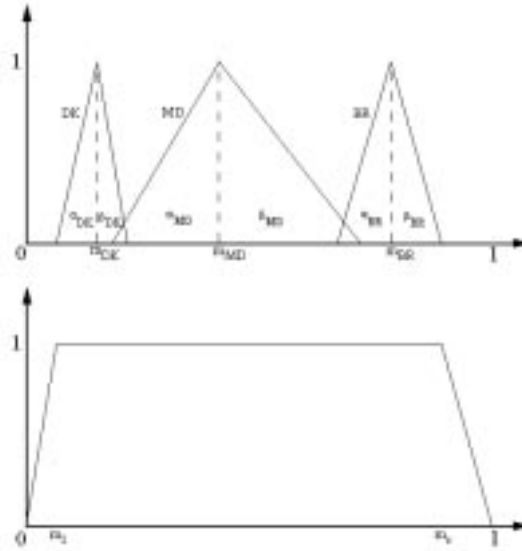
$$\begin{aligned} \text{ALS} \quad & \sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 \mu_{DK}(A(i-k, j-l)) \neq 0 \\ \text{DAN} \quad & y_{DK}(i, j) = \frac{\sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 \mu_{DK}(A(i-k, j-l)) \cdot A(i-k, j-l)}{\sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 \mu_{DK}(A(i-k, j-l))} \\ \text{ANDERS} \quad & y_{DK}(i, j) = 0 \end{aligned}$$

$y_{DK}(i, j)$  is dus een gewogen gemiddelde waarbij de gewichten bepaald worden aan de hand van de lidmaatschapsfunctie  $\mu_{DK}$  van **donker**. Voor de termen **medium** en **helder** is het proces analoog, respectievelijk resulterend in de waarden  $y_{MD}(i, j)$  en  $y_{BR}(i, j)$ .

*Het beslissingsproces.* In het beslissingsproces maakt men een schatting van de output m.b.v. een vaagschatter. Men beschouwt hiertoe het vaaginterval  $I$ , beschreven door de volgende lidmaatschapsfunctie; cfr. Figuur 8.4:

$$f_I(x) = \begin{cases} \frac{x}{m_l}, & x < m_l, \\ 1, & m_l \leq x \leq m_r, \\ \frac{1-x}{1-m_r}, & x > m_r, \end{cases} ,$$

waarbij  $m_l = m_{DK} - \alpha_{DK}$  en  $m_r = m_{BR} + \beta_{BR}$ . Merk op dat  $f_I(x) = 1$  van zodra de grijswaarde  $x$  gelegen is in de unie van de dragers van de lidmaatschapsfuncties **donker**, **medium** en **helder**.



Figuur 8.4: Boven: de vaagverzamelings donker (DK), medium (MD) en helder (BR); onder: het vaaginterval  $I$ .

De vaagschatter  $f_{IE}$  afgeleid van het vaaginterval  $I$  wordt gedefinieerd als:

$$f_{IE}(i, j) = \frac{\sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 f_I(A(i-k, j-l)) \cdot A(i-k, j-l)}{\sum_{k=-1}^1 \sum_{l=-1}^1 f_I(A(i-k, j-l))}.$$

$f_{IE}(i, j)$  is dus een gewogen gemiddelde waarbij, wegens de constructie van het vaaginterval  $I$ , zeer kleine en zeer grote grijswaarden minder invloed krijgen omdat het corresponderende gewicht kleiner zal zijn<sup>5</sup>.

Het finale resultaat wordt bekomen door uit de drie waarden  $y_{DK}(i, j)$ ,  $y_{MD}(i, j)$  en  $y_{BR}(i, j)$  die waarde te selecteren die het dichtst bij de vaagschatter gelegen is. Bijgevolg geldt dat

$$A'(i, j) = y_R(i, j),$$

waarbij  $y_R(i, j)$  zodanig gekozen wordt dat  $|y_R(i, j) - f_{IE}(i, j)|$  minimaal is.

### 8.2.3 AWFM1 - eerste adaptieve gewogen vaag gemiddelde filter

De AWFM1 filter is een uitbreiding van de WFM filter, waarbij de lidmaatschapsfuncties voor donker, medium en helder adaptief bepaald worden [37]. Dit betekent dat deze lidmaatschapsfuncties “op maat” van het beeld geconstrueerd worden, hetgeen moet leiden tot betere resultaten.

#### Constructie

De lidmaatschapsfuncties worden adaptief geconstrueerd. Men beschouwt een ruisvrij beeld  $S$ , waarvan men aanneemt dat het een goed model is voor een ganse klasse van beelden. De zo bekomen lidmaatschapsfuncties kunnen dan toegepast worden voor de ganse klasse.

<sup>5</sup>De redenering hierachter is dat zeer kleine of zeer grote grijswaarden waarschijnlijk corresponderen met ruispixels (impulsruis). Als er bijgevolg een schatting gemaakt moet worden van de gefilterde output spreekt het vanzelf dat dergelijke pixels niet zwaar mogen doorwegen

Voor de adaptieve bepaling van de lidmaatschapsfuncties maakt men gebruik van het histogram van  $S$ . Dit histogram wordt bepaald door:

$$H(s_k) = \frac{n_k}{n},$$

waarbij  $s_k$  de  $k$ -de grijswaarde is van het beeld  $S$ ,  $n_k$  het aantal pixels met de  $k$ -de grijswaarde en  $n$  het totale aantal pixels van  $S$ .

In een eerste stap bepaalt men de begin- en eindpunten van de dragers van de lidmaatschapsfuncties voor **donker**, **medium** en **helder**. Vervolgens bepaalt men de parameters  $m$  (top),  $\alpha$  (linkse uitwijking) en  $\beta$  (rechtse uitwijking) voor elk van de lidmaatschapsfuncties. Men gaat als volgt tewerk:

1. Bepaling van  $DK_{begin}$ ,  $DK_{end}$ ,  $MD_{begin}$ ,  $MD_{end}$ ,  $BR_{begin}$  en  $BR_{end}$ :
  - (a) stel  $DK_{end} = \lfloor \frac{255}{N_f} \rfloor$ ,  $BR_{begin} = (N_f - 1) \lfloor \frac{255}{N_f} \rfloor$ ,  $MD_{begin} = DK_{end} - l_{over}$  en  $MD_{end} = BR_{begin} + r_{over}$ , waarbij  $N_f$  het aantal vaagverzamelingen is en  $l_{over}$  en  $r_{over}$  de overlappingsen zijn tussen de dragers van de vaagverzamelingen;
  - (b) stel  $DK_{begin} = s_{k_1}$ , waarbij  $s_{k_1}$  de eerste  $s_k$  is, tussen 0 en  $DK_{end}$ , zodat  $n_k > t$ , met  $t$  een drempel;
  - (c) stel  $BR_{end} = s_{k_2}$ , waarbij  $s_{k_2}$  de laatste  $s_k$  is, tussen  $BR_{begin}$  en 255, zo dat  $n_k > t$ .
2. Bepaal het punt  $s_k$  zo dat  $H(s_k)$  een maximum bereikt in het interval  $[DK_{begin}, DK_{end}]$ . De lidmaatschapsfunctie  $\mu_{DK}$  wordt dan als volgt bepaald :
  - (a)  $m_{DK} = s_k$ ;
  - (b)  $\alpha_{DK} = m_{DK} - DK_{begin}$ ;
  - (c)  $\beta_{DK} = DK_{end} - m_{DK}$ .
3. Bepaal het punt  $s_k$  zo dat  $H(s_k)$  een maximum bereikt in het interval  $[MD_{begin}, MD_{end}]$ . De lidmaatschapsfunctie  $\mu_{MD}$  wordt dan als volgt bepaald :
  - (a)  $m_{MD} = s_k$ ;
  - (b)  $\alpha_{MD} = m_{MD} - MD_{begin}$ ;
  - (c)  $\beta_{MD} = MD_{end} - m_{MD}$ .
4. Bepaal het punt  $s_k$  zo dat  $H(s_k)$  een maximum bereikt in het interval  $[BR_{begin}, BR_{end}]$ . De lidmaatschapsfunctie  $\mu_{BR}$  wordt dan als volgt bepaald :
  - (a)  $m_{BR} = s_k$ ;
  - (b)  $\alpha_{BR} = m_{BR} - BR_{begin}$ ;
  - (c)  $\beta_{BR} = BR_{end} - m_{BR}$ .

Met de kennis van de lidmaatschapsfuncties voor **donker**, **medium** en **helder** is de werking van de AWFM1 filter volledig analoog aan deze van de WFM filter.

### 8.2.4 AWFM2 - tweede adaptieve gewogen vaag gemiddelde filter

De AWFM2 filter is eveneens een uitbreiding van de WFM filter [38]. Nu worden echter niet alleen de lidmaatschapsfuncties voor **donker**, **medium** en **helder** adaptief bepaald (dit leidt tot AWFM1), maar zijn er twee extra mechanismen die de performantie van de WFM filter moeten uitbreiden. Uit experimenten met impulsruis is immers gebleken dat de WFM filter goed presteert voor hoge, maar slecht presteert voor lage ruispercentages<sup>6</sup>. Het gebruik van *vaagdetectoren* en een *dynamische selector* moeten dit probleem overbruggen<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Dit wordt bevestigd door onze experimenten; cfr. Tabel 8.3.

<sup>7</sup>Krachtens dezelfde experimenten met succes!

**Constructie**

Voor elke pixel  $(i, j)$  definieert men

$$\delta(i, j) = A(i, j) - A'_{AWFM1}(i, j),$$

waarbij  $A'_{AWFM1}$  de output is van de AWFM1 filter. De vaagdetectoren  $f_{LRD\_pos}(\cdot)$  en  $f_{LRD\_neg}(\cdot)$  worden gedefinieerd voor de bepaling van de amplitude  $\epsilon_{pos}$  van positieve ruis en de amplitude  $\epsilon_{neg}$  van negatieve ruis. Indien

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} f_{LRD\_pos}(\delta(i, j)) &\neq 0 \\ \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} f_{LRD\_neg}(\delta(i, j)) &\neq 0 \end{aligned}$$

worden zij respectievelijk bepaald door:

$$\begin{aligned} \epsilon_{pos} &= f_{LRD\_pos}(A) = \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} |\delta(i, j)| \cdot f_{LRID\_pos}(\delta(i, j))}{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} f_{LRID\_pos}(\delta(i, j))} \\ \epsilon_{neg} &= f_{LRD\_neg}(A) = \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} |\delta(i, j)| \cdot f_{LRID\_neg}(\delta(i, j))}{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} f_{LRID\_neg}(\delta(i, j))}, \end{aligned}$$

waarbij  $ID\_pos = [2^{n-1}, 2^n - 2, 2^{n-1} - 2^{n-2}, 1]_{LR}$  het vaaginterval is voor de detectie van positieve ruis, en  $ID\_neg = [-(2^n - 2), -2^{n-1}, 1, 2^{n-1} - 2^{n-2}]_{LR}$  het vaaginterval voor de detectie van negatieve ruis; in het andere geval is  $\epsilon_{pos} = 0$  en  $\epsilon_{neg} = 0$ .

Aan de hand van de waarden  $\epsilon_{pos}$  en  $\epsilon_{neg}$  definieert men de volgende vier vaagintervallen, respectievelijk  $I_{onv}$  (onverstoord interval),  $I_{pos}$  (positief interval),  $I_{neg}$  (negatief interval) en  $I_{onb}$  (onbeslist interval):

$$\begin{aligned} I_{onv} &= [-2^{n-3}, 2^{n-3}, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]_{LR} \\ I_{pos} &= [\epsilon_{pos}, 2^n - 1, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 1]_{LR} \\ I_{neg} &= [-(2^n - 1), -\epsilon_{neg}, 1, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]_{LR} \\ I_{onb} &= [2^{n-3} + 1, \epsilon_{pos} - 1, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]_{LR} \cup [-\epsilon_{neg} + 1, -2^{n-3} - 1, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]_{LR}. \end{aligned}$$

De dynamische selector bepaalt dan het uiteindelijke filterresultaat  $A'$  m.b.v. de volgende regels:

$$\begin{aligned} \text{ALS} & \max(f_{LR I_{onv}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{onb}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{pos}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{neg}}(\delta(i, j))) = f_{LR I_{onv}}(\delta(i, j)) \\ \text{DAN} & A'(i, j) = A(i, j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ALS} & \max(f_{LR I_{onv}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{onb}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{pos}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{neg}}(\delta(i, j))) = f_{LR I_{onb}}(\delta(i, j)) \\ \text{DAN} & A'(i, j) = A'_{AWFM1}(i, j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ALS} & \max(f_{LR I_{onv}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{onb}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{pos}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{neg}}(\delta(i, j))) = f_{LR I_{pos}}(\delta(i, j)) \\ \text{DAN} & A'(i, j) = A(i, j) - \epsilon_{pos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ALS} & \max(f_{LR I_{onv}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{onb}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{pos}}(\delta(i, j)), f_{LR I_{neg}}(\delta(i, j))) = f_{LR I_{neg}}(\delta(i, j)) \\ \text{DAN} & A'(i, j) = A(i, j) + \epsilon_{neg}. \end{aligned}$$

### 8.2.5 FDD - vaagbeslissings gerichte filter

De vaagbeslissings gerichte filter is specifiek ontworpen voor de verwijdering van impulsruis [40].

#### Idee

Zoals reeds eerder is opgemerkt worden klassieke filters gekenmerkt door het feit dat ze elke pixel in dezelfde mate onderwerpen aan het filteringsproces, ongeacht het feit of de betreffende pixel een ruispixel is of niet. Bijgevolg worden ook niet-ruispixels gefilterd, hetgeen de beeldkwaliteit degradeert en dus beter vermeden wordt.

Het idee achter de FDD filter is daarom om de impact van een klassieke filter afhankelijk te maken van de mate waarin een pixel als een ruispixel, i.h.b. een impulsruispixel, beschouwd wordt: wordt de betreffende pixel geklasseerd als een sterke ruispixel dan is de impact van de klassieke filter groot (de pixel wordt gefilterd m.b.v. de klassieke filter), zoniet is de impact klein (de pixel wordt weinig of niet gefilterd). In die zin moet de FDD filter opgevat worden als een fijnregelaar van klassieke filters<sup>8</sup>.

#### Constructie

De output van de FDD filter wordt gegeven door:

$$A'(i, j) = k(i, j) \cdot A'_c(i, j) + (1 - k(i, j)) \cdot A(i, j),$$

waarbij  $k(i, j)$  de mate uitdrukt waarin de pixel  $(i, j)$  een impulsruispixel is, en waarbij  $A'_c(i, j)$  de output is van een gepaste klassieke filter<sup>9</sup>. De relevante structuur in het beeld wordt dus in acht genomen door de waarde van  $k(i, j)$ , die bepaald wordt m.b.v. vaagregels. Hierbij wordt gewerkt met een  $3 \times 3$  venster rond de beschouwde pixel  $(i, j)$ .

Het algoritme ter bepaling van  $k(i, j)$  bestaat uit drie stappen. In de eerste stap worden vier keer twee vaagregels afgevuurd, namelijk twee regels per richting: horizontaal ( $h$ ), vertikaal ( $v$ ) en twee diagonale richtingen ( $d_1$  en  $d_2$ ). De vaagregels voor een bepaalde richting  $r$  zijn de volgende:

ALS	$(A(i, j) - A(i_{r_1}, j_{r_1}) \text{ is hoog positief}) \text{ EN}$
	$(A(i, j) - A(i_{r_2}, j_{r_2}) \text{ is hoog positief})$
DAN	$(k_r(i, j) \text{ is hoog})$
ALS	$(A(i, j) - A(i_{r_1}, j_{r_1}) \text{ is hoog negatief}) \text{ EN}$
	$(A(i, j) - A(i_{r_2}, j_{r_2}) \text{ is hoog negatief})$
DAN	$(k_r(i, j) \text{ is hoog})$
ANDERS	$(k_r(i, j) \text{ is laag}),$

met  $(i_{r_1}, j_{r_1})$  en  $(i_{r_2}, j_{r_2})$  de naburige pixels van de pixel  $(i, j)$  in de richting  $r$ .

Omdat op deze manier ook bepaalde beeldstructuren zoals lijnen opgevat worden als ruis<sup>10</sup> wordt het algoritme verfijnd m.b.v. de volgende vaagregels, waarin de resultaten voor de richtingen  $h$  en  $v$ , en deze voor de richtingen  $d_1$  en  $d_2$  gecombineerd worden:

<sup>8</sup>Merk op dat de vaag mediaan filter (zie Paragraaf 8.2.1) dezelfde filosofie hanteert als de FDD filter. De vaag mediaan filter is echter ontworpen op maat van de klassieke mediaan filter, terwijl de FDD filter algemener is, d.w.z. meerdere klassieke filters voor de verwijdering van impulsruis kan fijnregelen.

<sup>9</sup>In [40] wordt gesuggereerd om de selectie van een gepaste klassieke filter automatisch te laten gebeuren op basis van een analyse van de beeldstructuur, daarbij gebruik makend van een kennisbank die typische structuren linkt aan bepaalde klassieke filters. Er wordt echter niet gezegd hoe deze beeldanalyse moet gebeuren, noch welke filters best passen bij welke structuren.

<sup>10</sup>Stel bijvoorbeeld dat de centrale pixel op een horizontale rand ligt, dan zullen de  $k$ -waarden van de verticale en diagonale richtingen hoog zijn, terwijl de waarde van de horizontale richting laag zal zijn.



ALS  $(k_h(i, j) \text{ is hoog}) \text{ EN } (k_v(i, j) \text{ is hoog})$   
 DAN  $(k_{hv}(i, j) \text{ is hoog})$   
 ANDERS  $(k_{hv}(i, j) \text{ is laag})$

ALS  $(k_{d_1}(i, j) \text{ is hoog}) \text{ EN } (k_{d_2}(i, j) \text{ is hoog})$   
 DAN  $(k_{d_1 d_2}(i, j) \text{ is hoog})$   
 ANDERS  $(k_{d_1 d_2}(i, j) \text{ is laag})$ .

Tenslotte, alleen als  $k_{hv}(i, j)$  en  $k_{d_1 d_2}(i, j)$  hoog zijn, zal ook de output  $k(i, j)$  hoog zijn. Dit wordt uitgedrukt met de laatste vaagregel:

ALS  $(k_{hv}(i, j) \text{ is hoog}) \text{ EN } (k_{d_1 d_2}(i, j) \text{ is hoog})$   
 DAN  $(k(i, j) \text{ is hoog})$   
 ANDERS  $(k(i, j) \text{ is laag})$

Men gebruikt het minimum als representatie van de aggregator “EN” en men neemt aan dat de lidmaatschapsfunctie  $\mu_H$  van de vaagverzameling hoog monotoon stijgend is. In dat geval wordt de waarde  $k(i, j)$  gegeven door:

$$k(i, j) = \mu_H(\min(v_1(i, j), v_2(i, j), v_3(i, j), v_4(i, j), v_5(i, j), v_6(i, j), v_7(i, j), v_8(i, j))),$$

waarbij  $v_k(i, j) = A(i, j) - A(i_k, j_k)$ .

Het dient ook opgemerkt te worden dat de FDD filter in een pixel  $(i, j)$  pas ingeschakeld wordt als alle verschillen  $A(i, j) - A(i_k, j_k)$ , d.w.z. alle  $v_k(i, j)$ , hetzelfde teken hebben. Is dit niet het geval, dan stelt men  $k(i, j) = 0$  en wordt de pixel  $(i, j)$  niet gefilterd<sup>11</sup>.

Hieruit kunnen we ook afleiden dat de FDD filter niet goed zal presteren voor andere ruistypes dan zout & peper ruis. Vanaf het ogenblik dat er één grijsaardeverschil zeer klein is of een tegengesteld teken heeft, wordt er immers weinig of niet gefilterd.

### 8.2.6 CK - Choi & Krishnapuram filter

De CK filter werd ingevoerd voor de verwijdering van zowel impulsruis als niet-impulsruis, waarbij tegelijkertijd de randen worden verscherpt [8].

#### Idee

Een goede filter voor ruisonderdrukking zou de volgende drie taken moeten aankunnen: verwijderen van impulsruis, verwijderen van niet-impulsruis, en tegelijkertijd verscherpen van de randen. Het idee achter de CK filter is om voor elk van deze drie aspecten een verschillende (klassieke) subfilter te gebruiken, en het uiteindelijke resultaat te berekenen als een combinatie van de resultaten van de afzonderlijke subfilters. Het gewicht van elke subfilter in deze berekening wordt bepaald m.b.v. vaagregels. Deze vaagregels drukken criteria uit op basis van dewelke men deze of gene subfilter moet selecteren.

#### Constructie

We beperken ons tot het geven van de noodzakelijke formules. De manier waarop de formules bekomen worden is immers vrij technisch van aard, en valt buiten het opzet van dit hoofdstuk. Stel  $(i_1, j_1), \dots, (i_8, j_8)$  de pixels uit de  $3 \times 3$  omgeving van de beschouwde pixel  $(i, j)$ . Omwille van notationale redenen, met name voor de sommaties, zullen we de centrale pixel soms ook als  $(i_0, j_0)$  noteren.

<sup>11</sup> Deze voorwaarde is zinvol in de context van zout & peper ruis. Zout & peper ruis wordt immers gekenmerkt door ofwel een zeer kleine ofwel een zeer hoge grijsaarde, en zal bijgevolg automatisch aanleiding geven tot verschillen met eenzelfde teken. Van zodra er verschillen met een verschillend teken voorkomen, wordt er vanuit gegaan dat we niet meer met een ruispixel te maken hebben.

Vooreerst bepaalt men een schatting  $A'_0(i, j)$  van de grijswaarde  $A(i, j)$  door minimalisatie van een bepaalde functie. Deze schatting wordt gegeven door:

$$A'_0(i, j) = \frac{\sum_{m=0}^8 \mu_m(i, j) \left(1 - \frac{d_m^2(i, j)}{\beta(i, j)}\right) A(i_m, j_m)}{\sum_{m=0}^8 \mu_m(i, j) \left(1 - \frac{d_m^2(i, j)}{\beta(i, j)}\right)},$$

met:

$$\begin{aligned} \mu_m(i, j) &= \exp\left(-\frac{\|A(i, j) - A(i_m, j_m)\|^2}{\alpha}\right) \cdot \exp\left(-\frac{d_m(i, j)^2}{\beta(i, j)}\right) \\ d_m(i, j)^2 &= (A(i, j) - A(i_m, j_m))^2 \\ \beta(i, j) &= \frac{\sum_{m=1}^8 w_m(i, j) d_m(i, j)^2}{\sum_{m=1}^8 w_m(i, j)}. \end{aligned}$$

Voor de berekening van  $\beta(i, j)$  heeft men ook nog volgende formules nodig:

$$\begin{aligned} w_m(i, j) &= \exp\left(-\frac{d_m(i, j)^2}{\bar{\mu}(i, j)}\right) \\ \bar{\mu}(i, j) &= \frac{1}{8} \sum_{m=1}^8 d_m(i, j)^2. \end{aligned}$$

De schatting  $A'_0(i, j)$  kan opgevat worden als een gewogen gemiddelde van de grijswaarden  $A(i_0, j_0), A(i_1, j_1), \dots, A(i_8, j_8)$ . Merk op dat het gewicht van  $A(i_m, j_m)$  negatief zal zijn als  $d_m(i, j)^2 > \beta(i, j)$ . Merk verder op dat  $\mu_m(i, j)$  de mate voorstelt waarin de centrale pixel  $(i, j)$  beschouwd kan worden als een prototype van de naburige pixel  $(i_m, j_m)$ . De bovenstaande schatting is dus enkel maar zinvol als we effectief veronderstellen dat de centrale pixel een prototype is van zijn naburige pixels.

Als dit niet het geval is, d.w.z. als de centrale pixel een ruispixel is, dan moet men anders tewerk gaan. Men beschouwt in dit geval twee mogelijkheden: een strenge filtering (geschikt in geval van impulsruis) en een minder strenge filtering (geschikt in geval van niet-impulsruis). In het eerste geval krijgen we:

$$A'_1(i, j) = \frac{\sum_{m=1}^8 \frac{A(i_m, j_m)}{\beta(i_m, j_m)}}{\sum_{m=1}^8 \frac{1}{\beta(i_m, j_m)}}.$$

In het tweede geval krijgen we:

$$A'_2(i, j) = \frac{\sum_{m=0}^8 \frac{\mu_0(i_m, j_m)}{\beta(i_m, j_m)} A(i_m, j_m)}{\sum_{m=0}^8 \frac{\mu_0(i_m, j_m)}{\beta(i_m, j_m)}}.$$

We beschikken nu over drie filterwaarden voor de centrale pixel  $(i, j)$ , namelijk:

- $A'_0(i, j)$ : voor het geval waarin  $(i, j)$  geen ruispixel is (verscherpen van de randen);
- $A'_1(i, j)$ : voor het geval waarin  $(i, j)$  een ruispixel is, meer bepaald een impulsruis;
- $A'_2(i, j)$ : voor het geval waarin  $(i, j)$  een ruispixel is, meer bepaald een niet-impulsruis.

Met behulp van volgende vaagregels wordt het gewicht van elk van deze resultaten in de uiteindelijke output bepaald. De antecedenten van deze vaagregels geven de criteria waaronder de betreffende subfilters geactiveerd moeten worden:

- R1: ALS ( $M(i, j)$  is klein) DAN ( $y_1(i, j) = A'_1(i, j)$ )  
 R2: ALS ( $M(i, j)$  is groot) DAN ( $y_2(i, j) = A'_2(i, j)$ )  
 R3: ANDERS ( $y_3(i, j) = A'_0(i, j)$ ),

met:

$$M(i, j) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^8 \mu_0(i_m, j_m)$$

$$K(i, j) = \sum_{m=1}^8 \exp\left(-\frac{\|A(i, j) - A(i_m, j_m)\|^2}{\alpha}\right),$$

en waarbij klein en groot gerepresenteerd worden m.b.v. geschikte lidmaatschapsfuncties over het domein  $[0, 1]$ .

De uiteindelijke output  $A'(i, j)$  wordt dan gegeven door:

$$A'(i, j) = \frac{\sum_{r=0}^2 \lambda_r y_r(i, j)}{\sum_{r=0}^2 c_r},$$

waarbij  $\lambda_r$  de graad voorstelt waarin het antecedent van de corresponderende vaagregel vervuld is.

## 8.3 Vaagfilters

Vervolgens bespreken we een aantal zuivere vaagfilters, d.w.z. filters die niet onmiddellijk gebaseerd zijn op een klassieke filter maar enkel en alleen m.b.v. vaagregels opgebouwd worden. De volgende vaagfilters komen aan bod:

- FIRE: vaaginferentie met anders-actie filter (*fuzzy inference ruled by else action*);
- DS-FIRE: tweestaps FIRE filter (*dual step FIRE filter*);
- PWL-FIRE: stuksgewijze lineaire FIRE filter (*piecewise linear FIRE filter*);
- IFC: iteratieve vaagcontrole filter (*iterative fuzzy control based filter*);
- MIFC: gewijzigde IFC filter (*modified IFC filter*);
- EIFC: uitgebreide IFC filter (*extended IFC filter*);
- SFC: uitvlakkende vaagcontrole filter (*smoothing fuzzy control based filter*);
- SSFC: verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter (*sharpening & smoothing fuzzy control based filter*);
- GOA: filter ontworpen in het kader van het GOA-project; cfr. Hoofdstuk 7.

### 8.3.1 FIRE - vaaginferentie met anders-actie

De FIRE filter is ontworpen voor het verwijderen van impulsruis [62].

## Idee

Het basisidee van de FIRE filter is om met behulp van vaagregels na te gaan in hoeverre een pixel een impulsruispixel is, en op basis daarvan een correctieterm te berekenen<sup>12</sup>. Het originele zit hem in het feit dat de vaagregels afgevuurd worden op verschillende *patronen* van omringende pixels, en niet noodzakelijk op *alle* omringende pixels tegelijkertijd.

Verder gaat men ook uit van het idee dat kleine correcties onbruikbaar zijn om ruis te verwijderen en ze de kwaliteit van fijne details verminderen. Bijgevolg zullen deze kleine correcties nog verder verkleind worden alvorens de finale output te bepalen.

## Constructie

De FIRE filter is een recursieve filter, d.w.z. dat een pixel na filtering onmiddellijk vervangen wordt door de gefilterde waarde, en dat voor de volgende pixels reeds met de aangepaste waarde verder gerekend wordt. De filter bestaat uit twee stappen: een stap waarin correctietermen worden bepaald, en een stap waarin kleine correcties geneutraliseerd worden.

*Stap 1: ruisdetectie en bepalen van de correctietermen.* In de eerste stap detecteert men ruis a.d.h.v. de grijswaardeverschillen tussen de centrale pixel  $(i, j)$  en de pixels in een venster rond deze centrale pixel. Men maakt specifiek gebruik van een  $3 \times 3$  venster zoals in Figuur 8.5.

$(i,j)$	$(i,k)$	$(i,l)$
$(k,j)$	$(i,j)$	$(l,j)$
$(s,j)$	$(t,j)$	$(u,j)$

Figuur 8.5: Een  $3 \times 3$  venster met bijhorende indices, zoals gebruikt bij de constructie van de FIRE filter.

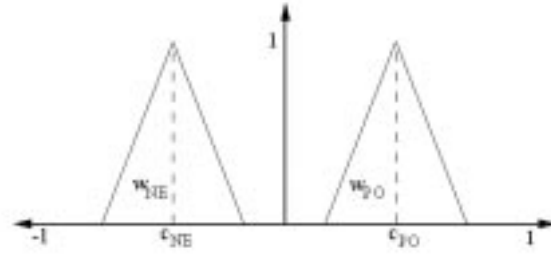
Men definieert twee triangulaire vaagverzamelingen **positief** (PO) en **negatief** (NE), met lidmaatschapsfuncties van de vorm:

$$\mu_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq c_R - w_R \\ (w_R - |x - c_R|)/w_R & \text{als } c_R - w_R < x \leq c_R + w_R \\ 0 & \text{als } x \geq c_R + w_R \end{cases},$$

waarbij  $c_R$  en  $w_R$  respectievelijk het centrum en de halve breedte bepalen. Voor de vaagverzamelingen **positief** en **negatief** worden de lidmaatschapsfuncties  $\mu_{PO}$  en  $\mu_{NE}$  bepaald door:  $c_{PO} = 1$ ,  $c_{NE} = -1$ ,  $w_{PO} = 2$  en  $w_{NE} = 2$ ; de invloed van deze parameters wordt geïllustreerd in Figuur 8.6.

Om ruis te detecteren wordt een collectie van vaagregels opgesteld. Elk paar van deze vaagregels heeft betrekking op een bepaald patroon  $I$  van omringende pixels rond  $(i, j)$ . Voor elk van deze specifieke patronen tracht men dan negatieve en positieve ruispixels te detecteren, en berekent men een correctieterm  $y'(i, j)$ . De vaagregels die behoren bij bijvoorbeeld het patroon  $I = \{(i_2, j_2), (i_5, j_5), (i_7, j_7)\}$  zijn de volgende :

<sup>12</sup>Meerdere vaagfilters werken volgens dit idee. Bij de vaag mediaan filter bijvoorbeeld gaat men met vaagregels na in hoeverre een pixel een ruispixel is om op basis daarvan te bepalen welk gewicht de klassieke mediaan filter krijgt voor de uiteindelijke bepaling van de output.



Figuur 8.6: Lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen **positief** en **negatief**.

$$\begin{array}{ll}
 \text{ALS} & (A(i_2, j_2) - A(i, j) \text{ is } \mathbf{positief}) \text{ EN} \\
 & (A(i_5, j_5) - A(i, j) \text{ is } \mathbf{positief}) \text{ EN} \\
 & (A(i_7, j_7) - A(i, j) \text{ is } \mathbf{positief}) \\
 \text{DAN} & (y'(i, j) \text{ is } \mathbf{positief}) \\
 \\ 
 \text{ALS} & (A(i_2, j_2) - A(i, j) \text{ is } \mathbf{negatief}) \text{ EN} \\
 & (A(i_5, j_5) - A(i, j) \text{ is } \mathbf{negatief}) \text{ EN} \\
 & (A(i_7, j_7) - A(i, j) \text{ is } \mathbf{negatief}) \\
 \text{DAN} & (y'(i, j) \text{ is } \mathbf{negatief})
 \end{array}$$

Het is duidelijk dat de eerste regel negatieve ruispixels detecteert. De regel wordt immers geactiveerd als de grijswaarde in de beschouwde pixel  $(i, j)$  lager is dan in zijn omgeving. Bij de pixel  $(i, j)$  zal dan ook een positieve correctie  $y'(i, j)$  opgeteld worden. Een analoge redenering geldt voor de tweede regel. In [62] stelt men voor om gebruik te maken van de volgende 13 patronen van naburige pixels:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \{2, 5, 7\}, \\
 I_2 &= \{5, 7, 4\}, \\
 I_3 &= \{7, 4, 2\}, \\
 I_4 &= \{4, 2, 5\}, \\
 I_5 &= \{1, 3, 8, 6\}, \\
 I_6 &= \{1, 2, 3, 5\}, \\
 I_7 &= \{2, 3, 5, 8\}, \\
 I_8 &= \{3, 5, 8, 7\}, \\
 I_9 &= \{5, 8, 7, 6\}, \\
 I_{10} &= \{8, 7, 6, 4\}, \\
 I_{11} &= \{7, 6, 4, 1\}, \\
 I_{12} &= \{6, 4, 1, 2\}, \\
 I_{13} &= \{4, 1, 2, 3\}.
 \end{aligned}$$

De globale waarde van de correctieterm  $y'(i, j)$  wordt vervolgens bepaald a.d.h.v. de volgende formules:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(i, j) &= \max_{i=1, \dots, 13} \left( \min_{k \in I_i} (\mu_{PO}(A(i_k, j_k) - A(i, j))) \right) \\
 \lambda_2(i, j) &= \max_{i=1, \dots, 13} \left( \min_{k \in I_i} (\mu_{NE}(A(i_k, j_k) - A(i, j))) \right) \\
 \lambda_0(i, j) &= \max(0, 1 - \lambda_1(i, j) - \lambda_2(i, j)) \\
 y'(i, j) &= \frac{255(\lambda_1(i, j) - \lambda_2(i, j))}{\lambda_0(i, j) + \lambda_1(i, j) + \lambda_2(i, j)}.
 \end{aligned}$$

*Stap 2: neutraliseren van kleine correcties.* In de tweede stap wordt ervoor gezorgd dat kleine correcties niet te veel invloed hebben. Indien de correctie klein is, d.w.z. indien de absolute waarde van  $y'(i, j)$  klein is, dan kan men dit realiseren door deze absolute waarde verder te verkleinen. Formeel wordt de output  $y(i, j)$  gegeven door de volgende uitdrukking:

$$y(i, j) = y'(i, j) \cdot (1 - \mu_K(|y'(i, j)|)),$$

waarbij  $\mu_K$  een lidmaatschapsfunctie is voor de vaagverzameling **klein**:

$$\mu_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \leq a \\ (a + b - x)/b & \text{als } a < x \leq a + b \\ 0 & \text{als } x > a + b. \end{cases}$$

Typische waarden voor de parameters  $a$  en  $b$  zijn  $a = 40$  en  $b = 32$ . De uiteindelijke output in de pixel  $(i, j)$  wordt dan gegeven door:

$$A'(i, j) = A(i, j) + y(i, j).$$

### Opmerking

Hoewel het letterwoord FIRE staat voor *fuzzy inference ruled by else action* stellen we vast dat in de optredende vaagregels geen enkele ANDERS-actie voorkomt. Echter, zoals de ALS-DAN regels expliciet vervat zitten in de parameters  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ , zo zit de ANDERS-actie impliciet vervat in de parameter  $\lambda_0$ .

### 8.3.2 DS-FIRE - tweestaps FIRE filter

De tweestaps FIRE filter steunt op hetzelfde idee als de FIRE filter, en is qua constructie analoog [63]. De voornaamste verschilpunten zijn de volgende:

1. de keuze van het venster: dit is nu in de vorm van een plusteken en bestaat uit 32 omringende pixels (cfr. Figuur 8.7);
2. het expliciet optreden van de lidmaatschapsfunctie **nu1** (zie Figuur 8.8); dit hangt nauw samen met het expliciet optreden van een ANDERS-actie in de vaagregels.

		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	(i,j)	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
		27	28	29		
		30	31	32		

Figuur 8.7:  $7 \times 7$  kruisvenster

Zoals opgemerkt is verschilpunt (2) reeds impliciet aanwezig in de hoger besproken FIRE filter, zodat enkel verschilpunt (1) het gewijzigde gedrag van de DS-FIRE filter t.o.v. de FIRE filter bepaalt. Concreet impliceert de keuze van een groter venster meer mogelijkheden om patronen van omliggende pixels te beschouwen, ook van pixels die verder van de centraal beschouwde pixel liggen dan de 8 onmiddellijke bureu. Bijgevolg maakt de DS-FIRE filter gebruik van meer informatie, en zou de filter veel fijner moeten filteren dan de gewone FIRE filter<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Dit wordt verder ook bevestigd door onze experimenten.

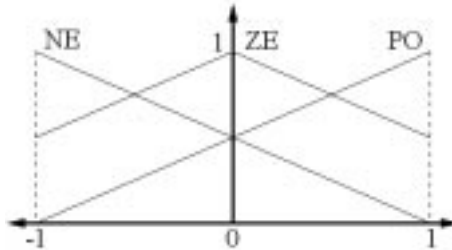
### Constructie

De constructie van de DS-FIRE filter is, net zoals deze van de FIRE filter, op te splitsen in twee stappen<sup>14</sup>.

*Stap 1: ruisdetectie en bepalen van de correctietermen.* Behalve de triangulaire vaagverzamelingen **positief** (PO) en **negatief** (NE) wordt bij de DS-FIRE filter ook gebruik gemaakt van de vaagverzameling **nul**, met lidmaatschapsfunctie  $\mu_0$  gegeven door:

$$\mu_0(x) = \frac{3}{2} - \max[\mu_{PO}(x), \mu_{NE}(x)].$$

Merk op dat deze lidmaatschapsfunctie waarden aanneemt in  $[0, 1]$  door de specifieke keuze van de lidmaatschapsfuncties  $\mu_{PO}$  en  $\mu_{NE}$ . Een grafische weergave wordt gegeven in Figuur 8.8.



Figuur 8.8: Lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen **positief** (PO), **nul** (ZE) en **negatief**.

Gegeven een bepaald patroon  $I = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)\}$  van naburige pixels van de centrale pixel  $(i, j)$ , zijn de vaagregels voor de detectie van ruis de volgende:

ALS	$(A(i_1, j_1) - A(i, j) \text{ is positief})$ EN
	$(A(i_2, j_2) - A(i, j) \text{ is positief})$ EN
	$(A(i_3, j_3) - A(i, j) \text{ is positief})$
DAN	$(y'(i, j) \text{ is positief})$
ALS	$(A(i_1, j_1) - A(i, j) \text{ is negatief})$ EN
	$(A(i_2, j_2) - A(i, j) \text{ is negatief})$ EN
	$(A(i_3, j_3) - A(i, j) \text{ is negatief})$
DAN	$(y'(i, j) \text{ is negatief})$
ANDERS	$(y'(i, j) \text{ is nul})$

In [63] stelt men de volgende 25 verschillende patronen voor:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \{10, 16, 23\}, \\
 I_2 &= \{10, 16, 17\}, \\
 I_3 &= \{10, 17, 23\}, \\
 I_4 &= \{16, 17, 23\}, \\
 I_5 &= \{9, 11, 24, 22\}, \\
 I_6 &= \{10, 11, 17, 24\}, \\
 I_7 &= \{10, 9, 16, 22\},
 \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Omwille van deze “twee stappen” hebben de auteurs deze filter de “dual step” FIRE filter genoemd. Op zich een eigenaardig gegeven aangezien de gewone FIRE filter ook uit twee vergelijkbare stappen bestaat, zonder dat men daar expliciet naar refereert in de benaming van de filter.

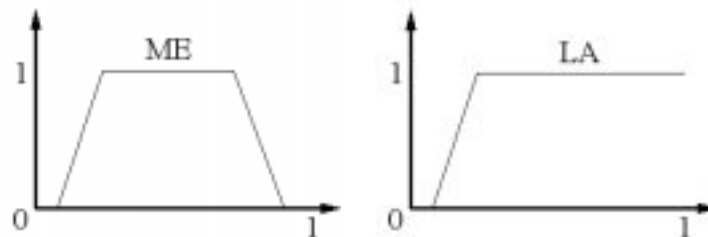
$$\begin{aligned}
I_8 &= \{9, 10, 17, 24\}, \\
I_9 &= \{4, 5, 6, 12, 18, 25\}, \\
I_{10} &= \{1, 2, 3, 13, 19, 26\}, \\
I_{11} &= \{16, 9, 10, 11\}, \\
I_{12} &= \{16, 22, 23, 24\}, \\
I_{13} &= \{22, 16, 10, 11\}, \\
I_{14} &= \{21, 15, 8, 4, 5, 6\}, \\
I_{15} &= \{20, 14, 7, 1, 2, 3\}, \\
I_{16} &= \{9, 16, 22, 23\}, \\
I_{17} &= \{23, 24, 17, 11\}, \\
I_{18} &= \{9, 16, 23, 24\}, \\
I_{19} &= \{8, 15, 21, 27, 28, 29\}, \\
I_{20} &= \{7, 14, 20, 30, 31, 32\}, \\
I_{21} &= \{22, 23, 24, 17\}, \\
I_{22} &= \{9, 10, 11, 17\}, \\
I_{23} &= \{22, 23, 17, 11\}, \\
I_{24} &= \{27, 28, 29, 25, 18, 12\}, \\
I_{25} &= \{30, 31, 32, 26, 19, 13\}.
\end{aligned}$$

De berekening van de waarde  $y'(i, j)$  gebeurt op analoge wijze als bij de oorspronkelijke FIRE-filter. Naar  $\lambda_1(i, j)$  en  $\lambda_2(i, j)$  wordt nu gerefereerd als de activatiegraden van de eerste en tweede ALS-DAN subregel, terwijl men  $\lambda_0(i, j)$  de activatiegraad van de ANDERS-regel noemt. Deze activatiegraad wordt gegeven door  $\lambda_0(i, j) = 1 - \lambda_1(i, j) - \lambda_2(i, j)$ , identiek dus zoals bij de FIRE filter.

*Stap 2.* In de tweede stap wordt de uiteindelijke correctieterm  $y(i, j)$  als volgt berekend:

$$y(i, j) = y'(i, j) \cdot \max\{\mu_G(|y'(i, j)|), 1 - \mu_{MD}(A(i, j))\}.$$

Merk op dat deze bewerking geen invloed heeft op grote correcties (zoals bij de gewone FIRE filter) of op grijswaarden die niet medium zijn (dit is nieuw in vergelijking met de gewone FIRE filter). In elk van deze gevallen is het intuïtief immers te verwachten dat er effectief ruis aanwezig zal zijn; in de overige gevallen tracht men de correctieterm  $y'(i, j)$  te reduceren met het oog op het behoud van de kwaliteit van fijne details. Voor de representatie van de termen groot (G) en medium (MD) maakt men gebruik van geschikte vaagintervallen, zoals weergegeven in Figuur 8.9.



Figuur 8.9: De lidmaatschapsfuncties voor medium (links) en groot (rechts).



### Opmerking

Hoewel bij de DS-FIRE filter nu wel expliciete ANDERS-acties voorkomen, ondersteund door het gebruik van de vaagverzameling `nu1`, leidt dit voor de berekening van de output niet tot verschillen in vergelijking met de gewone FIRE filter. Dit bevestigt de opmerking gemaakt op het einde van de bespreking van de FIRE filter, waar gesteld werd dat de ANDERS-actie impliciet in de formules verwerkt zit, met name in  $\lambda_0$ .

### 8.3.3 PWL-FIRE - stuksgewijs lineaire FIRE filter

De stuksgewijze lineaire FIRE filter steunt net zoals de DS-FIRE filter op hetzelfde idee als de gewone FIRE filter [64]. De realisatie van het idee verschilt echter op twee punten:

1. men maakt nu gebruik van twee stuksgewijze lineaire vaagverzamelingen<sup>15</sup> **groot positief** en **groot negatief**, terwijl men bij de FIRE en DS-FIRE filters gebruik maakte van lineaire of triangulaire vaagverzamelingen;
2. de tweede stap (neutralisatie van kleine correcties) wordt niet meer expliciet uitgevoerd, maar zit impliciet verwerkt in de keuze van de parameters van de lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen **groot positief** en **groot negatief**.

Merk op dat de punten (1) en (2) zeer nauw verbonden zijn. Het is immers de stuksgewijze lineariteit van de vaagverzamelingen die toelaat om de neutralisatie van kleine correcties impliciet te realiseren.

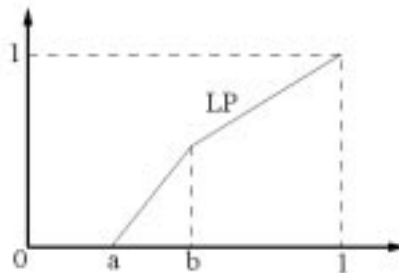
### Constructie

De PWL-FIRE filter werkt met twee stuksgewijze lineaire vaagverzamelingen **groot positief** en **groot negatief**. De lidmaatschapsfunctie  $m_{GP}$  van de vaagverzameling **groot positief** (GP) wordt gegeven door:

$$\mu_{GP}(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq a \\ \frac{x-a}{2(b-a)} & \text{als } a < x \leq b \\ x & \text{als } x > b, \end{cases}$$

met  $a$  en  $b$  twee positieve parameters,  $a < b$ ; zie Figuur 8.10. De lidmaatschapsfunctie  $\mu_{GN}$  van de vaagverzameling **groot negatief** (GN) wordt dan gedefinieerd als:

$$\mu_{GN}(x) = \mu_{GP}(-x).$$



Figuur 8.10: De stuksgewijze lineaire lidmaatschapsfunctie voor **groot positief**.

Voor de filtering gebruikt men een  $3 \times 3$  venster rond de centraal beschouwde pixel  $(i, j)$ . Gegeven een bepaald patroon  $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)\}$  van naburige pixels van  $(i, j)$ , zijn dit de vaagregels voor ruisdetectie:

<sup>15</sup>Vandaar de naam van deze filter: *piecewise linear* = *stuksgewijze lineair*.

ALS	$(A(i_1, j_1) - A(i, j) \text{ is groot positief})$ EN
	$(A(i_2, j_2) - A(i, j) \text{ is groot positief})$ EN
	$(A(i_3, j_3) - A(i, j) \text{ is groot positief})$
DAN	$(y'(i, j) \text{ is positief})$
ALS	$(A(i_1, j_1) - A(i, j) \text{ is groot negatief})$ EN
	$(A(i_2, j_2) - A(i, j) \text{ is groot negatief})$ EN
	$(A(i_3, j_3) - A(i, j) \text{ is groot negatief})$
DAN	$(y'(i, j) \text{ is negatief})$
ANDERS	$(y'(i, j) \text{ is nul}),$

waarbij **positief** (PO) en **negatief** (NE) singletons voorstellen gecentreerd rond respectievelijk 1 en  $-1$ . De patronen die bij deze filter worden voorgesteld zijn de volgende<sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{2, 4, 6\}, \\ I_2 &= \{4, 6, 8\}, \\ I_3 &= \{6, 8, 2\}, \\ I_4 &= \{8, 2, 4\}. \end{aligned}$$

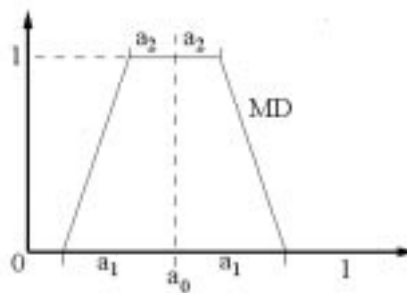
De berekening van  $y'(i, j)$  gebeurt op analoge manier als bij de gewone FIRE-filter<sup>17</sup>:

$$y'(i, j) = 255 \cdot (\lambda_1(i, j) + \lambda_2(i, j)).$$

Zoals reeds opgemerkt wordt er echter geen tweede stap meer uitgevoerd. Het detail-behoudende gedrag van de filter zit immers vervat in  $-$  d.w.z. hangt af van  $-$  de keuze van de parameters  $a$  en  $b$  van de lidmaatschapsfuncties: hoe dichter  $b$  bij  $a$  ligt, hoe “gematigder” het filtereffect. De redenering is dat in een pixel met een gemiddelde grijswaarde de filter minder werkzaam moet zijn; men kan er immers vanuit gaan dat dergelijke pixels geen, of op zijn minst slechts zwakke ruispixels zijn. Dit kan gerealiseerd worden door te stellen:

$$a = b \cdot \mu_{MD}(A(i, j)),$$

waarbij  $\mu_{MD}$  de lidmaatschapsfunctie is van de vaagverzameling *medium*; zie Figuur 8.11. Typische waarden voor de optredende parameters zijn :  $a_0 = 128/255$ ,  $a_1 = 120/255$ ,  $a_2 = 40/255$  en  $b = 127/255$ .



Figuur 8.11: De lidmaatschapsfunctie voor *medium*.

<sup>16</sup>De patronen waarop de regels afgevuurd worden kunnen ook automatisch gegenereerd worden. In [64] wordt beschreven hoe men dit kan realiseren m.b.v. genetische algoritmen.

<sup>17</sup>Merk op dat er nu geen noemer  $\lambda_0(i, j) + \lambda_1(i, j) + \lambda_2(i, j)$  hoeft op te treden. Inderdaad, wegens de keuze van de lidmaatschapsfuncties, in het bijzonder wegens het feit dat ze ofwel volledig in het positieve ofwel volledig in het negatieve domein liggen, zal  $\lambda_2(i, j) = 0$  van zodra  $\lambda_1(i, j) \neq 0$  en omgekeerd. Dit impliceert dat  $\lambda_0(i, j) = \max(0, 1 - \lambda_1(i, j) - \lambda_2(i, j)) = 1 - \lambda_1(i, j) - \lambda_2(i, j)$ , en dus dat  $\lambda_0(i, j) + \lambda_1(i, j) + \lambda_2(i, j) = 1$ .

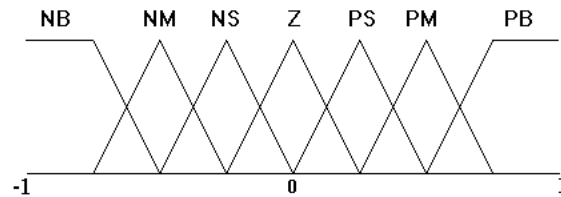
### 8.3.4 IFC - iteratieve vaagcontrole filter

De iteratieve vaagcontrole filter is ontworpen voor het verwijderen van zowel impulsruis als gaussische ruis [21].

#### Idee

Het principe van de IFC filter is essentieel hetzelfde als dat van de FIRE filters: met behulp van vaagregels gaat men na in hoeverre een pixel een ruispixel is, en op basis daarvan wordt een correctieterm berekend. Bij de FIRE filters is het echter zo dat er heel wat verschillende patronen van pixels beschouwd worden, en dat de vaagregels telkens uniform op *alle* pixels uit deze patronen worden afgevuurd. Dit uniform afvuren van vaagregels gebeurt niet bij de IFC filter. In plaats daarvan baseert men zich op de intuïtieve redenering dat als *meerdere* van de grijswaardeverschillen tussen de centrale pixel en naburige pixels van een bepaalde klasse zijn (bijvoorbeeld sterk negatief), dat dan ook de correctieterm van die klasse moet zijn. Deze achterliggende idee komt bij de IFC filter dan ook expliciet tot uiting door in de vaagregels gebruik te maken van de linguïstische term “meerdere”. In feite kan men stellen dat de IFC filter op die manier de menselijke redenering achter de ruisdetectie directer implementeert dan de FIRE filters<sup>18</sup>.

#### Constructie



Figuur 8.12: Lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen NG, NM, NK, NUL, PK, PM en PG.

Voor de grijswaardeverschillen worden zeven verschillende klassen beschouwd; ze worden gepresenteerd m.b.v. de vaagverzamelingen NG (negatief groot,  $\mu_{NG}$ ), NM (negatief medium,  $\mu_{NM}$ ), NK (negatief klein,  $\mu_{NK}$ ), NUL (nul,  $\mu_0$ ), PK (positief klein,  $\mu_{PK}$ ), PM (positief medium,  $\mu_{PM}$ ) en PG (positief groot,  $\mu_{PG}$ ); cfr. Figuur 8.12<sup>19</sup>. Vervolgens beschouwt men in een  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  omgeving van de pixel  $(i, j)$  de verschillen

$$v_{ij}(k, l) = |A(i, j) - A(i - k, j - l)|,$$

en gaat men de volgende vaagregels afvuren<sup>20</sup>:

- |     |  |                        |
|-----|--|------------------------|
| R1: | ALS (meerdere van de $v_{ij}(k, l)$ zijn NG) | DAN ( $y(i, j)$ is NG) |
| R2: | ALS (meerdere van de $v_{ij}(k, l)$ zijn NM) | DAN ( $y(i, j)$ is NM) |
| R3: | ALS (meerdere van de $v_{ij}(k, l)$ zijn NK) | DAN ( $y(i, j)$ is NK) |
| R4: | ALS (meerdere van de $v_{ij}(k, l)$ zijn PK) | DAN ( $y(i, j)$ is PK) |
| R5: | ALS (meerdere van de $v_{ij}(k, l)$ zijn PM) | DAN ( $y(i, j)$ is PM) |
| R6: | ALS (meerdere van de $v_{ij}(k, l)$ zijn PG) | DAN ( $y(i, j)$ is PG) |
| R0: | ANDERS ( $y(i, j)$ is NUL).                  |                        |

<sup>18</sup>Inderdaad, de FIRE filters implementeren essentieel dezelfde redenering, maar daar heeft men deze eerst “vertaald” naar een meer formele benadering.

<sup>19</sup>Expliciete uitdrukkingen voor de lidmaatschapsfuncties kunnen onmiddellijk uit de figuur afgeleid worden. Zo worden de toppen (verder ook nog centra genoemd) respectievelijk gegeven door  $\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  en  $\frac{3}{4}$ , en hebben de vaagverzamelingen een uitwijking - zowel links als rechts - van  $\frac{1}{4}$  (met uitzondering van de vaagverzamelingen NG en PG).

<sup>20</sup>Merk op dat het aantal vaagregels aanzienlijk beperkter is dan bij de FIRE filters. Dit is een rechtstreeks gevolg van de directere implementatie van de menselijke redenering.

De optredende linguïstische term *meerdere* wordt gemodelleerd m.b.v. een S-vormige lidmaatschapsfunctie  $\mu_m$ , gegeven door:

$$\mu_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < a \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left[ \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right] \right) & \text{als } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{als } x > b \end{cases} .$$

Typische waarden voor de parameters  $a$  en  $b$  zijn  $a = 0.2$  en  $b = 0.8$ .

Het resultaat van de filtering wordt dan gegeven door:

$$A'(i, j) = A(i, j) + y(i, j),$$

met

$$y(i, j) = \sum_{r=1}^6 C_r \cdot \lambda_r(i, j).$$

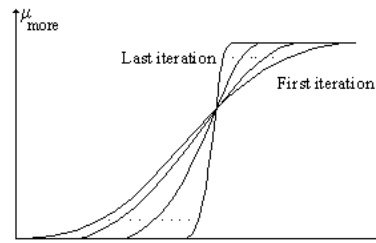
$C_r$  is het centrum van de lidmaatschapsfunctie horende bij de  $r$ -de regel, en  $\lambda_r(i, j)$  is de activatiegraad van de  $r$ -de regel voor pixel  $(i, j)$ . Bijvoorbeeld, voor de regel R1 wordt de activatiegraad gegeven door:

$$\lambda_1(i, j) = \min\{\mu_{NG}(v_{ij}(k, l)) | v_{ij}(k, l) \in \text{drager van NG}\} \cdot \mu_m \left( \frac{\text{aantal } v_{ij}(k, l) \in \text{drager van NG}}{\text{totaal aantal } v_{ij}(k, l)} \right).$$

De IFC filter wordt verder iteratief toegepast. Uit [21] blijkt dat men na ongeveer 5 iteraties reeds een optimaal resultaat bereikt. Nadeel is wel dat, naarmate men het aantal iteraties opvoert, het gefilterde beeld steeds waziger zal worden. Men kan dit echter opvangen door enkele wijzigingen in de bovenstaande constructie door te voeren. Deze modificaties geven aanleiding tot de MIFC en EIFC filters.

### 8.3.5 MIFC - gewijzigde IFC filter

De gewijzigde IFC filter is een licht gewijzigde versie van de IFC filter, met als doel het waziger worden van het gefilterd beeld tegen te gaan [21].



Figuur 8.13: Verscherping van de lidmaatschapsfunctie  $\mu_m$  na elke iteratie.

Eén van de mogelijkheden om het waziger worden van het gefilterd beeld tegen te gaan is het iteratief verscherpen van de vorm van de functie  $\mu_m$  (de lidmaatschapsfunctie van de linguïstische term *meerdere*); cfr. Figuur 8.13. Dit verscherpen heeft immers twee belangrijke gevolgen:

1. na een aantal iteraties zullen de meeste pixels niet meer aan de vaagregels onderworpen worden, waardoor het beeld niet waziger gemaakt zal worden;
2. de verscherping van de functie  $\mu_m$  maakt de filter na elke iteratie actiever in die gebieden waar het nodig is, en minder actief in die gebieden waar er niet veel meer gefilterd dient te worden.

Bovendien kan men ook een interessant stopcriterium invoeren. De iteraties kunnen bijvoorbeeld gestopt worden indien het aantal pixels dat nog aan minstens één vaagregel onderworpen wordt een bepaalde drempelwaarde niet meer bereikt.

De constructie is volledig analoog aan deze van de IFC filter. Men moet enkel bijkomend rekening houden met het iteratief verscherpen van de functie  $\mu_m$ .

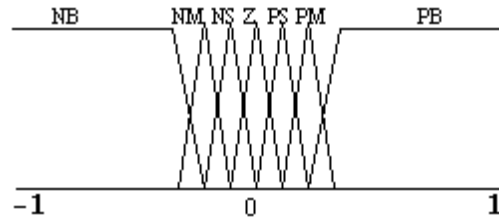
### 8.3.6 EIFC - uitgebreide IFC filter

De uitgebreide IFC filter is eveneens een licht gewijzigde versie van de IFC filter, met als doel het waziger worden van het gefilterd beeld tegen te gaan [21].

De gewone IFC filter bevat in feite twee belangrijke parameters:

1. de functie  $\mu_m$ ;
2. de lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen NG, NM, NK, NUL, PK, PM en PG.

Een iteratieve wijziging van de eerste parameter leidde tot de MIFC filter; een iteratieve wijziging van de tweede parameter daarentegen ligt aan de basis van de EIFC filter. Men kan namelijk argumenteren dat het beeld na elke iteratie meer gefilterd is, en dat de hoeveelheid ruis (zowel wat betreft gemiddelde waarde als wat betreft piekwaarden) afneemt. Om er dan voor te zorgen dat na elke iteratie het aantal afgevuurde regels per pixel min of meer ongewijzigd blijft – om zo de filtercapaciteit van de filter te behouden – kan men de lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen NM, NK, NUL, PK en PM compresseren, d.w.z. dat men na elke iteratie hun respectievelijke dragers gaat inkrimpen; cfr. Figuur 8.14.



Figuur 8.14: Lidmaatschapsfuncties van NM, NK, NUL, PK en PM na een aantal iteraties.

De constructie is volledig analoog aan deze van de IFC filter, uiteraard rekening houdend met het iteratief compresseren van de lidmaatschapsfuncties van NM, NK, NUL, PK en PM.

### 8.3.7 SFC - uitvlakkende vaagcontrole filter

De uitvlakkende vaagcontrole filter is een niet-iteratieve versie van de IFC filter [20]. De reden waarom men streeft naar een niet-iteratieve filter is voor de hand liggend: men hoeft in dat geval het algoritme slechts één keer te doorlopen (hetgeen een aanzienlijke tijdsinstaat kan betekenen), en er is bovendien ook geen stopcriterium meer nodig.

De niet-iteratieve versie van de gewone IFC filter wordt gerealiseerd door twee wijzigingen in de constructie door te voeren.

1. De ANDERS-regel R0 wordt vervangen door de volgende regel:

$$\begin{aligned} R0: \quad \text{ANDERS} \quad & \text{ALS (tamelijk meerdere van de } v_{ij}(k, l) \text{ zijn NUL)} \\ & \text{DAN } (y(i, j) \text{ is gem}(v_{ij}(k, l))), \end{aligned}$$

met

$$\text{gem}(v_{ij}(k, l)) = \text{gemiddelde } \{v_{ij}(k, l) | v_{ij}(k, l) \in \text{drager van NUL}\}.$$

De term **tamelijk meerdere** wordt gemodelleerd m.b.v. de lidmaatschapsfunctie:

$$\mu_{tm}(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax+b}}.$$

Typische waarden voor  $a$  en  $b$  zijn  $a = 6$  en  $b = 3$ .

2. Het minimum dat optreedt in de uitdrukking voor de activatiegraden van de regels wordt vervangen door de mediaan.

De correctieterm  $y(i, j)$  wordt dan gegeven door:

$$y(i, j) = p \cdot \text{gem}(v_{ij}(k, l)) + (1 - p) \sum_{r=1}^6 C_r \lambda_r(i, j),$$

met

$$p = \mu_{tm} \left( \frac{\text{aantal } v_{ij}(k, l) \in \text{drager van NUL}}{\text{totaal aantal } v_{ij}(k, l)} \right).$$

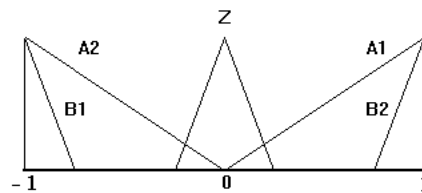
### 8.3.8 SSFC - verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter

De verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter is een uitbreiding van de SFC filter die het waziger worden van het beeld moet tegengaan door tegelijkertijd met de ruisonderdrukking de randen scherper te maken [21].

De vaagregels die gebruikt worden bij de SFC filter blijven bij de SSFC filter behouden; deze regels staan immers in voor de filtering. Om tegelijkertijd de randen te verscherpen worden er twee vaagregels aan het systeem toegevoegd:

- R7: ALS (meerdere van de  $v_{ij}(k, l)$  zijn NUL) EN  
(niet weinig van de  $v_{ij}(k, l)$  zijn A1)  
DAN ( $y(i, j)$  is B1)
- R8: ALS (meerdere van de  $v_{ij}(k, l)$  zijn NUL) EN  
(niet weinig van de  $v_{ij}(k, l)$  zijn A2)  
DAN ( $y(i, j)$  is B2).

De term **niet weinig** wordt gemodelleerd m.b.v. een S-vormige lidmaatschapsfunctie  $\mu_{nw}$ , bijvoorbeeld zoals voor de term **tamelijk meerdere**. De lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen A1 ( $\mu_{A1}$ ), A2 ( $\mu_{A2}$ ), B1 ( $\mu_{B1}$ ), B2 ( $\mu_{B2}$ ) en NUL ( $\mu_0$ ) worden gegeven in Figuur 8.15.



Figuur 8.15: De lidmaatschapsfuncties van de vaagverzamelingen A1, A2, B1, B2 en NUL.

Merk op dat de regels R7 en R8 enkel geactiveerd zullen worden in beeldgebieden waarin randen voorkomen<sup>21</sup>. Aangezien de regels bovendien het contrast aan deze randen vergroten, zullen de

<sup>21</sup>Om dit in te zien volstaan de volgende twee observaties: (1) de centrale pixel ligt altijd aan één van beide kanten van de rand. Het merendeel van de naburige pixels zal bijgevolg aan dezelfde kant als de centrale pixel liggen, hetgeen impliceert dat het merendeel van de grijswaardeverschillen een hoge lidmaatschapsgraad in de vaagverzameling (nul) zullen hebben; (2) de overige naburige pixels (en dat zullen er **niet weinig** zijn), liggen aan de andere kant van de rand, en zullen aanleiding geven tot ofwel allemaal positieve ofwel allemaal negatieve grijswaardeverschillen. Wegens (1) is dus voldaan aan de eerste voorwaarde uit de vaagregels; wegens (2) zal ook voldaan zijn aan de tweede voorwaarde.

randen inderdaad scherper gemaakt worden zonder daardoor de filtercapaciteit van de filter te verminderen.

De output  $y(i, j)$  van de filter wordt gegeven door:

$$y(i, j) = p \cdot \text{gem}(v_{ij}(k, l)) + (1 - p) \left( \sum_{r=1}^6 C_r \lambda_r(i, j) + VC \cdot \sum_{r=1}^2 C_{B_r} \lambda_{r+6}(i, j) \right),$$

met  $\lambda_7(i, j)$  en  $\lambda_8(i, j)$  de activatiegraden van de regels R7 en R8 in de pixel  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_7(i, j) &= \min\{\mu_{A1}(v_{ij}(k, l)) | \mu_{A1}(v_{ij}(k, l)) > \mu_0(v_{ij}(k, l))\} \\ &\cdot \mu_m \left( \frac{\text{aantal } v_{ij}(k, l) | \mu_0(v_{ij}(k, l)) > \mu_{A1}(v_{ij}(k, l))}{\text{totaal aantal } v_{ij}(k, l)} \right) \\ &\cdot \mu_{nw} \left( \frac{\text{aantal } v_{ij}(k, l) | \mu_{A1}(v_{ij}(k, l)) > \mu_0(v_{ij}(k, l))}{\text{totaal aantal } v_{ij}(k, l)} \right), \end{aligned}$$

en een analoge uitdrukking voor  $\lambda_8(i, j)$ . De factor  $VC$  wordt de *verscherpings coëfficiënt* genoemd, en is bepalend voor de scherpte van het gefilterd beeld. In [21] werd de waarde  $VC = 1$  gebruikt.

### 8.3.9 GOA filter

De GOA filter werd ontworpen in het kader van het GOA project waarin voorliggend onderzoek werd uitgevoerd. Daar waar de meeste vaagfilters ontworpen zijn voor het verwijderen van impulsruis, is de GOA filter specifiek ontworpen voor de reductie van gaussische ruis. We herhalen hier enkel dat het algemene idee achter de GOA filter is om een pixel uit te middelen m.b.v. de pixels uit zijn omgeving, daarbij tegelijkertijd rekening houdend met beeldstructuren zoals bijvoorbeeld randen<sup>22</sup>; we verwijzen naar Hoofdstuk 7 voor een uitgebreide bespreking.

## 8.4 Classificatie van vaagfilters op basis van theoretische criteria

Om te komen tot een classificatie van de verschillende vaagfilters baseren we ons op de volgende theoretische criteria:

1. *Ruistype*. De besproken filters zijn ontworpen hetzij voor zout & peper ruis, hetzij voor gaussische ruis, hetzij voor beide ruistypes tegelijkertijd. Dit is uiteraard één van de belangrijkste criteria op basis waarvan we de filters kunnen classificeren.
2. *Vaaggehalte*. Ook op basis van het vaaggehalte kunnen we de besproken filters classificeren; deze classificatie is eigenlijk reeds gemaakt door de indeling van de voorgaande paragrafen. Sommige filters kunnen immers opgevat worden als een modificatie van één of meerdere klassieke filters, andere filters kunnen opgevat worden als zuivere vaagfilters. Deze classificatie maakt duidelijk of de output van de filter zuiver m.b.v. vaagregels wordt bepaald, of dat de vaagregels eerder een hulpmiddel in het proces zijn.
3. *Vaagregels*. De vaagregels peilen telkens in hoeverre een pixel een ruispixel is. De meest voor de hand liggende manier om deze peiling uit te voeren is m.b.v. grijswaardeverschillen. Er zijn echter ook filters die op een andere manier te werk gaan.

<sup>22</sup>Merk op dat ook de SFC filter rekening tracht te houden met randen in het beeld. Er zijn echter twee belangrijke verschilpunten op te merken: (1) bij de SFC filter worden randen *afzonderlijk* en *achteraf* met aparte regels in rekening gebracht, terwijl dit bij de GOA filter direct in de filtering zelf vervat zit; (2) bij de SFC filter wordt voor de filtering gebruik gemaakt van *alle* naburige pixels van de centrale filter, terwijl bij de GOA filter voornamelijk de pixels die aan dezelfde kant van de rand liggen als de centrale pixel gebruikt worden.

4. *Algoritme.* De filters werden specifiek ontworpen als iteratieve of niet-iteratieve filters, of als recursieve of niet-recursieve filters. Ook dit is bijgevolg een criterium om de classificatie op te baseren.
5. *Complexiteit.* Tenslotte is het ook interessant om een idee te hebben van de complexiteit van de verschillende filters.

Een classificatie op basis van deze vijf criteria verschaft ons een vrij goed inzicht in de voornaamste theoretische aspecten van elk van de vaagfilters. Er zijn wellicht nog andere criteria mogelijk op basis waarvan een classificatie kan gebeuren, maar we zijn van mening dat we de belangrijkste in acht hebben genomen.

### 8.4.1 Classificatie op basis van ruistype

De onderzochte vaagfilters zijn ontworpen voor zout & peper ruis en/of gaussische ruis. Het volgende overzicht is gebaseerd op basis van de literatuur (d.w.z. op hetgeen de ontwerpers zelf over de betreffende vaagfilters beweren), en wordt in het algemeen ook bevestigd door de respectievelijke constructie-schema's.

- Vaagfilters specifiek ontworpen voor zout & peper ruis: FM (vaag mediaan filter), WFM (gewogen vaag gemiddelde filter), AWFM1 (eerste adaptieve WFM filter), AWFM2 (tweede adaptieve WFM filter), FIRE (vaaginferentie met anders-actie filters), DS-FIRE (tweestaps FIRE filter), PWL-FIRE (stuksgewijze lineaire FIRE filter) en FDD (vaagbeslissings gerichte filter).
- Vaagfilters specifiek ontworpen voor gaussische ruis: GOA filter
- Vaagfilters ontworpen voor zowel zout & peper ruis als gaussische ruis: IFC (iteratieve vaagcontrole filter), MIFC (gewijzigde IFC filter), EIFC (uitgebreide IFC filter), SFC (uitvlakkende vaagcontrole filter), SSFC (verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter), CK (Choi & Krishnapuram filter).

We merken op dat geen enkele van de besproken vaagfilters specifiek ontworpen is op maat van enig ander ruistype. Dit is enerzijds misschien niet verwonderlijk (zout & peper ruis en gaussische ruis zijn de meest voorkomende types), maar suggereert anderzijds een onderwerp voor verder onderzoek.

### 8.4.2 Classificatie op basis van vaaggehalte

De besproken vaagfilters zijn ofwel zuivere vaagfilters, d.w.z. onafhankelijk van enige bestaande klassieke filter, ofwel modificaties (uitbreidingen, veralgemeningen of verfijningen) van bestaande klassieke filters. In het laatste geval spreken we van vaag-klassieke filters; de modificaties aan de klassieke filters worden gerealiseerd m.b.v. de vaagregels. Volgende filters behoren tot deze klasse:

- FM (vaag mediaan filter): de FM filter is een verfijning van de klassieke mediaan filter, waarbij het gewicht van de mediaan filter bepaald wordt m.b.v. vaagregels;
- WFM (gewogen vaag gemiddelde filter), AWFM1 (eerste adaptieve WFM filter) en AWFM2 (tweede adaptieve WFM filter): deze filters zijn uitbreidingen van de adaptieve gewogen gemiddelde filter, waarbij de gewichten afhangen van vooraf vastgelegde of adaptief bepaalde vaagverzamelingen, en waarbij de keuze van de output afhangt van een vaagschatting;
- FDD (vaagbeslissings gerichte filter): de FDD filter is een algemene verfijning van klassieke filters, waarbij het gewicht van de betreffende klassieke filter bepaald wordt m.b.v. vaagregels;



- CK (Choi & Krishnapuram filter): de CK filter is een combinatie van drie klassieke filters (elk met een specifieke taak), waarbij het gewicht van elk van deze filters bepaald wordt m.b.v. vaagregels.

In de klasse van vaag-klassieke filters kan men eigenlijk de volgende twee gevallen onderscheiden:

1. De output van de vaagfilter hangt af van de output van één of meerdere klassieke filters: in dat geval wordt het gewicht van deze klassieke filter(s) bepaald m.b.v. vaagregels. Hieronder vallen de FM, FDD en CK filters.
2. De output van de vaagfilter wordt bepaald op basis van een klassieke formule: in dat geval worden de specifieke parameters van de formule bepaald m.b.v. vaagregels. Hieronder vallen de WFM, AWFM1 en AWFM2 filters.

De overige besproken vaagfilters zijn zuivere vaagfilters: FIRE (vaaginferentie met anders-actie filter), DS-FIRE (tweestaps FIRE filter), PWL-FIRE (stuksgewijze lineaire FIRE filter), IFC (iteratieve vaagcontrole filter), MIFC (gewijzigde IFC filter), EIFC (uitgebreide IFC filter), SFC (uitvlakkende vaagcontrole filter), SSFC (verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter) en GOA filter.

### 8.4.3 Classificatie op basis van vaagregels

De vaagregels gaan telkens na in hoeverre een pixel als een ruispixel opgevat moet worden. In het algemeen kan men stellen dat dit gebeurt door te onderzoeken in hoeverre de centraal beschouwde pixel verschilt van de pixels in zijn omgeving. Men kan echter een onderscheid maken tussen twee benaderingen.

- In het merendeel van de besproken gevallen maakt men expliciet gebruik van de grijswaardeverschillen tussen de centrale pixel en naburige pixels. Dit is zo voor FDD (vaagbeslissingsgerichte filter), FIRE (vaaginferentie met anders-actie filter), DS-FIRE (tweestaps FIRE filter), PWL-FIRE (stuksgewijze lineaire filter), IFC (iteratieve vaagcontrole filter), MIFC (gewijzigde IFC filter), EIFC (uitgebreide IFC filter), SFC (uitvlakkende vaagcontrole filter), SSFC (verscherpende en uitvlakkende vaagcontrole filter) en de GOA filter. Dit is ook het geval voor de CK filter, hoewel dit heel wat ingewikkelder en minder expliciet is dan in voorgaande gevallen.
- De FM (vaag mediaan filter), WFM (gewogen vaag gemiddelde filter), AWFM1 (eerste adaptieve WFM filter) en AWFM2 (tweede adaptieve WFM filter) vormen een uitzondering. Zo maakt de vaag mediaan filter gebruik van het grijswaardeverschil tussen de centrale pixel en de mediaan gefilterde versie van deze centrale pixel. De WFM, AWFM1 en AWFM2 filters brengen de homogeniteit van een omgeving rond de centrale pixel eveneens op een andere manier in rekening, namelijk door expliciet gebruik te maken van de concepten *donker*, *medium* en *helder*.

### 8.4.4 Classificatie op basis van het type algoritme

De algoritmen kunnen iteratief of niet-iteratief, en recursief of niet-recursief zijn. Een iteratief algoritme houdt in dat het verschillende malen na elkaar toegepast moet worden (er is dan nood aan een zinvol stopcriterium); een recursief algoritme houdt in dat de grijswaarde van een pixel tijdens de uitvoering van het algoritme onmiddellijk wordt vervangen door de gefilterde waarde. Merk op dat een iteratieve filter impliciet een recursief karakter vertoont, omdat men na elke iteratie het algoritme terug toepast op de gefilterde pixels. Bijgevolg zal men een iteratieve filter zelden ook expliciet recursief programmeren.

Het volgend overzicht geeft aan welke vaagfilters door de respectievelijke ontwerpers expliciet als iteratief of recursief werden geconstrueerd:

- Iteratieve filters: IFC (iteratieve vaagcontrole filter), MIFC (gewijzigde IFC filter), EIFC (uitgebreide IFC filter) en GOA filter.
- Recursieve filters: FIRE (vaaginferentie met anders-actie filter), DS-FIRE (tweestaps FIRE filter) en PWL-FIRE (stuksgewijze lineaire FIRE filter).

De overige filters zijn noch iteratief, noch recursief ontwikkeld.

Aangaande iterativiteit en recursiviteit maken we nog volgende opmerkingen.

1. Niet-iteratieve filters kunnen altijd iteratief gemaakt worden, door het algoritme gewoon meermaals na elkaar toe te passen.
2. Niet-recursieve filters kunnen altijd recursief gemaakt worden, door na filtering van een pixel de grijswaarde van die pixel onmiddellijk door diens gefilterde waarde te vervangen.
3. De recursiviteit van een filter heeft geen enkele invloed op de rekentijd van die filter. Dit is echter wel het geval voor de iterativiteit; het algoritme moet in dat geval immers meermaals doorlopen worden.

### 8.4.5 Classificatie op basis van complexiteit

Aangaande de complexiteit van de besproken vaagfilters kan uit de verschillende constructieschema's onmiddellijk het volgende afgeleid worden:

- De formules voor FM (vaag mediaan filter) en FDD (vaagbeslissings gerichte filter) zijn zeer eenvoudig. Gecombineerd met het feit dat er in de berekeningen enkel grijswaardeverschillen voorkomen leidt dit tot een lage complexiteit van deze filters.
- Bij de overige filters zijn de optredende formules iets uitgebreider of ingewikkelder, waardoor deze meer tijd vergen om berekend te worden. Dit is vooral te wijten aan het feit dat er per pixel heel wat functie-evaluaties moeten gebeuren, hetgeen een gevolg is van het optreden van lidmaatschapsfuncties. Deze filters hebben bijgevolg een hogere complexiteit.
- Betreffende de verschillende FIRE filters stellen we vast dat bij de PWL-FIRE filter slechts een zeer beperkt aantal patronen in acht genomen wordt, in vergelijking met de gewone FIRE en de DS-FIRE filter. Aangezien deze patronen per pixel beschouwd worden kunnen we hieruit afleiden dat de complexiteit van de PWL-FIRE filter beduidend lager is dan de complexiteit van de FIRE en DS-FIRE filters. Om een analoge reden zal de complexiteit van de DS-FIRE filter hoger zijn dan deze van de gewone FIRE filter.

In principe kunnen alle algoritmen aan een gedetailleerd complexiteitsonderzoek onderworpen worden, waarbij de complexiteit uitgedrukt wordt in termen van elementaire bewerkingen. Men kan echter ook een goed inzicht verkrijgen in de complexiteit van de verschillende vaagfilters op basis van experimentele rekestijden; cfr. Tabel 8.1. Hoewel deze cijfers relatief zijn<sup>23</sup>, bevestigen ze de hoger gemaakte observaties.

### 8.4.6 Samenvattende tabel

De bovenstaande bevindingen worden samengevat in Tabel 8.2. Legende:

1. Ruistype: *impuls* (indien de filter ontworpen is voor zout & peper ruis), *gaussisch* (indien de filter ontworpen is voor gaussische ruis), *beide* (indien de filter ontworpen is voor beide ruistypes);
2. Vaaggehalte: *vaag-klassiek* of *vaag*;

<sup>23</sup>De rekestijden hangen immers af van heel wat factoren, zoals bijvoorbeeld de snelheid van de computer en de belasting ten gevolge van andere toepassingen tijdens de berekeningen. Uiteraard speelt ook de grootte van de beelden een rol; hier betreft het telkens  $256 \times 256$  beelden.

Filter	Rekentijd (in sec)	Beoordeling
FM	451	laag
WFM	2193	hoog
AWFM1	2256	hoog
AWFM2	3100	hoog
FDD	180	laag
CK	1300	medium
FIRE	1035	medium
DS-FIRE	2979	hoog
PWL-FIRE	308	laag
IFC	1914	hoog (*)
MIFC	1964	hoog (*)
EIFC	2025	hoog (*)
SFC	1884	hoog
SSFC	2426	hoog
GOA	1232	medium (*)

Tabel 8.1: Rekentijd van de verschillende vaagfilters. Voor iteratieve filters, die worden aangeduid m.b.v. (\*), werd slechts 1 iteratie in rekening gebracht.

3. Vaagregels: *verschillen* (indien de regels gebaseerd zijn op grijswaardeverschillen) of *anders*;
4. Algoritme: *iteratief*, *recursief* of *standaard* (indien noch iteratief, noch recursief);
5. Complexiteit: *laag*, *medium* of *hoog*.

Filter	Ruistype	Vaaggehalte	Vaagregels	Algoritme	Complexiteit
FM	impuls	vaag-klassiek	anders	standaard	laag
WFM	impuls	vaag-klassiek	anders	standaard	hoog
AWFM1	impuls	vaag-klassiek	anders	standaard	hoog
AWFM2	impuls	vaag-klassiek	anders	standaard	hoog
FDD	impuls	vaag-klassiek	verschillen	standaard	laag
CK	beide	vaag-klassiek	verschillen	standaard	medium
FIRE	impuls	vaag	verschillen	recursief	medium
DS-FIRE	impuls	vaag	verschillen	recursief	hoog
PWL-FIRE	impuls	vaag	verschillen	recursief	laag
IFC	beide	vaag	verschillen	iteratief	hoog
MIFC	beide	vaag	verschillen	iteratief	hoog
EIFC	beide	vaag	verschillen	iteratief	hoog
SFC	beide	vaag	verschillen	standaard	hoog
SSFC	beide	vaag	verschillen	standaard	hoog
GOA	gaussisch	vaag	verschillen	iteratief	medium

Tabel 8.2: Classificatie van vaagfilters op basis van de criteria “ruistype”, “vaaggehalte”, “vaagregels”, “algoritme” en “complexiteit”.

Op basis van deze vijf verschillende criteria kunnen de 15 besproken vaagfilters onderverdeeld worden in tien klassen. Hiervan bestaan zeven klassen uit één vaagfilter en drie klassen uit meerdere vaagfilters. In het laatste geval betreft het: (1) WFM, AWFM1 en AWFM2 filters (impuls, vaag-klassiek, anders, standaard, hoog); (2) IFC, MIFC en EIFC filters (beide, vaag, verschillen, iteratief, hoog); en (3) SFC en SSFC filters (beide, zuiver, verschillen, standaard, hoog).

## 8.5 Bespreking van de vaagfilters op basis van experimentele resultaten

We passen de bovenstaande klassieke en vaaglogische filters toe op het “lena” beeld, voor twee verschillende ruistypes (zout & peper ruis en gaussische ruis), en voor verschillende ruisniveaus (gaande van zeer weinig tot zeer veel ruis). Op basis van de resultaten kunnen we uitspraken doen over de performantie m.b.t. het ruistype en m.b.t. het ruisniveau voor dit beeldtype, en kunnen we de filters onderling vergelijken. Voor deze vergelijking baseren we ons zowel op numerieke als visuele resultaten. De vergelijkende studie van deze resultaten zal tenslotte uitmonden in een “top 5” van best presterende filters.

Enkele opmerkingen:

1. Bij het evalueren van de resultaten moet men steeds rekening houden met het opzet van de betreffende filter. De meeste filters zijn immers specifiek ontworpen voor een bepaald ruistype (zie paragraaf 8.4.1), en het is bijgevolg te verwachten dat ze minder goed tot slecht zullen presteren voor andere ruistypes.
2. De visuele resultaten zijn zeer talrijk (ongeveer twintig beelden voor elke keuze van ruistype en ruisniveau). Omwille van praktische redenen werd er dan ook voor gekozen om deze visuele resultaten onder te brengen in een aparte en losse bijlage bij dit proefschrift.
3. De experimentele resultaten die in deze paragraaf beschreven worden werden bevestigd door gelijkaardige experimenten met andere beelden van eenzelfde aard. Zoals reeds opgemerkt in de inleiding van dit hoofdstuk werden nog geen experimenten uitgevoerd met bijvoorbeeld medische beelden of satellietbeelden.

### 8.5.1 Zout & peper ruis

#### MSE-waarden

De numerieke resultaten m.b.t. zout & peper ruis worden gepresenteerd in Tabel 8.3. Op basis van deze MSE-waarden besluiten we het volgende:

- De PWL-FIRE filter presteert het best voor weinig ruis (tot 5%).
- De DS-FIRE filter presteert zeer goed voor weinig ruis (tot 5%) en presteert best voor hogere ruispercentages (10% tot 20%).
- De AWF2 filter presteert het best voor de hoogste ruispercentages (vanaf 25%). Voor deze ruispercentages zijn de gewone WFM en de AWF1 filters bij de tweede best presterende filters.

#### Klassieke filters versus vaaglogisch gebaseerde filters

Wat betreft de prestaties van klassieke filters versus vaagfilters besluiten we het volgende:

- De beste filter blijkt steeds een vaagfilter te zijn.
- Onder de klassieke filters is de mediaan filter de best presterende filter.
- De vaag mediaan filter presteert aanzienlijk beter dan de klassieke mediaan filter voor lage ruispercentages, terwijl voor hogere ruispercentages de resultaten vergelijkbaar zijn.
- De MSE-waarden die corresponderen met de klassieke mediaan filter zijn telkens een factor 2 tot 20 groter dan de overeenkomstige MSE-waarden die corresponderen met de beste vaagfilter.

Filter	1%	3%	5%	10%	15%
ruisbeeld	191.30	578.06	949.90	1849.43	2779.61
FM	12.00	22.60	29.03	47.23	71.88
WFM	131.97	133.29	134.17	135.16	137.08
AWFM1	122.81	124.05	124.72	127.32	130.82
AWFM2	63.76	65.48	67.23	72.63	74.76
FDD	53.56	190.34	356.38	909.00	1635.83
CK	159.89	479.72	805.65	1624.41	2536.76
FIRE	31.80	39.62	50.55	91.21	174.13
DS-FIRE	11.47	15.43	17.77	<b>24.97</b>	<b>37.40</b>
PWL-FIRE	<b>2.17</b>	<b>8.74</b>	<b>12.84</b>	56.67	154.80
IFC	39.36	60.35	70.49	93.44	119.74
MIFC	39.36	60.73	72.58	98.01	123.37
EIFC	39.36	61.11	73.51	95.20	120.95
SFC	21.29	34.00	42.80	81.21	139.73
SSFC	23.17	34.60	41.60	75.21	128.67
GOA	71.21	138.73	177.90	253.45	325.25
mediaan	67.71	71.59	74.13	84.94	101.10
gemid	117.44	164.33	209.88	330.82	455.09
wiener	172.13	378.29	515.84	730.33	888.96
gaussisch	95.04	257.61	414.27	799.79	1199.04

Filter	20%	25%	30%	40%	50%
ruisbeeld	3735.16	4677.02	5612.34	7454.94	9289.00
FM	113.52	199.86	347.17	869.73	1805.20
WFM	141.66	146.80	154.08	175.87	224.49
AWFM1	135.70	140.41	147.93	170.97	225.87
AWFM2	78.41	<b>84.52</b>	<b>89.46</b>	<b>103.56</b>	<b>139.71</b>
FDD	2513.01	3474.97	4487.98	6486.95	8560.56
CK	3458.10	4408.20	5257.25	6972.98	8497.93
FIRE	311.30	521.03	837.14	1699.97	2983.85
DS-FIRE	<b>59.27</b>	100.35	177.42	482.14	1169.24
PWL-FIRE	327.06	615.91	1012.22	2123.83	3750.80
IFC	160.02	227.53	323.48	618.71	1160.05
MIFC	161.09	225.78	318.74	616.46	1178.57
EIFC	159.44	226.17	325.04	631.10	1185.78
SFC	238.83	392.33	625.43	1303.00	2298.15
SSFC	218.39	372.35	604.08	1359.59	2542.94
GOA	412.70	504.67	609.01	839.51	1112.85
mediaan	136.45	216.67	367.19	929.78	2033.32
gemid	606.04	762.63	935.65	1279.52	1665.87
wiener	1049.22	1202.12	1379.43	1691.77	2030.12
gaussisch	1623.63	2051.32	2481.37	3328.15	4212.45

Tabel 8.3: Zout & peper ruis: MSE-waarden van het ruisvrije “cameraman” beeld en verschillende gefilterde ruisbeelden. De ruispercentages worden weergegeven in de eerste rij; per ruispercentage wordt de laagste MSE-waarde vetjes afgedrukt.

## Algemene prestaties

Wat betreft de algemene prestaties van de filters besluiten we het volgende:

- De vaag mediaan filter presteert in het algemeen zeer goed voor weinig ruis, en is voor ruispercentages tussen 10% en 20% zelf de op één na beste filter.
- De WFM en AWFMI filters vertonen vergelijkbare prestaties, en presteren zeer sterk voor zeer hoge ruispercentages (25% tot 50%). We stellen ook vast dat de MSE-waarden zeer weinig variëren over verschillende ruispercentages heen: de MSE die correspondeert met 50% ruis is amper het dubbele van de MSE die correspondeert met 1% ruis. Dezelfde opmerking geldt voor de AWFMI2 filter; deze filter presteert in het algemeen nog beter dan de WFM en AWFMI filters. De MSE-waarden zijn gemiddeld een factor 2 kleiner dan deze bij de WFM en AWFMI filters.
- De IFC, MIFC en EIFC filters hebben nagenoeg identieke numerieke prestaties.
- De SFC en SSFC filters presteren eveneens nagenoeg identiek. Voor kleinere ruispercentages zijn de prestaties goed in vergelijking met andere filters, voor hogere percentages zijn de resultaten aanzienlijk slechter.
- De PWL-FIRE filter evolueert van beste filter (voor lage ruispercentages) naar nagenoeg de slechtste filter voor hoge ruispercentages.
- De FDD en CK filters zijn steeds de slechtst presterende filters.

## Visuele resultaten

Wat betreft visuele resultaten besluiten we het volgende:

- Het visuele resultaat van de GOA, FDD, CK, gemiddelde, wiener en gaussische filters is in vergelijking met de andere filters slecht tot zeer slecht<sup>24</sup>, zeker voor hoge ruispercentages. Dit werd hoger bevestigd door de MSE-waarden.
- Het visuele resultaat van de WFM en AWFMI filters vertoont een soort clusterings-effect, waardoor bijvoorbeeld kleinere details verdwijnen door opgenomen te worden in grotere pixelformaties. Dit effect is iets minder uitgesproken bij de AWFMI1 dan bij de WFM filter. De filters slagen er wel in om alle ruispixels weggefilterd te krijgen, ook voor zeer hoge ruispercentages.
- Het visuele resultaat van de AWFMI2 is duidelijk het beste, en dit vooral voor de hoogste ruispercentages (bij de lagere ruispercentages is er geen uitgesproken onderscheid tussen de andere filters met goede visuele resultaten). Deze filter vertoont ook geen clusterings-effect in tegenstelling tot de WFM en de AWFMI1 filters.
- Het visuele resultaat van de IFC, MIFC en EIFC filters is in het algemeen waziger. Voor kleine ruispercentages (bijv. 5%) is het visuele resultaat zeer goed, voor hogere percentages (bijv. 15% en 30%) treden er echter ernstige artefacten op waardoor het visuele resultaat zeer slecht wordt.
- Het visuele resultaat van de overige filters (FM, SFC, SSFC, FIRE, DS-FIRE, PWL-FIRE en mediaan) is zeer goed, zeker voor lage ruispercentages. Voor hogere ruispercentages blijft er na filtering nog steeds ruis aanwezig (soms met clusterings-effecten), hetgeen een storend effect is, vooral voor de SFC, SSFC en FIRE filters. De FM, DS-FIRE, PWL-FIRE en mediaan filters leveren in dit geval de beste visuele resultaten op. Een belangrijk kenmerk van deze filters, met uitzondering van de mediaan filter, is dat de scherpte van het beeld behouden blijft.

---

<sup>24</sup>Opmerking m.b.t. de GOA filter: de GOA filter is specifiek ontworpen voor onderdrukking van gaussische ruis, en bijgevolg is het niet echt verwonderlijk dat de resultaten voor zout & peper ruis niet zo bevredigend zijn.

## Algemeen

In het algemeen kunnen we het volgende besluiten:

- Voor lage ruispercentages: de meeste filters, met uitzondering van de GOA, FDD, CK, gemiddelde, wiener en gaussische filters, leveren visueel zeer goede resultaten op. De DS-FIRE en PWL-FIRE kunnen dit ook vertalen in de laagste MSE-waarden.
- Voor hoge ruispercentages: de AWFM2 levert het beste visuele resultaat op, gevolgd door de WFM, AWFM1, FMF, DS-FIRE, PWL-FIRE en mediaan filters die eveneens visueel aanvaardbare resultaten opleveren. De AWFM2 filter bevestigt het goede visuele resultaat in termen van de laagste MSE-waarde. Ook de WFM en AWFM1 filters resulteren in zeer lage MSE-waarden.

### 8.5.2 Gaussische ruis

#### MSE-waarden

De numerieke resultaten m.b.t. gaussische ruis worden gepresenteerd in Tabel 8.4. Op basis van deze MSE-waarden besluiten we het volgende:

- De GOA filter presteert het best, zowel voor lage als voor hoge ruiswaarden. De ruisonderdrukkingsfactor varieert tussen 4 (voor de laagste ruiswaarden) en 12 (wordt bereikt in het geval van  $\sigma = 80.64$ ). Gelet op het feit dat we de GOA filter zelf ontwikkeld hebben is dit uiteraard een zeer positief resultaat.
- De AWFM2 filter presteert het tweede best voor de laagste ruispercentages (tot  $\sigma = 25.50$ ), de IFC, MIFC en EIFC filters leveren het tweede beste resultaat op voor de iets hogere ruispercentages ( $\sigma = 25.50$  tot  $57.02$ ), en de klassieke gemiddelde filter neemt deze rol over voor hogere ruiswaarden. Merk hierbij op dat over alle ruiswaarden heen de verschillen in MSE-waarden tussen de laatste twee (groepen van) filters echter zeer klein zijn.
- De MSE-waarden van de GOA filter nemen minder sterk toe met stijgende ruis in vergelijking met de MSE-waarden van de tweede best presterende filters. Zo kan men nagaan dat de overeenkomstige MSE-waarden van de tweede best presterende filter en de GOA filter zich voor lage ruiswaarden verhouden als een factor 1.3, terwijl dit voor de hogere ruiswaarden oploopt tot een factor 1.7. Dit wijst op een robuustere werking van de GOA filter.

#### Klassieke filters versus vaagfilters

Wat betreft de prestaties van klassieke filters versus vaagfilters besluiten we het volgende:

- De beste filter is steeds een vaaglogisch gebaseerde filter, met name de GOA filter.
- Onder de klassieke filters is de wiener filter de best presterende voor zeer lage ruis (tot  $\sigma = 25.50$ ), en de gemiddelde filter de best presterende voor hogere ruis. Merk op dat voor hogere ruis de gemiddelde filter zelfs de tweede best presterende filter over alle beschouwde filters is.
- De vaag mediaan filter presteert iets beter dan de klassieke mediaan filter voor zeer lage ruis ( $\sigma = 18.03$ ), terwijl voor hogere ruispercentages de klassieke mediaan filter aanzienlijk beter is (ongeveer een factor 2). Hier moeten we wel opmerken dat de klassieke mediaan filter niet zo goed presteert in vergelijking met andere klassieke filters, zoals de gemiddelde filter en de wiener filter.

Filter	$\sigma = 18.03$	$\sigma = 25.50$	$\sigma = 36.06$	$\sigma = 44.17$	$\sigma = 51.00$	$\sigma = 57.02$
ruisbeeld	324.13	644.55	1246.92	1808.65	2331.82	2818.52
FM	124.02	216.67	390.22	730.04	996.01	1243.63
WFM	266.94	367.90	535.70	690.23	849.70	1009.64
AWFM1	224.54	318.23	485.18	644.23	804.68	971.53
AWFM2	89.72	141.04	271.29	428.78	577.70	733.10
FDD	307.94	602.25	1140.32	1632.48	2088.26	2513.67
CK	273.86	551.46	1095.33	1620.75	2130.31	2610.38
FIRE	311.44	477.96	671.83	820.96	958.78	1091.95
DS-FIRE	249.05	452.91	752.89	950.89	1087.69	1189.11
PWL-FIRE	304.72	571.29	990.20	1298.61	1537.10	1763.38
IFC	114.59	157.69	230.02	293.82	355.59	417.03
MIFC	114.35	155.79	226.26	299.93	349.39	412.55
EIFC	114.23	157.63	229.36	291.55	354.61	414.72
SFC	218.28	351.22	499.04	612.29	736.01	862.81
SSFC	219.43	355.98	524.09	668.68	821.39	978.67
GOA	<b>87.37</b>	<b>125.89</b>	<b>164.49</b>	<b>195.77</b>	<b>226.33</b>	<b>254.29</b>
mediaan	133.48	194.12	311.38	425.19	536.31	646.07
gemid	131.13	168.05	239.03	306.66	371.32	433.28
wiener	88.72	149.88	264.87	372.32	472.28	564.92
gaussisch	149.06	282.43	533.90	769.50	990.09	1196.63

Filter	$\sigma = 80.64$	$\sigma = 98.76$	$\sigma = 114.04$	$\sigma = 127.50$	$\sigma = 139.67$
ruisbeeld	4784.88	6195.07	7258.95	8101.14	8782.30
FM	2223.01	2995.56	4364.85	4787.25	5099.76
WFM	1666.47	2124.20	2512.68	2818.89	3129.75
AWFM1	1656.54	2114.60	2470.50	2754.04	3023.66
AWFM2	1383.85	1776.93	2095.48	2351.12	2547.55
FDD	4275.07	5606.71	6650.83	7499.56	8198.67
CK	4622.22	6075.65	7231.48	8120.42	8818.27
FIRE	1721.40	2299.40	2818.35	3287.43	3710.64
DS-FIRE	1509.72	1755.99	1997.51	2240.83	2481.93
PWL-FIRE	2454.80	3035.08	3565.01	4053.73	4508.17
IFC	704.45	960.94	1183.08	1384.57	1577.83
MIFC	712.46	991.52	1229.10	1457.35	1678.27
EIFC	715.25	987.50	1218.12	1445.09	1641.33
SFC	1478.60	2018.56	2468.24	2847.56	3178.57
SSFC	1741.61	2452.34	3058.09	3604.97	4098.50
GOA	<b>388.13</b>	<b>514.19</b>	<b>629.36</b>	<b>732.18</b>	<b>824.09</b>
mediaan	1171.71	1666.62	2132.88	2571.11	2983.20
gemid	703.48	925.51	1110.86	1269.02	1404.35
wiener	925.02	1175.89	1369.59	1528.86	1662.06
gaussisch	2044.30	2671.37	3157.19	3550.30	3873.27

Tabel 8.4: Gaussische ruis: MSE-waarden van het ruisvrije “cameraman” beeld en verschillende gefilterde ruisbeelden. De  $\sigma$ -waarden worden weergegeven in de eerste rij; per  $\sigma$  wordt de laagste MSE-waarde vetjes afgedrukt.



## Algemene prestaties

Wat betreft de algemene prestaties van de filters besluiten we het volgende:

- De vaag mediaan filter presteert voor lage ruispercentages vrij goed in vergelijking met de andere filters, maar evolueert voor stijgende ruispercentages naar één van de slechts presterende filters.
- De WFM en AWF1 filters leveren gelijkaardige resultaten op. In vergelijking met zout & peper ruis stellen we vast dat de evolutie van de MSE-waarden nu een “normaal” karakter vertoont. De AWF2 filter presteert in het algemeen beter dan de WFM en AWF1 filters. Voor hogere ruis presteert deze groep van filters echter niet zo goed.
- De IFC, MIFC en EIFC presteren gelijkaardig, en leveren in het algemeen goede resultaten op.
- De SFC en SSFC filters presteren eveneens gelijkaardig, zij het in het algemeen minder goed dan de IFC, MIFC en EIFC filters (gemiddeld een factor 2).
- De FIRE, DS-FIRE en PWL-FIRE filters presteren slecht, vooral voor lagere ruispercentages valt het op dat ze tot de slechts presterende filters behoren.
- De GOA filter steekt met kop en schouders boven alle andere filters uit, en levert zeer goede numerieke resultaten op.
- De FDD en CK filters blijken de slechtst presterende filters te zijn voor ruis vanaf  $\sigma = 25.50$ .

## Visuele resultaten

Wat betreft visuele resultaten besluiten we het volgende:

- De WFM en AWF1 filters vertonen een veel uitgesprokener clusterings-effect dan in het geval van zout & peper ruis: het aantal grijswaarden wordt drastisch gereduceerd hetgeen textuur en details doet verdwijnen. Voor zeer hoge ruispercentages ( $\sigma = 57.02$ ) is het gefilterd beeld nog moeilijk herkenbaar.
- Het visuele resultaat van de AWF2 is zeer goed voor de laagste ruispercentages (tot  $\sigma = 25.50$ ). Voor hogere ruispercentages scoort deze filter ook zeer goed: het gefilterde beeld is veel scherper in vergelijking met de andere filters, maar er treden wel vlekjes op die toenemen in aantal en grootte naarmate de ruis toeneemt.
- De FM, IFC, MIFC, EIFC, GOA, mediaan, gemiddelde en wiener filters smeren de aanwezige ruis eerder uit over het beeld waardoor vlekjes ontstaan. Visueel presteert de GOA filter hier het best, ook al wordt er meer textuur en detail weggefilterd.
- De SFC, SSFC, FIRE, DS-FIRE, PWL-FIRE, FDD, CK en gaussische filters verminderen de ruis wel, maar laten nog steeds een groot deel van de ruis ongefilterd.

## Algemeen

In het algemeen kunnen we besluiten we het volgende:

- De GOA filter steeds de beste resultaten levert op het vlak van MSE-waarden, en in vergelijking met de andere filters goede visuele resultaten oplevert.
- Ook de AWF2 behoort voor dit ruistype tot de beste filters. Dit weerspiegelt zich iets minder in de MSE-waarden, maar visueel zijn de resultaten van de AWF2 filter in het algemeen goed. Naarmate de ruis toeneemt begint het gefilterde beeld wel meer storende vlekjes te vertonen, maar het beeld blijft wel vrij scherp.

### 8.5.3 Samenvattende tabel

De bovenstaande bevindingen worden samengevat in Tabel 8.5.

	zout & peper ruis		gaussische ruis	
	laag	hoog	laag	hoog
<b>Numeriek</b> (top 5)	PWL-FIRE DS-FIRE FM SFC SSFC	AWFM2 AWFM1 WFM DS-FIRE IFC	GOA Wiener AWFM2 MIFC EIFC	GOA Gemiddelde IFC EIFC MIFC
<b>Visueel</b> (top 5)	de meeste filters presteren zeer goed	AWFM2 AWFM1 WFM DS-FIRE mediaan	AWFM2 GOA	AWFM2 GOA
<b>Globaal</b> (top 3)	AWFM2 DS-FIRE mediaan		AWFM2 GOA	

Tabel 8.5: Visuele resultaten: overzicht van de best presterende filters.

Uit de bekomen resultaten blijkt dat de GOA filter op het vlak van onderdrukking van gaussische ruis behoort tot de top van best presterende filters, hetgeen aangeeft dat we met de ontwikkeling van de GOA filter in ons oorspronkelijk opzet geslaagd zijn.

# Nawoord

We vatten de belangrijkste resultaten van dit proefschrift kort samen.

Hoofdstuk 1 was inleidend van aard en verzamelde de nodige begrippen en resultaten uit de vaagverzamelingenleer die voor het vervolg van het proefschrift nodig waren.

Hoofdstuk 2 behelsde de studie van twee vaagrelationele operatoren. In het bijzonder vermelden we:

- de introductie van twee vaagrelationele operatoren als contextvrije veralgemeningen van respectievelijk het vaag direct beeld en het vaag pseudo-superinvers beeld van een vaagverzameling onder een vaagrelatie;
- de zeer uitgebreide studie van de eigenschappen van de vaagrelationele beelden, met name eigenschappen m.b.t. bijzondere gevallen, dualiteit en codualiteit, monotoniteit, interactie met unie van vaagrelaties en vaagverzamelingen, interactie met doorsnede van vaagrelaties en vaagverzamelingen, interactie met translatie en schaling, expansiviteit en restrictiviteit, en interactie tussen beide vaagrelationele operatoren;
- de uiteenzetting en illustratie van het sterk uniformiserend karakter van de vaagrelationele operatoren, met name hun mogelijkheid om verschillende concepten en theorieën binnen het domein van de vaagverzamelingenleer te beschrijven.

Hoofdstuk 3 was het inleidend hoofdstuk m.b.t. het gedeelte over wiskundige morfologie, en was gewijd aan de studie van de binaire morfologie en twee klassieke modellen voor grijswaardemorfologie. Naast de bespreking van de representatie van binaire beelden en grijswaardebeelden en het geven van een overzicht van de voornaamste eigenschappen, vermelden we in het bijzonder nog de studie van de interactie-eigenschappen van de u-morfologische basisoperatoren met unie en doorsnede.

Hoofdstuk 4 bestond uit een vergelijkende studie van verschillende vaagmorfologische modellen. In het bijzonder vermelden we:

- de introductie en studie van de vaagmorfologische modellen gebaseerd op de vaaginclusies van Zadeh en Kitainik;
- de bespreking van zeven andere vaagmorfologische modellen, onderverdeeld in drie klassen (modellen gebaseerd op fuzzificatie van logische operatoren, modellen gebaseerd op vaaginclusie, en andere modellen);
- de uitgebreide studie naar de onderlinge verbanden tussen deze vaagmorfologische modellen;
- de uitgebreide studie naar de verbanden van de vaagmorfologische modellen met de binaire morfologie en de twee klassieke modellen voor grijswaardemorfologie;
- de selectie van het meest algemene vaaglogisch model voor morfologie (AVLM).

Hoofdstuk 5 was, gelet op de conclusie van Hoofdstuk 4, volledig gewijd aan de studie van de eigenschappen van het AVLM. In het bijzonder vermelden we:

- het onderzoek van het verband tussen de vaagmorfologische basisoperatoren en de vaagrelationele operatoren geïntroduceerd in Hoofdstuk 2;
- het onderzoek naar de eigenschappen van de vaagrelatie (in het kader van de vaagrelationele operatoren) geassocieerd met een structurelement (in het kader van de vaagmorfologische operatoren);
- de studie van de eigenschappen van het AVL<sub>M</sub>, met name eigenschappen m.b.t. bijzondere gevallen, dualiteit en codualiteit, monotoniteit, interactie met unie van structurelementen en beelden, interactie met doorsnede van structurelementen en beelden, interactie met translatie en schaling, expansiviteit en restrictiviteit, inclusie-eigenschappen, idempotentie, interactie tussen en combinaties van de vaagmorfologische operatoren, het principe van de lokale kennis, en de adjunctie-eigenschap. Deze eigenschappen werden grotendeels afgeleid uit corresponderende eigenschappen van de vaagrelationele operatoren, en geven aan of en hoe de eigenschappen van de binaire morfologie overgedragen kunnen worden naar een vaagmorfologie.

Hoofdstuk 6 bevatte de resultaten van onze studie van vaagadjuncties, die uitgevoerd werd in samenwerking met Prof. Heymans van het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Nederland. In het bijzonder vermelden we:

- het vastleggen van een zo algemeen mogelijk logisch kader voor de studie van vaagadjuncties;
- de introductie van het begrip vaagadjunctie;
- de uitgebreide studie naar de basiseigenschappen van vaagadjuncties, meer bepaald naar de overdraagbaarheid van eigenschappen van klassieke adjuncties naar eigenschappen van vaagadjuncties.

Hoofdstuk 7 behelsde de introductie en ontwikkeling van een vaaglogisch gebaseerde filter, met name de GOA filter, voor de onderdrukking van gaussische ruis. In het bijzonder vermelden we:

- de introductie van vaag-gradiëntwaarden om een onderscheid te maken tussen lokale variaties tengevolge van ruis en lokale variaties ten gevolge van beeldstructuren;
- het adaptief karakter van de filter, en het bepalen van de adaptieve parameter op basis van een verband tussen de homogeniteit van het beeld en een schatting van het ruisniveau;
- het onderzoek naar de invloed van de verschillende parameters op basis van experimenten.

Hoofdstuk 8 tenslotte rapporteert over een uitgebreide vergelijkende studie van vier klassieke en vijftien vaaglogisch gebaseerde filters. In het bijzonder vermelden we:

- het overzicht en de uitgebreide bespreking van klassieke, vaag-klassieke en zuiver vaaglogisch gebaseerde filters voor ruisonderdrukking;
- de classificatie van de besproken filters op basis van vijf theoretische criteria;
- de classificatie van de besproken filters op basis van hun performantie, meer bepaald op basis van zowel numerieke als visuele resultaten;
- de conclusie dat vaaglogisch gebaseerde filters in het algemeen beter presteren dan de zuiver klassieke filters;
- de conclusie dat de GOA filter onder de besproken filters de beste resultaten levert voor de onderdrukking van gaussische ruis, hetgeen aangeeft dat we met de constructie van deze filter in het oorspronkelijk opzet geslaagd zijn.

Sommige van deze resultaten werden gerapporteerd in verschillende internationale publicaties en tijdens verschillende voordrachten op internationale conferenties. We vermelden in het bijzonder:

- betreffende de vaagrelationele operatoren: [13, 47, 48, 50];
- betreffende de studie van klassieke en vaaglogisch gebaseerde modellen voor morfologie: [33, 44, 45, 46, 49, 51];
- betreffende de GOA filter: [74, 76]
- betreffende de vergelijkende studie van vaaglogische filters voor ruisonderdrukking: [52, 53, 54, 55].

Met deze samenvatting besluiten we dit proefschrift.



# Bibliografie

- [1] Arakawa K., Median filter based on fuzzy rules and its application to image restoration, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 77, 1996, pp. 3-13.
- [2] Arakawa K., Fuzzy rule-based image processing with optimization, in: Fuzzy Techniques in Image Processing (Kerre E.E. & Nachtgeael M., editors), Springer-Verlag, 2000, pp. 222-247.
- [3] Bandler W. & Kohout L., Fuzzy power sets and fuzzy implication operators, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 4, 1980, pp. 13-30.
- [4] Bloch I. & Maître H., Triangular norms as a tool for constructing fuzzy mathematical morphologies, in: Proceedings of the International Workshop on Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing, Barcelona, 1993, pp. 157-161.
- [5] Bloch I. & Maître H., Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study, in: Pattern Recognition, Vol. 28, No. 9, 1995, pp. 1341-1387.
- [6] Burillo P., Frago N. & Fuentes R., Generation of fuzzy mathematical morphologies, in: Mathware and Soft Computing, Vol. 8, 2001, pp. 31-46.
- [7] Cappelle B., Kerre E.E., Ruan D. & Vanmassenhove F.R., Characterization of binary operations on the unit interval satisfying the generalized modus ponens inference rule, in: Mathematica Pannonica, Vol. 2, 1991, pp. 105-121.
- [8] Choi Y., Krishnapuram R., Image enhancement based on fuzzy logic, in: IEEE Proceedings, 1995, pp.167-171.
- [9] De Baets B., Oplossen van vaagrelationele vergelijkingen: een ordetheoretische benadering, Doctoraatsproefschrift Universiteit Gent, promotor: Prof. Etienne Kerre, 1995.
- [10] De Baets B., Kerre E.E. & Gupta M.M., The fundamentals of fuzzy mathematical morphology - part 1: basic concepts, in: International Journal of General Systems, Vol. 23, 1995, pp. 155-171.
- [11] De Baets B., Model implicators and their characterization, in: Proceedings of the International ICSC Symposium on Fuzzy Logic (Steele N.C., editor), Zurich, 1995, pp. 42-49.
- [12] De Baets B., Fuzzy morphology: a logical approach, in: Uncertainty Analysis in Engineering and Sciences: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach (editors: B.M. Ayyub & M.M. Gupta), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997, pp. 53-67.
- [13] De Cock M., Nachtgeael M. & Kerre E.E., Images under fuzzy relations: a master-key to fuzzy applications, in: Proceedings of the Fourth International FLINS Conference (Brugge, België), 2000, pp. 47-54.
- [14] Demirli K. & De Baets B., A general class of residual operators, in: Proceedings of the Seventh IFSA Congress (Praag, Tsjechië, 1997, pp. 271-276.

- [15] Di Gesu V., Mathematical morphology and image analysis: a fuzzy approach, in: Proceedings of the International Workshop on Knowledge-Based Systems and Models of Logical Reasoning (Cairo, Egypte), 1988.
- [16] Di Gesu V., Mathematical morphology based on fuzzy operators, in: Fuzzy Logic (editors: R. Lowen & M. Roubens), Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 477-486.
- [17] Di Gesu V., Fuzzy Sets and Image Understanding, in: Proceedings of the First EUFIT Conference (Aken, Duitsland), 1993, pp. 1076-1082.
- [18] Di Gesu V., Maccarone M.C. & Tripiciano M., MMFUZZY: mathematical morphology based on fuzzy operators, in: in corso di stampa su Fuzzy Logic: State of the Art, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 29-32.
- [19] Di Gesu V. & Maccarone M.C., A fuzzy computation of the medial axis of gray level images, in: Proceedings of the Seventh IFSA World Congress (Praag, Tsjechië), 1997, pp. 221-226.
- [20] Farbiz F., Menhaj M.B. & Motamedi S.A., Edge Preserving Image Filtering based on Fuzzy Logic, in: Proceedings of the Sixth EUFIT conference (Aken, Duitsland), 1998, pp. 1417-1421.
- [21] Farbiz F. & M.B. Menhaj M.B., A fuzzy logic control based approach for image filtering, in: Fuzzy Techniques in Image Processing (Kerre E.E. & Nachtgeael M., editors), Springer-Verlag, 2000, pp. 194-221.
- [22] Fodor J.C., A new look at fuzzy connectives, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 57, 1993, pp. 141-148.
- [23] Fodor J.C. & Roubens M., Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [24] Fodor J.C., Contrapositive symmetry of fuzzy implications, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 69, 1995, pp. 141-156.
- [25] Grabisch M., Nguyen H.T. & Walker E.A., Fundamentals of uncertainty calculi with applications to fuzzy inference, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [26] Grabisch M., Mathematical morphology and fuzzy logic, in: Proceedings of the Third International Conference on Fuzzy Logic, Neural Networks and Soft Computing (Iizuka, Japan), 1994, pp. 349-350.
- [27] Grabisch M. & Schmitt M., Mathematical morphology, order filters and fuzzy logic, in: Proceedings of the Joint Conference of FUZZ-IEEE'95 and IFES'95 (Yokohama, Japan), 1995, pp. 2103-2108
- [28] Grossert S., Köppen M. & Nickolay B., A new approach to fuzzy morphology based on fuzzy integral and its application to image processing, in: Proceedings of ICPR'96 (Wenen, Oostenrijk), Vol. 2, 1996, pp. 625-630?
- [29] Haralick R.M., Sternberg S.R. & Zhuang X., Image analysis using mathematical morphology, in: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 9, No. 4, 1987, pp. 532-550.
- [30] Haussecker H. & Tizhoosh H., Fuzzy image processing, in: Handbook of Computer Vision and Applications, Vol. 2, Academic Press, 1999, pp. 708-753.
- [31] Heijmans H., Morphological image operators, Academic Press, London, 1994.
- [32] Kerre E.E. (editor), Introduction to the basic principles of fuzzy set theory and some of its applications, Communication and Cognition, Gent, 1993.



- [33] Kerre E.E. & Nachtegael M. (editors), Fuzzy techniques in image processing, Series Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 52, Springer Verlag, Heidelberg, 2000.
- [34] Kitainik L., Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
- [35] Kitainik L., Fuzzy implication and fuzzy inclusion: a comparative axiomatic study, in: Fuzzy logic (R. Lowen & M. Roubens, editors), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993, pp. 441-451.
- [36] Köhler L. & Jensch P., Fuzzy mathematical morphology, in: Proceedings of the Third EUFIT Conference (Aken, Duitsland), 1995, pp. 1386-1390.
- [37] Lee C.S., Kuo Y.H. & Yu P.T., Weighted fuzzy mean filters for image processing, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 89, 1997, pp. 157-180.
- [38] Lee C.S. & Kuo Y.H., Adaptive fuzzy filter and its application to image enhancement, in: Fuzzy Techniques in Image Processing (Kerre E.E. & Nachtegael M., editors), Springer-Verlag, 2000, pp. 172-193.
- [39] Lim J.S., Two-dimensional signal and image processing, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1990, pp. 536-540.
- [40] Mancuso M., De Luca R., Poluzzi R. & Rizzotto G.G., A fuzzy decision directed filter for impulsive noise reduction, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 77, 1996, pp. 111-116.
- [41] Minkowski H., Volumen und oberfläche, Math. Ann., Vol. 57, 1903, pp. 447-495.
- [42] Murofushi T. & Sugeno M., Fuzzy t-conorm integrals with respect to fuzzy measures: generalization of Sugeno integral and Choquet integral, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 42, 1991, pp. 57-71.
- [43] Nachtegael M., Implicatoren en andere logische operatoren op het eenheidsinterval, Licentiaatsthesis Universiteit Gent, promotor: Prof. Etienne Kerre, 1998.
- [44] Nachtegael M. & Kerre E.E., Different approaches towards fuzzy mathematical morphology, in: Proceedings of the Seventh EUFIT Conference (Aken, Duitsland), 1999, pp. 303-304.
- [45] Nachtegael M. & Kerre E.E., Fuzzy logical operators on finite chains, in: International Journal of General Systems, Vol. 29, Nr. 1, 2000, pp. 29-52.
- [46] Nachtegael M. & Kerre E.E., Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology, in: Fuzzy Techniques in Image Processing (Kerre E.E. & Nachtegael M., editors), Series Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer Verlag, Heidelberg, 2000, pp. 3-57.
- [47] Nachtegael M., De Cock M. & Kerre E.E., The four basic formulas: definitions, properties and applications, Intern Onderzoeksrapport (118 blzn.), Onderzoeksgroep Vaagheid- en Onzekerheidsmodellen, Universiteit Gent, 2000.
- [48] Nachtegael M., Radzikowska A.M. & Kerre E.E., On links between fuzzy morphology and fuzzy rough sets, in: Proceedings of the Eighth IPMU Conference (Madrid, Spanje), 2000, pp. 1381-1388.
- [49] Nachtegael M. & Kerre E.E., Decomposing and constructing of fuzzy morphological operations over alpha-cuts: continuous and discrete case, in: IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 8, Nr. 5, 2000, pp. 615-626.
- [50] Nachtegael M., De Cock M., Van der Weken D. & Kerre E.E., Fuzzy relational images in computer science, in: Proceedings of the International RELMICS Workshop (Tilburg, Nederland), 2001, pp. 156-170.

- [51] Nachtegael M. & Kerre E.E., Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies, in: *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 124, Nr. 1, 2001, pp. 73-86.
- [52] Nachtegael M., Van der Weken D., Van De Ville D., Kerre E.E., Philips W. & Lemahieu I., An overview of fuzzy and fuzzy-classical filters for noise reduction, in: *Proceedings (CD-ROM) of the Tenth FUZZ-IEEE Conference (Melbourne, Australië)*, 2001, pp. 3-6.
- [53] Nachtegael M., Van der Weken D., Van De Ville D., Kerre E.E., Philips W. & Lemahieu I., An overview of fuzzy filters for noise reductions, in: *Proceedings (CD-ROM) of the Tenth FUZZ-IEEE Conference (Melbourne, Australië)*, 2001, pp. 7-10.
- [54] Nachtegael M., Van der Weken D., Van De Ville D., Kerre E.E., Philips W. & Lemahieu I., A comparative study of classical and fuzzy filters for noise reduction, in: *Proceedings (CD-ROM) of the Tenth FUZZ-IEEE Conference (Melbourne, Australië)*, 2001, pp. 11-14.
- [55] Nachtegael M., Van der Weken D., Van De Ville D. & Kerre E.E., Fuzzy filters for image processing, *Series Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer Verlag, in voorbereiding.
- [56] Nguyen M. & Walker E., *A first course in fuzzy logic*, CRC Press Inc., New York, 1997.
- [57] Pawlak Z., Rough sets, in: *International Journal of Computer and Information Science*, Vol. 11, Nr. 5, pp. 341-356, 1982.
- [58] Beeldverwerking, *Cursusnota's Universiteit Gent (vakgroep Telecommunicatie en Informatieverwerking)*, editie 1999.
- [59] Popov A.T., Convexity indicators based on fuzzy morphology, in: *Pattern Recognition Letters*, Vol. 18, 1997, pp. 259-267.
- [60] Radzikowska A.M. & Kerre E.E., A comparative study of fuzzy rough sets, in: *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 126, 2002, pp. 137-156.
- [61] Ruan D., A critical study of fuzzy implication operators and their influence on approximate reasoning, in: *Introduction to the basic principles of fuzzy set theory and some of its applications* (editor: E.E. Kerre), *Communication and Cognition*, Gent, 1993, pp. 214-251.
- [62] Russo F. & Ramponi G., A fuzzy filter for images corrupted by impulse noise, in: *IEEE Signal proceedings letters*, Vol.3, No. 6, 1996, pp. 168-170.
- [63] Russo F. & Ramponi G., Removal of impulse noise using a FIRE filter, in: *IEEE Proceedings*, 1996, pp. 975-978.
- [64] Russo F., FIRE operators for image processing, in: *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 103, 1999, pp. 265-275.
- [65] Schweizer B. & Sklar A., Associative functions and statistical triangle inequalities, in: *Publ. Math. Debrecen*, Vol. 8, 1961, pp. 169-186.
- [66] Schweizer B. & Sklar A., *Probabilistic metric spaces*, Elsevier Science Publishing, New York, 1983.
- [67] Serra J., *Image analysis and mathematical morphology*, Academic Press Inc, Londen, 1982.
- [68] Sinha D. & Dougherty R., Fuzzification of set inclusion: theory and applications, in: *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 55, 1993, pp. 15-42.
- [69] Sinha D. & Dougherty E.R., A general axiomatic theory of intrinsically fuzzy mathematical morphologies, in: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 3, No. 4, 1995, pp. 389-403.
- [70] Smets P. & Magrez P., Implication in fuzzy logic, in: *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 1, 1987, pp. 327-347.

- [71] Soille P., Applications of morphological operators, in: Handbook of computer vision and applications, Vol. 3, Academic Press, London, 1999, pp. 283-296.
- [72] Sternberg S.R., Parallel Architectures for Image Processing, in: Proceedings of IEEE COMP-SAC, Chicago, 1979.
- [73] Trillas E. & Valverde L. On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic, in: Management decision support systems using fuzzy sets and possibility theory (Kapcprzyck J. & Yager R.R., editors), Verlag TUV Rheinland, Keulen, 1983, pp. 198-212.
- [74] Van De Ville D., Nachtegael M., Van der Weken D., Philips W., Lemahieu I. & Kerre E.E., A new fuzzy filter for gaussian noise reduction, in: Proceedings of the International EI'2001 SPIE Conference (San Jose, VS), 2001, pp. 1-9.
- [75] Van De Ville D., Lineaire, niet-lineaire en vaaglogische beeldinterpolatietechnieken, Doctoraatsproefschrift Universiteit Gent, Promotoren: Prof. I. Lemahieu & Prof. W. Philips, 2002.
- [76] Van De Ville D., Nachtegael M., Van der Weken D., Kerre E.E., Philips W. & Lemahieu I., Noise reduction by fuzzy image filtering, ingediend voor IEEE Transactions on Fuzzy Systems.
- [77] Weber S., A General Concept of Fuzzy Connectives, Negations and Implications based on t-norms and t-conorms, in: Fuzzy Sets and Systems, Vol. 11, 1983, pp. 115-134.
- [78] Zadeh L., Fuzzy Sets, in: Information Control, Vol. 8, 1965, pp. 338-353.