Computeralgebra in het Wiskundeonderwijs: een 'stelling' voor hogerop!

Sandy Van Wonterghem

Promotoren: Prof. A. Hoogewijs & Prof. N. Van den Bergh

Proefschrift voorgelegd aan de Faculteit Wetenschappen
van de Universiteit Gent tot het behalen van de graad van
Doctor in de Wetenschappen: Wiskunde

Universiteit Gent
Faculteit Ingenieurswetenschappen
Vakgroep Wiskundige Analyse
Onderzoeksgroep ARCO
Academiejaar 2006-2007

Voorwoord

Indien men een overzicht zou kunnen maken van de woorden die ik in dit doctoraatsproefschrift het vaakste gebruik, dan zouden de woorden **wiskunde**, **onderwijs** en **computer** heel hoog scoren. Het zijn zonder twijfel drie kernwoorden die mijn interessegebied kort en bondig samenvatten.

Ik kwam met deze drie verschillende aspecten voor het eerst in contact tijdens mijn eigen schooltijd. Ik heb altijd een voorliefde gehad voor het vak wiskunde en probeerde dit met veel enthousiasme over te brengen op mijn medeleerlingen. Het aspect 'computer' was in die tijd (eind jaren '80) nog niet verweven met de wiskunde. Ik gebruikte de computer uitsluitend voor tekstverwerking en experimenteerde thuis met een afgedankte Commodore 64. Pas in het laatste jaar van mijn humaniora (schooljaar 1991-1992) kwamen deze drie aspecten samen. Mevr. Van de Putte, mijn toenmalige leerkracht wiskunde, introduceerde Derive XM in de wiskundeles. We gebruikten Derive gedurende een drietal lesuren, maar doordat onze klasgroep slechts uit twee leerlingen bestond, leerden we tijdens deze lessen veel verschillende mogelijkheden van het computeralgebrasysteem kennen. Het pakket sprak mij enorm aan en ik had het heel graag mee naar huis genomen om daar verder te experimenteren!

Tijdens mijn opleiding tot licentiaat wiskunde kon ik mij tijdens het vak 'Computeralgebra' (gedoceerd door prof. A. Hoogewijs) verder verdiepen in de mogelijkheden van Derive. Bovendien kreeg ik tijdens mijn tweede licentie wiskunde (in het kader van mijn licentiaatsthesis en onder begeleiding van prof. A. Hoogewijs) de kans om de mogelijkheden van Derive voor het wiskundeonderwijs van de derde graad in kaart te brengen. Ik streefde hierbij naar een intensief maar zinvol gebruik van Derive in het wiskundeonderwijs, maar al snel bleek een academiejaar te kort om alle onderwerpen van het leerplan wiskunde onder handen te nemen. Ik beperkte mij noodgedwongen tot de onderwerpen 'analyse' en 'ruimtemeetkunde' [82].

Het zelf implementeren van ICT in de wiskundeles kwam er pas in 1998. Ik zal mijn eerste wiskundeles met ondersteuning van Derive XM nooit vergeten! Ik kreeg voor deze les zes afgedankte computers toegewezen die op een vensterbank van de refter en onder een dikke laag stof stonden te wachten op een gebruiker. Mijn klasgroep bestond uit 12 leerlingen uit de richting TSO Handel. Wiskunde was niet direct hun lievelingsvak, maar het was duidelijk dat ze mij en die computer toch een kans wilden geven. Voorzien van een volledig uitgeschreven werkblad gingen ze aan de slag. Al snel doken de eerste problemen op: de leerlingen verdwaalden in de verschillende menu's, gebruikten foutieve toetsencombinaties en worstelden met de syntaxis. Bovendien viel na tien minuten de stroom uit en was mijn zorgvuldig voorbereide les meteen afgelopen! Het gebruik van ICT in de wiskundeles was minder vanzelfsprekend dan ik oorspronkelijk had gedacht... Ik bleef echter niet bij de pakken neerzitten en samen met de leerlingen hebben we nog verschillende malen (en met meer succes) gebruik gemaakt van Derive tijdens de wiskundeles.

Toen ik op 1 februari 2001 bij de faculteit ingenieurswetenschappen aan de slag kon als assistent, ging ik op zoek naar een geschikt onderwerp voor een doctoraatsthesis. Al snel kwam ik via prof. A. Hoogewijs opnieuw terecht bij het gebruik van computeralgebra in het wiskundeonderwijs. Het heeft een paar maanden geduurd voor ik voor mezelf een concreet onderwerp (in dit uitgebreide vakgebied) had uitgezocht. Het waren uiteindelijk de obstakels die ik zelf had ondervonden in mijn wiskundelessen (m.b.t. de integratie van Derive) en de veranderingen die voelbaar werden in het secundair en hoger onderwijs (zie hoofdstuk 1) die ons deden besluiten om de invloed van het gebruik van computeralgebrasystemen op het leerproces van leerlingen te onderzoeken.

Ondertussen zijn er zes jaren verstreken en is het onderwijslandschap sterk gewijzigd (nieuwe leerplannen wiskunde, afschaffing van het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur, de plaats van ICT in het wiskundeonderwijs,...). We hebben geprobeerd om in ons onderzoek en in de aanpak van de onderzoeksvragen met elk van deze veranderingen rekening te houden. Binnen het (wiskunde)onderwijs blijven de veranderingen elkaar opvolgen. Ik hoop met dit onderzoek bij te dragen tot een positieve evolutie die aan het vak wiskunde de plaats geeft die het verdient.

Een doctoraatsonderzoek wordt in hoofdzaak uitgevoerd door de doctorandus. Zo hoort het ook, maar gelukkig kon ik tijdens mijn onderzoek rekenen op de hulp en steun van velen.

In eerste instantie wil ik prof. A. Hoogewijs danken voor het aanbrengen van dit interessante onderwerp. Bovendien wil ik hem en prof. N. Van den Bergh bedanken voor hun begeleiding gedurende deze periode, waarin ze mij de vrijheid boden om mijn eigen weg te zoeken en om op mijn eigen, ietwat eigenzinnige manier dit onderzoek uit te voeren.

Daarnaast ben ik heel veel dank verschuldigd aan alle wiskundeleerkrachten en lesgevers die aan dit proefschrift hebben meegewerkt. Hun ervaringen waren voor mij een grote bron van informatie en inspiratie. In het bijzonder wil ik een woord van dank richten tot de leerkrachten die hebben meegewerkt aan de onderwijsexperimenten en gedurende enkele maanden (of misschien wel voor altijd) vrijwillig hun lessen aanpasten aan mijn ideeën.

Ik wil langs deze weg ook prof. F. De Clercq en Tine Beernaert danken voor het ter beschikking stellen van het VWO-cijfermateriaal en mijn collega's, in het bijzonder Nele en Benny, voor hun technische hulp bij het oplossen van enkele TeX-problemen.

En ten slotte, wil ik mijn man Stijn, mijn ouders, schoonouders en vrienden bedanken voor hun steun, hun hulp en voor het opvangen van de kinderen in tijden van nood. Het schrijven van deze tekst was, in combinatie met mijn huidige onderwijsopdrachten, een zware klus. Hun hulp maakten de typische laatste en zware loodjes net iets draaglijker. Bedankt allemaal!

Sandy Van Wonterghem
Gent, 16 augustus 2007.

Inhoudsopgave

Lijst van tabellen

Lijst van figuren

Acroniemen

ASO	:	Algemeen secundair onderwijs
BSO	:	Beroepssecundair onderwijs
CAS	:	Computeralgebrasysteem
GO	:	Gemeenschapsonderwijs
GRM	:	Grafische rekenmachine
GRT	:	Grafisch rekentoestel
HLT	:	Hypothetisch leertraject
HO	:	Hoger onderwijs
ICT	:	Informatie- en communicatietechnologie
KSO	:	Kunst secundair onderwijs
OGO	:	Officieel gesubsidieerd onderwijs
OLC	:	Open leercentrum
SRM	:	Symbolische rekenmachine
SO	:	Secundair onderwijs
TSO	:	Technisch secundair onderwijs
VGO	:	Vrij gesubsidieerd onderwijs
VWO	:	Vlaamse wiskunde olympiade
WRM	:	Wetenschappelijke rekenmachine

Hoofdstuk 1

Onderzoeksonderwerp en -vragen

1.1 Inleiding

In dit proefschrift brengen we verslag uit van het onderzoek dat we de afgelopen zes jaar hebben uitgevoerd. Het onderwerp van dit proefschrift behoort tot het brede domein van 'computeralgebra in het wiskundeonderwijs' en wordt opgedeeld in twee subonderwerpen: de invloed van het gebruik van computeralgebrasystemen (CAS) op het leerproces van leerlingen en de integratie van ICT (en in het bijzonder CAS) in het Vlaamse wiskundeonderwijs. Deze twee subonderwerpen resulteerden in twee onderzoeken. Deze beide onderzoeken werden grotendeels onafhankelijk van elkaar uitgevoerd, maar zijn toch op bepaalde punten aan elkaar gelinkt. De tekst van dit proefschrift zal bijgevolg bestaan uit twee delen waarbij elk deel beschouwd kan worden als de rapportage van een deelonderzoek.

In het vervolg van dit hoofdstuk zullen we voor beide delen de problemen en/of bedenkingen aanhalen die aan de oorsprong van de deelonderzoeken liggen. Vervolgens formuleren we vanuit deze problemen en hun hypothetische oplossingen of bedenkingen de onderzoeksvragen die we tijdens ons onderzoek probeerden te beantwoorden.

1.2 Deel I: CAS en het leerproces van leerlingen

Vanuit het secundair onderwijs, het hoger onderwijs en de media konden we tegenstrijdige signalen waarnemen met betrekking tot het wiskundeniveau van leerlingen en studenten (zie hoofdstuk 2).

- De populariteit van en het aantal leerlingen in de 'zware' wiskundige richtingen van het secundair onderwijs (met acht of meer wekelijkse lestijden wiskunde) daalde gestaag.

- De wiskundige creativiteit, het probleemoplossende vermogen en het algemene wiskundige inzicht van de instromende studenten in de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur (en andere opleidingen met een zware wiskundige onderbouw) nam af. Bovendien was er een grotere diversiteit merkbaar tussen de instromende studenten.

- Toch bleken de Vlaamse leerlingen op het vlak van wiskunde en wiskundige geletterdheid nog steeds tot de wereldtop te behoren.

In de opleiding Ingenieurswetenschappen van de Universiteit Gent zocht men voor het dalende wiskundeniveau van de studenten en voor het opvangen van hun onderlinge diversiteit oplossingen onder de vorm van een intensieve studentenbegeleiding die jaar na jaar verder werd uitgebreid. Men kan zich echter ook de vraag stellen of er geen oplossingen bestaan om deze negatieve trend al in het secundair onderwijs met extra middelen of een andere aanpak weg te werken.

In de (internationale) literatuur werd reeds aandacht besteed aan de invloed van het gebruik van computer en grafische rekentoestellen op bepaalde facetten van het leerproces van leerlingen en studenten. Vooral de instrumentele benadering van computeralgebra leek een veelbelovende invalshoek en kon ons een theoretisch kader verschaffen waartegen we de interacties tussen de leerlingen en de ICT-hulpmiddelen kunnen onderzoeken. Kan de integratie van ICT-hulpmiddelen en in het bijzonder het efficiënte en intensieve gebruik van computeralgebrasystemen een mogelijke oplossing zijn voor het vastgestelde probleem? We besloten om deze denkpiste binnen het domein van 'computeralgebra in het wiskundeonderwijs' verder te onderzoeken en op zoek te gaan naar een antwoord op de volgende onderzoeksvragen:

1. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen het wiskundige inzicht van de leerlingen verbeteren?*

2. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen de probleemoplossende vaardigheden en de wiskundige creativiteit van leerlingen (en in het bijzonder de ontwikkeling van instrumentatieschema's) positief beïnvloeden?*

De zoektocht naar concrete antwoorden op deze twee onderzoeksvragen verliep via twee onderwijsexperimenten die uitgevoerd werden op een experimentele groep van laatstejaarsleerlingen uit het ASO met zes wekelijkse lestijden wiskunde per week. Voor de uitbouw en organisatie van deze onderwijsexperimenten hanteerden we de methode van het ontwikkelingsonderzoek.

1.3 Deel II: CAS en het Vlaamse wiskundeonderwijs

Vanuit de eigen leservaringen in het secundair en hoger onderwijs konden we vaststellen dat de integratie van ICT (en i.h.b. van CAS) in het wiskundeonderwijs een moeilijk en traag proces was dat enerzijds getypeerd werd door enthousiaste lesgevers die intensief gebruik maakten van ICT en anderzijds door tegenstanders die het gebruik ervan vermeden.

We besloten in 2001 om met behulp van een steekproef een inventaris op te maken van het ICT-gebruik in het Vlaamse secundair onderwijs en door deze actie in 2005 te herhalen en uit te breiden naar het hoger onderwijs een antwoord te zoeken op de volgende vraag:

3. *Ondersteunen de Vlaamse wiskundeleerkrachten hun wiskundelessen met ICT-hulpmiddelen? Hoe is de integratie van ICT in het Vlaamse wiskundeonderwijs geëvolueerd tussen 2001 en 2005?*

Uit de resultaten van deze steekproeven bleek o.a. dat het ICT-gebruik van de wiskundeleerkrachten onderling sterk verschilde op het vlak van intensiteit en werkvorm. Deze vaststellingen en de ervaringen uit de beide onderwijsexperimenten inspireerden ons tot een vierde onderzoeksvraag:

4. *Welke plaats neemt het gebruik van ICT in in het huidige wiskundeleerplan van de derde graad ASO en op welke manier kan het aandeel van het gebruik van een computeralgebrasysteem in dit leerplan nog uitgediept worden?*

1.4 De structuur van het proefschrift

Dit proefschrift bestaat uit 8 hoofdstukken en vier bijlagen. Zoals vermeld in de inleiding werd ons onderzoek en bijgevolg ook deze tekst opgedeeld in twee delen.

Het eerste deel vindt men terug in de hoofdstukken 2 tot en met 5. In hoofdstuk 2 gaan we dieper in op de tegenstrijdige signalen vanuit enerzijds het secundair en hoger onderwijs en anderzijds vanuit de PISA- en TIMSS-onderzoeken die aan de basis lagen van de onderzoeksvragen 1 en 2. In hoofdstuk 3 schetsen we het theoretische kader (nl. de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra) en de didactische principes die de ruggensteun vormen van ons onderzoek. In hoofdstuk 4 behandelen we de gebruikte methodologie (nl. ontwikkelingsonderzoek). In hoofdstuk 5 beschrijven we het ontwikkelingsonderzoek in de praktijk en analyseren we de verkregen resultaten. Ten slotte gaan we na in welke mate deze resultaten een antwoord bieden op de onderzoeksvragen 1 en 2.

Het tweede deelonderzoek wordt behandeld in de hoofdstukken 6 en 7. In hoofdstuk 6 beschrijven we uitvoerig de organisatie en resultaten van de verschillende rondvragen die we uitwerkten voor het secundair en hoger onderwijs. We gaan na in welke mate we - vanuit de verkregen resultaten - een antwoord kunnen formuleren op onderzoeksvraag 3. In hoofdstuk 7 nemen we het huidige leerplan wiskunde van de derde graad ASO onder de loep en breiden we het aandeel van computeralgebra maximaal uit. De nadruk zal hierbij liggen op intensief en efficiënt gebruik van computeralgebra in de wiskundeles. Dit alles zal resulteren in een antwoord op onderzoeksvraag 4.

In hoofdstuk 8 sluiten we af met een eindconclusie.

Hoofdstuk 2

Tegenstrijdige signalen

De metafoor van de 'schrijnwerker'

"Jullie willen steeds kwaliteitsmeubels afleveren. Vroeger kregen jullie daarvoor van ons eiken planken. Nu stellen jullie je tevreden met grenenhout. Binnenkort lever ik - als ik de nieuwe filosofie volg - spaanderplaten. Als jullie daar een vijs indraaien, hebben jullie gegarandeerd een 'gat'."

R. Van Meerssche, leerkracht wiskunde

2.1 Inleiding

In dit tweede hoofdstuk bekijken we een aantal 'signalen' die aan de basis liggen van de onderzoeksvragen 1 en 2 (zie paragraaf 1.2). In paragraaf 2.2 illustreren we aan de hand van enkele getuigenissen van wiskundeleerkrachten en -docenten twee tendensen uit het secundair onderwijs: het afnemende leerlingenaantal in de 8 uurs-richtingen van het ASO en het dalende wiskundeniveau. In paragraaf 2.3 bekijken we de resultaten van de Vlaamse Wiskunde Olympiade (van 2003 tot 2006) en gaan we in dit cijfermateriaal op zoek naar indicaties van het dalende wiskundeniveau. In de paragrafen 2.4 en 2.5 bekijken we respectievelijk de resultaten van PISA2000 en PISA2003 en van TIMSS 2003 voor Vlaanderen. Wordt de negatieve evolutie in het wiskundeniveau van de Vlaamse leerlingen bevestigd in de resultaten van deze internationale studies? Ten slotte bekijken we in paragraaf 2.6 de resultaten van het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur (van 2001 tot 2003) en de studieresultaten van de generatiestudenten uit de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur van de Universiteit Gent (van 2001-2002 tot 2003-2004) ten opzichte van hun wiskundige achtergrond. Ook in deze data gaan we op zoek naar aanwijzingen en eventuele gevolgen van het afnemend leerlingenaantal in de 8 uurs-richtingen en van het dalende wiskundeniveau.

2.2 Evoluties in het secundair onderwijs

Op het eind van de jaren '90 en in het begin van de 21ste eeuw zakte het aantal leerlingen dat een richting met acht uur wiskunde per week volgde aanzienlijk. Vele scholen zagen zich genoodzaakt om de leerlingen met zes en acht lesuren wiskunde per week samen in één klasgroep onder te brengen en hen gedurende vier of zes gemeenschappelijke lesuren het vak wiskunde te laten volgen. Andere scholen gingen nog een stap verder en beslisten om de richtingen met acht wekelijkse lestijden wiskunde niet meer in te richten. Concrete cijfers die deze tendensen aantonen, zijn niet beschikbaar. Vanuit de discussies die gevoerd werden op het wiskundeforum van Yahoo en vanuit de rondvraag die we in 2001 organiseerden (zie ook paragraaf 6.2) konden we evenwel een aantal meningen en ervaringen van leerkrachten aangaande deze materie noteren:

- "Door het minder zware ingangsexamen burgerlijk ingenieur zullen nog minder leerlingen geneigd zijn om de acht uur wiskunde te volgen. Misschien kan het hoger onderwijs proberen om de richtingen met zware wiskunde aantrekkelijker te maken en de leerlingen van het vijfde en zesde jaar ASO meer te informeren." (2001)
- "De 8-uren waren geen populaire richting. Voor de ouders was het niet zo duidelijk dat bijvoorbeeld de Latijn-Wiskunde van nu, niet de Latijn-Wiskunde van vroeger was, maar dat je echt wel de acht uur moest volgen. Nu is er nog weinig kapstok om het verschil 6-8 uit te leggen. Ik vrees dat op niet zo lange termijn de 8-uur wel eens zou kunnen verdwijnen." (2002)
- "Ik zie een duidelijke verandering bij de jongeren. Ze hebben zoveel te doen naast de school. Ze geven bovendien gemakkelijk op als het een beetje moeilijk wordt en hebben soms de mentaliteit 'als het niet lukt, proberen we wel iets anders'." (2001)

Behalve deze getuigenissen - naar aanleiding van het afnemend leerlingenaantal in de 8 uurs-richtingen en de uiteindelijk afschaffing ervan - konden we ook een aantal opmerkingen van lesgevers verzamelen in verband met het dalende wiskundeniveau in het secundair onderwijs:

- ”Ik geef les aan een pak (6 uurs-)leerlingen die nooit voor ingenieur zullen studeren. Ik ervaar hun gebrek aan grondige kennis van afgelijnde technieken, hun onvermogen om de wiskundetaal te schrijven en te lezen, hun onvermogen om vraagstukken te lezen, te analyseren, in symbolentaal om te zetten en op te lossen. Alles moet worden voorgedaan en liefst meerdere keren. De jaarlijkse confrontatie met mijn eisen in het vijfde jaar lijkt de eerste weken dan ook eerder op een veldslag. Het komt over alsof ik ’andere wiskunde’ geef... Het trekken en sleuren om die kadees op een bepaald niveau te brengen (kennis van de materie, studiemethode, werkattitude, orde, nauwkeurigheid,...) vraagt elk jaar meer en meer energie! En precies van die generatie wordt steeds meer en meer verwacht.” (2003)

- ”Indien het gebruik van ICT het louter exemplarisch denken gaat aanmoedigen (want heel veel leerlingen zijn beeldcultuurleerlingen geworden) is er iets fout. Voor veel leerlingen is het zien van een bepaalde eigenschap voldoende. De abstractie, de diepgang, het wiskundig denken komt dan pas op de tweede plaats. De leerlingen die een hogere studie gebaseerd op exacte wetenschappen willen volgen, gaan daar het slachtoffer van zijn.” (2001)

- ”Het gevaar voor het wiskundeonderwijs vind ik wel dat men te veel de richting uitgaat van het wiskundeonderwijs in Nederland: alles moet vanuit toepassingen vertrekken en de leerlingen moeten als het ware elke eigenschap opnieuw uitvinden. We moeten een evenwicht vinden tussen toepassingen, ook met ICT, en het bijbrengen van de fundamenten en het abstract redeneren.” (2001)

- ”Was dit dan een zo moeilijke vraag? Wel het antwoord zal afhangen naar gelang de persoon aan wie je het vraagt. De deelnemers zullen ongetwijfeld de vraag, een meetkundevraag in twee delen waar telkens een bewijs werd gevraagd, als supermoeilijk bestempelen. De jury, en met hen de coördinatoren, waren echter zeer verrast door deze slechte uitslag. Zou het kunnen dat we in ons onderwijssysteem wiskundige bewijzen achterwege laten? (...) Moeten we kortom niet opletten dat we in ons wiskundeonderwijs niet teveel aandacht gaan schenken aan de zogenaamde ’realistische benaderingen’ waarbij wiskunde rechtstreeks ervaringsgericht moet zijn?” (2005, F. De Clerck, [22], p. 206)

Andere leerkrachten vinden deze evolutie in het wiskundeonderwijs niet zo dramatisch en zien dit eerder als een verschuiving van het abstract redeneren, nl. van het secundair naar het hoger onderwijs: ”Het echt abstract denken en werken met algebraïsche structuren enzovoort is voor sommigen ook wel belangrijk (masters wiskunde, fysica of burgerlijk ingenieur), maar ik denk dat dit echt leerstof is voor de hogere studies.” (2005).

2.3 Vlaamse Wiskunde Olympiade

Zowel in het secundair onderwijs (zie 2.2) als in het hoger onderwijs (zie 2.6) constateren de lesgevers dat het wiskundeniveau van de leerlingen en de generatiestudenten daalt. Kunnen we deze tendens ook vaststellen vanuit de resultaten die de leerlingen behalen op de Vlaamse Wiskunde Olympiade?

We konden de statistische gegevens inkijken van de eerste ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade van 2003 tot en met 2006. We wilden deze gegevens enerzijds gebruiken om de resultaten van de leerlingen uit de richtingen met zes en acht uur wiskunde per week naast elkaar te plaatsen en anderzijds om de jaargangen onderling met elkaar te vergelijken. We konden op basis van de geleverde bestanden tabel 2.1 samenstellen.

	2003		2004		2005		2006	
	6u	8u	6u	8u	6u	8u	6u	8u
$\overline{X}$	66,85	78,99	60,70	75,62	65,61	78,04	62,90	73,03
σ	16,97	19,57	19,39	22,63	17,92	22,46	17,92	20,99
n	4455	4551	4301	4189	4731	3507	5357	2941
Totaal	9006		8490		8238		8298	

Tabel 2.1: Gemiddelde score (op 150), standaardafwijking en aantal deelnemers: de eerste ronde VWO

Uitgaande van tabel 2.1 kunnen we niet beweren dat er sprake is van een verlaging van het wiskundeniveau in de richtingen met zes of acht uur wiskunde per week. De gemiddelde score voor beide cohorten schommelt van jaar tot jaar. De verschillen tussen de leerlingen met zes of acht uur wiskunde per week zijn ongeveer even groot en worden hoofdzakelijk veroorzaakt door fluctuaties in de moeilijkheidsgraad van de verschillende jaargangen.

In het schooljaar 2004-2005 werd in de derde graad van het algemeen secundair onderwijs een nieuw leerplan wiskunde ingevoerd waarmee officieel een eind kwam aan de afdelingen met acht wekelijkse lestijden wiskunde. De gevolgen hiervan zijn duidelijk af te lezen uit tabel 2.1:

1. Het aantal leerlingen uit de 8 uurs-richtingen dat deelneemt aan de eerste ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade neemt (logischerwijs) af. Deze afname komt evenwel niet volledig op rekening van de richtingen met zes uur wiskunde per week. Het totale aantal leerlingen uit de 6 en 8 uurs-richtingen samen neemt af, met uitzondering van een kleine opflakkering/heropleving in 2006.

2. Tussen 2003 en 2005 varieerde het verschil tussen de gemiddelde score van de leerlingen uit de afdelingen met zes en acht uur wiskunde per week, tussen 12,14 en 14,92 punten. In 2006 was dit nog slechts 10,13 punten. Dit kleinere verschil wordt vermoedelijk veroorzaakt doordat de 6 uurs-richtingen meer ’sterkere’ leerlingen bevatten dan voordien - met name die leerlingen die anders een richting met acht uur wiskunde hadden gekozen.

Alhoewel het cijfermateriaal van de afgelopen vier jaar de dalende tendens in het secundair onderwijs niet onmiddellijk bevestigt, blijkt uit de (foutieve) antwoorden van de leerlingen toch vaak dat bepaalde kennis, inzichten en technieken verloren gaan. Tant onderzoekt en becommentarieert in het tijdschrift *Wiskunde & Onderwijs* elk jaar de resultaten en de vragen van de eerste en tweede ronde van de Junior Wiskunde Olympiade en de Vlaamse Wiskunde Olympiade die het vaakst foutief worden beantwoord. We illustreren onze stelling met een aantal van zijn bevindingen:

- ”De leerlingen zijn niet meer vertrouwd met het symbool $\circ$ voor het samenstellen. (...) Het formeel definiëren van de begrippen ’even’ en ’oneven’ functie is wellicht niet paraat gekend. (...) Vandaar wellicht ook dat bijna de helft blanco antwoordt.” (Tant, [71], p. 158)

- ”We stellen vast dat onze leerlingen (zelfs uit de zes en acht uur) het oplossen van een dubbele ongelijkheid samen met een aantal vrij elementaire algebraïsche berekeningen niet meer met potlood en papier kunnen uitvoeren.” (Tant, [71], p. 159)

- ”Nu het grafisch exploreren en manipuleren van grafieken vanaf de tweede graad meer en meer aan bod komt en beter ondersteund kan worden door de beschikbaarheid van ICT-middelen, zou je kunnen verwachten dat er op een dergelijke vraag (i.v.m. snijpunten van rechten en parabolen) beter gescoord wordt.” (Tant, [71], p. 161)

- ”Met het oplossen van dergelijke irrationale en goniometrische vergelijkingen zijn leerlingen niet meer vertrouwd. (...) Bij die vragen hebben leerlingen misschien wel hun grafische rekenmachine of computer erg gemist.” (Tant, [72], p. 162)

- ”De leerstof omtrent stelsels - nodig om vraag 8 op te lossen - is onvoldoende gekend. De leerstof verdient meer aandacht, temeer omdat ze zeer nuttig is in het hoger onderwijs.” (Tant, [73], p. 64)

- ”De reden van de slechte score kan ook liggen bij de probleemoplossende vaardigheden. Omdat een afstand gevraagd wordt, komen de leerlingen niet op het idee om tijdsintervallen te vergelijken. Ze proberen rechtstreeks naar de oplossing toe te werken en denken alleen in termen van afstanden.” (Tant, [74], p. 160)

- ”Voor velen is ruimtemeetkunde een zorgenkind en de leerstof, nodig om dit probleem op te lossen, komt meestal pas op het einde van het zesde jaar aan bod. (...) Ook de vlakke meetkunde ligt niet goed in de markt en voor sommigen is het een herinnering uit een ver verleden.” (Tant, [75], p. 167-168)

- ”Onmiddellijk na de finale waren de finalisten en hun leraars down, de stemming was bedrukt, wat achteraf gezien terecht bleek uit de behaalde punten. De olympiadevragen, geruggensteund door de eindtermen, gaven een duidelijk signaal dat bewijzen en redeneren niet verwaarloosd mogen worden.” (Tant, [76], p. 261)

2.4 PISA2000 en PISA2003

2.4.1 Inleiding

Vanuit het secundair en hoger onderwijs vingen we signalen op die aangaven dat het wiskundeniveau van de Vlaamse leerlingen daalde. Er waren evenwel ook positieve signalen waarneembaar die in de media breed werden uitgesmeerd. De resultaten van de PISA-onderzoeken voor Vlaanderen werden door de media vertaald als "Vlamingen wereldkampioen wiskunde" (Het Nieuwsblad, 07/12/2004). Wat houden deze PISA-onderzoeken concreet in? En zijn onze leerlingen dan toch (allemaal) wiskundige bollebozen?

In deze paragraaf gaan we kort in op de PISA-onderzoeken. We bekijken voor het domein wiskundige geletterdheid de resultaten van de Vlaamse leerlingen en illustreren a.d.h.v. een voorbeeld hoe wiskundige geletterdheid zich verhoudt t.o.v. wiskunde.

Voor een volledige beschrijving van de resultaten van de Vlaamse leerlingen in PISA2000 en PISA2003 verwijzen we naar [23] en [25].

2.4.2 Methodologisch kader en domeinen

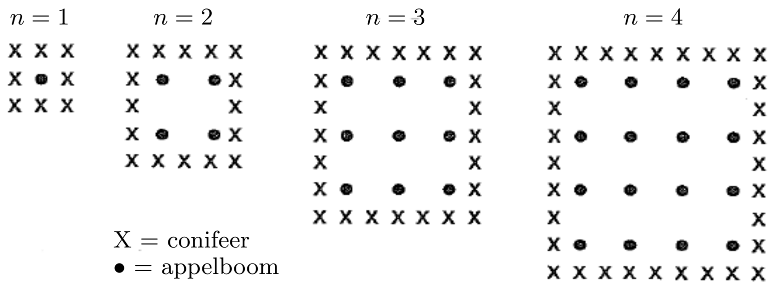
PISA (*Program for International Student Assessment*) is een instrument om internationaal de resultaten van onderwijssystemen te onderzoeken en te vergelijken. De eerste cyclus van dit OESO[1]-onderzoek werd in 2000 ingericht in 32 landen. Er werden metingen uitgevoerd naar de competenties van 15-jarige leerlingen in drie verschillende domeinen: leesvaardigheid, wiskundige geletterdheid en wetenschappelijke geletterdheid. Hierbij werd de nadruk gelegd op de capaciteiten die jongeren bezitten om kennis en vaardigheden toe te passen in realistische situaties. Meer dan 265.000 leerlingen vulden in hun scholen een testboekje en een achtergrondlijst over zichzelf in. De scholen gaven extra achtergrondinformatie. De PISA-achtergrondvragenlijst peilde bij de leerlingen ook naar hun leerstrategieën, de sterkte van hun motivatie, hun oordeel over hun competenties en hun leervoorkeuren. Daarnaast bood het PISA-onderzoek de deelnemende landen ook de mogelijkheid om een aantal stellingen over computers en ICT in hun leerlingenvragenlijst op te nemen. Vlaanderen maakte van deze mogelijkheid gebruik en de gegevens over het pc- en ICT-gebruik zullen in paragraaf 6.4 bekeken worden.

[1] Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling

In PISA2000 lag de nadruk op het domein leesvaardigheid, maar ook de wiskundige geletterdheid van onze 15-jarige leerlingen werd onderzocht. **Wiskundige geletterdheid** wordt binnen de PISA-onderzoeken gedefinieerd als: "het vermogen om de rol van wiskunde in het dagelijks leven in te schatten, om goed gefundeerde beslissingen te nemen en om wiskunde te gebruiken op manieren die tegemoet komen aan de noden van het leven van een persoon als constructieve, betrokken en denkende burger."

Voorbeeld[2]:
Een boer plant appelbomen in een vierkant patroon. Om de bomen tegen de wind te beschermen plant hij coniferen rondom de boomgaard.

Hieronder zie je een tekening van deze situatie waarbij je het patroon van appelbomen en coniferen ziet; n is het aantal rijen appelbomen.



VRAAG 1
Vul de tabel in:

n	Aantal appelbomen	Aantal coniferen
1	1	8
2	4	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...

[2]bron: [23], p. 28-29

VRAAG 2
Er zijn twee formules die je kunt gebruiken om het aantal appelbomen en het aantal coniferen te berekenen zoals die in het bovenstaande patroon beschreven zijn:
Aantal appelbomen: n^2
Aantal coniferen: $8n$
waarbij n het aantal rijen met appelbomen is.
Er bestaat een waarde voor n waarbij het aantal appelbomen gelijk is aan het aantal coniferen. Hoe groot is die waarde van n? Laat zien hoe je dat hebt berekend.

VRAAG 3
Stel je nu voor dat de boer een veel grotere boomgaard wil maken met heel veel rijen bomen. Als de boer de boomgaard groter maakt, wat zal dan sneller toenemen: het aantal appelbomen of het aantal coniferen? Leg uit hoe je het antwoord gevonden hebt.

Zoals blijkt uit het bovenstaande voorbeeld gaat wiskundige geletterdheid niet over het beheersen van wiskunde binnen het schoolcurriculum of m.a.w.:

$$\boxed{\text{WISKUNDIGE GELETTERDHEID} \neq \text{WISKUNDE}}$$

In 2003 werd de tweede cyclus van de PISA-onderzoeken uitgevoerd. Het aantal landen dat deelnam was deze keer 41 (waarvan 30 OESO-landen). Er werden internationaal ongeveer 276.000 15-jarige leerlingen getest. In PISA2003 was wiskundige geletterdheid het hoofddomein, maar ook de domeinen leesvaardigheid en wetenschappelijke geletterdheid werden in deze cyclus onderzocht. Naast deze drie 'vaste' domeinen werd in deze cyclus ook het probleemoplossende vermogen van de leerlingen getest. **Probleemoplossen** werd binnen PISA gedefinieerd als "de vaardigheid om cognitieve processen te gebruiken bij het aanpakken en oplossen van levensechte curriculumoverschrijdende problemen waarbij de oplossing niet voor de hand ligt en waarbij de te gebruiken vaardigheden niet behoren tot één enkel domein van wiskunde, wetenschappen of lezen".

2.4.3 Resultaten van de Vlaamse leerlingen

In 2000 haalden de Vlaamse 15-jarigen schitterende resultaten in deze studie: Vlaanderen behoorde voor wiskundige geletterdheid tot de top drie en geen enkel land behaalde significant betere prestaties.
De score van Vlaanderen voor wiskundige geletterdheid was in 2003 zo mogelijk nog beter: "In PISA2003 heeft Vlaanderen voor wiskundige geletterdheid de hoogste gemiddelde score van alle deelnemende landen. (...) Toch blijven de Vlaamse wiskunderesultaten opmerkelijk, omdat Vlaanderen er nog op vooruitgaat in vergelijking met PISA2000, terwijl de gemiddelde score ook toen al erg hoog was." ([25], p. 4). Maar de gemiddelde prestaties van de landen voor het domein wiskundige geletterdheid van PISA2003 kunnen niet zomaar vergeleken worden met hun gemiddelde prestaties voor wiskundige geletterdheid van PISA2000. Slechts indien we gaan kijken op het niveau van de subschalen kunnen we (met de nodige voorzichtigheid) een vergelijking opmaken.

Zowel in 2000 als in 2003 werden de leerlingen getest in de subschaal 'vorm en ruimte'. Vlaanderen behaalde in dit subniveau de vierde plaats. Voor Vlaanderen liggen de prestaties significant hoger dan de resultaten in PISA2000. Deze goede score is voornamelijk toe te schrijven aan het hoge percentage hoogpresteerders.
In de tweede subschaal 'relaties en verandering' haalde Vlaanderen de hoogste gemiddelde score. Ook dit resultaat is voornamelijk te danken aan een grote groep van hoogpresteerders.
Ook voor de nieuwe subschaal 'hoeveelheid' behaalden de Vlaamse leerlingen de hoogste gemiddelde score, maar voor deze subschaal is geen vergelijking mogelijk met de resultaten van PISA2000. In een gemiddeld OESO-land zijn er in vergelijking met de andere subschalen net iets minder 15-jarigen die uitblinken en dit is ook in Vlaanderen het geval, maar toch behaalt Vlaanderen ook in deze subschaal het grootste percentage hoogpresteerders.

Een laatste kwart van de testitems in PISA2003 had betrekking op 'onzekerheid'. In de rangschikking volgens de gemiddelde score haalde Vlaanderen de tweede plaats. Deze hoge positie van Vlaanderen is enigszins verrassend, want algemeen wordt aangenomen dat de Vlaamse leerplannen bij 15-jarigen minder aandacht besteden aan kansrekenen en statistiek dan in de andere landen. Dit resultaat bevestigt bijgevolg het verschil tussen wiskundige geletterdheid en wiskunde (m.b.t. de inhoudelijke doelstellingen van de leerplannen wiskunde).

Ook voor het domein probleemoplossen behaalde Vlaanderen een goede gemiddelde score en een mooie vierde plaats. Geen enkel land scoorde significant hoger dan Vlaanderen. Dit goede resultaat voor het domein probleemoplossen kan nagenoeg volledig verklaard worden door de goede prestaties op de domeinen leesvaardigheid, wiskundige geletterdheid en wetenschappelijke geletterdheid.

2.4.4 Conclusie

De goede resultaten van onze 15-jaringen in de PISA-onderzoeken is een prestatie waar we terecht trots mogen op zijn. De goede resultaten bevestigen dat onze leerlingen beter worden in het toepassen van aspecten van de wiskunde in realistische situaties. Dit toont aan dat ons wiskundeonderwijs inderdaad evolueert in de richting van de 'realiteitsgebonden wiskunde'. De vraag blijf echter of dit een goede zaak is voor de wiskundekennis en het wiskundig inzicht van onze leerlingen.

2.5 TIMSS 2003

2.5.1 Inleiding

In de voorgaande paragraaf gingen we kort in op de resultaten van de PISA2003 voor Vlaanderen. De hoge gemiddelde score van de Vlaamse leerlingen voor wiskundige geletterdheid werd in de media vrij vertaald als "Vlamingen wereldkampioen wiskunde" (Het Nieuwsblad, 07/12/2004). Amper een week later en op basis van de resultaten van een andere internationale studie TIMSS 2003 waren de krantenkoppen minder positief: "Schoolse wiskundelessen slaan niet meer aan" en "Pure kennis brokkelt af" (De Standaard, 15/12/2004). Is er hier sprake van een tegenstrijdigheid of onderzocht men in PISA2003 en TIMSS 2003 verschillende domeinen?

In deze paragraaf bekijken we kort de resultaten van de Vlaamse leerlingen in de internationale studie TIMSS 2003. Voor een volledige beschrijving van de resultaten van de Vlaamse leerlingen in TIMSS 2003 verwijzen we naar [56], [57] en [78].

2.5.2 Methodologisch kader en domeinen

TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) is een studie die de prestaties van leerlingen voor wetenschappen en wiskunde in kaart brengt. De leerlingen worden getest in 'fourth grade' en 'eight grade', wat zich voor Vlaanderen vertaalt naar het vierde jaar lager onderwijs en het tweede jaar secundair onderwijs. De leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs werden eveneens getoetst in 1995 en 1999, waardoor een vergelijking mogelijk is. Over de verschillende cycli heen namen in totaal meer dan 500.000 leerlingen uit 56 landen deel aan TIMSS.

De TIMSS-toets, die bij de leerlingen peilt naar hun kennis en inzicht in begrippen, hun denkprocessen en de beheersing van vaardigheden, werd ontwikkeld op basis van een referentiedocument dat de vigerende gemeenschappelijke leerdoelen wiskunde en wetenschappen in kaart brengt. We kunnen bijgevolg stellen dat TIMSS complementair is aan PISA, omdat de testitems dichter aanleunen bij het onderwijscurriculum.

In het vervolg van deze paragraaf bekijken we uitsluitend het domein wiskunde voor het tweede jaar secundair onderwijs. Wiskunde werd opgedeeld in vijf deeldomeinen die op hun beurt opgesplitst werden in verschillende onderdelen:

1. Getallen: natuurlijke getallen; breuken en decimalen; gehele getallen; proporties, verhoudingen en procenten
2. Algebra: patronen; algebraïsche uitdrukkingen; vergelijkingen en formules; relaties
3. Metingen: kenmerken en eenheden; hulpmiddelen, technieken en formules
4. Meetkunde: lijnen en hoeken; twee- en driedimensionale vormen; congruentie en gelijkvormigheid; plaatsbepalingen en ruimtelijke relaties; symmetrie en transformaties
5. Data (gegevens): verzameling en organisatie van gegevens; voorstelling van gegevens; interpretatie van gegevens; onzekerheid en waarschijnlijkheid

Zoals reeds eerder gesteld, leunen de testitems uit de verschillende deeldomeinen dicht aan bij het leerplan wiskunde. We illustreren dit met twee wiskundevragen[3] uit TIMSS 2003.

[3] bron: [78], p. 027-028

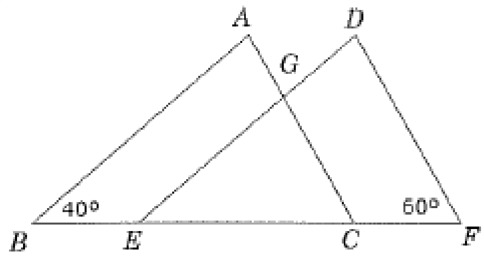
Voorbeeld 1:

Als $\frac{12}{n} = \frac{36}{21}$, dan is n gelijk aan

A. 3
B. 7
C. 36
D. 63

Voorbeeld 2:

In deze figuur zijn de driehoeken ABC en DEF congruent, met $|BC| = |EF|$. Hoe groot is de hoek E$\hat{\mathrm{G}}$C?



A. 20°
B. 40°
C. 60°
D. 80°
E. 100°

Alle leerlingen vulden ook een vragenlijst in. De betrokken wiskundeleerkrachten en de directies gaven eveneens extra achtergrondinformatie. Deze bijkomende gegevens stellen de organisatoren in staat om de factoren te identificeren die de prestaties van de leerlingen positief of negatief beïnvloedden. Zo werd o.a. de factor 'beschikken over een pc' onderzocht. Deze factor wordt in paragraaf 6.4 besproken.

2.5.3 Resultaten van de Vlaamse leerlingen

We beperken ons tot de resultaten van de Vlaamse leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs en dit voor het domein wiskunde.
Voor wiskunde neemt Vlaanderen de zesde plaats in op de ranglijst, na vijf Oost-Aziatische landen die significant beter presteren. Bovendien scoren de Vlaamse leerlingen voor alle deelgebieden van wiskunde significant hoger dan het internationale gemiddelde. Onze leerlingen halen hun beste score voor 'data en getallen' terwijl 'algebra' en 'meetkunde' hun zwakste deelgebieden zijn.

De scores van TIMSS 1995, 1999 en 2003 werden met behulp van een statistische techniek (IRT-methode) op een gezamenlijke schaal gebracht zodat de prestaties over de jaren heen vergeleken kunnen worden.
Vlaanderen toont een significante negatieve trend en dit ten opzichte van de metingen wiskunde uitgevoerd in 1999 en in 1995. Indien men vervolgens kijkt naar de deeldomeinen en naar de items die zowel in 1999 als in 2003 bevraagd werden, blijkt dat het percentage leerlingen dat de wiskunde-items correct oplost in 2003 lager lag dan in 1999. Voor alle deelgebieden van de wiskunde (behalve 'data') is dit verschil significant.

Om een zinvolle beschrijving te kunnen geven van de leerprestaties wiskunde werden vier internationale standaarden ingevoerd: gevorderde standaard, hoge standaard, tussenliggende standaard en lage standaard. Een goed resultaat voor een land wordt in grote mate beïnvloed door de hoge scores van een top- of middengroep, maar dit mag uiteraard niet ten koste gaan van de zwakkere leerlingen. Vlaanderen slaagt, samen met Nederland en twee Oost-Aziatische landen en in vergelijking met alle andere landen, er het best in om zo veel mogelijk leerlingen minstens de lage standaard te doen bereiken. 95% van de Vlaamse leerlingen haalde in TIMSS 2003 de lage standaard. Het internationale gemiddelde bedroeg 84%. Toch kunnen we ook hier voor Vlaanderen een negatieve evolutie waarnemen. In 1995 en 1999 behaalden relatief meer leerlingen de internationale lage standaard, nl. respectievelijk 96% en 97%.

2.5.4 Conclusie

De Vlaamse leerlingen uit het tweede jaar secundair onderwijs behoren voor het domein wiskunde tot de wereldtop. In vergelijking met TIMSS 1995 en 1999 vertonen de resultaten echter een negatieve trend.

2.6 Eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur 2001-2004

2.6.1 Inleiding

In deze paragraaf bekijken we de resultaten van het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur (van 2001 tot 2003) en de studieresultaten van de studenten uit de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur van de Universiteit Gent (van 2001-2002 tot 2003-2004) ten opzichte van hun wiskundige achtergrond. We gaan in deze data op zoek naar aanwijzingen en eventuele gevolgen van het afnemend leerlingenaantal in de 8 uurs-richtingen en het dalende wiskundeniveau.

De afgelopen zes academiejaren konden we tijdens de wiskundelessen in de gewezen 'eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur' en het huidige 'eerste jaar bachelor in de ingenieurswetenschappen' constateren dat het aanvangsniveau van de generatiestudenten daalde en dat de diversiteit tussen de studenten onderling jaar na jaar toenam. Deze evolutie kan men uiteraard niet volledig op rekening stellen van het secundair onderwijs. Ook de versoepeling en de uiteindelijk afschaffing van het toelatingsexamen speelden hierin een grote rol.

Vanaf het academiejaar 2001-2002 tot met het academiejaar 2003-2004 konden we gebruik maken van de resultaten van het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur en de examenresultaten van de studenten uit de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur van de Universiteit Gent om deze evolutie in beeld te brengen. In deze paragraaf zullen we ons beperken tot de belangrijkste cijfers en conclusies van dit nevenonderzoek. Voor een uitgebreid verslag verwijzen we naar [14] en [15].

2.6.2 Organisatie van het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur: evolutie

Het 'Decreet op het Universitair Onderwijs' van 1991 stelde dat om toegelaten te worden tot de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur, men moest slagen voor een interuniversitair overlegd en erkend toelatingsexamen. De concrete implementatie van dit toelatingsexamen werd overgelaten aan de universiteitsbesturen of meer bepaald aan de Faculteiten Toegepaste Wetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven, de Universiteit Gent en de Vrije Universiteit Brussel.

Onder maatschappelijke druk besloten deze drie Vlaamse Faculteiten Toegepaste Wetenschappen om vanaf het jaar 2001 de inhoud en de organisatie van het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur drastisch te wijzigen: een beperkte examenleerstof geput uit de leerstof wiskunde van de afdelingen met zes uur wiskunde per week van het algemeen secundair onderwijs. Concreet werd het toelatingsexamen teruggebracht tot twee examens: module A (algebra en ruimtemeetkunde) en module B (analyse). De bedoeling van deze vernieuwing was om ook de leerlingen uit de 6 uurs-richtingen een ruime kans te bieden om de studies van burgerlijk ingenieur aan te vangen en dit met een reële slaagkans in de eerste kandidatuur. Er was immers geconstateerd dat een eerdere verruimingspoging, waarbij men de examenleerstof voor het toelatingsexamen beperkte tot de onderwerpen uit het leerplan van de 6 uurs-richtingen, niet was geslaagd.

Met dit korte nevenonderzoek wilden we een (voorzichtig) antwoord formuleren op de volgende twee vaak gestelde vragen:

1. Hoeveel studenten afkomstig uit richtingen met zes lesuren wiskunde per week nemen er deel aan het vernieuwde toelatingsexamen en wat is hun slaagpercentage?

2. Hoe presteren deze studenten uiteindelijk in het eerste jaar van hun studie burgerlijk ingenieur?

2.6.3 Het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur: 2001-2003

In deze paragraaf gaan we op zoek naar een antwoord op de volgende vraag: "Hoeveel studenten uit de afdelingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde namen tussen 2001 en 2003 deel aan het toelatingsexamen en wat was hun slaagpercentage?".

Resultaten

	2001[4]		2002		2003	
	6u	8u	6u	8u	6u	8u
Ingeschreven studenten[5]	14,4% (65)	83,2% (377)	14,6% (140)	77,7% (744)	16,5% (154)	73,9% (691)
Slaagpercentage na 2 zittijden	56,9%	89,7%	51,6%	82,7%	56,0%	83,5%

Tabel 2.2: Het toelatingsexamen burgerlijk ingenieur 2001-2003

Conclusie

In juli 2001 en 2002 lag het deelnemerspercentage van de '6-urigen' aan het vernieuwde toelatingsexamen burgerlijk ingenieur op ongeveer 14%. In 2003 was dit gestegen tot ruim 16%. Dit is een duidelijke stijging t.o.v. het vroegere gemiddelde cijfer van 9%. Bovendien zijn de slaagpercentages van deze groep 'mooi' te noemen, zeker na beide examenperiodes. Het slaagpercentage van de ingeschreven studenten uit de 6 uurs-richtingen ligt aanzienlijk hoger dan de traditionele 20 à 35% uit de voorgaande jaren.

Een eerste voorzichtige conclusie: de vernieuwing heeft haar doelstelling bereikt want er zijn meer deelnemers uit de 6 uurs-richtingen dan vroeger, er zijn meer geslaagden uit de 6 uurs-richtingen dan vroeger en ze halen bovendien een aanvaardbaar slaagpercentage (evenwel na twee zittijden).

[4]Voor 2001 beperken we ons tot het cijfermateriaal van Gent; voor 2002 en 2003 hadden we ook de resultaten van Brussel, Heverlee en Kortrijk ter beschikking.

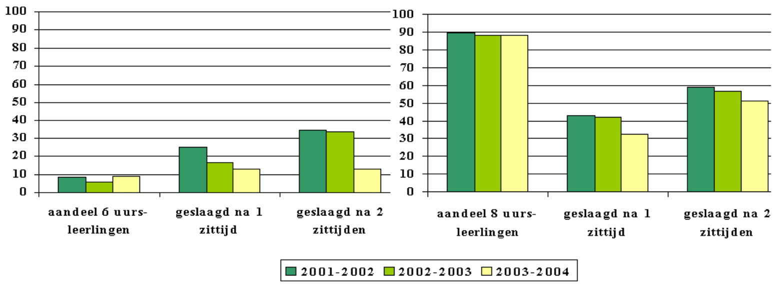
[5]Elke student die zich inschreef voor het toelatingsexamen werd beschouwd als een **deelnemer**.

2.6.4 De eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur

Het vernieuwde toelatingsexamen burgerlijk ingenieur had als doelstelling om ook leerlingen uit de 6 uurs-richtingen de kans te bieden om de studies van burgerlijk ingenieur aan te vangen. Hebben deze studenten evenwel een reële slaagkans in de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur en hoe evolueert het totale slaagpercentage?

Resultaten

In figuur 2.1 en tabel 2.3 worden het procentuele aandeel van de verschillende cohorten en hun slaagpercentages naast elkaar geplaatst.



Figuur 2.1: De eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur 2001-2004 (generatiestudenten)

Discussie en conclusie

In tabel 2.3 vindt men het totale slaagpercentage na twee zittijden terug en een overzicht van de resultaten van de generatiestudenten uit de afdelingen met zes of acht wekelijkse lestijden wiskunde (voor de academiejaren 2001-2002, 2002-2003 en 2003-2004).

Behalve generatiestudenten uit de afdelingen met zes of acht wekelijkse lestijden wiskunde bevat de totale studentenpopulatie van de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur ook nog een beperkt aantal studenten uit afdelingen met vier, vijf, zeven of negen lesuren wiskunde per week, studenten die een aanvullend jaar wiskunde hebben gevolgd en studenten die hun eerste kandidatuur overzitten.

	2001-2002		2002-2003		2003-2004	
Totale slaagpercentage na twee zittijden	57,4% (213)		54,4% (166)		46,8% (119)	
	6u	8u	6u	8u	6u	8u
Generatiestudenten	8,1% (32)	89,6% (329)	5,9% (18)	88,1% (267)	9,1% (23)	88,1% (222)
Geslaagd na één zittijd	25,0% (8)	43,2% (142)	16,7% (3)	42,3% (113)	13,0% (3)	32,4% (72)
Geslaagd na twee zittijden	34,4% (11)	59,3% (195)	33,3% (6)	56,6% (151)	13,0% (3)	51,4% (114)
Gemiddelde score wiskunde[6]	8,34	10,62	9,59	11,76	9,36	10,58
Gemiddelde score wetenschappen[7]	9,66	11,81	10,04	12,19	9,92	11,57

Tabel 2.3: De eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur 2001-2004 (generatiestudenten)

[6]Wiskunde: discrete wiskunde, algebra, meetkunde en wiskundige analyse I, II en III (resultaat op 20)

[7]Wetenschappen: informatica, natuurkunde en scheikunde I en II (resultaat op 20)

Voor het academiejaar 2001-2002 telde de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur slechts 25 overzitters. Deze overzitters presteerden in hun bis- of trisjaar slechter dan de generatiestudenten. In het academiejaar 2002-2003 en 2003-2004 noteerden we een recordaantal overzitters, nl. respectievelijk 84 en 81 studenten. Deze studenten scoorden opmerkelijk beter dan de vorige lichtingen overzitters en behaalden na twee (bijkomende zittijden) een slaagpercentage van respectievelijk 69,0% en 61,7%.

We kunnen uit de bovenstaande data dus vaststellen dat

1. de studenten uit de afdelingen met zes uur wiskunde per week het in de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur als groep moeilijker hebben dan de studenten uit de richtingen met acht uur wiskunde per week,
2. het slaagpercentage van de totale groep generatiestudenten gestaag daalt en i.h.b. het slaagpercentage van 2003-2004 significant lager ligt ($\alpha = 0,05$) dan het slaagpercentage van het voorgaande academiejaar,
3. de groep 6-urigen in de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur relatief klein blijft en in de tweede kandidatuur zelfs heel klein wordt en
4. dat er een nieuw fenomeen ontstaat: studenten kiezen vaker voor een leertraject voor de eerste kandidatuur burgerlijk ingenieur verspreid over twee jaar.

2.7 Conclusie

Het onderwerp van dit proefschrift situeert zich in het brede domein van 'computeralgebra in het wiskundeonderwijs'. Vanuit het secundair onderwijs, het hoger onderwijs en de media konden we tegenstrijdige signalen waarnemen en dit voor de beide aspecten uit ons onderzoeksdomein:

- Wiskundeonderwijs:
  - De populariteit van en het aantal leerlingen in de 'zware' wiskundige richtingen van het secundair onderwijs (met acht of meer wekelijkse lestijden wiskunde) daalde gestaag.
  - De wiskundige creativiteit en het probleemoplossend vermogen van de instromende studenten was duidelijk afgenomen en bovendien was er een grotere diversiteit merkbaar tussen de instromende studenten,

meer bepaald voor de opleidingen met een zware wiskundige onderbouw.
  - En toch bleken onze leerlingen - vooral voor het domein van de wiskundige geletterdheid maar ook voor wiskunde - tot de wereldtop te horen.

- Computeralgebra: (zie hoofdstuk 6)
  - De integratie van ICT (i.h.b. CAS) in het Vlaamse wiskundeonderwijs bleek een moeilijk en traag proces dat enerzijds getypeerd werd door enthousiaste lesgevers die intensief gebruik maakten van ICT en anderzijds door tegenstanders die het gebruik van ICT vermeden of het gebruik ervan steeds uitstelden.

Tijdens de eigen lespraktijk waren de veranderingen bij de generatiestudenten merkbaar tijdens de lessen en de evaluaties. Het ontbrak onze studenten niet zozeer aan wiskundige voorkennis, maar hun wiskundig inzicht, hun probleemoplossende vaardigheden en hun wiskundige creativiteit moesten verder en dieper ontwikkeld worden.
In de opleiding Ingenieurswetenschappen van de Universiteit Gent zocht men voor het dalende wiskundeniveau van de studenten en voor het opvangen van hun onderlinge diversiteit oplossingen onder de vorm van een intensieve studentenbegeleiding die jaar na jaar verder werd uitgebouwd. De vraag stelde zich of er geen mogelijkheid bestond om dit probleem reeds in het secundair onderwijs aan te pakken en of de integratie van ICT-hulpmiddelen en in het bijzonder het efficiënte en intensieve gebruik van computeralgebrasystemen en wiskundige software een mogelijke oplossing kon zijn. We besloten om deze denkpiste binnen het domein van 'computeralgebra in het wiskundeonderwijs' en tegen het theoretische raamwerk van de instrumentele benadering van computeralgebra verder te onderzoeken en op zoek te gaan naar een antwoord op de volgende onderzoeksvragen:

1. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen het wiskundig inzicht van de leerlingen verbeteren?*
2. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen (en in het bijzonder de ontwikkeling van instrumentatieschema's) de probleemoplossende vaardigheden en de wiskundige creativiteit van leerlingen positief beïnvloeden?*

In het volgende hoofdstuk schetsen we het theoretische kader (nl. de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra) en de didactische principes die de ruggensteun vormen van ons onderzoek. Dit theoretische gedeelte van het eerste onderzoeksgedeelte wordt vervolgens in hoofdstuk 4 afgewerkt met een bespreking van de gekozen methodologie, nl. het ontwikkelings- of ontwerponderzoek.

Hoofdstuk 3

Theoretisch kader

"Je kan niet leren wat rekenen is
zonder, helder van geest en bewust
en niet op een automatische manier,
enkele berekeningen te maken."

Georges Papy, [60], p. 332

3.1 Inleiding

In de hoofdstukken 1 en 2 hebben we het onderwerp van dit proefschrift afgelijnd en de oorsprong van de onderzoeksvragen 1 en 2 (zie 2.7) geschetst. Alvorens we kunnen overgaan tot het eigenlijke onderzoek (m.n. de onderwijsexperimenten) en het beantwoorden van de onderzoeksvragen, is het belangrijk om een onderzoeksmethodiek en een passend theoretisch kader te kiezen of op te stellen.

Tijdens onze literatuurstudie gingen we op zoek naar artikels en ervaringen van onderzoekers die binnen het ruime onderzoeksdomein 'het gebruik van computers in het onderwijs' en het specifiekere onderzoeksdomein 'het gebruik van computeralgebrasystemen in het wiskundeonderwijs' een onderzoek of onderwijsexperiment hadden opgezet. Een grote meerderheid van deze artikels konden we verdelen over de volgende twee categorieën:

- *Computer as tutor*: met behulp van een computer en aangepaste software wordt een leeromgeving gecreëerd waarbinnen de leerlingen elk op hun eigen ritme en door de computer worden onderwezen

- *Computer as tool*: in deze visie wordt de computer beschouwd als een interactief artefact dat de gebruiker helpt bij het uitvoeren van een taak.

Bennett [10] verdedigt in zijn werk het gebruik van de computer als privéleraar. Hij haalt tal van voordelen aan: onderwijs op maat van de leerling, een computer kan onmiddellijk en gericht feedback geven, een computer heeft tijd en geduld, een computer kent geen vooroordelen,... Maar: een computer kan de efficiëntie van een oplossingsmethode niet beoordelen, een computer is ongevoelig voor creativiteit en schoonheid, een computer kent enkel fout of juist, een computer kan een leerkracht nooit vervangen,... Omdat creativiteit en het (efficiënt) oplossen van problemen centraal staan in onze tweede onderzoeksvraag en we er bovendien niet van overtuigd zijn dat de 'computer als privéleraar' kan werken in het secundair onderwijs, verdiepten we ons in de visie van 'computer als hulpmiddel'. We bekeken de theoretische kaders die deze onderzoekers hadden opgesteld of gekozen en de onderzoeksmethodologie die ze hadden gevolgd. Via het werk van Drijvers [30] kwamen we in contact met de methode van het ontwikkelingsonderzoek en de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra. We besloten om ook in ons onderzoek de methode van het ontwikkelings- of ontwerponderzoek toe te passen. Een bespreking van de kenmerken en de verschillende fases van ontwerponderzoek vindt men terug in hoofdstuk 4. De methodiek in de onderzoekspraktijk wordt besproken in hoofdstuk 5.

Ook de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra werd behouden. Uit de verschillende artikels (van hoofdzakelijk Franse onderzoekers) was gebleken dat deze theorie ons een veelbelovend kader verschafte waarbinnen we de interactie tussen de leerlingen en het computeralgebrasysteem zouden kunnen onderzoeken. In de volgende paragraaf wordt de instrumentele benadering en onze persoonlijke invulling van de verschillende begrippen uitvoerig besproken.

Alhoewel de theorie van de instrumentele benadering ons een passend theoretisch raamwerk verschafte voor de uitvoering van ons onderzoek kan deze theorie niet volstaan voor het opzetten van een onderwijsexperiment. Onderwijs wordt immers steeds ondersteund met vakspecifieke didactiek. In het bijzonder kan men het gebruik van computeralgebra in het wiskundeonderwijs ondersteunen met een aantal eigen didactische principes. In paragraaf 3.3 bespreken we vijf didactische principes die men gelijktijdig of afwisselend kan hanteren tijdens wiskundelessen met computerondersteuning (of algemeen met ICT-ondersteuning).

Voor de eigenlijke onderwijsexperimenten zullen we ons in hoofdzaak baseren op twee van deze didactische principes (zie hoofdstuk 5).

3.2 De instrumentele benadering van het gebruik van CAS

3.2.1 Inleiding

In het begin van de jaren '90 werd het gebruik en de integratie van computeralgebrasystemen en grafische rekentoestellen in het wiskundeonderwijs onderzocht vanuit de visie dat bij de aanwending van deze hulpmiddelen het technische en het conceptuele volledig van elkaar gescheiden zijn (*technical-conceptual cut*). Men vertrok hierbij van de hypothese dat de computeralgebrasystemen het grootste deel van de berekeningen van de leerlingen zouden overnemen (via commando's en procedures) en dat de leerlingen hierdoor onmiddellijk zouden kunnen werken op het conceptuele niveau. Men was er bovendien van overtuigd dat door deze strikte scheiding tussen het technische en het conceptuele de integratie van ICT een 'natuurlijk' proces zou zijn.

In 1990 stelde het Franse ministerie van Onderwijs een nationale werkgroep samen bestaande uit ongeveer 15 wiskundeleerkrachten. Deze leerkrachten hadden als taak om de mogelijkheden van computeralgebrasystemen (en in het bijzonder van Derive) voor het wiskundeonderwijs te ontdekken, om lesmateriaal te ontwikkelen en hiermee te experimenteren en om de invloed van het gebruik van computeralgebrasystemen op het lesgebeuren te onderzoeken. In 1993 riep het ministerie van Onderwijs de hulp in van een onderzoeksteam gespecialiseerd in didactiek van de wiskunde (onder leiding van Artigue). Deze onderzoekers moesten nauw samenwerken met de nationale werkgroep en het gebruik van CAS in het secundaire onderwijs in kaart brengen. Vertrekkende vanuit de vaststelling dat de integratie van computertechnologie in het Franse wiskundeonderwijs een langzaam proces was, opteerde deze onderzoeksgroep voor een onderwijsexperiment (zie [3]). De resultaten van de onderwijsexperimenten van de Franse onderzoeksgroep bevestigden enerzijds dat het gebruik van computeralgebrasystemen in het wiskundeonderwijs in een goed doordachte context het leren van wiskunde kan ondersteunen en kan helpen om de interesse van de leerlingen voor wiskunde te laten opleven:

> "They (the results) tend to confirm that using CAS in a well-thought-out context can support the learning of mathematics and help to liven up school mathematics with interesting activities, even for beginners in algebra. They also tend to prove that students' assumptions about Derive are strongly dependent on teachers' didactic choices as well as on the students' mathematical abilities." (Artigue & Lagrange, [3], p. 111).

Anderzijds kwamen deze onderzoekers tot de vaststelling dat dit theoretische kader niet volstond. Uit hun observaties bleek dat het beperken van de wiskundige activiteit voor de leerlingen (nl. door het overnemen van het rekenwerk) niet steeds gepaard ging met het overgaan naar een hoger wiskundig niveau:

> "Didactic situations have to be carefully designed and managed as the use of CAS can as well reduce students' mathematical activity, by taking over their usual technical work without moving them to higer levels of activity. We would like to point out that, from this point of view, common literature devoted tot CAS may be misleading as it often neglects to identify the conditions required for making full use of the theorietical potential of CAS." (Artigue & Lagrange, [3], p. 111).

Deze Franse CAS-onderzoekers vonden geen enkel bestaand en onmiddellijk toepasbaar theoretisch raamwerk en ontwierpen empirisch een eigen theorie. Ze werden sterk beïnvloed door het werk van Vérillon en Rabardel betreffende de instrumentatie (de zogenaamde ergonomische benadering[1]) en door de antropologische benadering[2] in de didactiek van Chevallard. De samenvoeging van deze twee benaderingen leidde tot de theorie van de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen, die ze gebruikten om de interactie tussen de leerlingen/studenten en de technologische omgeving te onderzoeken in het Franse wiskundeonderwijs.

Kunnen we dit theoretische kader overnemen en gebruiken om de integratie van ICT in het Vlaamse wiskundeonderwijs te onderzoeken? Volgens sommige (niet-Franse) onderzoekers is deze stap niet vanzelfsprekend.

[1] De **ergonomie** is de wetenschap die de aanpassing van de werkomstandigheden aan de mens bestudeert.

[2] **Antropologie** is de wetenschap die de lichamelijke en geestelijke kenmerken van de mens onderzoekt.

> "Can this work be used to improve the learning and teaching of mathematics? Improvement of the learning and teaching of mathematics is the touchstone for scholarship and research, or else such work is merely 'academic'. I would like to note, however, that I do not believe scholarship or research can be applied directly to further research or curriculum development outside of the domain or country in which that research originated; the local situations matter a great deal. All that scholarship and research can do is inform design." (Monaghan, [54], p. 9)

Enige voorzichtigheid is uiteraard aangewezen, maar toch zijn we er stellig van overtuigd dat de instrumentele benadering ook voor het Vlaamse wiskundeonderwijs een theoretisch kader kan bieden om de wisselwerking tussen de leerlingen en ICT te onderzoeken. Het is net de combinatie van technische en conceptuele aspecten binnen de instrumentatieschema's die deze theorie veelbelovend maakt. Haspekian formuleerde het als volgt:

> "This instrumental frame allows analysing instrumental geneses (both personal and institutional ones) as well as studying their didactic assistance. These issues play an essential role in the problems of integrating computer technologies into education. (...) The relationships between the technical and the conceptual part of mathematics should be thought in terms of dialectics rather than opposition." (Haspekian, [36], p. 119)

Deze interessante maar complexe theorie werd in vele artikels besproken en becommentarieerd. De auteurs geven vaak een verschillende interpretatie aan de vaste begrippen (hulpmiddel, instrument, schema, techniek,...). Zoals blijkt uit een discussienota van het derde CAME symposium te Reims [31] liggen de taalverschillen (Frans versus Engels), de vele nuances in de betekenissen van de termen en de verschillende denkwijzen van de onderzoekers aan de basis van deze minimale verschillen.

In het vervolg van deze paragraaf zullen we de instrumentele benadering uitvoerig bespreken. Vooreerst definiëren we een aantal basisbegrippen, schetsen we het ontstaan en de verschillende peilers waarop deze benadering steunt en ten slotte bespreken we de complexiteit maar ook de kracht van dit theoretische kader aan de hand van de eigenschappen van een aantal belangrijke elementen: instrumentele genese, instrumentatieschema's, instrumentatie en instrumentalisatie, geïnstrumenteerde technieken en orkestratie.

3.2.2 De basisbegrippen op een rij

Een **artefact** is een voorwerp dat werd ontworpen met een bepaald doel (of doelen) voor ogen maar dat ook voor andere doeleinden kan gebruikt worden. Zo gebruiken we doorgaans een potlood om te schrijven, tekenen of kleuren, maar men kan een potlood ook gebruiken als bladwijzer. De klasse van artefacten bevat niet enkel en alleen materiële voorwerpen maar bijvoorbeeld ook rekenregels en algoritmes.

Een **hulpmiddel** (*tool*) is een artefact waarvan het object (d.i. de gebruiker) weet hoe en waarvoor hij/zij het artefact kan gebruiken, doordat het object het hulpmiddel reeds heeft gebruikt of doordat het object gezien heeft hoe een ander object dit doet.

Een **instrument** is een gemengde eenheid en bestaat deels uit een artefact of uit een hulpmiddel[3] (meer bepaald het voorwerp waarop het gebaseerd is) en deels uit een mentaal schema. Beide delen zijn gerelateerd aan de situatie en de taken waarvoor het instrument wordt gebruikt.

Instrumentale genese is de benaming die men geeft aan het proces waarbij een beschikbaar artefact, een kaal stuk gereedschap of hulpmiddel, zich ontwikkelt tot een bruikbaar en nuttig instrument. Tijdens het eigenlijke proces zal de gebruiker persoonlijke plannen (schema's) ontwikkelen of reeds bestaande plannen aanwenden.

De benaming **technieken** wordt gebruikt voor de verzameling van bewegingen, handelingen, methodes, redeneringen en procedures die een object kan aanwenden om een taak of probleem op te lossen.

3.2.3 De instrumentele benadering: oorsprong

De instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen gaat terug op de ideeën van Vygotsky. In de theorie van deze Russische psycholoog en filosoof vinden we twee elementen die hier van belang zijn.
In zijn theorie stelt Vygotsky enerzijds dat personen en hulpmiddelen - zowel

[3]In de definitie van het begrip **instrument** vertrekt men - afhankelijk van onderzoeker tot onderzoeker - van een artefact of van een hulpmiddel. Dit lijkt ons inziens echter niet tot verschillende begrippen te leiden en beide interpretaties kunnen dan ook naast elkaar gebruikt worden.

materiële als cultureel-historische (bv. taal en symbolen) - de rol van 'mediator' op zich kunnen nemen en een brug kunnen bieden tussen de leerling en de stimuli uit zijn omgeving. Het is de actie die teweeg gebracht wordt door deze hulpmiddelen, die de externe sociale wereld rond de mens (of het kind) linkt aan zijn of haar interne mentale proces en medieert in het proces van interpersoonlijke kennis naar intrapersoonlijke kennis.
Anderzijds was Vygotsky van mening dat kinderen zichzelf onderwijzen door interactie met de wereld en met (belangrijke) volwassenen [32]. Net zoals de constructivisten vond hij dat kinderen leren van hun eigen activiteiten maar hij zag daarbij de discussies met de volwassenen rond hen als primair. Deze volwassenen (vnl. (groot)ouders en leerkrachten) creëren een leeromgeving en maken zelf deel uit van die omgeving.

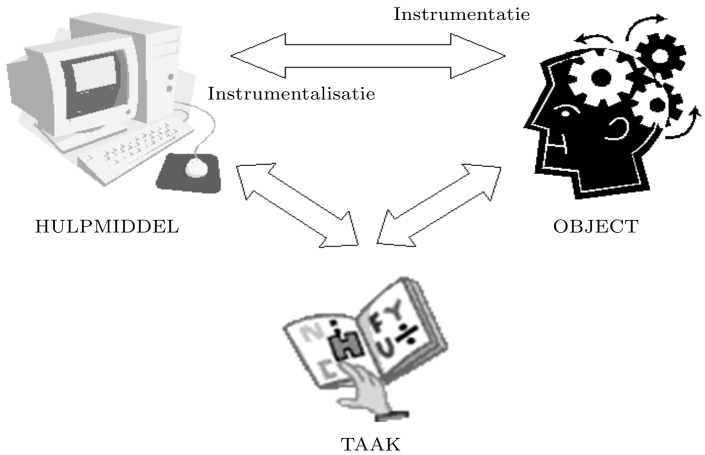
Vertaald naar de context van het gebruik van computeralgebrasystemen of algemeen naar het gebruik van technologische hulpmiddelen in het onderwijs kan men stellen dat Vygotsky beweert dat deze hulpmiddelen bemiddelen tussen de leerlingen en de kennis die hen aangeleerd wordt. Aangezien Vygotsky van mening is dat kinderen leren uit hun eigen activiteiten, bedoelt hij dat de leerlingen bij voorkeur zelf technologische hulpmiddelen gebruiken en dat bijgevolg enkel 'blootstelling' eraan niet volstaat.

De instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen zoals deze door de Franse onderzoeksgroep werd ontwikkeld, is gebaseerd op de bovenstaande ideeën van Vygotsky en is verder uitgebouwd steunende op twee verschillende peilers. Het bevat elementen uit de cognitieve ergonomie en elementen uit de antropologische benadering in de didactiek. De Franse wiskundedidactici hebben de bruikbare concepten uit deze beide benaderingen toegepast op het leren van wiskunde met behulp van ICT. Afhankelijk van onderzoeker tot onderzoeker ligt de nadruk doorgaans op één van beide peilers.

Cognitieve ergonomie

Het idee van de instrumentatie zelf is afkomstig uit de cognitieve ergonomie en heeft betrekking op het leren gebruiken van hulpmiddelen. Het bouwt verder op het begrip hulpmiddel van Vygotsky. Vérillon en Rabardel definieerden de strikte scheiding tussen de begrippen hulpmiddel en instrument zoals ze in de bovenstaande paragraaf reeds werden vermeld: "The instrument does not exist in itself, it becomes an instrument when the subject has been able to appropriate it for himself and has integrated it with his activity.". (Vérillon & Rabardel,

[85], p. 84) Men kan dus pas spreken van een instrument wanneer er sprake is van een zinvol verband tussen een stuk gereedschap (of een deel ervan), de gebruiker en de taak.



Figuur 3.1: Instrumentele genese

De gebruiker (ook *object* genaamd) moet dus vaardigheden ontwikkeld hebben om het hulpmiddel te kunnen gebruiken, weten voor wat soort taken het hulpmiddel bruikbaar is en hoe hij/zij het probleem dan precies moet aanpakken. Het proces waarbij een hulpmiddel wordt omgezet in een instrument gaat gepaard met het ontwikkelen van mentale schema's (zgn. instrumentatieschema's) en het eigenlijke proces noemt men de instrumentele genese. Het idee van de instrumentele genese weerspiegelt duidelijk het feit dat het gebruiken van een hulpmiddel geen 'eenrichtingsverkeer' is. Er is een dialoog nodig tussen de gebruiker die zijn/haar persoonlijk gereedschap beïnvloedt en het hulpmiddel dat op zijn beurt het denken van de gebruiker beïnvloedt. Afhankelijk van de richting spreekt men van instrumentalisatie en instrumentatie (zie figuur 3.1, [30], p. 96).

Uiteraard kan men eenzelfde hulpmiddel omvormen tot verschillende instrumenten. Het is vanzelfsprekend dat verschillende taken doorgaans zullen leiden tot verschillende instrumenten. Zo kan men het grafisch rekentoestel als hulpmiddel - in geval van nood - transformeren tot een instrument dat men kan gebruiken om een rechte lijn te tekenen. Anderzijds kunnen verschillende gebruikers (of eventueel zelfs eenzelfde gebruiker) voor eenzelfde taak een bepaald stuk gereedschap omvormen tot een verschillend instrument.

Voorbeeld 1:

Bepaal de constanten a en b waarvoor de functie f gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & \text{als} \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin(x) + b & \text{als} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{als} \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

continu is op $\mathbb{R}$.

Deze oefening krijgen de studenten uit het eerste jaar bachelor in de ingenieurswetenschappen voorgeschoteld tijdens een oefeningensessie van het vak Wiskundige Analyse I. Tijdens deze sessie hebben de studenten het computeralgebrapakket Maple ter beschikking zodat we kunnen stellen dat alle studenten dezelfde taak en hetzelfde hulpmiddel voor handen hebben. Toch merken we elk jaar opnieuw dat verschillende studenten vaak tot verschillende instrumenten komen.

Een eerste student kan bijvoorbeeld voor zichzelf een mentaal schema ontwikkelen waarvan het corresponderende oplossingsschema de volgende stappen bevat:

- Definiëren van de functie f in Maple.
- Berekenen van de functiewaarde $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
- Berekenen van de rechterlimiet van f in $-\frac{\pi}{2}$.
- Opstellen van de eerste vergelijking.
- Berekenen van de functiewaarde $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- Berekenen van de linkerlimiet van f in $\frac{\pi}{2}$.
- Opstellen van de tweede vergelijking.
- Oplossen van het verkregen stelsel met het commando **solve**.

Een andere student is (nog) niet zo vertrouwd met de definitie van continuïtiet van een functie in een punt, maar herinnert zich wel dat de grafiek van een continue functie een ononderbroken lijn of kromme vormt. Deze student ontwikkelt bijvoorbeeld het volgende oplossingsschema:

- Definiëren van de functie f in Maple.
- Kiezen van 2 willekeurige waarden (natuurlijke getallen) voor de onbekenden a en b.
- Plotten van de functie f voor de gekozen a en b.
- Nagaan (aan de hand van de grafiek) of de functie f al dan niet continu is in $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- Nieuwe waarden kiezen voor a en b (afhankelijk van student tot student is deze keuze opnieuw willekeurig of eerder beredeneert door gebruik te maken van de verkregen grafiek).
- Plotten van de functie f voor de gekozen a en b.
- ...

Beide studenten hebben door de constructie van een schema het hulpmiddel Maple omgebouwd tot een instrument dat bruikbaar is om de gegeven taak op te lossen. Student 1 heeft Maple omgebouwd tot een 'rekeninstrument' voor het berekenen van functiewaarden en limieten. Student 2 gebruikt Maple als een 'tekeninstrument'. Uiteraard is Maple als tekeninstrument in dit geval geen zinvolle keuze. Doordat de gezochte waarden voor a en b (nl. $a = -1$ en $b = 1$) heel eenvoudig zijn, kan ook de tweede student tot een correcte oplossing komen. Met een andere (niet noodzakelijk complexere) oefening kan men student 2 gemakkelijk overtuigen van het feit dat Maple als tekeninstrument in dit geval geen goede keuze is.

In het kader van de cognitieve ergonomie leggen Rabardel en Vérillon een link tussen kennisontwikkeling en het interactieproces waarbij een gebruiker een hulpmiddel omzet in een instrument: "If cognition evolves through interaction with the environment, accommodating to artefacts may have an effect on cognitive development, knowledge construction and processing, and the nature itself of the knowlegde generated.". (Vérillon & Rabardel, [85], p. 77). De Franse wiskundedidactici Guin en Trouche (beide aanhangers van de ergonomische kijk op de instrumentele benadering) vertalen dit als volgt: "The subject has to develop the instrumental genesis and efficient procedures in order to manipulate the artefact. During this interaction process, he or she acquires knowledge which may lead to a different use of it.". (Guin & Trouche, [34], p. 201)

Een uitgebreide beschrijving van de begrippen instrumentele genese, instrumentatieschema's, instrumentatie en instrumentalisatie komt aan bod in paragraaf 3.2.4.

De antropologische benadering in didactiek

De antropologische benadering werd in de didactiek geïntroduceerd door Chevallard. In deze benadering gaat men een activiteit/de praktijk beschrijven in termen van vier begrippen nl. taak, techniek, technologie en theorie. De definitie van deze vier begrippen sluit niet helemaal aan bij de klassieke betekenis van de woorden taak, techniek, technologie en theorie.

- Een **taak** definieert men als een probleemstelling die in een instituut (met name een onderwijsinstelling) werd geconstrueerd.
- Een **techniek** beschouwt men als een methode om een taak op te lossen. Een techniek is zowel pragmatisch als epistemisch van aard. Een techniek moet immers efficiënt zijn en is bijvoorkeur in vele gevallen toepasbaar en uiteraard speelt het 'begrijpen van' een belangrijke rol bij het hanteren van technieken.
- Een redenering die gebruikt wordt om een techniek te verantwoorden en uit te leggen bestaat voor een groot deel uit een theoretische basis, maar niet volledig. Deze theoretische basis koppelt men aan de definitie van het begrip **theorie** en het gedeelte van de redenering dat niet valt onder deze theoretische basis noemt men de **technologie**.

De begrippen taak, techniek, technologie en theorie zijn vrij abstract. Een voorbeeld zal deze begrippen iets tastbaarder maken.

Voorbeeld 2:

Het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen wordt in verschillende stappen aangeleerd. Eerst bekijkt men eenvoudige tweedegraadsvergelijkingen die men onmiddellijk kan oplossen, vervolgens bekijkt men een categorie van vergelijkingen die mits een kleine manipulatie herleidbaar zijn tot deze eenvoudige vierkantsvergelijkingen en tenslotte wordt het gebruik van de discriminant aangeleerd. Het is opvallend dat leerlingen - eens ze het gebruik van de discriminant onder de knie hebben - de eerste twee categorieën volledig negeren en steeds opnieuw gebruik maken van de discriminant.
Vertaald naar de begrippen taak, techniek, technologie en theorie wordt dit:

- Taak: het oplossen van een eenvoudige vierkantsvergelijking, bv. $x^2 - 2x + 1 = 0$
- Techniek: de formule $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Theorie: de geziene leerstof in verband met het oplossen van eenvoudige vierkantsvergelijkingen
- Technologie: het gedeelte van de redenering die de leerlingen duidelijk maakt dat het gebruik van de discriminant hier 'overdreven' is

De Franse CAS-onderzoekers (i.h.b. Artigue en Lagrange) hebben het beschrijven van de praktijk in termen van taak, techniek, technologie en theorie vervolgens toegepast op het onderzoeken van wiskundige activiteit. In hun benadering vormen de concepten technologie en theorie samen het facet 'kennis' en zijn de taak en de technieken de 'knowhow' die relevant is voor de keuze van het (technologisch) hulpmiddel. Binnen deze antropologische benadering leggen de Franse wiskundedidactici vooral de nadruk op het begrip techniek en de rol die technieken spelen in het opbouwen van wiskundige kennis. Vanuit hun onderwijsexperimenten waren Artigue en Lagrange immers tot de vaststelling gekomen dat:

- technieken niet verdwijnen indien men met CAS werkt; het wordt enkel getransformeerd,
- elk onderwerp in de wiskunde vergezeld is van een verzameling taken en technieken,
- technieken en (mentale) schema's gelinkt zijn; studenten hebben tijd nodig om schema's te ontwikkelen door gebruik te maken van technieken.

Haspekian [36] (eveneens lid van de Franse onderzoekseenheid) merkt bovendien op dat de taak van de leerkracht gecompliceerd wordt door het gebruik van nieuwe omgevingen. Er verschijnen door het gebruik van nieuwe technologische hulpmiddelen immers nieuwe (geïnstrumenteerde) technieken die in wisselwerking staan met de gebruikelijke (pen-en-papier-)technieken. Hierdoor moet de leerkracht verschillende aspecten van de organisatie van de wiskundeles grondig herzien. We komen in het vervolg van deze tekst nog uitvoerig terug op de rol van de leerkracht en de gevolgen voor de leerkracht van deze instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen.

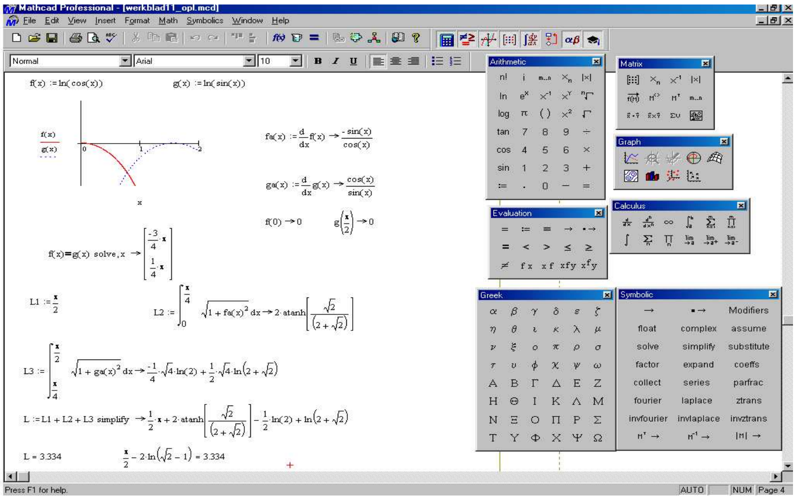
3.2.4 De instrumentele benadering als theoretisch kader

De instrumentele benadering vertrekt van het principe dat een hulpmiddel voor de leerlingen niet zomaar een bruikbaar instrument is. In het wiskundeonderwijs worden hulpmiddelen omgevormd tot instrumenten door acties van de leerlingen. Deze acties hebben bijgevolg een transformerende kracht en gebeuren op het eigenste moment (dus tijdens het eigenlijke gebruik) onder invloed van sociale interacties met het hulpmiddel en/of met medegebruikers.

Voorbeeld 3:

De grafieken van de functies $f(x) = \ln(\cos(x))$ en $g(x) = \ln(\sin(x))$ vormen in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ een kromlijnige driehoek met de x-as. Bereken de omtrek van deze driehoek.

Veronderstel dat twee leerlingen die samen aan één computer werken deze oefening willen oplossen, dan kan zich het volgende scenario voordoen (zie figuur 3.2):



Figuur 3.2: Voorbeeld 3 uitgewerkt in Mathcad

- De leerlingen besluiten om de grafieken van f en g eerst grafisch voor te stellen met hun computeralgebrapakket Mathcad.

- Ze kiezen echter een te groot bereik voor de x-as waardoor ze de bedoelde kromlijnige driehoek niet vinden. Ze denken even na, herlezen de opgave en komen tot de ontdekking dat het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vermeld wordt in de opgave. Ze besluiten na onderling overleg om hun bereik voor de x-as te beperken.

- De leerlingen herinneren zich dat de afgeleide van de functie voorkomt in de formule voor de lengte van een kromme. Ze besluiten om alvast de afgeleide van f en g te bepalen.

- Vervolgens willen ze de grenzen bepalen voor hun integralen. De figuur van Mathcad is hiervoor te onduidelijk. Ze vermoeden dat de ondergrens voor de eerste integraal 0 en de bovengrens voor de tweede integraal $\frac{\pi}{2}$ is. Ze beslissen om de functiewaarden $f(0)$ en $g(0)$ snel te berekenen om hun vermoeden te bevestigen.

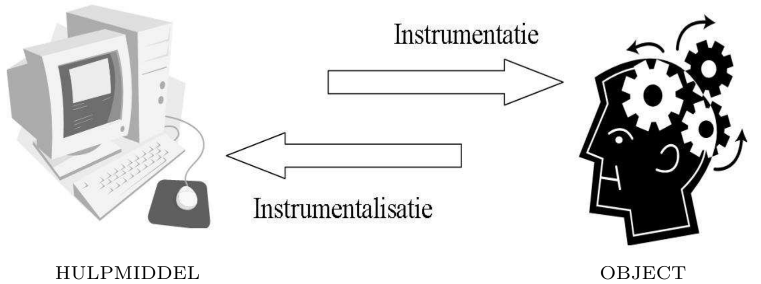
- Afgaand op de symmetrie van de figuur verwachten ze dat de ontbrekende grens $\frac{\pi}{4}$ is. Ze controleren hun vermoeden door de vergelijking $f(x) = g(x)$ op te lossen met Mathcad. Mogelijk zijn ze eerst verbaasd over het feit dat Mathcad meerdere oplossingen geeft, maar rekening houdend met het feit dat de cosinus- en sinusfunctie periodieke functies zijn, komen ze tot de vaststelling dat beide waarden oplossingen zijn van de vergelijking $f(x) = g(x)$ en kiezen ze resoluut voor $\frac{\pi}{4}$ als ontbrekende grens.

- Ze bepalen de lengtes van de drie zijden van de kromlijnige driehoek en berekenen vervolgens de totale omtrek van deze driehoek. Tenslotte vergelijken ze hun resultaat met de oplossing die achteraan in het handboek staat vermeld. Dit resultaat blijkt veel korter te zijn. Zijn beide resultaten dezelfde? Omdat ze niet direct een mogelijkheid vinden om hun eigen resultaat formeel te herleiden tot het korte resultaat uit het handboek, besluiten ze om de beide resultaten numeriek te gaan benaderen en deze numerieke resultaten te vergelijken.

- Uiteindelijk komen ze tot de vaststelling dat hun oplossing wel degelijk correct is.

Het proces waarbij een stuk gereedschap door de gebruiker wordt omgevormd tot een instrument noemt men de **instrumentele genese** (zie figuur 3.1). Concreet bestaat de instrumentele genese uit het opbouwen van gebruiksschema's. Deze mentale schema's zijn niet louter technische algoritmes. Ze bevatten mentale wiskundige concepten en deze concepten kunnen tijdens het ontwikkelen van deze schema's zelf ook nog verder ontwikkelen. Doordat de technische en conceptuele aspecten verbonden en verweven zijn, is de instrumentele genese een complex proces dat veel tijd vraagt en bovendien gelinkt is aan de eigenschappen van het hulpmiddel (zijn mogelijkheden en beperkingen) en de activiteiten van de gebruiker (zijn kennis en reeds gekende werkwijzen).

Zoals eerder opgemerkt, wordt een hulpmiddel omgevormd tot een instrument door de acties van de leerlingen, maar op zijn beurt zal een hulpmiddel (bij-



Figuur 3.3: Wisselwerking tussen hulpmiddel en object

voorbeeld een computeralgebrasysteem dat door de leerlingen wordt gebruikt) de acties van de leerlingen vormen en/of beïnvloeden. Daarom onderscheiden de Franse wiskundedidactici twee soorten gebruiksschema's.

Een object ontwikkelt een **nutsschema** (*utility scheme*) wanneer hij/zij een voorwerp aanpast met een specifiek doel voor ogen of met andere woorden wanneer de gebruiker de functionaliteit van zijn hulpmiddel gaat veranderen of uitbreiden. In dit geval spreken we van **instrumentalisatie**.

Voorbeeld 4:

De leerlingen die deelnamen aan ons onderwijsexperiment en daarbij gebruik maakten van Mathcad konden een speciaal ontworpen Mathcad-werkblad gebruiken om oefeningen in verband met numerieke integratie op te lossen. Dit werkblad bevatte een aantal (gedeeltelijk onzichtbare) procedures die de leerlingen in staat stelden om integralen numeriek te benaderen aan de hand van de methode van Simpson (zie 5.4.2). Het ogenblik waarop de leerling zich realiseert dat hij dit specifieke werkblad nodig heeft om een bepaalde oefening te kunnen oplossen, construeert hij/zij een nutsschema dat hem/haar in staat stelt om dit werkblad op te sporen en in te laden. Uiteraard blijft de instrumentele genese in dit specifieke geval niet beperkt tot dit ene nutsschema. De leerlingen zullen een aaneenschakeling van verschillende (gebruiks)schema's ontwikkelen om de opgegeven oefening tot een goed einde te brengen.

De richting waarbij het gereedschap het handelen en de acties vormt van de gebruiker noemt men **instrumentatie** (zie figuur 3.3). Tijdens de instrumentatie gaat het object coherente en zinvolle mentale schema's ontwikkelen om het (technologische) hulpmiddel te gebruiken bij de oplossing van een specifiek probleem of een klasse van problemen. Deze schema's worden in de literatuur **schema's van geïnstrumenteerde actie** (*schemes of instrumented action*) of kortweg **instrumentatieschema's** genoemd. De mentale schema's uit voorbeeld 1 behoren beide tot de categorie van de instrumentatieschema's.

Een instrumentatieschema bestaat uit twee delen:

- een extern, zichtbaar en technisch gedeelte; in het geval van ICT zijn dit de inputlijnen in de grafische rekenmachine of in het computeralgebrasysteem, maar het kan bijvoorbeeld ook het oplossingsschema of een algoritme zijn dat de student gebruikt heeft.
- een mentaal, cognitief, conceptueel gedeelte dat betekenis geeft aan het technische deel: wiskundige begrippen die de student beheerst, een vooropgestelde 'problem solving'-strategie en de wiskundige kijk van de student op de mogelijkheden van het technologische hulpmiddel.

Instrumentatieschema's kunnen vrij elementair en eenvoudig zijn, maar zijn doorgaans slechts een onderdeel uit (een aaneenschakeling van) samengestelde instrumentatieschema's die allemaal opgebouwd zijn uit elementaire schema's. Uit onderwijsexperimenten bleek dat een samengesteld instrumentatieschema vaak veel complexer is dan de enkelvoudige instrumentatieschema's waaruit het was opgebouwd:

> "The syntactic difficulties with the solve command became less frequent as the teaching experiments advanced, which suggests a progressive instrumental genesis. (...) We observed an interplay of conceptual and technical difficulties that reappeared in complex situations, after successful use in easy cases had suggested an already completed instrumentation." (Drijvers, [30], p. 250)

De instrumentele genese is een proces dat tijd, inspanning en ervaring van de leerlingen en studenten vereist. Bovendien wordt de ontwikkeling van instrumentatieschema's in het geval van ICT beïnvloed door de 'grenzen' van het technologische hulpmiddel. Zo kan men een onderscheid maken tussen commandobeperkingen en organisatorische beperkingen.

- Commandobeperkingen: de beschikbare commando's binnen het grafisch rekentoestel of computeralgebrapakket en de eventuele bijhorende beperkingen (enkel numeriek resultaat in plaats van exact resultaat, geen gebruik van lettervormen mogelijk, beperkte grafische mogelijkheden,...)
- Organisatorische beperkingen: werken met computeralgebrasystemen of een grafische rekenmachine beïnvloedt niet alleen de organisatie van het lesgebeuren, maar eveneens de planning van het eigenlijke wiskundig werken

In de oorspronkelijk kijk op ICT-gebruik, gebaseerd op een strikte scheiding tussen het technische en het conceptuele, vertrok men van de hypothese dat de computeralgebrasystemen het grootste deel van de berekeningen van de leerlingen zouden overnemen en dat de leerlingen hierdoor zouden kunnen werken op het conceptuele niveau. In het theoretische kader dat de Franse onderzoekgroep ontwierp, blijken de instrumentatieschema's voor een (groot) deel te bestaan uit technische aspecten. Men kan dus stellen dat technieken bij het gebruik van computeralgebrasystemen zeker niet verdwijnen, zelfs niet noodzakelijk verminderen, maar wel van aard veranderen. Het traditionele onderwijs gaat gepaard met het gebruik van pen-en-papier-technieken en daarnaast maken we in de nieuwe technologische omgevingen gebruik van zogenaamde **geïnstrumenteerde technieken**. We kunnen geïnstrumenteerde technieken dus definiëren als technieken ten gevolge van het gebruik van een hulpmiddel of als een actie uit een instrumentatieschema. Geïnstrumenteerde technieken behoren dus tot het externe en zichtbare gedeelte van een instrumentatieschema en kunnen eveneens enkelvoudig of samengesteld van aard zijn. Ze hebben bovendien - zoals de klassieke pen-en-papier-technieken - een kennistheoretische waarde want ze zijn verwant aan de conceptuele aspecten van de instrumentatieschema's waartoe ze behoren. Toch zijn de geïnstrumenteerde technieken duidelijk verschillend van - en eerder complementair aan - pen-en-papier-technieken en maakt de ontwikkeling van geïnstrumenteerde technieken de leerlingen 'rijker'.
Het tekenen van een grafiek of het bepalen van een numerieke benadering met een computeralgebrasysteem zijn twee voor de hand liggende voorbeelden van geïnstrumenteerde technieken. De eerste techniek stelt de studenten in staat

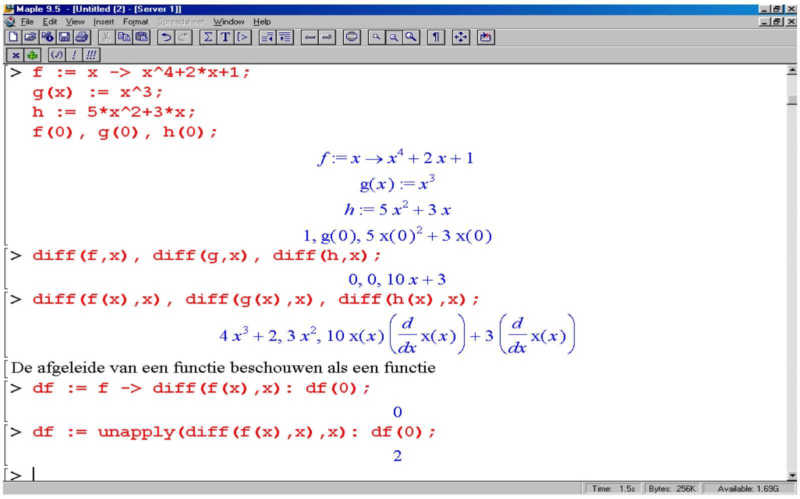
om snel een overzicht te krijgen van het vooropgestelde probleem en de tweede geïnstrumenteerde techniek biedt de studenten de mogelijkheid om bijvoorbeeld twee uitdrukkingen die op het eerste zicht sterk verschillen, met elkaar te vergelijken (zie voorbeeld 3).
De introductie van geïnstrumenteerde technieken in het wiskundeonderwijs gaat gepaard met een aantal moeilijkheden waaraan de leerlingen en de leerkracht het hoofd moeten bieden. Zo kunnen gekende pen-en-papier-technieken het gebruik van geïnstrumenteerde technieken zelfs belemmeren. Leerlingen en studenten proberen de notaties en taal van de pen-en-papier-traditie (vaak te) letterlijk te vertalen naar de computeralgebraomgeving. Een gebrek aan gelijkvormigheid tussen de CAS-technieken en de pen-en-papier-technieken én het 'black box'-karakter van het computeralgebrasysteem bemoeilijken bovendien deze transfer.

Voorbeeld 5:

Tijdens een introductiesessie Maple in het eerste jaar bachelor in de ingenieurswetenschappen laten we de studenten - via een vooraf opgestelde lijst van commandolijnen - aan den lijve ondervinden wat de meest geschikte manier is om een functie te definiëren in Maple. Na enige handelingen (berekenen van een functiewaarde, berekenen van de afgeleide,...) komen de studenten tot de constatatie dat de pijltjesnotatie (conform de notaties uit de handboeken) eigenlijk de meest geschikte is. Maar wanneer de studenten vervolgens een aantal zaken willen combineren (bv. de afgeleide van een functie definiëren als een functie) blijkt dit niet altijd te lukken (zie figuur 3.4). Doordat de werking van het computeralgebrasysteem Maple op dit ogenblik voor hen nog een 'black box' is, zullen ze nooit uit zichzelf het commando 'unapply' ontdekken. In het beste geval omzeilen een aantal studenten dit probleem door te plakken en te knippen.

Door als leerkracht de nadruk te leggen op de verschillen en de gelijkenissen en door de twee benaderingen te vergelijken, kan men de leerlingen en studenten helpen om pen-en-papier-technieken te vertalen naar geïnstrumenteerde technieken. De invoering van geïnstrumenteerde technieken in het wiskundeonderwijs brengt voor de wiskundeleerkrachten nog een bijkomende taak met zich mee. Men moet er immers (als wiskundeleerkracht) over waken dat deze explosie van technieken niet tot gevolg heeft dat de technieken oppervlakkig blijven en dus eerder een didactisch obstakel gaan vormen voor de opbouw van een wiskundige activiteit.

De moeilijkheden die gepaard gaan met de introductie van geïnstrumenteerde



Figuur 3.4: Voorbeeld 5 uitgewerkt in Maple 9.5

technieken in het wiskundeonderwijs en de complexiteit van de instrumentele genese tonen duidelijk aan dat er nood zal zijn aan externe begeleiding. Het extern sturen van de instrumentele genese van de leerlingen noemen de Franse wiskundedidactici **orkestratie**. Orkestratie kan verschillende vormen aannemen. Enkele voorbeelden:

- Als leerkracht kan men een demonstratie geven (met projectie) en het instrumentatieschema dat de leerkracht zelf heeft gebruikt voor de oplossing van een probleem gaan verwoorden en verduidelijken (onder de vorm van 'hardop denken').

- Orkestratie kan ook een virtuele vorm aannemen. Een e-cursus of een zelfstudiepakket uitgewerkt in een computeralgebraomgeving zoals het Alice[4]-pakket voor de cursus Lineaire Algebra van N. Van den Bergh (Faculteit Ingenieurswetenschappen, Universiteit Gent) uitgewerkt in Maple is een duidelijk voorbeeld van orkestratie. Het pakket bevat - aanvullend aan de cursus Lineaire Algebra - toelichtingen, uitgewerkte voorbeelden en oefeningen die een inspiratiebron kunnen zijn voor de student. Bovendien is het pakket doorspekt met aanwijzingen en korte vragen en wordt de

[4] Active Learning in a Computer Environment

student op deze manier begeleid bij de ontwikkeling van de benodigde instrumentatieschema's.

- Als leerkracht kan men in de klasgroep een **sherpa-student** aanstellen. Het beeldscherm of grafisch rekentoestel van deze student wordt, zichtbaar voor leerkracht en leerlingen, geprojecteerd. Deze leerling zal voor zijn medeleerlingen en voor de leerkracht op deze manier de rol vervullen van referentie, gids, helper en tussenpersoon. Het is dan ook niet toevallig dat de benaming 'sherpa-student' enerzijds verwijst naar de personen die groepen begeleiden en die de bagage dragen tijdens expedities in de Himalaya en anderzijds verwijst de benaming naar de diplomaten die een internationale conferentie voorbereiden. Deze term werd in 1999 ingevoerd door Guin en Trouche [34].

  Werken met een sherpa-student biedt een aantal voordelen:

  - Het geeft de leerkracht en medeleerlingen de mogelijkheid om een aantal geïnstrumenteerde technieken te gaan vergelijken.
  - Het geeft de leerkracht informatie over de instrumentele schema's die de leerling opstelt.
  - De leerkracht kan via het werk van één student het werk van alle anderen gaan begeleiden.
  - Het stelt de leerkracht in staat om geïnstrumenteerde technieken (uitgevoerd door de student) te gaan combineren met manuele technieken uitgevoerd aan het bord door de leerkracht of een andere leerling.
  - Het kan (indien gewenst) de discussie tussen studenten aanmoedigen.
  - Het biedt mogelijkheden om zwakke studenten of studenten met een leerachterstand te integreren in de groep.

- Als leerkracht kan men de keuze tussen een pen-en-papier-techniek of een geïnstrumenteerde techniek opleggen aan de leerlingen. Op deze manier kan men de explosie van technieken gaan beperken.

- Indien men als leerkracht er toch voor opteert om pen-en-papier-technieken en geïnstrumenteerde technieken voor eenzelfde probleem naast elkaar te gebruiken, vereist dit een begeleidend theoretisch 'gesprek' van de wiskundeleerkracht. Deze uiteenzetting zal wiskundige kennis bevatten, maar ook kennis over het eigenlijke hulpmiddel, de manier waarop men wiskundige kennis overbrengt naar het hulpmiddel (*computational transposition*), wat men kan verwachten als output, waarom, hoe men dit resultaat leest en interpreteert,...

3.3 Didactische principes

3.3.1 Inleiding

In deze paragraaf behandelen we een aantal specifieke principes[5] die het gebruik van computeralgebrasystemen tijdens de wiskundelessen kunnen ondersteunen. Het is niet onze bedoeling om hier een volledig overzicht te geven. Vanuit het standpunt van de 'onderzoeker als leerkracht' (zie ook paragraaf 4.3) kozen we hier vijf didactische principes die de wiskundelessen, waar de leerlingen zelf aan het werk zijn met ICT, kunnen ondersteunen. Deze principes kunnen door de leerkracht gelijktijdig of afzonderlijk gehanteerd worden.

Deze vijf principes werden allen ontwikkeld door een groep van Oostenrijkse onderzoekers. In 1990 kocht Oostenrijk, vermoedelijk als eerste land ter wereld, een algemene licentie van het computeralgebrasysteem Derive. Een volgende logische stap was alle leerkrachten voorzien van de nodige diskettes en handleidingen, het implementeren van het gebruik van Derive in de lerarenopleiding en het ontwerpen van enkele didactische richtlijnen [37]. Vanuit het besef dat de leerkrachten nood hadden aan bijkomende didactische principes, groeide het idee om een grootschalig Oostenrijks onderzoeksproject CAS I op te starten. Dit project werd actief ondersteund door medewerkers van het RISC Instituut van de universiteit van Linz (geleid door Buchberger) en de universiteit van Wenen. Buchberger had reeds in 1989 een aantal baanbrekende ideeën op het vlak van het gebruik van computeralgebrasystemen in concrete onderwijssituaties geformuleerd. Hij was de ontwerper van het 'Black box-White box'-principe en het 'White box-Black box'-principe [19] en probeerde vanuit deze didactische principes een antwoord te vinden op de vraag waar en wanneer het gebruik van een computeralgebrapakket nuttig kan zijn. In 1992 werd ACDCA (*Austrian Center for the Didactics of Computer Algebra*) opgericht (onder leiding van Heugl) en werd de organisatie en uitvoering van het project CAS I door het Oostenrijkse ministerie van Onderwijs toevertrouwd aan deze instelling. Tijdens dit eerste CAS-experiment ontdekte men dat de nieuwe didactische principes van Buch-

[5] Een **didactisch principe** wordt in deze tekst gedefinieerd als een stelling, waarnaar we zullen handelen en waarmee effectief gewerkt kan worden, en die het onderwijs (i.h.b. de overdracht van kennis en vaardigheden) zal ondersteunen.

berger uitermate geschikt waren voor de klaspraktijk. Ze ontwikkelden nog een aantal andere didactische principes, waaronder het 'window-shuttle'-principe (ook principe van de vensterdidactiek genaamd) en het 'module'-principe. Ondanks het feit dat deze didactische richtlijnen hun deugdelijkheid hadden bewezen tijdens CAS I, bleken er toch een aantal problemen op te duiken die de vlotte integratie van het gebruik van computeralgebrasystemen in de weg stonden. We citeren een aantal uitspraken:

> "I soon had to realise that some pupils - especially those who did not attend computer science classes in addition to their mathematics classes - were faced with great problems in regard to the computer and Derive. (...) Concerning the handling of the computer and the finding of appropriate Derive-commands, however, remarkable differences between those pupils who had the chance to practice at home and those who did not have this opportunity became obvious." (Wurnig, [90], p. 13-14)

> "The monitor cuts off the teacher's contact to the pupils. Sometimes the teacher has to stay in front of the classroom, where the overhead projector is placed, instead of staying at the back of the classroom to keep up control. (...) Even in taking notes there is a lack of discipline: The pupils sometimes are not able to decide whether to write something up, to type it or to print it out." (Schollum, [68], p. 39)

De Oostenrijkse onderzoekers van het ACDCA en hun aanhangers gingen voor deze problemen op zoek naar praktische oplossingen en antwoorden die aanleunden bij hun didactische principes:

- het aanpassen van de inrichting van het computerlokaal: "I wanted to arrange my lessons in a way that made it possible for both pupils using Derive and those not doing so to have equal chances with regard to the tests. The method of teaching necessary to be able to do this was made a great deal easier by the arrangement of the computers in the computer room. They were placed both along the back-wall and the left side-wall, still leaving sufficient free space for as many as 30 puils seated in the traditional way to have enough room." (Wurnig, [90], p. 14);

- de invoering van het symbolisch rekentoestel zodat elke leerling steeds een toestel bij de hand heeft;
- alternatieve didactische principes die de reeds bestaande didactische richtlijnen versterkten (zie paragraaf 3.3);
- een antwoord op de vraag "Welke basisvaardigheden zijn nog noodzakelijk in dit technologietijdperk?";
- het ombuigen van de obstakels in kansen [29]:
  1. De algebraïsche voorstelling die het computeralgebrasysteem geeft en de vorm die de leerling verwacht verschillen soms.
  2. Het gebruik van computeralgebra vereist een flexibele conceptie van variabelen en parameters. Men kan eigenlijk stellen dat in een computeralgebraomgeving '(bijna) alle letters gelijk zijn', maar in een bepaalde situatie heeft een variabele echter een bepaalde betekenis en rol (die van onbekende, parameter of veranderlijke). De leerlingen kunnen pas op een verstandige manier omgaan met variabelen indien ze de betekenis van een variabele kennen.
  3. De leerlingen hebben een beperkte conceptie van algebraïsch oplossen. Een computeralgebrapakket eist dat men expliciet opgeeft naar welke variabele een vergelijking wordt opgelost.
  4. De gebruiker van ICT-hulpmiddelen wordt soms gedwongen om algebraïsche strategieën te zoeken die de beperkingen van het computeralgebrasysteem of de grafische rekenmachine omzeilen.
  5. Leerlingen weten niet goed waar, wanneer en hoe computeralgebra van pas kan komen bij het oplossen van een probleem.
  6. Het computeralgebrasysteem blijft zelfs voor een geoefende gebruiker een 'black box'-karakter hebben.
  7. Er kunnen transfermoeilijkheden optreden tussen CAS-technieken en pen-en-papier-technieken.

Na dit eerste onderwijsexperiment volgden nog vier andere experimenten waarin de Oostenrijkse onderzoekers op zoek gingen naar een antwoord op de vraag "Hoe kunnen we deze didactische principes aanwenden om het leren van wiskunde te bevorderen?".

In het vervolg van deze paragraaf bespreken we uitvoerig de didactische principes die deze onderzoekers ontwikkelden. Tijdens de voorbereidende fase van de onderwijsexperimenten maakten we hoofdzakelijk gebruik van twee principes: het 'White box-Black box'-principe en het principe van de vensterdidactiek. De andere principes kwamen slechts sporadisch aan bod of werden beperkt tot de lespraktijk. Voor een bespreking van deze didactische principes in de eigen onderzoekspraktijk verwijzen we naar paragraaf 5.4.2 en 5.4.4.

3.3.2 'White box-Black box'-principe

Computeralgebrasystemen (zoals Derive, Mathcad, Maple en symbolische rekenmachines) en de grafische rekenmachines zijn krachtige rekeninstrumenten die het kunnen van de leerlingen en studenten overtreffen. Getroffen door de kracht van computeralgebrasystemen stelden de gebruikers van de eerste generatie zich reeds de vraag: "Welke basishandelingen moeten de leerlingen nog kennen?" of zoals Buchberger het formuleerde: "Moeten studenten de integratieregels nog leren?" [19]. Op deze vragen zijn twee extreme antwoorden mogelijk:

> "No, students need not learn integration rules any more or, more generally, as soon as an area of mathematics is trivialized, math (and other) students should not be tortured with it any more." (Buchberger, [19], p. 3)
>
> "For math education, ignore the existence of integration software and, in general, of symbolic math software systems." (Buchberger, [19], p. 3)

Integratieregels (of algemener: een 'getrivialiseerd' domein[6] uit de wiskunde) worden niet enkel en alleen aangeleerd aan de leerlingen om specifieke (integratie-) problemen te kunnen aanpakken, maar in het bijzonder om inzicht te ontwikkelen in de wiskundige materie en om algemene probleemoplossende technieken onder de knie te krijgen. Elk domein uit de wiskunde (ook de 'getrivialiseerde' domeinen) hebben hun eigen specifieke inzichten en technieken die de leerlingen moeten beheersen, maar het is niet zinvol om leerlingen en studenten keer op keer lastig te vallen met wiskunde (en in het bijzonder met berekeningen) die behoren tot een 'getrivialiseerd' domein. In feite geven computeralgebrasystemen en grafische rekentoestellen de leerlingen en hun leerkrachten de kans om (meer) tijd te besteden aan het oplossen van problemen.

[6] Buchberger noemt een domein uit de wiskunde **getrivialiseerd** indien er efficiënte algoritmes bestaan die bijna elk probleem uit dit domein aankunnen.

Voorbeeld 6:

Een klassiek voorbeeld hierbij is het gebruik van logaritmetafels. Een logaritmetafel is een tabel met een goed gekozen verzameling van waarden van (natuurlijke) logaritmes waarmee alle voorkomende logaritmes berekend kunnen worden. Het belangrijkste aspect was daarbij het gebruik van de elementaire rekenregels $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ en ${}^{a}\log(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.
Sinds de invoering van de wetenschappelijke rekenmachine in het wiskundeonderwijs werd het gebruik van de logaritmetafel overbodig en kunnen de leerkrachten de tijd die vroeger besteed werd aan het leren werken met een logaritmetafel gebruiken om andere problemen en toepassingen in verband met logaritmes te bestuderen.

Het antwoord op de vraag "Welke basishandelingen moeten de leerlingen nog kennen?" is afhankelijk van de plaats van deze basishandelingen in het leerproces van de leerlingen. Men kan het leerproces opsplitsen in twee stadia:

1. In het eerste stadium is het wiskundige domein nog nieuw voor de leerlingen. Het gebruik van computeralgebrasystemen voor het uitvoeren van specifieke berekeningen (of algoritmes) is op dit ogenblik geen goed idee. In dit stadium zijn wiskundig inzicht en nieuwe wiskundige technieken een vereiste. Deze inzichten en technieken mogen niet verwaarloosd worden. De leerlingen leren alle aspecten van dit nieuwe domein kennen: basisconcepten, stellingen, eigenschappen, bewijzen, concrete eenvoudige voorbeelden én handmatige berekeningen. Dit stadium kan pas afgerond worden indien de leerlingen de wiskundige concepten voldoende beheersen en de eenvoudige berekeningen voor de leerlingen een routine zijn.

2. In het tweede stadium wordt het uitvoeren van manuele berekeningen (bij complexe voorbeelden en oefeningen) lastiger. In dit stadium kan men leerlingen en studenten de kans geven én hen aanmoedigen om computeralgebrasystemen of grafische rekentoestellen te gebruiken.

Buchberger gaf deze twee stadia respectievelijk de namen 'white box' en 'black box' en zodoende ontstond een nieuw didactische principe dat hij het **'White box-Black box'-principe voor het gebruik van computeralgebrasystemen in het wiskundeonderwijs** noemde. Dit principe is recursief van aard en toepasbaar op alle niveaus en domeinen van het wiskundeonderwijs.

'White box'-fase: begrijpend leren

De leerlingen worden gezamenlijk tot een begrip, algoritme of wiskundig concept gevoerd. De bewerkingen die men in deze fase ontwikkelt, worden met de hand uitgevoerd. Basisbewerkingen worden op deze manier door het veelvuldige gebruik ingeoefend en geautomatiseerd. Het gebruik van het grafisch rekentoestel of het gebruik van een computeralgebrasysteem (als 'black box') blijft beperkt tot gekende bewerkingen uit vorige 'white box'-fases en draagt op deze manier bij tot de verlichting van de huidige 'white box'.

'Black box'-fase: herkennend en begrijpend toepassen

In deze fase zal de leerling of student de algoritmes, technieken of concepten die ontwikkeld werden in een 'white box'-fase gebruiken in uitgebreidere voorbeelden en toepassingen of in een andere 'white box'-fase. Het uitvoeren van deze taken wordt aan de computer of de rekenmachine overgelaten. Merk op dat de leerling nog steeds beslist welke acties hij/zij onderneemt, maar ze niet meer (volledig) zelf uitvoert.

Voorbeeld 7:

In de derde graad van het secundair onderwijs behandelt men tijdens de lessen analyse o.a. het verloop van reële functies (white box). Bij de studie van het verloop van reële functies voeren de leerlingen een aantal gekende handelingen uit: het bepalen van het domein van de functie, het berekenen van de nulpunten, de eerste en tweede afgeleide bepalen van de functie, een tekentabel van de functie en haar eerste en tweede afgeleide opstellen,... In principe zijn alle leerlingen in staat om elk van deze stappen manueel uit te voeren. Een computeralgebrasysteem kan als 'black box' gebruikt worden om het vereiste rekenwerk uit te voeren. Op deze manier zullen de leerlingen minder fouten maken bij het uitvoeren van het algoritme en kunnen ze zich beter concentreren op het eigenlijk onderzoek van het verloop van de reële functie.

3.3.3 'Black box-White box'-principe

In [19] merkt Buchberger terecht op dat het gebruik van het 'White box-Black box'-principe in omgekeerde volgorde in sommige gevallen waardevol kan zijn. We spreken in dit geval dan ook van het **'Black box-White box'-principe**.

Voorbeeld 8:

In een beknopte cursus Analyse waar de leerlingen slechts een beperkt aantal integratieregels beheersen (zoals splitsen in partieelbreuken en/of goniometrische substitutie), is het moeilijk om bepaalde toepassingen van de integraalrekening aan te bieden (lengte van een kromme, volume en manteloppervlakte van een lichaam,...). Om deze toepassingen toch te kunnen behandelen, is het gebruik van een computeralgebrasysteem essentieel. Hierbij berekenen de leerlingen bepaalde types van integralen zonder de onderliggende integratieregels te kennen. Dit principe is geschikt voor studierichtingen waar de leerlingen of studenten wiskundegebruikers in plaats van wiskundekenners zijn.

Voorbeeld 9:

Alhoewel programma's zoals Cabri of Passer en Liniaal strikt genomen niet behoren tot de categorie van de computeralgebrasystemen, zijn de didactische principes vaak gelijklopend. In de tweede graad van het secundair onderwijs gebruiken leerlingen deze software vaak als een 'black box' om eigenschappen van bijvoorbeeld de cirkel experimenteel te ontdekken. Vanuit deze experimenten gaan de leerlingen vervolgens hypotheses formuleren en testen. In een volgend stadium worden de eigenschappen van de cirkel klassikaal behandeld en dus aangeboden als een 'white box'.

3.3.4 Vensterdidactiek

Als we gebruik maken van een computeralgebrasysteem kunnen we simultaan werken in verschillende vensters, met verschillende representaties of vanuit verschillende gezichtspunten. Het is deze 'meer venster'-techniek die voor de Oostenrijkse onderzoekers de aanleiding was om het principe van de **vensterdidactiek** (*'window shuttle'-principle*) verder te onderzoeken.

> "This didactical way of learning is one of the new 'revolutions' of computer age. You can work in both windows (algebra and graphic-window). The goal of using this possibility is to generate relations between different representations." (Klinger, [44], p. 138)

Men kan bijvoorbeeld een algebraïsche operatie uitvoeren (eventueel in een apart algebraïsch venster) en de uitwerking ervan op de grafiek onderzoeken en interpreteren. Het overschakelen van de ene voorstellingswijze naar de andere moedigt het zoeken naar verbanden tussen de verschillende representaties aan.

De vermoedens en hypothesen die men kan afleiden uit de grafische voorstelling worden vervolgens gecontroleerd in het algebraïsche venster (of vice versa) en bewezen.

Als in het secundair onderwijs het begrip 'functie' wordt aangeleerd, dan is het niet door een sobere, abstracte definitie dat de leerlingen het begrip volledig zullen kunnen vatten. Dit zal veeleer gebeuren door het aanbieden van geschikte representaties (in de literatuur ook *prototypes* genaamd [26]) die de aandacht van de leerlingen vestigen op de eigenschappen van het begrip. Een belangrijke stap in dit proces is het aantonen van verbanden tussen de afzonderlijke representaties (bv. functiewaardentabel, functievoorschrift en grafiek). Het is namelijk daardoor dat de aandacht van de leerlingen op de afzonderlijke voorstellingen en op het onderliggende concept wordt gevestigd. Het is pas als de leerling beseft dat elke afzonderlijke representatie slechts één van de verschillende vormen is van het begrip 'functie', dat hij zal leren dat voor het oplossen van problemen men eerst de beste representatie kan kiezen.

Uit de literatuur blijkt dat de leden van de Oostenrijkse onderzoeksgroep en de aangesloten wiskundeleerkrachten zich voornamelijk beperkten tot twee voorstellingswijzen nl. grafisch en algebraïsch, maar anderen spreken echter van 'de regel van drie' [9] en zien naast de grafische en algebraïsche voorstelling ook nog een belangrijke taak weggelegd voor de numerieke voorstelling, al dan niet via het gebruik van spreadsheets.

3.3.5 'Module'-principe

Naast het baanbrekende werk van Buchberger en Heugl werden de leerkrachten die deelnamen aan het Oostenrijkse CAS I-project ook ondersteund door het onderzoek van Aspetsberger. Hij formuleerde, vanuit zijn eigen ervaringen met computeralgebrasystemen, het **'module'-principe**. Hij had ontdekt dat in wiskundelessen ondersteund door het gebruik van computeralgebrasystemen de leerlingen het begrip 'functie' anders bekeken. In het traditionele onderwijs zien de leerlingen een functie doorgaans als een object dat aan bepaalde eigenschappen voldoet, in een computeralgebraomgeving zien ze diezelfde functie eerder als een hulpmiddel voor het uitvoeren van een aantal taken. Aspetsberger onderscheidt verschillende soorten modules:

- CAS-modules:
  Ze worden gebruikt door de leerlingen als een 'black box' en worden door

de leerkrachten nadien omgezet in een 'white box' indien de leerkracht gebruik maakt van het 'Black box-White box'-principe. Zo kan men de leerlingen bijvoorbeeld het afleidingscommando laten gebruiken om hen experimenteel de kettingregel te laten ontdekken.

- Modules gecreëerd door de leerlingen in een 'white box'-fase:
  Deze modules worden door de leerlingen zelf geprogrammeerd. Zo kan men bijvoorbeeld de leerlingen zelf een kort programma laten schrijven voor de implementatie van een numerieke methode voor het bepalen van de nulpunten van een reële functie.

- Modules gecreëerd door de leerkracht:
  De leerkracht voorziet in een bibliotheek van modules die door de leerlingen gebruikt worden als een 'black box'.

3.3.6 'Stelling'-methode

In het secundair onderwijs hebben de wiskundeleerkrachten vaak onvoldoende tijd om te wachten tot alle leerlingen een bepaald wiskundeniveau hebben afgewerkt. Het leerplan dwingt hen om verder te gaan met het volgende onderwerp, onafhankelijk van de vooruitgang van de afzonderlijke leerlingen. Maar hoe kan een leerling een wiskundeniveau bouwen op een onafgewerkt lager niveau? Kuzler suggereert het volgende antwoord:

> "While the student learns the higher-level skill, the calculator solves all subproblems that require the lower-level skill. Using the language of the metaphor, the calculator is a scaffolding above the incomplete storey." (Kutzler, [46], p. 8)

Het opbouwen van een nieuw niveau op een (eventueel onafgewerkt) lager niveau noemt men de **'stelling'-methode** (of *scaffolding method*). Men gaat hierbij als volgt te werk:

1. De leerlingen worden niveau A aangeleerd.

2. Alle leerlingen worden niveau B aangeleerd, ook de leerlingen die niveau A nog onvoldoende beheersen. Berekeningen die betrekking hebben op niveau A worden uitgevoerd met behulp van een computeralgebrasysteem of een grafische rekenmachine.

Voorbeeld 10:

In de derde graad van het secundair onderwijs behandelt men het onderwerp 'extremumvraagstukken' als toepassing op de afgeleide van een reële functie. Indien een leerling het afleiden nog niet beheerst, is het oplossen van extremumvraagstukken een onbegonnen taak. Door in dit stadium een computeralgebrasysteem aan te bieden (als steiger of stelling) voor het berekenen van de afgeleide van een functie, zal deze leerling toch in staat zijn om een extremumvraagstuk op te lossen. Bovendien heeft hij/zij de kans om ondertussen ook nog het onafgewerkte niveau (in dit geval de afleidingsregels) bij te werken.

Kutzler ziet nog een andere mogelijkheid. Een wiskundeleerkracht kan deze methode ook gebruiken indien hij/zij eist dat de leerlingen alle bewerkingen manueel kunnen uitvoeren. Men gaat dan als volgt te werk:

1. De leerlingen worden (manueel) niveau A aangeleerd.
2. De leerlingen worden (manueel) niveau B aangeleerd. Berekeningen die betrekking hebben op niveau A worden uitgevoerd met behulp van een computeralgebrasysteem of een grafische rekenmachine.
3. De 'stelling' (nl. de CAS of GRM) verdwijnt en alle problemen in verband met niveau A en B worden manueel behandeld.

3.4 De plaats van het theoretische kader in ons onderzoek

Vanuit de vakliteratuur kwamen we in contact met verschillende theoretische raamwerken die onderzoek in het domein van 'computergebruik in het wiskundeonderwijs' kunnen ondersteunen. We kozen voor de computer als hulpmiddel en meer bepaald voor de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra omdat deze theorie ons een kader biedt waarbinnen we de interactie tussen leerlingen en een computeralgebrasysteem kunnen onderzoeken. Bovendien is het aspect 'interactie' heel belangrijk in de onderzoeksvragen van het eerste deel van dit proefschrift omdat we de invloed van CAS op het leerproces van de leerlingen onderzoeken.

In de onderstaande paragraaf koppelen we een aantal aspecten uit het theoretische raamwerk aan de onderzoeksvragen die centraal staan in dit gedeelte van ons proefschrift.

1. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen het wiskundig inzicht van de leerlingen verbeteren?*

De instrumentele benadering gaat terug op ideeën van Vygotsky (zie 3.2.3). Indien men zijn ideeën vertaald naar de context van het gebruik van technologische hulpmiddelen in het onderwijs worden deze (kort samengevat): een computeralgebrasysteem kan bemiddelen tussen de leerlingen en de wiskunde die hen wordt aangeleerd (mediation), maar enkel indien de leerlingen zelf gebruik maken van een computeralgebrasysteem (interactie). De vraag stelt zich dan nog of deze bemiddeling een positief resultaat kan opleveren t.a.v. het wiskundig inzicht van leerlingen.

2. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen (en i.h.b. de ontwikkeling van instrumentatieschema's) de probleemoplossende vaardigheden en de wiskundige creativiteit van leerlingen positief beïnvloeden?*

Instrumentatieschema's zullen in dit onderzoek een heel belangrijke plaats innemen. Deze mentale schema's weerspiegelen immers de wisselwerking tussen het handelen en het denken van de gebruiker, in ons geval de leerling of student. Bijgevolg lijkt het aannemelijk om het handelen en het denken van de leerling of student te gaan vormen door de ontwikkeling van instrumentatieschema's te stimuleren en te ondersteunen. Instrumentatieschema's bestaan gedeeltelijk uit geïnstrumenteerde technieken. Deze technieken hebben een belangrijke kennistheoretische waarde - want ze zijn verwant aan de conceptuele aspecten van de instrumentatieschema's waartoe ze behoren - en zijn (gedeeltelijk) complementair aan de pen-en-papier-technieken. Men zou kunnen verwachten dat het toevoegen van deze geïnstrumenteerde technieken aan de verzameling van reeds gekende pen-en-papier-technieken de leerlingen 'rijker' maken en hun probleemoplossende vaardigheden en hun wiskundige creativiteit positief zal beïnvloeden.

Dit standpunt is één van de belangrijkste peilers waarop ons onderwijsexperiment werd opgebouwd. De instrumentele benadering voor het gebruik van CAS wordt door de meeste onderzoekers gebruikt als theoretisch kader om de wisselwerking tussen een computeralgebrasysteem en de student te onderzoeken. In dit doctoraatsonderzoek zullen we deze theoretische benadering ook gebruiken als basis voor de ontwikkeling van onderwijsmateriaal (zie paragraaf

5.4.2). Daarnaast zullen we de ontwikkeling van het lesmateriaal en de uitvoering van de onderwijsexperimenten ondersteunen met de didactische principes die in paragraaf 3.3 werden geformuleerd.

In het volgende hoofdstuk bespreken we uitgebreid de methodologie die we tijdens ons onderzoek hanteerden, nl. het ontwikkelings- of ontwerponderzoek. We bekijken de verschillende kenmerken van deze methodiek en beschrijven de verschillende fases. In hoofdstuk 5 gaan we ten slotte het theoretische kader, de didactische principes en de methodologie in de praktijk (m.n. tijdens de voorbereiding en de uitvoering van de onderwijsexperimenten) bekijken.

Hoofdstuk 4

Methodologie

4.1 Inleiding

In hoofdstuk 2 stelden we de onderzoeksvragen van het eerste deelonderzoek op en schetsten we hun herkomst. In hoofdstuk 3 presenteerden we de theorie van de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen en bespraken we een aantal didactische principes, die het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs kunnen ondersteunen. Zoals bleek uit deze bespreking biedt deze theorie ons een kader waartegen we de interacties tussen de leerlingen en een technologische omgeving kunnen onderzoeken. Een dergelijk theoretisch kader was noodzakelijk om een antwoord te kunnen vinden op onze onderzoeksvragen. De eigenlijke zoektocht verliep via enkele onderwijsexperimenten uitgevoerd op een experimentele groep van laastejaars leerlingen uit het ASO (zie figuur 4.1, p. 61).

De organisatie van deze onderwijsexperimenten gebeurde volgens de methode van het ontwikkelingsonderzoek. In dit hoofdstuk zullen we de eigenschappen en enkele facetten van de methode van het ontwikkelingsonderzoek van naderbij bekijken. In hoofdstuk 5 volgt vervolgens een bespreking van de uitwerking van deze methodologie in de praktijk, meer bepaald van een kort proefproject en van de twee cycli die de eigenlijke onderwijsexperimenten omvatten.

4.2 Ontwikkelingsonderzoek

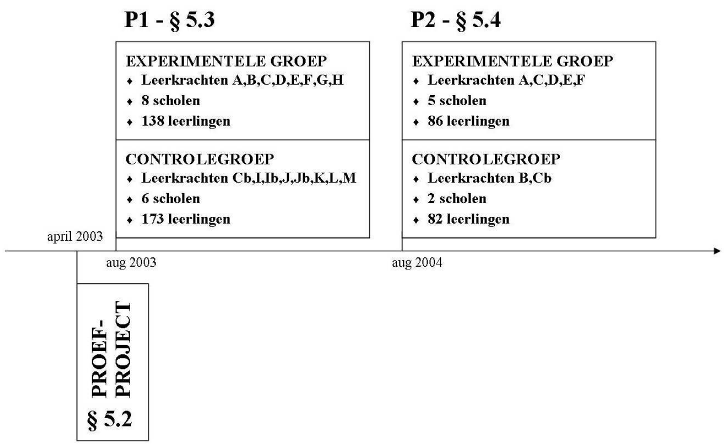
Ontwikkelings- of ontwerponderzoek (*design based research*) is een onderzoeksmethodologie die streeft naar het ontwikkelen van theorieën, instructie- en lesmateriaal en naar het empirisch ondersteund begrijpen van 'hoe het leren van iets' werkt. Ontwikkelingsonderzoek kan men in vele publicaties terugvinden ([16], [8], [30] et al.), maar de verschillende onderzoekers leggen vaak verschillende klemtonen of gebruiken verschillende interpretaties van deze methodologie. We kunnen echter bij alle onderzoekers dezelfde hoofdkenmerken terugvinden:

4.2.1 Naturalistische context

Leren, kennis en de context waarin dit plaats heeft, zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Onderzoeken die variabelen i.v.m. leren en kennis beschouwen als geïsoleerde variabelen in een laboratoriumopstelling zullen leiden tot het onvoldoende begrijpen van de betekenis van deze variabelen in een meer naturalistische opstelling. Men zal ontwerponderzoek bijgevolg uitvoeren in een naturalistische opstelling, meer bepaald daar waar het meeste leren werkelijk plaats heeft: het klaslokaal. Maar ontwikkelingsonderzoek gaat verder dan het louter observeren en beschrijven van deze context. Men zal de context systematisch aanpassen zodanig dat men een theorie over leren kan testen, verbeteren en/of genereren (zie paragraaf 4.2.2).
Bij het uitvoeren van ontwikkelingsonderzoek is het karakteriseren van de complexiteit en betrouwbaarheid van het ontwerp een uitdaging. De karakterisatie moet immers waardevol zijn voor anderen en door hen kunnen overgenomen worden. In een naturalistische opstelling (t.o.v. laboratoriumopstelling) neemt o.a. de complexiteit van de variabelen toe. De onderzoeker selecteert doorgaans enkele afhankelijke variabelen, maar de naturalistische context brengt eveneens een aantal bijkomende afhankelijke variabelen met zich mee, die moeilijk te controleren zijn (de samenwerking tussen leerlingen, de sfeer in de klasgroep, de beschikbare hulpmiddelen, de inzet van leerlingen en leerkracht(en),...). Bovendien is het onmogelijk om één aspect te veranderen zonder storingen te veroorzaken in de andere variabelen. Het is dus moeilijk om één aspect te bestuderen onafhankelijk van het volledige systeem. Deze 'storende' variabelen worden niet verwijderd uit de naturalistische context maar zorgen er voor dat men een flexibele theorie kan ontwikkelen of kan aantonen dat een bestaande theorie voldoende flexibel is, zodanig dat de theorie zelfs bruikbaar blijft wanneer deze wordt toegepast in een andere lokale context.

4.2.2 Focus op theorie

Het doel van ontwikkelingsonderzoek is werken aan een theoretisch model i.v.m. leren, dat anderen kunnen gebruiken in hun lokale context. Ontwikkelingsonderzoekers leggen vaak de klemtoon op deze theoriegedreven aanpak. Door het cyclisch karakter van het ontwerponderzoek op micro- en macroniveau (zie 4.2.3), heeft de onderzoeker de mogelijkheid om tussenkomsten in de naturalistische opstelling en kwantitatieve en kwalitatieve resultaten te verbinden met een bestaande theorie. Men kan bijgevolg ontwikkelingsonderzoek aanwenden voor het testen van een bestaande theorie of voor het genereren van een nieuwe theorie. In dit proefschrift opteren we voor het testen van een bestaand theoretisch raamwerk, nl. de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra (zie 3.2) en de gehanteerde didactische principes (zie 3.3).



Figuur 4.1: Macrocycli van het onderzoeksproject

4.2.3 Cyclisch karakter

Een van de belangrijkste kenmerken van ontwikkelingsonderzoek is het cyclische karakter. Hierdoor heeft de onderzoeker de kans om ervaringen uit een vorige cyclus te integreren in het vervolg van zijn onderzoek. Het cyclische karakter van het ontwikkelingsonderzoek kunnen we terugvinden op twee verschillende niveaus. We kunnen zowel macrocycli als microcycli onderscheiden.
Een **macrocyclus** bestaat uit drie grote fases: een voorbereidende fase, een

onderwijsexperiment en een retrospectieve fase. In het vervolg van dit hoofdstuk worden deze fases uitgebreid besproken. In ons onderzoek werden een kort proefproject en twee volwaardige macrocycli P1 en P2 uitgevoerd (zie figuur 4.1).

Op het subniveau van de lessen kan men per onderwerp of zelfs per lesuur **microcycli** onderscheiden. Indien de onderzoeker het onderwijsexperiment steeds bijwoont, kan hij het experiment na elk onderwerp of zelfs na elke les evalueren en bijsturen. Wij kozen voor het niet-permanent observeren van de lessen en daardoor was evaluatie en bijsturing op microniveau op initiatief van de onderzoeker eerder zeldzaam. De wiskundeleerkrachten die samen met hun leerlingen het onderwijsexperiment uitvoerden, hadden wel deze mogelijkheid en gebruikten hun recente leservaringen om hun aanpak - in overleg met de onderzoeker - bij te sturen in de aanloop naar een volgende microcyclus. De wiskundeleerkrachten in de experimentele conditie werden bijgevolg ingeschakeld als medeonderzoekers op het microniveau of vervulden m.a.w. de rol van 'teacher as researcher'.

4.2.4 Ontwikkelen van onderwijsactiviteiten

De ontwikkeling van een leertraject en het bijhorend instructie- en lesmateriaal neemt een centrale plaats in bij het concept van ontwerpsonderzoek. Door de onderwijsactiviteiten zelf te ontwerpen, wordt de onderzoeker gedwongen om na te denken over zijn keuzes, zijn hypotheses en verwachtingen en moet hij deze expliciet formuleren. Het blootleggen van de volledige design en de uitvoering - op een manier die inzicht geeft in de gebruikte context en interventies - bevordert bovendien de mogelijkheid tot 'kopiëren' door anderen. Doorheen het onderzoek kan het leertraject en materiaal bovendien aangepast worden en krijgen we een duidelijke weerspiegeling van de evolutie die de inzichten en hypotheses van de onderzoeker ondergaan hebben. Het cyclische karakter van ontwerponderzoek typeert eveneens de relatie tussen de theorie en het instructiemateriaal. Deze relatie is immers reflexief, want de ontwikkeling van theoretische ideeën wordt gestuurd door het instructiemateriaal. Anderzijds wordt het instructiemateriaal op zijn beurt gevormd door de huidige theorie.

4.3 De voorbereidende fase

Elke macrocyclus bestaat uit drie fases: een voorbereidende fase, het onderwijs-experiment en een retrospectieve fase. In deze paragraaf zullen we de voorbereidende fase uitvoerig bespreken.

De voorbereidende fase omvat de ontwikkeling van een hypothetisch leertraject en het ontwerpen van de onderwijsactiviteiten. De term **hypothetisch leertraject** (HLT) werd geleend van Simon [70]. Hij beschreef hoe lesgeven gebeurt volgens een wiskundige lescyclus. Een dergelijke lescylcus omvat het vastleggen van de lesdoelen, het ontwikkelen van een hypothetisch leertraject en het eigenlijke lesgeven. In ons geval is het ontwikkelen van een hypothetisch leertraject een heel belangrijke schakel in de lescyclus. De ontwikkeling van een HLT gebeurt in verschillende stappen. Vooreerst is een beoordeling van het beginniveau van de leerlingen vereist. Na de bepaling van het beginniveau moet men de einddoelen vastleggen en kan men een aaneenschakeling van activiteiten ontwikkelen die het bereiken van die einddoelen bewerkstelligen. De activiteiten hebben tot doel om de geestelijke activiteit van de leerlingen op een productieve manier te bevorderen. Met het oog op het cyclische karakter van het ontwikkelingsonderzoek is het aangewezen dat de ontwerper een beschrijving voorziet waarin hij noteert waarom hij veronderstelt dat die activiteit werkt en welke geestelijke ontwikkeling er zou moeten plaatsvinden. In de praktijk zal men alles samenvatten in een tabel die de ketting van de studentenactiviteiten weergeeft (zie paragraaf 5.4.2).

Het principe van het hypothetisch leertraject lijkt misschien te suggereren dat alle leerlingen hetzelfde leertraject aan dezelfde snelheid volgen, maar dit is niet de manier waarop men een hypothetisch leertraject mag begrijpen. Het HLT vertegenwoordigt een breed leertraject dat meerdere sporen en wissels bevat. De leerlingen kunnen bijgevolg het leertraject aan een verschillende snelheid volgen maar ze evolueren wel allemaal samen en in dezelfde richting. Het hypothetisch leertraject is bijgevolg een concept dat heel goed past bij een aantal 'nieuwe' didactische principes zoals differentiatie en begeleid zelfstandig leren.

Het gebruik van een hypothetisch leertraject biedt uiteraard ook aan de onderzoeker een aantal voordelen. Het HLT is een geschikt onderzoeksinstrument. Het stelt de onderzoeker (maar ook anderen) in staat om de ontwikkeling van de onderwijsactiviteiten en de hypothesen binnen het ontwikkelingsonderzoek op te volgen en te controleren. Daarnaast biedt het aan de onderzoeker een raamwerk voor het uitvoeren van een probleemanalyse en het ontwerpen van een oplossingsstrategie.

Naast de ontwikkeling van het hypothetisch leertraject omvat de voorbereidende fase eveneens de ontwikkeling van passende onderwijsactiviteiten. Uiteraard zijn de ontwikkeling van een hypothetisch leertraject en van de onderwijsactiviteiten onlosmakelijk met elkaar verbonden. Het HLT stuurt het ontwerpen van de onderwijsactiviteiten en anderzijds leiden de keuzes die men daarbij moet maken tot een herziening van dat hypothetisch leertraject.
Tijdens het ontwikkelen van het hypothetisch leertraject en de onderwijsactiviteiten kan de ontwerper ofwel de rol van onderzoeker ofwel de rol van leerkracht aannemen. Simon [70] koos in zijn werk voor de rol van leerkracht, maar Drijvers opteerde dan weer voor de rol van onderzoeker [30]. Naar onze mening moet de ontwerper een gemengde rol 'spelen'. Om de haalbaarheid van het onderwijsexperiment in een gewone dagdagelijkse lessituatie (m.a.w. de lokale context) te garanderen, moet men de onderwijsactiviteiten ontwikkelen vanuit het perspectief van de leerkracht. Om de waarde van het onderwijsexperiment voor het eigenlijke onderzoek te waarborgen, moet men echter de rol van onderzoeker op zich nemen. Een gemengde rol dringt zich bijgevolg op.

In ons onderzoek nemen de onderwijsactiviteiten in de praktijk voornamelijk de vorm aan van lesmateriaal: een introductiesessie, werkbladen voor theorie- en oefeningenlessen, lijsten met (extra) oefeningen en toepassingen, werkbladen met supplementaire onderwerpen, powerpoint-presentaties voor het aanbrengen van de theorie, uitgewerkte oplossingen voor de verschillende computeralgebrasystemen, applets,... Afzonderlijk instructiemateriaal voor de leerkrachten werd niet expliciet voorzien. De instructies werden doorgaans mondeling of via e-mail doorgegeven aan de leerkrachten. Een uitgebreide bespreking van het ontworpen materiaal uit de beide cycli kan men terugvinden in hoofdstuk 5.

4.4 Het onderwijsexperiment

In de tweede fase van een onderzoekscylcus, nl. het onderwijsexperiment, gaat men de vooropgestelde verwachtingen en hypotheses die vervat zijn in het hypothetisch leertraject en in de onderwijsactiviteiten in de praktijk testen. Het uitvoeren van het onderwijsexperiment en het verzamelen van data uit het onderwijsexperiment kan op verschillende manieren gebeuren. Wanneer we in de literatuur de werkwijze van andere onderzoekers in gelijkaardige experimenten bestuderen, zien we dat ook zij doorgaans het onderwijsexperiment laten uitvoeren door de eigenlijke wiskundeleerkrachten van de betrokken klassen. Al naargelang het onderzoek worden hiervoor soms extra lesuren wiskunde gecreëerd maar dit leidt tot aanpassingen van de naturalistische context en beperkt bijgevolg sterk de mogelijkheid tot het veralgemenen van de verkregen resultaten.

Uit de nabespreking van soortgelijke onderwijsexperimenten blijkt ook dat de betrokken onderzoekers vaak een team van medewerkers ter beschikking hebben (zie [32], [30] en [67]). Dit team van medewerkers wordt ingeschakeld om de lessen van het onderwijsexperiment bij te wonen en te observeren, om de lessen integraal of gedeeltelijk op te nemen op video, om de notities van de leerlingen te verzamelen en te beoordelen en om interviews bij de deelnemende leerkrachten en leerlingen af te nemen. Deze werkwijze biedt uiteraard een aantal voordelen:

- Doordat de onderzoeker of een medewerker het onderwijsexperiment permanent bijwoont, kan men indien nodig ingrijpen op microniveau (dus na een lesuur of na een onderwerp).
- De observaties, de video-opnames en de interviews leveren na codering een grote hoeveelheid bijkomende data op voor de onderzoeker.

Het permanent bijwonen van het onderwijsexperiment (door de onderzoeker of door een medewerker) heeft echter ook een belangrijk nadeel. Tijdens de observaties kan de observator in de verleiding komen om zich te mengen in een klasdiscussie of om een helpende hand te bieden bij het begeleiden van de leerlingen. Inmenging van de observator zal het onderwijsexperiment (vermoedelijk positief) beïnvloeden en kan daardoor vertekende resultaten en conclusies opleveren die bovendien niet veralgemeenbaar zijn. Drijvers werd tijdens zijn onderwijsexperimenten met dit fenomeen geconfronteerd en was zich bewust van de gevaren ervan:

> ”In practice, the mini-interviews on some occasions were guided so much by the observer that they had a learning effect. (...) As the tasks got harder, students were tempted to see the observer more and more as an assistant teacher. It was difficult for the observer to reject that role, but in the meantime their help influenced the learning process. Although the students’ questions were informative, sometimes the concept of the mini-interviews about key items required the observer to refrain from answering.”
> (Drijvers, [30], p. 28)

Barab & Squire waarschuwen eveneens voor het té betrokken zijn van de onderzoekers:

> "Researchers working in schools often face difficult ethical choices. Do they stand idly by and watch a teacher struggle to use their curricula, or do they intervene providing additional support? (...) Each systematic alteration of the designed context potentially contributes to the findings and claims being more artificial and less naturalistic." (Barab & Squire, [8], p. 10)

Tijdens ons onderzoek konden we geen gebruik maken van een team van medewerkers of medeonderzoekers. Permanent observeren van de lessen door externe onderzoekers tijdens de onderwijsexperimenten was dan ook uitgesloten. Om dit probleem te omzeilen, werden de leerkrachten ingeschakeld als medeonderzoekers of vervulden ze m.a.w. de rol van 'teacher as researcher'. De leerkrachten in de experimentele conditie brachten op deze manier kwalitatieve gegevens aan en maakten aanpassingen op het microniveau mogelijk. Deze kwalitatieve data werden niet altijd even consequent verzameld. Dit zal de mate waarin we onderzoeksvraag 1 kunnen beantwoorden sterk bepalen (zie hoofdstuk 5). Gedurende de fase van het onderwijsexperiment beperkten we ons tot het bijwonen van enkele lessen in de beide cylci, een uitgebreid evaluatiegesprek met elk van de deelnemende leerkrachten van de experimentele groepen, het inkijken van de notities van enkele leerlingen en een informeel gesprek met een aantal leerlingen van de experimentele groepen. Deze handelingen leverden een beperkte hoeveelheid kwantitatieve en kwalitatieve gegevens op voor het onderzoek. Deze gegevens vervolledigden ons totaalbeeld van het onderwijsexperiment en gaven aanleiding tot 'feedforward' op macroniveau voor het vervolg van het onderzoek.

4.5 Retrospectieve fase

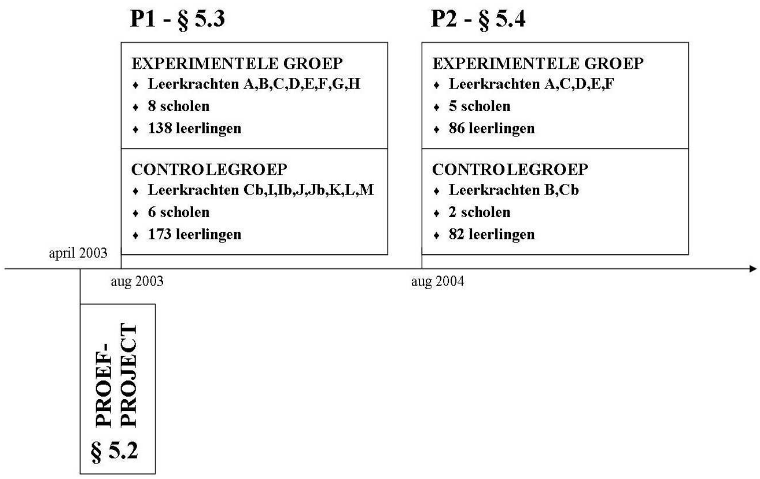
De macrocyclus wordt afgesloten met de retrospectieve fase. Een eerste stap in deze laatste fase is het verzamelen en analyseren van de gegevens. Afhankelijk van de onderzoeksmethodiek zal deze data bestaan uit een gecodeerde vertaling van de uitgevoerde observaties en interviews of numerieke (en eventueel gecodeerde) data bevatten afkomstig uit toetsen afgelegd door de leerlingen. In een tweede stap zal men vervolgens de conclusies afgeleid uit de data-analyse vertalen naar aanbevelingen voor de volgende macrocyclus. Deze aanbevelingen (de zogenaamde 'feedforward') kunnen zowel aanpassingen van het hypothetische leertraject en van de corresponderende onderwijsactiviteiten bevatten, als aanpassingen aan de theorie en beperkte praktische wijzigingen aan de organisatie van het volgende onderwijsexperiment.

In de beide cycli van ons onderzoek bestonden onze gegevens hoofdzakelijk uit numerieke en gecodeerde data afkomstig van een pre- en posttest. Een pretest werd afgenomen in de voorbereidende fase van de macrocyclus om het beginniveau van de betrokken leerlingen vast te leggen. Een posttest werd afgenomen na het onderwijsexperiment. Met deze wiskundetoetsen poogden we het probleemoplossend vermogen en de wiskundige creativiteit van de leerlingen te meten. Het was zeker niet onze bedoeling om de wiskundekennis van de leerlingen te testen. Daarom gingen we op zoek naar vragen die weinig 'exacte voorkennis' zoals formules vereisten. Uiteraard kan men de factor voorkennis nooit helemaal uitsluiten in een wiskundetoets. De toetsen bestonden uit zeven open vragen. De leerlingen kregen ongeveer 50 minuten (of dus één lesuur) de tijd om de vragen op te lossen. Het gebruik van kladbladen werd tijdens de toets niet toegestaan. De leerlingen konden hiervoor wel de achterzijde van het vragenblad gebruiken. We probeerden dus eigenlijk aan de hand van hun pogingen en probeersels een beter inzicht te krijgen in hun oplossingsmethodes. Na de afname van de toets werden de bundels aan ons terugbezorgd. Tijdens de correctie van de vragen hanteerden we een strak verbeteringsschema dat vooral gebaseerd was op het al dan niet vinden van een geschikte oplossingsmethode en het kunnen interpreteren van gegevens, figuren, grafieken en (tussen)resultaten. Dit resulteerde in een verbeteringsschema waarin een strijdige oplossing zwaarder werd 'bestraft' dan een rekenfout. De pre- en posttesten en de antwoorden en resultaten van de leerlingen worden uitgebreid besproken in bijlage B.

4.6 Praktische aspecten van het ontwikkelingsonderzoek

4.6.1 Organisatie van de macrocycli

Tijdens de uitvoering van ons onderzoek hadden we twee volwaardige onderzoekscycli voorzien, die we in het vervolg van deze tekst zullen aanduiden met de codes P1 en P2. Voorafgaand aan de cyclus P1 hebben we een kort proefproject uitgevoerd. We hernemen hier figuur 4.1. Deze figuur geeft een visuele voorstelling van de organisatie van de macrocycli. Er werd eveneens een verwijzing toegevoegd naar de corresponderende paragrafen van deze tekst waar we de verschillende macrocycli uitvoerig zullen bespreken.



Figuur 4.1: Macrocycli van het onderzoeksproject

De doorstroming tussen het proefproject en de twee onderwijscycli P1 en P2 bleef beperkt tot de leerkrachten. Alle leerkrachten die deelnamen aan P2 hebben ook deelgenomen aan P1. Enkele onder hen hadden reeds deelgenomen aan het proefproject. Dit geldt niet voor de leerlingen! Geen enkele van de 311 leerlingen die deelnamen aan P1 hebben nadien deelgenomen aan P2 of waren al betrokken bij het proefproject.

Het proefproject

Het doel van dit korte proefproject (uitgevoerd in april 2003) was tweeledig:

- We wilden een goed beeld krijgen van het niveau en de mogelijkheden van laatstejaarsleerlingen uit de ASO-richtingen met zes uur wiskunde per week.
- We wilden het concept van het onderwijsexperiment uittesten in de praktijk.

Cyclus P1

De leerlingenpopulatie van P1 bestond uit 311 leerlingen die allen in hun laatste jaar ASO zaten (17- en 18-jarigen). 276 leerlingen volgden een richting met

zes uur wiskunde per week en 35 leerlingen zaten in een richting met acht uur wiskunde per week. Geen enkele van deze leerlingen had deelgenomen aan het proefproject.
Op basis van de keuze van de deelnemende wiskundeleerkrachten werden de leerlingen opgedeeld in een experimentele groep en een controlegroep. De experimentele groep bevatte 138 leerlingen waarvan 10 leerlingen een richting met acht wekelijkse lesuren wiskunde volgden. De uiteindelijke controlegroep bestond uit 173 leerlingen. 25 leerlingen uit deze groep kwamen uit een richting met acht uur wiskunde per week.

Cyclus P2

Een jaar later volgde de tweede macrocyclus. De leerlingenpopulatie van P2 bestond uit 168 leerlingen die allen in hun laatste jaar ASO zaten (17- en 18-jarigen). 146 leerlingen volgden een richting met zes uur wiskunde per week en 22 leerlingen zaten in een richting met acht uur wiskunde per week. Geen enkele van deze leerlingen had deelgenomen aan de eerste macrocyclus.
Op basis van de keuze van de deelnemende wiskundeleerkrachten werden de leerlingen opgedeeld in een experimentele groep en een controlegroep. De experimentele groep bevatte 86 leerlingen waarvan 15 leerlingen een richting met acht wekelijkse lesuren wiskunde volgden. De uiteindelijke controlegroep bestond uit 82 leerlingen. 7 leerlingen uit deze groep kwamen uit een richting met acht uur wiskunde per week.

4.6.2 Verloop van het onderwijsexperiment

In deze paragraaf zullen we in een notendop het verloop van de onderwijsexperimenten beschrijven. Voor een uitgebreide bespreking verwijzen we opnieuw naar hoofdstuk 5.

De uitvoering van de onderwijsexperimenten viel samen met een volledig schooljaar. Cyclus P1 werd uitgevoerd tijdens het schooljaar 2003-2004. P2 werd onmiddellijk daarna uitgevoerd tijdens het schooljaar 2004-2005.

Een pretest (voor de leerlingen van de experimentele én controlegroepen) werd tijdens de eerste week van september afgenomen. Deze toetsen werden nadien aan ons terugbezorgd en gecorrigeerd in de loop van de maanden september en oktober. De data van deze toetsen beschouwen we als een maat voor het probleemoplossend vermogen en de wiskundige creativiteit van de leerlingen bij de aanvang van het onderwijsexperiment.

Alle leerlingen die deel uitmaakten van de experimentele groep kregen gedurende een periode van enkele weken (of zelfs maanden) wiskundelessen die intensief werden ondersteund met een computeralgebrasysteem. In samenspraak met de leerkrachten werd gekozen voor het onderwerp 'integralen' (zie paragraaf 5.2). Alle leerkrachten in de experimentele conditie die dit wensten, ontvingen een lessenpakket dat volledig door ons werd ontwikkeld en dit op maat van het onderzoek, de leerkracht, de leerlingen en de beschikbare infrastructuur. De lessen werden door de leerkrachten in de experimentele conditie gegeven en door de onderzoeker op de voet gevolgd.
De leerlingen van de controlegroep kregen gedurende deze periode les volgens de 'klassieke' manier. De wiskundelessen van deze leerlingen werden niet intensief ondersteund met een computeralgebrapakket. Het gebruik van een grafisch rekentoestel en sporadisch gebruik van wiskundige software was wel toegestaan.

Het onderwijsexperiment werd na het behandelen van het onderwerp 'integralen' afgesloten met een posttest. Deze toets peilde niet naar hun kennis in verband met het berekenen van integralen maar had opnieuw tot doel om het probleemoplossend vermogen en de wiskundige creativiteit van álle leerlingen te meten.

In hoofdstuk 3 en 4 bespraken we de theoretische aspecten van het eerste deelonderzoek van dit proefschrift. In hoofdstuk 5 zullen we het volledige design, de context en de uitvoering van het onderwijsexperiment beschrijven. Daarnaast besteden we ook aandacht aan de plaats van de instrumentele benadering en de didactische principes in het design en presenteren we de resultaten van de beide macrocycli.

Hoofdstuk 5

Ontwikkelingsonderzoek in de praktijk

5.1 Inleiding

In hoofdstuk 4 werd de methodologie 'ontwikkelingsonderzoek' besproken: de typische kenmerken, de structuur, de verschillende fases,... In dit hoofdstuk zullen we dieper ingaan op de uitwerking van deze methodologie in ons eigen onderzoek. In deze eerste inleidende paragraaf bekijken we de hypotheses die we vanuit de onderzoeksvragen meenamen naar het eigenlijke ontwikkelingsonderzoek.

In dit hoofdstuk gaan we a.d.h.v. enkele onderwijsexperimenten op zoek naar een antwoord op de onderzoeksvragen van het eerste deelonderzoek. Alvorens men een onderwijsexperiment kan voorbereiden en opstarten, is het belangrijk om zich de vraag te stellen wat men concreet wil bereiken en dit m.b.t. het verzamelen van algemene gegevens en numerieke data.

Onze eerste onderzoeksvraag luidde als volgt: *"Kan het gebruik van computeralgebrasystemen het wiskundig inzicht van de leerlingen verbeteren?"*
Tijdens het onderwijsexperiment zullen de leerlingen van de experimentele groepen lesmateriaal (of m.a.w. taken) gebruiken dat door de onderzoeker werden ontwikkeld (zie ook 5.4.2). We verwachtten dat door de instrumentele genese die plaats zal hebben - doordat de leerlingen de taken aanpakken m.b.v. een

hulpmiddel, nl. een computeralgebrasysteem - het wiskundig inzicht van de leerlingen in het lesonderwerp (nl. integraalrekening) positief zal beïvloed worden. Hoe kunnen we deze invloed vaststellen? In eerste instantie overwogen we om het onderwijsexperiment af te ronden met een wiskundetoets i.v.m. integraalrekening die de leerlingen van de experimentele en controlegroepen zouden afleggen. Deze toets zou een vergelijking tussen de beide groepen mogelijk maken. Dit idee werd echter niet behouden. Indien de onderzoeker die de wiskundetoets opstelt dezelfde persoon zou zijn als degene die het lesmateriaal ontwikkelde en samenstelde, zouden de resultaten van de vergelijking tussen experimentele en controlegroep nooit als objectief en geloofwaardig beschouwd kunnen worden. We beslisten daarom om de leerkrachten in de experimentele conditie in te schakelen (teachers as researchers). Zij kennen hun klasgroep en (hun verwachtingen ten aanzien van) de individuele leerlingen. Zij weten uit ervaring hoe goed de leerlingen uit een richting met zes uur wiskunde per week de integraalrekening en de bijhorende concepten beheersen. Ze zijn bijgevolg goed geplaatst om hierover een uitspraak te doen. Daartegenover staat natuurlijk dat de leerkrachten ons geen vergelijkbare numerieke data kunnen bezorgen, maar ons enkel een beschrijving van hun persoonlijke percepties en mening kunnen geven. Onze eerste operationele onderzoeksvraag luidt bijgevolg:

1. *Kunnen de wiskundeleerkrachten in de experimentele conditie een verbetering vaststellen van het wiskundig inzicht van hun leerlingen m.b.t. het onderwerp integralen en in vergelijking met hun verwachtingen t.a.v. de leerlingen uit hun klasgroep?*

Onze tweede onderzoeksvraag: *"Kan het gebruik van computeralgebrasystemen (en in het bijzonder de ontwikkeling van instrumentatieschema's) de probleemoplossende vaardigheden en de wiskundige creativiteit van leerlingen positief beïnvloeden?"*
Voor het instructiemateriaal willen we oefeningen selecteren en ontwikkelen die de creativiteit en het probleem oplossend vermogen van de leerlingen kunnen prikkelen en die bovendien passen bij de integraalrekening en haar toepassingen (zie 5.4.2). Het 'prikkelende' karakter van deze oefeningen kan veroorzaakt worden door de vraagstelling (m.a.w. door de taak) of door de wisselwerking tussen taak, object en hulpmiddel (m.a.w. door de instrumentele genese). De leerlingen van de controlegroep worden tijdens de traditionele behandeling van het onderwerp integralen in mindere mate geconfronteerd met oefeningen die hun creativiteit en hun probleem oplossend vermogen aanspreken. Door de leerlingen van de experimentele en controlegroep een pre- en posttest te laten afleggen, kunnen we hun wiskundige creativiteit en probleem oplossend vermogen meten

en vergelijken. Zelfs als de pre- en posttest worden opgesteld door de onderzoeker die het lesmateriaal ontwikkelde, kan de vergelijking op een objectieve manier gebeuren op voorwaarde dat de vragen niet handelen over het onderwerp integralen. Onze tweede operationele onderzoeksvraag kunnen we dus als volgt formuleren:

2. *Kunnen we op basis van een pre- en posttest, afgelegd door de leerlingen van een experimentele en controlegroep, vaststellen dat na meerdere interventies in de lokale context van de experimentele groep en waarbij de nadruk ligt op intensief en efficiënt gebruik van een hulpmiddel (nl. een computeralgebrasysteem) de wiskundige creativiteit en het probleem oplossend vermogen positief wordt beïvloed?*

Vanuit deze operationele vragen zullen we in paragraaf 5.2 stilstaan bij een aantal keuzes die we op voorhand hebben gemaakt. In de paragrafen 5.3, 5.4 en 5.5 beschrijven we vervolgens uitvoerig de opzet en de resultaten van het proefproject en de macrocycli P1 en P2. Ten slotte gaan we na in welke mate deze resultaten een antwoord bieden op de onderzoeksvragen 1 en 2.

5.2 Gemaakte keuzes: beschrijving en discussie

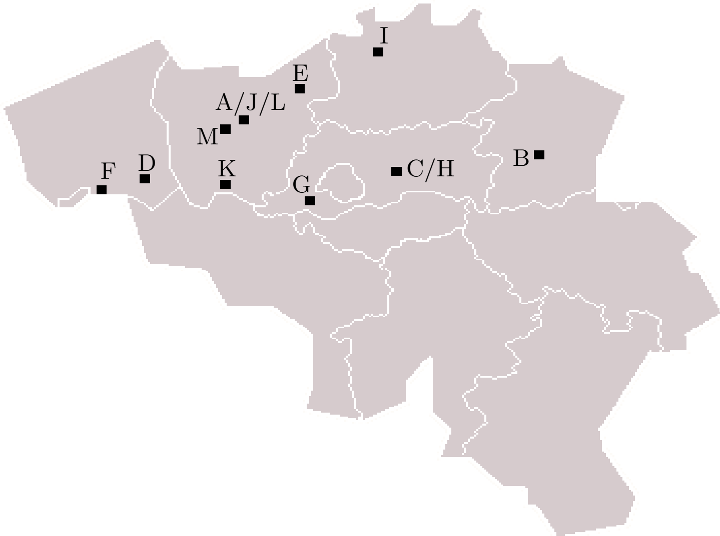
5.2.1 Leerkrachten, leerlingen en scholen

De leerlingengroep die centraal staat in ons onderzoek zijn de laatstejaars uit het ASO met zes uur wiskunde per week. We kozen voor deze specifieke groep van leerlingen omdat ze het best aansloten bij de eigen leservaringen van de onderzoeker, nl. de derde graad van het ASO (richtingen met drie en zes uur wiskunde per week) en het eerste jaar bachelor in de ingenieurswetenschappen. In vele Vlaamse scholen zijn de klassen voor de wiskundelessen echter gemengd; leerlingen met vijf en zes of zes en acht wekelijkse lesuren wiskunde volgen samen de wiskundeles. Afhankelijk van school tot school hebben deze leerlingen vier, vijf of zes gemeenschappelijke lesuren. Voor onze onderwijsexperimenten gingen we op zoek naar leerlingen met zes lesuren per week, maar klasgroepen die leerlingen met vijf of acht uur wiskunde per week bevatten, werden eveneens getolereerd. De aanwezigheid van leerlingen met vijf of acht lestijden wiskunde per week kan echter ook een invloed uitoefenen op het lesgebeuren. Zo zal het in de eerste plaats de aanpak van de leerkracht beïnvloeden. Een leerkracht met een gemengde klasgroep zal steeds gedifferentieerd werken om rekening te houden met de onderlinge verschillen tussen de twee deelgroepen waaruit de klasgroep bestaat. Het 'behoren tot een gemengde klasgroep' kan ook invloed hebben op de leerlingen. Zo kan de aanwezigheid van 8-urigen in een klasgroep van 6-urigen deze laatsten bijvoorbeeld motiveren om toch dezelfde oefeningen te proberen oplossen. Het is duidelijk dat het type 'klas' (gemengd of niet) een rol kan spelen. We zullen bij het uitvoeren van de analyses en bij de bespreking van de resultaten met deze variabele rekening moeten houden.

Uiteraard gingen we niet rechtstreeks op zoek naar een geschikte leerlingengroep, maar verliep de zoektocht via de wiskundeleerkrachten. We contacteerden een aantal leerkrachten (die we persoonlijk kenden) rechtstreeks en verspreidden bovendien een uitnodiging tot deelname via de mailinglist van een Vlaamse wiskundegroep op Yahoo. Elf leerkrachten boden zich spontaan aan. Op één leerkracht na behoorden alle leerkrachten (toevallig) tot het vrij gesubsidieerd onderwijs. De elfde leerkracht behoorde tot het net van het officieel gesubsidieerd onderwijs. Onder impuls van de pedagogisch begeleider wiskunde voor het gemeenschapsonderwijs sloten zich hierbij nog twee leerkrachten uit het gemeenschapsonderwijs aan. In totaal reageerden dus 13 leerkrachten uit 13 verschillende scholen. De scholen lagen verspreid over de vijf Vlaamse provincies (zie figuur 5.1) en vertoonden onderlinge verschillen met betrekking tot grootte, infrastructuur en algemene houding t.a.v. het gebruik van ICT. De scholen en de corresponderende wiskundeleerkrachten zullen in het vervolg van deze tekst aangeduid worden met een lettercode gaande van A tot M (zie tabel 5.1, p. 80). Er werd van de deelnemende wiskundeleerkrachten geen bepaalde interesse en/of voorkennis met betrekking tot CAS geëist. Sommige van de deelnemende leerkrachten hadden slechts sporadisch wiskundige software of een computeralgebrapakket gebruikt tijdens het opstellen of verbeteren van een toets of examen of tijdens de wiskundelessen. Andere wiskundeleerkrachten waren al heel erg bedreven in het gebruik van CAS en wilden dit (met ondersteuning van het onderwijsexperiment) verder uitbouwen.

Alle deelnemende scholen behoorden tot het gewoon secundair onderwijs. Ze behoorden tot de drie verschillende netten, lagen in verschillende regio's en hadden een verschillende infrastructuur. De leerlingen behoorden bovendien tot uiteenlopende richtingen (wiskunde-wetenschappen, wiskunde-economie, latijn-wiskunde,...). Er was echter één constante: alle leerlingen hadden minstens zes uur wiskunde per week[1]. De deelnemende leerkrachten vertoonden eveneens

[1]In school H namen een klein aantal leerlingen met vijf wekelijkse lestijden wiskunde deel aan het proefproject en aan het eerste onderwijsexperiment. De resultaten van deze leerlingen



Figuur 5.1: Spreiding van de deelnemende scholen

onderlinge verschillen. De ene leerkracht had bijvoorbeeld meer ervaring met het gebruik van CAS dan een ander. Deze factoren zullen het mogelijk maken om de verkregen resultaten uit de onderwijsexperimenten - mits de nodige voorzichtigheid - te veralgemenen naar andere Vlaamse scholen uit het algemeen secundair onderwijs. Deze voorzichtigheid is uiteraard gebaseerd op het feit dat een onderwijsexperiment in een reële onderwijssituatie mogelijk beïnvloed wordt door factoren die de onderzoeker niet zelf in de hand heeft.

5.2.2 Het gebruik van experimentele en controlegroepen

Omdat het onze bedoeling was om doorheen het onderzoek vergelijkende data te verzamelen, hebben we gekozen voor een opsplitsing van de leerlingenpopulatie in een experimentele en controlegroep. De deelnemende leerkrachten konden zelf kiezen of hun leerlingengroep de rol van experimentele of controlegroep zouden vervullen. Er is hier bijgevolg geen sprake van een aselecte steekproef maar van een opportuniteitssteekproef, waarbij we dus rekenden op de vrijwillige en bereidwillige medewerking van de deelnemende leerkrachten volgens de 'rol' die ze zelf willen vervullen. Dit brengt enige risico's met zich mee. Leerkrachten

werden niet opgenomen in de data van ons onderzoek.

die zich vrijwillig aanbieden als leerkrachten in de experimentele conditie:

- zijn misschien gemotiveerder dan leerkrachten die geselecteerd worden om deel te nemen aan de experimentele conditie en zullen hun rol van 'teacher as researcher' mogelijk plichtsbewuster vervullen;

- hebben mogelijk een uitgesproken voorkeur voor het gebruik van computeralgebrasystemen en meer ervaring met het gebruik van CAS in de wiskundeles waardoor de uitvoering en de resultaten van een dergelijk onderwijsexperiment moeilijker veralgemeend kunnen worden, doordat de lokale context van deze leerkrachten verschilt van de context waarin de doorsnee-leerkracht werkt.

Indien we onze leerkrachten in de experimentele conditie met elkaar vergelijken (zie 5.4.4), blijkt duidelijk dat niet alle leerkrachten zich 'spontaan' hebben aangeboden en dat ze niet allemaal even ervaren zijn in en enthousiast over het gebruik van CAS. Op deze manier wordt een mogelijke bias, die kon veroorzaakt worden door het werken met een opportuniteitssteekproef, vermeden. Anderzijds is de overtuiging (en het enthousiasme) van de deelnemende leerkrachten een belangrijke variabele, zoals zal blijken uit de bespreking van de onderwijsexperimenten (zie paragraaf 5.4.4 en 5.5.4). Bij de analyse en bespreking van de resultaten zullen we ook met deze variabele rekening houden.

In sommige scholen sloten, net voor de start van de eerste macrocyclus, wiskundecollega's van een 'leerkracht in de experimentele conditie' zich aan bij het onderwijsexperiment als 'controleleerkracht'. Deze leerkrachten kregen eveneens een lettercode die bovendien verwijst naar de code van de leerkracht die oorspronkelijk het initiatief nam. Zo is bijvoorbeeld de code Cb (C bis) de code van de collega's van leerkracht C die zich eveneens aansloten bij het onderzoek (zie figuur 4.1, p. 61).

5.2.3 Het gebruik van computeralgebrasystemen

Zoals reeds aangegeven in de onderzoeksvragen (zie paragraaf 2.7) hebben we ons gedurende dit onderzoek geconcentreerd op het gebruik van computeralgebrasystemen in het wiskundeonderwijs. Ook voor de onderwijsexperimenten kozen we voor het gebruik van CAS. We hadden hiervoor uiteenlopende redenen:

- Om aan te tonen dat intensief gebruik van CAS niet noodzakelijk een grote meerkost betekent voor de scholen, kozen we voor het gebruik van computers. In elke school zijn er computers voorhanden. Sommige scholen hebben wiskundelokalen, een open leercentrum of multimedialokalen met één of meerdere computers en uiteraard hebben alle scholen computerklassen. Deze computerklassen zijn echter vaak bezet en meestal enkel beschikbaar na reservatie. Deze reservaties (vaak meerdere weken op voorhand of één of meerdere vaste lesuren per week) dwingen de wiskundeleerkracht om een strakke regeling te volgen. Dit is niet altijd gemakkelijk maar ook niet onmogelijk!

- Zowel grafische rekenmachines als wiskundige software evolueren snel. Na verloop van jaren zullen verschillende types van rekentoestellen circuleren binnen eenzelfde school. Dit zal voor de leerkrachten een aantal ongemakken veroorzaken. Functies van bepaalde toetsencombinaties of menu's zullen verschillen van toestel tot toestel of met andere woorden van leerling tot leerling. Als wiskundeleerkracht is het een stuk eenvoudiger om ervoor te zorgen dat alle leerlingen dezelfde instellingen gebruiken, indien ze allemaal gebruik maken van hetzelfde computeralgebrapakket.

- Het beeldscherm van een computer is uiteraard groter en heeft een hogere resolutie. Werken met een pc levert bijgevolg duidelijker grafieken op, maar ook het algebraïsche werk is overzichtelijker. Dit geldt vooral voor lange algebraïsche uitdrukkingen, ingewikkelde vergelijkingen en grote matrices. Bij een symbolisch of grafisch rekentoestel worden deze 'objecten' opgesplitst over meerdere lijnen, wat de leesbaarheid niet ten goede komt.

- Indien de leerlingen bvb. met Derive kunnen werken, betekent dit uiteraard niet dat ze automatisch met alle andere computeralgebrasystemen kunnen werken. Toch zijn er veel gelijkenissen tussen de onderlinge pakketen en de kennis van een bepaald computeralgebrapakket zal de leerlingen zeker helpen om - in een later stadium of tijdens een andere (hogere) studie - met een ander pakket te leren werken. De commando's (bv. `int` voor de berekening van een integraal) zijn immers vaak dezelfde in de verschillende pakketen en vereisen ongeveer dezelfde argumenten. Deze uniformiteit tussen de commando's van de verschillende computeralgebrasystemen is bovendien een reden waarom we het gebruik van een Engelstalig computeralgebrasysteem zouden aanbevelen boven dat van een Nederlandstalig pakket.

- Het argument bij uitstek dat vaak gebruikt wordt om de verplichte aankoop van een grafisch rekentoestel te rechtvaardigen, is het 'gelijkheidsprincipe'. Als alle leerlingen eenzelfde grafisch rekentoestel voorhanden hebben, kunnen ze thuis het gebruik ervan verder inoefenen en kunnen de leerlingen datzelfde toestel meebrengen naar toetsen en examens. Een minderheid van de leerlingen heeft thuis geen computer en op basis hiervan beslissen sommige leerkrachten dat het gebruik van een computer tijdens de lessen en zeker tijdens toetsen en examens niet verantwoord is (zie paragraaf 6.2.4).

- Een aantal leerkrachten vermijdt het gebruik van computers uit schrik voor eventuele technische problemen of met andere woorden wegens hun eigen 'onkunde'. Het is echter niet nodig dat wiskundeleerkrachten computerexperts zijn. Uiteraard is enige elementaire technische kennis noodzakelijk maar indien de leerkrachten en de school ondersteund worden door een ICT-coördinator kan men door het goed onderhouden van de computers reeds veel problemen vermijden.

- Indien men met een grote klasgroep wenst gebruik te maken van een computerklas, is het vaak noodzakelijk dat leerlingen per twee aan het werk gaan. Een aantal leerkrachten zien dit als een nadeel. Nochtans worden de leerlingen op deze manier gedwongen om samen te werken en om samen over wiskunde te praten. Alhoewel de leerlingen hiervoor vaak niet-correcte wiskundetaal gaan gebruiken, bevorderen deze gesprekken hun wiskundig inzicht [37].

  In onze onderwijsexperimenten werd het al dan niet 'per twee werken' niet opgelegd door de onderzoeker, maar volledig bepaald door de infrastructuur van de school. De leerlingen van de leerkrachten A, D, E en F hadden de mogelijkheid om individueel te werken aan een computer (zie paragraaf 5.4.4). Bij de andere leerkrachten waren de leerlingen verplicht om per twee of zelfs per drie aan één computer te werken door het beperkte aantal computers in het (computer)lokaal. Het al dan niet 'samenwerken' is een variabele die we tijdens de analyse en de bespreking van de resultaten in rekening zullen brengen. Toch willen we ook opmerken dat uit de lesobservaties duidelijk bleek dat de leerlingen die in principe individueel werkten, toch samenwerkten met hun collega's links en rechts van hen. Dus ook bij de leerkrachten A, D, E en F was er sprake van 'samenwerkend leren'.

De leerkrachten in de experimentele conditie kozen elk voor zichzelf een geschikt computeralgebrasysteem.

- De leerkrachten A, F, G, H, I, J en K kozen voor Derive. Het pakket was op elk van deze scholen beschikbaar. De leerkrachten A, G en H waren goed vertrouwd met het programma. Leerkrachten F en K hadden enige kennis van Derive, maar vooral de leerkrachten I en J waren onervaren in het gebruik van Derive (zie tabel 5.1). Mogelijk heeft de 'ervaring van de leerkracht' invloed gehad op het verloop van de onderwijsexperimenten en de daaruit voortvloeiende resultaten. Bij de analyse en de bespreking van de resultaten zullen we ook met deze variabele rekening houden.

- De leerkrachten C en D kozen voor Mathcad. Ze vonden dit programma krachtiger en daardoor geschikter dan Derive. Ze hadden het pakket allebei voorhanden en hadden Mathcad al in het verleden spontaan gebruikt tijdens hun wiskundelessen.

- Leerkracht E koos voor Maple. Via een jongere collega kwam hij in contact met Maple en ondertussen is hij een overtuigde voorstander van dit computeralgebrasysteem. Hij is ervaren in het gebruik van Maple, ontwikkelt zijn eigen e-cursussen en volgt steeds de nieuwste ontwikkelingen op de voet.

- Leerkracht B verkoos een weg zonder licentiekosten. Deze leerkracht wou geen geld 'verspillen' aan (dure) licenties. Voor deze leerkracht waren enkel Java-applets, internetknoppen en 'freeware' toegestaan. We kozen uiteindelijk - in samenspraak met de leerkracht en de directie van de school - voor een combinatie van dit alles en stelden dit via een website ter beschikking van de leerkracht en de leerlingen. Deze keuze maakte het bovendien mogelijk dat alle deelnemende leerlingen het materiaal en de knoppen ook thuis konden gebruiken (zie figuur 5.4).

De leerlingen in de experimentele conditie zullen tijdens de uitvoering van het onderwijsexperiment gebruik maken van verschillende computeralgebrasystemen. We zullen bij de analyse en de bespreking van de resultaten ook met deze variabele rekening houden. We verwachten evenwel dat deze vrije keuze geen verschillen zal veroorzaken binnen de experimentele groep. De aard van het computeralgebrapakket wordt immers opgevangen door de onderlinge verschillen in het instructiemateriaal (zie 5.4.2). Het computeralgebrasysteem is immers slechts een hulpmiddel dat door de gebruiker wordt omgevormd tot een instrument. Bij dit proces van de instrumentele genese speelt de taak een belangrijke rol. Twee verschillende hulpmiddelen kunnen, ten gevolge van verschillende taken, omgevormd worden tot twee gelijke instrumenten. Voor een voorbeeld verwijzen we naar p. 114. Daar bespreken we het onderlinge verschil tussen Derive en Mathcad m.b.t. partieel integreren.

Codenaam	Plaats	Net	Leerlingen voorzien als	Onderwijs-experiment uitgevoerd met	Gebruikte ontworpen materiaal
A	Gent	VGO	Exp. groep	Derive	neen
B	Hasselt	VGO	Exp. groep	applets	ja
C	Heverlee	VGO	Exp. groep	Mathcad	ja
Cb	Heverlee	VGO	Controlegroep	nvt[2]	nvt[2]
D	Kortrijk	VGO	Exp. groep	Mathcad	ja
E	Sint-Niklaas	VGO	Exp. groep	Maple	neen
F	Wervik	VGO	Exp. groep	Derive	ja
G	Halle	VGO	Exp. groep	Derive	ja
H	Leuven	VGO	Exp. groep	Derive	ja
I	Kapellen	GO	Exp. groep	Derive	ja
Ib	Kapellen	GO	Controlegroep	nvt[2]	nvt[2]
J	Gent	GO	Exp. groep	Derive	ja
Jb	Gent	GO	Controlegroep	nvt[2]	nvt[2]
K	Ronse	VGO	Exp. groep	Derive	ja
L	Gent	OGO	Controlegroep	nvt[2]	nvt[2]
M	Deinze	VGO	Controlegroep	nvt[2]	nvt[2]

Tabel 5.1: Overzichtstabel van de deelnemers aan de eerste macrocyclus

[2]Niet van toepassing

Uiteraard speelt in de instrumentele genese ook het object (de leerling) een belangrijke rol. Zo is het mogelijk dat ondanks onze voorzorgen (nl. het aanpassen van de taak aan het hulpmiddel) de leerling een ander instrumentatieschema of (recursieve) reeks van instrumentatieschema's gaat ontwikkelen dan degene die we eigenlijk hadden voorzien. Ook dit wordt door de (volledige) taak of dus het instructiemateriaal opgevangen. Indien een leerling een computeralgebrapakket op een 'verkeerde manier' omvormt tot een instrument (bvb. tot een tekeninstrument i.p.v. een rekeninstrument, zie voorbeeld 1, p. 35) dan zal deze leerling bij een volgende oefening merken dat deze keuze niet veralgemeenbaar of minder geschikt is. Ook de leerkracht en medeleerlingen (bvb. een eventuele sherpa-leerling of de leerling aan de computer naast de desbetreffende leerling) kunnen de leerling wijzen op het 'verkeerde gebruik'.

In tabel 5.1 worden de kenmerken van de experimentele en controlegroepen die deelnamen aan de eerste macrocyclus samengevat.

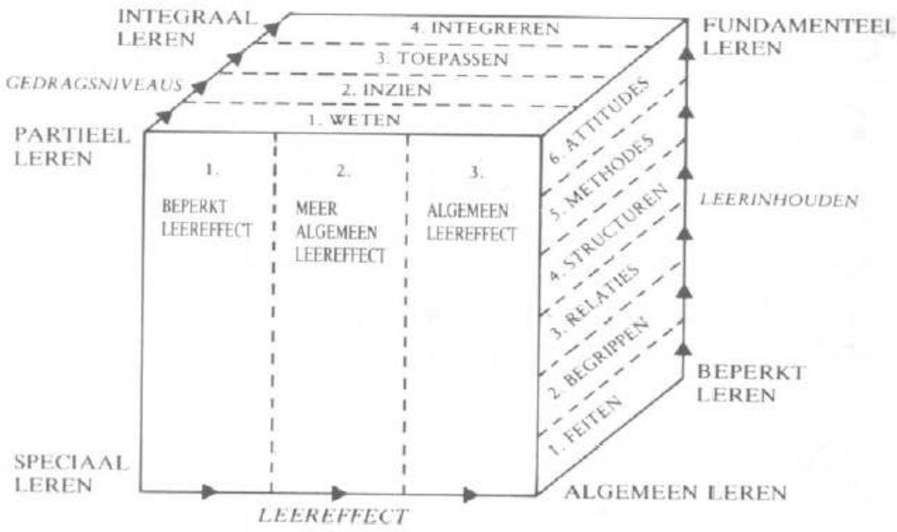
5.2.4 Het lesonderwerp

De leerlingen die centraal staan in dit deelonderzoek zijn laatstejaarsleerlingen die een richting van het algemeen secundair onderwijs met zes wekelijkse lestijden wiskunde volgen. Ook leerlingen uit gemengde klasgroepen die vijf of acht wekelijkse lestijden wiskunde volgden, werden getolereerd (zie paragraaf 5.2.1). Door de verschillende netten en door het gebruik van leerplannen per graad zijn de onderwerpen die in het laatste jaar van het secundair onderwijs worden behandeld verschillend van school tot school. Een onderwerp dat echter in alle scholen op het programma van het zesde jaar staat, zijn de integralen. Bovendien leent het onderwerp integralen zich uitstekend tot het gebruik van computeralgebrasystemen (zie [82]). Alle deelnemende leerkrachten verklaarden zich akkoord met dit onderwerp.
Het lesonderwerp 'integralen' werd gekozen vanuit praktische overwegingen. Maar dit vormde geen obstakel voor ons onderzoek omdat de keuze van het lesonderwerp van ondergeschikt belang was in de opzet en uitvoering van het ontwikkelingsonderzoek. We zijn er immers van overtuigd dat bijna elk onderwerp uit het leerplan wiskunde van de derde graad bruikbaar was geweest voor de uitvoering van het eerste deelonderzoek.

In het vervolg van deze paragraaf zullen we het lesonderwerp 'integraalrekening' a.d.h.v. het didactisch model van De Block & Heene analyseren (zie figuur 5.2). We zullen nagaan tot welke niveaus de leerdoelen i.v.m. integraalrekening uit het leerplan (minimaal) behoren en tot welk niveau men bepaalde leerdoelen kan brengen door in het bijzonder gebruik te maken van een computeralgebrasysteem.

De vormingskubus van De Block & Heene is een hiërarchisch classificatiesysteem dat de categorieën van leerdoelen en de relaties ertussen aanduidt (zie figuur 5.2). In de vormingskubus wordt onderscheid gemaakt tussen drie verschillende niveaus, die op hun beurt opgedeeld zijn in verschillende deelniveaus:

1. Gedragsniveaus:
   (a) Weten: (parate) kennis en deze kunnen reproduceren
   (b) Inzien: conclusies die resulteren uit het op elkaar betrekken van inhouden van het weten, het inzien van verbanden
   (c) Toepassen: het gebruiken van nieuwe kennis bij nieuwe problemen
   (d) Integreren: het spontaan toepassen van het geleerde, daar waar het noodzakelijk is
2. Inhoudsniveaus:
   (a) Feiten: namen, plaatsen, data, symbolen, beelden,...
   (b) Begrippen: abstractheden die berusten op interne en wezenlijke gelijkheidskenmerken van verschillende inhouden
   (c) Relaties: uitspraken die betrekking hebben op een enkelvoudig en vast verband tussen twee inhouden of hun kenmerken
   (d) Structuren: meervoudige relaties die geordend zijn
   (e) Methodes: welbepaalde werkwijzen of procedures voor het oplossen van problemen
   (f) Attitudes: houding of instelling die tot uiting komt in overeenstemmende gedragspatronen
3. Transferniveaus: vaktypisch (dus beperkt), vrij algemeen en algemeen



Figuur 5.2: Het didactisch model van De Block & Heene, [21]

We bekijken nu het lesonderwerp 'integralen' t.o.v. dit didactisch model.

1. Inhoudsniveaus

Op het niveau van de leerinhouden is het leren van de leerlingen meestal beperkt tot 'feiten', 'inzien' en 'relaties'. Toch kunnen we ook enkele voorbeelden vinden op het niveau van 'relaties' en 'methodes'.

1. Feiten:

    - $\int f(x)\ dx$ is de onbepaalde integraal van de functie f.
    - Als f continu is over $[a,b]$ noemt men $\int_a^x f(x)\ dx$ de integraalfunctie van f over $[a,b]$.
    - Een integraal heet convergent als $\int_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}$.

2. Begrippen:

    - We noemen elke functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x)$ en waarvoor f de afgeleide functie is van F een primitieve functie van f.

- Als voor elke $x \in [a,b]$ geldt dat f continu is in x, dan bestaat er een $c \in [a,b]$ waarvoor $\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(c)$. Men noemt c de middelwaarde van f in $[a,b]$.
- Partiële integratie: $\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\ dx$.

3. Relaties:

   - Het maatgetal van de oppervlakte inbegrepen tussen de grafiek van f, de x-as en de rechten door a en b evenwijdig aan de y-as is gelijk aan $\int_a^b f(x)\ dx$.
     Dus: relatie bepaalde integraal - oppervlakte.
   - $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ met F een primitieve functie van f en f continu in $[a,b]$.
     Dus: relatie bepaalde integraal - primitieve functie.
   - Lengte van een boog: $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$.
     Dus: relatie lengte - bepaalde integraal.

4. Structuur: samenhang tussen de begrippen bepaalde integraal en reekssom.

5. Methodes:

   - Substitutiemethode en partiële integratie voor het berekenen van (on)bepaalde integralen.
   - Methodes voor het numeriek benaderen van integralen.

Over de plaats van de bovenstaande voorbeelden in de taxonomie kan men uiteraard discussiëren. Het is niet altijd eenvoudig om een bepaalde leerinhoud op een eenduidige manier te classificeren. Zo geeft de formule $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$ de relatie weer tussen de begrippen lengte en bepaalde integraal en hebben we deze formule bijgevolg gesitueerd op het inhoudsniveau 'relaties'. Indien de leerlingen deze formule enkel memoriseren en ze niet kunnen afleiden, situeert deze formule zich echter op het inhoudsniveau 'begrippen'.
Voor het begrip partiële integratie kunnen we een gelijkaardige opmerking maken. Indien partiële integratie aangebracht wordt als een vaste methode voor het berekenen van een bepaalde klasse van integralen kunnen we deze leerinhoud plaatsen op het inhoudsniveau 'methodes', maar voor bepaalde leerlingen kan de partiële integratie zich ook situeren op het inhoudsniveau 'begrippen'. We denken dan in het bijzonder aan die leerlingen die de oefening "Bereken

$\int x \ln x \; dx$." niet kunnen oplossen, maar de bijna analoge oefening "Bereken $\int x \ln x \; dx$ m.b.v. partiële integratie." wel kunnen oplossen.

2. Gedragsniveaus

Ook voor de gedragsniveaus bereiken de leerlingen het hoogste niveau niet. Het leren blijft partieel of m.a.w. beperkt tot 'weten' en 'inzien'. Enkele voorbeelden:

1. Weten: de leerlingen zijn vertrouwd met de begrippen primitieve functie, bepaalde en onbepaalde integraal en kunnen de definities reproduceren.

2. Inzien: de leerlingen zien verbanden tussen de begrippen primitieve functie, bepaalde en onbepaalde integraal en kunnen deze verbanden verwoorden onder de vorm van eigenschappen, stellingen en standaardintegralen.

De plaats van de bovenstaande voorbeelden kan opnieuw variëren van leerling tot leerling. De wiskundeleerkracht zal er steeds naar streven om bvb. de eigenschappen

$$\int_a^b f(x) \; dx = \int_a^c f(x) \; dx + \int_c^b f(x) \; dx en \int_a^b f(x) \; dx = -\int_b^a f(x) \; dx$$

op het niveau 'inzien' te krijgen, maar sommige leerlingen blijven steken op het niveau 'weten'. Na het studeren van de leerstof kunnen ze deze eigenschappen reproduceren maar niet verklaren.

Ten opzichte van de inhoudsniveaus blijft het 'inzien' meestal beperkt tot 'feiten' en 'begrippen'. Zo beschikken de leerlingen meestal niet over inzicht in de relatie $\int_a^b f(x) \; dx = F(b) - F(a)$. Ze kennen een klasse van functies die aan deze relatie voldoet, maar zijn doorgaans niet vertrouwd met functies die niet aan deze relatie voldoen, waardoor we niet kunnen spreken van werkelijk 'inzicht'.
Het gedragsniveau 'toepassen' wordt slechts door een beperkt aantal leerlingen bereikt. Hiervoor is het immers noodzakelijk dat men het geleerde kan gebruiken (of m.a.w. toepassen) in gelijkaardige nieuwe problemen. Zelfs de toepassingen op de integraalrekening behoren doorgaans niet tot het gedragsniveau 'toepassen'. De modale leerling van een 6-uurs richting beschikt niet over voldoende inzicht in de samenhang tussen de begrippen bepaalde integraal en reekssom om in een nieuwe toepassing of probleem dit inzicht te gebruiken en bvb. zelf de formule voor de lengte van een boog af te leiden.

3. Transferniveaus

Het leereffect binnen het lesonderwerp 'integralen' is vaak beperkt tot het vak wiskunde. Het leerplan wiskunde voorziet toepassingen van de integraalrekening uit de natuurkunde en economie, maar deze (afsluitende) toepassingen worden door tijdsgebrek vaak heel beknopt behandeld.

Op welke manier kan CAS bijdragen tot het ombuigen van 'beperkt leren' naar 'fundamenteel leren' en van 'partieel leren' naar 'integraal leren'? We illustreren de vele mogelijkheden a.d.h.v. een paar voorbeelden.

Met behulp van een computeralgebrasysteem kan men

(a) 'inzien' uitbreiden naar 'relaties', 'structuren' en 'methodes'.

In het werkblad *'De bepaalde integraal: oppervlakte onder een parabool'* (zie voorbeeld 1, p. 106) worden de grafische en numerieke mogelijkheden van het CAS gebruikt om de leerlingen benaderingen te laten berekenen voor de oppervlakte van een gebied tussen een grafiek van een functie en de x-as. Op deze manier wordt het inzicht van de leerlingen in de relatie tussen bepaalde integraal en oppervlakte en de samenhang tussen het begrip bepaalde integraal en reekssom versterkt. Aan de relatie tussen bepaalde integraal en oppervlakte wordt niet alleen bij de invoering van het begrip 'bepaalde integraal' gewerkt. We zullen elke gelegenheid te baat nemen en m.a.w. het wiskundig inzicht in het onderwerp 'integralen' proberen te verhogen door de grafische mogelijkheden van het computeralgebrasysteem optimaal te benutten.
Het gebruik van CAS kan ook het inzicht van de leerlingen in 'methodes' bevorderen. We denken dan in het bijzonder aan de integratietechniek 'partiële integratie' en een aantal benaderingsmethodes voor het numeriek benaderen van bepaalde integralen. De kracht van het gebruik van een computeralgebrapakket bij het behandelen van de integratietechniek 'partiële integratie' bestaat eruit dat de leerlingen het CAS kunnen gebruiken om experimenteel uitdrukkingen te vinden voor u en v uit de formule $\int udv = uv - \int vdu$. Deze formule stelt ons in staat om een bepaalde klasse van integralen te berekenen en maakt het opstellen van een aantal recursieformules mogelijk. Door te experimenteren kunnen de leerlingen de gunstige invloed op de berekeningen vaststellen van een geschikte keuze voor u en v en hen op deze manier inzicht bijbrengen in de wijze waarop

ze het best u en v in gelijkaardige oefeningen kiezen (zie voorbeeld 7, p. 114). Voor het onderwerp 'numerieke integratie' kunnen we opnieuw de grafische en numerieke mogelijkheden van het CAS gebruiken om het inzicht van de leerlingen in de numerieke methodes (nl. werkwijze en efficiëntie) te bevorderen (zie voorbeeld 5, p. 112).

(b) het gedragsniveau 'toepassen' bereiken.

Zoals reeds aangegeven in de voorgaande paragraaf kunnen we d.m.v. de grafische en numerieke mogelijkheden van CAS de samenhang tussen bepaalde integraal en reekssom versterken. Dit garandeert evenwel niet dat de leerlingen deze samenhang in gelijkaardige situaties zelf kunnen toepassen. Pas indien deze samenhang door de leerkracht en samen met de leerlingen in vele verschillende toepassingen aangewend wordt, zullen de leerlingen dit zelf zullen kunnen toepassen in een nieuwe gelijkaardige situatie.
Door het gebruik van CAS zal de leerkracht meer (verschillende) toepassingen kunnen behandelen doordat men de berekening van de integralen kan overlaten aan het computeralgebrasysteem. Daarenboven kan de leerkracht m.b.v. demonstraties en/of presentaties de grafische mogelijkheden van het CAS gebruiken om de samenhang tussen bepaalde integraal en reekssom te illustreren. Bijvoorbeeld in het bestand `volumeberekening.ppt` (zie bijlage D) wordt de samenhang tussen bepaalde integraal en reekssom toegepast op de berekening van het volume van een omwentelingslichaam. Alle figuren werden gemaakt met Maple en nadien geïmporteerd in het programma PowerPoint.

(c) werken op het inhoudsniveau 'attitudes'.

- In een computeralgebrasysteem moeten de leerlingen een correcte en strikte syntaxis hanteren. De leerlingen worden gedwongen om nauwkeurig en ordelijk te werken.

- Het gebruik van CAS bevordert een controlerende ingesteldheid en de kritische zin van de leerlingen. Men kan het pakket aanwenden om tussen- en eindberekeningen te controleren, maar ook a.d.h.v. een grafische voorstelling kan men bepaalde vermoedens (snel) controleren.

- Door frequent gebruik te maken van een computeralgebrasysteem krijgen de leerlingen snel de gewoonte om een oefening, indien mogelijk, te voorzien van een figuur. Het visualiseren van een situatie binnen een probleemstelling is een goede houding. Een grafische voorstelling kan immers leiden tot vermoedens en/of inzichten die op hun beurt kunnen bijdragen tot de oplossing van het probleem.

(d) het leereffect uitbreiden van 'beperkt' naar '(vrij) algemeen'.

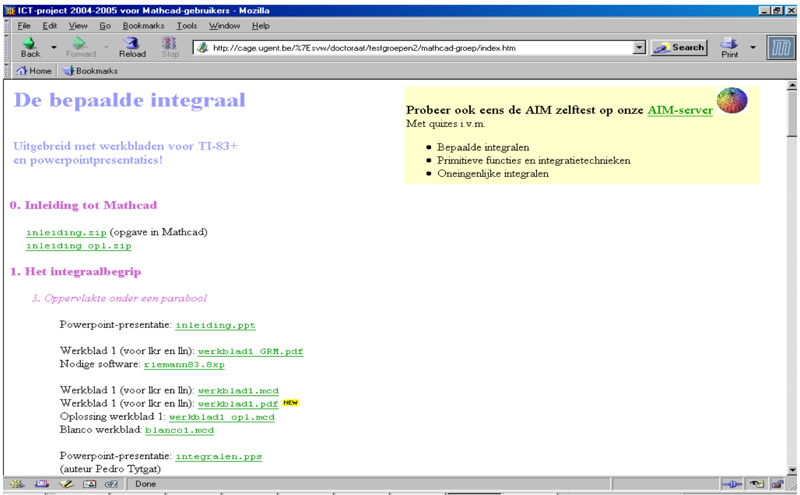
- De attitudes 'zin voor nauwkeurigheid', 'controlerende ingesteldheid', 'kritische zin' en 'visualiseren' zijn niet beperkt tot de wiskunde maar kunnen ook in (vrij) algemene situaties aangewend worden.
- Zoals reeds eerder vermeld kunnen de leerkrachten en leerlingen door het gebruik van een computeralgebrasysteem meer toepassingen behandelen doordat het rekenwerk tijdens het behandelen van de toepassingen wordt overgenomen door het CAS. Op deze manier komt er ruimte vrij voor extra toepassingen uit de wiskunde (bvb. oppervlakteberekening in poolcoördinaten en het oplossen van differentiaalvergelijkingen) en uit de natuurkunde.

5.2.5 Bestanden ter beschikking stellen

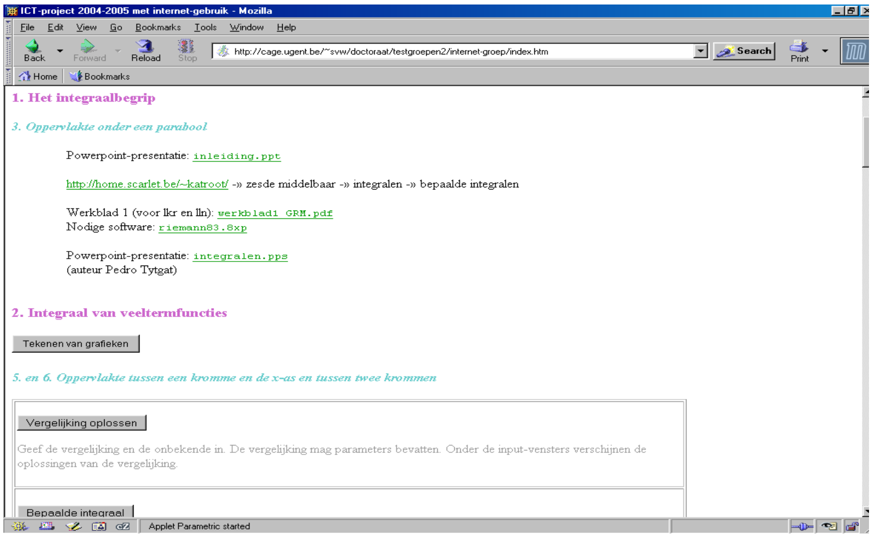
Het ontwikkelde materiaal werd aan de leerkrachten in de experimentele conditie doorgegeven via verschillende websites. Er werd voor elke school of per groep van scholen een aparte website voorzien. De inhoud van deze site werd bepaald door het gebruikte computeralgebrasysteem, de taal van het pakket en het handboek (zie figuur 5.3).

De website van leerkracht B verschilde echter sterk van deze van de andere leerkrachten doordat deze site behalve links naar de werkbladen en oefeningenlijsten ook nog internetknoppen en links naar applets bevatte. Voor de leerkrachten A en E werden geen websites voorzien. Uit gesprekken[3] met en observatie van deze leerkrachten bleek dat ze reeds over voldoende eigen materiaal beschikten dat bovendien ontworpen en gebracht werd volgens het theoretische raamwerk van ons onderzoek (nl. de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen en de ondersteunende didactische principes).

[3]Tijdens een voorbereidend gesprek werd het onderzoek uitgebreid toegelicht en werd de leerkracht in de experimentele conditie op de hoogte gebracht van de uitgangspunten van het onderzoek.



Figuur 5.3: Website voorzien voor de leerkrachten C en D



Figuur 5.4: Website voorzien voor leerkracht B

Door gebruik te maken van deze websites was alle materiaal constant beschikbaar via een overzichtelijke index en dit zowel voor de leerkrachten als voor de leerlingen. Sommige leerkrachten verplaatsten de bestanden naar een elektronische leeromgeving. Zo gaf leerkracht C op deze manier de bestanden per onderwerp vrij aan haar leerlingen. Deze bestanden waren steeds vergezeld van een kalender waarop de leerlingen de planning en de regeling voor de klaslokalen konden opvolgen. Andere leerkrachten hadden op school geen internetverbinding voorhanden en waren bijgevolg verplicht om de bestanden te verspreiden via de server van de school of deze op de harde schijf van elke computer te plaatsen.

5.2.6 Klasopstelling

Het concrete gebruik van de bestanden in de praktijk werd grotendeels overgelaten aan de leerkrachten in de experimentele conditie. Zo kozen de leerkrachten zelf het lokaal, het aantal leerlingen per computer en het aantal lesuren per week dat er besteed werd aan integralen met CAS. Deze keuzes werden uiteraard sterk beïnvloed door de infrastructuur van de school zelf.
De leerkrachten konden ook zelf kiezen op welke manier ze de werkbladen aanbrachten en welke werkbladen ze wel of niet zouden gebruiken. Een aantal leerkrachten vroeg hierover wel enig advies. Tijdens de eerste cyclus was het voor hen soms moeilijk om in te schatten of de leerlingen al dan niet in staat zouden zijn om een werkblad (begeleid) zelfstandig te behandelen.

5.2.7 Didactische principes

Tijdens het ontwikkelen van het hypothetisch leertraject (zie paragraaf 5.4.1) en de bijhorende onderwijsactiviteiten baseerden we ons op vier belangrijke didactische principes:

1. **'White box-Black box'-principe** (zie paragraaf 3.3.2)

   In een eerste stadium voerden de leerlingen de berekeningen van bepaalde en onbepaalde integralen uit met de hand en leerden de specifieke integratietechnieken. Eens de leerlingen voldoende vertrouwd waren met deze pen-en-papier-technieken stonden we het gebruik van een computeralgebrasysteem voor de berekening van integralen toe in het vervolg van het onderwijsexperiment. Deze werkwijze beperkte het 'black box'-karakter van het computeralgebrasysteem. De procedures van het computeralgebrapakket werden transparanter voor de leerlingen en doordat ze konden steunen op hun kennis van de pen-en-papier-technieken, konden ze de technieken van het computeralgebrasysteem (gedeeltelijk) doorzien en voorspellen.

2. **Vensterdidactiek** (zie paragraaf 3.3.4)

   Het gebruik van CAS in wiskundeonderwijs stelde de leerlingen in staat om een bepaald concept of probleem terzelfdertijd vanuit een grafisch en algebraïsch gezichtspunt te bekijken. Ze konden afwisselen tussen de beide gezichtspunten en selecteerden die aspecten die ze nodig hadden. Wanneer hen bijvoorbeeld gevraagd werd om een oppervlakte te berekenen van een gebied begrensd door de grafieken van twee functies, konden ze het grafische venster gebruiken om een overzicht van het probleem te krijgen en om het eindresultaat te controleren. In het algebraïsche venster konden ze de berekeningen uitvoeren: de snijpunten bepalen en de integraal berekenen. Ook de numerieke mogelijkheden van het CAS werden benut.

3. **Begeleid zelfstandig leren**

   De wiskundeleerkrachten kregen het advies om de werkbladen te gebruiken onder de vorm van begeleid zelfstandig leren. Deze werkwijze verandert de rol van de leerkracht. De leerkracht wordt een gids en begeleider en zal de leerlingen doorheen de werkbladen leiden met behulp van persoonlijke interacties en gesprekken met medeleerlingen. Anderzijds worden de leerlingen verplicht om zelfstandig of in groep te werken, na te denken over wiskundige concepten en over hun oplossingen.

4. **Differentiatie**

   Bij de laatstejaarsleerlingen van een ASO-richting met zes wekelijkse lesuren wiskunde is een groot onderling verschil merkbaar met betrekking tot de wiskundige mogelijkheden van de leerlingen. Het merendeel van deze leerlingen zijn rekenaars; ze verkiezen oefeningen met concrete cijfers boven toepassingen en abstractere problemen. Om tegemoet te komen aan deze onderlinge verschillen wilden we de leerkrachten de mogelijkheid bieden om gedifferentieerd te werk te gaan: de leerkrachten (of misschien de leerlingen zelf) konden die oefeningen kiezen die aangepast zijn aan de mogelijkheden van de leerlingen. Het principe van differentiatie en het gebruik van computeralgebrasystemen zijn bovendien gemakkelijk combineerbaar doordat elke leerling met zijn eigen instrument volgens zijn eigen ritme kan werken.

5.3 Het proefproject

In de aanloop naar de eerste macrocyclus voerden we een kort proefproject uit. We wilden door de uitvoering van dit proefproject een goed beeld krijgen van het niveau en de mogelijkheden van laatstejaarsleerlingen uit ASO-richtingen met zes uur wiskunde per week. Daarnaast wilden we het volledige concept van het onderwijsexperiment op kleine schaal uittesten in de dagdagelijkse schoolpraktijk.

Leerlingen uit drie verschillende klassen (van de leerkrachten C, E en H) legden een wiskundetoets af (zie bijlage B.1). Met deze toets wilden we voornamelijk het niveau van laatstejaarsleerlingen uit het ASO met zes uur wiskunde per week bepalen. Terzelfdertijd konden we op deze manier de haalbaarheid van de toets nagaan. Zijn zeven vragen in één lesuur haalbaar voor deze leerlingen? Is de moeilijkheidsgraad van de toets niet te hoog of te laag? Op basis van een toets die te moeilijk of te makkelijk is, kunnen we immers geen bruikbare data verzamelen! Bij het opstellen van de test uit het proefproject kozen we zeven vragen, maar hierbij hielden we nog geen rekening met de zeven verschillende types van vragen die we later selecteerden voor de pre- en posttesten van de macrocycli (zie 5.4.3). Het afnemen en corrigeren van de toetsen verliep vlot. Op basis van de antwoorden van de leerlingen en de feedback van de leerkrachten konden we een aantal opmerkingen noteren die belangrijk waren voor de pre- en posttesten van de onderwijsexperimenten:

- Zeven vragen oplossen in 50 minuten was (net) haalbaar, maar de goniometrische vraag (opgave 7) bleek vrij tijdrovend en werd daarom vervangen door een andere oefening.
- Vraag 2 bevatte het symbool '$\circ$' voor de samenstelling van functies. De leerlingen bleken dit symbool niet te kennen en beschikten bijgevolg niet over de nodige kennis om deze oefening op te lossen. Vraag 2 werd bijgevolg eveneens vervangen.
- Het aantal blanco antwoorden was beperkt. Blanco antwoorden werden in dit stadium nog beschouwd als oefeningen die de leerlingen niet konden oplossen. Deze houding bleek na de correctie van de eerste pretest niet langer houdbaar (zie 5.4.3).

In een later stadium werden de zeven vraagtypes vastgelegd waarmee we de wiskundige creativiteit en het probleem oplossend vermogen van leerlingen wilden meten (zie 5.4.3). Vraag 1 van de wiskundetoets van het proefproject correspondeerde niet met deze types en werd eveneens geschrapt en vervangen door een andere oefening.

In het kader van dit proefproject werd eveneens een korte versie van het onderwijsexperiment uitgevoerd. Bij leerkracht K was dit beperkt tot één lesuur waarin de leerlingen met gebruik van Derive een aantal oefeningen (nl. toepassingen van integralen) oplosten. Deze les verliep heel erg stroef. De leerlingen hadden pas tijdens een vorig lesuur kennis gemaakt met Derive en waren bijgevolg onvoldoende vertrouwd met de commando's en mogelijkheden van Derive. Bovendien was de eigenlijke inhoud van de les bedoeld als herhaling van het onderwerp 'toepassingen van integralen', maar de kennis van de leerlingen was ondertussen 'vervaagd'. Deze les toonde de noodzaak aan van een korte maar toch intensieve inleiding voor het voorziene computeralgebrasysteem en het werd duidelijk dat het gebruik van CAS slechts kan renderen als men er voldoende lang en voldoende frequent gebruik van maakt.
Bij leerkracht D werden voor het proefproject acht lesuren (vier blokken van twee lesuren) uitgetrokken. De leerlingen van leerkracht D maakten gebruik van Mathcad en konden beschikken over twee communicerende computerlokalen die leerkracht D in haar eentje begeleidde. De leerlingen hadden Mathcad voordien een paar keer gebruikt, maar waren zeker geen experts, en konden vrij goed met het computeralgebrasysteem overweg. De lessen verliepen vlot en de leerlingen waren heel gedisciplineerd. Er was een groot verschil merkbaar tussen de leerlingen onderling, maar alle leerlingen waren gemotiveerd en probeerden de oefeningen op te lossen.

Deze fase van het proefproject toonde heel duidelijk dat het slagen van een onderwijsexperiment sterk afhankelijk was van de deelnemende leerkrachten. Leerkracht D speelde de rol van leerkracht en begeleider zoals we die vanuit het onderzoek in gedachten hadden. Leerkracht K probeerde deze rol eveneens goed te vervullen, maar was vooral door zijn eigen onervarenheid en de korte duur van het project hiertoe niet in staat.

5.4 De eerste macrocyclus P1

5.4.1 Hypothetisch leertraject

Tijdens de voorbereidende fase van de eerste macrocyclus werd - naar het model van Simon [70] - een hypothetisch leertraject uitgewerkt. Tijdens de ontwikkeling van dit hypothetisch leertraject werd rekening gehouden met het beginniveau van de leerlingen (vastgesteld tijdens het proefproject) en de bestaande leerplannen wiskunde voor de derde graad van het gemeenschapsonderwijs en het vrij gesubsidieerd onderwijs (zie bijlage A). De eigenlijke inhoud van het hypothetisch leertraject bestaat uit een aaneenschakeling van activiteiten die het bevorderen van het leren van de leerlingen tot doel hebben en waarmee we de vooropgestelde einddoelen willen bereiken.
Vanuit de leerplannen streefden we de leerplandoelstellingen na en vanuit onze onderzoeksvragen werden daar een aantal einddoelen aan toegevoegd:

- Het algemeen inzicht van de leerlingen verhogen in het vak wiskunde en in het bijzonder in het onderwerp 'integralen'.

- De link tussen de algebraïsche, grafische en numerieke aspecten van het vak wiskunde en in het bijzonder van het onderwerp 'integralen' versterken.

- Het probleemoplossend vermogen en de wiskundige creativiteit van de leerlingen laten toenemen.

In de praktijk gaat men het hypothetisch leertraject samenvatten in een tabel die de aaneenschakeling van de studentenactiviteiten weergeeft. In tegenstelling tot Drijvers [29] die zijn hypothetisch leertraject omschrijft als een ketting, verkiezen wij hier het woord 'aaneenschakeling'. In het hypothetisch leertraject dat Drijvers ontwikkelde, werd in stap k steeds gebruik gemaakt van de voorgaande stap $k-1$. Dit is bij ons niet het geval. Stap k steunt niet noodzakelijk op stap $k-1$, maar mogelijk op stap $k-2$ of zelfs $k-5$. Een hypothetisch leertraject in de vorm van een ketting was in ons onderzoek niet mogelijk. Onze onderwijsexperimenten werden steeds ingebed in het bestaande wiskundeonderwijs en het was bijgevolg noodzakelijk om het geheel te laten aansluiten bij het curriculum en de handboeken van de derde graad.

Strikt genomen werden er voor onze onderwijsexperimenten twee verschillende hypothetische leertrajecten ontwikkeld, nl. een traject voor het vrij gesubsidieerd onderwijs en een traject voor het gemeenschapsonderwijs. De beide hypothetische leertrajecten verschillen echter maar van elkaar op een aantal rijverwisselingen na en daarom zullen we ons in het vervolg van deze tekst beperken tot het hypothetisch leertraject voor de leerlingen van het vrij gesubsidieerd onderwijs. Dit hypothetisch leertraject, uitgeschreven in tabelvorm, bevat 6 kolommen en 24 rijen of stappen. Elke rij correspondeert met een werkblad of oefeningenreeks. In de eerste kolom vindt men het *onderwerp* en bijgevolg het voornaamste kennistheoretische aspect van het werkblad terug. In de tweede kolom wordt het *grafische aspect* van het werkblad vermeld. In de derde kolom staat onder de noemer *verwachte bijdrage* het belangrijkste onderzoeksfacet beschreven. Doordat het onderwijsexperiment deel uitmaakte van het bestaande wiskundeonderwijs stond het onderwerp 'integralen' en de bijhorende stellingen, rekenregels en toepassingen centraal, maar we probeerden steeds een bijdrage aan het eigenlijke onderzoek te voorzien in elk werkblad. In de tabel staat eveneens de activiteit vermeld die de leerlingen moesten uitvoeren. Elke activiteit werd opgesplitst in een concrete *activiteit van de leerling* en een *mentale activiteit*. Beide kolommen bevatten zowel aspecten die kunnen bijdragen tot de leerplandoelstellingen als aspecten die kunnen bijdragen tot de einddoelen van het eerste deelonderzoek. In de laatste kolom werd ten slotte afzonderlijk de *rol van het computeralgebrasysteem* vermeld.

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Kennismaking met Mathcad of Derive	Aanleren van de grafische mogelijkheden	Vlotter laten verlopen van de lessen op pc	Zelfstandig aanleren van de basiscommando's	'Black box'-karakter van het CAS sterk beperken	Alle facetten van het CAS worden hier belicht
Aanbrengen van het integraalbegrip via de berekening van de oppervlakte onder een parabool	(Interactief) visualiseren van de begrippen onder-, boven- en tussensom	Groter inzicht in het integratieprincipe en de link tussen de grafische en de algebraïsche aspecten versterken	Zelfstandig of begeleid het integratieprincipe ontdekken	Leren werken met voorgeprogrammeerde commando's en hun grafische mogelijkheden	Gebruik maken van programma's en procedures en hun grafische mogelijkheden
Integraal van x^n	(Interactief) visualiseren van de begrippen onder-, boven- en tussensom	Groter inzicht in het integratieprincipe en de link tussen de grafische en de algebraïsche aspecten versterken	Zelfstandig of begeleid het integratieprincipe leren toepassen op andere functies	Leren werken met voorgeprogrammeerde commando's en hun grafische mogelijkheden	Gebruik maken van programma's en procedures en hun grafische mogelijkheden

Tabel 5.2: Hypothetisch leertraject

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Factor- en somregel		Een nieuw probleem leren herleiden naar gekende deelproblemen en verbanden zien met andere rekenregels	Zelfstandig opstellen van rekenregels	Grotere problemen vergelijken met kleinere subproblemen	Gebruik van programma's en procedure's om het rekenwerk te beperken
Oppervlakte tussen een kromme en de x-as en tussen twee krommen	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Een vraagstuk leren vertalen naar wiskunde en het antwoord interpreteren	Zelfstandig of begeleid de werkwijze voor de oppervlakteberekening afleiden	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Beperken van het rekenwerk (commando's int en solve) en het probleem grafisch voorstellen
Extra oefeningen: hoofdstelling van de integraalrekening		CAS (efficiënt) leren inschakelen voor bepaalde (tussen)-berekeningen	Oefeningen oplossen over een gekend theoretisch onderwerp	Vraagstuk vertalen naar berekeningen (eventueel met CAS) en resultaten interpreteren	Overnemen van rekenwerk (commando's int en solve) waardoor de leerling kan focussen op het eigenlijke probleem

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Toepassingen op oppervlakteberekening	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Een vraagstuk leren vertalen naar wiskunde en het antwoord interpreteren	Zelfstandig of begeleid een andere werkwijze voor oppervlakteberekening afleiden	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en rekenwerk beperken (commando's int, solve en lim)
Extra oefeningen: integratie door splitsing	Een grafiek gebruiken ter controle van een oefening	Leren omzeilen van moeilijkheden bij het gebruik van CAS	Kennis van manuele technieken gebruiken om problemen met CAS te omzeilen	'Black box'-karakter van het CAS sterk beperken	CAS efficiënt gebruiken voor tussenberekeningen en ter controle
Extra oefeningen: integratie door substitutie		Leren omzeilen van moeilijkheden bij het gebruik van CAS	Kennis van manuele technieken gebruiken om problemen met CAS te omzeilen	'Black box'-karakter van het CAS sterk beperken	CAS efficiënt gebruiken voor tussenberekeningen en ter controle

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Recursie-formules		Leren opstellen van en werken met (recursieve) voorschriften	Kennis van manuele technieken gebruiken om problemen met CAS te omzeilen	Herkennen van structuren die zich herhalen	Biedt de mogelijkheid om te experimenteren met u en v
Integralen van rationale functies		Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen	Splitsen in partieelbreuken met behulp van CAS	Opsplitsen in deelproblemen en inzicht krijgen in het verwachte resultaat	Overnemen van het rekenwerk bij splitsen in partieelbreuken
Extra oefeningen: Integralen van goniometrische functies	Tekenen van krommen vertrekkende van hun parametervergelijking en een figuur gebruiken bij het bepalen van een werkwijze	Leren interpreteren van een figuur en leren ’aflezen’ van integratiegrenzen	Werken met parametervoorstellingen en manuele technieken gebruiken om eventuele problemen te omzeilen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando’s int, dif en solve)

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Extra oefeningen: integralen van irrationale functies	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Alle gekende technieken en vaardigheden combineren in gemengde oefeningen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)
Extra oefeningen i.v.m. oppervlakteberekening	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Alle gekende technieken en vaardigheden combineren in gemengde oefeningen	Een grafisch vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)
Oppervlakteberekening in poolcoördinaten	Tekenen van krommen vertrekkende van hun parametervergelijking en een figuur gebruiken bij het bepalen van een werkwijze	Leren interpreteren van een figuur en voordelen inzien van het gebruik van poolcoördinaten	Leren werken met andere coördinatenstelsels	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Extra oefeningen: oppervlakte-berekening in pool-coördinaten	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Alle gekende technieken en vaardigheden combineren in gemengde oefeningen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)
Numerieke integratie	Visualiseren van de verschillende numerieke integratiemethodes	Inzicht in het integratieprincipe vergroten en de link tussen het grafische en het algebraïsche versterken	Zelfstandig het integratieprincipe toepassen en onderzoeken voor gegeven functies	Leren werken met voorgeprogrammeerde commando's en hun grafische mogelijkheden	Gebruik maken van programma's en procedures en hun grafische mogelijkheden
Volume-berekening van omwentelings-lichamen	Een grafiek gebruiken (zowel 2D als 3D) om een werkwijze op te stellen	Een vraagstuk leren vertalen naar wiskunde en het antwoord interpreteren	Zelfstandig of begeleid de werkwijze voor volumeberekening afleiden	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Extra oefeningen: inhoud van omwentelings-lichamen	Een grafiek gebruiken (zowel 2D als 3D) om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Alle gekende technieken en vaardigheden combineren in gemengde oefeningen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int, lim en solve)
Extra oefeningen: inhoud van een lichaam begrensd door 2 loodvlakken op de x-as	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Alle gekende technieken en vaardigheden combineren in gemengde oefeningen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)
Lengte van een kromme	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Een vraagstuk leren vertalen naar wiskunde en het antwoord interpreteren	Zelfstandig of begeleid de werkwijze voor lengteberekening afleiden	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int, dif en solve)

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Extra oefeningen: lengte van een parameter-kromme	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Werken met parametervoor-stellingen en alle gekende technieken en vaardigheden combineren in de oefeningen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int, dif en solve)
Mantel-oppervlakte van een omwentelings-lichaam	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Leren om een ingewikkeld probleem te herleiden naar kleine gekende problemen en interpreteren van een figuur	Zelfstandig of begeleid de werkwijze voor berekening van mantelopper-vlakte afleiden	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int, dif en solve)
Eerste orde differentiaal-vergelijkingen: scheiding der veranderlijken		(Begin)-voorwaarden leren vertalen en interpreteren	Zelfstandig of begeleid de werkwijze voor het oplossen van een be-paald type van differentiaalver-gelijkingen aanleren	'Oplossen van vergelijkingen' uitbreiden tot 'oplossen van differentiaal-vergelijkingen'	Overnemen van rekenwerk (commando's int en solve) waardoor de leerling kan focussen op het eigenlijke probleem

Onderwerp	**Grafisch aspect**	**Verwachte bijdrage**	**Activiteit v/d leerling**	**Mentale activiteit**	**Rol van CAS**
Toepassingen van integralen in de fysica	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Wiskunde leren gebruiken in concrete vraagstukken uit andere wetenschappen	Alle gekende technieken en vaardigheden combineren in gemengde oefeningen	Een (wetenschappelijk) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)
Oneigenlijke integralen	Een grafiek gebruiken om een werkwijze op te stellen	Een vraagstuk i.v.m. 'oneindig' leren vertalen naar correcte wiskunde en het antwoord interpreteren	Begeleid de werkwijze aanleren voor berekening van oneigenlijke integralen	Een (grafisch) vraagstuk vertalen naar een wiskundige berekening	Probleem grafisch voorstellen en beperken van rekenwerk (commando's int en solve)

5.4.2 Ontwikkeling van het lesmateriaal

Inleiding

In deze paragraaf zullen we (een aantal aspecten van) het lesmateriaal van naderbij bekijken. We gaan na hoe het hypothetisch leertraject vertaald werd naar concreet lesmateriaal, welke stappen we ondernamen om de wiskundige creativiteit en het probleemoplossend vermogen van de leerlingen te prikkelen en hoe de ontwikkeling van instrumentatieschema's en de vooropgestelde didactische principes hierin geïmplementeerd werden. Ten slotte zullen we een vergelijking maken tussen de verschillende lespakketten en dit met betrekking tot het gebruikte computeralgebrasysteem.

Het eigenlijke lesmateriaal en de bijhorende indexen werden niet in deze tekst opgenomen. Alle ontwikkelde bestanden werden gebundeld en staan ter beschikking op de bijgevoegde cd-rom (zie bijlage D). We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot enkele korte fragmenten (ter illustratie).

Vertalen vanuit het hypothetisch leertraject

Tijdens de voorbereidende fase van de eerste macrocyclus werd veel tijd besteed aan het ontwerpen van het hypothetisch leertraject en aan de ontwikkeling van de bijhorende onderwijsactiviteiten. Het proces waarbij het hypothetisch leertraject werd omgezet naar gebruiksklaar lesmateriaal mag men niet beschouwen als een letterlijk vertaalproces. In de praktijk werden tijdens deze fase het hypothetisch leertraject en het lesmateriaal meermaals bijgestuurd en aangepast. Soms is het zelfs niet meer helemaal duidelijk welke stap we eerst ondernamen: het uitwerken van een schakel uit het leertraject of het uitschrijven van de grote lijnen van het werkblad. Deze evolutie ligt echter volledig in de lijn van de ervaringen van andere onderzoekers. Ook Drijvers kwam in zijn werk tot deze vaststelling: "HLT development and design of instructional activities are closely related: the HLT guides the design of instructional activities, and the ordering of instructional activities affects the HLT. Choices made in the design process may lead to reconsidering the HLT.". (Drijvers, [30], p 25)

In het vervolg van deze paragraaf bespreken en illustreren we de vertaling van een aantal aspecten van het hypothetisch leertraject. We beperken ons tot die facetten die gerelateerd zijn aan het gebruik van een computeralgebrasysteem.

1. Kennismaking met Mathcad of Derive

Uit het korte proefproject (zie paragraaf 5.3) was reeds duidelijk gebleken dat de onervaren leerlingen (en leerkrachten) nood hadden aan een korte inleiding waarin de syntaxis en de basismogelijkheden van het computeralgebrasysteem werden uitgelegd. Voor Derive voorzagen we zowel een inleiding voor de nederlandstalige als voor de engelstalige versie van het pakket. In het werkblad werd aandacht besteed aan:

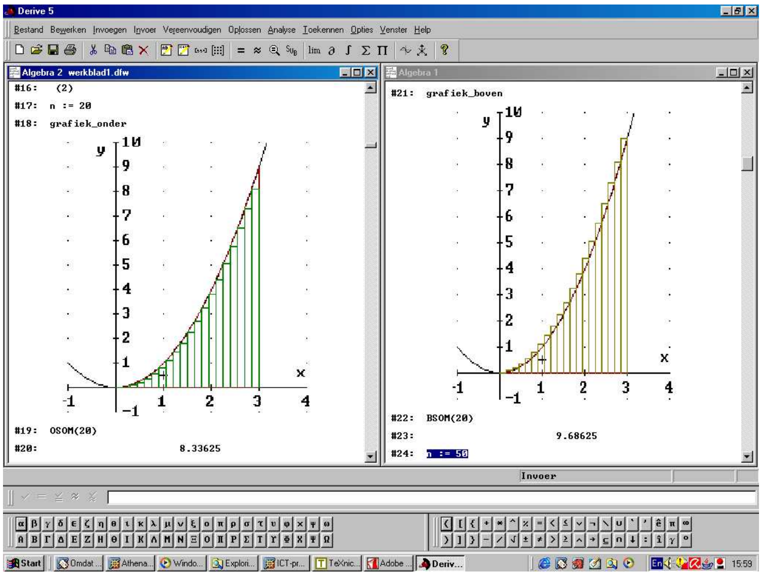
- de opbouw en de onderdelen van het scherm,
- de basisbewerkingen (`+,-,*,/,^,`$\sqrt{\ }$),
- de eventuele foutmeldingen en hun betekenis,
- de mogelijkheden om uitdrukkingen te vereenvoudigen, uit te werken of te benaderen,
- een aantal standaardfuncties en constanten,
- het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels,
- het maken van tweedimensionale grafieken,
- het gebruik van de helppagina's.

2. Visualiseren met computeralgebrasystemen

Een computeralgebrasysteem is een hulpmiddel dat zich uitermate goed leent tot het visualiseren van wiskundige concepten. Daarnaast is de studie van de bepaalde en onbepaalde integralen een onderwerp waarin het grafische een belangrijke rol speelt. In het hypothetisch leertraject werd het exploreren en benutten van deze mogelijkheden dan ook voorzien. Een eerste mogelijkheid is het **illustreren van theoretische begrippen**.

Voorbeeld 1:

In het eerste werkblad *'De bepaalde integraal: oppervlakte onder een parabool'* wordt het begrip 'Riemannsommen' (heel specifiek de onder- en bovensommen) ingevoerd en kunnen de leerlingen met behulp van Derive of Mathcad zien hoe de rechthoeken voor groter wordende n de eigenlijke oppervlakte steeds beter benaderden (zie figuur 5.5).



Figuur 5.5: Een fragment uit 'werkblad 1' uitgewerkt met Derive

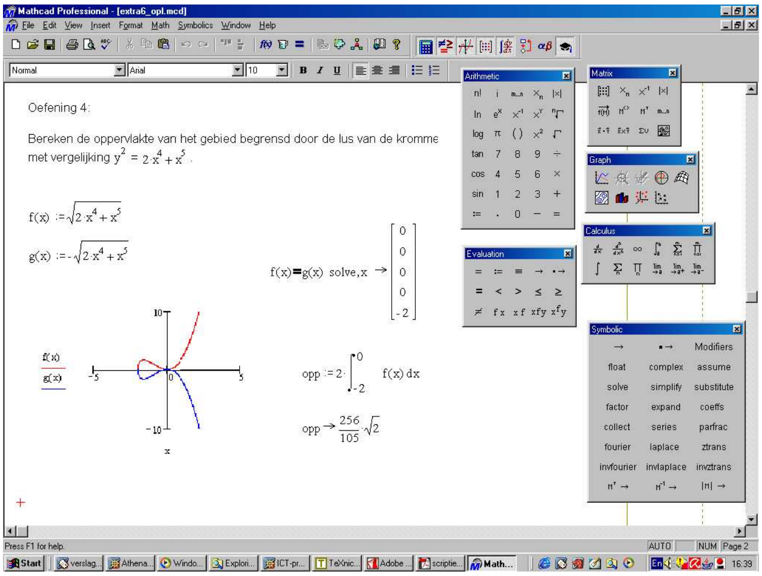
In dit werkblad kunnen de leerlingen zelfstandig of begeleid zelfstandig, en met behulp van Derive of Mathcad, benaderingen berekenen voor de oppervlakte van het gebied tussen een kromme en de x-as. Op deze manier zijn de leerkracht en de leerlingen ontslagen van het vele tekenwerk dat gepaard ging met deze les en kunnen er bovendien op een snelle manier benaderingen berekend worden voor grote waarden van n.

Behalve voor het illustreren van de theorie, kan men de grafische mogelijkheden van computeralgebrasystemen ook gebruiken tijdens de oefeningen. Zo kan een grafiek de gebruiker helpen om een **correcte en efficiënte werkwijze op te stellen**. Dit grafische aspect werd in verschillende schakels van het hypothetisch leertraject vermeld.

Voorbeeld 2:

We bekijken een fragment uit de oefeningenlijst *'Extra oefeningen: Integralen van irrationale functies'*. In de vierde oefening wordt aan de leerlingen gevraagd om de oppervlakte te berekenen van het gebied begrensd door de lus van de kromme met vergelijking $y^2 = 2x^4 + x^5$.

In principe kunnen de leerlingen deze oefening oplossen zonder gebruik te maken van CAS. Ze kunnen proberen om zelf een schets te maken, of zelfs zonder een schets kan een goede leerling(e) deze oefening tot een goed einde brengen. Het merendeel van de leerlingen heeft echter nood aan een duidelijke figuur die hen kan helpen om een correcte werkwijze op te stellen. Het louter aflezen van de grenzen van de bepaalde integralen hoort hier uiteraard niet bij!



Figuur 5.6: Oefening 4 uit de lijst 'extra6.pdf' uitgewerkt met Mathcad

Een ander item uit het hypothetisch leertraject sluit hier nauw bij aan. Wat vertelt de figuur ons nog? En vooral, (hoe) kunnen we **deze grafiek gebruiken ter controle**?

Voorbeeld 3:

We bekijken twee fragmenten uit de (extra) oefeningenlijst *'Oppervlakteberekening in poolcoördinaten'*.
In de tweede oefening van deze lijst krijgen de leerlingen de opdracht om de verhouding te bepalen van de oppervlakte ingesloten in de kromme met vergelijking $r = a \cos a\theta$ tot de oppervlakte van de omschreven cirkel en dit voor

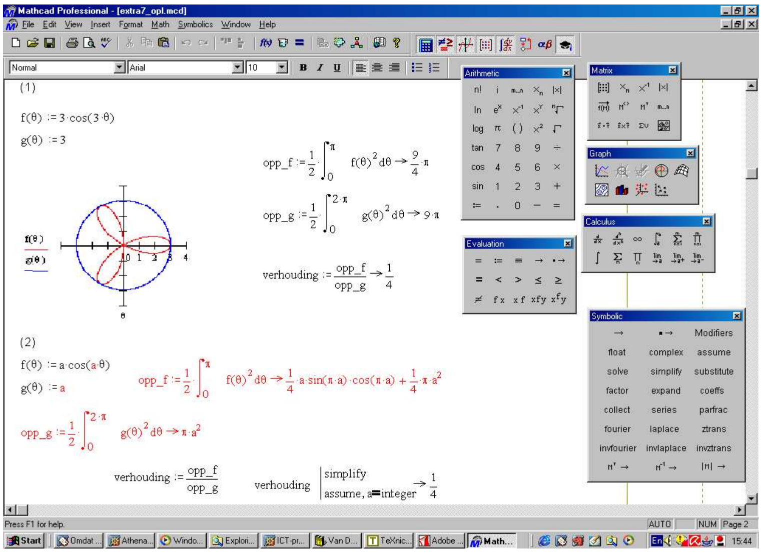
$a = 3$ en (algemeen) voor $a \in \mathbb{N}_0$. In deze oefening kunnen de leerlingen de figuur van Derive of Mathcad gebruiken bij de **eindcontrole** van hun resultaat. Een figuur laat hier duidelijk zien dat $r = 3\cos 3\theta$ de poolvergelijking is van een drie bladige-bloem. De leerlingen kiezen bij het maken van de figuur zelf het bereik van θ, maar indien ze dit bereik te ruim kiezen, zullen ze dat op de verkregen grafiek niet merken. Zo zal een leerling die θ laat variëren tussen 0 en 2π eenzelfde figuur krijgen als een leerling die voor θ het interval $[0, \pi]$ kiest. Deze leerlingen krijgen uiteraard een verschillend resultaat voor de oppervlakte en de gezochte verhouding want

$$\frac{\int_0^{2\pi} (3\cos 3\theta)^2 d\theta}{9\pi} = \frac{1}{2} \neq \frac{\int_0^{\pi} (3\cos 3\theta)^2 d\theta}{9\pi} = \frac{1}{4},$$

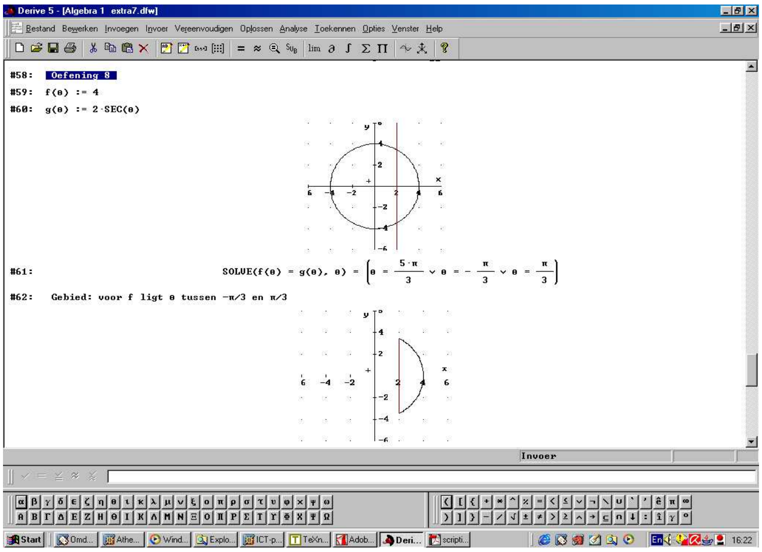
maar op basis van de figuur kan men snel inzien dat de driebladige bloem zeker niet de helft van de oppervlakte van de cirkel beslaat.

In de achtste oefening kunnen de leerlingen het computeralgebrasysteem gebruiken om hun **tussenresultaten (grafisch)** te **controleren**. De opgave luidt als volgt: "Bereken de oppervlakte van het gebied gelegen binnen de kromme $r = 4$ en rechts van de kromme $r = 2\sec\theta$.".
Nadat de leerlingen (visueel) hebben kunnen vaststellen dat $r = 2\sec\theta$ de vergelijking in poolcoördinaten is van de rechte met cartesiaanse vergelijking $x = 2$, kunnen ze Derive (zie figuur 5.8) of Mathcad gebruiken om de vergelijking $4 = 2\sec\theta$ op te lossen of dus om de grenzen van de passende bepaalde integraal te berekenen. De leerlingen bepalen/kiezen zelf de grenzen op basis van een drietal oplossingen die Derive of Mathcad voorstellen. Tenslotte kunnen ze deze grenzen nog eens grafisch controleren door θ te laten variëren tussen $-\frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{3}$.

In het hypothetisch leertraject vinden we ook nog een vierde mogelijkheid terug: leerlingen kunnen een CAS gebruiken om een **figuur** correct te leren **interpreteren**. We kunnen dit niet echt beschouwen als een aparte mogelijkheid want indien een leerling niet in staat is om een figuur correct te interpreteren, is deze leerling ook niet in staat om een figuur te gebruiken ter ondersteuning van een theoretisch begrip en kan deze leerling een figuur ook niet hanteren om een efficiënte werkwijze op te bouwen of om er een tussen- of eindresultaat mee te controleren.



Figuur 5.7: Oefening 2 uit 'extra7.pdf' uitgewerkt met Mathcad



Figuur 5.8: Oefening 8 uit 'extra7.pdf' uitgewerkt met Derive

Leerlingen moeten dus enerzijds in staat zijn om een figuur te interpreteren alvorens ze gebruik kunnen maken van de grafische mogelijkheden van het computeralgebrasysteem en anderzijds zal het gebruik van een computeralgebrasysteem bijdragen tot het leren interpreteren van grafieken en figuren. Dit is geen contradictie, maar een uitdaging die de wiskundeleerkracht door het geleidelijk aan invoeren van de grafische mogelijkheden van het computeralgebrasysteem tot een goed einde kan brengen.

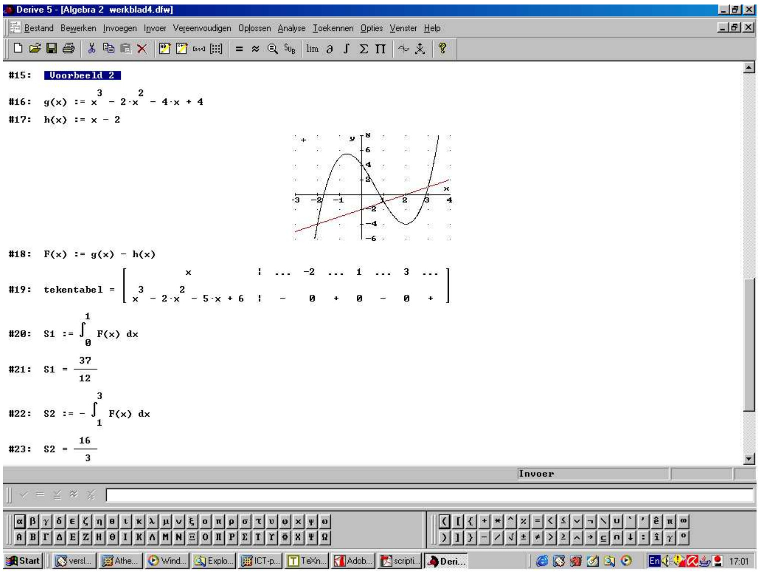
3. Gebruik maken van commando's en procedures

Zoals reeds eerder vermeld in paragraaf 5.2.7 steunden we tijdens de ontwikkeling van het hypothetisch leertraject en de onderwijsactiviteiten op het 'White box-Black box'-principe. In de praktijk betekent dit dat de leerlingen in staat moeten zijn om een bepaalde techniek manueel uit te voeren alvorens ze een CAS mogen aanwenden voor moeilijker en ingewikkelder problemen. We kunnen hierbij verschillende varianten onderscheiden. Zo zagen we reeds in de voorgaande voorbeelden dat de leerlingen **commando's** konden gebruiken om bepaalde berekeningen te laten uitvoeren door het computeralgebrasysteem: `solve` voor het oplossen van vergelijkingen en stelsels, `int` voor het berekenen van bepaalde en onbepaalde integralen, `simplify` voor het vereenvoudigen van uitdrukkingen,... Deze commando's vereisen steeds één of meerdere argumenten, maar zijn meestal beschikbaar via een menu. De leerlingen hoeven dus de volgorde en het aantal argumenten niet te kennen of te onthouden. Ze moeten de passende argumenten enkel op de juiste plaats invullen.

Bij sommige werkbladen en oefeningenlijsten wordt een bijkomende **procedure** voorzien die de leerlingen kunnen gebruiken voor een bewerking die ze eigenlijk al onder de knie hebben, maar die ze niet kunnen uitvoeren met één simpel commando.

Voorbeeld 4:

Bij de werkbladen *'Oppervlakte tussen een kromme en de x-as en tussen twee krommen'* en *'Toepassing op oppervlakteberekening'* kunnen de leerlingen en leerkrachten die Derive ter beschikking hebben, gebruik maken van de procedure `tekentabel.mth`. Deze procedure (of utility-bestand) genereert voor alle reële functies met een eindig aantal reële nulpunten een tekentabel. De leerlingen kunnen deze tekentabel vervolgens gebruiken bij het opstellen van een passende integraal voor de oppervlakteberekening. Het bestand bespaart de leerlingen een pak rekenwerk, maar heeft ook een aantal beperkingen. Het is immers onbruikbaar voor die reële functies waarvan Derive de nulpunten niet exact kan bepalen (bvb. $f(x) = \exp(x) + x$). Ook voor functies die over een oneindig aantal reële nulpunten beschikken (in het bijzonder voor periodieke functies) is deze procedure slechts in een beperkt aantal oefeningen bruikbaar.

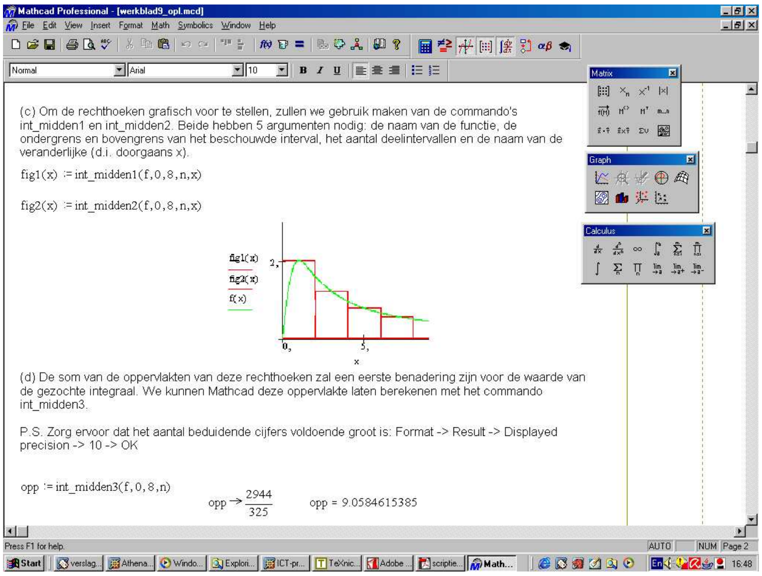


Figuur 5.9: Een fragment uit 'werkblad 4' uitgewerkt met Derive

Soms maakten we gebruik van een variant van het 'White box-Black box'-principe, waarbij we dit principe dan bijvoorbeeld combineerden met het 'Module'-principe.

Voorbeeld 5:

In het werkblad *'Numerieke integratie'* worden de verschillende methodes die men kan gebruiken om een integraal numeriek te berekenen geschetst. De eigenlijke vertaling van het algoritme naar een procedure wordt voor de leerlingen achterwege gelaten (en zelfs 'onzichtbaar' gemaakt). De leerlingen zijn wel in staat om de verschillende procedures te hanteren en onderling hun efficiëntie te vergelijken. Deze procedures zijn dus echte 'black boxes', maar dan wel met een witte 'rand'.



Figuur 5.10: Een fragment uit 'num_int.pdf' uitgewerkt met Mathcad

4. Beperken en controleren van het rekenwerk

In het begin van de jaren '90 beschouwde men computeralgebrasystemen als krachtige hulpmiddelen die de leerlingen en de leerkrachten zouden bevrijden van het (langdradige) rekenwerk en die hen zouden toelaten om zich te concentreren op moeilijker problemen. Ondertussen heeft de praktijk uitgewezen dat de realiteit iets minder 'vanzelfsprekend' is, maar dit neemt niet weg dat computeralgebrasystemen krachtige hulpmiddelen zijn die de leerlingen kunnen helpen bij het controleren en beperken van het rekenwerk. Beide aspecten kwamen reeds aan bod in de bovenstaande voorbeelden.
Hierbij kunnen we nog opmerken dat men de mogelijkheid van CAS om berekeningen te controleren, terugvindt in alle schakels van het ontworpen hypothetisch leertraject en dus bijgevolg in alle werkbladen en oefeningenlijsten. Het beperken van het rekenwerk concentreert zich dan weer voornamelijk in de toepassingen. Indien de leerlingen tijdens het onderwijsexperiment het computeralgebrasysteem hanteren voor het beperken van het rekenwerk, zullen ze het computeralgebrasysteem steeds gebruiken als een 'white box'.

5. Leren omzeilen van moeilijkheden bij het gebruik van CAS

Elke gebruiker van computeralgebrasystemen wordt vroeg of laat geconfronteerd met berekeningen waar het computeralgebrapakket de tanden op stuk bijt. Een ervaren gebruiker kent de nukkigheden van het pakket en weet hoe hij deze kan omzeilen. Het is belangrijk dat we ook de leerlingen laten ondervinden dat een computeralgebrasysteem geen perfect hulpmiddel is en dat we hen daarbij methodes aanleren om deze moeilijkheden het hoofd te bieden.

Zo is het eigenlijk vanzelfsprekend dat leerlingen die stappen manueel gaan uitvoeren die ze zelf snel en correct tot een goed einde kunnen brengen. Anderzijds kan een simpele (manuele) vereenvoudiging het computeralgebrasysteem dan weer vooruit helpen.

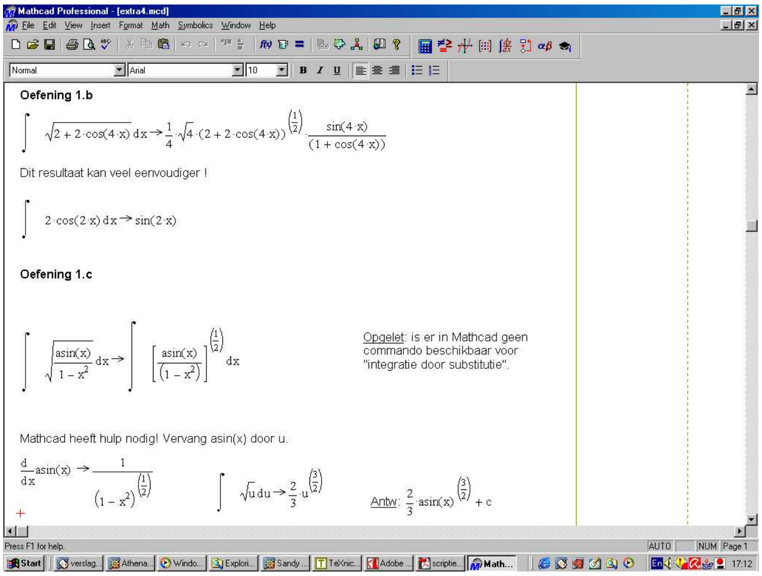
Voorbeeld 6:

In de oefeningenlijst *'Extra oefeningen: integratie door substitutie'* worden de leerlingen geconfronteerd met een aantal integralen die Derive en Mathcad niet (eenvoudig) kunnen berekenen zonder hulp van de gebruiker. De eerste oefening laat de leerlingen duidelijk aanvoelen dat een vereenvoudiging van het functievoorschrift het computeralgebrasysteem kan helpen om een eenvoudiger en handiger vorm te bepalen voor een primitieve functie.

De tweede oefening laat de leerlingen zien dat een computeralgebrasysteem krachtig maar niet perfect is, bvb. de integraal $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$ kan door Derive en Mathcad niet berekend worden. De enige oplossing is het doorvoeren van een substitutie. In Mathcad gebeurt dit manueel omdat een degelijk commando voor substitutie in een integraal ontbreekt. Het CAS kan hier wel helpen bij het bepalen van de waarde van de nieuwe veranderlijke u (d.m.v. het berekenen van de afgeleide). In dit geval opteert men voor de keuze $u = \arcsin x$.

Voorbeeld 7:

In het werkblad 'recursieformules.pdf' (voor de Derive-gebruikers) en 'werkblad6.pdf' (voor de Mathcad-gebruikers) wordt aan de leerlingen uitgelegd hoe ze met behulp van het commando `part_int` bepaalde en onbepaalde integralen kunnen berekenen door middel van partiële integratie. Het commando part_int is in Derive beschikbaar het inladen van de utility-file `PART_INT.MTH`.

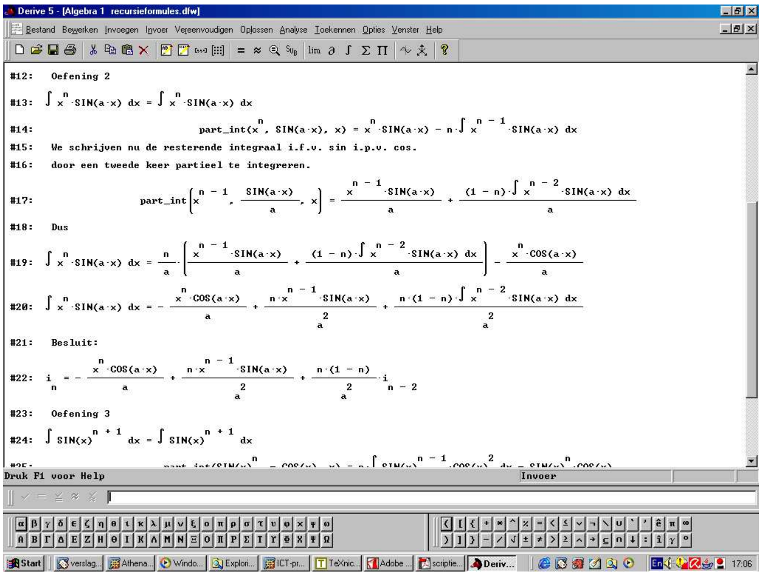


Figuur 5.11: Oefening 1 uit 'extra4.pdf' uitgewerkt met Mathcad

In Mathcad moet/kan men dit op een eenvoudige manier zelf definiëren. In het bijzonder gaan we dit commando aanwenden om recursieformules op te stellen (zie figuur 5.12).

De kracht van het computeralgebrasysteem in dit werkblad bestaat eruit dat de leerlingen het CAS hier kunnen gebruiken om experimenteel maar toch gericht de juiste uitdrukkingen te vinden voor u en v uit de formule $\int udv = uv - \int vdu$. Men kan zonder veel moeite en tijdsverlies een paar verschillende mogelijkheden voor u en v proberen.

In voorbeeld 6 en 7 moeten de leerlingen het computeralgebrasysteem zelf vooruithelpen en daarbij is het kennen en beheersen van manuele technieken heel erg belangrijk. De leerlingen kunnen deze werkbladen slechts uitvoeren nadat ze zelf grondig de analoge technieken manueel hebben ingeoefend. In ons onderwijsexperiment wordt dit gegarandeerd door het gebruik van het 'White box-Black box'-principe.



Figuur 5.12: Oefening 2 uit 'recursieformules.pdf' uitgewerkt met Derive

Het hypothetisch leertraject bepaalde in grote lijnen de concrete inhoud van het lesmateriaal, maar een aantal andere factoren speelden hierbij eveneens een grote rol. Zoals reeds eerder vermeld (zie paragraaf 4.3), werd dit lesmateriaal opgesteld vanuit het standpunt van de onderzoeker als wiskundeleerkracht. Het was voor ons onderzoek immers heel belangrijk dat het materiaal dat ter beschikking werd gesteld van de deelnemende wiskundeleerkrachten onmiddellijk toepasbaar was, zo weinig mogelijk het tijdsschema van de leerkrachten beïnvloedde, goed aansloot bij het leerplan en het handboek dat de leerkracht volgde en haalbaar was (qua moeilijkheidsgraad) voor alle leerlingen.

Prikkelen van de creativiteit en het probleem oplossend vermogen

Zoals vooropgesteld in onze tweede operationele onderzoeksvraag (zie 5.1) voorzagen we via het lesmateriaal een aantal interventies in de lokale context van de experimentele groepen met als doel het verbeteren van de wiskundige creativiteit en de probleemoplossende vaardigheden. Logischerwijs vindt men het merendeel van deze interventies ook terug in het hypothetisch leertraject.

1. Vertalen van de probleemstelling

Het vertalen van de probleemstelling naar concrete wiskunde wordt door de leerlingen vaak als moeilijk ervaren. Uiteraard wordt in het traditioneel onderwijs ook aandacht besteed aan het oplossen van concrete problemen en toepassingen die een dergelijke vertaling vereisen, maar door het gebruik van CAS kan men doorgaans meer (verschillende) toepassingen behandelen - doordat de leerlingen minder tijd besteden/verliezen aan het rekenwerk - en wordt bijgevolg het 'vertalen' vaker ingeoefend.

2. Maken van een grafische voorstelling

Het gebruik van CAS maakt het voor de leerlingen eenvoudiger om bepaalde problemen grafisch voor te stellen. In de lessen 'analyse' wordt het maken van een figuur al snel een gewoonte/attitude indien de leerlingen over een computeralgebrasysteem beschikken. De leerlingen ervaren tijdens de lessen met CAS-ondersteuning de voordelen van het gebruik van een grafische voorstelling (nl. leiden tot vermoedens en/of inzichten die een bijdrage kunnen leveren aan de oplossing van het probleem) en zullen ook in andere lessituaties sneller een figuur of schets maken.
Alvorens het maken van een grafische voorstelling kan uitgroeien tot een attitude, moeten de leerlingen in staat zijn om zelf een figuur of grafiek te interpreteren. We zullen in het lesmateriaal veel aandacht besteden aan het interpreteren van grafieken en dus de grafische mogelijkheden van het computeralgebrasysteem optimaal proberen benutten.

3. Uitvoeren van controles

Tijdens het oplossen van problemen is het belangrijk om kritisch te zijn t.o.v. de gevonden resultaten en deze consequent te controleren om fouten en tegenstrijdigheden te vermijden. Voor het controleren van de resultaten kan men gebruik maken van de vele grafische, algebraïsche en numerieke mogelijkheden van het computeralgebrasysteem. Op deze manier wordt 'kritisch zijn' een attitude die de leerlingen ook naar andere (wiskunde)lessen transfereren. Het aanmoedigen van de 'kritische zin' vindt men terug in een aantal werkbladen waarin aan de leerlingen (expliciet) gevraagd wordt om hun resultaat te controleren. Anderzijds werd ook van de leerkracht verwacht dat hij/zij de leerlingen aanmoedigde bij het uitvoeren van controles. De leerkrachten konden zich hiervoor baseren op de oplossingen die ter beschikking stonden op de websites. Daarin gaven we het goede voorbeeld door steeds het CAS te gebruiken bij het controleren van de resultaten, i.h.b. door het grafische (bvb. het bepalen van de snijpunten van twee krommen) in het werkblak te schikken naast of onder het algebraïsche (bvb. het oplossen van een stelsel). Deze oplossingen werden bovendien door een aantal leerkrachten geprojecteerd in de klas of ter beschikking gesteld van de leerlingen. Daarenboven werden de werkbladen op de verschillende websites voorzien van instructies waarin o.a. het controleren van de resultaten werd aangemoedigd.

4. Leren omzeilen van moeilijkheden

In de werkbladen worden de leerlingen (bewust) met verschillende problemen geconfronteerd die ze zelf moeten overwinnen. Door de leerlingen aan te leren hoe ze deze moeilijkheden kunnen omzeilen, reiken we hen ook een aantal oplossingsmethodes aan die ze algemeen kunnen gebruiken bij het oplossen van problemen. We kunnen twee verschillende types van moeilijkheden onderscheiden:

- In de werkbladen worden de leerlingen geconfronteerd met berekeningen waarop het computeralgebrapakket de tanden stuk bijt. Vaak kunnen deze problemen omzeild worden door een simpele manuele vereenvoudiging of een opsplitsing van het probleem in deelproblemen. Dit vraagt van de leerlingen inzicht in de beperkingen van het computeralgebrapakket en creativiteit om deze moeilijkheden het hoofd te bieden. Doorheen de werkbladen zullen we de leerlingen dus creatieve methodes aanleren en het 'black box'-karakter van het CAS verkleinen.

- De algebraïche voorstelling die het computeralgebrasysteem geeft en de vorm die de leerling verwacht verschillen soms. De leerlingen zijn vaak geneigd om te denken dat hun oplossing of de oplossing van het handboek of de leerkracht fout is, terwijl de oplossingen eigenlijk gelijk zijn aan elkaar. In sommige gevallen kan men de ene vorm eenvoudig omzetten in de andere m.b.v. (eenvoudige) rekenregels. In andere gevallen kan men de beide oplossingen met elkaar vergelijken door de gelijkheid te testen m.b.v. het CAS. Bijvoorbeeld: het verschil van beide oplossingen berekenen, beide oplossingen grafisch voorstellen, beide oplossingen numeriek benaderen,...

5. Aanbrengen van geïnstrumenteerde technieken

In de werkbladen bieden we de leerlingen oefeningen en toepassingen aan. Deze oefeningen zijn problemen en niet louter rekenoefeningen. Ze werden gekozen met als doel het handelen en het denken van de leerling te gaan vormen, door de ontwikkeling van (complexe) instrumentatieschema's te stimuleren en te ondersteunen. Bovendien bestaan instrumentatieschema's gedeeltelijk uit geïnstrumenteerde technieken. Deze technieken hebben een belangrijke kennistheoretische waarde en zijn (gedeeltelijk) complementair aan de pen-en-papier-technieken. Het toevoegen van deze geïnstrumenteerde technieken aan de verzameling van reeds gekende pen-en-papier-technieken maken de leerlingen 'rijker'.

Voorbeeld:[4]
Een ellipsvormige schijf begrensd door de ellips met vergelijking $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ wordt gewenteld rond de rechte $y=c$ met $c>b$. Bepaal het volume van dit omwentelingslichaam.

Om de ellips en de rechte uit de bovenstaande opgave grafisch voor te stellen, moeten de leerlingen eerst een waarde kiezen voor a, b en c. Het is mogelijk dat de leerlingen een cirkel krijgen i.p.v. een ellips (omdat ze $a=b$ kiezen) of de voorwaarde $c>b$ over het hoofd zien. In de beide gevallen verkrijgen ze een grafische voorstelling die niet overeenstemt met hun verwachtingen. De leerlingen zullen hun gekozen waarde voor de parameters gaan aanpassen en bijgevolg experimenteren met de parameters a, b en c. Op deze manier krijgen ze inzicht in de rol van de parameters in de vergelijking van de ellips en de rechte. Bovendien leren ze dat de probleemstelling kan variëren al naar gelang de waarde van de parameter en dat één probleem kan leiden tot meerdere gevallen die afhankelijk zijn van de waarde van de parameter(s) (hier: de rechte snijdt de ellips of de rechte snijdt de ellips niet).

De instrumentele benadering in het lesmateriaal

In hoofdstuk 3 bespraken we uitgebreid de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen. De vertaling van deze instrumentele benadering vindt men o.a. terug in de structuur van de werkbladen en oefeningenlijsten.

In de werkbladen opteren we voor een werkwijze waarbij de leerlingen onder begeleiding van de leerkracht én in interactie met het computeralgebrasysteem een nieuw theoretisch begrip of een nieuwe toepassing uitwerken. Het 'leren

[4] *Extra oefeningen: inhoud van omwentelingslichamen*, oefening 8

samenwerken' met het computeralgebrapakket wordt in dit stadium aangeleerd door de eigenlijke taak op te splitsen in korte deeltaken (m.b.v. gerichte vragen) die de leerlingen oplossen in een vastgelegde volgorde. Op deze manier proberen we de instrumentele genese van de leerlingen te sturen, zodanig dat ze tijdens het oplossen van de deeltaken hun hulpmiddelen omvormen tot eenzelfde instrument, daarbij dezelfde geïnstrumenteerde technieken gebruiken (met het oog op efficiënt gebruik van CAS) en het bijhorende wiskundige concept gaan ontwikkelen. Door de opsplitsing in deeltaken proberen we er bovendien voor te zorgen dat de leerlingen in dit stadium hoofdzakelijk gebruik maken van enkelvoudige instrumentatieschema's.
In de oefeningenlijsten kiezen we voor een andere aanpak. Zoals de benaming reeds laat vermoeden, bestaan deze lijsten hoofdzakelijk uit oefeningen. De oefeningen worden niet aangeboden onder de vorm van invuloefeningen en bijgevolg niet opgesplitst in deeltaken. Op deze manier worden de leerlingen 'gedwongen' om goed na te denken over de opgave en om zelf een oplossingsstrategie uit te werken. Daarnaast wordt van hen verwacht dat ze hierbij op zoek gaan naar een efficiënte manier om het computeralgebrasysteem hierbij in te schakelen. Door de complexiteit van de taak zullen de leerlingen tijdens de instrumentele genese de verschillende gekende (enkelvoudige) instrumentatieschema's met elkaar of met zichzelf moeten combineren. Dit is voor de leerlingen uiteraard geen gemakkelijke opdracht, maar we verwachten dat ze hierin zullen groeien en onder begeleiding van de deelnemende wiskundeleerkracht (én van elkaar) zullen leren hoe ze het computeralgebrapakket tot een geschikt instrument kunnen vormen (i.f.v. de taak). Tijdens de instrumentele genese zijn de geïnstrumenteerde technieken steeds verweven met de bijhorende wiskundige concepten en ligt de focus niet op het uitvoeren van berekingen, maar op het ontwikkelen van het (wiskundig) inzicht in bepaalde concepten.

Vertalen vanuit de didactische principes

De didactische principes (zie paragraaf 5.2.7) zijn sterk verweven met het hypothetisch leertraject. Hierdoor kwam reeds het **'White box-Black box'-principe** uitgebreid aan bod in de voorgaande paragraaf. Ook het **principe van de vensterdidactiek** kwam reeds ter sprake. De werkbladen zijn immers zodanig samengesteld dat de leerlingen zowel de algebraïsche, de grafische als de numerieke mogelijkheden van het computeralgebrapakket optimaal benutten.

Naast de bovenstaande didactische principes werd ook het **begeleid zelfstandig leren** geïntegreerd in het lesmateriaal. Alle werkbladen zijn voorzien van de nodige instructies en de nieuwe commando's en procedures worden uitgebreid beschreven, zodanig dat de leerlingen (in principe) in staat zijn om de werkbladen zelfstandig door te nemen. De leerlingen worden dus tijdens de wiskundelessen met ICT-ondersteuning begeleid door het werkblad én door de wiskundeleerkracht.

Ook het vierde principe, met name **differentiatie**, werd voorzien in het lesmateriaal. Enerzijds voorzien we bij de verplichte onderdelen van de leerstof uitgebreide oefeningenlijsten waarvan de oefeningen onderling (sterk) variëren qua moeilijkheidsgraad en abstractieniveau. Zo kunnen de leerkrachten door het selecteren van een aantal verplichte oefeningen het niveau bepalen dat alle leerlingen moeten bereiken. Daarnaast krijgen de leerlingen, die de geselecteerde oefeningen opgelost hebben en daarbij de capaciteiten hebben om moeilijker oefeningen aan te pakken, de kans om zich via een aantal bijkomende oefeningen te verdiepen in het onderwerp van de les.
Ook voor een aantal bijkomende onderwerpen zijn werkbladen en oefeningenlijsten voorzien, bvb. *'Oppervlakteberekening in poolcoördinaten'*, *'Eerste orde differentiaalvergelijkingen - Splitsing der veranderlijken'* en *'Oneigenlijke integralen'*. Met behulp van deze werkbladen kunnen de wiskundeleerkrachten het gedifferentieerd werken nog opvoeren en dit ofwel binnen een groep van leerlingen met zes lesuren wiskunde per week ofwel in een klasgroep waar leerlingen met zes en acht lesuren wiskunde per week samen de wiskundeles volgen.

Onderlinge verschillen tussen de drie aangeboden pakketten

Tijdens de onderwijsexperimenten zullen de leerkrachten in de experimentele conditie gebruik maken van drie verschillende pakketten: één voor de Derive-gebruikers, één voor de Mathcad-gebruikers en één voor de gebruikers van de applets en internetknoppen. De respectievelijke indexen en de bijhorende bestanden vindt men terug op de bijgevoegde cd-rom (zie bijlage D). We bespreken hier kort enkele onderlinge verschillen tussen de drie aangeboden pakketten.

- In het werkblad *'De bepaalde integraal: oppervlakte onder een parabool'* wordt het begrip 'Riemannsommen' ingevoerd en kunnen de leerlingen met behulp van enkele procedures zelf een oppervlakte berekenen door deze te benaderen met een groot aantal rechthoeken. De gebruikte procedures voor Derive bestonden reeds geruime tijd (zie [82]), maar gelijkaardige procedures voor Mathcad waren niet voorhanden. Het programmeren van deze procedures in Mathcad was een moeilijke klus en pas nadat de rechthoeken werden beschouwd als de grafieken van twee stuksgewijs gedefinieerde functies slaagden we erin om met Mathcad ook deze oefenigen op te lossen (zie bestand blanco1.mcd, paswoord: `riemannsom`[5]).

- In het werkblad *'Oppervlakte tussen een kromme en de x-as en tussen twee krommen'* wordt voor de Derive-gebruikers de procedure `tekentabel` ter beschikking gesteld. Deze procedure kan voor een grote klasse van reële functies een tekentabel opstellen (zie voorbeeld 4 en figuur 5.9, p. 112). Het bleek in Mathcad niet mogelijk om een gelijkaardige procedure te programmeren.

- In tegenstelling tot Mathcad beschikt Derive over een commando voor het berekenen van integralen door substitutie, nl. `INT_SUBST(f(x),x,u(x))`. Dit commando bepaalt een primitieve functie van $f(x)$ door de inverse van $u(x)$ te substitueren voor x in $f(x)$. Daarna wordt de integraal berekend en tenslotte wordt $u(x)$ gesubstitueerd voor x in het resultaat.

- In de Derive- en Mathcad-variant van het werkblad *'Numerieke integratie'* wordt gebruik gemaakt van gelijkaardige procedures om aan de hand van de methode van het midden, de trapeziumregel en de regel van Simpson bepaalde integralen numeriek te benaderen. De gebruikte procedures voor Derive werden in 1996 ontwikkeld ([82]) en lieten zich vrij gemakkelijk vertalen in Mathcad (zie bestand blanco2.mcd, paswoord: `numint`).

- Voor leerkracht B werd een aparte website ontwikkeld die bestond uit applets en internetknoppen. Deze website vormde een klein computeralgebrasysteem met beperktere mogelijkheden dan Derive en Mathcad. Toch slaagden we er in om voldoende applets te vinden (vnl. via http://www.wiskunde.nu) zodanig dat het merendeel van de werkbladen en oefeningenlijsten die ter beschikking stonden van de Derive- en Mathcad-gebruikers ook (gedeeltelijk) konden gebruikt worden door de leerlingen van leerkracht B.

- De website met applets en internetknoppen heeft een heel belangrijk voordeel ten opzichte van Derive en Mathcad. Elke leerling van leerkracht B die thuis over een computer met internetverbinding beschikte, kon thuis gebruik maken van dit mini-computeralgebrapakket.

[5]De concrete inhoud van de procedures werd op vraag van leerkracht C verborgen voor de leerlingen en beveiligd met een paswoord.

- De website die we samenstelden voor leerkracht B en zijn leerlingen heeft ook een heel belangrijk nadeel. De broncode van de applets en internetknoppen verandert soms van plaats of verdwijnt zelfs helemaal. Een groot aantal van de gebruikte internetknoppen waren verbonden met de website van het departement wiskunde van de 'Vanderbilt University' uit Nashville, Tennesee (USA) en werden ondersteund door het computeralgebrasysteem Mathematica. De website van de 'Vanderbilt University' werd echter in de loop van 2005 gereorganiseerd, waardoor alle corresponderende internetknoppen onbruikbaar werden. Op de cd-rom vindt met de orginele index terug. Hij was operationeel gedurende de twee onderwijsexperimenten, maar is nu gedeeltelijk onbruikbaar.

5.4.3 Pretest

Om het probleemoplossend vermogen en de wiskundige creativiteit van de leerlingen van de experimentele en controlegroep te meten en te vergelijken, hebben we voor en na het onderwijsexperiment een wiskundetoets afgenomen bij alle deelnemende leerlingen. Het was niet onze bedoeling om de wiskundekennis van de leerlingen te meten en daarom kozen we vragen die weinig exacte voorkennis (zoals formules) vereisten. We wilden de leerlingen oefeningen laten oplossen waarbij ze grafieken, figuren of (tussen)resultaten interpreteerden, vraagstukken waarbij ze een concreet probleem zelf vertaalden naar wiskunde en vragen waarbij het verband tussen de grafische en algebraïsche aspecten van het probleem belangrijk konden zijn voor de oplossing. Rekening houdend met de beschikbare tijd (één lesuur of dus maximaal 50 minuten) kozen we voor zeven vraagstukken die tot zeven verschillende categorieën behoorden (zie bijlage B.2.1).

Tijdens de correctie[6] van de pretest werd al snel duidelijk dat een aantal leerlingen slechts een paar oefeningen hadden proberen op te lossen. Blijkbaar hadden ze geen zin of misschien vonden ze de oefening(en) - op het eerste gezicht - te moeilijk. Bovendien had de wiskundetoets voor hen geen enkele waarde want het resultaat van de toets telde bijvoorbeeld niet mee voor dagelijks werk. Omdat '0/3' wegens een foutieve werkwijze een volledig andere betekenis heeft dan een '0/3' voor een onopgeloste oefening, besloten we de quoteringen van de nietopgeloste oefeningen[7] te verwijderen uit de resultaten van de pretest. Op deze

[6] Om een beter inzicht te krijgen in het probleemoplossend vermogen van de leerlingen werd ook het kladwerk van de leerlingen nagekeken.

[7] We beschouwen een oefening als **niet-opgelost** indien de leerling geen enkele aantekening, schets of berekening heeft gemaakt met betrekking tot de oefening.

manier verkregen we een aantal 'missing values' in de data van de pretest. Om te vermijden dat we door deze ontbrekende waarden een vertekend beeld zouden krijgen van het aanvangsniveau van de leerlingen, werden de ontbrekende waarden weggewerkt. Men kan 'missing values' op verschillende manieren vervangen door een concrete waarde. In onze data werden de ontbrekende waarden vervangen door de gemiddelde score van de vraag. Bvb. de derde oefening van de pretest werd door 8 leerlingen niet opgelost. Deze leerlingen kregen voor deze oefening een score van 1,4 op 3, omdat alle andere leerlingen samen een gemiddelde score van 1,4 op 3 haalden voor deze oefening.

Aansluitend aan de vraag en haar oplossing (zie bijlage B.2.1) werd een resultatentabel toegevoegd. De tabel bevat de gemiddelde score per vraag en dit zowel voor de volledige groep als opgesplitst per deelgroep. Een gemiddelde score geeft soms een eenzijdig beeld van de behaalde scores van de leerlingen. Om dit beeld te vervolledigen werd bij elke vraag een boxplot voor de vier verschillende subgroepen C6, C8, E6 en E8[8] toegevoegd. Een **boxplot** [55] is een grafiek van de vijf-getallen-samenvatting (nl. minimum, eerste kwartiel Q_1, mediaan M, derde kwartiel Q_3, maximum), waarbij de verdachte uitschieters individueel worden weergegeven. Een centrale rechthoek strekt zich uit van het eerste tot het derde kwartiel. De mediaan wordt in de rechthoek gemarkeerd door een lijn. Waarnemingen die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand (d.i. $Q_3 - Q_1$) buiten de centrale rechthoek vallen, worden afzonderlijk afgebeeld als mogelijke uitschieters. Buiten de rechthoek lopen twee lijnen die zich uitstrekken tot aan de kleinste en grootste waarnemingen die geen verdachte uitschieters zijn.

In de onderstaande paragraaf bekijken we de zeven verschillende vraagtypes die we selecteerden voor de pre- en posttesten. We kozen die types uit waarvan de corresponderende oefeningen echte 'problemen' waren (en geen rekenoefeningen) en die creativiteit van de leerlingen vereisten bij het oplossen ervan.

Type 1:
Als eerste type kozen we een rekenkundig probleem dat een creatieve oplossing vereiste. Een geduldige leerling kon deze oefening mogelijk oplossen door het gevraagde rechtstreeks te berekenen maar dit was uiteraard niet de bedoeling. Dergelijke rekenkundige problemen kan men bijvoorbeeld oplossen door eerst een korter en bijgevolg eenvoudiger probleem te bekijken en vervolgens de ge-

[8] C6: controleleerlingen met 6 uur wiskunde per week, C8: controleleerlingen met 8 uur wiskunde per week, E6: leerlingen in de experimentele conditie met 6 uur wiskunde per week, E8: leerlingen in de experimentele conditie met 8 uur wiskunde per week

bruikte methode uit te breiden naar het oorspronkelijk probleem.

Type 2:
De tweede vraag van elke wiskundetoets was een eenvoudig vraagstuk. Deze vraagstukken hadden een tweeledig doel. Enerzijds was het voor de motivatie van de leerlingen belangrijk dat de tweede vraag van de wiskundetoets vrij gemakkelijk was. Anderzijds wilden we met deze vraag nagaan of de leerlingen in staat waren om een concreet vraagstuk te vertalen naar correcte wiskunde.

Type 3:
Voor het derde type kozen we een meetkundig vraagstuk waarbij de leerlingen voor de oplossing konden steunen op de stelling van Pythagoras. Het maken van een correcte en duidelijke figuur was voor dit vraagtype steeds heel belangrijk.

Type 4:
Als vierde type kozen we voor creatieve oefeningen met als onderwerp het begrip 'deelbaar door'.

Type 5:
Het vijfde type was een telprobleem dat de leerlingen eenvoudig konden oplossen door de verschillende mogelijkheden op te sommen.

Type 6:
Als voorlaatste vraagtype kozen we vragen uit die enerzijds een sterk grafisch-algebraïsch karakter hadden en die anderzijds opnieuw een 'vertaling' vereisten van de probleemstelling naar concrete wiskunde.

Type 7:
In de laatste oefening werd van de leerlingen verwacht dat ze de waarde van vier parameters in het functievoorschrift van twee reële functies bepaalden en dit aan de hand van de grafiek van deze functies.

5.4.4 Het eerste onderwijsexperiment: beschrijving en discussie

De aanpak van de leerkrachten in de experimentele conditie

De krijtlijnen van het onderwijsexperiment waren op macroniveau volledig uitgetekend door de onderzoeker, maar toch werd de eigenlijke invulling sterk beïnvloed door de beschikbare infrastructuur en de aanpak van de deelnemende wiskundeleerkrachten. In deze paragraaf zullen we de lokale context en het verloop van het eerste onderwijsexperiment bespreken per leerkracht. In het bijzonder zullen we aandacht hebben voor een aantal 'confounding variables'[9] zoals de aard van het gebruikte computeralgebrasysteem, de aard van het gebruikte takenpakket, het al dan niet per twee werken aan een pc, het al dan niet gebruik maken van de vooropgestelde didactische principes, de ervaring van de leerkracht,...

Voor deze bespreking baseren we ons op de gegevens die verzameld werden tijdens de lesobservaties en het evaluatiegesprek en op de correspondentie die we met de leerkrachten in de experimentele conditie onderhielden. Het evaluatiegesprek vond plaats na het afronden van het onderwijsexperiment. Het werd geleid door een vooraf opgestelde vragenlijst en na afloop samengevat in een verslag.

Leerkracht A

Leerkracht A was een ervaren en enthousiaste gebruiker van Derive. Ze werkte sinds enkele jaren aan een eigen e-cursus voor het vijfde en zesde jaar, omdat ze in geen enkel handboek haar ideeën terugvond. Omdat het wiskundelokaal van leerkracht A niet over een internetaansluiting beschikte en omdat de e-cursus van deze leerkracht goed aansloot bij het theoretische kader en de didactische principes die we vooropstelden in ons onderzoek, werd er beslist dat leerkracht A tijdens het onderwijsexperiment gebruik zou maken van haar eigen materiaal. De leerkracht maakte ieder lesuur gebruik van haar eigen vaklokaal. Dit betekende echter niet dat ze elk lesuur ook effectief gebruik maakte van Derive. Het wiskundelokaal bevatte 10 oude en afgedankte computers, maar dat volstond voor de kleine klasgroepen. De experimentele groep die deelnam aan het eerste onderwijsexperiment bestond uit 8 leerlingen (zowel 6-uurs als 8-uurs). De leerlingen waren het gebruik van Derive gewoon en werkten tijdens de les individueel aan een computer. Het was voor hen het tweede jaar op rij dat ze intensief gebruik zouden maken van Derive. Bovendien hadden de leerlingen allemaal het computeralgebrasysteem thuis ter beschikking. De leerlingen hadden geen grafisch rekentoestel. De leerkracht was een absolute tegenstander van de GRM en had de invoering ervan op school steeds weten tegen te houden.

[9]'Confounding' variabelen zijn variabelen die we niet volledig onder controle kunnen houden en die mede bepaald worden door de lokale context en de deelnemende leerkracht.

De leerkracht eiste van haar leerlingen dat ze het merendeel van de berekeningen manueel (konden) uitvoeren. Derive mocht gebruikt worden voor korte tussenberekeningen (zoals het oplossen van vergelijkingen en stelsels) of voor het controleren van de eigenlijke berekeningen (bvb. het berekenen van onbepaalde integralen). Zelf schreef ze hierover de volgende opmerking: "Mijn ervaring: als de leerlingen met de hand niet goed algebraïsch kunnen rekenen dan zullen ze een ingewikkelde berekening op de computer niet tot een goed einde kunnen brengen. (...) Naar mijn mening moeten de leerlingen in hun jonge jaren voldoende met de hand rekenen. Men mag niet vergeten dat er een grote vormende waarde vastzit aan bvb. het bewijzen van identiteiten in de goniometrie, die eigenlijk hun waarde verliezen in het modern computertijdperk.".

Leerkracht A was een geroutineerde en ervaren gebruiker van ICT in de wiskundelessen. Ze volbracht het onderwijsexperiment zonder problemen en zonder bijkomende hulp.

Leerkracht B

Leerkracht B reageerde enthousiast op onze oproep op het wiskundeforum van Yahoo. Hij wilde heel graag deelnemen aan het onderwijsexperiment, maar de directie was minder enthousiast. De school werd (te) vaak gevraagd om deel te nemen aan allerhande onderzoeken en experimenten. Bovendien hanteerde men strikte regels voor de verdeling van de klasgroepen onder de wiskundeleerkrachten en had leerkracht B in principe geen klasgroep met zes wekelijkse lestijden wiskunde ter beschikking. Leerkracht B kreeg uiteindelijk toch de toestemming van de directie om deel te nemen aan het onderzoek.

Leerkracht B was een voorstander van het gebruik van computers tijdens de wiskundeles en had enige ervaring met Mathcad. Hij was heel erg geïnteresseerd in ons onderzoek, maar had terzelfdertijd ook enkele bedenkingen:

- Sommige leerlingen haalden op toetsen en examens punten door oefeningen op te lossen aan de hand van gekende algoritmes (bvb. oplossen van kwadratische vergelijkingen, bepalen van de vergelijking van een vlak door drie punten, berekenen van een primitieve functie...). Dit moest in de toekomst mogelijk blijven of m.a.w. het aanleren van dergelijke (oplossings)algortimes mocht niet geschrapt worden.

- Leerkracht B eiste dat het vak wiskunde toegankelijk bleef voor alle leerlingen en niet enkel voor de goede leerlingen.

- Leerlingen die geen computerliefhebbers waren, mochten niet de dupe worden van het onderwijsexperiment.
- De leerkracht vond dat intensief gebruik van ICT niet meer dan 50% van de lesduur mag bedragen. Hij vroeg dat er voldoende tijd en ruimte zou overblijven voor het klassieke wiskundeonderwijs.
- De kosten van de scholen lopen heel hoog op. Het experiment mocht geen bijkomende kosten met zich meebrengen en daarom werd er beslist om enkel met Java-applets en internetknoppen te werken. Het grote voordeel van deze werkwijze was dat de leerlingen dit thuis ook kunnen/mogen gebruiken.

De campus van de derde graad beschikte over een computerklas, een bibliotheek met een achttal computers (beide voorzien van een internetverbinding) en enkele vaklokalen die eveneens uitgerust waren met enkele computers. Deze lokalen waren voldoende vrij om er één of meerdere lesuren per week te werken.
De leerlingen hadden weinig ervaring met het gebruik van de computer en/of Mathcad tijdens de wiskundeles, want de andere collega's gebruikten tot nog toe slechts sporadisch een computer tijdens de les.

Uiteindelijk maakte leerkracht B en zijn leerlingen gedurende een tiental lessen (ongeveer 25% van het totale aantal lesuren dat besteed werd aan het onderwerp integralen) gebruik van de computer en de voorziene werkbladen. De lessen hadden plaats in de (multifunctionele) computerklas waar de leerlingen per twee of zelfs per drie aan één computer werkten. Maximaal waren er drie lesuren per week met ICT-ondersteuning en nooit twee lesuren na elkaar. Op deze manier wilde de leerkracht de leerlingen die niet graag met een computer werkten, niet te zwaar belasten. Tijdens het onderwijsexperiment maakten de leerlingen o.a. gebruik van een applet i.v.m. Riemannsommen (ontworpen door leerkracht B) en losten de werkbladen in verband met de toepassingen op de integraalrekening (oppervlakte, inhoud, lengte en manteloppervlakte) in groepjes op. Leerkracht B was in de loop van het tweede semester een tweetal weken afwezig, hierdoor kon hij niet dieper ingaan op het onderwerp 'integralen' en was er bijgevolg onvoldoende tijd om de andere werkbladen aan te pakken.

Leerkracht C

Ook leerkracht C reageerde op onze oproep op het wiskundeforum. Ze was duidelijk geïnteresseerd in het onderwijsexperiment, maar niet al haar collega's

reageerden even enthousiast. De directie stond erop dat de leerkrachten samenwerkten binnen de vakwerkgroep en wou bijgevolg dat ze in groep meewerkten aan het experiment. Uiteindelijk werd beslist dat leerkracht C de rol van leerkracht in de experimentele conditie zou vervullen en dat drie andere leerkrachten (verder Cb genoemd) zich zouden aansluiten als controleleerkrachten.
De leerkrachten waren grote voorstanders van het gebruik van ICT, waarbij vooral de grafische rekenmachine hun voorkeur genoot. Alle leerlingen hadden een eigen GRM en het toestel werd bijna dagelijks gebruikt in de wiskundeles. Het gebruik van de computer daarentegen was eerder beperkt maar toch niet helemaal onbekend. In het verleden was vooral de beschikbaarheid van de computerklassen het grootste struikelblok geweest. De school beschikte nochtans over een achttal klassieke computerklassen en twee open leercentra, maar voor ongeveer 2000 leerlingen is dit eigenlijk onvoldoende.

Leerkracht C was een waardevolle deelnemer aan het onderwijsexperiment. Ze volgde de ontwikkelingen op de voet, bereidde de werkbladen goed voor, signaleerde problemen en fouten, stelde vragen en gaf onmiddellijke feedback. Het eigenlijke onderwijsexperiment voerde ze nauwgezet uit. De leerkracht en haar leerlingen slaagden erin om zo'n 90% van alle werkbladen (gedeeltelijk of volledig) op te lossen. Enkel een aantal bijkomende toepassingen (o.a. toepassingen uit de fysica, oneigenlijke integralen, differentiaalvergelijkingen) bleven onbehandeld.

De lessen vonden plaats in het open leercentrum (OLC). Dit dubbele klaslokaal (zowel in functie als in grootte) bevatte centraal een 'klassiek' lesgedeelte en had aan drie zijden computers staan in blokken van twee. De leerlingen werkten per twee aan een computer. Het OLC werd meestal door twee leerkrachten (en dus ook door twee verschillende klasgroepen) terzelfdertijd gebruikt. Dit lokaal was enkel toegankelijk na reservatie. Leerkracht C gebruikte ofwel het eerste, derde en vijfde lesuur van de week ofwel het tweede, vierde en zesde lesuur van de week. Op deze manier hadden de andere leerkrachten ook de mogelijkheid om dit lokaal af en toe te reserveren. De leerkracht voorzag bovendien nooit blokken van twee lesuren. Twee lesuren met computergebruik vond ze te intensief voor de leerlingen.
Doordat de lesuren met ICT-ondersteuning verschilden van week tot week, werd een agenda op de elektronische leeromgeving Smartschool geplaatst om de leerlingen hieromtrent te informeren. De elektronische leeromgeving werd ook gebruikt om de werkbladen ter beschikking te stellen van de leerlingen. De leerkracht hield de oplossing even achter de hand, maar maakte die nadien toegan-

kelijk voor de leerlingen.
Leerkracht C voorzag steeds onmiddellijke feedback naar de onderzoeker toe en organiseerde na afloop van het eerste onderwijsexperiment een rondvraag bij haar leerlingen. Deze evaluatie - die in eerste instantie bedoeld was voor de directie en de eigen collega's - verschafte ons suggesties en feed-forward voor de tweede macrocyclus (zie 5.4.8).

Leerkracht D

Leerkracht D werd door een wiskundecollega voorgedragen voor het experiment. Ze was onmiddellijk enthousiast en gaf zich op voor het onderwijsexperiment als leerkracht in de experimentele conditie. Daarnaast engageerde ze zich om deel te nemen aan het proefproject (zie 5.3). De leerkracht maakte voordien slechts sporadisch gebruik van Mathcad, maar ze had wel een ruime informatica-ervaring. Ze was nog maar recentelijk overgeschakeld van een lesopdracht informatica/fysica naar een lesopdracht wiskunde.
Het onderwijsexperiment werd uitgevoerd in twee communicerende computerklassen voorzien van een internetverbinding. Op deze manier kon elke leerling individueel werken aan een computer. Doordat de leerlingen heel gedisciplineerd en enthousiast meewerkten, gaf deze werkwijze nooit problemen. De leerlingen (een gemengde groep van 6- en 8-uurs) hadden relatief weinig begeleiding nodig. De lessen werden steeds gegeven in een blok van twee lesuren.
Leerkracht D slaagde er samen met haar leerlingen in om bijna alle werkbladen te behandelen. Enkel een paar bijkomende toepassingen werden niet bekeken.

Leerkracht E

Leerkracht E kwam via een collega in contact met ons onderzoek. Beide leerkrachten zijn enthousiaste gebruikers van het computeralgebrasysteem Maple. Leerkracht E werkte al een aantal jaren aan een eigen e-cursus voor het vijfde en zesde jaar van het secundair onderwijs. Hij volgde hiervoor de ontwikkelingen van Maple op de voet en paste zijn e-cursus (indien mogelijk) steeds aan de nieuwste evoluties aan. Beide leerkrachten beschikten over een eigen vaklokaal dat ze volledig zelf hadden ingericht en uitgerust met een mengeling van oude en minder oude computers. Het aantal computers volstond om de leerlingen individueel te laten werken. Leerkracht E en zijn collega stonden zelf in voor het onderhoud van hun computerpark en hadden daarvoor een eigen atelier ingericht.

Leerkracht E had een uitsproken mening over de evolutie van het vak wiskunde in het secundair en hoger onderwijs. Hij had duidelijk bedenkingen bij de huidige inhoud van het vak wiskunde en stelde zichzelf de vraag of de huidige generatie wiskundestudenten nog wel goede wiskundeleerkrachten kunnen worden: "Het zwaartepunt van de wiskunde werd verschoven naar de derde graad. De inhoud van het, overigens niet haalbare programma, gaat boven het petje van de modale leerling die zoveel nevenactiviteiten bezit dat studeren op de tweede plaats komt. (...) Hetzelfde niveau halen op het einde van de rit wordt moeilijker, de inertie van de kar groter. De unief zal niet aan deze tendens ontsnappen.".

De e-cursus van leerkracht E is door de jaren heen een uitgebreide verzameling van Maple-werkbladen geworden, waarvan de inhoud en aanpak nauw verwant zijn met het theoretische raamwerk van ons onderzoek en de didactische principes die we vooropstelden. Dit bleek duidelijk uit een aantal lessen die door de onderzoeker werden bijgewoond. Er werd bijgevolg beslist dat deze leerkracht tijdens het onderwijsexperiment gebruik zou maken van zijn eigen materiaal.
De leerlingen die deelnamen aan het eerste onderwijsexperiment volgden allemaal een richting met zes wekelijkse lestijden wiskunde per week. Deze klasgroep viel echter uiteen in twee deelgroepen:

- Een groep die in het vijfde jaar eveneens les kregen van leerkracht E en bijgevolg goed vertrouwd waren met het pakket Maple.
- Een groep die in het verleden geen gebruik gemaakt hadden van computeralgebrasystemen en wiskundige software en bijgevolg 'bijgewerkt' moesten worden.

Het feit dat de klasgroep uit twee verschillende deelgroepen bestond, zorgde in het begin van het schooljaar voor grote onderlinge verschillen. Na verloop van tijd verminderden deze verschillen tussen de leerlingen. Vermoedelijk werd dit positief beïnvloed doordat de leerlingen thuis konden beschikken over Maple en doordat de leerkracht via e-mail steeds bereikbaar was voor zijn leerlingen.

Leerkracht F

Als ex-collega ontving leerkracht F een persoonlijke uitnodiging tot deelname, waarop ze positief reageerde. Deze leerkracht had weinig ervaring met het gebruik van computeralgebrasystemen in de wiskundeles. Het wiskundepakket Cabri gebruikte ze wel frequent tijdens de lessen. Ze had in het verleden ver-

schillende nascholingen gevolgd voor Mathcad en Derive. Haar voorkeur ging oorspronkelijk uit naar Mathcad, maar uiteindelijk besloot ze om Derive te gebruiken tijdens het onderwijsexperiment.
De leerkracht en haar leerlingen beschikten elk lesuur over een ruime multifunctionele computerklas, waar de leerlingen individueel aan een computer konden werken. Het lokaal beschikte niet over een internetaansluiting, maar de leerkracht omzeilde dit probleem door de werkbladen en bestanden op de lokale server te plaatsen. Leerkracht F kon voor de uitvoering van deze 'technische' handelingen steeds rekenen op de hulp van haar wiskundecollega.
De leerlingengroep bestond uit 12 leerlingen, zowel 6-uurs als 8-uurs. De leerlingen hadden geen ervaring met Derive en leerden het pakket gaandeweg - met vallen en opstaan - te gebruiken. Het onderwijsexperiment kende een trage aanloop (zowel voor de leerkracht als voor de leerlingen!) maar het verdere verloop was heel erg vlot. De leerlingen waren heel erg enthousiast. Ze werkten goed en ernstig aan de werkbladen en oefeningen. In principe hadden ze elk een computer ter beschikking maar de leerlingen werkten toch vrij veel samen: ze overlegden met elkaar en vergeleken hun resultaten.

De leerlingen behandelden alle werkbladen tot en met numerieke integratie. De werkbladen 'oppervlakteberekening in poolcoördinaten' en 'differentiaalvergelijkingen' werden enkel opgelost door de leerlingen met acht uur wiskunde per week. De toepassingen op de integraalrekening werden niet behandeld met behulp van werkbladen, maar de oefeningen uit het handboek werden wel aangepakt met Derive. We kunnen bijgevolg gerust stellen dat ook deze leerkracht het onderwijsexperiment op een correcte manier en volledig volgens de principes van ons onderzoek heeft volbracht.

Leerkracht G

Leerkracht G reageerde eveneens op onze oproep op het wiskundeforum. Ze was een grote voorstander van het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs, maar beperkte zich hoofdzakelijk tot intensief gebruik van het grafisch rekentoestel. Vanuit haar vorige job als informaticus had ze nochtans de interesse en voldoende ervaring om ook computergebruik te integreren in haar wiskundelessen. Door tijdsgebrek bleef het echter bij sporadisch gebruik van Derive en Cabri.
De klasgroep van leerkracht G bevatte uitsluitend leerlingen met zes wiskundelessen per week. Het onderlinge verschil tussen de leerlingen was vrij groot, maar ze waren het gebruik van de GRM en van een computer tijdens de (wiskun-

de)lessen gewoon. ICT werd in de school in alle jaren en vakken vrij regelmatig gebruikt, maar in de wiskundelessen was dit bij niemand echt intensief. Desalniettemin hadden de leerlingen bij de start van het onderwijsexperiment Derive vrij goed onder de knie. Vermoedelijk werd dit positief beïnvloed door het feit dat de leerlingen Derive thuis ter beschikking hadden. De leerlingen waren eveneens vertrouwd met het gebruik van de elektronische leeromgeving Smartschool.

Voor de uitvoering van het onderwijsexperiment kon de leerkracht beschikken over een klassieke computerklas waar de leerlingen per twee aan een computer werkten. Dit lokaal werd op voorhand drie lesuren per week gereserveerd. Dit reserveringsschema kwam in praktijk niet steeds overeen met het eigenlijke lesschema. Doordat het leslokaal ongeschikt was voor klassieke lesmomenten werden bepaalde werkbladen soms samengenomen of maakte de leerkracht slechts gedurende een halve les gebruik van het lokaal. Ondanks deze kleine moeilijkheden kende het onderwijsexperiment een vlot verloop. De leerkracht en haar leerlingen behandelden bijna alle werkbladen (op een paar facultatieve toepassingen na). Vooral de verwerking van de eerste werkbladen verliep heel vlot en snel. Tijdens de toepassingen hadden de leerlingen het iets moeilijker doordat de moeilijkheidsgraad hoger lag.

Leerkracht H

Ook leerkracht H meldde zich spontaan aan na onze oproep op het wiskundeforum. Hij was een groot voorstander van het gebruik van ICT in de wiskundelessen en hij vond bovendien dat daarbij zowel het gebruik van de grafische rekenmachine als de computer en de bijhorende software hoorde. De leerlingen hadden allemaal een eigen GRT en de school beschikte over een goede infrastructuur: meerdere klassieke computerklassen (waar de leeringen per twee konden werken aan een computer) en een multifunctionele computerklas voorzien van een internetaansluiting en projectiemogelijkheden.
De klasgroep van leerkracht H bevatte leerlingen met vijf en zes wekelijkse lestijden wiskunde. Zoals reeds eerder vermeld werden de leerlingen met vijf uur wiskunde per week niet opgenomen in de resultaten van ons onderzoek.

Leerkracht H begon als eerste leerkracht met de concrete uitvoering van het onderwijsexperiment. Tijdens het eerste trimester werkte hij gedurende een aantal weken heel intensief met Derive. Na nieuwjaar heeft deze leerkracht het gebruik van Derive in de wiskundelessen echter stopgezet. Hij vond de werkbladen te moeilijk voor zijn leerlingen en bovendien waren de leerlingen oververzadigd door het intensieve gebruik van de computer. Omdat de leerkracht tijdens het eerste trimester het onderwijsexperiment gedeeltelijk uitvoerde en hierbij intensief gebruik maakte van Derive, werd besloten om de leerlingen toch als experimentele groep te behouden.

Leerkracht I

Begin 2003, na onze oproep op het wiskundeforum, werden we gecontacteerd door de pedagogische begeleider wiskunde voor de derde graad van het gemeenschapsonderwijs. Omdat op dat ogenblik nog geen enkele school van het gemeenschapsonderwijs zich had aangesloten bij ons onderzoek besloot hij om zelf op zoek te gaan naar geïnteresseerde scholen binnen zijn eigen koepel. Hij kon uiteindelijk leerkracht I en J (en enkele collega's) overtuigen om deel te nemen aan ons onderzoek.
Leerkracht I en haar collega Ib gaven les op twee verschillende campussen van dezelfde school. Er werd beslist dat leerkracht I met een kleine klasgroep van een zestal leerlingen zou deelnemen als experimentele groep en dat haar collega met een grotere klasgroep zou deelnemen als controlegroep. Beide klasgroepen bestonden uit leerlingen met zes en acht uur wiskunde per week.
Leerkracht I besliste om het onderwijsexperiment uit te voeren met Derive. Zij en haar leerlingen hadden evenwel weinig ervaring met dit pakket. De leerkracht en de leerlingen waren wel vertrouwd met het gebruik van een grafisch rekentoestel. Op school kon de leerkracht gebruik maken van een eigen wiskundelokaal met twee computers. Aangezien haar klasgroep slechts uit zes leerlingen bestond, was dit zeker voldoende.
Leerkracht I startte bij de aanvang van het eerste onderwijsexperiment met een nieuwe halftijdse betrekking (buiten het secundair onderwijs) en werd bovendien geconfronteerd met wrijvingen in de school. Door het toedoen van deze externe factoren werd de uitvoering van het onderwijsexperiment steeds uitgesteld en werd het uiteindelijk nooit opgestart. Er werd beslist om de klasgroepen van de leerkrachten I en Ib beide in het onderzoek op te nemen als controlegroepen. Omdat we op het ogenblik dat deze beslissing werd genomen nog geen interventies in de lokale context van leerkracht I hadden uitgevoerd, konden we haar leerlingen probleemloos opnemen als controlegroep.

Leerkracht J

Ook leerkracht J kwam in contact met ons onderzoek onder impuls (druk?) van de pedagogische begeleider. Tijdens een gesprek met de pedagogische bege-

leider, leerkracht J en twee wiskundecollega's bleek al snel dat deze wiskundeleerkrachten maar matig geïnteresseerd waren en hun bedenkingen hadden bij de concrete uitvoering van het onderwijsexperiment. Twee leerkrachten hadden een duidelijke voorkeur voor het gebruik van de grafische rekenmachine, maar het gebruik van deze toestellen was nog niet ingevoerd in de school. Uiteindelijk werd beslist dat leerkracht J en haar leerlingen zouden deelnemen als experimentele groep. Een collega (Jb) en haar leerlingen zouden zich bij het experiment aansluiten als controlegroep.
Leerkracht J bleek eerder een tegenstander te zijn van het gebruik van ICT in de wiskundeles. De leerkracht had een wiskundelokaal met een computer maar gebruikte de computer nooit. Ze had ook totaal geen ervaring met het pakket Derive. Omdat de school in Gent gelegen was, boden we haar extra ondersteuning aan. Zo werden de werkbladen tijdens een persoonlijk onderhoud gedemonstreerd en toegelicht. Na afloop van dit gesprek was de leerkracht enerzijds gerust gesteld en anderzijds enthousiast om het onderwijsexperiment aan te vangen. Begin mei contacteerde leerkracht J ons echter met de mededeling dat ze het onderwijsexperiment niet zou uitvoeren. Ze had te kampen met tijdsproblemen (door een langdurige afwezigheid), haar leerlingen waren uiterst zwak en op school was - door technische problemen - slechts één computerklas beschikbaar in plaats van twee. Omdat we nog geen interventies hadden uitgevoerd in de lokale context van leerkracht J, konden we haar leerlingen probleemloos toevoegen aan de controlegroep van leerkracht Jb.

Leerkracht K

Ook leerkracht K reageerde positief op onze oproep om deel te nemen aan het onderwijsexperiment. Tijdens een gesprek met hem en enkele wiskundecollega's bleek de vakwerkgroep heel erg geïnteresseerd te zijn in het experiment, maar het was opvallend dat ze het experiment vooral zagen als een manier om uitgewerkt lesmateriaal te verkrijgen.
Tijdens de wiskundelessen maakten de leerkrachten intensief gebruik van het grafisch rekentoestel en af en toe kwamen wiskundige software zoals Cabri, Graphmatica en Excel aan bod. In het vak wiskunde werd enkel sporadisch het computeralgebrapakket Derive gebruikt. De leerlingen (allemaal uit een richting met zes uur wiskunde per week) hadden bijgevolg heel weinig ervaring met Derive. Tijdens het proefproject (waarvoor leerkracht K zich spontaan kandidaat stelde) werd al snel duidelijk dat leerlingen minstens de basishandelingen in Derive moeten kennen voor ze kunnen starten met de eigenlijke werkbladen (zie 5.3).

Ondanks het tegenvallende proefproject besloot leerkracht K toch als leerkracht in de experimentele conditie deel te nemen aan het onderwijsexperiment, maar ook het onderwijsexperiment verliep niet zoals afgesproken. Leerkracht K had tijdens ons inleidend gesprek opgegeven dat het onderwerp 'integralen' behandeld zou worden tijdens het tweede en derde trimester. Toen we aan het begin van het tweede trimester het lesmateriaal vrijgaven voor gebruik, bleek dat de leerkracht reeds in het eerste semester gestart was met dit onderwerp. Op het einde van het schooljaar 2003-2004 vertelde de leerkracht in een evaluatieformulier dat hij slechts sporadisch gebruik had gemaakt van Derive en bijgevolg werd er besloten om de klasgroep van leerkracht K niet te beschouwen als een experimentele groep, maar als een controlegroep. Deze leerkracht had geen gebruik gemaakt van het aangepaste materiaal, waardoor er weinig of geen interventies hadden plaats gevonden in de lokale context van leerkracht K. Ook deze leerlingen konden we bijgevolg probleemloos opnemen als controlegroep.
Achteraf gezien kunnen we ons niet van de indruk ontdoen dat leerkracht K vooral interesse had in het verkrijgen van kant-en-klaar lesmateriaal en niet geneigd was om het onderwijsexperiment uit te voeren.

Door het afhaken van de leerkrachten I, J en K en hun overheveling naar de controlegroep verkregen we de volgende verdeling voor onze leerlingenpopulatie: 138 experimentele leerlingen en 173 controleleerlingen, waarvan respectievelijk 125 en 147 leerlingen een richting met zes uur wiskunde per week volgden. Tabel 5.3 geeft ons een overzicht van alle leerkrachten die deelnamen aan de eerste cyclus en hun uiteindelijke 'functie'.

Codenaam	Plaats	Net	Leerlingen voorzien als	Deelname pretest?	Onderwijs-experiment uitgevoerd?	Deelname posttest?	Leerlingen deelgenomen als
A	Gent	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Derive	Ja	Experimentele groep
B	Hasselt	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met applets	Ja	Experimentele groep
C	Heverlee	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Mathcad	Ja	Experimentele groep
Cb	Heverlee	VGO	Controle-groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
D	Kortrijk	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Mathcad	Ja	Experimentele groep
E	Sint-Niklaas	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Maple	Ja	Experimentele groep
F	Wervik	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Derive	Ja	Experimentele groep
G	Halle	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Derive	Ja	Experimentele groep

Tabel 5.3: Overzichtstabel deelnemers eerste macrocyclus

Code-naam	Plaats	Net	Leerlingen voorzien als	Deelname pretest?	Onderwijs-experiment uitgevoerd?	Deelname posttest?	Leerlingen deelgenomen als
H	Leuven	VGO	Experimentele groep	Ja	Ja met Derive	Ja	Experimentele groep
I	Kapellen	GO	Experimentele groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
Ib	Kapellen	GO	Controle-groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
J	Gent	GO	Experimentele groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
Jb	Gent	GO	Controle-groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
K	Ronse	VGO	Experimentele groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
L	Gent	OGO	Controle-groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep
M	Deinze	VGO	Controle-groep	Ja	Neen	Ja	Controle-groep

Tabel 5.3: Overzichtstabel deelnemers eerste macrocyclus (vervolg)

De didactische principes in de lespraktijk

In paragraaf 5.2.7 bespraken we de vier didactische principes waarop we ons baseerden tijdens de ontwikkeling van het hypothetisch leertraject en het bijhorende lesmateriaal. In deze paragraaf beschrijven we hoe de wiskundeleerkrachten van de experimentele groepen de didactische principes in de praktijk hebben gebracht. We baseren ons hiervoor op de gegevens die werden verzameld tijdens de observaties en het evaluatiegesprek. Ook de correspondentie die we met de leerkrachten in de experimentele conditie onderhielden, bezorgde ons hieromtrent kwalitatieve gegevens.

Het **'White box-Black box'-principe** werd door alle leerkrachten strikt gevolgd. Alle leerkrachten - zowel deze die de werkbladen volgden als zij die een eigen e-cursus gebruikten - leerden in een eerste stadium hun leerlingen de berekeningen van bepaalde en onbepaalde integralen met de hand uitvoeren en leerden hen de specifieke integratietechnieken aan. In dit stadium werd het computeralgebrasysteem uitsluitend gebruikt voor eventuele tussenberekeningen (bvb. splitsen in partieelbreuken) en voor de controle van het eindresultaat. Eens de leerlingen voldoende vertrouwd waren met de pen-en-papier-technieken stonden de leerkrachten het gebruik van een computeralgebrasysteem toe voor de berekening van de integralen in de toepassingen.

Vanuit de werkbladen werden de leerlingen verplicht om ook het principe van de **vensterdidactiek** te gebruiken. Het onderwerp 'integralen' was hiervoor uitermate geschikt en het gebruik van een computeralgebrapakket stelde de leerlingen in staat om bijvoorbeeld het begrip 'bepaalde integraal' terzelfdertijd vanuit een grafisch en algebraïsch gezichtspunt te bekijken. Ze konden tijdens het oplossen van de werkbladen en de oefeningen afwisselen tussen de beide gezichtspunten en die aspecten selecteren die ze nodig hadden.

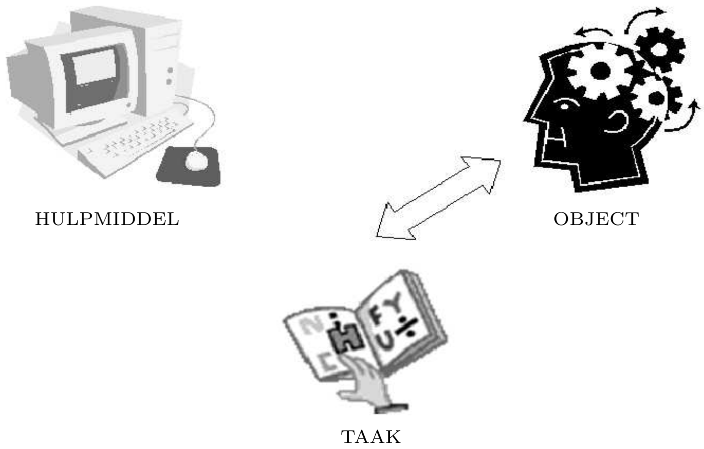
Het 'White box-Black box'-principe en het principe van de vensterdidactiek konden we als onderzoeker gemakkelijk sturen omdat deze volledig ingebed waren in het lesmateriaal. Voor de overige principes konden we ons enkel beperken tot suggesties en uit de evaluatiegesprekken met de verschillende leerkrachten merkten we dat de leerkrachten in de experimentele conditie deze resterende didactische principes op verschillende manier ingevuld hadden. Zo kregen de leerkrachten bij de start van het onderwijsexperiment de aanbeveling om voor de werkbladen (indien mogelijk) gebruik te maken van **begeleid zelfstandig leren**. Leerkracht E had reeds tijdens het inleidend gesprek laten blijken dat hij geen voorstander was van het begeleid zelfstandig leren. Hij wou bij voorkeur actief ingrijpen in het leerproces van de leerlingen en dit persoonlijk sturen. Leerkracht E hield graag de touwtjes in handen maar uit observaties bleek dat hij zijn leerlingen toch ook vrijheid bood tijdens de oefeningen en daarin wel een begeleidende rol aannam. De andere leerkrachten in de experimentele conditie maakten in mindere of meerdere mate gebruik van dit principe. Vermoedelijk was dit zelfs afhankelijk van werkblad tot werkblad. Het ene onderwerp is immers voor een leerling gemakkelijker zelfstandig te doorgronden dan een ander (meer abstract) onderwerp. Leerkracht C merkte na verloop van tijd dat een deel van de leerlingen niet overweg kon met de vrijheid die het zelfstandig werken/leren met zich meebracht. Een aantal leerlingen losten de werkbladen en oefeningen op zoals afgesproken, maar maakten hierbij geen notities. Deze leerlingen hadden bijgevolg geen geschreven materiaal dat ze konden gebruiken tijdens het studeren. Leerkracht C besliste om (min of meer) af te stappen van de begeleidende rol. Ze merkte achteraf op dat de lessen minder klassikaal waren dan in de voorgaande jaren, maar ook niet echt gericht waren op zelfstandig werk. De controle was er nog steeds, maar eerder op individueel niveau. In een zelfevaluatie schreef leerkracht C de volgende opmerking: "Aangezien ik weinig ervaring had met zelfstandig leren door leerlingen heb ik ongetwijfeld een aantal fouten gemaakt. Wat ik uit deze fouten geleerd heb naar volgend jaar toe is dat het zeker nodig is om de leerlingen te begeleiden bij het noteren van resultaten die ze met de computer vinden. Ze hebben dit in de voorgaande jaren zeker niet geleerd. Eventueel kan ik hen die nota's laten afgeven en dit quoteren als een taak. (...) Bij zelfstandig werken is het ook belangrijk dat leerlingen hun eigen leerproces evalueren. Wat heb ik deze les(sen) geprobeerd en gerealiseerd? Eventueel kan ik hen een logboek laten bijhouden.". Ook andere leerkrachten schipperden tussen begeleid zelfstandig leren en voldoende controle houden op het leerproces van de leerlingen. Leerkracht A schreef over haar rol als 'coach' het volgende: "De leerlingen ervaren dat als positief, maar ik waak er wel over dat het niveau daardoor niet naar beneden gaat. (...) Leerlingen alles zelf op het gemakje laten ontdekken, daar ben ik tegen.". En ook leerkracht F probeerde haar leerlingen voldoende te controleren. De leerlingen gaven op het einde van de les de ingevulde werkbladen steeds af. Leerkracht F had hierbij evenwel het grote voordeel dat ze slechts 12 leerlingen onder haar hoede had. Leerkracht C werd verondersteld het leerproces van 27 leerlingen in goede banen leiden!

Ook voor de invulling van het laatste didactische principe, nl. het **gedifferentieerd werken**, waren we afhankelijk van de leerkrachten in de experimentele conditie. Uit de verschillende inleidende gesprekken werd snel duidelijk dat er grote onderlinge verschillen waren tussen de leerlingen in eenzelfde klasgroep van 6 uurs-leerlingen. Bovendien bevatten verschillende klasgroepen zowel leerlingen met zes en acht wekelijkse lestijden wiskunde per week. Om tegemoet te komen aan deze onderlinge verschillen wilden we de leerkrachten de mogelijkheid bieden om gedifferentieerd te werk te gaan: de leerkrachten konden de oefeningen kiezen die aangepast waren aan de mogelijkheden van hun leerlingen. Eventueel konden ze de keuze ook overlaten aan hun leerlingen. De meeste leerkrachten verkozen om zelf de oefeningen te selecteren die de leerlingen maakten. Andere leerkrachten lieten hen dan weer kiezen uit een selectie van oefeningen. Indien er nog tijd over was, konden de leerlingen die selectie aanvullen met zelfgekozen oefeningen, maar de meeste leerlingen (de 'echte' 6 uurs-leerlingen?) beperkten zich tot het oplossen van de selectie van de leerkracht.

De instrumentele benadering in de lespraktijk

In hoofdstuk 3 bespraken we uitgebreid de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebrasystemen. In paragraaf 5.4.2 gingen we dieper in op de 'vertaling' van deze benadering in het eigenlijke lesmateriaal. Werd de instrumentele benadering van computeralgebra door de leerkrachten in de experimentele conditie doorgetrokken naar de lespraktijk?

Tijdens het behandelen van de voorbeelden en toepassingen uit de werkbladen gingen de leerkrachten in de experimentele conditie op de voorziene manier te werk en kregen de leerlingen de kans om tijdens de instrumentele genese (enkelvoudige) instrumentatieschema's te ontwikkelen waarin de geïnstrumenteerde technieken en de ontwikkeling van een wiskundig concept met elkaar verweven zijn (zie p. 119) en het hulpmiddel omgevormd werd tot een efficiënt instrument. De oefeningen uit de werkbladen en oefeningenlijsten waren door de onderzoeker niet opgesplitst in deeltaken. We wilden op deze manier de leerlingen aanmoedigen tot het ontwikkelen van 'rijke' recursieve instrumentatieschema's waarin verschillende geïnstrumenteerde technieken en meerdere wiskundige concepten met elkaar verbonden zijn. Door de complexiteit van de oefeningen waren de leerlingen genoodzaakt om eerst een oplossingsstrategie op te stellen. Alle leerkrachten in de experimentele conditie spoorden hun leerlingen aan om niet zomaar in het wilde weg gebruik te maken van de computer maar om het probleem eerst grondig te analyseren. Een aantal leerkrachten drukten hun leerlingen echter op het hart om de oplossingsstrategie eerst op papier te schetsen en pas daarna over te stappen naar het computeralgebrapakket om ten slotte m.b.v. het CAS de resterende deeltaken uit te werken. Deze leerkrachten zagen het computeralgebrapakket louter als een hulpmiddel dat aangewend wordt ná de eigenlijke uitwerking van een oplossingsstrategie of m.a.w. ná de interactie tussen 'taak' en 'object' (zie figuur 5.13). De leerlingen konden op deze manier bij het opstellen van een oplossingsstrategie geen gebruik maken van de mogelijke wisselwerking tussen 'taak' en 'hulpmiddel' en tussen 'object' en 'hulpmiddel'. Die leerlingen die evenwel een foute oplossingsstrategie voor ogen hadden, zagen (hopelijk) door het gebruik van het computeralgebrasysteem dat ze verkeerd bezig waren. Van zodra ze dit merkten, treedt de interactie tussen 'taak' en 'hulpmiddel' en tussen 'object' en 'hulpmiddel' vanzelf in werking.



Figuur 5.13: Wisselwerking tussen taak en object

De leerkrachten in de experimentele conditie die het meeste ervaring hadden met het gebruik van ICT hanteerden onmiddellijk de correcte invulling van de instrumentele benadering. Zij zagen het gebruik van een hulpmiddel wel als een element uit de driehoeksrelatie tussen 'taak', 'object' en 'hulpmiddel' en dit voor de volldige taak. Deze leerkrachten probeerden hun leerlingen aan te leren hoe ze op een efficiënte manier konden samenwerken met hun computer.

De leerlingen in het onderwijsexperiment

Hoe reageerden de leerlingen op het onderwijsexperiment? Konden ze vlot werken met het computeralgebrasysteem? Ondervonden ze specifieke problemen? Haalden ze op het einde van het experiment het verwachte niveau? De pre- en posttesten waren ontworpen om de wiskundige creativiteit en het probleemoplossend vermogen van de leerlingen te meten. Een antwoord op de bovenstaande vragen kunnen we bijgevolg niet afleiden uit deze data. Hiervoor zullen we ons opnieuw baseren op de gegevens die verzameld werden tijdens het observeren van enkele lessen en tijdens het evaluatiegesprek. Dit evaluatiegesprek verliep op basis van een vooraf opgestelde vragenlijst en werd na afloop samengevat in een verslag. Ook de correspondentie die we met de leerkrachten in de experimentele conditie onderhielden tijdens het onderwijsexperiment leverde hieromtrent gegevens op. In de onderstaande paragraaf geven we een overzicht van een aantal bemerkingen die de leerkrachten in de experimentele conditie gaven tijdens de evaluatiegesprekken.

De houding van de leerlingen

De appreciatie en het enthousiasme van de leerlingen varieerden van school tot school. Aangezien dit beïnvloed werd door een groot aantal factoren die de onderzoeker niet in de hand had (de leerling als individu, de klasgroep, de pedagogische vrijheid van de leerkracht, de leersfeer in de klasgroep,...), was dit eigenlijk te verwachten. Enkele voorbeelden:

- De leerlingen van leerkracht B apprecieerden de afwisseling van de verschillende werkvormen en werkten gedisciplineerd aan de oefeningen. Deze leerlingen wilden actief (betrokken) zijn en het gebruik van de computer bood hiervoor veel mogelijkheden.

- De leerlingen van leerkracht C reageerden niet zoals ze had verwacht. Enkele sterke leerlingen haakten af en verkozen het gebruik van hun grafisch rekentoestel of werkten enkel met pen en papier. Andere zwakkere leerlingen hervonden dan weer het plezier in de wiskunde en presteerden tijdens deze lessen heel goed.

- De leerlingen van leerkracht F waren redelijk enthousiast. Twee leerlingen waren opmerkelijk 'sterker' dan de andere leerlingen van de klasgroep. Deze twee leerlingen (volgens de leerkracht middelmatige leerlingen) vielen tijdens het onderwijsexperiment echt op door hun werklust, terwijl dit tijdens de klassieke lessen zeker niet het geval was.

- Leerkracht G daarentegen stelde dan weer vast dat de goede leerlingen ook heel erg goed waren met de computer en dat de minder goede leerlingen ook degene waren die het meest sukkelden met de computer en bijgevolg het traagst werkten. De lessen weerspiegelden eigenlijk duidelijk de capaciteiten van de leerlingen en dus ook de verwachtingen van de leerkracht.

- De leerlingen van leerkracht H waren na enkele weken oververzadigd door het intensieve computergebruik en het gebruik van de computer werd achterwege gelaten. Werd dit gevoel beïnvloed door de aanwezigheid van een aantal 5 uurs-leerlingen?

De moeilijkheden die de leerlingen ondervonden

Een ander aspect van het onderwijsexperiment dat tijdens de evaluatiegesprekken aan bod kwam, waren de (technische) moeilijkheden die de leerlingen ondervonden. Het was opvallend (maar eigenlijk ook logisch) dat vooral de onervaren leerlingen geconfronteerd werden met problemen.

- De leerlingen van leerkracht B ondervonden veel problemen bij het ingeven van de uitdrukkingen. Ze vergaten steeds de nodige haakjes en sterretjes. Daarnaast hadden de leerlingen eveneens problemen om het resultaat dat de computer hen gaf, te vergelijken met de oplossing van het handboek of de oefeningenbundel. Soms volstond het om op gelijke noemer te brengen of enkele rekenregels van de logaritme te gebruiken, maar daar dachten de leerlingen niet aan. Voor hen had de oplossing precies maar één vorm.
- In het eerste werkblad ondervonden de leerlingen van leerkracht C veel moeilijkheden met de commando's `ondersom`, `bovensom` en `tussensom`. De leerlingen hadden in het verleden nooit leren programmeren en begrepen bijgevolg niet dat een commando voorzien wordt van argumenten. Het duurde bij een aantal leerlingen vrij lang voor ze dit ten volle beseften.
- Enkele leerlingen van leerkracht F waren onzorgvuldig met de syntaxis. Ze waren zich niet bewust van het feit dat de syntaxis van een computeralgebrapakket heel erg strikt is en dat het gegevens nodig heeft om te kunnen werken. De formulering stond vaak letterlijk in het werkblad (bvb. ze gebruikten `F=` i.p.v. `F:=`) maar ze lazen de instructies niet aandachtig genoeg. Een aantal van deze leerlingen waren voor het onderwijsexperiment ook al slordig met (wiskundige) notaties en zagen tijdens deze lessen duidelijk in dat een correcte formulering wel degelijk noodzakelijk was.

Het 'behaalde niveau' van de leerlingen

Tijdens het voorbereiden van het ontwikkelingsonderzoek beslisten we om het 'behaalde niveau' van de leerlingen te meten via de percepties van de leerkrachten. Zij kennen hun klasgroep en (hun verwachtingen ten aanzien van) de individuele leerlingen. Bovendien weten ze uit ervaring hoe goed de leerlingen uit een richting met zes uur wiskunde per week de integraalrekening en de bijhorende concepten beheersen. Ze zijn bijgevolg goed geplaatst om hierover een uitspraak te doen. Daartegenover staat natuurlijk dat de leerkrachten ons geen vergelijkbare numerieke data kunnen bezorgen, maar ons enkel een beschrijving van hun waarnemingen en hun persoonlijke mening kunnen geven.

Tijdens het afsluitende evaluatiegesprek werd het 'behaalde niveau' van de leerlingen met de leerkracht besproken. Op het ogenblik van het gesprek (mei 2003) waren de examenresultaten van de leerlingen nog niet bekend, maar uiteraard hadden de leerlingen in de loop van het jaar een aantal toetsen gemaakt. Op basis van deze toetsen konden de leerkrachten de 'kennis' en het 'inzicht' van de leerlingen in verband met het onderwerp 'integralen' beoordelen.
Behalve leerkracht H vonden alle leerkrachten in de experimentele conditie dat het bereikte niveau van hun leerlingen goed was, maar ook niet opvallend beter dan andere jaren. Leerkracht C vond dat haar leerlingen de theorie wel beter onder de knie hadden. Bovendien stelde ze vast dat er tijdens de oefeningenlessen druk overleg gepleegd werd tussen de verschillende leerlingenduo's. De leerlingen dachten duidelijk meer en langer na over de vragen en gingen met elkaar in discussie. Dit werd wel in de hand gewerkt door het feit dat de leerkracht 27 leerlingen begeleidde en hun vragen niet onmiddellijk kon beantwoorden. De leerlingen waren bijgevolg genoodzaakt om zelf een oplossing te zoeken als ze vooruit wilden. Volgens leerkracht C had dit tot gevolg dat de leerlingen een groter inzicht hadden in de leerstof en dit ondanks het feit dat ze minder oefeningen hadden gemaakt. Dit inzicht werd bovendien nog versterkt door de constante wissselwerking tussen het algebraïsche en het grafische. Leerkracht C omschreef dit als volgt: "De leerlingen hebben het gevoel dat ze sommige leerstofonderdelen minder grondig verwerkt hebben dan dat ze dat op de klassieke manier zouden geoefend hebben. Voor een aantal leerstofonderdelen moet ik dit zeker tegenspreken. De theoretische delen van de leerstof beheersen ze duidelijk beter dan vroeger. Naar volgend jaar toe is het een uitdaging om te zoeken naar een manier om hen hierin te bevestigen zodat ze dit zelf ook zo aanvoelen.".
In sommige klasgroepen was er verschil merkbaar tussen de leerlingen onderling. In de klasgroep van leerkracht F waren twee leerlingen opmerkelijk 'sterker' dan

[9] Alle leerkrachten in de experimentele conditie hadden reeds meerdere jaren ervaring met laatstejaarsleerlingen uit de 6-uurs richtingen.

de andere leerlingen van de klasgroep. Ze werkten snel en zelfstandig de oefeningen af en bleken het onderwerp 'integralen' goed te beheersen. Deze twee (volgens de leerkracht middelmatige) leerlingen vielen tijdens het onderwijsexperiment echt op, terwijl dit tijdens de klassieke lessen zeker niet het geval was.

5.4.5 Posttest

Na afloop van het eerste onderwijsexperiment werden alle leerlingen van de experimentele en controlegroepen onderworpen aan een posttest (zie bijlage B.2.2). We selecteerden opnieuw zeven vraagstukken die elk tot één van de voorziene categorieën behoorden. Op deze manier verkregen we een posttest die parallel was aan de pretest (op de volgorde van de vragen na) en waarbij de oplossingsmethodes, die in beide toetsen vereist waren om de oefeningen op te lossen, dezelfde waren.

Voorbeeld: Type 1

Pretest: "Bereken: $2003 - 2001 + 1999 - 1997 + ... + 3 - 1$."
Posttest: "Op hoeveel nullen **eindigt** 100! ?"
Beide oefeningen kan men oplossen door eerst een gelijkaardig maar eenvoudiger probleem te beschouwen. Voor de oefening uit de pretest is bvb. $19-17+...+3-1$ een goede keuze. Voor de oefening uit de posttest kan men eventueel eerst 10! bekijken.

Alle leerkrachten namen deze toets af bij hun leerlingen en bezorgden ons deze terug. Leerkracht D had het toetsenpakket evenwel uit het oog verloren. Haar leerlingen hadden de posttest na het onderwijsexperiment afgelegd, maar de leerkracht bezorgde ons dit pakket pas in de loop van september 2004 terug. Deze toetsen werden alsnog verbeterd en verwerkt. Doordat de resultaten van leerkracht D pas in het najaar van 2004 bekend waren en de aanpak van de 'missing values' in dit proefschrift op een andere manier werd uitgevoerd, verschillen de scores van de leerlingen uit bijlage B.2.2 van de resultaten die werden voorgesteld tijdens TIME-2004 te Montréal [83].

Voor de correctie van de posttest (zie bijlage B.2.2) hanteerden we opnieuw strikte verbeteringsschema's en werden de quoteringen van de niet-opgeloste oefeningen[10] verwijderd uit de data. Om te vermijden dat door het optreden

[10] We beschouwen een oefening als **niet-opgelost** indien de leerling geen enkele aantekening, schets of berekening heeft gemaakt met betrekking tot de oefening.

van ontbrekende waarden een bias zou optreden in de resultaten, werden de 'missing values' opnieuw weggewerkt. Eerst werden alle leerlingen die de pre- of posttest niet hadden afgelegd verwijderd uit de data. 131 leerlingen uit de experimentele groepen en 164 leerlingen uit de controlegroepen werden behouden. Vervolgens werden de ontbrekende waarden opnieuw vervangen door de gemiddelde score van de vraag.

Voor de bespreking van de vragen en antwoorden van de posttest verwijzen we naar bijlage B.2.2. Er werd opnieuw een resultatentabel en een boxplot per vraag toegevoegd.

5.4.6 Resultaten

			Pretest		Posttest	
Vraag	Groep	n	$\overline{X}$	σ	$\overline{X}$	σ
Type 1	E6	123	47,3	32,0733	25,4	28,9747
	C6	140	56,9	31,0553	22,6	26,6520
Type 2	E6	123	80,8	14,1013	62,4	38,9143
	C6	140	77,1	16,0363	64,1	40,0780
Type 3	E6	123	41,4	32,7903	85,2	24,9957
	C6	140	47,6	34,2893	84,9	26,2877
Type 4	E6	123	54,5	40,3973	60,8	34,6276
	C6	140	58,9	39,2750	57,9	33,4367
Type 5	E6	123	86,6	26,1927	59,4	36,3370
	C6	140	83,1	33,3327	58,5	36,3733
Type 6	E6	123	69,7	31,7963	63,8	29,0150
	C6	140	66,4	34,1720	59,9	30,6707
Type 7	E6	123	38,4	27,8193	56,3	35,4870
	C6	140	41,2	25,9325	55,7	32,3375
Totaalscore	E6	123	58,8	12,4645	58,9	15,4731
	C6	140	60,7	16,1633	57,6	17,0717

Tabel 5.4: Descriptieve statistieken voor de pre- en posttest (punten op 100)

	Pretest		Posttest			
Vraag	t	P[11]	t	P	Cohen's d[12]	Effect
Type 1	-2,503	0,007	0,531	0,298	0,07	Verwaar-loosbaar
Type 2	1,970	0,025	-0,345	0,365	-0.04	Verwaar-loosbaar
Type 3	-1,502	0,067	0,110	0,456	0,07	Verwaar-loosbaar
Type 4	-0,886	0,184	0,688	0,446	0,09	Verwaar-loosbaar
Type 5	0,947	0,172	0,193	0,423	0,02	Verwaar-loosbaar
Type 6	0,797	0,213	1,054	0,146	0,13	Verwaar-loosbaar
Type 7	-0,859	0,195	0,132	0,447	0,02	Verwaar-loosbaar
Totaalscore	-1,058	0,145	0,668	0,250	0,08	Verwaar-loosbaar

Tabel 5.5: Resultaten statistische toetsen en 'effect size' (E6 versus C6)

[11] Eenzijdige t-verschiltoets voor twee gemiddelden

[12] Cohen's d is een maat voor effectgrootte (*effect size*). Bij een positieve waarde wijst de index op een gunstig effect van de interventie, bij een negatieve waarde is er sprake van een averrechts effect. In praktijk schommelt d meestal tussen -2,0 en +2,0.

		n	$\overline{X}$	σ
CAS	Mathcad	38	57,5	13,9125
	Maple	13	65,3	16,0078
	Derive	47	59,9	15,4861
	Applets	25	54,4	15,3278
Ervaring	Bedreven	17	62,5	15,1497
	Ervaren	96	57,2	14,6878
	Onervaren	10	65,4	18,2684
Totaal		123	58,9	15,4731

Tabel 5.6: Descriptieve gegevens voor de posttest i.f.v. CAS en ervaring

	df	F	$Sig.$
Tussen CAS-groepen	3	1,693	0,172
Tussen groepen volgens ervaring	2	2,006	0,139

Tabel 5.7: Resultaten statistische toetsen voor de posttest (ANOVA)

		n	$\overline{X}$	σ
Gemengde[13] klasgroep	Ja Neen	26 81	61,0 57,0	14,1545 15,2086
Individueel pc-gebruik	Ja Neen	57 66	60,3 57,2	14,6555 15,5790
Thuis gebruik van CAS	Ja Neen	60 63	57,1 60,1	14,9801 15,3295

Tabel 5.8: Descriptieve gegevens voor de posttest

	t	P
Gemengde klasgroepen	1,183	0,119
Individueel pc-gebruik	1,147	0,226
Thuis gebruik van CAS	-1,121	0,132

Tabel 5.9: Resultaten statistische toetsen voor de posttest (eenzijdige t-toets)

[13]We beschouwen een klasgroep als **gemengd** indien 6- en 8-urigen samen de wiskundelessen volgen. De gemengde klasgroep van leerkracht H met 5- en 6-urigen werd hier buiten beschouwing gelaten.

		n	Aandeel in de groep
CAS	Mathcad	15	39,5%
	Maple	9	69,2%
	Derive	22	46,8%
	Applets	10	40,0%
Ervaring	Bedreven	10	58,8%
	Ervaren	41	42,7%
	Onervaren	5	50,0%
Gemengde klasgroep	Ja	13	50,0%
	Neen	34	42,0%
Individueel pc-gebruik	Ja	29	50,9%
	Neen	27	40,9%
Thuis gebruik van CAS	Ja	27	45,0%
	Neen	29	46,0%

Tabel 5.10: Verdeling van de 56 goed presterende leerlingen uit de experimentele groep E6

School[14]	Leerkracht	n	$\overline{X}$	σ
Heverlee	C Cb	25 41	56,4 58,8	15,0912 12,9320

Tabel 5.11: Descriptieve statistieken voor de posttest (C versus Cb)

5.4.7 Discussie

Vooreerst bekijken we de resultaten van de pretest. We zien duidelijk in de resultatentabellen (van bijlage B.2.1) en de samenvattende tabel 5.4 dat noch de experimentele groep noch de controlegroep opvallend beter scoorde dan de anderen. Voor de ene vraag haalt de experimentele groep een hogere score dan de controlegroep en voor een andere vraag is de situatie net andersom. Indien we de globale score (in punten op 100) van de pretest voor de controleleerlingen met zes uur wiskunde per week (C6) gaan vergelijken met de globale score van de leerlingen in de experimentele conditie met zes uur wiskunde per week (E6) zien we dat de controleleerlingen beter scoren (60,7 t.o.v. 58,8), maar dit verschil is niet significant (eenzijdige t-verschiltoets voor twee gemiddelden met $P = 0,145$). We kunnen bijgevolg de experimentele en controlegroep als gelijkwaardig beschouwen.

Uit de resultatentabellen en boxplots van beide tests (zie bijlage B.2.1 en B.2.2) kunnen we ook afleiden dat de leerlingen uit richtingen met acht wekelijkse lestijden wiskunde per week beter scoorden dan hun collega's uit de richtingen met zes uur wiskunde per week. Voor de pretest verkregen we de volgende gemiddelde totaalscores: 73,1 voor de 8-urigen t.o.v. 59,7 voor de 6-urigen. Enkel voor het telprobleem uit de pretest behaalden de leerlingen met zes uur wiskunde per week als groep een beter resultaat dan de leerlingen met acht uur wiskunde per week. Op de posttest behaalden de leerlingen met acht uur wiskunde per week betere resultaten voor alle vragen. Dit resulteerde opnieuw in een hogere gemiddelde totaalscore voor deze groep, nl. 74,7 voor de 8-urigen t.o.v. 58,1 voor de 6-urigen. In het vervolg van deze paragraaf zullen we enkel de leerlingen met

[14] We beschouwen hier uitsluitend leerlingen uit de richtingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde

zes lesuren wiskunde per week beschouwen.

In de tabellen 5.4 en 5.5 vinden we de descriptieve statistieken, de resultaten van de t-toetsen en de waarden van Cohen's *d* voor de posttest terug. Uit de descriptieve gegevens blijkt dat de leerlingen van de experimentele groep E6 'beter' scoren dan de leerlingen uit de controlegroepen. Ze halen een hoger resultaat voor 6 van de 7 vragen en voor de gemiddelde totaalscore. De onderlinge verschillen tussen de resultaten van E6 en C6 zijn evenwel klein en variëren tussen -1,7 en 3,9 punten. Na het uitvoeren van de verschillende t-testen werd dit bevestigd: geen enkel verschil tussen de gemiddelde scores van E6 en C6 (voor de afzonderlijke vragen en de totaalscore van de posttest) kunnen we als significant beschouwen. Deze resultaten worden op hun beurt bekrachtigd door de lage effectgroottes: alle gemeten effecten (zowel de positieve als de negatieve) zijn verwaarloosbaar klein.

Vervolgens bekijken we de resultaten van de posttest van de leerlingen van E6 ten opzichte van een aantal variabelen: het gebruikte CAS, de ervaring van de leerkracht, het al dan niet gemengd zijn van de klasgroep, het al dan niet individueel werken aan de pc en het eventuele thuis gebruiken van het CAS door de leerlingen. In de tabellen 5.6 en 5.7 vinden we de descriptieve statistieken en de resultaten van de variantieanalyse terug. Op het eerste gezicht kunnen we uit tabel 5.6 afleiden dat de leerlingen die het computeralgebrapakket Maple gebruiken hoger scoren dan de leerlingen uit de andere subgroepen. Hetzelfde resultaat geldt voor de leerlingen die begeleid werden door een onervaren leerkracht (nl. leerkracht F). Uit de variantieanalyse blijkt echter dat de verschillen tussen de subgroepen niet significant zijn.
De resultaten voor de andere variabelen vindt men terug in tabel 5.8 en 5.9. Op basis van de descriptieve statistieken krijgt men de indruk dat de leerlingen uit gemengde klasgroepen, de leerlingen die individueel aan een pc werken en de leerlingen die thuis het CAS niet gebruiken hoger scoren dan de andere leerlingen, maar na het uitvoeren van de t-toetsen (zie tabel 5.9) blijken de onderlinge verschillen niet significant te zijn.

Een groot aantal facetten van het onderwijsexperiment werden bepaald door de school (nl. de infrastructuur, het ICT-beleid op school, de ondersteuning die de leerkrachten krijgen,...) en verschillen sterk van school tot school. Het is dus belangrijk om de resultaten ook op schoolniveau te bekijken of om m.a.w. de experimentele en controlegroepen binnen eenzelfde lokale context met elkaar te vergelijken. Door het afhaken van de leerkrachten I en J als leerkrachten in de experimentele conditie, resteert ons enkel leerkracht C en haar collega's Cb voor het opmaken van een dergelijke vergelijking. In tabel 5.11 werden de beschrijvende gegevens samengevat. Hieruit blijkt dat de leerlingen van de leerkrachten Cb (of m.a.w. de controlegroep) beter scoren dan hun collega's uit de experimentele groep. Na het uitvoeren van een eenzijdige t-toets bleek het verschil ook hier niet significant ($P = 0,243$). Cohen's $d = -0,17$ wat wijst op een verwaarloosbaar effect.

Voor elk van de bovenstaande variabelen konden we geen verband vaststellen tussen de waarde van de variabele en een hogere gemiddelde score op de posttest. De verschillen bleken steeds niet significant. Misschien kunnen we een verband vinden door de resultaten vanuit een ander gezichtspunt te bekijken. Tot welke subgroepen behoren de leerlingen in de experimentele conditie die goed scoren op de posttest? We beschouwen een score als 'goed' indien ze hoger is dan 60 op 100. In tabel 5.10 zien we dat de leerlingen die goed scoren verspreid zijn over de verschillende subgroepen. Zo gebruiken ze bijvoorbeeld verschillende computeralgebrasystemen en hebben ze zowel ervaren als onervaren leerkrachten (m.b.t. CAS-gebruik). Indien we bovendien hun gemiddelde totaalscore voor de posttest vergelijken met hun gemiddelde totaalscore voor de pretest zien we dat 35 (of 62,5%) van deze leerlingen reeds in de pretest meer dan 60 op 100 scoorden.

5.4.8 Feedforward voor de volgende cyclus

In de laatste fase van de eerste macrocyclus verzamelden we feedforward-informatie. Op het macroniveau werd deze informatie bepaald door de resultaten van de pre- en posttest en de lesobservaties. Op het microniveau werd deze informatie ons doorgegeven door de leerkrachten in de experimentele conditie. Tijdens het evaluatiegesprek met deze leerkrachten werd het onderwijsexperiment uitvoerig besproken en werd hen gevraagd wat ze graag anders zagen in het volgende onderwijsexperiment. Was het noodzakelijk om bepaalde zaken te veranderen? Of waren er bepaalde hiaten die nog konden opgevuld worden? Een aantal leerkrachten formuleerden enkele concrete suggesties:

- Leerkracht B was vragende partij voor bewijzen in flash-vorm of in de vorm van een powerpoint-presentatie. Hij zocht naar een werkvorm die het mogelijk maakte om ook de theorie (definities, eigenschappen en bewijzen) aan te brengen in een computerklas. Naar de mening van deze leerkracht bood dit vele voordelen: geen overvolle borden meer, men kan zowel voor-als achteruit gaan, men kan handenvrij lesgeven, de figuren zijn duidelijker en het vormt één geheel met de rest van het lessenpakket. Leerkracht B vroeg met andere woorden de uitbouw van het lessenpakket tot een complete e-cursus.

- Ook leerkracht C vond dat er te weinig mogelijkheden waren om de theorie aan te brengen, voornamelijk in het gedeelte dat voorafgaat aan de toepassingen. Daarnaast vond ze dat de werkbladen een aantal oefeningen bevatten die teveel Mathcad-technisch probleempjes bevatten. Deze oefeningen waren - door het gebrek aan informatica-kennis - te moeilijk voor haar leerlingen. Leerkracht C vroeg niet om deze oefenigen te verwijderen, maar had uit de eerste cyclus geleerd dat deze oefeningen minder geschikt waren voor (haar) onervaren leerlingen.

- Tijdens de uitvoering van het onderwijsexperiment werd leerkracht G geconfronteerd met het feit dat haar lesschema niet altijd overeenkwam met de reservering van het computerlokaal. Bovendien was het computerlokaal niet geschikt voor de klassieke lesmethode. Anderzijds vermoedde de leerkracht dat het computerlokaal tijdens het volgende schooljaar weinig beschikbaar zou zijn door de invoering van de 'vrije ruimte'[15]. Leerkracht G vroeg daarom tijdens het evaluatiegesprek om een aantal werkbladen voor computer te vertalen naar analoge werkbladen voor het grafisch rekentoestel TI-83. Alle leerlingen hadden een eigen toestel waarmee ze vlot konden werken en met behulp van deze bijkomende werkbladen zou de leerkracht als de computerklas niet (voldoende) vrij was toch kunnen verder werken aan het onderwerp 'integralen'.

Samengevat kunnen we dus stellen dat een aantal leerkrachten uit de experimentele conditie praktische wijzigingen vroegen:

- De werkbladen en oefeningenlijsten aanvullen met presentaties voor het aanbrengen van de theorie of dus het ontwikkelen van een volledige e-cursus.

- De werkbladen vertalen naar het gebruik van het grafisch rekentoestel, zodanig dat de leerkrachten het GRT kunnen gebruiken indien de computerklas niet beschikbaar is.

[15] De **vrije ruimte** is ruimte die in het lessenrooster van de derde graad is voorzien voor het uitwerken van creatieve en vakoverschrijdende projecten.

Op het macroniveau werd er beslist om geen andere bijkomende wijzigingen door te voeren. Op basis van de resultaten van de posttest konden we m.b.t. de wiskundige creativiteit en het probleemoplossend vermogen geen positieve of negatieve effecten van de interventies vaststellen. De leerkrachten hadden tijdens het onderwijsexperiment vastgesteld dat het behaalde niveau van de leerlingen vrij goed was. We hadden bijgevolg geen redenen om te twijfelen aan de instrumentele bandering van computeralgebra, de ondersteunende didactische principes of het vooropgestelde hypothetisch leertraject en werden er dus op dit niveau geen wijzigen vooropgesteld.

5.5 De tweede macrocyclus P2

5.5.1 Aanpassingen aan het lesmateriaal

In paragraaf 5.4.8 werden een aantal suggesties van de leerkrachten in de experimentele conditie op een rij gezet. De leerkrachten vroegen een aantal presentaties om definities, eigenschappen en bewijzen te kunnen aanbrengen in de computerlokalen en werkbladen voor het grafisch rekentoestel om verder te kunnen werken indien het computerlokaal niet beschikbaar is.

Aanvullende powerpoint-presentaties

Op vraag van leerkracht B en leerkracht C werden vijf powerpoint-presentaties ontwikkeld (zie bijlage D). Een eerste presentatie *'Inleiding: de bepaalde integraal'* werd ontwikkeld op basis van een werkblad dat leerkracht C had ontworpen. Deze presentatie bevatte een aantal voorbeelden die de herkomst van het begrip 'integraal' kaderden. Voor het aanbrengen van de middelwaardestelling en de begrippen 'integraalfunctie' en 'primitieve functie' ontwikkelden we de presentatie *'Hoofdstelling van de integraalrekening'*. Daarnaast werden ook de toepassingen ondersteund met bijkomende powerpoint-presentaties. We ontwikkelden de presentaties *'Parametervergelijking van een kromme'*, *'Volumeberekening van omwentelingslichamen'* en *'Volumeberekening van omwentelingslichamen: toepassingen'*.

Aanvullende werkbladen voor GRM

Het lesmateriaal werd aangevuld met twee 'theoretische' werkbladen voor het grafisch rekentoestel, nl. `bepintegraal_GRM.pdf` en `num_int_GRM.pdf` (zie bijlage D). Het eerste werkblad *'De bepaalde integraal: oppervlakte onder een pa-*

rabool' konden we vrijwel volledig behouden. Het gebruik van de commando's `ondersom`, `bovensom` en `tussensom` (uit de utility-file `num_int.mth` en de Mathcad-file `num_integratie.mcd`) werd vervangen door de opties `right sum`, `left sum` en `midpoint sum`. Deze opties konden de leerlingen selecteren door middel van het programma `RIEMANN83.8xp`[16] dat ze via de bijhorende kabel konden toevoegen aan hun grafisch rekentoestel. De overgang van een eindig aantal rechthoeken naar oneindig veel rechthoeken, werd verwijderd. Deze bewerkingen konden we met het toestel TI-83 niet uitvoeren.
Ook het werkblad *'Numerieke integratie'* konden we vrij vlot vertalen. In dit werkblad werden de commando's `int_midden`, `int_trapezium` en `int_simpson` respectievelijk vervangen door de analoge mogelijkheden `M`, `T` en `S` die beschikbaar waren onder de optie `Riemann Sums` van het programma `CALCULUS.8xp`[16].

De aanpassingen aan het lesmateriaal waren volledig in overeenstemming met de didactische principes. In de powerpoint-presentaties maakten we gebruik van het principe van de vensterdidactiek. De theorie i.v.m. het lesonderwerp 'integralen' werd geïllustreerd met grafische voorstellingen die we stapsgewijs konden opbouwen. Alle figuren werden ontworpen in Maple. De werkbladen voor de grafische rekenmachines verschilden in wezen niet van de werkbladen voor pc. De leerlingen konden ze eveneens zelf oplossen (begeleid zelfstandig leren) en de grafische mogelijkheden van de GRM werden optimaal benut (principe van de vensterdidactiek).

De powerpoint-presentaties en de nieuwe werkbladen voor het gebruik van de grafische rekenmachine werden toegevoegd aan de bestaande websites en werden toegankelijk gemaakt voor alle leerkrachten in de experimentele conditie, ook voor deze die niet expliciet gevraagd hadden om bijkomend materiaal.

5.5.2 Experimentele en controlegroepen

Voor de uitvoering van de tweede macrocyclus en het bijhorende onderwijsexperiment klopten we aan bij de wiskundeleerkrachten die hadden deelgenomen aan de eerste macrocyclus (met uitzondering van de leerkrachten H en K). 11 leerkrachten uit 9 verschillende scholen stemden toe in een tweede deelname. Enkel de leerkrachten I, Ib en L haakten af. Leerkracht M liet zich, bij gebrek aan een leerlingengroep met zes wekelijkse lestijden wiskunde per week, vervangen door een collega die we in het vervolg van deze tekst zullen aanduiden als

[16] bron: http://www.ticalc.org

Mb.

De oorspronkelijke keuze/rol van de deelnemende wiskundeleerkrachten werd behouden waardoor we, bij de aanvang van de tweede macrocyclus, beschikten over 8 experimentele groepen en 3 controlegroepen. Met uitzondering van leerkracht I hadden alle deelnemende leerkrachten in de experimentele conditie het onderwijsexperiment reeds doorlopen. De verdeling van de deelnemende leerkrachten en hun 'eigenschappen' (m.b.t. het net, de plaats, het gebruikte computeralgebrasysteem en materiaal) werden samengebracht in tabel 5.12. Door het afhaken van een aantal leerkrachten waren een paar scholen niet meer vertegenwoordigd in de tweede macrocyclus.

5.5.3 Pretest

In analogie met de eerste macrocyclus werden de leerlingen van de experimentele en controlegroep voor én na het onderwijsexperiment onderworpen aan een wiskundetoets. We creëerden opnieuw een wiskundetoets die parallel was aan de pre- en posttest uit de eerste macrocyclus en kozen opnieuw zeven vragen die elk tot één van de vooropgestelde types behoorden (zie paragraaf 5.4.3). Deze pretest bevatte zowel reeds gebruikte als nieuwe oefeningen. We konden zonder probleem vragen hernemen uit de eerste macrocyclus omdat geen enkele leerling uit de eerste macrocylcus deelnam aan de tweede cyclus.

In bijlage B.3.1 vindt men de opgaven van alle oefeningen uit deze pretest. Bij de nieuwe vragen wordt een mogelijke oplossing, een aantal veel voorkomende fouten en het verbeteringsschema vermeld. Bij alle vragen vindt men onder de vorm van een tabel en een boxplot de behaalde resultaten van de leerlingen. Bij het corrigeren werd opnieuw onderscheid gemaakt tussen een niet-opgeloste oefening (dit resulteerde in een 'missing value') en een oefening die volledig foutief werd opgelost (score 0). De 'missing values' werden weggewerkt door ze te vervangen door de gemiddelde score van de desbetreffende oefening.

Codenaam	Plaats	Net	Leerlingen voorzien als	Onderwijs-experiment uitgevoerd met	Gebruikte ontworpen materiaal
A	Gent	VGO	Experimentele groep	Derive	neen
B	Hasselt	VGO	Experimentele groep	applets	ja
C	Heverlee	VGO	Experimentele groep	Mathcad	ja
Cb	Heverlee	VGO	Controlegroep	nvt[10]	nvt[10]
D	Kortrijk	VGO	Experimentele groep	Mathcad	ja
E	Sint-Niklaas	VGO	Experimentele groep	Maple	neen
F	Wervik	VGO	Experimentele groep	Derive	ja
G	Halle	VGO	Experimentele groep	Derive	ja
I	Kapellen	GO	Experimentele groep	Derive	ja
Ib	Kapellen	GO	Controlegroep	nvt[10]	nvt[10]
Mb	Deinze	VGO	Controlegroep	nvt[10]	nvt[17]

Tabel 5.12: Overzichtstabel van de deelnemers aan de tweede macrocyclus

5.5.4 Het tweede onderwijsexperiment: beschrijving en discussie

In deze paragraaf bespreken we kort het verloop van het tweede onderwijsexperiment per deelnemende leerkracht. Hiervoor baseren we ons op de correspon-

[17] Niet van toepassing

dentie die we tijdens het onderwijsexperiment onderhielden met de leerkrachten. Daarnaast beschikken we ook over een aantal kwantitatieve en kwalitatieve gegevens uit het evaluatieformulier, dat de leerkrachten in de experimentele conditie na afloop van het onderwijsexperiment (online) invulden.

De beschikbare infrastructuur en het al dan niet samenwerken van de leerlingen wordt niet opnieuw besproken. Deze variabelen waren in vergelijking met het eerste onderwijsexperiment niet gewijzigd.

Leerkracht A

Leerkracht A is een geroutineerde gebruiker van Derive en voerde ook het tweede onderwijsexperiment uit op basis van haar eigen e-cursus. De uitvoering van het onderwijsexperiment verliep opnieuw vlot.

Leerkracht B

Leerkracht B beschikte tijdens het schooljaar 2004-2005 voor de deelnemende klasgroep over een 'vast' lesuur in het computerlokaal. Aan het onderwerp 'integralen' besteedde leerkracht B slechts een viertal lessen met computerondersteuning waarbij hij bovendien slechts gedeeltelijk gebruik maakte van het voorziene materiaal. Omdat er in dit geval geen sprake is van intensief gebruik van CAS besloten we om de klasgroep van leerkracht B niet te behouden als experimentele groep, maar in de (verwerking van de) resulaten op te nemen als controlegroep.

Leerkracht C

Leerkracht C doorliep het onderwijsexperiment zoals afgesproken: ze behandelde het merendeel van de voorziene werkbladen en ze vond eveneens tijd om ook het (extra) werkblad *'Oppervlakteberekening met poolcoördinaten'* te behandelen. Ze maakte bovendien gebruik van de gevraagde powerpoint-presentaties en vond dit een grote verbetering ten opzichte van het vorige experiment. Ze merkte op dat het experiment op organisatorisch vlak vlotter verliep dan vorig jaar en dat ook de technische problemen beperkt waren. Het gebruik van Mathcad werd uitgebreid naar de evaluaties maar bleef uiteindelijk beperkt tot één enkele toets omdat dit organisatorisch te moeilijk was.
Vorig jaar slaagden de leerlingen van leerkracht C er aanvankelijk niet in om het gebruik van CAS te combineren met het nemen van goede notities. Tijdens het

tweede onderwijsexperiment slaagden de leerlingen er meestal goed in om hun werk aan de computer te combineren met het nemen van notities. De leerlingen vonden de werkbladen (in het bijzonder het veralgemenen van redeneringen en het gebruiken van abstracte symbolen) soms vrij moeilijk maar ze deden goed hun best. Slechts 2 van de 24 leerlingen hadden tijdens de wiskundelessen met computerondersteuning niet genoeg zelfdiscipline en werden door de leerkracht regelmatig bijgestuurd worden.
Leerkracht C vermelde in haar evaluatieformulier dat de leerlingen beter en plichtsbewuster werkten dan de klasgroep van het vorige jaar en zich bijvoorbeeld bij de toepassingen minder lieten afschrikken. Toch was leerkracht C op het einde van het schooljaar 2004-2005 niet zeker of ze het onderwijsexperiment op eigen houtje zou hernemen. Uiteindelijk besliste ze om ook in de toekomst Mathcad te blijven gebruiken.

Leerkracht D

Leerkracht D was een ervaren gebruiker van Mathcad en doorliep samen met haar klasgroep vlot het tweede onderwijsexperiment. Ze meldde geen opmerkelijke problemen.

Leerkracht E

Leerkracht E maakte ook tijdens het tweede onderwijsexperiment gebruik van Maple en zijn eigen e-cursus. De lessen verliepen, net zoals tijdens het vorige schooljaar, vlot en werden intensief en efficiënt ondersteund met het gebruik van Maple.

Leerkracht F

Leerkracht F maakte intensief gebruik van Derive in haar wiskundelessen. Voor het onderwerp 'integralen' voorzag ze gedurende enkele weken vier lesuur per week. Ze behandelde bijna alle (basis)werkbladen, maakte gebruik van een aantal powerpoint-presentaties en voorzag ook een aantal (extra) werkbladen, meer bepaald '*Oppervlakteberekening met poolcoördinaten*' en '*Differentiaalvergelijkingen*'. De lessen verliepen zonder noemenswaardige problemen en ook tijdens de toetsen en het mondelinge examen konden de leerlingen gebruik maken van Derive.
Leerkracht F vond dat het gebruik van een computeralgebrasysteem een duidelijke meerwaarde bood en vooral differentiatie (voor wat betreft de moeilijk-

heidsgraad en het ritme) mogelijk maakte. Ze was nog steeds enthousiast over haar deelname aan de onderwijsexperimenten en vast van plan om Derive ook in de toekomst te blijven gebruiken.

Leerkracht G

Uit de correspondentie (via e-mail) die we met leerkracht G onderhielden, bleek dat ook zij het tweede onderwijsexperiment had aangevangen. Ze maakte opnieuw gebruik van het materiaal dat ter beschikking stond op de website en alles verliep vlot. Maar, na de afronding van het onderwijsexperiment, werd er niets meer van deze leerkracht vernomen. De posttesten werden niet teruggestuurd, het evaluatieformulier werd niet ingevuld en we ontvingen geen enkele reactie op onze verschillende oproepen. We kunnen dus stellen dat leerkracht G en haar klasgroep hadden afgehaakt, waardoor we verplicht waren om deze experimentele groep te verwijderen uit de onderzoeksdata van de tweede macrocyclus.

Leerkracht I

Ook leerkracht I haakte (opnieuw) af. Alhoewel ze bij de aanvang van het schooljaar 2004-2005 vast besloten was om het onderwijsexperiment uit te voeren, zag ze (wegens een samenloop van omstandigheden) in de loop van het schooljaar af van een actieve deelname aan het experiment. Bovendien konden we leerkracht I en haar collega Ib uiteindelijk niet behouden als controlegroepen doordat ze de posttest vergaten af te nemen bij hun leerlingen.

Uit deze bespreking blijkt duidelijk dat we als onderzoeker sterk afhankelijk waren van de medewerking van de deelnemende leerkrachten. Indien een leerkracht en de bijhorende experimentele of controlegroep op het laatste ogenblik afhaakten, konden we deze niet meer vervangen en waren we verplicht om verder te werken met de resterende groepen. Uiteindelijk haakte ook controleleerkracht Mb af (de posttesten werden ons niet terugbezorgd) en bleven slechts 86 leerlingen in de experimentele conditie en 82 controleleerlingen over, waarvan 68 leerlingen in de experimentele conditie en 74 controleleerlingen uit een 6 uursrichting.

Het 'behaalde niveau' van de leerlingen meten we opnieuw via de percepties van de leerkrachten. Zij kennen hun klasgroep en (hun verwachtingen ten aanzien van) de individuele leerlingen en weten uit ervaring hoe goed de leerlingen

uit een richting met zes uur wiskunde per week de integraalrekening en de bijhorende concepten beheersen. Ze zijn bijgevolg goed geplaatst om hierover een uitspraak te doen. Ze kunnen ons echter geen vergelijkbare numerieke data bezorgen, maar enkel een beschrijving van hun waarnemingen en hun persoonlijke mening.
We peilden in het evaluatieformulier naar de mening van de deelnemende leerkrachten i.v.m. het 'behaalde niveau' van de leerlingen. De leerkrachten gaven opnieuw aan dat het bereikte niveau van hun leerlingen goed was. Leerkracht F vond zelfs dat haar leerlingen een opvallend hoog niveau hadden bereikt. Ook leerkracht C constateerde een hoog niveau: "Het niveau was beter dan vorig jaar, omdat de leerlingen plichtsbewuster waren. Een aantal meisjes raakten zelfs gefrustreerd als ze niet alle oefeningen effectief gemaakt en gevonden hadden.".

5.5.5 Posttest

De posttest van de tweede macrocyclus (zie bijlage B.3.2) bevatte hoofdzakelijk vragen die ook in de wiskundetoetsen van de eerste macrocyclus werden gebruikt. Het hergebruiken van deze vragen beïnvloedde de resultaten van ons onderzoek niet doordat geen enkele leerling van de tweede macrocyclus had deelgenomen aan de eerste macrocylus.
Voor de correctie van de posttest (zie bijlage B.3.2) hanteerden we opnieuw strikte verbeteringsschema's en werden de quoteringen van de niet-opgeloste oefeningen verwijderd uit de data. Vervolgens werden de 'missing values' opnieuw weggewerkt. Eerst werden alle leerlingen die de pre- of posttest niet hadden afgelegd, verwijderd uit de data. 83 leerlingen uit de experimentele groepen en 77 leerlingen uit de controlegroepen werden behouden. Vervolgens werden de ontbrekende waarden opnieuw vervangen door de gemiddelde score van de vraag. Voor een bespreking van de eigenlijke vragen en antwoorden van de posttest verwijzen we naar bijlage B.3.2. Er werd opnieuw een resultatentabel en een boxplot per vraag toegevoegd.

Codenaam	Plaats	Net	Leerlingen voorzien als	Deelname pretest?	Onderwijs-experiment uitgevoerd?	Deelname posttest?	Leerlingen opgenomen als
A	Gent	VGO	Exp. groep	Ja	Ja met Derive	Ja	Exp. groep
B	Hasselt	VGO	Exp. groep	Ja	Neen	Ja	Controlegroep
C	Heverlee	VGO	Exp. groep	Ja	Ja met Mathcad	Ja	Exp. groep
Cb	Heverlee	VGO	Controlegroep	Ja	Neen	Ja	Controlegroep
D	Kortrijk	VGO	Exp. groep	Ja	Ja met Mathcad	Ja	Exp. groep
E	Sint-Niklaas	VGO	Exp. groep	Ja	Ja met Maple	Ja	Exp. groep
F	Wervik	VGO	Exp. groep	Ja	Ja met Derive	Ja	Exp. groep
G	Halle	VGO	Exp. groep	Ja	Neen	Neen	Verwijderd
I	Kapellen	GO	Exp. groep	Ja	Neen	Neen	Verwijderd
Ib	Kapellen	GO	Controlegroep	Ja	Neen	Neen	Verwijderd
Mb	Deinze	VGO	Controlegroep	Ja	Neen	Neen	Verwijderd

Tabel 5.13: Overzichtstabel deelnemers tweede macrocyclus

5.5.6 Resultaten

			Pretest		Posttest	
Vraag	Groep	n	$\overline{X}$	σ	$\overline{X}$	σ
Type 1	E6	65	51,4	32,1813	23,2	22,0513
	C6	70	53,8	30,1343	21,6	23,1903
Type 2	E6	65	63,8	43,2583	58,7	23,0313
	C6	70	76,5	38,7343	58,6	24,0340
Type 3	E6	65	70,0	32,0320	65,6	31,8520
	C6	70	63,3	32,5513	58,3	33,4237
Type 4	E6	65	46,2	31,9743	63,3	39,5503
	C6	70	51,0	27,3473	72,5	33,0627
Type 5	E6	65	63,1	27,2457	72,1	40,7300
	C6	70	70,7	23,4737	63,8	41,5757
Type 6	E6	65	46,7	24,1620	80,0	25,3780
	C6	70	53,5	29,0120	81,7	23,0780
Type 7	E6	65	59,4	30,8603	57,0	27,3133
	C6	70	63,2	32,7595	51,8	28,8798
Totaalscore	E6	65	57,3	18,9359	59,8	15,5355
	C6	70	61,8	16,2800	58,0	14,0664

Tabel 5.14: Descriptieve statistieken voor de pre- en posttest (punten op 100)

	Pretest		Posttest			
Vraag	t	P[18]	t	P	Cohen's[19] d	Effect
Type 1	-0,439	0,331	0,414	0,340	0,07	Verwaar-loosbaar
Type 2	-1,783	0,038	0,036	0,486	0.01	Verwaar-loosbaar
Type 3	1,198	0,117	1,295	0,099	0,22	Klein positief
Type 4	-0,938	0,175	-1,458	0,073	-0,25	Klein negatief
Type 5	-1,743	0,042	1,166	0,123	0,20	Klein positief
Type 6	-1,463	0,073	-0,399	0,345	-0,07	Verwaar-loosbaar
Type 7	-0,689	0,246	1,061	0,145	0,18	Verwaar-loosbaar
Totaalscore	-1,464	0,074	0,713	0,439	0,12	Verwaar-loosbaar

Tabel 5.15: Resultaten statistische toetsen en 'effect size' (E6 versus C6)

[18] Eenzijdige t-verschiltoets voor twee gemiddelden

[19] Cohen's d is een maat voor effectgrootte. Bij een positieve waarde wijst de index op een gunstig effect van de interventie, bij een negatieve waarde is er sprake van een averrechts effect. In praktijk schommelt d meestal tussen -2,0 en +2,0.

School[20]	Leerkracht	n	$\overline{X}$	σ
Heverlee	C	24	60,9	13,2688
	Cb	52	57,3	15,2724

Tabel 5.16: Descriptieve statistieken voor de posttest (C versus Cb)

		n	$\overline{X}$	σ
CAS	Mathcad	39	58,3	13,7687
	Maple	14	62,0	20,6559
	Derive	12	62,3	14,9897
Totaal		65	59,8	15,5356

Tabel 5.17: Descriptieve gegevens voor de posttest i.f.v. CAS

	df	F	$Sig.$
Tussen CAS-groepen	2	0,457	0,635

Tabel 5.18: Resultaten statistische toets voor de posttest (ANOVA)

[20] We beschouwen hier uitsluitend leerlingen uit de richtingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde

		n	$\overline{X}$	σ
Ervaring	Bedreven Ervaren	20 45	59,2 60,1	19,0261 13,9460
Gemengde klasgroep	Ja Neen	27 38	57,8 61,3	14,7407 16,1132
Individueel pc-gebruik	Ja Neen	41 24	59,2 60,9	16,8493 13,1688
Thuis gebruik van CAS	Ja Neen	20 45	59,2 60,1	19,0261 13,9460

Tabel 5.19: Descriptieve gegevens voor de posttest

	t	P
Bedreven versus ervaren	-0.213	0.416
Gemengde klasgroepen	-0,887	0,189
Individueel pc-gebruik	-0,411	0,341
Thuis gebruik van CAS	-0,213	0,416

Tabel 5.20: Resultaten statistische toetsen voor de posttest (eenzijdige t-toets)

		n	Aandeel in de groep
CAS	Mathcad	20	51,3%
	Maple	8	57,1%
	Derive	8	66,7%
Ervaring	Bedreven	11	55,0%
	Ervaren	25	55,6%
Gemengde klasgroep	Ja	13	48,1%
	Neen	23	60,5%
Individueel pc-gebruik	Ja	21	51,2%
	Neen	15	62,5%
Thuis gebruik van CAS	Ja	11	55,0%
	Neen	25	55,6%

Tabel 5.21: Verdeling van de 36 goed presterende leerlingen uit de experimentele groep E6

5.5.7 Discussie

Vooreerst bekijken we het aanvangsniveau (of m.a.w. de resultaten van de pretest) van de beide groepen. Zijn er opvallende verschillen waarneembaar? Op basis van de resultatentabellen van de pretest (zie bijlage B.2.1) en tabel 5.14 kunnen we vaststellen dat de leerlingen van de experimentele groep E6 voor zes vragen lager scoorden dan hun medeleerlingen uit de controlegroep C6. Dit lijkt erop te wijzen dat de controleleerlingen als groep mogelijk 'sterker' zijn dan de leerlingen in de experimentele conditie of toch minstens een hoger aanvangsniveau hadden voor de start van het onderwijsexperiment. Maar, ondanks het feit dat dat de leerlingen van de controlegroep voor deze toets gemiddeld ruim 4 punten hoger scoorden dan de leerlingen van de experimentele groep (nl. respectievelijk 61,8 en 57,3 op 100), is ook hier geen sprake van een significant verschil tussen de twee leerlingengroepen (eenzijdige t-verschiltoets voor twee gemiddelden met $P = 0,074$).

Op basis van de resultatentabellen en de boxplots van beide tests kunnen we opnieuw vaststellen dat de leerlingen van de richtingen met acht wekelijkse lestijden wiskunde per week beter scoorden dan hun collega's uit de richtingen met zes uur wiskunde per week. Voor de pretest verkregen we de volgende gemiddelde totaalscores: 69,6 voor de 8-urigen t.o.v. 59,6 voor de 6-urigen. Voor de posttest noteerden we 78,0 voor de 8-urigen t.o.v. 58,9 voor de 6-urigen. In de bespreking van de resultaten zullen we enkel de leerlingen met zes lesuren wiskunde per week beschouwen.

In de tabellen 5.14 en 5.15 vinden we de descriptieve statistieken, de resultaten van de t-toetsen en de waarden van Cohen's d voor de posttest terug. Uit de descriptieve gegevens blijkt dat de onderlinge verschillen tussen de resultaten van E6 en C6 meestal klein zijn. Enkel voor de vragen van de types 3, 5 en 7 behalen de leerlingen van E6 een gemiddelde score die meer dan 5 punten hoger ligt dan de gemiddelde score van C6. Voor de vraag van het type 4 is de situatie omgekeerd: de leerlingen van C6 scoren gemiddeld ongeveer 9 punten hoger dan de leerlingen van E6. Na het uitvoeren van de t-toets bleek evenwel dat we geen enkel verschil tussen de gemiddelde scores van E6 en C6 (voor de afzonderlijke vragen en de totaalscore van de posttest) als significant kunnen beschouwen. Cohen's d nuanceert de resultaten van de t-toets. Op basis van deze maat voor de effectgrootte kunnen we besluiten dat voor de vragen van de types 3 en 5 een klein positief effect waarneembaar is. Voor de vraag van het type 4 is er sprake van een klein negatief effect.

Vervolgens bekijken we de resultaten van de posttest van de leerlingen van E6 ten opzichte van een aantal variabelen: het gebruikte CAS, de ervaring van de leerkracht, het al dan niet gemengd zijn van de klasgroep, het al dan niet individueel werken aan de pc en het eventuele thuis gebruiken van het CAS door de leerlingen. In de tabellen 5.17 en 5.18 vinden we de descriptieve gegevens en het resultaat van de variantieanalyse terug. De onderlinge verschillen tussen

[20] Leerkracht F wordt in de tweede macrocyclus beschouwd als een ervaren leerkracht, waardoor de subcategorie 'onervaren' verdwijnt.

de beschouwde subgroepen 'Mathcad', 'Maple' en 'Derive' zijn minimaal. Dit wordt bevestigd door het resultaat van de variantieanalyse. Daaruit blijkt dat de verschillen tussen de subgroepen niet significant zijn.
De resultaten voor de andere variabelen vindt men terug in tabel 5.19 en 5.20. Op basis van de descriptieve statistieken krijgt men de indruk dat de leerlingen met een ervaren leerkracht (m.b.t. CAS-gebruik), de leerlingen uit niet-gemengde klasgroepen, de leerlingen die per twee aan een pc werken en de leerlingen die thuis het CAS niet gebruiken hoger scoren dan de andere leerlingen. De onderlinge verschillen zijn evenwel heel klein en blijken na het uitvoeren van de t-toetsen (zie tabel 5.20) niet significant te zijn.

Ook voor de resultaten van de tweede macrocyclus zullen we de resultaten van een experimentele groep en een controlegroep binnen eenzelfde school (lokale context) met elkaar vergelijken. Door het afhaken van leerkracht I, resteert ons opnieuw enkel leerkracht C en haar collega's Cb voor het opmaken van een dergelijke vergelijking. In tabel 5.16 worden de beschrijvende gegevens samengevat. Hieruit blijkt dat de leerlingen van de leerkrachten C (of m.a.w. de experimentele groep) beter scoren dan hun collega's uit de controlegroep. In de eerste cyclus was de situatie omgekeerd. Na het uitvoeren van een eenzijdige t-toets bleek het verschil niet significant ($P = 0,160$). We bepalen opnieuw de effectgrootte met Cohen's d. We vinden dat $d = 0,24$, wat wijst op een klein positief effect.

We konden voor de verschillende variabelen geen verband vaststellen tussen de waarde van de variabele en een hogere gemiddelde score op de posttest. De verschillen bleken steeds niet significant. We gaan in de data op zoek naar de leerlingen in de experimentele conditie die goed scoorden. Tot welke subgroepen behoren deze leerlingen? We beschouwen een score opnieuw als 'goed' indien ze hoger is dan 60 op 100. In tabel 5.21 zien we dat ook in de tweede macrocyclus de leerlingen die goed scoren verspreid zijn over de verschillende subgroepen. Zo gebruiken ze bijvoorbeeld verschillende computeralgebrasystemen en hebben ze zowel ervaren als onervaren leerkrachten (m.b.t. CAS-gebruik). Na vergelijking van de data van de pre- en posttest bleek bovendien dat 20 (of 55,6%) van deze leerlingen ook op de pretest reeds goed scoorden. Hoe kunnen we dit resultaat verklaren? Zoals reeds eerder vermeld (zie ook paragraaf 5.4.4) zijn er grote onderlinge verschillen tussen de leerlingen uit richtingen met zes uur wiskunde per week, m.b.t. tot het vak wiskunde, en dit op het vlak van interesse, motivatie en inzicht. De groep van leerlingen die goed scoorden op de posttest en de pretest zijn vermoedelijk de 6-urigen met een duidelijke interesse voor wiskunde die reeds in staat zijn om problemen op te lossen en daarbij creatief op zoek gaan naar oplossingsmethodes. De leerlingen die goed scoorden op de posttest maar (nog) niet op de pretest kunnen we aanduiden als de leerlingen die gevoelig waren voor de positieve invloed van het gebruik van computeralgebrasystemen. Deze leerlingen slaagden erin om hun 'wiskundige bagage' te verruimen. Deze verruiming resulteerde in een grotere wiskundige creativiteit en een breder probleemoplossend vermogen.

Is het effect van de interventies beperkt tot deze kleine groep van leerlingen of zijn er nog andere mogelijke verklaringen? Bij het verbeteren van de pre- en posttesten werden we geconfronteerd met vragen die de leerlingen (meestal 6-urigen) niet oplosten. Ze maakten geen enkele schets, aantekening of berekening. Het ontbrak een aantal van deze leerlingen duidelijk aan inzet. Het al dan niet (goed) oplossen van de wiskundetoetsen had voor hen geen gevolgen en ze waren blijkbaar niet gemotiveerd om zich in te zetten voor deze toetsen. De data van de pre- en posttesten leverden bijgevolg niet voor elke leerling een maat op die hun werkelijke wiskundige creativiteit en hun vermogen om problemen op te lossen weerspiegelen. Dit wordt bovendien bevestigd door de hoge gemiddelde scores van de leerlingen uit de richtingen met acht wekelijkse lestijden wiskunde. Deze leerlingen beschikken uiteraard over een 'grotere wiskundige bagage', maar hebben duidelijk ook met meer inzet de toetsen afgelegd.

Een tweede verklaring kunnen we vinden in de opzet van het ontwikkelingsonderzoek. In een poging om zoveel mogelijk data te verzamelen contacteerden we leerkrachten uit verschillende scholen. Verschillende scholen betekent echter ook verschillende lokale contexten, elk met hun eigen afhankelijke 'verstorende' variabelen (de infrastructuur, het computeralgebrasysteem, de visie van de school t.a.v. ICT, de aanpak en inzet van de leerkracht,...). Bovendien beschikten we binnen eenzelfde school niet steeds over een controle- en experimentele groep. Dit was in de praktijk niet haalbaar omdat er in kleinere scholen slechts één klasgroep van laatstejaarleerlingen met zes uur wiskunde per week is en deze kleinere scholen anders werden uitgesloten. Ook het opsplitsen van een klasgroep in een experimentele en een controlegroep was geen optie omdat dit de naturalistische context sterk wijzigde.
De grote onderlinge verschillen tussen de scholen en de leerkrachten maken het vergelijken van de controle- en experimentele groepen moeilijk. Dit heeft er mogelijk voor gezorgd dat we tijdens de analyse van de resultaten geen duidelijke effecten van de interventies konden vaststellen.

Een van de doelstellingen van ontwikkelingsonderzoek is het testen of genereren van een theorie (zie paragraaf 4.2.2). In ons onderzoek kozen wij voor het testen van de instrumentele benadering en een aantal ondersteunende didactische principes. Heeft dit theoretisch kader de test doorstaan? Uit de vergelijking van de pre- en posttestresultaten blijkt er nauwelijks een effect waarneembaar te zijn (zowel positief als negatief). Anderzijds hadden de leerkrachten tijdens de beide onderwijsexperimenten wel vastgesteld dat het behaalde niveau van de leerlingen goed tot heel goed was. Op basis van deze resultaten stellen we vast dat er geen redenen zijn om het theoretisch raamwerk te verwerpen of te wijzigen.

5.6 Conclusie

In hoofdstuk 2 hebben we onze onderzoekvragen 1 en 2 geformuleerd. Deze onderzoeksvragen ontstonden na het waarnemen van een aantal tegenstrijdige signalen vanuit het secundair en hoger onderwijs (zie paragraaf 2.7). Zo stelden we o.a. vast dat het wiskundeniveau van de leerlingen en studenten daalde. We wilden in het bijzonder een oplossing zoeken die ons in staat zou stellen om deze negatieve tendens om te buigen. Kunnen we op basis van de resultaten van onze twee onderwijsexperimenten een antwoord formuleren op deze beide vragen?

1. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen het wiskundig inzicht van de leerlingen verbeteren?*

   De vier wiskundetoetsen die de leerlingen oplosten tijdens de onderwijsexperimenten waren er niet op gericht om hun wiskundig inzicht en/of hun kennis van het onderwerp 'integralen' te meten. Voor deze vraag baseren we ons dus hoofdzakelijk op de bevindingen van de leerkrachten in de experimentele conditie. In de beide cycli waren de leerkrachten in de experimentele conditie tevreden over het 'behaalde niveau' van hun leerlingen. De ene leerkracht vond dat het wiskundig inzicht van de leerlingen opvallend beter was dan voordien (of voor bepaalde onderdelen van de leerstof) en een andere leerkracht vond dan weer dat de verschillen niet zo opmerkelijk waren. Vanuit de bevindingen van deze leerkrachten zijn we bijgevolg geneigd om deze onderzoeksvraag voorzichtig positief te beantwoorden. We besluiten bijgevolg dat het gebruik van een computeralgebrasysteem het wiskundig inzicht van de leerlingen positief kan beïnvloeden en verbeteren.

2. *Kan het gebruik van computeralgebrasystemen (en in het bijzonder de ontwikkeling van instrumentatieschema's) de probleemoplossende vaardigheden en de wiskundige creativiteit van leerlingen positief beïnvloeden?*

   Onze voorkeur ging bij de aanvang van ons onderzoek uit naar de methode van het ontwikkelingsonderzoek en naar het ontwikkelen van een hypothetisch leertraject en de bijhorende onderwijsactiviteiten. Via deze methode hadden we een meetinstrument om de invloed van intensief en efficiënt gebruik van een computeralgebrasysteem op de probleemoplossende vaardigheden en de wiskundige creativiteit van onze experimentele leerlingen te meten. Een antwoord op deze tweede onderzoeksvraag volgt dus logischerwijs uit de (numerieke) resultaten van de beide macrocycli.
   Zoals reeds opgemerkt werd in de paragrafen 5.4.6 en 5.5.6 bleek uit de analyse van de data dat de interventies een verwaarloosbaar effect hadden. Slechts voor twee vragen van de tweede posttest konden we een klein positief effect constateren. We stelden wel vast dat een aantal leerlingen uit de experimentele groep vooruitgang boekten. Een vergelijkende studie tussen de leerlingen uit de experimentele groep die opvallend beter presteerden op de posttest in vergelijking met de pretest, leverde geen relevante resultaten of een duidelijk onderling verband op. Deze leerlingen behoorden tot verschillende klasgroepen, ze hadden verschillende wiskundeleerkrachten die hen onderwezen en ze maakten gebruik van verschillende computeralgebrasystemen.

   We stellen dus vast dat we er niet in geslaagd zijn om op basis van de verzamelde data een positief effect van de interventies aan te tonen. Deze tweede onderzoeksvraag blijft bijgevolg onbeantwoord. We kunnen enkel vaststellen dat een computeralgebrasysteem een hulpmiddel en instrument is, een 'stelling', dat een deel van onze leerlingen en studenten hogerop kan brengen.

Hoofdstuk 6

ICT-gebruik in het secundair en hoger onderwijs

"A new scientific truth does not triumph by convincing its opponents and making them see the light, but rather because its opponents eventually die, and a new generation grows up that is familiar with it."

Max Planck, 1858-1947

6.1 Inleiding

In hoofdstuk 2 bekeken we een aantal signalen die aangaven dat het wiskundeniveau van onze leerlingen en studenten daalde. Vanuit de instrumentele benadering van computeralgebra en een aantal didactische principes die het gebruik van computeralgebra in het wiskundeonderwijs ondersteunen, zagen we in het gebruik van computeralgebra in de wiskundelessen van het secundair onderwijs een mogelijke oplossing voor dit probleem. Deze hypothese leidde tot de onderzoeksvragen 1 en 2 (zie 2.7) en werd in de hoofdstukken 3, 4 en 5 uitvoerig behandeld. Het beantwoorden van deze onderzoeksvragen gebeurde op basis van de resultaten van twee onderwijsexperimenten (zie hoofdstuk 5) en de ervaringen van de deelnemende leerkrachten in de experimentele conditie. Alvorens we de onderwijsexperimenten uitwerkten en het instructiemateriaal ontwikkelden, was het belangrijk om te weten in welke mate het gebruik van ICT reeds geïntegreerd was in het wiskundeonderwijs. Vanuit de eigen leservaringen in het secundair en hoger onderwijs was gebleken dat de implementatie van computeralgebra in de wiskundelessen geen evidentie was. We werden tijdens onze pogingen geconfronteerd met een gebrek aan infrastructuur, lesmateriaal en enthousiasme van de vakcollega's. We besloten in 2001 om met behulp van een steekproef een balans op te maken van het ICT-gebruik in het secundair onderwijs. In 2005 herhaalden we deze actie en werd ze bovendien uitgebreid naar het hoger onderwijs. Op basis van de verkregen data zullen we in dit hoofdstuk een antwoord formuleren op de derde onderzoekvraag van dit proefschrift: *"Ondersteunen de Vlaamse wiskundeleerkrachten hun wiskundelessen met ICT-hulpmiddelen? Hoe is de integratie van ICT in het Vlaamse wiskundeonderwijs geëvolueerd tussen 2001 en 2005?"*.

In dit hoofdstuk beschrijven we de organisatie en de resultaten van drie enquêtes die we uitvoerden in 2001 en 2005. De resultaten van onze steekproeven vullen we in paragraaf 6.4 aan met aanverwante resultaten uit de internationale studies PISA2000 en TIMSS 2003. Op basis van deze resultaten zullen we ten slotte in 6.5 een antwoord formuleren op onderzoeksvraag 3.

6.2 Secundair onderwijs

6.2.1 Organisatie

Samenstellen en versturen van de enquêteformulieren

De organisatie van de verschillende enquêtes bestond uit drie verschillende fases. In een eerste fase werd een enquêteformulier samengesteld. We wilden op basis van de antwoorden van de wiskundeleerkrachten een totaalbeeld schetsen van het ICT-gebruik in de wiskundelessen van het secundair onderwijs. In het bijzonder waren we geïnteresseerd in de volgende variabelen:

- de frequentie van ICT-gebruik (eventueel afhankelijk van de klasgroep)
- de gebruikte werkvorm
- de beschikbare infrastructuur
- het gebruikte lesmateriaal

- de mening van de leerkracht i.v.m. nascholing en ICT-gebruik op toetsen
- de invloed van CAS en ICT op het leerproces van de leerlingen
- de houding van de leerkracht t.o.v. CAS- en ICT-gebruik

Het eerste enquêteformulier bevatte uiteindelijk 12 open en gesloten vragen (zie C.1.1). Daarnaast voorzagen we ook ruimte voor de naam, leeftijd, school en klasgroepen van de leerkracht. Op basis van deze informatie konden we het geslacht van de leerkracht, de koepel waartoe de school behoort en de richtingen bepalen waar de leerkracht les gaf.

Voor de rondvraag van 2005 ontwierpen we een gelijkaardig formulier (zie C.1.2) maar met 28 open en gesloten vragen. We waren nog steeds geïnteresseerd in dezelfde variabelen, maar toch onderging het formulier van 2001 een aantal veranderingen. In eerste instantie hadden we geleerd uit onze fouten:

- We vroegen expliciet naar het geslacht van de deelnemende leerkracht want op basis van de naam of initialen is het niet steeds mogelijk om het geslacht te bepalen.
- In 2001 stonden soms meerdere vragen in één item. Sommige leerkrachten beantwoordden hiervan maar één vraag. Om dit te vermijden werden de vragen gespreid over meerdere puntjes.
- In het enquêteformulier van 2001 peilden we naar de mening van de leerkrachten i.v.m. vier stellingen (over ICT-gebruik en elementaire rekenvaardigheden, over nascholing en over ICT-gebruik op toetsen). Het consequent coderen van de antwoorden (zie 6.2.1) was niet gemakkelijk en werd in 2005 vereenvoudigd door enkel directe vragen te stellen.

Een aantal nieuwe vragen waren geïnspireerd op de antwoorden en opmerkingen van de respondenten van 2001, nl. naar aanleiding van de moeilijkheden die ze ondervonden (op het vlak van organisatie en tijdsgebrek) en de 'nieuwe' invulling van hun taak tijdens een wiskundeles met ICT-ondersteuning (zie C.1.2, vraag 5 en 6c). Ten slotte werden ook een aantal nieuwe vragen toegevoegd die gebaseerd waren op ervaringen en vaststellingen uit de onderwijsexperimenten: het gebruik van open leercentra en elektronische leeromgevingen, het maken van goede notities tijdens lessen met computerondersteuning,... (zie C.1.3).

Na het samenstellen van het enquêteformulier werden tijdens de tweede fase de gegevens van de populatie verzameld. De populatie waaruit we een steekproef wilden nemen, bestond uit alle Vlaamse wiskundeleerkrachten van het gewoon secundair onderwijs. Omdat we de gegevens van deze leerkrachten zelf niet kenden (naam, richting, graad, aantal per school,...) concentreerden we ons op de schoolgegevens. Op basis van de informatie die verstrekt werd op de websites van het departement Onderwijs van het minsterie van de Vlaamse Gemeenschap, van het Vlaams Secretariaat van het Katholiek Onderwijs en van het Gemeenschapsonderwijs werden de e-mailadressen verzameld van 'alle' Vlaamse scholen van het gewoon secundair onderwijs (i.h.b. van het secretariaat en/of directie). Deze lijst werd aangevuld met persoonlijke e-mailadressen van leerkrachten die we konden terugvinden op de websites van de scholen.

De derde en laatste fase bestond uit het versturen van de e-mailberichten. In mei 2001 werd het eigenlijke enquêteformulier verstuurd naar 621 scholen. De leerkrachten werden opgeroepen om hun antwoorden via e-mail of per post door te sturen. In september 2005 werd een oproep tot deelname verstuurd naar 713 scholen. Het enquêteformulier kon men online invullen of per post versturen.

Verwerken van de gegevens

De enquête bestond voornamelijk uit open vragen. Om de antwoorden beter te kunnen verwerken, werden een aantal open vragen herwerkt tot (een reeks van) gesloten vragen of werden de antwoorden omgevormd tot cijfermateriaal via het toekennen van een codecijfer. Bijvoorbeeld de antwoorden op de vraag *"Zou u zichzelf een voor- of tegenstander noemen van het gebruik van ICT in de wiskundeles?"* werden gekoppeld aan een numerieke waarde:

- 1: absolute tegenstander
- 2: tegenstander, maar...
- 3: noch voor-, noch tegenstander
- 4: voorstander, maar...
- 5: absolute voorstander

Het coderen werd uitgevoerd door één onderzoeker. Om ervoor te zorgen dat het coderen op een consequente manier verliep, werd per vraag een schema opgesteld dat strikt gevolgd werd tijdens het coderen en dat kernwoorden uit de antwoorden van de leerkrachten koppelde aan een bepaalde code. Na het coderen werden alle antwoorden en codes gecontroleerd en eventueel gecorrigeerd.

Vervolgens werden de antwoorden op de gesloten en de (herwerkte) open vragen ingevoerd in SPSS. Dit pakket leent zich uitstekend voor het verwerken van enquêteresultaten en heeft bovendien het bijkomende voordeel dat het bij de numerieke verwerking rekening houdt met ontbrekende gegevens. Een groot aantal van de enquêteformulieren waren immers onvolledig ingevuld.

Ten slotte werden alle enquêteformulieren een laatste maal nagelezen en gebruikt om een overzicht op te stellen van de verschillende antwoorden, meningen en argumenten van de deelnemende leraars. De weergave van de argumentatie van de wiskundeleerkrachten is hier terug te vinden onder de vorm van citaten.

6.2.2 Steekproef: representativiteit en non-respons

In een poging om zoveel mogelijk data te verzamelen hebben we gekozen voor een opportuniteitssteekproef. Dit betekent dat we 'alle' wiskundeleerkrachten van het Vlaamse secundair onderwijs aangeschreven hebben via hun secretariaat of directie en rekenden op hun vrijwillige en bereidwillige medewerking. Een opportuniteitssteekproef wordt beschouwd als een eenvoudige werkwijze om in een korte tijdspanne een bepaalde populatie te onderzoeken, maar het houdt ook bepaalde risico's in doordat personen met een sterke opinie vaker bereid zijn om mee te werken aan een enquête en bijgevolg een bias in de resultaten kunnen veroorzaken. In deze paragraaf zullen we de respondenten van de beide enquêtes in kaart brengen en hun representativiteit testen voor enkele stratificatievariabelen op leerkracht- en schoolniveau. Ten slotte zullen we een non-respons-analyse uitvoeren.

Representativiteit

Vooreerst bekijken we de verdeling van de deelnemende leerkrachten volgens de graden en richtingen (zie tabel 6.1). In 2001 bezorgden 254 wiskundeleerkrachten hun enquêteformulier aan ons terug. In 2005 vulden in totaal 314 personen het online-enquêteformulier in. De variabelen graad en richting van de leerkracht zijn echter geen stratificatievariabelen - veel wiskundeleerkrachten geven in twee graden en/of richtingen les - en bijgevolg zijn in tabel 6.1 de som per jaar en per rij steeds groter dan 100% en de som van de absolute aantallen steeds groter dan 254 en 314. Bovendien bevatten de Statistische Jaarboeken van het Vlaams Onderwijs (zie [93] en [94]) geen gegevens over de verdeling van het onderwijzende personeel van het secundair onderwijs per graad of per richting, waardoor we de representativiteit van onze steefproefgegevens niet konden testen voor de variabelen graad en richting van de leerkracht.

2001			2005		
Eerste graad	Tweede graad	Derde graad	Eerste graad	Tweede graad	Derde graad
26,9% (67)	53,8% (134)	56,6% (141)	28,8% (108)	45,1% (169)	55,5% (208)
ASO	TSO	BSO	ASO	TSO	BSO
70,0% (159)	46,3% (105)	4,0% (9)	67,2% (250)	43,5% (162)	3,8% (14)

Tabel 6.1: Verdeling van de deelnemende leraars volgens de graden en richtingen

		2001	2005	
Stratificatievariabele	*df*	χ^2	χ^2	$\chi^2_{0,95}$
Verdeling van de school				
per net	2	2,49	3,24	5,99
per provincie	5	6,02	5,41	11,07
Verdeling van de leerkrachten				
per net	2	5,02	1,01	5,99
per geslacht	1	0,03	2,12	3,84
per leeftijd	4	10,26	8,66	9,49

Tabel 6.2: Resultaten chikwadraattoets

Uiteindelijk konden we voor vijf stratificatievariabelen de verdeling van de steekproefgegevens vergelijken met de verdeling van de eigenlijke populatie: verdeling van de scholen per net en per provincie en verdeling van de leerkrachten per net, per geslacht en per leeftijd. Per variabele en per editie werd een vergelijkende tabel opgesteld en toegevoegd aan de bijlagen (zie C.2). De verdeling van de steekproefgegevens werd m.b.v. de chikwadraattoets getest (zie tabel 6.2). We vonden slechts voor één variabele een significant verschil. In 2001 benaderde de verdeling van de leerkrachten in leeftijdscategorieën niet voldoende de werkelijke verdeling van de leerkrachten volgens leeftijd. In het bijzonder was de leeftijdscategorie '50-59 jaar' oververtegenwoordigd en de leeftijdscategorie '40-49 jaar' ondervertegenwoordigd. Voor de negen resterende variabelen verschilde de verdeling van de steekproefgegevens niet significant met de werkelijke verdeling.

Non-respons

Het is belangrijk om zich de vraag te stellen welke leerkrachten we bereikt hebben en welke leerkrachten bereid waren om de enquête(s) in te vullen. Kunnen de respondenten beschouwd worden als vertegenwoordigers van de totale populatie of moeten we rekening houden met een mogelijke bias?

Bij het verspreiden van de enquêteformulieren hebben we gebruik gemaakt van e-mail. In 2001 bleek dit niet evident want verschillende scholen hadden geen (actief) e-mail-adres (ongeveer 1 op 7). Misschien hebben we op deze manier relatief meer scholen aangeschreven waar computers en ICT effectief in het dagdagelijkse lesgebeuren werden gebruikt en is het bijgevolg mogelijk dat relatief meer ICT-gebruikende leerkrachten hebben geantwoord. Enige voorzichtigheid bij het interpreteren van de resultaten is dus gewenst. In 2005 bleken de scholen beter bereikbaar via e-mail en stelt dit probleem zich minder.

Bij het afnemen van een enquête rekent men op de vrijwillige medewerking van de ondervraagden. Maar wie is bereid om het enquêteformulier in te vullen? Antwoorden enkel de enthousiaste gebruikers en de uitgesproken tegenstanders? Uit de resultaten blijkt dat alle geledingen vertegenwoordigd zijn (de tegenstanders, de twijfelaars en de enthousiastelingen) en met hun mening en ervaringen het beeld vervolledigen van ICT-gebruik in de wiskundelessen van het Vlaamse wiskundeonderwijs, waardoor er geen sprake zal zijn van een bias.

6.2.3 Resultaten

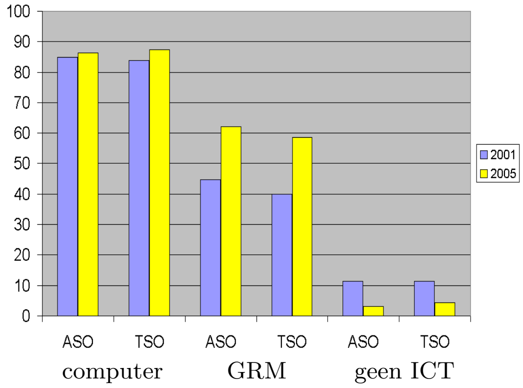
In deze paragraaf zullen we de resultaten presenteren van de enquêtes van 2001 en 2005 (a.d.h.v. tabellen en figuren) die relevant zijn voor het beantwoorden van de onderzoeksvraag *"Ondersteunen de Vlaamse wiskundeleerkrachten hun wiskundelessen met ICT-hulpmiddelen? Hoe is de integratie van ICT in het Vlaamse wiskundeonderwijs geëvolueerd tussen 2001 en 2005?"*. We bekijken de resultaten op leerkracht- en schoolniveau. Indien mogelijk maken we een vergelijking tussen 2001 en 2005. In paragraaf 6.2.4 zullen we dieper ingaan op deze resultaten en illustreren we het cijfermateriaal met een aantal citaten van de respondenten. We zullen in paragraaf 6.2.4 eveneens een aantal andere variabelen van naderbij bekijken waarvan we de resultaten niet numeriek kunnen samenvatten.

Resultaten op leerkrachtniveau

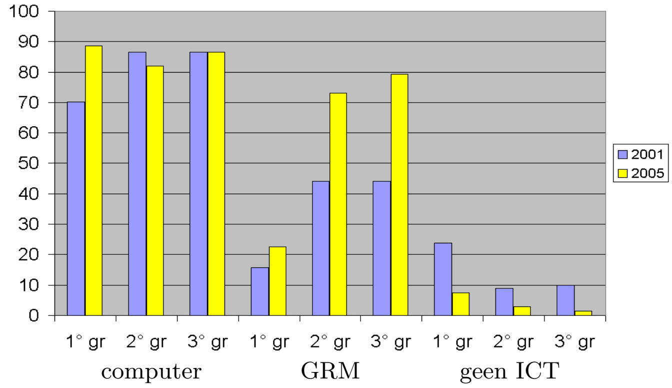
Gebruik van computer en/of grafisch rekentoestel

	2001			2005		
	geen ICT	GRM	pc	geen ICT	GRM	pc
Totaal	13,0%	38,2%	82,7%	3,8%	60,2%	86,3%
ASO	11,3%	44,7%	84,9%	3,2%	62,1%	86,3%
TSO	11,4%	40,0%	83,8%	4,4%	58,5%	87,4%
Eerste graad	23,9%	15,8%	70,2%	7,5%	22,6%	88,7%
Tweede graad	9,0%	44,0%	86,6%	3,0%	73,1%	82,0%
Derde graad	9,9%	44,0%	86,5%	1,4%	79,3%	86,5%

Tabel 6.3: Procentueel aantal gebruikers van GRM en pc per richting en per graad



Figuur 6.1: Vergelijking m.b.t. het gebruik van pc en GRM in ASO en TSO



Figuur 6.2: Vergelijking m.b.t. het gebruik van pc en GRM in de verschillende graden

Werkvorm bij pc-gebruik

	2001			2005		
	Demon-straties	Zelf-standig	Gemengde werkvorm	Demon-straties	Zelf-standig	Gemengde werkvorm
Totaal	22,7%	42,0%	35,3%	17,0%	35,7%	47,3%
ASO	20,5%	46,2%	33,3%	17,3%	37,6%	45,1%
TSO	27,3%	37,5%	35,2%	15,6%	32,8%	51,6%
Eerste graad	21,3%	53,2%	25,5%	13,3%	42,1%	44,6%
Tweede graad	23,3%	42,2%	34,5%	18,5%	42,3%	39,2%
Derde graad	26,1%	37,8%	36,1%	18,8%	30,0%	51,2%

Tabel 6.4: Verdeling van de werkvorm in pc-ondersteunde lessen per richting en per graad

Beschikbare hulpmiddelen

	2001	2005
Cabri	85,4%	86,6%
Excel	71,7%	83,8%
Derive	64,2%	65,4%
GRM	41,3%	66,0%
Mathcad	18,8%	13,0%
Graphmatica	13,3%	38,8%
Geocadabra	_	14,6%
Wirisonline	_	6,1%
applets & online-oefeningen	_	22,1%
cd-rom	_	8,8%

Tabel 6.5: Hulpmiddelen ter beschikking van de leerkrachten

	2001			2005		
	Eerste graad	Tweede graad	Derde graad	Eerste graad	Tweede graad	Derde graad
Cabri	96,6%	90,2%	81,0%	94,4%	90,5%	86,7%
Excel	61,0%	76,5%	75,2%	19,6%	89,3%	88,6%
Derive	39,0%	65,2%	78,8%	40,2%	67,5%	79,1%
Mathcad	0,0%	18,2%	28,8%	5,6%	14,8%	17,1%
Graphmatica	1,7%	12,9%	21,2%	19,6%	50,9%	49,8%

Tabel 6.6: Vergelijking m.b.t. beschikbare CAS en wiskundige software in de verschillende graden

Beschikbare infrastructuur

	2001	2005
Wiskundeklas zonder ICT	5,8%	4,2%
Klaslokaal met ICT	31,3%	42,2%
PC-lokalen ter beschikking	74,2%	78,2%
Verplichte aankoop GRM[1]	70,1%	86,0%

Tabel 6.7: Infrastructuur ter beschikking van de leerkrachten

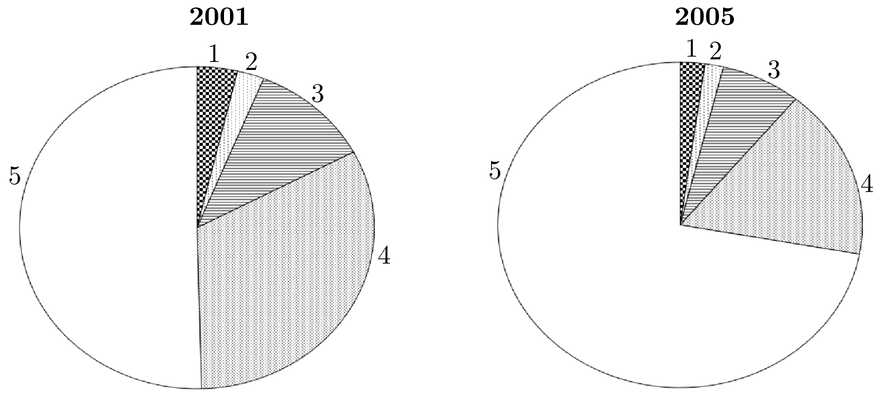
Frequentie van computergebruik - 2001

	Leerkracht gebruikt CAS en/of wiskundesoftware		Gemiddelde tijdsbesteding op jaarbasis	Gemiddelde tijdsbesteding op jaarbasis (in lesuren[2])
2 uur	8	30,8%	4,44%	2,66
3 uur	58	70,7%	9,43%	8,49
4 uur	84	83,2%	9,70%	11,64
5 uur	83	79,0%	9,53%	14,30
6 uur	74	89,2%	7,54%	13,57
8 uur	46	85,2%	7,83%	18,79

Tabel 6.8: (Procentueel) aandeel van ICT-gebruik in de wiskundelessen opgesplitst volgens het aantal wekelijkse lestijden

[1] Bij de berekening van dit percentage werd enkel rekening gehouden met de leerkrachten die soms een GRM gebruikten tijdens de wiskundeles.

Algemene houding van de leerkracht t.o.v. ICT-gebruik



Figuur 6.3: Algemene houding van de wiskundeleerkrachten t.o.v. ICT-gebruik

- 1: absolute tegenstander
- 2: tegenstander, maar ...
- 3: noch voor-, noch tegenstander
- 4: voorstander, maar ...
- 5: absolute voorstander

6.2.4 Discussie

In deze paragraaf bekijken we de resultaten uit 6.2.3 in detail en illustreren ze met een aantal uitspraken van de deelnemende wiskundeleerkrachten. We zullen eveneens een aantal andere variabelen behandelen waarvan we de resultaten niet numeriek kunnen samenvatten.

[2] Het gemiddeld aantal lesuren per jaar met ICT-ondersteuning werd berekend op basis van 30 volledige lesweken.

Resultaten op leerkrachtniveau

Gebruik van computer en/of grafisch rekentoestel

In tabel 6.3 presenteerden we het procentueel aantal gebruikers van pc en GRM ten opzichte van de graad of de richting. Indien we de resultaten per graad bekijken, valt er op dat in 2001 minder leerkrachten uit de eerste graad gebruik maakten van een pc tijdens de wiskundeles dan de leerkrachten uit de tweede en derde graad. In 2005 is het aantal computergebruikers in de eerste graad sterk gestegen tot bijna 89%. Het aantal wiskundeleerkrachten uit de tweede graad dat gebruik maakt van een computer in de les is licht gedaald, maar blijft hoog. De Onderwijsinspectie Vlaanderen schrijft elk jaar een verslag over de toestand van het onderwijs. In de Onderwijsspiegel van het schooljaar 2003-2004 [92] vinden we de resultaten van een ICT-bevraging in het Vlaamse onderwijs. Voor het secundair onderwijs vinden we voor de variabele 'graad' de volgende resultaten: "Vooral in de tweede (66,4%) en de derde graad (68%) wordt ICT wel eens ingeschakeld om bepaalde leerinhouden aan te bieden via presentatie, demonstratie of simulatie. In de eerste graad is dat opvallend minder (38,5%)." Het cijfer van de eerste graad ligt beduidend lager dan de 70% en 89% die wij vaststelden in 2001 en 2005. Dit verschil kunnen we verklaren op basis van het vak. In het vak wiskunde kan men reeds in de eerste graad een groot aantal lesonderwerpen ondersteunen met ICT. Het is mogelijk dat dit in de andere vakken minder het geval is.

Voor de richtingen beperkten we ons in tabel 6.3 tot ASO en TSO. In 2001 namen eveneens 9 leerkrachten uit het BSO deel aan de enquête. In 2005 waren er 14 respondenten uit het BSO en 4 respondenten uit het KSO. Uit de data van beide enquêtes bleek dat ongeveer twee derden van deze leerkrachten soms gebruik maakten van een pc tijdens de wiskundeles. Wegens het geringe aantal deelnemers uit BSO en KSO is het echter niet mogelijk om dergelijke resultaten te veralgemenen.

Indien we de resultaten van 2005 vergelijken met de data van 2001 merken we dat het aantal niet-gebruikers sterk daalde en dat de populariteit van het grafisch rekentoestel is gestegen (60% in 2005 t.o.v. 38% in 2001). De groep van leerkrachten die uitsluitend een computeralgebrasysteem en/of wiskundige software inschakelen in de les werd kleiner (36% in 2005 t.o.v. 49% in 2001). Na het uitvoeren van statistische toetsen (voor proporties, $|Z| > 1,645$) bleken de bovenstaande verschillen allen significant.

In 2001 gaven bijna 83% van de leerkrachten aan dat ze (soms) gebruik maakten van een pc tijdens de wiskundeles. Van Petegem & Deneire stelden in hun onderzoek ISUSS [80] vast dat 42% van de Vlaamse ISCED-3-leerkrachten[3] minstens één keer per maand de computer gebruikten tijdens het onderwijsleerproces. Dit ligt opmerkelijk lager dan de 83% die wij vaststelden, maar deze cijfers spreken elkaar geenszins tegen. Zoals blijkt uit tabel 6.8 maakten veel leerkrachten in 2001 slechts sporadisch gebruik van een computer tijdens de wiskundeles, vaak niet meer dan enkele keren per schooljaar.

Werkvorm bij pc-gebruik

De variabele 'werkvorm' werd onderverdeeld in drie categorieën: 'voornamelijk demonstraties door de leerkracht', 'voornamelijk zelfstandig werk door de leerlingen' en 'een mengeling van demonstraties en zelfstandig werk'. In tabel 6.4 kunnen we aflezen dat het gebruik van de gemengde werkvorm in 2005 is toegenomen t.o.v. 2001. Bijna de helft van de deelnemende leerkrachten geeft aan dat ze bij pc-gebruik in de les hoofdzakelijk deze werkvorm hanteren. Deze stijging kunnen we hoofdzakelijk toeschrijven aan het didactische principe van het 'begeleid zelfstandig leren' (zie ook paragraaf 5.2.7) dat in de huidige leerplannen wiskunde aanbevolen wordt.

Op basis van de beschrijvingen van de respondenten kunnen we voor de gemengde werkvorm drie verschillende varianten onderscheiden:

- Afwisselend: "Eerst geef ik een demonstratie en uitleg, nadien werken ze zelfstandig over twee computerklassen." (2005)
- Simultaan: "We werkten meestal met een demonstratievorm waar dat ze dan met meededen. Naargelang de leerlingen meer en meer vertrouwd waren met de software konden ze er zelfstandig mee werken." (2005)
- Sherpa-student: "Ik maak steeds een invulwerkblad met gedetailleerde instructies voor de leerlingen. Het scherm van één van de leerlingen (een sterke leerling!) wordt op een groot wit scherm geprojecteerd. Als ik merk dat iets klassikaal niet goed gaat, doe ik het voor op die computer zodat iedereen kan volgen." (2005)

Wanneer we de werkvorm voor computergebruik gaan vergelijken voor ASO en TSO en voor de verschillende graden, merken we dat de onderlinge verschillen

[3]ISCED-level 3 stemt in Vlaanderen overeen met het derde tot met het zesde jaar van het secundair onderwijs.

klein zijn en dat de cijfers dezelfde tendens volgen als de algemene cijfers voor de werkvorm (zie tabel 6.4).

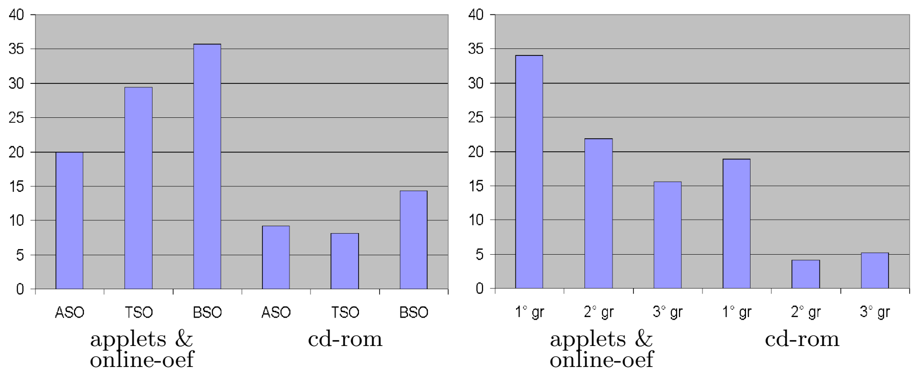
De gemengde werkvorm (eventueel in combinatie met het aanstellen van een sherpa-student) bevestigt onze visie (zie paragraaf 5.4.4) dat de wiskundeleerkrachten (onbewust) de theorie van de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra implementeren in hun wiskundeonderwijs. Tijdens een demonstratie gaat de leerkracht immers voortonen hoe hijzelf het CAS-hulpmiddel omvormt tot een instrument door interactie met de taak en het CAS. Doordat de leerkracht 'luidop nadenkt' en zijn werkblad (de externe weergave van zijn instrumentatieschema) toont aan de leerlingen leert hij hen hoe ze instrumentatieschema's kunnen opbouwen. Doordat de leerlingen vervolgens zelf (gelijkaardige) taken aanpakken met het computeralgebrasysteem krijgen de leerlingen de kans om zelf de instrumentele genese te ervaren. Deze werkwijze sluit volledig aan bij het extern sturen van de instrumentele genese hetgeen men in de instrumentele benadering aanduidt met de term 'orkestratie' (zie paragraaf 3.2.3, p. 45).

Beschikbare hulpmiddelen

De wiskundeleerkrachten bleken over uiteenlopende hulpmiddelen te beschikken om hun lessen met ICT te ondersteunen. In 2001 waren de meest voorkomende producten Cabri, Excel, Derive, het grafische rekentoestel, Mathcad en Graphmatica. Ongeveer een vijfde van de leraars gebruikte nog andere software (meestal producten die men gratis kon downloaden of demoversies die verdeeld werden via nascholingen). In de resultaten van 2005 vonden we dezelfde ICT-hulpmiddelen terug, maar vallen vooral de populariteit op van de applets en online-oefeningen en de opkomst van cd-roms die samen met de handboeken verspreid worden. Enkele citaten:

- "De leerlingen kunnen (o.a. met applets) zich de dingen beter voorstellen (zoals o.a. transformaties van functies, extremumvraagstukken, meetkunde,...). Zo onthouden ze dat ook beter!" (2005)
- "Leerlingen (BSO) oefenen veel beter hun ruimtelijk inzicht. Ook thuis oefenen ze 'onbewust', door de 'spelletjes' opnieuw te spelen." (2005)
- "Wij hebben voor de leerlingen van het eerste jaar een eigen wiskundesite met heel veel links naar oefeningen op het internet en we gebruiken de cd-rom van het handboek Delta (met oefeningen) die op de netwerkserver is geplaatst." (2005)

De leerkrachten die deze 'nieuwe' hulpmiddelen gebruikten bevinden zich in alle graden en richtingen maar de gebruikers concentreerden zich duidelijk in de eerste graad en/of het BSO (zie figuren 6.4).



Figuur 6.4: Procentueel aantal gebruikers van applets, online-oefeningen en cd-rom per richting en per graad

Uit tabel 6.5 blijkt duidelijk dat Derive het populairste computeralgebrasysteem is in het secundair onderwijs. Ongeveer twee derden van de deelnemende wiskundeleerkrachten gaven in 2001 en 2005 aan dat ze over Derive beschikten en een grote groep van deze leraars had reeds een jarenlange ervaring met Derive. Deze mensen hebben in de loop der jaren een grote hoeveelheid (les)materiaal verzameld en/of zelf ontwikkeld (zie ook p. 201). Dit materiaal dreigt nu - door het verdwijnen van Derive - onbruikbaar te worden.
In juli 2006 werd op de DES-TIME-2006 conferentie een nota verspreid onder de deelnemers. In deze nota werd aangekondigd dat Texas Instrument in het najaar van 2006 een nieuw product, TI-nSpire genaamd, zou lanceren ter vervanging van het populaire Derive. Kutzler schreef het volgende: "TI-nSpire is Texas Instruments' new product which carries the technology of the legendary TI-92 further into a new generation Math/CAS tool. Its innovative double-platform design (handheld + 100% compatible computer software) and the seamless integration of the various components (CAS, graphing, geometry, spreadsheet) make it a very powerful teaching and learning aid for teachers and students that is unique on the market and has great potential. (...) Texas Instruments and Soft Warehouse Europe plan to discontinue selling Derive at the end of 2006

so that all resources can be focused on turning TI-nSpire into a true successor of Derive. We are aware that the current version of TI-nSpire cannot yet be regarded as such, but it is the declared goal to add Derive compatibility and popular Derive features to TI-nSpire."
Uit een korte demonstratie bleek inderdaad dat TI-nSpire een veelbelovend en dynamisch product is. Jammer genoeg bevatte het nog een groot aantal onvolmaaktheden en was het product niet compatibel met Derive. Men kon/wou de deelnemers van de conferentie niet garanderen dat men in de toekomst bestaande Derive-files zou kunnen gebruiken in TI-nSpire. Het product werd in eerste instantie gelanceerd in de Duitstalige Europese landen en de Verenigde Staten, maar zal ook in de toekomst in ons land Derive vervangen. Het ziet er bijgevolg naar uit dat de wiskundeleerkrachten die momenteel Derive gebruiken met een nieuwe uitdaging geconfronteerd zullen worden! We hopen dat men een voldoende lange overgangsperiode voorziet (waarin beide CAS-hulpmiddelen worden aangeboden en ondersteund) om de leerkrachten de kans te geven zich geleidelijk aan te passen. Deze overgangsperiode is noodzakelijk om te vermijden dat (een deel van) de leerkrachten afhaken en het gebruik van computers en computeralgebrasystemen gaan bannen uit hun lessen.

Beschikbare infrastructuur

De infrastructuur waarover de deelnemende wiskundeleerkrachten beschikken, verschilde sterk van school tot school. In 2005 beschikte ongeveer 4% van de wiskundeleerkrachten (soms) over een eigen wiskundeklas die echter niet voorzien was van een computer en/of projectiemogelijkheden. 42% (t.o.v. 31% in 2001) kon gebruik maken van één of meerdere vaste computers en/of projectiemogelijkheden in het klaslokaal (al dan niet een eigen wiskundeklas). Ongeveer 9% voorzag in 2005 één of meerdere portables tijdens de wiskundeles. In een kwart van de gevallen gebruikte de leerkracht hiervoor zijn persoonlijk toestel. 78% (t.o.v. 74% in 2001) kon na reservatie beschikken over een pc-klas. In 5% van de gevallen volstond echter de uitgeruste wiskundeklas. Enkele getuigenissen:

- "Een eigen wiskundeklas met zes computers en een overheadprojector, een scherm en een viewscreen om te werken met de grafische rekenmachine. Een pc-klas is niet nodig. Ik heb elke klas namelijk twee uur na elkaar; zo kan ik tijdens oefeningenlessen werken met een doorschuifsysteem: terwijl leerlingen oefeningen manueel en/of met GRM oplossen, kunnen er andere aan de computers werken." (2005)
- "Ik heb geen eigen wiskundelokaal. Wel is het zo dat ik wekelijks inteken

op een lijst om een aantal lessen te geven in een computerklas of in een lokaal waar projectie mogelijk is. Vorig jaar slaagde ik er zelfs in om bijna al mijn lessen in pc-ondersteunde lokalen te brengen." (2005)

Er werd in de beide edities ook gepolst naar de mening van de leerkrachten i.v.m. de bestaande infrastructuur. In 2001 waren 37,9% van de deelnemende leerkrachten (redelijk) tevreden met de beschikbare infrastructuur. Hun aantal steeg in 2005 tot 46,6%. In de enquêteformulieren werden frequent het gebrek aan financiële middelen, de beperkte beschikbaarheid van de pc-klassen en het ontbreken van projectiemogelijkheden aangehaald:

- "Ik heb een eigen lokaal met één pc maar zonder mogelijkheden om te projecteren, dus kan ik ook weinig aanvangen met die ene pc!" (2005)
- "In een technische school moeten heel wat meer dure investeringen (nl. machines) gedaan worden dan in een ASO-school." (2005)
- "De pc-klas is niet altijd beschikbaar, minder en minder eigenlijk, aangezien almaar meer vakken er gebruik van maken." (2005)
- "Als beginnende leerkracht is het niet gemakkelijk om in te schatten of je over een maand de computer die dag en dat bepaalde lesuur zult kunnen gebruiken." (2005)

De mening van de wiskundeleerkrachten die deelnamen aan onze rondvragen komt op verschillende vlakken overeen met de bevindingen van de Onderwijsinspectie Vlaanderen in het schooljaar 2003-2004: "Uit de gesprekken blijkt dat de onvoldoende bereikbaarheid van computerklassen en/of het niet beschikbaar zijn van voldoende computers regelmatig hinderpalen zijn om ICT op regelmatige basis in het lesgebeuren in te schakelen. Vooral in scholen met als component economie of informatica in de opleiding blijkt de bereikbaarheid van computerlokalen voor de doelgroep van het ICT-infrastructuurprogramma niet altijd optimaal te zijn." ([92], p. 81)

Uit de enquêteformulieren van 2005 bleek ook duidelijk dat de infrastructuur van de scholen evolueert. Een aantal scholen introduceerden het concept van de open leercentra. Deze lokalen zijn hoofdzakelijk toegankelijk voor leerkrachten die gebruik maken van de werkvorm 'begeleid zelfstandig leren' of voor leerlingen die projectwerk moeten uitvoeren:

- "We hebben een open leercentrum met een lokaal met pc en beamer en een lokaal met 14 pc's. De lokalen liggen naast elkaar en kunnen samen of apart gereserveerd worden. Er mogen geen 'normale' lessen gegeven worden." (2005)

- "De schoolkerk werd omgebouwd tot een open leercentrum." (2005)

De infrastructuur werd vaak ook uitgebreid met een virtueel leercentrum; de elektronische leeromgeving deed haar intrede in het secundair onderwijs. Ongeveer 37% van de leerkrachten bevestigden dat hun school over een dergelijke leeromgeving beschikte. 13% van de deelnemende leerkrachten gaven aan dat een elektronische leeromgeving in de nabije toekomst zou ingevoerd worden. Dit garandeert echter niet dat de wiskundeleerkrachten deze leeromgeving ook effectief gebruiken. 43% van de leraars gebruikte deze leeromgeving voor communicatie met de leerlingen en ongeveer 17% voor communicatie met de directie en de medeleerkrachten.

De opkomst van de elektronische leeromgeving kunnen we koppelen aan de huidige leerplannen wiskunde. In deze leerplannen wordt 'differentiatie' (zie ook paragraaf 5.2.7) sterk aanbevolen. De elektronische leeromgeving kan gebruikt worden om het lesmateriaal ter beschikking te stellen van de leerlingen (zowel op school als thuis) waaruit bvb. de leerlingen zelf oefeningen kunnen selecteren en kunnen controleren a.d.h.v. oplossingen die eveneens ter beschikking staan op de elektronische leeromgeving. In scholen die niet beschikken over een elektronische leeromgeving gaat men soms m.b.v. een website op dezelfde manier te werk. Een leerkracht getuigde: "De school heeft een eigen website. Daar mogen we leermateriaal uitzetten onder de vakrubriek wiskunde. Ik heb dat een aantal jaren gebruikt, maar (...) ik heb nu mijn eigen website." (2005). Ook in onze onderwijsexperimenten werd het lesmateriaal ter beschikking gesteld van de leerkracht en de leerlingen via een website (zie 5.2.5).

Algemene houding van de leerkracht t.o.v. ICT-gebruik

In 2001 en 2005 noemden respectievelijk 6,2% en 3,9% van de respondenten zichzelf - in meer of mindere mate - een tegenstander van ICT-gebruik in de wiskundeles. De modale score was 5 (d.i. *absolute voorstander*, zie figuur 6.3). In 2001 leunden 32% van de respondenten het dichtst aan bij score 4 (d.i. *voorstander, maar...*). In 2005 nam deze groep af tot ongeveer 17%. We kunnen dus besluiten dat de leerkrachten over het algemeen voorstander waren van het gebruik van ICT, maar niet onvoorwaardelijk. Deze mening wordt goed weergegeven door de volgende getuigenissen:

- "ICT biedt veel voordelen: de motivatie van de leerlingen is hoger (ze zijn immers kinderen van de computertijd), minder rekenfouten en geen verspilling meer van tijd met rekenwerk, meer tijd voor inzichtvragen, probleem oplossend leren denken,..." (2001)

- "Waar het zinvol is, moet het gebruikt worden. Stilstand is achteruitgang." (2005)
- "Absolute voorstander; omdat je nu eenmaal niet om de nieuwe technologie heen kan en vooral voor het vak wiskunde schept dit toch enorme nieuwe mogelijkheden. De grote meerderheid van de leerlingen zal wiskunde in de latere studies gebruiken als ondersteuning, niet als doel op zich, en met behulp van ICT kan dus echt wel gewerkt worden met concrete gegevens zodat de problemen die aangepakt worden ook realistisch zijn." (2005)
- "ICT heeft op veel vlakken een positieve inbreng. Gelukkig zijn we het stadium voorbij dat een les zonder ICT een slechte les is. (...) Wat ik goed vind, is dat we stilaan een breed spectrum van pedagogische middelen en leermethoden hebben waar we kunnen uit kiezen als we een onderwerp aansnijden. Niks moet, pak gewoon wat je het beste lijkt." (2005)
- "Ik verdedig een verantwoord gebruik van ICT. Bij het uitwerken van een les aan de hand van ICT stel ik vooraf eerst de vraag naar de meerwaarde ervan op het verwerven van inzicht en het begrijpen van de leerstof." (2001)
- "Voorstander, op voorwaarde dat het hoger onderwijs volgt..." (2005)
- "Ik kan mij niet van de indruk ontdoen dat er vaak met ICT wordt gewerkt om de ICT. Uiteraard is dit een gevolg van de te bereiken eindtermen. Voor iedere leraar - in welk vak dan ook - zal het momenteel zeer moeilijk zijn om een goed evenwicht te vinden tussen ICT en 'klassiek' lesgeven." (2005)

De argumentatie van de tegenstanders was uiteenlopend:

- "Het deductieve karakter van ons vak komt in het gedrang." (2001)
- "Naar mijn mening is het peil van ons publiek (tweede jaar moderne wetenschappen en Latijn) daarvoor niet geschikt." (2001)
- "Tegenstander, o.a. uit onkunde om technische problemen op te lossen." (2001)

- "Dit is mijn laatste schooljaar. Ik heb geprobeerd om de leerlingen te laten kennis maken met Cabri, maar ik voelde me zelf, na dertig jaar 'gewoon' lesgeven, veel te onzeker en ben er dan ook na enkele pogingen mee gestopt. Het is duidelijk dat ICT moet gebruikt worden in de lessen. Men kan de moderne techniek niet bannen uit zijn lessen. Dit zal echter voor mijn opvolger zijn!" (2005)

- "Een tegenstander, maar waarschijnlijk is de uitdrukking 'onbekend is onbemind' beter van toepassing." (2005)

- "ICT-lessen zijn minder efficiënt op langere termijn." (2001)

- "Tegen. Het nut ervan wordt zwaar overroepen en het systeem is alleen geschikt voor gemotiveerde leerlingen. Wie gaat dat betalen? De overheid? Die heeft geen centen... De ouders? Niet iedereen is kapitaalkrachtig genoeg... Misschien kunnen we de leerkrachten laten opdraaien voor de kosten!" (2005)

Frequentie van computergebruik - 2001

Gebruik makend van alle antwoorden op de vraag *"Hoe vaak maakt u gebruik van computeralgebrasystemen tijdens de wiskundeles en in welke klassen?"* konden we in 2001 tabel 6.8 opstellen. In deze tabel kan men aflezen hoeveel procent van de respondenten hun lessen ondersteunden met het gebruik van CAS. De beschikbare data werd uitgesplitst volgens het aantal lesuren wiskunde per week. Bovendien geeft deze tabel ons een gemiddelde waarde voor het aandeel van het gebruik (op jaarbasis) van CAS en wiskundige software in de wiskundelessen. Voor de berekening van deze gemiddelde tijdsbesteding werd enkel rekening gehouden met de leerkrachten die effectief gebruik maakten van computeralgebrasystemen en wiskundige software in hun wiskundelessen.
Een analoge tabel voor het gebruik van de grafische rekenmachine (GRM) werd niet opgesteld omdat de meeste leerkrachten dit hulpmiddel bijna continu gebruikten. Het gebruik van de GRM was vergelijkbaar met het gebruik van het gewoon wetenschappelijk rekentoestel.

In 2005 gaven de meeste respondenten een niet-numeriek antwoord op de vraag *"Hoe vaak maakte u tijdens het vorige schooljaar gebruik van computeralgebrasystemen tijdens de wiskundelessen?"* waardoor een eenduidig beeld opstellen onmogelijk was. Opvallend zijn echter wel de grote onderlinge verschillen tussen de leerkrachten (variërend van nooit tot dagelijks) en het bestaan van een grote groep van leerkrachten (nl. 40% van de respondenten of dus 46% van de computergebruikers) die zelden gebruik maken van een computeralgebrasysteem of wiskundige software.

Resultaten op schoolniveau

In de rapportage van de steekproeven hebben we ons tot nog toe uitsluitend beperkt tot resultaten en vaststellingen op het niveau van de leerkrachten. Een leerkracht handelt binnen een school echter niet volledig autonoom maar zijn/haar handelen wordt mede bepaald door de visie van de directie en (vak)collega's. Men zou bijgevolg kunnen verwachten dat de wiskundeleerkrachten van een school op dezelfde wijze ICT implementeren. Kunnen we deze assumptie staven a.d.h.v. onze resultaten?

In 2001 reageerden 254 wiskundeleerkrachten uit 143 verschillende scholen. 46 scholen (of 32,2%) werd vertegenwoordigd door 2 tot 10 leerkrachten. In 2005 behoorden de 382 respondenten tot 240 verschillende scholen. Van 83 scholen (of 34,6%) reageerden meerdere leerkrachten, nl. 2 tot 7 leerkrachten per school. Gaven de leerkrachten van eenzelfde school dezelfde antwoorden? We bekijken de resultaten van deze subgroep voor de variabelen ICT-gebruik, aankoop GRM door de leerlingen, infrastructuur van de school en houding van de leerkracht t.o.v. ICT-gebruik in de wiskundeles. De vaststellingen zijn geldig voor 2001 en 2005.

- Van elke school die vertegenwoordigd werd door meerdere leerkrachten gaf minstens één leerkracht aan dat hij ICT gebruikte in de wiskundeles. Op enkele uitzonderingen na is (per school) de groep van ICT-gebruikers groter dan de groep van de niet-gebruikers.

- De leerkrachten van eenzelfde school hebben niet altijd dezelfde mening m.b.t. het volstaan van de infrastructuur van de school.

- Binnen eenzelfde school verplichten niet alle wiskundeleerkrachten hun leerlingen tot de aankoop van een grafische rekenmachine. Dit wordt grotendeels verklaard door de verschillende richtingen waarin de leerkrachten actief zijn. Uit de antwoorden van verschillende leerkrachten bleek duidelijk dat hieromtrent meestal schoolafspraken worden gemaakt.

Kwalitatieve resultaten

Ten slotte bekijken we een aantal variabelen waarvan de resultaten zich niet laten samenvatten in tabellen of figuren. Deze variabelen maken evenwel een belangrijk deel uit van het totaalbeeld en zullen voornamelijk m.b.v. quotes weergegeven worden.

ICT leren kennen door...

De wiskundeleerkrachten zijn op verschillende manieren in contact gekomen met ICT. De meest voorkomende antwoorden zijn het volgen van nascholing , zelfstudie, via wiskunde- en informaticacollega's en de gevolgde opleiding. In 2001 noteerden slechts 7,7% van de deelnemende wiskundeleerkrachten dat ze tijdens de eigen opleiding kennis hadden gemaakt met ICT. Logischerwijs zou dit cijfer jaarlijks moeten stijgen, maar is dit wel zo? Een leerkracht schreef: "De studenten van het regentaat wiskunde hebben veel te weinig kennis van ICT. Onze leerkrachten van morgen kunnen niet omgaan met Cabri, Derive, vergelijkingseditor, internet, enz." (2001).
In de enquêteformulieren van 2005 vonden we geen negatieve opmerkingen meer met betrekking tot de ICT-kennis van stagiairs en beginnende wiskundeleerkrachten en noteerden 14% van de leerkrachten dat ze in contact kwamen met ICT via de gevolgde opleiding. Dit is een duidelijke stijging ten opzicht van 2001. We kunnen dan ook stellen dat er momenteel in de verschillende lerarenopleidingen voldoende aandacht wordt besteed aan het gebruik van grafische rekentoestellen, computeralgebrasystemen en wiskundige software.

Onderwerpen

De ondervraagde leerkrachten behandelden heel uiteenlopende onderwerpen met ICT en hanteerden hierbij een verschillende aanpak:

- De leerkrachten die reeds meer bedreven waren in het gebruik van ICT behandelden alle onderwerpen waar een computer of een grafisch rekentoestel een meerwaarde kon bieden.
- Wiskundeleraars die ICT eerder in beperkte mate gebruikten, bundelden meestal een aantal onderwerpen tot één geheel en boden dit aan op het einde van een hoofdstuk of aan het einde van een trimester (bij wijze van herhaling).

Dit resultaat bevestigt onze visie dat het gebruik van CAS en wiskundige software in het wiskundeonderwijs onafhankelijk is van het onderwerp (zie paragraaf

5.2.4 en 7.2). Alle onderwerpen van het leerplan van de derde graad kan men op een zinvolle manier ondersteunen met het gebruik van deze hulpmiddelen. Afhankelijk van onderwerp tot onderwerp zal de nadruk liggen op het algebraïsche, grafische en/of numerieke. Bijvoorbeeld in het onderwerp algebra zijn de grafische mogelijkheden van een computeralgebrapakket van ondergeschikt belang.

Inspiratiebron

De wiskundeleerkrachten baseerden de ICT-sessies uit hun lessen op verschillende bronnen. De meeste leraars baseerden zich op materiaal dat ze verzamelden op nascholingen of ontwikkelden hun ICT-sessies volledig zelf. Andere veel voorkomende antwoorden waren materiaal van collega's, materiaal gevonden op internet en in tijdschriften en handboeken.

Nascholingen

In 2001 werd naar de mening van de leerkrachten i.v.m. de nascholingen gepeild aan de hand van een stelling: *"De nascholing - bijna exclusief afgestemd op de integratie van de pc in de wiskunde - is zeer persoonsgebonden en minimaal. Zij is eerder op de eigen persoon gericht en vindt (voorlopig) geen implementatie in het lesgebeuren zelf."* (zie C.1.2)
De antwoorden werden gecodeerd op een schaal van 1 tot 5[4]. Deze stelling had een modale score van 4. 105 leerkrachten (of 51,0%) verklaarden zich min of meer akkoord met deze stelling. Daartegenover staan 99 leerkrachten (of 48,1%) die in meer of mindere mate niet akkoord waren met deze stelling. De meningen waren dus duidelijk verdeeld:

- "Weinig implementatie in het lesgebeuren is o.a. te wijten aan het prijskaartje dat hangt aan de invoering van de ICT-middelen. Nog meer pc's ter beschikking stellen? De aankopen schrikken veel schoolbesturen af. En de invoering van de grafische rekenmachine kost de ouders al gauw 4000 BEF. En als de software nog meer gepromoot wordt, worden de ouders bijna moreel verplicht om een pc met de nodige software aan te kopen. We mogen ook niet vergeten dat ook bij de andere vakken ICT-middelen moeten gebruikt worden!" (2001)

- "De titels zijn vaak ronkend, maar de inhoud en de onmiddellijke toepasbaarheid binnen de klas teleurstellend." (2001)

[4] 1: absoluut niet akkoord, 2: niet akkoord, maar..., 3: geen mening, 4: akkoord, maar..., 5: volledig akkoord

- "Implementatie vraagt veel extra werk van de leerkracht. (...) Ik vrees dat we zullen moeten wachten tot een groep jonge afgestudeerden (die in hun opleiding met ICT hebben leren werken) de fakkel overnemen. Dat zou nog wel eens meerdere jaren kunnen duren!" (2001)
- "Ik hoop dat ik verkeerd ben, maar ik heb het gevoel dat een aantal collega's nascholing volgen om in orde te zijn. (...) Veel problemen bij het invoeren van ICT en veel redenen om ICT (nog) niet in te voeren, worden toegeschreven aan een gebrek aan middelen, materiaal en financiën. Alhoewel hierin een kern van waarheid steekt, is het ook een afschuiven van de verantwoordelijkheid." (2001)

In 2005 konden we uit de commentaren van de respondenten opmaken dat er nog steeds klachten zijn:

- "De nascholingen (onder de vorm van studiedagen) zijn stopgezet, net op het ogenblik dat er het meest nood aan is, omdat ICT nu opgelegd wordt door de eindtermen in de derde graad. (...) De 'leken' op dit vlak, die het werken met ICT zolang mogelijk hebben uitgesteld en nu voor voldongen feiten staan, hebben het extra moeilijk." (2005)
- "Het VVKSO-aanbod met een uitwisselingswebsite waarop je je moet abonneren, werkt niet. Er is nauwelijks aanbod." (2005)
- "De nascholingen zijn tot nu toe tegengevallen. Niet bruikbaar bij mijn leerlingen (te moeilijk, dikwijls op het niveau van ASO, weinig materiaal voor TSO en BSO)." (2005)
- "Ik heb al een viertal bijscholingen gevolgd in verband met Cabri, maar ik heb nog nooit gehoord hoe ik in een korte tijd de leerlingen actief zelfstandig kan laten leren." (2005)

Uiteraard vonden we ook enkele positievere opmerkingen:

- "Er zijn zeker goede bijscholingen, maar het echte werk voor de leerkracht komt pas nadien. Vooraleer je aan deze lessen begint, moet je goed voorbereid zijn." (2005)
- "Nascholingen zijn er voldoende maar ik had graag meer materiaal gekregen." (2005)
- "Als iedereen het bestaande materiaal, zelfs gedeeltelijk, zou gebruiken, dan zouden we nu veel verder staan met de integratie van ICT." (2005)

Handboeken

In de voorgaande paragraaf zagen we dat de wiskundeleerkrachten tijdens de nascholingen voornamelijk op zoek waren naar kant-en-klaar materiaal. Het vinden van uitgewerkt lesmateriaal was reeds in 2001 een knelpunt: "Dit is de schande van het huidig wiskundeonderwijs: de handboeken zijn niet gericht op ICT-gebruik en dus knoeit iedereen wat op zijn manier." (2001). Volstonden in 2005 de wiskundehandboeken? Bijna 80% van de deelnemende leerkrachten zei tevreden te zijn met de huidige generatie handboeken (eventueel met bijhorende cd-rom), maar toch lazen we enkele kritische opmerkingen:

- "Waarom heeft onze Guimardstraat zolang de kat uit de boom gekeken? Waarom geen gezamenlijke aankopen voor pc? Waarom geen concrete uitgewerkte ICT-lesonderwerpen? Waarom gewoonweg geen cursusmappen met uitgewerkte computerlessen van 50' die dan niet van uitgeverij X komen?" (2005)
- "Iedere uitgeverij komt sedert vorig jaar wel met één of andere cd op de markt. Je moet wel het kaf van het koren scheiden." (2005)
- "Mijn collega's die lesgeven in de minder wiskundig gerichte afdelingen stellen zelf een cursus samen. Ik bewonder hen voor hun moed." (2005)
- "De meeste handboeken zijn hier op voorbereid. Het spijtige is dat ze ofwel gebaseerd zijn op het rekentoestel ofwel op software, maar nooit de beide ondersteunen." (2005)
- "Bij de meeste (boeken)reeksen is ICT-integratie een loze belofte en er wordt weinig tot geen bruikbaar materiaal meegeleverd. Figuurtjes in je boek plaatsen van een pc naast een oefening zonder de leerkracht iets concreets aan te bieden is géén ICT-integratie." (2005)

Ook deze verzuchtingen van de leerkrachten worden bevestigd door onze ervaringen uit de onderwijsexperimenten. Voor het aanbrengen van de nieuwe concepten met CAS heeft men als leerkracht nood aan werkbladen of een e-cursus. De handboeken volstaan echter wel voor het oefeningengedeelte. Ze bevatten doorgaans een groot assortiment aan oefeningen (taken) die het niveau van rekenoefeningen overstijgen en men bijgevolg op een efficiënte en zinvolle manier kan oplossen met een computeralgebrasysteem. De oefeningen die de leerlingen van de experimentele groepen oplosten tijdens de onderwijsexperimenten waren afkomstig uit (gewone) wiskundehandboeken voor het secundair en hoger onderwijs of hierop gebaseerd (zie bijlage D).

Leerplan

In het enquêteformulier van 2001 werd naar de mening van de leerkrachten i.v.m. ICT-gebruik en de bestaande leerplannen gepeild a.d.h.v. een stelling: *"Mijn conclusie is dat computertechnologie het onderwijs in veel technische, algebraïsche en algoritmische vaardigheden overbodig maakt. Er zal een verschuiving in de inhoud en de doelen van het wiskundeonderwijs moeten plaats vinden, zodat leerlingen met inzicht de computertechnologie kunnen toepassen. De nieuwe ruimte kan worden benut door meer nadruk te leggen op probleem oplossen, modeleren en redeneren."* (van Streun, [81], p. 340).

De antwoorden van de respondenten werden ook hier gecodeerd op een schaal van 1 tot 5[5]. Deze stelling had een modale score van 4. We kunnen hieruit besluiten dat de 'gemiddelde wiskundeleerkracht' akkoord was met bepaalde zinsneden maar dan weer bedenkingen had bij andere. De volgende citaten weerspiegelen dit:

- "Men mag hierbij niet vergeten dat de leerlingen ook de pc en de bijhorende software moeten leren gebruiken. Dus op korte termijn is de tijdswinst eerder beperkt, maar op langere termijn (de leerlingen worden immers computervaardiger) zal dit zeker een belangrijke tijdswinst zijn." (2001)
- "Nog steeds blijven elementaire vaardigheden nodig: om de wiskunde te begrijpen en om goed met de toestellen te kunnen werken (bvb. voor het inschatten en interpreteren van resultaten). Deze basiskennis vergt echter minder tijd, zodanig dat we aandacht kunnen besteden aan het werken met die toestellen, aan 'problem solving' doen,..." (2001)
- "Minder sterke leerlingen die vroeger punten sprokkelden met technieken zullen nu uit de boot vallen!" (2001)
- "CAS maakt de vaardigheden zeker niet overbodig. Integendeel! De kritische zin van de gebruiker zal moeten blijven bestaan. Maar of beiden in het voorziene tijdsbestek op een degelijke manier kunnen onderwezen worden? Bepaalde vaardigheden zullen mijns inziens in de toekomst uit de leerplannen verdwijnen: Gauss-Jordan, Euclidische deling, ontbinden in factoren,... Alles zal met pc of grafisch rekenmachine mogen gebeuren." (2001)

[5] 1: absoluut niet akkoord, 2: niet akkoord, maar..., 3: geen mening, 4: akkoord, maar..., 5: volledig akkoord

Met deze opmerkingen in het achterhoofd besloten we in de enquête van 2005 te peilen naar de ideeën van de deelnemende wiskundeleerkrachten met betrekking tot een haalbaar leerplan voor de leerkrachten én de leerlingen. Onze vraag kwam echter op een ogenblik dat in de verschillende netten en richtingen vernieuwde leerplannen wiskunde werden ingevoerd[6]. Een grote groep van leerkrachten vond het bijgevolg niet zinvol om de leerplannen te becommentariëren: "Op deze vraag kan ik pas eind mei 2006 antwoorden, aangezien ik vanaf dit schooljaar een nieuw leerplan heb. Ik hoop dat de tijdsdruk een beetje zal verminderen." (2005).
Enkele respondenten hadden toch suggesties.

- "Door de spiraalmethode worden elk jaar dezelfde onderwerpen behandeld maar steeds dieper. Helaas zijn de leerlingen al veel vergeten van het vorige jaar waardoor de basis steeds moet herhaald worden. Dit is tijdrovend." (2005)
- "Afromen! Minder behandelen maar grondiger, meer ruimte voor eigen initiatief, een gedeelte van de lestijd besteden aan ICT." (2005)
- "Als op hoger niveau wordt beslist dat problemen uit lineaire algebra, limieten, afgeleiden, integralen niet meer ambachtelijk moeten worden opgelost, dan win ik weken. Zolang dit niet gebeurt, werk ik op twee fronten en verlies dus weken want ik wens mijn leerlingen voor alle universiteiten en richtingen voor te bereiden. Maar ik vrees dat die afspraken nooit zullen komen. (...) Het programma hangt met haken en ogen aan elkaar. Waar zit de taal van de wiskunde? De logicabeginselen? (...) Er moet worden afgestapt van eenzelfde programma voor bijvoorbeeld alle 6-uurs. Wat is de zin van ruimtemeetkunde in de richtingen economie-wiskunde en moderne talen-wiskunde? Deze leerlingen hebben meer baat bij uitdiepingen of extra oefentijd van integralen of stochastiek." (2005)

In hoofdstuk 7 van deze doctoraatsverhandeling zullen we met betrekking tot het efficiënt implementeren van CAS in de bestaande leerplannen wiskunde van het secundair onderwijs een eigen suggestie formuleren (zie paragraaf 7.2).

[6]Vanaf 1 september 2004 was in de derde graad van alle netten en alle richtingen een nieuw leerplan wiskunde van kracht. Op 1 september 2004 werd eveneens een nieuw leerplan wiskunde ingevoerd in alle richtingen van de tweede graad van het OGO. Op 1 september 2005 was een nieuw leerplan wiskunde in voege in de tweede graad ASO van het GO.

Gebruik van ICT op toetsen en examens

In 2001 werd naar de mening van de leerkrachten i.v.m. ICT-gebruik tijdens toetsen en exmanes gepeild aan de hand van een stelling: *"Een eenvoudige regel voor toetsen en examens. Wanneer je intellectuele fitheid beoordeelt, is geen werktuig toegelaten, zelfs geen eenvoudige rekenmachine. Wanneer je 'problem solving' beoordeelt zijn alle werktuigen, in het bijzonder grafische rekenmachines, toegelaten."* (Kutzler, [47], p. 78)
De antwoorden van de wiskundeleerkrachten werden opnieuw gecodeerd op een schaal van 1 tot 5. Deze stelling had een modale score van 5. Een groot deel van de leerkrachten verklaarden zich bijgevolg akkoord met het gestelde:

- "Ik probeer op het examen de vragen onder te verdelen in twee delen: een eerste deel met grafisch rekentoestel en een tweede deel zonder." (2001)
- "Ik ben akkoord met deze stelling zolang elke leerling maar op dezelfde wijze kan beoordeeld worden en dezelfde kansen krijgt met betrekking tot het gebruik van materiaal." (2001)
- "Mijn leerlingen mogen steeds gebruik maken van de computer, maar ze moeten in bepaalde gevallen de tussenbewerkingen (die de computer niet geeft) opschrijven, bvb. bij de techniek van het afleiden." (2001)

In 2001 bevatten de leerplannen wiskunde nog geen bepalingen i.v.m. het gebruik van ICT tijdens toetsen en examens. In 2005 vonden we in de vernieuwde leerplannen wiskunde van het vrij gesubsidieerd onderwijs de volgende aanbeveling: "De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan." In de leerplannen wiskunde van het gemeenschapsonderwijs vonden we een gelijkaardig advies: "De leerlingen moeten gebruik kunnen maken van informatie- en communicatietechnologie (ICT) om wiskundige informatie te verwerken, berekeningen uit te voeren of wiskundige problemen te onderzoeken. Deze eindterm moet dus ook geëvalueerd worden. In de lessen wiskunde zal dan ook door de leerling systematisch en verantwoord een grafisch (of symbolisch) rekentoestel of een computer worden gebruikt. De leerstofitems, waarbij tijdens de instructie voor ontwikkeling of voor verwerking gebruik werd gemaakt van deze technologische instrumenten, zullen met de ondersteuning van dezelfde hulpmiddelen moeten worden geëvalueerd. Hierbij dient wel te worden opgemerkt dat ICT een middel is om aan wiskundeonderwijs te doen en geen doel op zich. Ook dit is een belangrijk aandachtspunt bij de evaluatie."

Uit de resultaten van de enquête van 2005 bleek dat deze aanwijzingen - m.b.t. het gebruik van de grafisch rekentoestellen - vrij goed opgevolgd werd. 58% van de deelnemende leerkrachten liet de leerlingen tijdens toetsen en examens gebruik maken van een grafische rekenmachine. Ter vergelijking: ongeveer 60% van de respondenten gebruikte een GRM in de wiskundeles. Het beperkte verschil vonden we bij die leerkrachten die hun leerlingen niet verplichten om een eigen grafisch rekentoestel aan te kopen.

- "GRM mag steeds gebruikt worden tijdens overhoringen en examens. De vraagstelling wordt aangepast!" (2005)
- "Om te vermijden dat de leerlingen te pas en te onpas hun rekentoestel zouden gebruiken tijdens de examens en herhalingstesten, werden deze gesplitst in een deel met en een deel zonder rekentoestel. Deze rekentoestellen worden voor elk examen gereset door de leerkracht." (2005)
- "Ze moesten wel alle tussenstappen opschrijven om het eerlijk te houden t.o.v. leerlingen die geen grafisch rekentoestel hebben." (2005)

Ongeveer 21% van de deelnemende leerkrachten (tegenover 86% gebruikende leerkrachten) gaven aan dat de leerlingen soms kunnen beschikken over een computer voor een toets of examen. Het gebruik van computeralgebrasytemen en wiskundige software tijdens toetsen en examens was duidelijk nog niet ingeburgerd in het secundair wiskundeonderwijs. Waarom vertaalde het gebruik van computer tijdens de les zich niet naar gebruik van computer tijdens de examens?

In de eerste plaats waren er de organisatorische problemen. De leerkrachten beschikten over onvoldoende computers en computerlokalen en andere vakken zoals boekhouden, dactylo en informatica hebben voorrang. Een aantal leerkrachten losten dit op via permanente evaluatie, alternatieve examenmomenten of beperken zich uitsluitend tot de overhoringen. Als tweede argument werd het geven van gelijke kansen aan alle leerlingen en het beperkte thuisgebruik aangehaald. Deze leerkrachten evalueerden het gebruik van een computeralgebrasysteem of wiskundige software bijgevolg niet omdat niet alle leerlingen thuis over een pc kunnen beschikken. Ook de leerlingen die thuis wel een pc ter beschikking hebben, kunnen het gebruik van wiskundige software of CAS meestal niet thuis inoefenen omdat de meeste scholen geen leerlingenlicenties aankopen. Ze vonden dat de leerlingen zich niet voldoende of op dezelfde manier konden voorbereiden en een examen of toets met het gebruik van computer bijgevolg niet 'eerlijk' was. De derde reden en tevens hoofdreden om geen computers toe te laten tijdens toetsen en examens was echter de lage intensiteit van het gebruik van de computer tijdens de wiskundeles. Ongeveer 13% van de computergebruikers beperkte zich uitsluitend tot demonstraties en ongeveer 46% van de deelnemende leerkrachten gaf aan dat ze zelden een computer hanteerden tijdens de wiskundelessen. In dergelijke gevallen was het gebruik van een computer door de leerlingen tijdens een toets of examen niet verantwoord!

Invloed van het gebruik van ICT op leerlingen

In beide enquêteformulieren peilden we naar de invloed van het gebruik van ICT op het leerproces van de leerlingen. In 2001 beweerden de meeste leerkrachten nog te weinig ervaring te hebben met het gebruik van ICT in klasverband om een echt antwoord te kunnen geven op deze vraag. De meningen van de leerkrachten die wel over voldoende ervaring (dachten te) beschikken waren dan weer uiteenlopend.

- "Enerzijds zal deze manier de leerlingen beter aanspreken, maar anderzijds bestaat het gevaar dat je teveel ineens laat zien, zodanig dat ze slechts oppervlakkig de nieuwe punten opnemen." (2001)
- "We zien dat de computer het leerproces bij sommige leerlingen vergemakkelijkt en versnelt en bij anderen het omgekeerde effect heeft." (2001)
- "De motivatie van de leerlingen stijgt... tot het ook moeilijk blijkt." (2001)
- "Naar mijns inziens heeft het geen goede invloed op het leerproces. Het redeneren wordt niet gestimuleerd." (2001)
- "Ze vertrouwen teveel op het resultaat van de pc of rekenmachine. Ze denken er zelf niet bij na. Ze weten ook niet goed hoe ze het moeten studeren." (2001)

Een mogelijke positieve invloed op het leerproces van de leerlingen motiveerde hen blijkbaar niet tot ICT-gebruik. In 2001 baseerden de leerkrachten hun keuze om al dan niet gebruik te maken van ICT voornamelijk op praktische argumenten. Sommige leerkrachten kozen voor het gebruik van een computeralgebrasysteem of wiskundige software omdat de school voorzien was van een goede infrastructuur of omdat de leerkracht zelf een grote interesse en bekwaamheid had in het gebruik van deze hulpmiddelen. Andere leerkrachten kozen voor het

gebruik van grafische of symbolische rekentoestellen omdat deze hulpmiddelen het lesgebeuren het minst beïnvloeden en de resterende wiskundeleerkrachten gebruikten helemaal geen ICT tijdens hun wiskundelessen omdat daarvoor geen tijd of middelen waren.
In 2005 motiveerden de respondenten het gebruik van een grafisch rekentoestel of wiskundige software nog steeds met praktische argumenten, maar daarnaast zagen steeds meer leerkrachten een positieve invloed en merkten ze ook op dat het gebruik van ICT de motivatie en het 'zin hebben' in wiskunde van de leerlingen liet toenemen. Een grote groep van leerkrachten prezen bovendien de visuele mogelijkheden van de huidige ICT-hulpmiddelen.

- "In alle klassen zijn er vurige fans van ICT, maar ook hevige tegenstanders. Vermits het 'moet' draait de laatste groep toch bij. Globaal gezien ervaren zij wiskunde als 'plezanter' en 'minder saai'. Bovendien zien zij allemaal wel in dat het gebruik zowat een evidentie is en dat een 'wiskundige computergeletterdheid' nuttig kan zijn voor hun verdere studies." (2005)
- "De leerlingen vonden, eens de barrière van het computersysteem genomen, het aangenaam de pc te gebruiken omdat een aantal problemen met veel rekenwerk werden vereenvoudigd; soms was het rekenwerk ook algoritmisch, zodat ze enkel de techniek moesten onthouden en die dan correct door Maple laten toepassen." (2005)
- "Je kan meer problemen uit de praktijk behandelen. De voorbeelden zijn realistischer en meer toepassingsgericht. Ik denk/hoop wel dat ze hierdoor meer interesse krijgen." (2005)
- "Positieve invloed, verbetering van de begripsvorming en creatiever bij problem solving, meer interesse,..." (2005)

Op basis van deze resultaten kunnen we ook besluiten dat sommige wiskundeleerkrachten hun wiskundelessen ondersteunen met het 'White box-Black box'-principe en het principe van de vensterdidactiek (zie 3.3).

Er waren ook nog steeds leerkrachten die vonden dat de positieve invloed van ICT-hulpmiddelen sterk overroepen werd of zelfs onbestaand was.

- "Ze leren er minder mee. Ze denken niet na wanneer ze werken met de computer. Ze prullen en denken niet na over het eindresultaat, of het wel klopt en wat het betekent." (2005)

- "Je verliest er voornamelijk tijd mee want de te behandelen onderwerpen moeten ook nog eens in de les worden gezien met geodriehoek en passer." (2005)

De leerkracht als wiskundecoach

Elke wiskundeleerkracht die regelmatig (of zelfs maar af en toe) zijn leerlingen zelfstandig laat werken - al dan niet met behulp van een (ICT-)hulpmiddel - merkt dat dit het lesgebeuren en de rol van de leerkracht in dit lesgebeuren beïnvloedt. De leerkracht moet zijn leerlingen begeleiden in plaats van hen te onderwijzen, hij moet hen bijsturen en aanmoedigen tijdens het leerproces en ten allen tijde klaar staan als helpdesk en als helper in nood. Deze 'nieuwe' rol van de wiskundeleerkracht kan men samenvatten met het woord 'wiskundecoach'. Deze begeleidende rol van de wiskundeleerkracht sluit nauw aan bij het gebruik van het 'White box-Black box'-principe. Tijdens de 'white box'-fase kan de leerkracht nog kiezen tussen de rol van 'onderwijzer' of 'coach' (indien de leerkracht het principe van 'begeleid zelfstandig leren' hanteert), maar tijdens de 'black box'-fase treedt de leerkracht steeds op als begeleider.

In 2001 bleek uit de antwoorden van enkele respondenten dat men zich niet steeds goed voelde bij deze evolutie: "Ik voel me niet voorbereid op het geven van wiskundelessen met behulp van ICT. De motivatie om er opnieuw helemaal in te vliegen ontbreekt na al die jaren." (2001). Hoe voelden de leraars zich in 2005 onder deze nieuwe rol?

Ruim 80% van de respondenten ervaart deze rol positief of heel positief. De wiskundeleerkrachten uit de derde graad lijken iets minder enthousiast dan hun collega's uit de eerste en tweede graad. Uit de enquêteforumulieren bleek duidelijk dat de meningen verdeeld zijn:

- "Je bent dan wel 'coach', maar je hebt niet altijd 'atleten' in de klas. Vooral bij de minder sterke leerlingen heb je steeds de vrees dat zij met wiskunde niet ver zullen geraken als je het alleen maar als 'coach' aanpakt. Je wil dus ook 'leraar' zijn. Het gaat bovendien meestal ook een stuk sneller en het is veiliger als je wat in tijdsnood raakt." (2005)
- "In het technisch onderwijs ben ik veel minder 'coach' dan 'onderwijzer'." (2005)
- "De rollen moeten afgewisseld worden: er is eerst behoefte aan een wiskundeleerkracht die items aanbrengt en illustreert (want louter begeleid

zelfstandig leren werkt niet voor wiskunde). Bij de verwerking van de leerstof moet de leerkracht inderdaad als coach optreden." (2005)

- "Het is belangrijker om leerlingen dingen te laten begrijpen, zelf te laten ontdekken, omdat dit beter blijft hangen. (...) Ze begrijpen ook veel beter de verbanden tussen onderdelen en zien het dus niet meer als losstaande dingen." (2005)
- "De weg meewandelen door van achter te sturen is zelfs interessanter dan zelf altijd op kop te lopen en de leerlingen nooit (goed of fout) te laten kiezen. Wie een foute weg bewandelt, zelf ontdekt dat hij fout bezig is - en van de leraar kan vernemen waarom - zal dezelfde fout nog zelden maken." (2005)

Knelpunten en mogelijke oplossingen

Uit de antwoorden van de wiskundeleerkrachten bleek in 2001 dat ze bij het gebruik van ICT-hulpmiddelen in de wiskundelessen veel problemen ondervonden. Dit leidde bij vele leerkrachten tot frustraties en demotivatie.

1. Organisatorische en technische problemen: te grote klasgroepen om de leerlingen zelf te laten werken, te grote diversiteit tussen de klassen en leerlingen onderling, het ontbreken van de nodige infrastructuur, niet in staat zijn om zelf technische problemen op te lossen,...

    - "De leerlingen zijn nauwelijks geïnteresseerd omdat ze niet individueel kunnen werken." (2001)
    - "Wellicht merkt u ook de diversiteit aan situaties in de scholen. Eén en ander heeft te maken met de inhoudelijke verschillen van de afdelingen in het secundair onderwijs. Zo hebben leerlingen uit de handelsafdeling of informatica-afdeling heel wat computerervaring en zullen de leraren die in die afdelingen lesgeven eerder geneigd zijn de computer in te schakelen. Dit ligt totaal anders in bepaalde ASO-afdelingen. Op onze school hebben de leerlingen uit de Latijnse afdelingen het vak informatica niet." (2001)
    - "Wat mij enorm ergert is dat ze van boven af verplichten om ICT in te schakelen in de lessen maar dat ze de scholen niet het nodige budget geven om dat te kunnen doen. Ik heb een grote strijd moeten leveren om een computerlokaal te bekomen met oude afgedankte computers!" (2001)

2. Tijdsgebrek: de leerkrachten hebben te weinig tijd om zelf materiaal te ontwerpen of bestaand materiaal aan te passen

    - "Overvolle leerplannen laten niet toe om veel zaken alternatief te behandelen. Bovendien kost het maken van lessen, werkbladen en oefeningen met ICT veel tijd die er niet altijd is." (2001)
    - "Hebt u enig idee hoeveel tijd er in ons leven overblijft om ons in te werken in deze moeilijke materie? Het is immers zo dat de leerkracht bij voorkeur meer moet weten over het onderwerp dan de leerling zelf. Tenzij ik nog een paar uur slaap opgeef, zit ik niet in een gezinssituatie die mij toelaat om thuis te experimenteren en voor te bereiden! Kant en klare werkboeken zouden een goede stap vooruit zijn." (2001)

3. Collega's waren vaak niet of minder enthousiast. Dit leidde tot frustraties en extra werk dat anders zou kunnen verdeeld worden: "Sommige leerkrachten offeren hun woensdagnamiddagen en zaterdagen op om nieuwe technologieën in te studeren en bij te scholen. Andere leerkrachten wachten af of beweren bij hoog en laag dat ICT slecht is. Waarom? Teveel bijkomend werk?" (2001). Maar het kan ook anders: "Vanaf volgend schooljaar willen we met de collega's een vast uur voor vakwerking in het uurrooster inbouwen. Elke week kunnen we dan de ervaring opgedaan door de verschillende collega's in bijscholingen, studiedagen en gewoon in de klas, doorgeven. In de planning is voorzien dat elke collega een aantal sessies voorbereidt over het gebruik van een computerprogramma, over interessante toepassingen van de TI-83, over didactische toepassingen,..." (2001).

Deze problemen bemoeilijkten de integratie van ICT in het wiskundeonderwijs. Werden de leerkrachten in 2005 geconfronteerd met gelijkaardige problemen en vonden ze hiervoor passende oplossingen? In de ingevulde enquêteformulieren vonden we opnieuw meldingen van organisatorische problemen en tijdsgebrek.

1. Organisatie:
   Ook in 2005 bleken de beperkte beschikbaarheid van de computerlokalen en een gebrekkige of slecht functionerende infrastructuur de leerkrachten parten te spelen. Organisatorische problemen beperkten zich evenwel niet tot het gebruik van computeralgebrasystemen en wiskundige software. Ook bij het gebruik van grafische rekentoestellen kon er al eens iets foutlopen.

- "Werken met grafische rekenmachines zorgt nogal vaak voor onverwachte situaties: 'Meneer, er komt niets op mijn scherm!', 'Ik krijg een foutmelding.',..." (2005)
- "Indien het een klasgroep is van meer dan 20 leerlingen ben je vaak bezig met het blussen van brandjes: grafische rekenmachines die fout ingesteld zijn en leerlingen helpen die van een andere school kwamen en dergelijke werkwijze niet gewoon zijn." (2005)
- "Het bruiklenen van laptops en in de school beschikbare grafische rekentoestellen is erg tijdrovend. (...) Leerlingen steken de grafische rekentoestellen niet in de juiste tas terug: je moet dit steeds zelf controleren, of nog erger: andere collega's controleren dit zelf niet, zodat jij de 'rommel' van een ander moet opruimen." (2005)

De wiskundeleerkrachten probeerden aan de hand van een nauwgezette voorbereiding en goede afspraken met de collega's de organisatorische en technische problemen binnen te perken te houden.

- "Als je alles op voorhand goed plant en uitwerkt (zoals de werkbladen met de leerstof) en controleert of alle software op de computers geïnstalleerd is, zijn er meestal geen problemen." (2005)
- "Niets wat we niet zelf of samen met de coördinatoren konden oplossen." (2005)
- "In het begin vraagt dit enige organisatie, maar na enkele jaren ervaring loopt dit als een treintje." (2005)

2. Tijdsgebrek:
Bijna elke leerkracht ondervond in meer of mindere mate tijdsdruk. Deze tijdsdruk werd niet veroorzaakt door het gebruik van ICT, maar werd daar ook niet altijd door verlicht. Een leerkracht formuleerde dit als volgt: "Steeds meer leerstof en toch inkrimping van het aantal contacturen. Dat wordt een uitdaging. De computer het rekenwerk laten overnemen en hierdoor tijd winnen is zeker het wondermiddel niet!" (2005). Anderen zien toch heil in het gebruik van ICT: "Zeker in het begin is het tijdrovend omdat de leerlingen nog niet vertrouwd zijn met de software. Na een tijdje werkt het wel tijdwinnend." (2005). Maar ook voor het tijdsprobleem zoeken en vinden de wiskundeleerkrachten uiteenlopende oplossingen:

   - "Ik zou mijn leerprogramma nooit afkrijgen indien ik de theorie niet via powerpoint zou kunnen geven. Dit bespaart me enorm veel tijd, die de leerlingen kunnen gebruiken om meer oefeningen te maken." (2005)

- "Leerlingen mogen over de middag verder werken aan hun oefeningen of dus buiten de lesuren." (2005)
- "Eén lesuur is dikwijls te kort. Voor zo'n lessen zou je twee lesuren na elkaar moeten kunnen geven." (2005)
- "Ik ervaar niet dat er te grote tijdsdruk is. Op onze school kennen wij wel een systeem van 5 minuten pauze tussen elke twee lessen. Daardoor beschikken we elke les over de volle 50 minuten." (2005)
- "Het probleem ligt niet zozeer aan de leerplannen. Een leerkracht probeert vaak het gekozen leerboek te volgen, al was het maar omwille van de continuïteit naar het volgende leerjaar (waarvan de collega/het boek) verwacht dat je alle items behandeld hebt." (2005)
- "Als er vanaf het eerste jaar met ICT zou gewerkt worden (...) dan zouden ze (als ze in het vijfde komen) al redelijk goed met ICT kunnen werken! Als ze in het vijfde nog alles moeten leren (ICT is nieuw voor hen) is het soms niet altijd gemakkelijk." (2005)

ICT en het hoger onderwijs

In de enquêteformulieren van 2001 lazen we dat de wiskundeleerkrachten het gevoel hadden dat het secundair onderwijs en het hoger onderwijs - met betrekking tot de inhoud van het vak wiskunde en het gebruik van ICT - niet meer op dezelfde golflengte zaten. In het secundair onderwijs had men gekozen voor de integratie van ICT in het wiskundeonderwijs, maar ze waren van mening dat het hoger onderwijs hen daarin niet volgde:

- "Tijdens mijn opleiding aan de universiteit werd weinig gebruik gemaakt van ICT. Als leerkracht moet je de leerlingen voorbereiden op de universiteit of hogeschool. Als daar weinig van ICT wordt gebruik gemaakt, heeft het weinig nut dat je daar in je les veel aandacht aan besteed." (2001)
- "Het secundair onderwijs heeft duidelijk gekozen voor de invoering van ICT. (...) Voor zover ik weet liggen de zaken in het hoger onderwijs 'gevarieerder'. Bij sommige professoren mag je nauwelijks een wetenschappelijke rekenmachine gebruiken en op andere plaatsen mag je zonder enige beperking gebruik maken van zware software. Heel wat mensen in het hoger onderwijs lijken niet te weten welke evolutie het secundair onderwijs doormaakt." (2001)

- "Ik merk dat het hoger onderwijs geen kennis heeft van de ondertussen reeds jaren vernieuwde leerplannen. De voorkennis die ze soms vereisen, wordt al jaren niet meer gegeven." (2001)

Hadden de wiskundeleerkrachten in 2005 nog steeds diezelfde indruk? Uit enkele getuigenissen bleek dat hun beeld van het gebruik van ICT in het hoger onderwijs niet veranderd was:

- "Het zou al een hele vooruitgang zijn mochten de ICT-technieken ook in het hoger onderwijs gebruikt mogen worden. Tot nu toe mogen de leerlingen geen grafische rekenmachines gebruiken op olympiades of bij ingangsexamens! Dan bekruipt mij soms het gevoel dat ik teveel aandacht geef aan ICT-toepassingen en dat ik misschien toch beter meer zou trainen op rekentechnieken. Zolang onze leerlingen goed presteren in het voortgezet onderwijs houd ik mij wel aan de ICT-aanpak." (2005)
- "De leerplannen zijn helemaal niet aangepast aan het hoger onderwijs: daar is er zelden, meestal geen gebruik van GRT. Daar staat de helft van de punten - of meer - op theorie, terwijl in het secundair de theorie uit de handboeken wordt geweerd. Je kan het nog zien als extraatje, en als goede leerkracht doe je dit ook, want anders zijn je leerlingen niet voorbereid voor het hoger onderwijs. Met als gevolg dat de lessen niet vol, maar overvol zitten!!" (2005)

Klopt dit beeld eigenlijk wel? Is het al dan niet gebruiken van ICT afhankelijk van docent tot docent of van professor tot professor? Is er sprake van willekeur? Een gelijkaardig onderzoek voor het hoger onderwijs drong zich op en werd eveneens in de loop van 2005 uitgevoerd. Een bespreking van de uitvoering en de resultaten van dit onderzoek vindt men terug in paragraaf 6.3.

6.2.5 Conclusie

In deze paragraaf hebben we aan de hand van de resultaten van twee rondvragen een beeld geschetst van het ICT-gebruik van de Vlaamse wiskundeleerkrachten in hun wiskundelessen. Uit de ervaringen van de deelnemende leerkrachten bleek dat de integratie van ICT in het secundair onderwijs een moeilijk proces is maar toch een duidelijke evolutie heeft doorgemaakt. We herhalen hier de belangrijkste vaststellingen:

1. In 2005 maakten 96% van de respondenten (t.o.v. 87% in 2001) gebruik van ICT-hulpmiddelen in de wiskundelessen.

2. De populariteit van het grafisch rekentoestel was sterk gestegen. Ongeveer 60% van de leerkrachten gebruikten intensief een GRM in de lessen en bijna alle leerkrachten verplichtten hun leerlingen tot de aankoop van dit toestel. Bij de wiskundige software bleken vooral Cabri, Derive en Excel populair.

3. De verschillen tussen de leerkrachten onderling m.b.t. frequentie en intensiteit van de computerondersteuning in de wiskundelessen is opvallend. De beperkte infrastructuur en het niet beschikbaar zijn van de computerlokalen worden hier als voornaamste redenen naar voor geschoven.

4. De leerkrachten motiveerden hun beslissing om toch met ICT te werken in 2005 nog steeds overwegend met praktische argumenten. Daarnaast merkten ze wel op dat het gebruik van ICT de motivatie (het 'zin hebben' in wiskunde) bij de leerlingen liet toenemen en vergrootte het heel sterk het visuele aspect van wiskunde. We kunnen bijgevolg stellen dat de leerkrachten in de wiskundelessen met computerondersteuning gebruik maken van het principe van de vensterdidactiek. Op zijn beurt verduidelijkten de visuele mogelijkheden de leerstof en verankerden ze de nieuwe kennis beter in het geheugen van de leerlingen.

5. 90% (t.o.v. 83% in 2001) van de leerkrachten noemden zichzelf een voorstander van een verantwoord gebruik van ICT. De leerkrachten benadrukten wel dat de wiskunde moet blijven primeren.

Tijdens de verwerking van de enquêtegegevens konden we ook een aantal nieuwe aspecten en tendensen waarnemen:

1. De wiskundeleerkrachten gingen vaker op zoek naar goedkope - of bij voorkeur zelfs gratis - alternatieven voor de vaak dure licenties onder de vorm van gratis downloads, applets en online-oefeningen.

2. Het gebruik van een cd-rom die samen met het handboek wordt verdeeld, was een nieuwe tendens. Voorlopig maakten vooral de wiskundeleerkrachten van de eerste graad hiervan gebruik.

3. In de secundaire scholen deed de elektronische leeromgeving haar intrede. Ongeveer 16% van de deelnemende leerkrachten gebruikt deze leeromgeving voor communicatie met de leerlingen. Door oefeningen (en eventueel) hun oplossingen aan te bieden op de elektronische leeromgeving bevorderen de leerkrachten bovendien het 'gedifferentieerd werken' binnen een klasgroep.

4. De infrastructuur van de scholen was geëvolueerd. Een groot aantal leerkrachten rapporteerden dat hun school beschikte over een open leercentrum (OLC) en/of een multimedialokaal. Anderzijds eiste de populariteit van het gebruik van de computer zijn tol. De leerkrachten vonden vaak dat de computerklassen onvoldoende beschikbaar waren.

6.3 Hoger onderwijs

6.3.1 Inleiding

In paragraaf 6.2 werd op basis van de resultaten van twee rondvragen uitgevoerd in het secundair onderwijs een beeld geschetst van het ICT-gebruik in de wiskundelessen van het secundair onderwijs en van de evolutie die dit ICT-gebruik onderging tussen 2001 en 2005. Uit de antwoorden van de verschillende wiskundeleerkrachten bleek dat een aantal leraars het gevoel hadden dat het secundair onderwijs en het hoger onderwijs niet (meer) op dezelfde golflengte zaten. Deze leerkrachten waren van mening dat de integratie van ICT in het hoger onderwijs verschilde van richting tot richting, van docent tot docent? Op basis van deze uitlatingen beslisten we om - aan de hand van een korte enquête - ook voor het hoger onderwijs een inventaris op te maken van het ICT-gebruik in het Vlaamse hoger onderwijs, in het bijzonder voor wiskunde en wiskunde-gerelateerde vakken.

6.3.2 Organisatie

Samenstellen en versturen het de enquêteformulier

De organisatie van de enquête bestond opnieuw uit drie fases. In een eerste fase werd een enquêteformulier samengesteld. We wilden op basis van de antwoorden van de docenten een beeld schetsen van het ICT-gebruik in het hoger onderwijs, meer bepaald in de vakken wiskunde, statistiek en andere wiskunde-gerelateerde vakken. In het bijzonder waren we geïnteresseerd in de volgende variabelen:

- het gebruik van ICT-hulpmiddelen tijdens de lessen
- het gebruik van ICT-hulpmiddelen tijdens de examens
- de vereiste voorkennis van de studenten m.b.t. ICT

We beperkten ons tot vijf gesloten vragen (zie C.1.3). Deze vragen werden aangevuld met ruimte voor algemene informatie over de docent en zijn/haar

studenten (instelling, departement, vak, richting) en aanvullende opmerkingen. Na het samenstellen van het enquêteformulier werden tijdens de tweede fase de gegevens van de populatie verzameld. De populatie waaruit we een steekproef wilden nemen, bestond uit alle Vlaamse docenten en professoren van het hoger onderwijs die wiskunde, statistiek en een ander wiskundegerelateerd vak doceerden in een eerste jaar bachelor. Op basis van de informatie die verstrekt werd op de website van het departement Onderwijs van het minsterie van de Vlaamse Gemeenschap en de websites van de instellingen werden de e-mailadressen verzameld van 'alle' lesgevers van vakken wiskunde, statistiek en andere wiskundegerelateerde vakken uit een eerste jaar bachelor en dit zowel voor professionele als academische bacheloropleidingen. Indien op de websites de namen van de lesgevers niet werden vermeld, werd het e-mailadres van het opleidings- of departementshoofd genoteerd.
De derde en laatste fase bestond uit het versturen van de e-mailberichten. Eind 2005 werd een oproep tot deelname verstuurd. Het enquêteformulier kon men online invullen of per post versturen.

Verwerken van de gegevens

Alle antwoorden werden ingevoerd in SPSS en de verschillende opmerkingen, meningen en argumenten van de deelnemende professoren en lectoren werden gebundeld. We zullen in de volgende paragrafen opnieuw gebruik maken van citaten om de numerieke resultaten te illustreren.

6.3.3 Steekproef: representativiteit

In een poging om zoveel mogelijk data te verzamelen kozen we opnieuw voor een opportuniteitssteekproef. In deze paragraaf zullen we de respondenten van deze enquête in kaart brengen en hun respresentativiteit testen.

Vooreerst bekijken we de verdeling van de deelnemende docenten volgens het type van de bachelor en de instelling en volgens het type van het vak (zie tabel 6.1). De 120 respondenten waren verbonden aan 27 verschillende instellingen, nl. 6 universiteiten en 21 hogescholen. Alle antwoorden betroffen vakken uit een eerste jaar bachelor. Tabel 6.9 vat deze situatie samen.

Met behulp van de chikwadraadtoets kunnen we de representativiteit van de steekproef t.o.v. de volledige populatie testen. Voor de variabele 'instelling' blijkt de verdeling van de deelnemende instellingen voldoende te corresponderen met de werkelijke verdeling van de instellingen ($df = 1$, $\chi^2 = 0,14$ en $\chi^2_{0,95} = 3,84$). Voor de variabele 'opleiding' merken we wel een significant verschil op ($df = 1$, $\chi^2 = 5,16$ en $\chi^2_{0,95} = 3,84$). De groep van de 'academische bachelors' is oververtegenwoordigd t.o.v. de professionele bachelors.

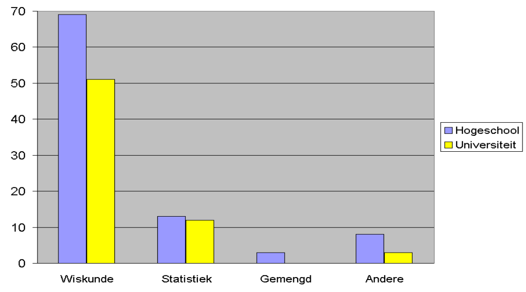
We kunnen de vakken waarover we informatie ontvingen opdelen in vier verschillende categorieën: wiskunde, statistiek, het combinatievak 'wiskunde en statistiek'[7] en andere wiskundegerelateerde vakken. Vakken die tot de categorie 'Andere' behoren zijn bijvoorbeeld fysica, mechanica en krachtenleer.

Aangeschreven[8]		Deelnemend	
Professionele bachelor	Academische bachelor	Professionele bachelor	Academische bachelor
44,9% (122)	55,1% (150)	56,2% (77)	43,8% (60)
Hogescholen	Universiteiten	Hogescholen	Universiteiten
79,3% (23)	20,7% (6)	77,8% (21)	22,2% (6)

Tabel 6.9: Verdeling van de vakken volgens het type van de bachelor

[7]De categorie 'Gemengd' bevat drie mengvakken 'wiskunde en statistiek'. Gezien het beperkte aantal zullen we deze vakken in het vervolg van deze tekst niet opnemen in de bespreking.

[8]De verdeling van de aangeschreven instellingen en opleidingen wordt hier beschouwd als een goede benadering van de werkelijke verdeling.

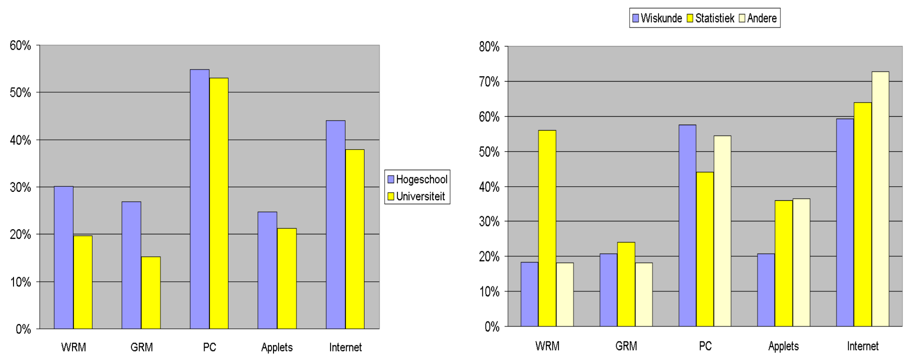


Figuur 6.5: Verdeling van de vakken volgens het type van de instelling

Voor de variabele 'vakken' beschikken we niet over geschikt cijfermateriaal dat de werkelijke verdeling van deze variabele weergeeft. We kunnen de representativiteit van onze steekproef voor de variabele 'vakken' bijgevolg niet testen m.b.v. de chikwadraadtoets.

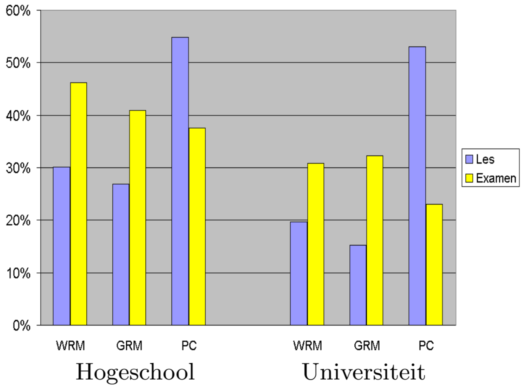
6.3.4 Resultaten

Gebruik van ICT door de studenten

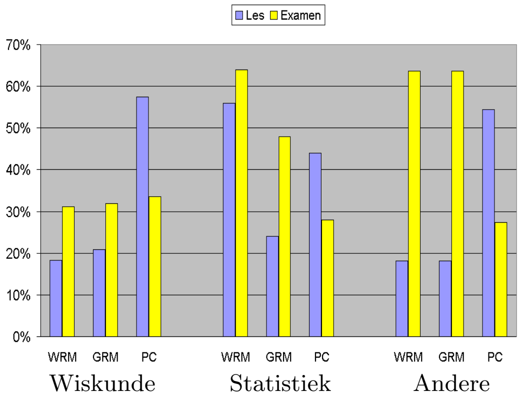


Figuur 6.6: Gebruik van ICT door de studenten

Gebruik van ICT tijdens de examens



Figuur 6.7: Gebruik van ICT tijdens het examen



Figuur 6.8: Gebruik van ICT tijdens het examen volgens het type vak

6.3.5 Discussie

Gebruik van ICT door de studenten

Aan alle lesgevers werd de vraag gesteld of ze het gebruik van ICT-hulpmiddelen stimuleren tijdens de les. In figuur 6.6 krijgen we een overzicht van het aantal positieve antwoorden op deze vraag. We kunnen aan de hand van deze figuur de resultaten voor de hogescholen en de universiteiten makkelijk vergelijken.

Voor alle hulpmiddelen scoren de hogescholen iets hoger dan de universiteiten, maar het verschil is het grootst voor het gebruik van de wetenschappelijke en grafische rekentoestellen. Indien we een gelijkaardige figuur samenstellen voor de vakken wiskunde, statistiek en de wiskundegerelateerde vakken merken we enkele opvallende verschillen op. Een wetenschappelijk rekentoestel wordt opmerkelijk meer gebruikt in het vak statistiek, terwijl het aandeel van het gebruik van computers er iets lager ligt. Applets blijken dan weer het minst populair in het vak wiskunde.

De motivatie van de docenten om geen ICT te integreren in hun vak is uiteenlopend. Een eerste groep van docenten maakt geen gebruik van ICT-hulpmiddelen omdat ICT niet behoort tot de doelstellingen van hun vak. Deze docenten beperken zich tot de basisleerstof (van een groter geheel) en het gebruik van ICT wordt pas in een later stadium (en bijgevolg niet in het eerste jaar bachelor) ingevoerd.

- "In het tweede jaar bachelor wordt er intensief gebruik gemaakt van softwareprogramma's (Maple, SAS) in een cursus 'gegevensverwerking'. Ook de evaluatie steunt op deze pakketten. Binnen het eerst jaar leggen we de nadruk op het probleemoplossend denken en minder op de technische kant."

- "In het eerste jaar Initiële Lerarenopleiding Lager Onderwijs (ILLO) proberen we de studenten 'af te leren' om om de haverklap het rekenmachientje boven te halen. (...) In het derde jaar krijgen ze wel een gedeelte over het gebruik van het rekentoestel (en dan is er ook een gedeelte van het examen met ZRM). Verder hebben ze in het vak 'onderwijstechnologie' wel iets rond educatieve software en geven we hen in het eerste jaar een zoekopdracht rond bruikbare sites voor wiskunde in het basisonderwijs."

- "In het eerste jaar Initiële Lerarenopleiding Secundair Onderwijs (ILSO) worden de studenten hoofdzakelijk geconfronteerd met wiskundige inhoud en didactiek. ICT komt sporadisch aan bod. In het tweede en derde jaar wordt ICT volledig geïntegreerd in het vak en ook onderzocht als technische ondersteuning voor de toekomstige wiskundeleerkracht. Pas vanaf het tweede jaar is een GRM verplicht en wordt dit samen met de software die hiervoor opgenoemd werd bij o.a. 'opmaak cursus' geïntegreerd."

Een tweede groep van docenten maakt geen of slechts in beperkte mate gebruik van ICT omdat de financiële middelen ontoereikend zijn.

- "Sinds dit jaar werden alle toepassingen afgeschaft omdat er geen geld is en de informatici niet kunnen gemotiveerd worden om het programma te installeren. Er zijn altijd praktisch moeilijkheden allerhande. Mathcad werd gebruikt omdat dit volgens de directie het goedkoopste is en niet omdat dit de voorkeur zou genieten van de lesgever."
- "Ik heb steeds wiskundesoftware gebruikt. (...) De praktische situatie is op een hogeschool niet zoals op een universiteit. Om maar een voorbeeld te geven: ik dien steeds mijn computer met eigen middelen te kopen. Gelieve dus de bal niet mis te slaan: vele wiskundeleraars willen absoluut ICT gebruiken en kopen dit zelfs zelf, maar als u les geeft op een hogeschool is wiskunde nooit een prioriteit."

Gebruik van ICT tijdens de examens

In paragraaf 6.2.4 hebben we voor het secundair onderwijs het gebruik van ICT tijdens de examens in kaart gebracht. We merkten toen op dat het gebruik tijdens de les van computeralgebrasystemen en van wiskundige software zich niet noodzakelijk vertaalde naar het gebruik van deze hulpmiddelen tijdens het examen. Op basis van figuur 6.7 kunnen we twee zaken opmerken:

1. 23% van de lesgevers die het gebruik van een wetenschappelijke en/of grafische rekenmachine niet aanleren aan de studenten en het gebruik ervan niet stimuleren, laten de studenten het toestel toch gebruiken tijdens het examen.
2. 55% van de docenten die hun studenten tijdens de les een softwarepakket of computeralgebrasysteem leren gebruiken, voorzien het gebruik ervan niet tijdens het examen.

Indien we deze cijfers bekijken ten opzichte van de verschillende vakken zien we uiteraard dezelfde tendensen.

Voorkennis vanuit het secundair onderwijs

In het enquêteformulier werd eveneens gepolst naar de voorkennis - m.b.t. het gebruik van grafische rekenmachines, computeralgebrasystemen en wiskundige software - van de instromende studenten. Volstaat deze voorkennis? Is deze voorkennis noodzakelijk voor het volgen van de studie? We ontdekten verschillende meningen!

- "Bij een opvraging van de instroom van het academiejaar 2005-2006 bleek dat 40% van de studenten nog nooit gewerkt hebben met de grafische rekenmachine. Dit cijfer leek mij nog te hoog om ze in mijn lessen te gebruiken. Tijdens de lessen projecteer ik wel grafieken uit Derive. Ieder jaar twijfel ik om de grafische rekenmachine te gebruiken, maar ik heb geen steun van de collega's wiskunde, statistiek, financiële verrichtingen,..."
- "Het ontwikkelen van de nodige kennis en vaardigheden om efficiënt met ICT-hulpmiddelen om te gaan is een doel op zich binnen de opleiding Initiële Lerarenopleiding Secundair Onderwijs (ILSO). Voorkennis is dus niet echt vereist. De afgelopen jaren is het wel duidelijk dat de voorkennis van instromende studenten gestaag toeneemt."
- "Er is geen voorkennis vereist vermits het betreffende pakket tijdens het studiejaar in verschillende vakken simultaan wordt aangeleerd en de kennis ervan aldus gradueel wordt opgebouwd."
- "Uit ervaring (ik geef ook ICT-vaardigheden aan de studenten) weet ik dat de voorkennis van studenten m.b.t. ICT te wensen overlaat, maar ik verwacht de volgende jaren een verbetering wat voorkennis van ICT betreft."

6.3.6 Conclusie

Wat kunnen we uit deze rondvraag besluiten?

1. Het gebruik van ICT vindt zeker doorstroming in het eerste jaar bachelor van het hoger onderwijs, maar het aantal gebruikende lesgevers ligt procentueel een stuk lager dan in het secundair onderwijs.
2. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen tijdens de les vertaalt zich niet naar gebruik van diezelfde middelen op het examen. Ook in het secundair onderwijs is dit een gekend fenomeen, maar in het hoger onderwijs gebeurt dit zelfs in twee richtingen!
   - In sommige vakken wordt het gebruik van een grafische rekenmachine niet gestimuleerd of aangeleerd tijdens de les maar mag men het toestel wel gebruiken op het examen.
   - In andere gevallen wordt het gebruik van wiskundige of statistische software wel aangeleerd tijdens de les maar niet toegestaan en/of geëvalueerd tijdens het examen.

3. Uit de opmerkingen van de docenten blijkt dat de infrastructuur of het budget niet altijd voor handen is om het gebruik van wiskundige software in de vakken mogelijk te maken. De lesgevers willen wel, heel graag zelf, maar kunnen niet. Wiskunde is vaak geen hoofdvak en het geld dat nodig is voor het betalen van de licenties wordt bij voorkeur besteed aan andere zaken.

4. Vanuit onze eigen leservaringen dachten we dat het gebruik van ICT in wiskunde en wiskunde-gerelateerde vakken van het eerste jaar bachelor een beeld zou weergeven van het ICT-gebruik in de volledige opleiding. Dit is echter niet altijd correct. In bepaalde richtingen merken de lesgevers op dat in de opleidingsonderdelen van het eerste jaar de basisleerstof wordt opgebouwd (theoretisch, vaak zonder berekeningen). In de opleidingsonderdelen die verder bouwen op deze basis wordt er wel gebruik gemaakt van software of computeralgebraystemen om de bijhorende berekeningen uit te voeren. Dus: indien men geen ICT gebruikt in het eerste jaar bachelor betekent dit niet dat er geen ICT-gebruik is in de volledige opleiding! In deze aanpak kunnen we opnieuw de implementatie van het 'White box-Black box'-principe herkennen, waarbij de 'white box'-fase en de 'black box'-fase verspreid zijn over verschillende opleidingsonderdelen.

5. In verschillende studieprogramma's (van het hoger onderwijs) zijn er vakken opgenomen waar de ICT zelf centraal staat. Omdat de computeralgebrasystemen en andere wiskundige en/of statistische software reeds in deze vakken geïntegreerd worden, gaat men deze hulpmiddelen niet in de andere (wiskunde)vakken gebruiken. Deze situatie komt in het secundair onderwijs minder voor. Soms leren de leerlingen met Excel werken in het vak informatica en wordt het gebruik hiervan dan in een later stadium overgenomen door de leerkracht wiskunde, maar meestal is de integratie van ICT een taak die voornamelijk op de schouders van de wiskundeleerkracht terecht komt.

6.4 ICT in Vlaanderen: PISA en TIMSS

6.4.1 Inleiding

In paragraaf 6.2 en 6.3 hebben we op basis van de resultaten van onze rondvragen een beeld geschetst van het ICT-gebruik in het Vlaamse wiskundeonderwijs (in het bijzonder voor het gebruik van computeralgebrasystemen, wiskundige software en grafische rekenmachines). In deze paragraaf zullen we - op basis van een aantal relevante resultaten voor Vlaanderen uit PISA2000 en TIMSS 2003 - de Vlaamse situatie voor het gewoon secundair onderwijs (met betrekking tot het algemeen gebruik van ICT en computers) vergelijken met het internationale gemiddelde.

6.4.2 PISA

In 2000 bood het PISA-onderzoek aan de deelnemende landen de mogelijkheid om een aantal stellingen over computers en ICT[9] in hun leerlingvragenlijst op te nemen. Vlaanderen was één van de zestien OESO-landen die besloot om deze optie in haar instrument te integreren. Op deze manier verkrijgen we een beeld van hoe vertrouwd de 15-jarigen van 2000 waren om met computers te werken en kunnen we hun gebruik van de computer internationaal gaan vergelijken. In deze paragraaf gaan we kort in op dit aspect van de PISA-onderzoeken. Voor een volledig beschrijving van de resultaten van de Vlaamse leerlingen in PISA2000 verwijzen we naar [23].

Interesse voor computers

Het PISA-onderzoek toonde aan dat gemiddeld 65% van de leerlingen uit de deelnemende OESO-landen een computer gebruikte omdat hen dat heel erg interesseerde. Bovendien vonden gemiddeld 60% van de leerlingen het erg belangrijk om met een computer te kunnen werken. De Vlaamse resultaten leunden nauw aan bij de internationale cijfers: 64% van de Vlaamse jongeren werkte in 2000 met een pc uit interesse en 66% vond het belangrijk om met een computer te kunnen werken.

Welk beeld leverde de vergelijking tussen jongens en meisjes op? In de meeste landen vertoonden jongens een veel grotere interesse voor computers dan meisjes. Ook in Vlaanderen was het verschil tussen jongens en meisjes met betrekking tot hun interesse voor computers opvallend: Vlaamse jongens waren meer geïnteresseerd in computers dan Vlaamse meisjes en toonden ook meer interesse in computers dan het internationale gemiddelde. Toch beweerde 61% van de Vlaamse meisjes dat ze het voor zichzelf belangrijk vonden om met een pc te kunnen werken en gebruikte 54% van hen de computer omdat hen dat erg interesseerde. Bij de jongens was dit respectievelijk 71% en 74%.

[9] PISA2000 onderzoekt over het ICT-gebruik hoeveel 15-jarigen het internet gebruiken om elektronisch te communiceren (e-mailen en chatten).

Inschatten van de eigen computervaardigheden

Interesse voor computers is een belangrijke factor die het effectieve gebruik ervan stimuleert. Uiteraard wordt dit ook door een aantal andere factoren beïnvloed en in PISA2000 ging men dieper in op twee dergelijke factoren: men vroeg aan de leerlingen hoe vertrouwd ze waren met het gebruik van computers en hoe ze hun vaardigheden op dit vlak inschatten.

De Vlaamse leerlingen van de totale leerlingengroep scoorden een positieve waarde voor deze index, maar deze positieve waarde was vooral te danken aan de groep jongens. Zij hadden immers een positiever gevoel over hun computervaardigheden dan de jongens in de deelnemende OESO-landen samen en rapporteerden ook een grotere vertrouwdheid met computers.

Daarnaast verklaarden 69% van de leerlingen van alle deelnemende OESO-landen dat ze het gemakkelijk of heel gemakkelijk vonden om een computer te gebruiken. In Vlaanderen lag dit percentage nog tien procent hoger: 79% van de 15-jarigen beoordeelde het gebruik van een computer als gemakkelijk of heel gemakkelijk.

Het gebruik van computers

In PISA2000 onderzocht men twee aspecten van het computergebruik van 15-jarigen: hoe vaak gebruikten ze de computer thuis en op school? 60% van alle jongeren gebruikte in 2000 thuis bijna dagelijks of minstens wekelijks een computer. Koplopers op dit vlak waren Zweden, Noorwegen, Canada en Australië. In deze landen gebruikten meer dan 70% van de leerlingen minstens wekelijks thuis een computer. Vlaanderen behoorde met een score van 68% net niet tot de kopgroep.

Met een gemiddelde van 36% overheen alle deelnemende OESO-landen lag het percentage leerlingen dat op school dagelijks of minstens enkele keren per week een computer gebruikte een stuk lager. Vlaanderen lag met een score van 32% net onder het OESO-gemiddelde, maar meer dan 70% van de leerlingen gaf wel aan dat ze minstens maandelijks met de computer werkten op school.

Vlaanderen behoorde tot de groep van landen waar drie vierden van de leerlingen in 2000 op school maandelijk of vaker een computer gebruikten. In 2000 was er in Vlaanderen evenwel ook een groep van 15-jarigen (zo'n 15%) die op school nooit een pc gebruikten.

Computergebruik in Vlaanderen

Ruim 88% van de ondervraagde Vlaamse 15-jarigen bezat in 2000 thuis een computer en bijna 47% beschikte thuis eveneens over internet. Wanneer men deze groep van naderbij bekeek, bleek dat 77% minstens enkele keren per week met deze pc werkte. Slechts 3% van de 15-jarigen gebruikte hun computer thuis nooit.

Binnen de Vlaamse steekproef kon men tussen de leerlingen uit de verschillende onderwijsvormen (ASO, BSO en TSO) enkele opmerkelijke verschillen vaststellen. Het percentage leerlingen dat thuis over een computer of internet beschikte varieerde aanzienlijk tussen de verschillende groepen. Van de ondervraagde ASO-leerlingen had 95% thuis een computer en bij de TSO-leerlingen daalde dit cijfer lichtjes tot 91%. Bij de leerlingen uit het BSO viel dit percentage evenwel terug naar 72%.

Uiteraard kan men een computer voor verschillende doeleinden gebruiken. Per onderwijsvorm werd gekeken welke activiteiten de jongeren uitvoerden op hun computer en naar de frequentie waarmee ze dit deden. Van alle leerlingen rapporteerden de leerlingen uit het TSO het meest regelmatige computergebruik: 82% werkte minstens enkele keren per week met een computer. Zowel bij de ASO- als bij de BSO-leerlingen lag dit percentage op ongeveer 75%. Wanneer men tenslotte dieper inging op de activiteiten die de jongeren uitvoerden op de computer, bleken het spelen van spelletjes en het doen aan tekstverwerking de koplopers. Meer dan de helft van de 15-jarigen werkte in 2000 minstens enkele keren per week thuis met een tekstverwerkingsprogramma. Vermoedelijk bestond er een link tussen dit computergebruik en het maken van schooltaken met de pc, maar dit facet werd niet expliciet ondervraagd binnen PISA2000.

Maakten de jongeren thuis gebruik van de computer als 'leerhulp'? In 2000 gebeurde dit in Vlaanderen nog niet echt frequent: minder dan 20% van de 15-jarigen gebruikte de computer regelmatig (d.i. minstens enkele keren per week) als hulp bij het leren. De jongeren van het ASO vertoonden dit gedrag het minst regelmatig en zelfs 40% van hen zei dat ze hun computer nooit voor dit doel gebruikten. Deze cijfers bevestigen de argumentatie van de leerkrachten die evalueren met CAS of wiskundige software vermijden omdat de leerlingen thuis niet kunnen beschikken over de vereiste hulpmiddelen (zie paragraaf 6.2.4).

In een volgende stap werd eveneens onderzocht of het regelmatig gebruiken van een computer enige samenhang vertoonde met de prestaties van de leerlingen. De leerlingen die regelmatig de computer gebruikten en zij die frequent surften op het internet, haalden hogere gemiddelde prestaties op de PISA-testen dan de leerlingen die dit gedrag niet vertoonden. Vooral bij de TSO-leerlingen hing het computer- en ICT-gebruik duidelijk samen met hun prestaties. Voor de leerlingen van het BSO was het opvallend dat het regelmatig uitvoeren van eender welke activiteit met de computer (ook het spelen van spelletjes) positief correleerde met hun leespretaties.

Een laatste opvallend resultaat was dat de leerlingen die aangaven thuis de computer als leerhulp te gebruiken niet beter scoorden dan de leerlingen die dit niet deden. Dit soort computergebruik vertoonde bij geen enkele groep van leerlingen enige samenhang (noch positief noch negatief) met de PISA-resulaten.

6.4.3 TIMSS

Ook in TIMSS 2003 werd de invloed van de socio-economische achtergrond van de leerlingen en de invloed van leerling-, leerkracht-, directie- en schoolkenmerken op de score onderzocht. In TIMSS 2003 werd o.a. de invloed op de score van 'het thuis en op school kunnen beschikken over een computer' en enkele aanverwante variabelen van naderbij bekeken. In deze paragraaf gaan we kort in op deze aspecten van de TIMSS-onderzoeken. We beperken ons opnieuw tot de resultaten van de leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs en van het domein wiskunde. Voor een volledige beschrijving van de resultaten van de Vlaamse leerlingen in TIMSS 2003 verwijzen we naar [78], [56] en [57].

Socio-economische achtergrond van de leerlingen

Alle leerlingen die deelnamen aan het TIMSS-onderzoek vulden een vragenlijst in over hun achtergrond. Er werd o.a. aan de leerlingen gevraagd of ze thuis over een computer of eigen studeertafel konden beschikken. 95% van de Vlaamse leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs hadden thuis een computer en eveneens 95% had een eigen bureau. Dit lag een stuk hoger dan de internationale gemiddelden van resp. 60% en 83%. Bovendien behaalden de leerlingen die thuis een computer en/of een eigen studeertafel hadden een hogere score voor wiskunde. Dit gold zowel in Vlaanderen als internationaal.

Overige kenmerken van de leerlingen

In het tweede jaar van het secundair onderwijs gebruikte 64% van de leerlingen thuis én op school een computer. Internationaal lag dit cijfer een stuk lager, nl. 39%. 26% van de Vlaamse leerlingen gebruikte thuis maar niet op school een computer, slechts 4% had thuis een computer ter beschikking maar gebruikte geen computer op school en amper 1% van deze leerlingen gaven aan dat ze nooit een computer gebruikten. Uit de resultaten bleek bovendien dat de leerlingen die enkel op school een computer gebruikten (en thuis niet), lager scoorden dan de leerlingen die ook thuis oefenden.

Kenmerken van de leerkrachten

Ook de wiskundeleerkrachten van de deelnemende leerlingen vulden een vragenlijst in. 3% van de deelnemende leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs mag (volgens hun wiskundeleerkracht) geen gebruik maken van een rekentoestel tijdens de wiskundeles. Iets meer dan de helft van de leerlingen (nl. 52%) heeft (volgens hun wiskundeleerkracht) geen computer ter beschikking voor het vak wiskunde. 68% van de leerlingen meldden dat ze op school soms (voor wiskunde en/of andere vakken) gebruik maken van een computer.

6.5 Besluit

In dit hoofdstuk werd de eerste onderzoeksvraag van het tweede deelonderzoek behandeld:

Ondersteunen de Vlaamse wiskundeleerkrachten hun wiskundelessen met ICT-hulpmiddelen? Hoe is de integratie van ICT in het Vlaamse wiskundeonderwijs geëvolueerd tussen 2001 en 2005?

Op basis van de resultaten van de enquêtes die we in 2001 en 2005 uitvoerden in het secundair en hoger onderwijs kunnen we deze vraag beantwoorden.
Uit de antwoorden van de deelnemende leerkrachten bleek dat het merendeel van de Vlaamse wiskundeleerkrachten uit het secundair onderwijs hun lessen actief ondersteunden met het gebruik van ICT-hulpmiddelen. In 2005 was deze groep uitgegroeid tot ongeveer 96% van de leerkrachten. Uit de beschrijving van hun ervaringen bleek anderzijds dat het gebruik van ICT tijdens de wiskundeles evenwel geen evidentie is en de integratie van ICT (door tal van moeilijkheden)

een traag en moeizaam proces is. Zoals bleek uit het cijfermateriaal en de kwalitatieve gegevens is de evolutie evenwel positief. Het aantal wiskundeleerkrachten dat effectief en frequent ICT gebruikt, neemt toe. Ook de infrastructuur van de scholen evolueert, maar voldoet nog niet helemaal aan de verwachtingen van de leerkrachten.

Voor de situatie in het hoger onderwijs beschikken we niet over data die een vergelijking tussen 2001 en 2005 mogelijk maakt. We kunnen, uit de rondvraag van 2005 die we voor het hoger onderwijs organiseerden, wel vaststellen dat ook een groot aantal lesgevers uit het hoger onderwijs voor wiskunde en wiskundegerelateerde vakken gebruik maken van ICT-hulpmiddelen. In het eerste jaar bachelor ligt het aantal gebruikers lager dan in het secundair onderwijs. Men kan dit verschil gedeeltelijk verklaren door de opsplitsing van de vakken wiskunde en statistiek in meerdere opleidingsonderdelen. In een aantal opleidingsonderdelen beperkt men zich tot de theorie (of basisleerstof) en pas in latere opleidingsonderdelen gaan de studenten vervolgens zelf gebruik maken van ICT-hulpmiddelen. Ook in het hoger onderwijs is er sprake van een positieve evolutie en zal het gebruik van grafische rekentoestellen en computeralgebrasystemen in de toekomst nog toenemen.

Hoofdstuk 7

Wenken naar de toekomst

7.1 Inleiding

In hoofdstuk 4 bekeken we het voorbereiden, opzetten, uitvoeren en de resultaten van onze twee onderwijsexperimenten. Op basis van een hypothetisch leertraject en vanuit de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra en een aantal didactische principes die het gebruik van een computeralgebrasysteem in de wiskundeles kunnen ondersteunen, werd (voor de leerkrachten in de experimentele conditie) lesmateriaal ontwikkeld. In dit lesmateriaal (zie paragraaf 5.4.2) streefden we naar intensief en efficiënt gebruik van CAS in het lesonderwerp 'integralen'. We voorzagen tal van interventies die het realiseren van de operationele onderzoeksvragen (zie 5.1) konden bewerkstelligen. Zoals reeds opgemerkt in paragraaf 5.2.4 werd het lesonderwerp 'integralen' gekozen vanuit praktische redenen (gemeenschappelijke leerstof voor alle leerlingen uit het zesde jaar ASO), maar we hadden voor het ontwikkelingsonderzoek bijna elk onderwerp uit het leerplan wiskunde van de derde graad kunnen gebruiken.

In dit hoofdstuk behandelen we de vierde en laatste onderzoeksvraag van dit proefschrift:

"*Welke plaats neemt het gebruik van ICT in in het huidige wiskundeleerplan van de derde graad ASO en op welke manier kan het aandeel van het gebruik van een computeralgebrasysteem in dit leerplan nog uitgediept worden?*".

We zullen op basis van de resultaten van de twee onderwijsexperimenten en op basis van de eigen leservaring en de ervaring van de vele wiskundeleerkrachten die meewerkten aan de twee deelonderzoeken, aanbevelingen formuleren m.b.t. het gebruik van computeralgebrasystemen in het wiskundeonderwijs. In het bijzonder zullen we de (nieuwe) leerplannen wiskunde van de derde graad ASO (voor richtingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde) doorlichten en uitbreiden met enkele CAS-aanbevelingen. Hierbij zullen we ons niet beperken tot de pedagogisch-didactische wenken en de inhoudelijke doelstelllingen, maar eveneens de vereiste infrastructuur en het evalueren met ICT (i.h.b. met een computeralgebrapakket) in deze context becommentariëren. We zullen streven naar een intensief, efficiënt en zinvol gebruik van CAS dat aansluit bij de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra en bij de didactische principes die we tijdens ons onderzoek hanteerden. Bovendien zullen de meeste aanbevelingen zich niet beperken tot het gebruik van CAS, maar ook realiseerbaar zijn voor het gebruik van andere ICT-hulpmiddelen zoals het grafisch rekentoestel en applets.

7.2 De leerplannen doorgelicht

In dit hoofdstuk nemen we het leerplan wiskunde van de derde graad ASO (voor de studierichtingen met component wiskunde) onder de loep. We kozen voor "Wiskunde - leerplan A" van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs [95]. Dit (nieuwe) leerplan werd ingevoerd vanaf het schooljaar 2004-2005 en is bijgevolg verschillend van het leerplan dat gebruikt werd tijdens de onderwijsexperimenten. Uiteraard kan men een gelijkaardige oefening (met analoge aanbevelingen en opmerkingen) maken voor de corresponderende (en eveneens nieuwe) leerplannen wiskunde van het Gemeenschapsonderwijs en het Officieel Gesubsidieerd Onderwijs.

7.2.1 Didactische principes

Het gebruik van ICT (zowel grafische rekentoestellen als wiskundige software en computeralgebrasystemen) is in het huidige curriculum voorzien en verplicht. Deze hulpmiddelen worden in de (algemene en inhoudelijke) doelstellingen en de pedagogisch-didactische wenken meermaals vermeld en aanbevolen. Bij de pedagogisch-didactische wenken vinden we bijvoorbeeld volgend citaat: "Om met wiskundige concepten te werken, moeten vaak berekeningen uitgevoerd worden. Enerzijds moet dit leiden tot een voldoende operationele rekenvaar-

digheid, anderzijds tot inzicht in het aanwenden van de gepaste technieken en routineprocedures. Deze berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT." ([95], p. 11)
Anderzijds vinden we ook de vier didactische principes (zie paragraaf 5.2.7) - die tot de basiselementen van ons onderzoek behoren - in dit leerplan wiskunde terug.

1. *Het 'White box-Black box'-principe*

   Alhoewel de term 'White box-Black box'-principe in dit leerplan niet wordt gebruikt of vermeld, worden de wiskundeleerkrachten vanuit deze tekst aangespoord om dit principe te hanteren:

   - "Toch is het zinvol een aantal manuele technieken te onderhouden. Daarbij is de aard van de oefening niet gericht op complexiteit maar op de versterking van het inzicht in de methode, zonder daarbij in extreme oefeningen te vervallen. Een basisniveau van routinerekenvaardigheden blijft zinvol." ([95], p. 13)
   - "De wiskundige technieken en methoden moeten voldoende beheerst worden (al dan niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium)." ([95], p. 6)
   - "Heel wat routinewerk wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. (...) Routinerekenvaardigheden blijven belangrijk voor een snelle schatting. (...) Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de inoefening van rekenvaardigheden minder tijd besteed wordt." ([95], p. 13)

   Men geeft hier duidelijk aan dat de leerlingen niet alle rekenvaardigheden manueel moeten beheersen. De basis- en routinerekenvaardigheden blijven belangrijk, maar bij complexe situaties en technieken mag/moet men overschakelen op het gebruik van een grafische rekenmachine of een computeralgebrapakket. In dit leerplan gaat men een aantal voorbeelden aanreiken (m.b.t. het gebruik van ICT in de wiskundelessen van de derde graad) maar er wordt evenwel nergens concreet 'een lijn getrokken' die aangeeft wat de leerlingen wel en wat niet manueel moet kunnen uitvoeren. Het ontbreken van deze 'lijn' kan men interpreteren als de pedagogische vrijheid van de leerkracht, maar zoals reeds bleek uit de resultaten van onze enquête uit 2005 (zie 6.2), veroorzaakt deze vrijheid eerder een gevoel van onzekerheid. Een leerkracht formuleerde het als volgt: "Als op hoger

niveau wordt beslist dat problemen uit lineaire algebra, limieten, afgeleiden, integralen niet meer ambachtelijk moeten worden opgelost, dan win ik weken. Zolang dit niet gebeurt, werk ik op twee fronten en verlies dus weken want ik wens mijn leerlingen voor alle universiteiten en richtingen voor te bereiden."
In paragraaf 7.2.4 zullen we - rekening houdend met de resultaten van ons onderzoek en de ervaringen vanuit de onderwijsexperimenten - een lijn 'trekken' die aangeeft waar de grens tussen de 'White box'-fase en 'Black box'-fase kan liggen in dit leerplan wiskunde.

2. *Begeleid zelfstandig leren*

   Ook het begeleid zelfstandig leren in combinatie met het gebruik van ICT-hulpmiddelen wordt in dit leerplan aanbevolen: "ICT biedt ook nieuwe impulsen aan het zelfstandig werken en leren van de leerling in de wiskundevorming. Als de gebruikte software krachtig en nauwkeurig genoeg is, kan dit voor de leerlingen een hulpmiddel zijn om meer zelfontdekkend aan het werk te gaan. Wel is het hierbij belangrijk dat leerlingen niet zomaar wat bezig zijn, maar dat zij gericht geleid worden in een exact denkproces. De klasgroepen mogen dan ook niet te groot zijn en er moeten voldoende toestellen beschikbaar zijn." ([95], p. 14)

3. *Differentiatie*

   "Toch moet er aandacht besteed worden aan een gedifferentieerde aanpak van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden, zowel naar inhoud en werkvorm als naar de graad van zelfstandigheid. Dit impliceert dat zowel bijzondere aandacht kan gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling als naar de wiskundig meer begaafde leerling." ([95], p. 15)
   Zoals blijkt uit het bovenstaande fragment wordt in het leerplan een gedifferentieerde aanpak aanbevolen. Men verwacht bovendien dat deze differentiatie zich laat voelen op het niveau van de inhoud en op het niveau van de gebruikte werkvormen. Daarnaast vraagt men expliciet dat er voldoende aandacht wordt besteed aan de meer begaafde leerlingen. Wanneer men deze verschillende facetten gaat combineren, komt men tot een werkwijze zoals we die in de onderwijsexperimenten hebben voorzien, nl. het aanbieden van uitgebreide oefeningenlijsten

- die oefeningen bevatten die voor alle leerlingen toegankelijk zijn,
- die oefeningen bevatten die voor de meer begaafde leerlingen een uitdaging zijn en
- die het parallel hanteren van verschillende werkvormen mogelijk maken.

4. *Vensterdidactiek*

   In het huidige leerplan wiskunde wordt veel aandacht besteed aan de integratie van ICT in het vak wiskunde. Ook het principe van de vensterdidactiek komt hierbij (zonder de naam expliciet te vermelden) ter sprake: "Het gebruik van een rekenmachine of software brengt nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden mee: (...) het vlot wisselen tussen verschillende wiskundige representaties, bijv. tabel, grafiek, functievoorschrift; (...)" ([95], p. 14). Of met andere woorden, het gebruik van deze hulpmiddelen biedt de mogelijkheid om wiskundige begrippen vanuit een numeriek, een grafisch en een algebraïsch gezichtspunt te bekijken.

7.2.2 Instrumentele benadering van computeralgebra

In het huidige leerplan wiskunde - dat we hier onder de loep nemen - vinden we losse fragmenten van de instrumentele benadering terug. De wisselwerking tussen de gebruiker, de taak en het hulpmiddel (zie 3.2.4) ontbreekt echter. In de lijst van *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden van het gebruik van een rekenmachine of software* (zie [95], p. 13-14) geeft men o.a. aan dat men het hulpmiddel kan gebruiken voor het maken van een grafiek, voor het uitvoeren van (lastige) berekeningen en voor het controleren van manueel bekomen resultaten. Echte interactie wordt evenwel nergens expliciet vermeld. Enkel bij de inhoudelijke doelstelling MA4, nl. een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg en de uitgevoerde berekeningen, is er enige sprake van wisselwerking. Deze doelstelling behoort echter tot het keuzeonderwerp 'Mathematiseren en oplossen van problemen' (zie ook p. 266 en p. 269) en wordt bijgevolg niet in elke klasgroep gerealiseerd. Aan deze lijst van *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden van het gebruik van een rekenmachine of software* zouden we daarom zelf de volgende 'mogelijkheid' toevoegen: "interactie tussen leerling, opdracht en ICT-hulpmiddel bij het opstellen, uitvoeren en controleren van de (zelf) ontwikkelde oplossingsmethode". Een aantal andere bijkomende aanpassingen - in het kader van de instrumentele benadering van computeralgebra - zijn opgenomen in paragraaf 7.2.4.

7.2.3 Materiële vereisten

Het curriculum is voorzien van een paragraaf met minimale materiële vereisten. We pikken hier in op die vereisten die gekoppeld kunnen worden aan het gebruik van computeralgebrasystemen en andere ICT-hulpmiddelen. Aan de hand van enkele korte fragmenten uit het leerplan wiskunde willen we hier de noodzaak van de beschikbaarheid van deze minimale infrastructuur en afspraken onderstrepen en bevestigen.

- "Leerkrachten kunnen vlot beschikken over een geavanceerde grafische rekenmachine en wiskundige software voor de didactische ondersteuning van de les." ([95], p. 16)

  Het is vanzelfsprekend dat wiskundeleerkrachten een grafisch rekentoestel en wiskundige software ter beschikking hebben, maar ze moeten deze hulpmiddelen ook kunnen gebruiken en implementeren in hun wiskundelessen. In de verschillende lerarenopleidingen wordt het gebruik van grafische rekenmachines, computeralgebrasystemen en wiskundige software aangeleerd aan de wiskundeleerkrachten in spe (zie 6.2.4, p. 200). Daarnaast zullen zowel de ervaren als de beginnende wiskundeleerkrachten zich regelmatig moeten bijscholen - via georganiseerde nascholingen of zelfstudie - om op de hoogte te blijven van de (nieuwste) mogelijkheden van de ICT-hulpmiddelen en de implementatie ervan in het lesgebeuren.

- "Het is vanzelfsprekend dat de leerlingen zelf beschikken over een grafische rekenmachine of zo goed als permanent kunnen gebruik maken van een computer. Zo zou men een werkblok van computers kunnen voorzien in een wiskundeklas." ([95], p. 16)

  Als het hanteren van een ICT-hulpmiddel (meer bepaald de menu's, de toetsencombinaties, de commando's, de syntaxis,...) een struikelblok is voor een leerling, zal het gebruik van dit hulpmiddel het leerproces van deze leerling belemmeren. Oefening baart kunst en dus zal de leerling door frequent gebruik te maken van het grafisch rekentoestel of van het computeralgebrasysteem het hulpmiddel (sneller) onder de knie krijgen.
  Een eerste voorwaarde hiervoor is uiteraard dat de leerling (regelmatig) kan beschikken over dit hulpmiddel. In veel Vlaamse scholen wordt dit opgelost door de aankoop van een grafisch rekentoestel te verplichten, maar er zijn uiteraard een aantal alternatieven. Een heel goed alternatief wordt hier in dit wiskundeleerplan meegegeven, nl. een werkblok met computers

in de wiskundeklas. Zo'n werkblok biedt een groot aantal voordelen voor de leerkracht en de leerlingen.

- Het klaslokaal bevat nog steeds de klassieke opstelling met centraal de schoolbanken en het bord.
- De leerlingen kunnen zich vrij bewegen tussen hun schoolbank en het werkblok met computers. Op deze manier kan de leerkracht tijdens één lesuur afwisselen tussen verschillende werkvormen. De wiskundeles met computerondersteuning hoeft geen volledig lesuur te duren en ook het pendelen tussen het klaslokaal en de computerklassen wordt overbodig.
- De leerlingen zijn vrij om tijdens oefeningen en toepassingen die werkwijze te kiezen die hen het meest efficiënt lijkt (met of zonder computer) en die hen persoonlijk het beste ligt.

Een goed alternatief zijn uiteraard de open leercentra die reeds in veel scholen voorzien werden.

Tegenstanders zien uiteraard ook een aantal nadelen aan deze werkwijze.

- Te weinig computers:
  Leerlingen kunnen gemakkelijk per twee werken aan één computer. Het onderlinge overleg kan voor beide partijen verrijkend zijn. Deze werkwijze verplicht hen bovendien om de gebruikte werkwijze expliciet uit te spreken en uit te leggen aan hun collega. De leerkracht moet hier evenwel waken over het evenwicht in deze (veelal vaste) duo's van leerlingen. Het is immers de bedoeling dat beide leerlingen een bijdrage leveren aan de oplossing van de oefeningen of het werkblad.

- Chaos:
  Om chaos te vermijden, moet men in de eerste plaats goede en strikte afspraken maken met de leerlingen. Het is niet de bedoeling dat de wiskundeklas een duiventil wordt waarin de leerlingen naar hartelust pendelen tussen het werkblok en hun eigen schoolbank. Anderzijds kan men zo'n werkblok van computers alleen maar ter beschikking stellen van leerlingen die een voldoende graad van zelfredzaamheid en zelfwerkzaamheid hebben bereikt. Men kan dus verwachten dat

een klasgroep uit de derde graad hiervoor meer geschikt is dan een klasgroep uit de tweede graad. Uiteraard kan men deze werkwijze ook hanteren bij bepaalde klasgroepen uit de eerste en de tweede graad, maar hier zal de wiskundeleerkracht het 'verkeer' tussen de klassieke opstelling en het werkblok met computers zelf regelen en in goede banen leiden.

- "Gezien de tijdsinvestering voor het aanleren van een programma is het aangewezen dat in de tweede en derde graad dezelfde of analoge wiskundesoftware gebruikt wordt. (...) Aanvullend overleg is wenselijk met de vakwerkgroepen wetenschappen, economie en informatica om o.m. het wiskundig gebruik van de ICT-hulpmiddelen in die vakken aan te moedigen of toe te lichten." ([95], p. 16)

  Deze aanbeveling in het curriculum is eigenlijk heel erg logisch, maar wordt in veel scholen niet toegepast. Leerkrachten (zowel de wiskundeleerkrachten onderling als de leerkrachten van een school in het algemeen) slagen er vaak niet in om een consensus te bereiken met betrekking tot de implementatie van ICT in een opleiding. Elke leerkracht maakt zijn eigen keuzes of - in het beste geval - werken een paar leerkrachten samen. Dit leidt uiteraard tot bijkomende moeilijkheden die men had kunnen vermijden:

  – Leerlingen uit parallelklassen gebruiken soms compleet verschillende hulpmiddelen tijdens de wiskundelessen, bvb. de ene wiskundeleerkracht eist dat de leerlingen een grafische rekentoestel aankopen en de andere leerkracht gebruikt uitsluitend een computeralgebrapakket tijdens zijn wiskundelessen. Wanneer deze leerlingen in een volgend schooljaar samenkomen in één klasgroep komt de wiskundeleerkracht voor problemen te staan. Hij/zij heeft een klasgroep voor zich met een compleet verschillende achtergrond op het vlak van ICT. Het homogeniseren van deze klasgroep vraagt van de wiskundeleerkracht een extra inspanning en vooral extra tijd.
  – Door het maken van duidelijke afspraken binnen het lerarenkorps kan men ook vermijden dat leerlingen nog in de derde graad verplicht worden om een grafische rekenmachine aan te kopen. In een richting met zes lesuren wiskunde per week valt deze aankoop nog enigszins te verantwoorden (met het oog op een hogere studie), maar in technische richtingen met twee of drie lesuren wiskunde per week is dit onverantwoord! Het gebruik van een computer is hier de eni-

ge logische oplossing. Deze leerlingen zullen in een eventuele latere studie waarschijnlijk het computeralgebrasysteem of de wiskundige software niet meer nodig hebben, maar de computervaardigheden (in de ruimste zin van het woord) die ze in de wiskundelessen hebben geleerd, zullen hen later nog van pas komen. In het ideale geval wacht men bovendien ook niet tot de derde graad om het gebruik van een computer in de wiskundeles te introduceren, maar bouwt men dit in de voorgaande jaren geleidelijk op.

- "Er kan niet van worden uitgegaan dat elke leerling thuis over een computer kan beschikken. Dat impliceert dat in de school oefenmogelijkheden moeten worden voorzien." ([95], p. 16)

  In Vlaanderen werd - in het kader van PISA2000 - aan een grote groep van 15-jarige leerlingen gevraagd of ze thuis over een computer beschikten (zie paragraaf 6.4). Ruim 88% van deze leerlingen beantwoordde deze vraag positief. Vermoedelijk is dit cijfer ondertussen sterk gestegen, maar toch zijn er nog steeds leerlingen die thuis geen computer hebben of dit toestel niet altijd ter beschikking hebben doordat ze het moeten delen met de ouders, broers of zussen. De scholen moeten dit in de mate van het mogelijke opvangen door in de eerste plaats tijdens de lessen zelf voldoende oefenmogelijkheden te voorzien en in de tweede plaats door een computerlokaal na de schooluren ter beschikking te stellen van de leerlingen.

  Daarnaast is het ook belangrijk dat de leerlingen die thuis wel over een computer beschikken, de kans hebben om het gebruikte CAS thuis verder in te oefenen en te gebruiken. Zo kan de school de leerlingen de mogelijkheid bieden om een leerlingenlicentie van het computeralgebrapakket aan te kopen. Misschien behoort het aanbieden van het computeralgebrasysteem of de wiskundige software via het elektronische leerplatform in de toekomst wel tot de mogelijkheden? In een aantal scholen dragen de (ouders van de) leerlingen nu al financieel bij tot het aankopen en onderhouden van de elektronische leeromgeving. Mogelijk kan dit budget (mits een beperkte verhoging van de bijdrage per leerling) ook aangewend worden om een CAS aan te bieden aan alle leerlingen van de school.

Op deze manier vangt men twee vliegen in één klap: het computeralgebrasysteem staat altijd ter beschikking van de leerlingen (zowel op school als thuis) en de school volgt een strikter ICT-beleid waarbij men kiest voor één of twee computeralgebrasystemen die men gradueel invoert in elke opleiding. Dit kan de homogeniteit van de klasgroepen alleen maar positief beïnvloeden!

7.2.4 Een lijn doorheen de inhoudelijke doelstellingen

Reeds bij de aanvang van dit doctoraatsonderzoek stond vast dat één van de 'eindproducten' van ons onderzoek een voorstel van leerplan voor het vak wiskunde (derde graad ASO) zou worden, waarin alle aspecten van het theoretische kader (met name de instrumentele benadering van computeralgebra en de gebruikte didactische principes) en de eigen ervaringen vanuit de onderwijsexperimenten en de lespraktijk verwerkt zouden worden.

Het hypothetisch leertraject (zie paragraaf 5.4.1) - dat aan de basis lag van onze onderwijsexperimenten - was volledig gebaseerd op het (oude) curriculum dat toen in voege was. Het merendeel van de leerkrachten in de experimentele conditie slaagde erin om het gebruik van een computeralgebrasysteem goed te combineren met het bestaande leerplan. Vanuit deze optiek hebben we ervoor gekozen om voor het huidige leerplan wiskunde en met betrekking tot de formulering van de inhoudelijke doelstellingen geen aanpassingen te voorzien. We zullen in deze paragraaf daarom enkel de inhoudelijke doelstellingen onder de loep nemen en aanvullen met een aanbeveling die aangeeft waar en op welke manier men het best gebruik maakt van een computeralgebrasysteem.
Bij het selecteren van de onderwerpen die men bij voorkeur ondersteunt met computergebruik, werd niet alleen gewaakt over een zinvol en efficiënt gebruik. Zoals reeds aangegeven in paragraaf 7.2.1 probeerden we ook een grens af te bakenen tussen de 'White box'-fase en de 'Black box'-fase in alle doelstellingen die hiervoor in aanmerking kwamen. Met andere woorden, we hebben geprobeerd om een lijn te trekken tussen de technieken die de leerlingen nog manueel moeten beheersen en die technieken waarvoor ze een computeralgebrasysteem kunnen aanspreken. We hopen op deze manier een leidraad te zijn voor die wiskundeleerkrachten die twijfelen waar de grens kan/mag liggen. We kunnen evenwel niet garanderen dat deze minimale manuele technieken voor alle opleidingen uit het hoger onderwijs volstaan, maar deze 'grens' werd mede bepaald door onze eigen leservaringen.

We beperken ons evenwel niet tot het 'White box-Black box'-principe. In hoofdstuk 5 bespraken we uitgebreid de interventies die we tijdens onze onderwijsexperimenten hadden voorzien om het wiskundig inzicht van de leerlingen in het lesonderwerp 'integralen' te verbeteren en om de wiskundige creativiteit en de probleemoplossende vaardigheden van de leerlingen te bevorderen. We zullen in het huidige leerplan wiskunde die doelstellingen aanduiden waar we gelijkaardige interventies kunnen voorzien. Voor een detailuitwerking beperken we ons tot een voorbeeld.

Het voorstel van leerplan wordt in een tabelvorm met drie kolommen weergegeven (zie tabel 7.2, p. 247). De eerste kolom bevat de *code* die in het huidige leerplan werd toegekend aan de doelstellingen ([95], p. 32-78). De gebruikte afkortingen verwijzen steeds naar het corresponderende onderwerp. In de tweede kolom staan de *inhoudelijke doestellingen*, letterlijk overgenomen uit dit leerplan [95]. In de derde kolom, *CAS* genaamd, staan korte aanbevelingen door middel van een codewoord.

De codewoorden uit de derde kolom (zie tabel 7.1) geven aan hoe men een computeralgebrasysteem kan inschakelen om de inhoudelijke doelstellingen te bereiken. Het gebruik van een computeralgebrasysteem kan uiteraard ook nog aangevuld en afgewisseld worden met het gebruik van een grafische rekenmachine, dynamische meetkundige software, Excel of applets. In de onderstaande tabel bespreken we eerst de vier verschillende codewoorden. Vervolgens bekijken we (bij wijze van voorbeeld) de kerndoelstellingen van het onderwerp 'matrices en stelsels' en de bijhorende CAS-aanbevelingen in detail. In tabel 7.2 volgt vervolgens het voorstel van leerplan aangevuld met enkele bijkomende toelichtingen.

Code	Omschrijving
zonder	Deze code wordt voorbehouden voor het aanbrengen van (theoretische) onderwerpen waar het gebruik van een computeralgebrasysteem niet onmiddellijk een meerwaarde kan bieden of voor die technieken die tot de basisvaardigheden van de leerlingen moeten behoren en bijgevolg manueel door de leerlingen moeten uitgevoerd worden.
BZL	Begeleid zelfstandig leren: De leerlingen maken met behulp van een computeralgebrasysteem kennis met verschillende aspecten van een wiskundig begrip. Ze worden hierbij begeleid door een werkblad en door de wiskundeleerkracht. De leerkracht bepaalt hierbij zelf per klasgroep en/of per onderwerp in welke mate de leerlingen zelfstandig aan het werk gaan.
WB	'White box-Black box'-principe: In de eerste fase passen de leerlingen de nieuwe technieken of oplossingsmethode manueel toe op eenvoudige opgaves. Het eventuele gebruik van CAS beperkt zich in de 'White box'-fase tot het maken van een grafische voorstelling, het uitvoeren van berekeningen die ze reeds voldoende beheersen of tot het controleren van de verkregen (tussen)resultaten. In de 'Black box'-fase kunnen de leerlingen het computeralgebrasysteem inschakelen voor deze nieuwe technieken en oplossingsmethodes. Het gebruik van CAS moet zich evenwel beperken tot die gevallen van voldoende moeilijkheidsgraad. Indien een leerling in staat is om de berekeningen sneller uit te voeren met de hand dan met de computer, is het gebruik van CAS uit den boze.

Tabel 7.1: Beschrijving van de gebruikte codewoorden

Code	Omschrijving
met	Bij deze doelstellingen mogen de leerlingen onbeperkt gebruik maken van het computeralgebrasysteem. De leerkracht moet er evenwel blijven over waken dat het CAS enkel wordt aangewend in zinvolle situaties.

Tabel 7.1: Beschrijving van de gebruikte codewoorden (vervolg)

Voorbeeld: Matrices en stelsels - kerndoelstellingen (zie p. 257)

AL9	Met behulp van matrices een concreet probleem modelleren.	zonder

Een probleem modelleren m.b.v. matrices is een vertaalproces dat de leerlingen manueel moeten inoefenen en waarbij CAS geen zinvolle bijdrage kan leveren. De nadruk ligt hierbij op de dimensies van de matrices en de (zinvolle) betekenis van het optellen of vermenigvuldigen van matrices.

AL10	Binnen een probleem bewerkingen met matrices uitvoeren: matrices optellen en aftrekken, een matrix met een getal vermenigvuldigen, een matrix transponeren, matrices vermenigvuldigen, machten van matrices berekenen.	WB

De leerlingen zijn reeds vertrouwd met de matrixbewerkingen (leerstof tweede graad) en na een korte opfrissing kan men het rekenwerk bij grote dimensies overlaten aan het computeralgebrasysteem. Op deze manier kan men meer(dere) verschillende problemen behandelen (ook uit andere vakken) en het vertaalproces goed inoefenen.

AL11	Eigenschappen van de bewerkingen van matrices formuleren en gebruiken bij het rekenen met matrices.	zonder

De leerlingen moeten de basiseigenschappen goed beheersen/begrijpen en deze manueel kunnen uitvoeren op matrices met een kleine dimensie.

AL12	Evoluties van blokken gegevens beschrijven met matrices.	zonder

Ook hier is er sprake van een vertaalproces dat de leerlingen manueel moeten inoefenen en waarbij CAS geen zinvolle bijdrage kan leveren.

AL13	De methode van het rijherleiden verklaren en gebruiken voor het oplossen van $m \times n$-stelsels van de eerste graad.	WB
AL14	Vraagstukken oplossen die te herleiden zijn tot het oplossen van een $m \times n$-stelsel van de eerste graad.	WB

De leerlingen moeten inzicht hebben in de methode van het rijherleiden. Daarom is het opnieuw aangewezen om de leerlingen een paar stelsels (met twee of drie vergelijkingen) manueel te laten oplossen. Hierbij is het belangrijk dat alle verschillende 'soorten' aan bod komen: strijdige stelsels, stelsels met één oplossing, overbepaalde stelsels en bijzondere gevallen waar men de oplossing simpelweg kan 'zien'. Het is immers belangrijk dat men de leerlingen toont wanneer het gebruik van CAS zinvol is of net niet. Indien de leerlingen vertrouwd zijn met de methode van het rijherleiden is de 'White box'-fase volbracht en kan men het CAS gebruiken als 'Black box'. Men kan hierbij ofwel procedures of commando's gebruiken die de rijbewerkingen één voor één uitvoeren ofwel het CAS gebruiken om de stelsels onmiddellijk op te lossen. Het lijkt ons aangewezen om in dit stadium zich nog te concentreren op de rijbewerkingen en het rechtstreeks oplossen van het stelsel enkel te gebruiken als controlemiddel.

In de volgende tabellen wordt het voorstel van leerplan volledig uitgeschreven.

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	ANALYSE	
AN1	Een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven.	zonder
AN2	Met behulp van de beschikbare analysekennis problemen wiskundig modelleren en oplossen.	met
AN3	Bij het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, het omvormen van functievoorschiften, het berekenen van afgeleiden of integralen op een verantwoorde wijze gebruik maken van rekenregels, formules en manuele rekentechnieken.	zonder
AN4	Bij het onderzoeken van functies, het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, bij berekeningen van afgeleiden en bij het oplossen van problemen die geformuleerd zijn met functies, op een verantwoorde wijze gebruik maken van ICT-middelen.	met
	1. Precalculus	
	1.1 Veeltermfuncties, rationale en irrationale functies	
	KERNDOELSTELLINGEN	
AN5	Op een grafiek van een functie eventuele symmetrieën, het stijgen, dalen of contstant zijn, het teken, de eventuele nulpunten, de eventuele extrema aflezen.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan wiskunde met intensieve CAS-ondersteuning

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AN6	Bij concrete problemen die te herleiden zijn tot een aspect van een veeltermfunctie, rationale functie of irrationale functie de wiskundige vertaling maken en het probleem met ICT oplossen.	met
AN7	Delingen van veeltermen uitvoeren.	WB
AN8	Voor geschikte domeinen een verband leggen tussen de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$, en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$.	BZL
	VERDIEPING	
AN9	Uit de grafiek van een functie met voorschrift $f(x)$ de grafiek van de functies met voorschrift $f(x)+k$, $f(x+k)$, $kf(x)$ en $f(kx)$ grafisch opbouwen.	BZL
AN10	Kenmerken van (eenvoudige) samengestelde functies afleiden uit de kenmerken van de functies waaruit de functie is samengesteld.	zonder
	UITBREIDING	
AU1	De invloed van het functievoorschrift onderzoeken bij het verschuiven van een assenstelsel.	BZL
AU2	Bewerkingen uitvoeren op voorschriften van rationale functies.	zonder
AU3	Irrationale vergelijkingen oplossen die gevormd worden door een som van een eerstegraadsvorm en een elementaire irrationale vorm.	WB

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	1.2 Exponentiële en logaritmische functies	
	KERNDOELSTELLINGEN	
AN11	De betekenis van de uitdrukking a^b, met $a > 0$ en b rationaal, uitleggen.	zonder
AN12	Exponentiële groeiprocessen onderzoeken en daarbij gebruik maken van de begrippen beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.	zonder
AN13	De grafiek van de functie $f(x) = b.a^x$ tekenen en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen/dalen en asymptotisch gedrag van de grafiek aflezen en beschrijven.	zonder
AN14	Het verband tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log x$ bespreken aan de hand van grafieken en tabellen.	BZL
AN15	Bij grafieken van functies van de vorm $f(x) = b.a^x$ en $f(x) = {}^a\log x$ het voorschrift bepalen.	met
AN16	Basiseigenschappen van logaritmen bewijzen.	zonder
AN17	Eigenschappen van exponenten en logaritmen gebruiken in berekeningen.	zonder
AN18	Vergelijkingen en ongelijkheden vanuit exponentiële en logaritmische functies oplossen.	WB
AN19	Vraagstukken en problemen, die vertaald kunnen worden naar problemen i.v.m. exponentiële en logaritmische functies, oplossen en exponentiële en logaritmische functies gebruiken als modellen.	met

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	UITBREIDING	
AU4	Logaritmische schalen en logaritmisch papier gebruiken.	BZL
	1.3 Goniometrische functies	
	KERNDOELSTELLINGEN	
AN20	Het verband leggen tussen graden en radialen.	zonder
AN21	De grafieken van $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ en $f(x) = \tan x$ tekenen.	zonder
AN22	Domein, bereik, periodiciteit, stijgen/dalen, extrema van de functie $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ en $f(x) = \tan x$ aflezen van de grafieken en beschrijven.	zonder
AN23	De grafiek van een functie met voorschrift $f(x) = a \sin(b(x+c)) + d$ schetsen en de invloed van de parameters uitleggen.	BZL
AN24	Uit de grafiek van een algemene sinusfunctie het voorschrift afleiden en de algemene sinusfunctie gebruiken als model.	met
AN25	De begrippen amplitude, evenwichtsstand, faseverschuivng en periode gebruiken bij een periodiek verschijnsel.	met
AN26	Vergelijkingen van de vorm $a. \sin(b(x+c)) + d = e$ oplossen.	WB
AN27	Ongelijkheden van de vorm $a. \sin(b(x+c)) + d \leq e$ (of $> e$) oplossen.	WB

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AN28	Problemen oplossen waarbij gebruik gemaakt wordt van een goniometrisch verband, o.m. over periodieke verschijnselen die beschreven worden met een algemene sinusfunctie.	met
AN29	Som- en verschilformules, verdubbelingsformules en formules van Simpson gebruiken om goniometrische uitdrukkingen te vereenvoudigen, vergelijkingen op te lossen en eenvoudige identiteiten te bewijzen.	WB
	VERDIEPING	
AN30	De grafieken van de standaard cyclometrische functies tekenen, het verloop beschrijven en het verband met $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ bespreken.	BZL
	2. Afgeleiden en integralen	
	KERNDOELSTELLINGEN	
AN31	De afgeleide gebruiken als maat voor de ogenblikkelijke verandering van een functie en met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek.	zonder
AN32	Het begrip afgeleide herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde.	zonder
AN33	De eerste en tweede afgeleide van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.	WB
AN34	Extremumproblemen wiskundig modelleren en oplossen.	met

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AN35	Het verloop van een functie onderzoeken, in het bijzonder voor veeltermfuncties en rationale, irrationale, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, met beperking van de moeilijkheidsgraad.	met
AN36	De formule voor de afgeleide van enkele basisfuncties bewijzen.	zonder
AN37	Limieten van functies bepalen en het asymptotisch gedrag van een functie onderzoeken.	met
AN38	Het verband leggen tussen het begrip bepaalde integraal en de oppervlakte tussen de grafiek van een functie en de horizontale as.	BZL
AN39	Het begrip bepaalde integraal herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde.	zonder
AN40	De bepaalde en de onbepaalde integraal van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.	WB
AN41	Het verband leggen tussen de begrippen bepaalde integraal en primitieve functies.	BZL
	UITBREIDING	
AU5	De regel van de l'Hopital toepassen bij het bepalen van limieten.	WB
AU6	De integraal van een rationale functie bepalen steunend op het splitsen in partieelbreuken.	met

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AU7	Het begrip integraal gebruiken bij het bepalen van manteloppervlakten en booglengten.	met
	UITBREIDING	
AU8	Bij een probleem, met de middelen van de analyse, een model opstellen en dat gebruiken om het probleem op te lossen.	met
	3. Keuzeonderwerpen	
	3.1 Differentiaalvergelijkingen	
DV1	In een model, het verband tussen de verandering van een variabele en de optredende variabelen weergeven door een differentiaalvergelijking.	zonder
DV2	Eenvoudige differentiaalvergelijkingen oplossen.	WB
DV3	Vraagstukken oplossen waarbij differentiaalvergelijkingen gebruikt worden.	met
	3.2 Convergentie van een reeks	
CR1	De convergentie van een reeks onderzoeken en gebruiken in toepassingen.	$\left\{\begin{array}{l}\text{BZL}\\ \text{WB}\end{array}\right.$
CR2	De formule van Taylor en Maclaurin gebruiken om een functie te benaderen door een veeltermfunctie.	met

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	3.3 Numerieke methoden	
NM1	In concrete situaties, numerieke methodes toepassen om de oplossingen van vergelijkingen te vinden.	{ BZL met
NM2	In praktijkvoorbeelden de afgeleide in een punt numeriek bepalen.	met
NM3	In concrete situaties, toepassingen in verband met integralen numeriek berekenen.	{ BZL met
	DISCRETE WISKUNDE	
	1. Rijen en dynamische processen	
	KERNDOELSTELLINGEN	
DI1	De convergentie of divergentie van een rij met voorbeelden illustreren.	BZL
DI2	Limieten van eenvoudige rijen bepalen.	WB
DI3	Problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen.	met
	2. Keuzeonderwerp: Iteratie	
IT1	De begrippen baan en dekpunt illustreren bij eenvoudige voorbeelden.	BZL
IT2	De dekpunten van een iteratie bepalen.	WB

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
IT3	Het belang van de startwaarde voor de baan bij een iteratie illustreren met een voorbeeld.	BZL
IT4	Soorten banen en dekpunten bij een iteratief proces onderscheiden met behulp van ICT-middelen.	met
IT5	Het verschil tussen een aantrekkend of afstotend karakter van een dekpunt illustreren.	BZL
IT6	De periodiciteit van een baan onderzoeken.	met
IT7	Vraagstukken in verband met iteraties oplossen.	met
	3. Telproblemen	
	KERNDOELSTELLINGEN	
DI4	Systematisch mogelijkheden tellen in situaties waarin herhalingen zijn toegestaan en in situaties waarin herhalingen niet voorkomen.	zonder
DI5	Het binomium van Newton en de relaties in de driehoek van Pascal gebruiken.	WB
	ALGEBRA	
	1. Complexe getallen	
	KERNDOELSTELLINGEN	
AL1	De definitie van een complex getal geven.	zonder
AL2	Complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AL3	Een complex getal meetkundig voorstellen.	zonder
AL4	Tweedegraadsvergelijkingen in één complexe onbekende oplossen.	WB
AL5	De goniometrische vorm van een complex getal bepalen.	WB
AL6	Twee complexe getallen in goniometrische vorm vermenigvuldigen en delen.	zonder
AL7	De n-de macht berekenen van een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm.	zonder
AL8	De n-de machtswortels uit een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm, berekenen.	zonder
	UITBREIDING	
CU1	Het verband tussen de bewerkingen met complexe getallen en een meetkundige voorstelling.	BZL
CU2	Het aantal en de aard van de oplossingen van een veeltermvergelijking met reële coëfficiënten bepalen met behulp van de stelling van d'Alembert.	BZL
	2. Keuzeonderwerp: Fractalen	
FR1	Aan de hand van een recursief voorschrift een dynamisch systeem in het complexe vlak beschrijven.	BZL

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	3. Matrices en stelsels	
	KERNDOELSTELLINGEN	
AL9	Met behulp van matrices een concreet probleem modelleren.	zonder
AL10	Binnen een probleem bewerkingen met matrices uitvoeren: matrices optellen en aftrekken, een matrix met een getal vermenigvuldigen, een matrix transponeren, matrices vermenigvuldigen, machten van matrices berekenen.	WB
AL11	Eigenschappen van de bewerkingen van matrices formuleren en gebruiken bij het rekenen met matrices.	zonder
AL12	Evoluties van blokken gegevens beschrijven met matrices.	zonder
AL13	De methode van het rijherleiden verklaren en gebruiken voor het oplossen van $m \times n$-stelsels van de eerste graad.	WB
AL14	Vraagstukken oplossen die te herleiden zijn tot het oplossen van een $m \times n$-stelsel van de eerste graad.	WB
	VERDIEPING	
AL15	Een $m \times n$-stelsel met één parameter bespreken.	WB
AL16	De voorwaarde opstellen waaronder een matrix een inverse matrix heeft.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AL17	UITBREIDING De inverse matrix van een reguliere matrix berekenen en de werkwijze gebruiken bij het oplossen van stelsels.	WB
EW1	Een determinant behorend bij een vierkante matrix definiëren en gebruiken in meetkundige toepassingen.	$\left\{ \begin{array}{l}\text{zonder}\\ \text{WB}\end{array}\right.$
EW2	De eigenwaarden en bijhorende eigenvectoren van een reguliere matrix berekenen.	WB
	4. Keuzeonderwerpen	
	4.1 Lineaire programmering	
LP1	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en/of symbolisch noteren.	WB
LP2	Een ongelijkheid van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.	WB
LP3	Een stelsel van twee ongelijkheden van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.	WB
LP4	Een eenvoudig probleem op lineair programmeren met twee veranderlijken oplossen.	met
	4.2 Financiële algebra	
FA1	Het verschil uitleggen tussen enkelvoudige en samengestelde interest.	BZL

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
FA2	Een jaarlijkse rentevoet omzetten in een gelijkwaardige maandelijkse, trimestriële of semestriële rentevoet en omgekeerd.	zonder
FA3	Een aantal beleggingsvormen vergelijken en het nettorendement ervan berekenen.	BZL
FA4	De eindwaarde en het termijnbedrag berekenen bij een postnumerando kapitaalsvorming.	met
FA5	Het te lenen bedrag en het termijnbedrag berekenen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit.	met
FA6	Het bedrag berekenen dat moet betaald worden als de schuld wordt afgelost voor de eindvervaldag.	met
FA7	Het termijnbedrag berekenen bij een variabele rentevoet.	met
FA8	Het verschil uitleggen tussen een lening met constante annuïteit en een lening met constante kapitaalsaflossing.	BZL
FA9	Een aflossingstabel interpreteren.	zonder
FA10	Uit een reclameaanbieding het soort consumentenkrediet herkennen en de gegevens ervan controleren.	met
FA11	In verband met de aangeleerde begrippen informatie verzamelen en interpreteren.	zonder
FA12	De aangeleerde begrippen kaderen binnen de actuele situatie.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	4.3 Getaltheorie	
GT1	Aantonen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan.	zonder
GT2	De stelling van de unieke ontbinding van getallen in priemfactoren formuleren en bewijzen.	zonder
GT3	Het algoritme van Euclides voor het bepalen van de grootste gemeenschappelijke deler van twee natuurlijke getallen verantwoorden en toepassen.	zonder
GT4	Problemen oplossen met betrekking tot priemgetallen, de grootste gemeen- schappelijke deler, het kleinste gemeenschappelijk veelvoud en eigenschappen van de deelbaarheid van gehele getallen.	zonder
GT5	De stellingen van Fermat en Wilson formuleren, verantwoorden en toepassen.	zonder
	MEETKUNDE	
	1. Ruimtemeetkunde	
	KERNDOELSTELLINGEN	
ME1	Vectoren en coördinaatgetallen gebruiken om punten te bepalen in de ruimte.	zonder
ME2	De basiseigenschappen van een reële vectorruimte (beperkt tot dimensie twee en drie) formuleren en gebruiken.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
ME3	Vectoren en coördinaatgetallen en de bewerkingen ervan gebruiken om problemen in ruimtelijke situaties op te lossen.	WB
ME4	Eigenschappen over de ligging van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren, in het bijzonder de loodrechte stand van rechten, van een rechte en een vlak en van vlakken en hoeken tussen rechten en tussen vlakken.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{BZL} \\ \text{WB} \end{array} \right.$
ME5	Rechten en vlakken door vergelijkingen voorstellen en hun onderlinge ligging bespreken.	WB
ME6	Afstanden tussen punten, rechten en vlakken berekenen.	WB
ME7	Hoeken tussen rechten, tussen rechten en vlakken en tussen vlakken berekenen.	WB
ME8	Meetkundige problemen met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen.	met
	UITBREIDING	
RU1	De onderlinge ligging van een bol en een rechte en van een bol en een vlak onderzoeken.	BZL
RU2	Enkele krommen en oppervlakken (analytisch) beschrijven.	WB
RU3	Transformaties in de ruimte beschrijven.	WB

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	2. Keuzeonderwerpen	
	2.1 Analytische meetkunde A	
AM1	De parabool, ellips en hyperbool als meetkundige plaatsen definiëren en hun eigenschappen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen.	{ BZL WB
AM2	Poolcoördinaten gebruiken om krommen voor te stellen.	met
AM3	Parametervergelijkingen gebruiken om krommen te bestuderen.	met
AM4	Meetkundige plaatsen en krommen bestuderen door ze voor te stellen door een gepaste vergelijking.	WB
	2.2 Analytische meetkunde B[1]	
AM5	Punten en rechten beschrijven t.o.v. een affiene en euclidische ijk.	zonder
AM6	Meetkundige plaatsen en krommen bestuderen door ze voor te stellen door een gepaste vergelijking.	WB
AM7	Punten en rechten beschrijven in het gecompleteerde vlak.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

[1] In het leerplan wiskunde lezen we de volgende bijkomende opmerking: "Aanbeveling aantal lestijden: ca 60. Opmerking: Gezien het aantal voorziene lestijden kan dit onderwerp enkel behandeld worden als thema binnen bijkomende lestijden van de vrije ruimte. Onderdelen kunnen eventueel als studieopdracht aan de leerlingen gegeven worden." Voor dit onderwerp is er bijgevolg geen ruimte in het eigenlijke vak wiskunde (zes lesuren per week).

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
AM8	Affiene eigenschappen van kegelsneden in het gecompleteerde vlak onderzoeken en toepassen.	$\left\{\begin{array}{l}\text{BZL}\\\text{WB}\end{array}\right.$
AM9	Euclidische eigenschappen van kegelsneden onderzoeken en toepassen.	$\left\{\begin{array}{l}\text{BZL}\\\text{WB}\end{array}\right.$
	STATISTIEK EN KANSREKENEN	
	1. Statistiek	
	KERNDOELSTELLINGEN	
SK1	Statistische gegevens en grafische voorstellingen van statistische gegevens interpreteren.	zonder
SK2	Aan de hand van concrete voorbeelden aangeven dat men enkel op basis van aselecte steekproeven uitspraken kan doen over de ganse populatie en dat bij elk statistisch experiment toeval een rol speelt.	zonder
SK3	In betekenisvolle situaties, gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling, en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling.	BZL
SK4	Het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren en grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.	BZL

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
SK5	Bij een normale verdeling de relatieve frequentie van een verzameling gegevens met waarden tussen twee gegeven grenzen, met waarden groter dan een gegeven grens, of met waarden kleiner dan een gegeven grens, interpreteren als de oppervlakte van bijhorende gebied onder de normale verdeling.	BZL
SK6	Bij een concreet steekproefresultaat i.v.m. proporties een correcte statistische uitspraak formuleren, gebruik makend van een foutenmarge en het bijbehorende betrouwbaarheidsniveau.	BZL
	2. Keuzeonderwerpen	
	2.1 Lineaire regressie en correlatie	
LR1	Bij een reeks statistische gegevens van twee variabelen op basis van een grafiek eventuele lineaire verbanden aangeven.	WB
LR2	Bij concrete voorbeelden de betekenis van de correlatiecoëfficiënt uitleggen.	WB
LR3	Met behulp van ICT bij statistische gegevens van twee variabelen met een grote correlatie de regressielijn bepalen en hiermee interpoleren en extrapoleren.	met
	2.2 Toetsen van hypothesen	
TH1	Binnen een probleemsituatie van een eenvoudige hypothesetoets de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en P-waarde uitleggen.	zonder

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
TH2	Bij een onderzoek waar proporties voorkomen de nulhypothese en alternatieve hypothese formuleren en met behulp van ICT de P-waarde berekenen.	BZL
	3. Kansrekenen	
	KERNDOELSTELLINGEN	
SK7	Systematisch tellen bij het berekenen van kansen, gebruik maken van een kansenboom, de som- en producten complementregel voor kansen toepassen en herkennen wanneer gebeurtenissen onafhankelijk zijn van elkaar.	zonder
SK8	De voorwaardelijke kans en de regel van Bayes gebruiken om kansproblemen op te lossen.	zonder
SK9	Van een toevalsvariabele de kansverdeling opstellen, de verwachtingswaarde en standaardafwijking berekenen en interpreteren en het verband leggen met de begrippen 'gemiddelde' en 'standaardafwijking' uit de statistiek.	WB
SK10	Kansen uitrekenen bij normaalverdeelde gegevens en de normale verdeling als model gebruiken om kansen te bepalen.	WB
SK11	Vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar het model van de binomiale verdeling en de bijhorende kansen berekenen met behulp van ICT.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{BZL} \\ \text{WB} \end{array} \right.$

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Code	Inhoudelijke doelstelling	CAS
	KEUZEONDERWERP	
	Mathematiseren en oplossen van problemen	
MA1	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.	met
MA2	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.	met
MA3	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.	met
MA4	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg en de uitgevoerde berekeningen.	met
MA5	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.	met
	ONDERZOEKCOMPETENTIES	
	KERNDOELSTELLINGEN	
OC1	Zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.	met
OC2	Een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.	met
OC3	De onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.	met

Tabel 7.2: Voorstel leerplan met intensieve CAS-ondersteuning (vervolg)

Een aantal van de geformuleerde CAS-aanbevelingen worden in het onderstaande overzicht voorzien van bijkomend commentaar.

Code	Bijkomende toelichting	Pag.
AN35	De (meer begaafde) leerlingen kunnen nu een hogere moeilijkheidsgraad aan en zelfs de stuksgewijs gedefinieerde functies behoren tot de mogelijkheden.	252
AN40	De manuele rekentechnieken worden beperkt tot het splitsen van integralen, integratie door substitutie en partiële integratie en dit voor vrij eenvoudige oefeningen die het nut en de kracht van deze technieken duidelijk maken.	252
AU5 AU6	Door het gebruik van een computeralgebrasysteem kan deze inhoudelijke doelstelling opnieuw verschoven worden naar de kerndoelstellingen.	252
CR1	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' kan men het begrip 'convergentie van een reeks' herhalen en uitdiepen. Tijdens de oefeningen en toepassingen maken we steeds gebruik van het computeralgebrasysteem.	253
NM1	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' kan men het begrip 'numerieke methode' aanbrengen. Tijdens de oefeningen en toepassingen maken we steeds gebruik van het computeralgebrasysteem.	254
NM3	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' kan men de verschillende numerieke methodes aanbrengen. Tijdens de oefeningen en toepassingen maken we steeds gebruik van het computeralgebrasysteem.	254

Code	Bijkomende toelichting	Pag.
DI1	Het gebruik van 'begeleid zelfstandig leren' kan de leerkracht hier helpen om de verschillende beginsituaties van de leerlingen in eenzelfde klasgroep op te vangen, immers "In de tweede graad is 'rijen' een onderdeel van het leerplan voor leerweg vijf, maar niet voor leerweg vier. Zo hebben de leerlingen uit leerweg vijf al kennis gemaakt met enkele notaties en begrippen i.v.m. rijen (...)." ([95], p. 46). In de derde graad komen deze leerlingen uit leerweg vier en vijf (met in de tweede graad respectievelijk vier en vijf lestijden wiskunde per week) mogelijk samen in eenzelfde klasgroep.	254
EW1	Het codewoord 'zonder' heeft hier betrekking op het aanbrengen en definiëren van het begrip 'determinant'. Voor het berekenen van determinanten en het gebruik ervan in toepassingen bevelen we voor het 'White box-Black box'-principe aan.	258
FA11	Uiteraard kan men de computer wel aanwenden om informatie te verzamelen op het internet.	259
ME4	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' kan men de verschillende begrippen en eigenschappen aanbrengen. Tijdens de oefeningen en toepassingen opteren we voor het gebruik van het 'White box-Black box'-principe.	261
AM1 AM8 AM9	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' kan men de verschillende begrippen en eigenschappen aanbrengen. Tijdens de oefeningen en toepassingen opteren we voor het gebruik van het 'White box-Black box'-principe.	262
SK3-6	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' en simulaties kan men de verschillende begrippen en eigenschappen aanbrengen.	263

Code	Bijkomende toelichting	Pag.
SK11	Met behulp van 'begeleid zelfstandig leren' kan men de verschillende begrippen aanbrengen. Tijdens de oefeningen en toepassingen opteren we voor het gebruik van het 'White box-Black box'-principe.	265
MA4	In combinatie met het gebruik van computeralgebrasystemen sluit deze inhoudelijke doelstelling nauw aan bij de implementatie van theorie van de instrumentele benadering van computeralgebra in de lespraktijk. Jammer genoeg wordt het onderwerp 'Mathematiseren en oplossen van problemen' beschouwt als een apart keuzeonderwerp dat vermoedelijk slechts door een beperkt aantal leerkrachten wordt aangesneden. De vijf inhoudelijke doelstellingen van dit keuzeonderwerp kan men echter ook verweven met een groot aantal van de voorgaande doelstellingen. Het lijkt ons dan ook aangewezen om dit onderwerp niet apart te behandelen maar het te integreren in het vak wiskunde en dit gedurende de volledige derde graad.	266

Opmerking:

Het veelvuldig voorkomen van het codewoord 'BZL' in tabel 7.2 zou de indruk kunnen wekken dat de leerlingen alle wiskunde zelf moeten ontdekken en dat er voor de 'zuivere' wiskunde in de derde graad van het secundair onderwijs geen plaats meer is. Dit is zeker niet de bedoeling. BZL moet men beschouwen als een werkvorm die de aanzet kan zijn voor het verder exploreren en eventueel zelfs abstraheren van de wiskunde. Ook in het secundair onderwijs moet er ruimte blijven voor wiskunde-om-de-wiskunde. We moeten er over waken dat wiskunde niet gedegradeerd wordt tot een hulpwetenschap! We willen hier dan ook waarschuwen voor de gevaren van deze evolutie met de woorden van Van Maldeghem die deze evolutie in 1995 reeds waarnam: "Specifiek is er nu de stroming die, wat het wiskundeonderwijs betreft, blijkbaar alleen de toegepaste wiskunde wil aanleren. Op die manier wordt ook de wiskunde zelf ontzield en bevordert men behalve de teloorgang van het creatief denken, ook nog eens de negering van de culturele waarde van wiskunde. (...) Door de wiskunde te degraderen tot hulpje van praktische problemen - wat dat ook moge inhouden - zullen de leerlingen mijns inziens nooit meer de volle schoonheid en grote culturele waarde van de wiskunde ervaren. (...) Weinigen zullen - op latere leeftijd - zich nog aangesproken voelen tot wiskunde-om-de-wiskunde (en zo zijn er ook nodig!) omdat er per definitie altijd een praktisch doel was." ([79], p. 398-399)

7.2.5 Evalueren met CAS

In het huidige leerplan wiskunde dat we hier onder de loep nemen, wordt evalueren met ICT sterk aangeraden: "In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie. De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan." ([95], p. 92)

Uit de resultaten van de enquête die we in 2005 uitvoerden in het secundair onderwijs bleek duidelijk dat deze aanwijzing goed opgevolgd werd door de leerkrachten die gebruik maken van grafische rekentoestellen (zie paragraaf 6.2.4, p. 206). Enkel indien de leerlingen niet beschikken over een eigen grafische rekenmachine wordt het gebruik van de GRM niet doorgetrokken naar de examens en toetsen. Maar uit de resultaten van deze enquête bleek eveneens dat het gebruik van CAS en wiskundige software tijdens toetsen en examens nog niet ingeburgerd as in de wqiskundelessen van het secundair onderwijs. Slechts een vierde van de leerkrachten die tijdens de wiskundeles (af en toe) gebruik maken van een computeralgebrasysteem of wiskundige software gaven in de enquête aan dat de leerlingen soms kunnen beschikken over een computer tijdens een toets of examen. De beperkte doorstroming van deze hulpmiddelen (van de lessen naar de evaluatiemomenten) wordt mede veroorzaakt door een aantal dilemma's waarmee de leerkrachten kampen:

1. *Evalueren we tijdens een toets met CAS-ondersteuning wel de wiskundekennis en -vaardigheden van de leerlingen?*

   Het is belangrijk dat in een toets de leerlingen niet geconfronteerd worden met nieuwe commando's en mogelijkheden van het computeralgebrasysteem. Indien de leerlingen het computeralgebrasysteem voldoende onder de knie hebben, zal het CAS tijdens de toets louter een hulpmiddel zijn (zoals het wetenschappelijk rekentoestel dit was in het verleden) en kunnen ze zich ten volle concentreren op de eigenlijke wiskundevragen. Met andere woorden: evalueren met CAS kan enkel plaatsvinden op het ogenblik dat de leerlingen voldoende vertrouwd zijn met het computeralgebrasysteem en de syntaxis van de gekende commando's voor hen geen struikelblok meer is. Anderzijds kan het 'geknoei' van een leerling en de bijhorende foutmeldingen van het computeralgebrasysteem een aanwijzing zijn dat de leerling de wiskundige begrippen onvoldoende beheerst.

2. *Mogen de leerlingen bij elke toets en examen beschikken over het computeralgebrasysteem?*

   Wanneer men gebruik maakt van een computeralgebrasysteem hebben alle leerlingen hetzelfde hulpmiddel ter beschikking met dezelfde instellingen. Misbruik van het geheugen van hun toestel is onmogelijk doordat ze geen materiaal van thuis meebrengen. Door het verbreken van de internetverbinding vermijdt men bovendien dat de leerlingen onderling kunnen communiceren of informatie kunnen opzoeken op het internet. Hierdoor is het dus niet meer strikt noodzakelijk om theorie en oefeningen van elkaar te scheiden.
   Mogen de leerlingen de computer gebruiken voor alle oefeningen? Dit hangt af van de vraagstelling die de leerkracht gebruikt. Indien de leerkracht manuele technieken of de kennis van rekenregels en eigenschappen wenst te evalueren, kan hij er bijvoorbeeld voor zorgen dat de opgave zodanig geformuleerd is dat het gebruik van een computeralgebrasysteem zich beperkt tot de controle van het resultaat.

   Voorbeeld:
   Vereenvoudig zo ver mogelijk. Gebruik geen decimale benaderingen!
   $2.({}^2\log 7 + 1) =$

3. *Is evalueren met CAS in de praktijk wel haalbaar?*

   Dit hangt uiteraard af van de infrastructuur van de school en de grootte van de klasgroep. Indien elke leerling tijdens het evaluatiemoment kan beschikken over een eigen computer, is er geen enkel probleem. Indien dit niet het geval is, zal de leerkracht hiervoor oplossingen moeten zoeken. We zetten hier enkele mogelijkheden op een rijtje:

- De leerlingen worden verdeeld over twee computerklassen en een collega-leerkracht neemt één van beide computerklassen onder zijn hoede.
- Misschien kampt een collega-leerkracht wel met gelijkaardige problemen (bv. voor het uitvoeren van een labo fysica of scheikunde). In samenspraak met deze leerkracht kan men de klasgroep in twee deelgroepen opsplitsen en kan de eerste groep de wiskundetoets maken, terwijl de tweede groep opgevangen wordt door de andere leerkracht.
- De evaluatie zelf wordt opgesplitst in twee delen (bv. theorie en oefeningen) en de leerlingen beschikken elk gedurende een half lesuur over een computer.

7.2.6 Besluit

In dit hoofdstuk concentreerden we ons op de vierde en laatste onderzoeksvraag van dit doctoraatsproefschrift:

"*Welke plaats neemt het gebruik van ICT in in het huidige wiskundeleerplan van de derde graad ASO en op welke manier kan het aandeel van het gebruik van een computeralgebrasysteem in dit leerplan nog uitgediept worden?*".

Uit een korte analyse van het huidige leerplan wiskunde voor de derde graad ASO (richtingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde) bleek dat het gebruik van ICT voorzien en verplicht was en dit zowel tijdens de les als tijdens de evaluatiemomenten. De ICT-hulpmiddelen werden in de doelstellingen en de pedagogisch-didactische wenken meermaals vermeld en aanbevolen. Men gaat bovendien een aantal voorbeelden aanreiken, in het bijzonder om het 'White box-Black box'-principe te illustreren. In het leerplan wordt de scheiding tussen de 'white box'-fase en de 'black box'-fase echter niet expliciet afgelijnd. Dit creëert bij een aantal leerkrachten een gevoel van onzekerheid. De wiskundeleerkrachten van de derde graad willen hun leerlingen immers voorbereiden op alle mogelijke opleidingen uit het hoger onderwijs en doen dit grondig door hen alle technieken (uitgebreid) manueel aan te leren.

In dit hoofdstuk werd een voorstel voor het aflijnen van de 'white box'-fase en de 'black box'-fase besproken. Het aandeel van het gebruik van ICT (bij voorkeur een computeralgebrasysteem en wiskundige software) werd maximaal uitgebreid. Daarbij streefden we naar een intensief, efficiënt en zinvol gebruik van CAS dat bovendien aansluit bij de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra en de didactische principes die we kunnen hanteren ter ondersteuning van het computergebruik. We waakten er bovendien over dat de wiskunde (met al haar aspecten) het hoofddoel bleef en het computeralgebrasysteem (slechts) een hulpmiddel dat de wiskundelessen kan ondersteunen. Het is immers belangrijk dat we de wiskunde (met al haar aspecten, ook de wiskundetaal en de theorie mét bewijzen) blijven aanbieden aan onze leerlingen. Zo kunnen ook zij (of toch een aantal onder hen) plezier blijven beleven aan de wiskunde-om-de-wiskunde en wordt de wiskunde niet gedegradeerd tot een hulpwetenschap die men niet eens grondig beheerst.

Hoofdstuk 8

Eindconclusie

In dit proefschrift brachten we verslag uit van het onderzoek dat we de afgelopen zes jaar hebben uitgevoerd. Het onderwerp van dit proefschrift werd opgedeeld in twee subonderwerpen. Per onderwerp formuleerden we twee specifieke onderzoeksvragen. De beide deelonderzoeken werden grotendeels onafhankelijk van elkaar uitgevoerd, maar zijn op verschillende punten toch gelinkt aan elkaar. Een inventaris i.v.m. het ICT-gebruik in het Vlaamse secundair onderwijs was noodzakelijk voor de voorbereiding van de onderwijsexperimenten en anderzijds werden de ervaringen, het theoretische kader en de ondersteunende didactische principes uit het ontwikkelingsonderzoek verwerkt in een voorstel tot leerplan dat op zijn beurt de integratie van een computeralgebrasysteem kan bevorderen en leiden. De vier centrale onderzoeksvragen werden in de voorgaande hoofdstukken uitgebreid behandeld en in de mate van het mogelijke beantwoord.

De vraag die ons nu nog rest, is *"Wat willen/kunnen we met deze resultaten bereiken?"*. In de eerste plaats willen we de wiskundeleerkrachten uit het secundair onderwijs en de lesgevers uit het hoger onderwijs van de opleidingsonderdelen wiskunde en statistiek informeren over:

- het ICT-gebruik in het secundair en hoger onderwijs zodanig dat men een beter inzicht krijgt in het ICT-gebruik aan de andere kant van de grens 'secundair onderwijs-hoger onderwijs';
- de obstakels waarmee wiskundecollega's geconfronteerd worden - het gras is 'aan de andere kant' echt niet groener! - en de oplossingen die ze daarvoor uitwerken;

- de theorie van de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra en de manier waarop deze complexe theorie en een aantal ondersteunende didactische principes op een natuurlijke manier kunnen ingebed worden in het bestaande wiskundeonderwijs.

Daarnaast willen we alle wiskundeleerkrachten en lesgevers er van overtuigen:

- dat het gebruik van een computeralgebrasysteem een duidelijke meerwaarde biedt, kan bijdragen tot een beter wiskundig inzicht van onze leerlingen en studenten en bijgevolg - naast (en niet ter vervanging van) een aantal andere werkvormen en hulpmiddelen - een plaats verdient in ons wiskundeonderwijs;

- dat het gebruik van een computeralgebrasysteem slechts kan renderen als men voldoende frequent gebruik maakt van dit hulpmiddel (bij voorkeur in de volledige studieloopbaan of opleiding) en de leerlingen ook de kans geeft om het gebruik van dit computeralgebrasysteem thuis in te oefenen;

- om ervaringen uit te wisselen, samen te werken (over de grenzen van scholen, koepel, associaties en richtingen heen) en materiaal uit te wisselen zodanig dat niet iedere lesgever opnieuw 'het warm water uitvindt' en we grote veranderingen (zoals het verdwijnen van Derive) het hoofd kunnen bieden.

Bijlage A

Leerplan wiskunde voor de derde graad ASO

A.1 Voor het gemeenschapsonderwijs

In deze paragraaf vindt men drie fragmenten terug uit het leerplan wiskunde voor de derde graad ASO van het gemeenschapsonderwijs[1]: de methodologische wenken bij het leerplan i.v.m. ICT-gebruik, de leerstof van het onderwerp integralen en enkele methodologische wenken.
Dit leerplan was in voege vanaf het schooljaar 1993-1994 tot en met het schooljaar 2003-2004 en is bijgevolg het leerplan dat we gebruikt hebben bij de ontwikkeling van het hypothetisch leertraject en het instructiemateriaal voor de experimentele groepen die behoren tot het gemeenschapsonderwijs.

A.1.1 De plaats van ICT in het leerplan

In dit leerplan vinden we een minimale verwijzing naar het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs:

"Meer en meer verschijnt ook de grafische rekenmachine die bovendien is uitgerust met een aantal programmas. Het tekenen van grafieken, het numeriek oplossen van vergelijkingen en stelsels, het rekenen met matrices, enz. behoort tot de mogelijkheden. Er bestaan trouwens eveneens enkele goede wiskundige software-pakketten voor de PC die deze grafische en numerieke mogelijkheden

[1]Bron: 94035

a fortiori aankunnen.

De nieuwste evolutie op gebied van wiskundige software zijn de zgn. Computer Algebra Systemen. Deze bieden de mogelijkheid tot symbolisch rekenen, het manipuleren van formules (o.a. ontbinden in factoren, breuken vereenvoudigen, splitsen in partieelbreuken, enz...) en het exact, analytisch berekenen van o.a. oplossingen van vergelijkingen, limieten, afgeleide functies, integralen (ook onbepaalde), reeksontwikkelingen, enz...
Waar mogelijk kan de leraar de didactische mogelijkheden van deze nieuwe technologieën enerzijds benutten als illustratie bij zijn uiteenzetting en anderzijds door de leerlingen laten beleven.
Met al deze elektronische hulpmiddelen dient echter omzichtig geëxperimenteerd te worden. De leerlingen mogen geenszins het verkeerde idee krijgen dat alles wel door rekentoestel of computer kan uitgerekend worden. De essentiële reken- en tekenvaardigheden mogen niet verwaarlossd worden. Ook moet erover gewaakt dat er niet teveel van de beschikbare lestijd aan informatica besteed wordt i.p.v. aan wiskunde."

A.1.2 Het onderwerp integralen

Leerstof

- Primitieve functie (of stamfunctie) van reële functies. Definitie, terminologie. en notaties.
- Basisprimitieven.
- Berekening van primitieven: de gebruikelijke integratieregels, o.a. de substitutieregel en het partieel integreren.
- Bepaalde integraal van een reële functie over een interval.
- Eigenschappen van de integraal, o.a. de lineariteit en de middelwaardestelling (zonder bewijzen).
- Formule voor de bepaalde integraal i.f.v. een primitieve functie.
- Methodes van numerieke integratie: trapeziumregel, middelpuntsregel en regel van Simpson.
- Berekening van oppervlakten, van inhouden van omwentelingslichamen, van booglengten, en van manteloppervlakten van omwentelingslichamen.

- Toepassingen van het integraalrekenen in de toegepaste, de natuur- en de sociale wetenschappen.

Methodologische wenken

Vanuit de gekende afleidingsregels kan een lijst van basisprimitieven opgesteld worden. De substitutiemethode en het partieel integreren zijn de enige twee technieken die aan bod moeten komen bij het berekenen van primitieven. Hierbij is het niet de bedoeling een uitgebreide hoeveelheid klassen van integralen te behandelen. Een zinvolle, niet-triviale selectie volstaat.

Het invoeren van het begrip bepaalde integraal gebeurt best als de limiet van Riemann-sommen. Er worden hier zeker geen ingewikkelde theorieën of bewijzen verwacht over de verschillende karakterisaties van integralen en hun verbanden. Het is wel nuttig de leerlingen grafisch te tonen dat alle continue functies op een interval integreerbaar zijn, maar dat er ook integreerbare functies zijn die niet continu zijn (bvb. de trapfuncties).

In elk geval zal in het continue geval de Leibniz-formule behandeld worden die de berekening van een bepaalde integraal mogelijk maakt via een primitieve.

Voor functies waarvan de primitieve moeilijk of niet te vinden is, zullen de leerlingen methodes van numerieke integratie gebruiken. Vooral in toepassingen, zowel binnen als buiten de wiskunde, zal dit vaak nuttig zijn. Niet alleen oppervlakten, booglengten en inhouden zullen aan bod komen, maar ook bvb. arbeid, druk en effectieve stroomsterkte van wisselstroom zijn interessante toepassingen.

Omwille van zijn voorkomen in de kansrekening bij sommige continue kansverdelingen (o.a. de normale), kan ook in het kort de oneigenlijke integraal behandeld worden.

A.2 Voor het vrij gesubsidieerd onderwijs

In deze paragraaf vindt men drie fragmenten terug uit het leerplan wiskunde voor de derde graad ASO van het vrij gesubsidieerd onderwijs[2]: de inhoudelijke doelstellingen, enkele methodologische wenken m.b.t. het onderwerp 'integralen' en enkele bedenkingen en aanbevelingen i.vm. 'technologische hulpmiddelen'.

[2] Bron: D/1992/0279/022

Dit leerplan was in voege vanaf het schooljaar 1992-1993 tot en met het schooljaar 2003-2004 en is bijgevolg het leerplan dat we gebruikt hebben bij de ontwikkeling van het hypothetisch leertraject en het instructiemateriaal voor de experimentele groepen die behoren tot het vrij gesubsidieerd onderwijs.

A.2.1 De plaats van ICT in het leerplan

"De elekronische zakrekenmachine is in de wiskundeles een gewoon gebruiksvoorwerp geworden. De laatste jaren zijn nieuwe technologische hulpmiddelen ontwikkeld die heel wat meer mogelijkheden aanbieden en die de rol van de zakrekenmachine zullen overnemen. Er zijn eenvoudig te bedienen wiskundesystemen ontwikkeld, die werken op pc's. Vele van de nieuwe mogelijkheden worden verwerkt in kleine toestellen, die elke leerling - zoals nu de zakrekenmachine - op elk ogenblik bij zich kan hebben. De grafische rekenmachine bijvoorbeeld zal snel de wetenschappelijke rekenmachine gaan vervangen.
Elektroniche hulpmiddelen zijn bruikbaar voor drie soorten taken, die in wiskundelessen veelvuldig worden uitgevoerd:

1. Het uitvoeren van numerieke berekeningen en van volledige numerieke algoritmen
2. Het maken van allerlei grafische voorstellingen
3. Het uitvoeren van formele berekeningen

(...)

Voor computers werden programmasystemen ontwikkeld die de drie taken combineren, en die bovendien gemakkelijk te bedienen zijn (systemen als Derive, Mathematica,...). Er zijn ook programma's voor beperktere toepassingsgebieden ontwikkeld.

Deze toestellen kunnen de didactische verwerking van vele leerstofupnten sterk beïnvloeden. Ze kunnen worden ingezet bij de begripsontwikkeling, als actief verkennings-, illustratie-, controle- en experimenteersysteem.

(...)

Het (veralgemeend) inzetten van deze technologische hulpmiddelen brengt een verschuiving mee van de 'technische' wiskundige vaardigheden naar inhoudelijke aspecten. Het stelt deze technieken in een ander daglicht: inzicht en kennis van de technieken blijft nodig voor zover ze de gehanteerde begrippen verduidelijken. De techniek zelf is echter niet meer het hoofddoel. (...) Men is niet meer gebonden aan oefeningen die mooi uitkomen. Dit laat toe om realistischer problemen te bekijken, en bijvoorbeeld het opstellen van modellen concreet te behandelen."

A.2.2 Het onderwerp integralen

Leerstof

- Bepaalde integraal: begrip, interpretaties, eigenschappen.
- Primitieve functies, verband met bepaalde integralen. Integratiemethodes.
- Toepassingen op integraalrekening: berekening van oppervlakten, inhouden en lengten, toepassingen uit andere disciplines.

Methodologische wenken

Het is aangewezen het begrip (bepaalde integraal) aan te brengen via de vraag naar het maatgetal van de oppervlakte tussen grafiek en de x-as (waarbij men rekening houdt met enkele tekenconventies). Het begrip bepaalde integraal moet geassocieerd worden aan het volgende sommatieproces: op het interval een verdeling aanbrengen, over het deelinterval de functie vervangen door een constante functie en de limiet bepalen van een som van produkten. De leerllingen moeten vaststellen dat ze in de meeste gevallen die limieten niet rechtstreeks kunnen berekenen, vandaar de noodzaak van een andere aanpak.
We werken dan met een 'oppervlaktefunctie': de oppervlakte berekend vanaf een bepaald punt tot een veranderlijke bovengrens. Dat de verandering (afgeleide) van een oppervlaktefunctie, de functie zelf is, leidt tot de hoofdstelling.
Bij het berekenen van primitieve functies is het de bedoeling het terrein te effenen voor die integralen die in de meetkundige toepassingen en de toepassingen uit andere disciplines zullen aan bod komen. Het is niet de bedoeling om systematisch verschillende integraaltypes te behandelen.
Er moet ook de nodige aandacht besteed worden aan numerieke integratiemethodes (trapeziumregel, regel van Simpson).

Bijlage B

Pre- en posttesten

B.1 Proefproject

Opgave 1:
Zoek 2 natuurlijke getallen als je weet dat hun som, hun product en het verschil van hun kwadraten dezelfde waarde hebben.

Opgave 2:
Gegeven: $f(x) = x^2 - 5 * x$ en $g(x) = -x + 2$.
Gevraagd:

1. Bepaal het functievoorschrift van $f \circ g$.
2. Zij l de rechte met vergelijking $y = ax + b$. Bepaal a en b zodanig dat l loodrecht staat op de grafiek van g en l raakt aan de grafiek van f.

Opgave 3:
De rechthoek R is ingeschreven in een cirkel met straal $\sqrt{20}$. De lengte van de rechthoek is het dubbel van de breedte. Bereken de lengte en de breedte van de rechthoek.

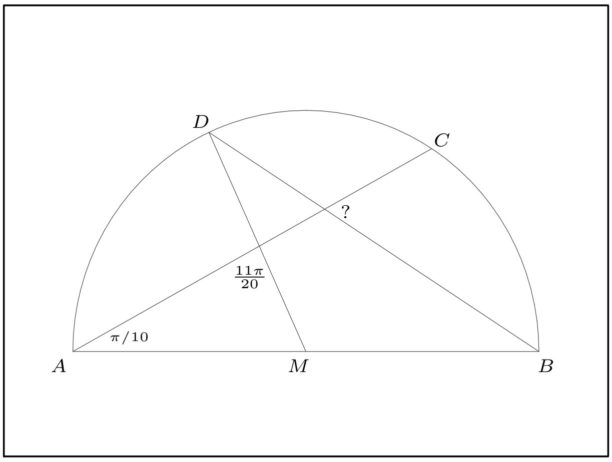
Opgave 4:
Is de veelterm $P(y) = y^8 - 256$ deelbaar door $y^2 - 4$? Waarom (niet)?

Opgave 5:
40 ballen zijn genummerd van 1 tot 40. Ze worden in dozen gelegd. Er wordt op gelet dat als een doos een bal met nummer n bevat, ze geen bal bevat met

een nummer dat een veelvoud is van n. Hoeveel dozen zijn er minstens nodig? Waarom?

Opgave 6:
Een rechthoek met oppervlakte R wordt verkregen door in een vierkant met oppervlakte V twee overstaande zijden 25% te verlengen en de andere zijden 25% te verkorten. Bereken $\frac{R}{V}$.

Opgave 7:
Op een halve cirkel met middellijn $[AB]$ en middelpunt M liggen twee punten C en D zoals op de figuur. Hoe groot is de scherpe hoek tussen $[AC]$ en $[BD]$?



B.2 Eerste macrocyclus

B.2.1 Pretest

Type 1:

Opgave 1.1:
Bereken: $2003 - 2001 + 1999 - 1997 + ... + 3 - 1$.

Voorziene oplossing:
$2003 - 2001 + 1999 - 1997 + ... + 3 - 1$
$= (2003 - 2001) + (1999 - 1997) + ... + (3 - 1)$
$= 2 + 2 + ... + 2 + 2$
$= 2 \times ?$
Om het exacte aantal termen te bepalen, kan men een kortere gelijkaardige som bekijken:
$19 - 17 + 15 - 13 + 11 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1$
$= (19 - 17) + (15 - 13) + (11 - 9) + (7 - 5) + (3 - 1)$
$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2$
$= 2 \times 5$

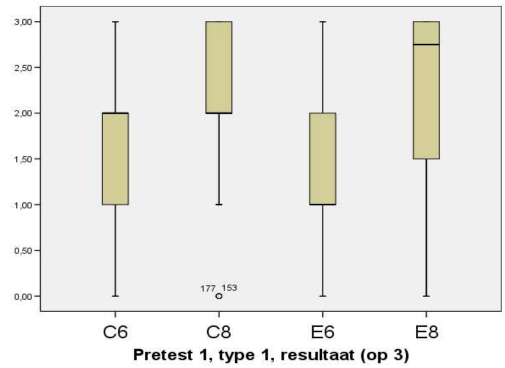
Dus als we de som bekijken die start bij $19 - 17$ en eindigt bij $3 - 1$, dan hebben we 5 $\left(= \frac{19+1}{4}\right)$ termen. Breiden we dit uit naar de som die start bij 1999 en eindigt bij 1, dan hebben we 500 $\left(= \frac{1999+1}{4}\right)$ termen.
Met andere woorden:
$2003 - 2001 + 1999 - 1997 + ... + 3 - 1$
$= (2003 - 2001) + 2 \times 500$
$= 2 + 1000 = 1002$

Verbeteringsschema (op 3):

- Herkennen van het proces +2 of +4 → **+1**
- Poging tot tellen van het aantal termen waarbij het gevonden resultaat niet strijdig is met het voorgaande → **+1**
- Eindresultaat correct → **+1**

Behaalde score:
De leerlingen ondervonden voornamelijk moeilijkheden bij het tellen van het aantal termen '2' of '4'.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	54,3%
C6	56,9%
C8	69,4%
E6	47,3%
E8	72,9%



Type 2:

Opgave 1.2:
Op een avond rijdt Frederik de 100 km van zijn werk naar huis met een gemiddelde snelheid van 120 km/u. Hij gaat daarna tanken in het benzinestation om de hoek en dat duurt 4 minuten. Zijn vrouw Veerle rijdt die avond ook 100 km van haar werk naar huis, waarvan 80 km met een gemiddelde snelheid van 120 km/u. Over een strook van 20 km duwt ze het gaspedaal stevig in en rijdt ze 140 km/u. Ten slotte gaat ook zij tanken in het benzinestation om de hoek maar heeft daar 6 minuten voor nodig.
Als Frederik en Veerle gelijktijdig vertrekken, wie komt dan het eerste thuis? Hoeveel bedraagt het verschil exact?

Voorziene oplossing:

Frederik:	Veerle:
100 km aan 120 km/u: 50 min	80 km aan 120 km/u: 40 min
	20 km aan 140 km/u: $\frac{60}{7}$ min
tanken: 4 min	tanken: 6 min
totaal: 54 min $= \frac{378}{7}$ min	totaal: $\frac{382}{7}$ min

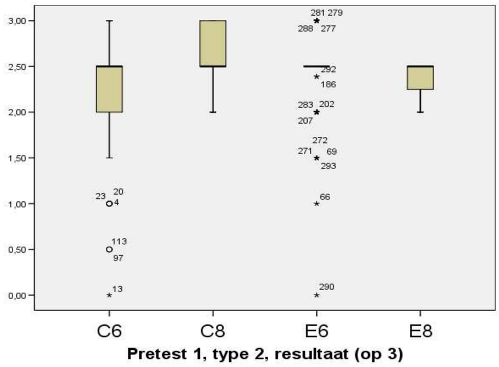
Besluit:
Frederik arriveert het eerst met $\frac{4}{7}$ min voorsprong.

Verbeteringsschema (op 3):

- Resultaat van Frederik correct → **+1**
- Resultaat van Veerle correct → **+1**
- Formulering van antwoord correct → **+1 (2 × 0,5)**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:
In deze oefening maakten de leerlingen vaak fouten bij de berekening van de tijden en ook het begrip 'exact' werd regelmatig genegeerd of foutief geïnterpreteerd.

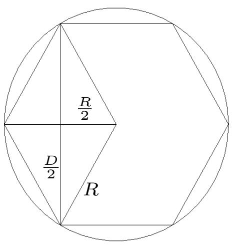
Groep	Gemiddelde score
Totale groep	79,6%
C6	77,1%
C8	88,2%
E6	80,8%
E8	79,2%



Type 3:

Opgave 1.3:
Als een regelmatige zeshoek ingeschreven is in een cirkel met straal R, hoelang is een diagonaal dan die **niet** door het middelpunt gaat?

Voorziene oplossing:



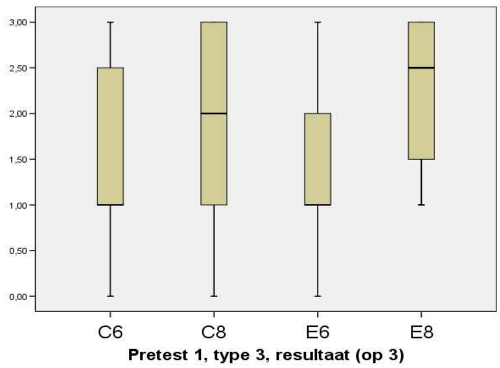
$$\begin{aligned} & \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{D^2}{4} + \frac{R^2}{4} = R^2 \\ \Leftrightarrow \quad & D^2 + R^2 = 4R^2 \\ \Leftrightarrow \quad & D^2 = 3R^2 \\ \Leftrightarrow \quad & D = \sqrt{3}R \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**
- Correcte oplossing van de oefening met $R = 1$ → **2/3**

Behaalde score:
De leerlingen hadden problemen om het gevraagde om te zetten in een goede figuur en om vervolgens deze figuur te vertalen naar correcte wiskunde. Voor de oplossing konden de leerlingen steunen op de stelling van Pythagoras. Een grote groep leerlingen gebruikten een foutieve 'variant' van deze stelling of maakten gebruik van een niet-rechthoekige driehoek. Ook het begrip 'diagonaal niet door het middelpunt' werd door de leerlingen vaak verkeerd geïnterpreteerd.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	46,6%
C6	47,6%
C8	58,3%
E6	41,4%
E8	75,0%



Type 4:

Opgave 1.4:
Is de veelterm $P(y) = y^8 - 256$ deelbaar door $y^2 - 4$? Waarom (niet)?

Voorziene oplossing:

$$\begin{array}{rc} & y^8 - 256 \\ = & y^8 - 2^8 \\ = & (y^4 - 2^4)(y^4 + 2^4) \\ = & (y^2 - 2^2)(y^2 + 2^2)(y^4 + 2^4) \\ = & (y^2 - 4)(y^2 + 4)(y^4 + 16) \end{array}$$

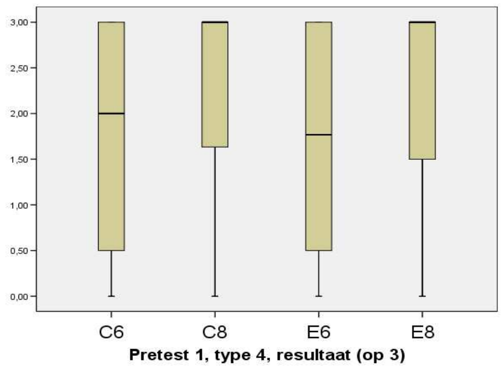
Besluit: $y^8 - 256$ is deelbaar door $y^2 - 4$

Verbeteringsschema (op 3):

- Enkel ja → **+0,5**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Indien de conclusie overeenstemt met het gevonden resultaat **+1**

Behaalde score:
Een aantal leerlingen hadden een volledig foutief beeld van het begrip 'deelbaar door' en dit zowel algemeen als in het bijzonder voor veeltermen. Zo lazen we de volgende blunders: "Deelbaar omdat y^8 deelbaar is door y^2 en 256 is deelbaar door 4." en "Het is deelbaar, maar je hebt wel een rest.". De leerlingen die kozen voor het uitvoeren van de euclidische deling maakten hierbij veel rekenfouten.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	58,9%
C6	58,9%
C8	76,8%
E6	54,5%
E8	75,0%



Type 5:

Opgave 1.5:
Op hoeveel manieren kan men 10 appels verdelen onder Wim, Tom en Greet zodanig dat Wim er minstens 3 krijgt, Tom en Greet elk minstens 2 en Greet hoogstens 3?

Voorziene oplossing:
Uit het gegeven volgt dat de verdeling van 7 appels reeds volledig bepaald is (zie symbool $\diamond$). De andere 3 appels kunnen nog op 7 manieren verdeeld worden (zie symbool $\bullet$):

Wim: $\diamond\diamond\diamond\bullet\bullet\bullet$	Wim: $\diamond\diamond\diamond\bullet\bullet$	Wim: $\diamond\diamond\diamond\bullet\bullet$	Wim: $\diamond\diamond\diamond\bullet$
Tom: $\diamond\diamond$	Tom: $\diamond\diamond\bullet$	Tom: $\diamond\diamond$	Tom: $\diamond\diamond\bullet\bullet$
Greet: $\diamond\diamond$	Greet: $\diamond\diamond$	Greet: $\diamond\diamond\bullet$	Greet: $\diamond\diamond$

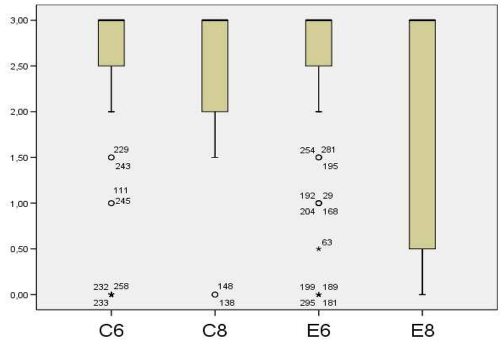
Wim: $\diamond\diamond\diamond\bullet$	Wim: $\diamond\diamond\diamond$	Wim: $\diamond\diamond\diamond$
Tom: $\diamond\diamond\bullet$	Tom: $\diamond\diamond\bullet\bullet\bullet$	Tom: $\diamond\diamond\bullet\bullet$
Greet: $\diamond\diamond\bullet$	Greet: $\diamond\diamond$	Greet: $\diamond\diamond\bullet$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+2**

Behaalde score:
Een aantal leerlingen probeerden deze vraag op te lossen met de 'gekende' formules uit het onderdeel combinatieleer. Deze werkwijze leverde doorgaans een foutief en veel te hoog aantal op dat de leerlingen bovendien zonder meer voor waar aannamen. De leerlingen hadden duidelijk geen besef van de grootte van het te verwachten antwoord.

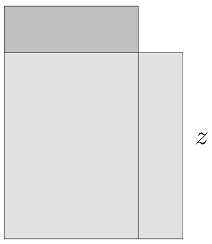
Groep	Gemiddelde score
Totale groep	84,0%
C6	83,1%
C8	81,3%
E6	86,6%
E8	66,7%



Type 6:

Opgave 1.6:
Een rechthoek met oppervlakte R wordt verkregen door in een vierkant met oppervlakte V twee overstaande zijden 25% te verlengen en de andere zijden 25% te verkorten. Bereken $\frac{R}{V}$.

Voorziene oplossing:



$V = z^2$

de rechthoek heeft lengte $\frac{5}{4}z$ en breedte $\frac{3}{4}z$

$\Rightarrow R = \frac{5}{4}z \times \frac{3}{4}z = \frac{15}{16}z^2 = \frac{15}{16}V$

$\Rightarrow \frac{R}{V} = \frac{15}{16}$

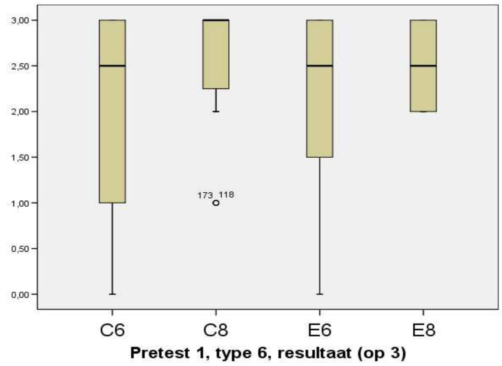
Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**

- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:
Het gebruik van procenten bleek hier voor de leerlingen het grootste struikelblok. Bovendien werd de vraag ook vaak verkeerd geïnterpreteerd en verwisselden de leerlingen de rol van het vierkant en de rechthoek.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	69,8%
C6	66,4%
C8	86,1%
E6	69,7%
E8	83,3%



Type 7:

Opgave 1.7:

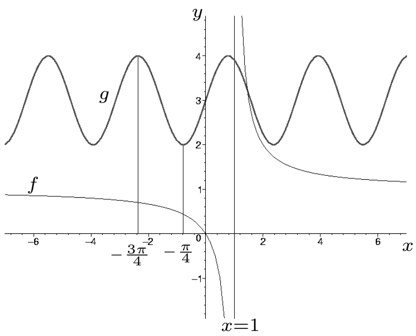
Gegeven:

$$f(x) = \frac{x+A}{x+B}$$

$$g(x) = \sin(Cx) + D$$

Gevraagd:

Bepaal A, B, C en D.



Voorziene oplossing:

$$f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$
$$\text{VA} : x = 1 \Rightarrow B = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1}$$

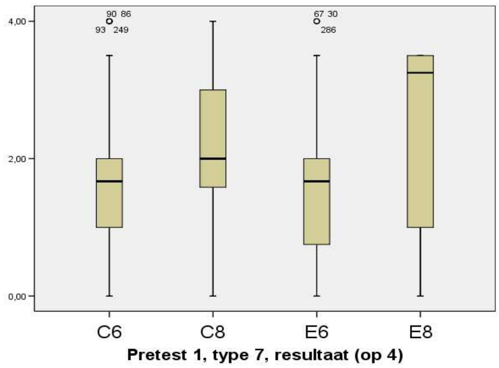
$$g(0) = 3 \Rightarrow D = 3$$
$$\text{periode } \pi \Rightarrow C = 2$$
$$\Rightarrow g(x) = \sin(2x) + 3$$

Verbeteringsschema (op 4):

- Per correcte parameter → **+1**
- Indien redenering (min of meer) correct maar resultaat niet → **+0,5**

Behaalde score:
De meeste leerlingen hadden vage ideeën over de betekenis van een aantal parameters (a.d.h.v. de verticale asymptoot, periode van de algemene sinusfunctie,...), maar gaven aan de corresponderende parameters een foutieve waarde. Ze steunden hiervoor vaak op formules die ze zich nog vaag herinnerden.
Op de figuur waren een aantal punten van de grafiek aangeduid om hen te helpen bij het bepalen van de parameters, maar deze punten werden door een groot aantal leerlingen niet gebruikt, zelfs niet ter controle.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	41,7%
C6	41,2%
C8	56,1%
E6	38,4%
E8	59,4%



B.2.2 Posttest

Type 1:

Opgave 2.3:
Voor elk natuurlijk getal $n > 1$ definiëren we $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$. Op hoeveel nullen **eindigt** 100! ?

Voorziene oplossing:
Om inzicht te krijgen in het aantal nullen kan men bijvoorbeeld 10! berekenen en het corresponderende aantal nullen tellen. Wanneer men hiervoor een verklaring heeft gevonden, kan men dezelfde redenering gaan toepassen op 100!.
Antwoord: 24 nullen nl.

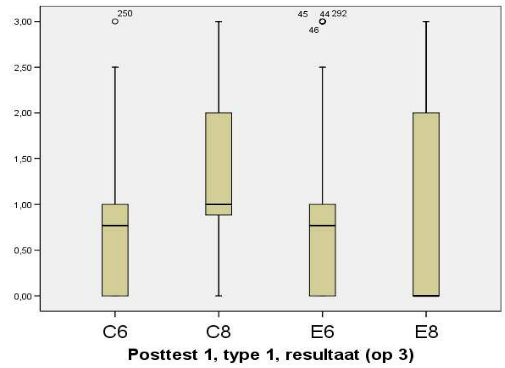
$2 \times 5 \rightarrow 1$	$10 \rightarrow 1$	$4 \times 15 \rightarrow 1$	$20 \rightarrow 1$
$8 \times 25 \rightarrow 2$	$30 \rightarrow 1$	$... \times 35 \rightarrow 1$	$40 \rightarrow 1$
$... \times 45 \rightarrow 1$	$50 \rightarrow 2$	$... \times 55 \rightarrow 1$	$60 \rightarrow 1$
$... \times 65 \rightarrow 1$	$70 \rightarrow 1$	$... \times 75 \rightarrow 2$	$80 \rightarrow 1$
$... \times 85 \rightarrow 1$	$90 \rightarrow 1$	$... \times 95 \rightarrow 1$	$100 \rightarrow 2$

Verbeteringsschema (op 3):

- Enkel tellen van de tientallen (11 nullen) → **+1**
- Veelvouden van vijf ook geteld (±20 nullen) → **+1**
- Eindresultaat volledig correct → **+1**

Behaalde score:
Een grote groep leerlingen vergat tijdens het tellen de vijfvouden en vond bijgevolg als resultaat 11 nullen.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	25,6%
C6	22,6%
C8	43,1%
E6	25,4%
E8	29,2%



Type 2:

Opgave 2.2:
Het gemiddelde inkomen van 25 werknemers van videotheek *Home Alone* is 24400 euro per jaar. Volgende week gaat Jef - de oudste en bestbetaalde werknemer - op pensioen. Jef wordt vervangen door een nieuwe werknemer met een beginwedde van 18000 euro per jaar. Het gemiddelde inkomen zal daardoor dalen tot 23900 euro per jaar. Hoeveel euro verdiende Jef per jaar?

Voorziene oplossing:

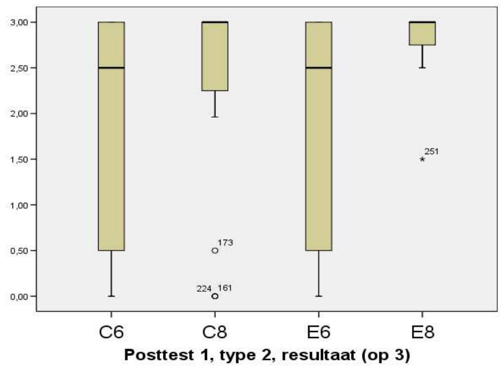
$$\begin{aligned}
\frac{\text{anderen} + \text{Jef}}{25} = 24400 &\Rightarrow \text{anderen} + \text{Jef} = 610000\\
&\Rightarrow \text{Jef} = 610000 - \text{anderen}\\
\frac{\text{anderen} + 18000}{25} = 23900 &\Rightarrow \text{anderen} = 579500\\
&\Rightarrow \text{Jef} = 610000 - 579500 = 30500
\end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte vertaling en methode → **+2**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score vraag:
Dit vraagstuk leidde tot een eenvoudig stelsel met twee vergelijkingen en twee onbekenden, maar de leerlingen gaven veel verschillende en foutieve vertalingen van de gegevens.

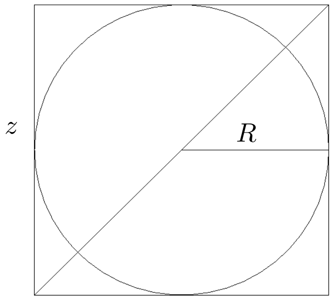
Groep	Gemiddelde score
Totale groep	65,4%
C6	64,1%
C8	79,1%
E6	62,4%
E8	91,7%



Type 3:

Opgave 2.1:
In een vierkant met diagonalen van lengte 8 wordt een cirkel ingeschreven. Bereken de **straal** van die cirkel.

Voorziene oplossing:



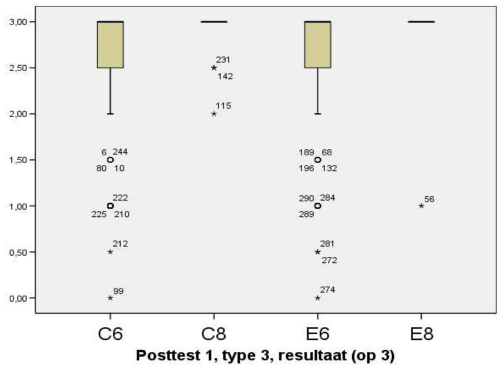
$$\begin{aligned} & z^2+z^2=64 \\ \Leftrightarrow\quad & z^2=32 \\ \Leftrightarrow\quad & z=4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\quad & R=\tfrac{z}{2}=2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	86,2%
C6	84,9%
C8	97,2%
E6	85,2%
E8	91,7%



Type 4:

Opgave 2.4:
Gegeven: $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ is deelbaar door $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$.
Gevraagd: Bereken $(p + q)r$.

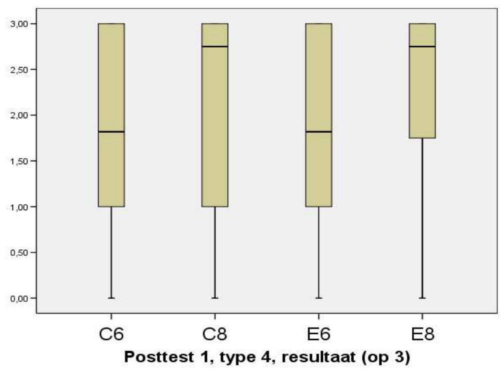
Voorziene oplossing:
Het quotiënt is een veelterm van de eerste graad met hoogstegraadscoëfficiënt 1
$\Rightarrow (x^3 + 3x^2 + 9x + 3)(x + A) = x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$
$\Rightarrow x^4 + (A + 3)x^3 + (3A + 9)x^2 + (9A + 3)x + 3A = x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$
$\Rightarrow A = 1, p = 2, q = r = 3$
$\Rightarrow (p + q)r = 15$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+2**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:
De meeste leerlingen maakten in deze oefening gebruik van de euclidische deling, maar maakten daarbij veel rekenfouten.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	60,6%
C6	57,9%
C8	70,6%
E6	60,8%
E8	75,0%



Type 5:

Opgave 2.5:
De **totale som** van de cijfers van het getal 12345678 wordt als volgt berekend:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ en $3 + 6 = 9$, dus 9 is de totale som van de cijfers van 12345678.
Hoeveel jaartallen zijn er in de 21^{ste} eeuw waarvan de totale som van de cijfers 6 is?

Voorziene oplossing:
In de 21^{ste} eeuw zijn er 11 jaartallen waarvan de totale som van de cijfers 6 is, nl.

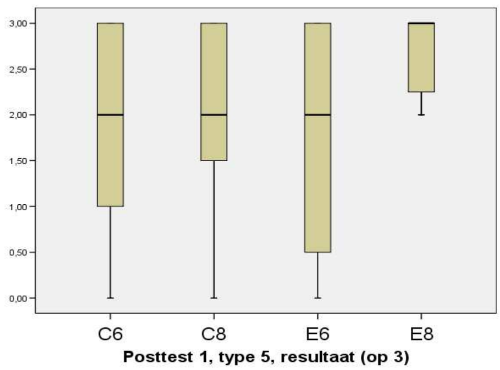
20	04 40 13 31 22
20	94 49 58 85 67 76

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte methode/redenering → **+1**
- Eerste groep van vijf gevallen → **+1**
- Tweede groep van zes gevallen → **+1**

Behaalde score:
De meeste leerlingen vonden de eerste vijf jaartallen, maar vergaten die jaartallen waarvan de som van de laatste twee cijfers gelijk is aan 13.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	60,4%
C6	58,5%
C8	66,4%
E6	59,4%
E8	89,6%

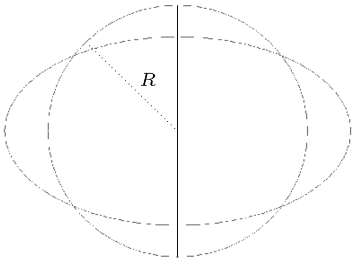


Type 6:

Opgave 2.6:
Een ellipsvormige schijf met oppervlakte E wordt verkregen door in een cirkelvormige schijf met oppervlakte C twee loodrechte middellijnen respectievelijk

met een derde te verlengen en een vierde te verkorten. Bereken $\frac{E}{C}$.

Voorziene oplossing:



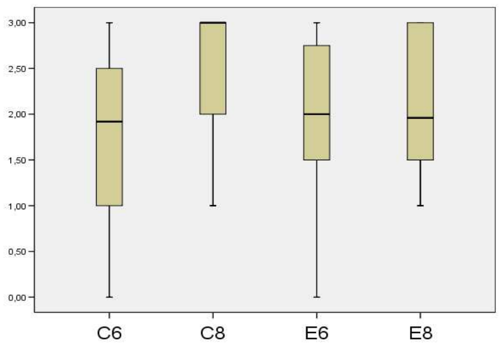
$$\begin{aligned} & C = \pi R^2 \\ \Rightarrow \quad & E = \pi \left(R + \tfrac{1}{3}R\right)\left(R - \tfrac{1}{4}R\right) \\ \Rightarrow \quad & E = \pi \tfrac{4}{3}R\tfrac{3}{4}R = \pi R^2 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{E}{C} = 1 \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	64,0%
C6	59,9%
C8	86,0%
E6	63,8%
E8	70,5%



Type 7:

Opgave 2.7:

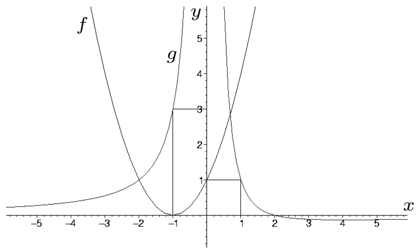
Gegeven:

$$f(x) = Ax + B^2$$

$$g(x) = \frac{Cx + D}{x^2}$$

Gevraagd:

Bepaal A, B, C en D.



Voorziene oplossing:

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\quad\Rightarrow\quad AB^2 = 1 \\ f(-1) = 0 &\quad\Rightarrow\quad A(-1+B)^2 = 0 \\ &\quad\Rightarrow\quad \cancel{A = 0} \text{ of } B = 1 \\ &\quad\Rightarrow\quad B = 1 \text{ en } A = 1 \end{aligned}$$

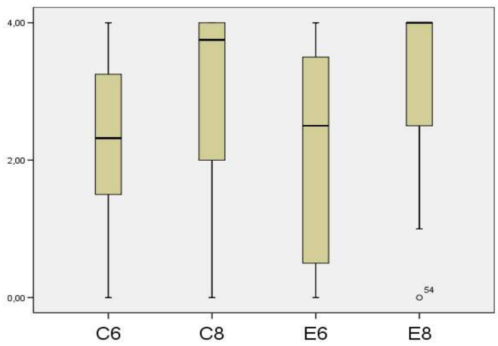
$$\begin{aligned} g(1) = 1 &\quad\Rightarrow\quad C + D = 1 \\ g(-1) = 3 &\quad\Rightarrow\quad -C + D = 3 \\ &\quad\Rightarrow\quad C = -1 \text{ en } D = 2 \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 4):

- Per correcte parameter → **+1**
- Indien redenering (min of meer) correct maar resultaat niet → **+0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	58,0%
C6	55,7%
C8	73,4%
E6	56,3%
E8	78,1%



B.3 Tweede macrocyclus

B.3.1 Pretest

Type 1:

Opgave 3.5:
Bereken: $2004 - 2000 + 1996 - 1992 + ... + 12 - 8$.

Voorziene oplossing:
$2004 - 2000 + 1996 - 1992 + ... + 12 - 8$
$= (2004 - 2000) + (1996 - 1992) + ... + (12 - 8)$
$= 4 + 4 + ... + 4$
$= 4 \times ?$
Om het exacte aantal termen te bepalen, kan men een kortere gelijkaardige som bekijken:
$44 - 40 + 36 - 32 + 28 - 24 + 20 - 16 + 12 - 8$
$= (44 - 40) + (36 - 32) + (28 - 24) + (20 - 16) + (12 - 8)$
$= 4 + 4 + 4 + 4 + 4$
$= 4 \times 5$

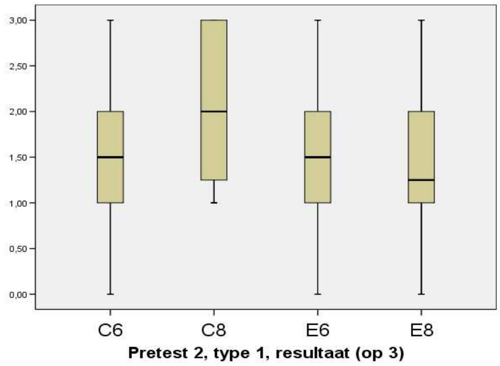
Dus als we de som bekijken die start bij $44 - 40$ en eindigt bij $12 - 8$, dan hebben we 5 $\left(= \frac{40}{8}\right)$ termen. Breiden we dit uit naar de som die start bij $2004 - 2000$ en eindigt bij $12 - 8$, dan hebben we 250 $\left(= \frac{2000}{8}\right)$ termen.
Met andere woorden:
$2004 - 2000 + 1996 - 1992 + ... + 12 - 8$
$= 4 \times 250$
$= 1000$

Verbeteringsschema (op 3):

- Herkennen van het proces +4 → **+1**
- Poging tot tellen van het aantal termen waarbij het gevonden resultaat niet strijdig is met het voorgaande → **+1**
- Eindresultaat correct → **+1**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	52,5%
C6	53,8%
C8	69,0%
E6	51,4%
E8	45,4%

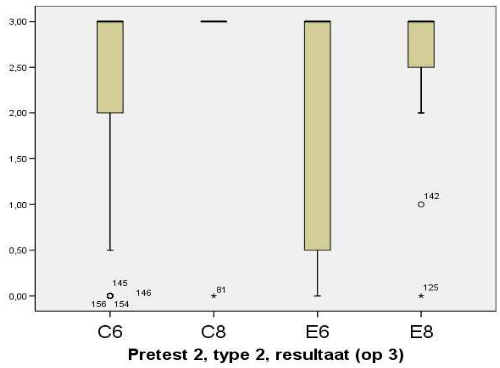


Type 2:

Opgave 3.2:
Het gemiddelde inkomen van 25 werknemers van videotheek *Home Alone* is 24400 euro per jaar. Volgende week gaat Jef - de oudste en bestbetaalde werknemer - op pensioen. Jef wordt vervangen door een nieuwe werknemer met een beginwedde van 18000 euro per jaar. Het gemiddelde inkomen zal daardoor dalen tot 23900 euro per jaar. Hoeveel euro verdiende Jef per jaar?

Behaalde score:

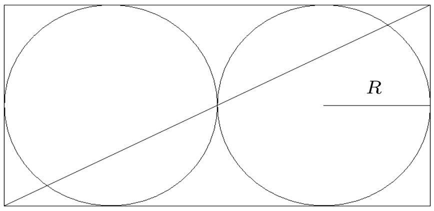
Groep	Gemiddelde score
Totale groep	73,0%
C6	76,5%
C8	85,7%
E6	63,8%
E8	87,0%



Type 3:

Opgave 3.4:
Twee cirkels met straal R die precies één punt gemeen hebben, worden samen omschreven door een rechthoek met diagonalen van lengte 10. Bereken R.

Voorziene oplossing:



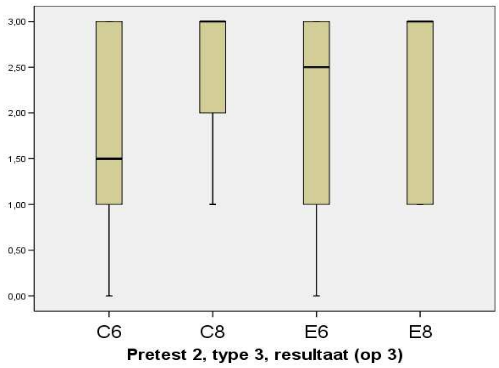
$$\begin{aligned} & L = 4R \text{ en } B = 2R \\ & L^2 + B^2 = 100 \\ \Rightarrow\ & 16R^2 + 4R^2 = 100 \\ \Rightarrow\ & 20R^2 = 100 \\ \Rightarrow\ & R = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	68,5%
C6	63,3%
C8	81,0%
E6	70,0%
E8	78,7%



Type 4:

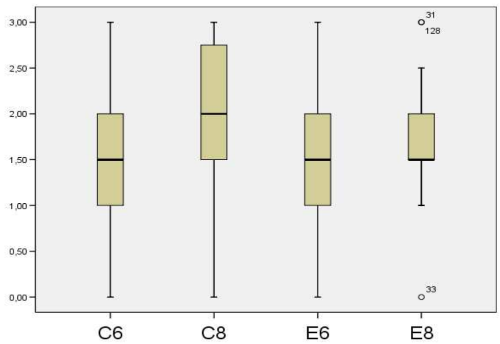
Opgave 3.1:
De veelterm $2x^4 + px^3 + qx^2 + rx - 1$ is deelbaar door $x^3 - x^2 + 2x - 1$. Bepaal p, q en r.

Voorziene oplossing:
Gebruik makend van de hoogste graadsterm en de laagste graadsterm van $2x^4 + px^3 + qx^2 + rx - 1$ kan men afleiden dat
$2x^4 + px^3 + qx^2 + rx - 1 = (x^3 - x^2 + 2x - 1)(2x + 1)$
$\Rightarrow 2x^4 + px^3 + qx^2 + rx - 1 = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$
$\Rightarrow p = -1, q = 3$ en $r = 0$ **Verbeteringsschema (op 3):**

- Correcte methode $\rightarrow$ **+1**
- Correcte uitwerking van de methode $\rightarrow$ **+2**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	50,1%
C6	51,0%
C8	64,3%
E6	46,2%
E8	55,3%



Type 5:

Opgave 3.3:
Het **totale product** van de cijfers van het getal 1234 wordt als volgt berekend: $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.
Hoeveel jaartallen waren er in de 20$^{\text{ste}}$ eeuw waarvan het totale product van de cijfers eindigde op een nul?

Voorziene oplossing:
20ste eeuw: 1900-1999

1. Alle jaartallen die een nul bevatten:
   1900, 1901, ..., 1910: **11**
   1920, 1930, ..., 1990: **8**

2. Alle jaartallen die een vijf en een even getal bevatten: 1925 & 1952, 1945 & 1954, 1965 & 1956, 1985 & 1958: **8**

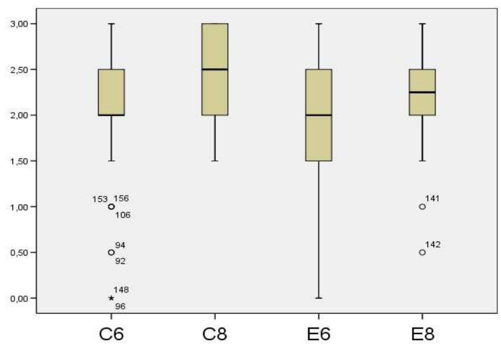
⇒ 27 jaartallen

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+2**

Behaalde score:
Een grote groep van leerlingen beperkten zich uitsluitend tot die jaartallen die een nul bevatten en waarvan het totale product van de cijfers zelf nul was. Ze vergaten bijgevolg dat het product van een vijfvoud en een even getal eveneens een getal opleverde dat eindigde op een nul.

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	68,1%
C6	70,7%
C8	81,0%
E6	63,1%
E8	71,3%



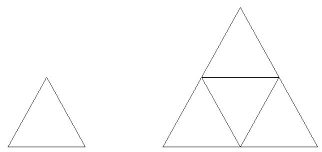
Pretest 2, type 5, resultaat (op 3)

Type 6:

Opgave 3.6:
Een gelijkzijdige driehoek met zijde Z_1 heeft een oppervlakte met grootte O.

Een andere gelijkzijdige driehoek met zijde Z_2 heeft een oppervlakte met grootte $4O$. Bereken $\frac{Z_2}{Z_1}$.

Voorziene oplossing:



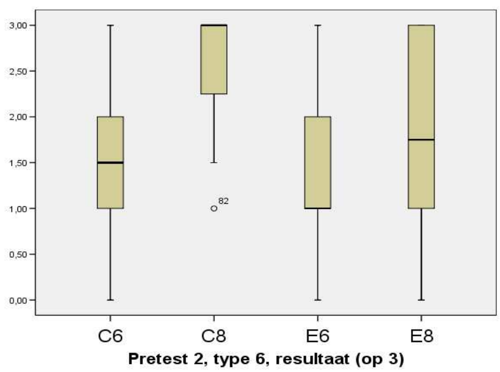
$$O = \frac{Z_1^2\sqrt{3}}{4} \text{ en } 4O = \frac{Z_2^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\Rightarrow Z_1^2\sqrt{3} = \frac{Z_2^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{Z_2^2}{Z_1^2} = 4$$
$$\Rightarrow \frac{Z_2}{Z_1} = 2$$

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	53,1%
C6	53,5%
C8	83,3%
E6	46,7%
E8	63,0%



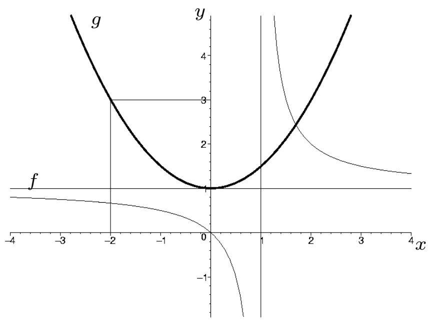
Type 7:

Opgave 3.7:

Gegeven:

$$f(x) = \frac{x+A}{x+B}$$

$$g(x) = Cx^2 + D$$



Gevraagd:

Bepaal A, B, C en D.

Voorziene oplossing:

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ \text{VA} : x = 1 &\Rightarrow B = -1 \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

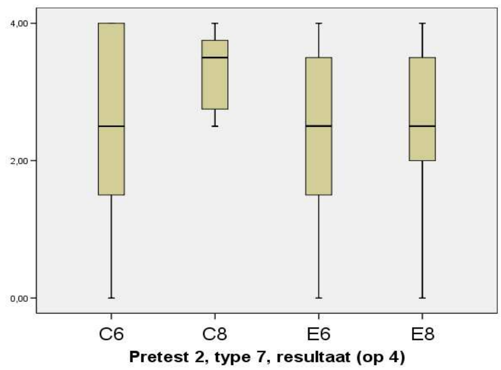
$$\begin{aligned} g(-2) = 3 &\Rightarrow 4C + D = 3 \\ g(0) = 1 &\Rightarrow 0C + D = 1 \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{2} \text{ en } D = 1 \\ &\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 4):

- Per correcte parameter → **+1**
- Indien redenering (min of meer) correct maar resultaat niet → **+0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	62,6%
C6	63,2%
C8	82,1%
E6	59,4%
E8	63,9%



B.3.2 Posttest

Type 1:

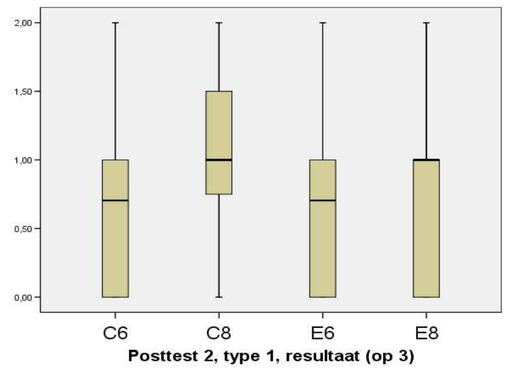
Opgave 4.1:
Voor elk natuurlijk getal $n > 1$ definiëren we $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$. Op hoeveel nullen **eindigt** 100! ?

Verbeteringsschema (op 3):

- Enkel tellen van de tientallen (11 nullen) $\rightarrow$ **+1**
- Veelvouden van vijf ook geteld ($\pm$20 nullen) $\rightarrow$ **+1**
- Eindresultaat volledig correct $\rightarrow$ **+1**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	23,5%
C6	21,6%
C8	35,7%
E6	23,2%
E8	27,2%



Type 2:

Opgave 4.2:

1. Als alle werknemers van een bedrijf een loonsverhoging van 3% zouden krijgen, wat gebeurt er dan met het gemiddelde loon?
2. Als alle werknemers een verhoging van 30 EUR per maand zouden krijgen, wat gebeurt er dan met het gemiddelde loon?
3. Als jouw loon boven het gemiddelde lag, had je dan liever een verhoging van 3% of van 30 EUR?

Voorziene oplossing:

1. Het gemiddelde loon stijgt eveneens met 3% want

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$$

en

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1.03u_i = \frac{1}{n}1.03\sum_{i=1}^{n} u_i = 1.03\overline{u}$$

2. Het gemiddelde loon stijgt eveneens met 30 EUR want

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$$

en

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (u_i + 30) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} u_i + n30) = \overline{u} + 30$$

3. Als het loon meer dan 1000 EUR bedraagt, is een verhoging van 3% beter dan een verhoging van 30 EUR.

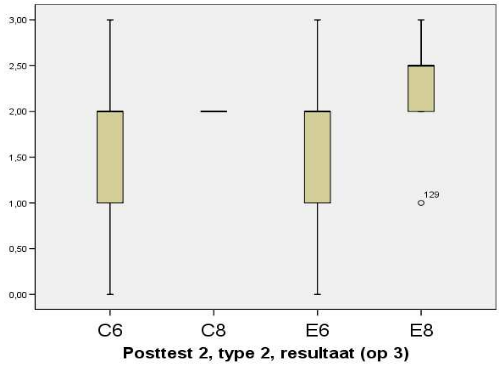
Het derde onderdeel van deze vraag werd door de leerlingen vaak heel 'vaag' beantwoord, waarbij de leerlingen de 'drempel' van 1000 EUR niet gebruikten en/of vermeldden.

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte methode en uitwerking voor (a) → **+1**
- Correcte methode en uitwerking voor (b) → **+1**
- Correct antwoord en motivering voor (c) → **+1**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	61,4%
C6	58,6%
C8	66,7%
E6	58,7%
E8	79,6%



Type 3:

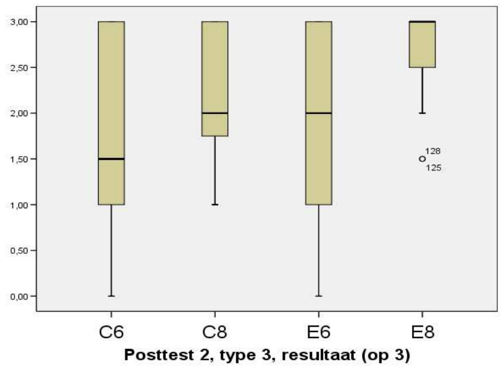
Opgave 4.3:
Als een regelmatige zeshoek ingeschreven is in een cirkel met straal R, hoelang is een diagonaal dan die **niet** door het middelpunt gaat?

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	65,5%
C6	58,3%
C8	73,8%
E6	65,6%
E8	89,8%



Type 4:

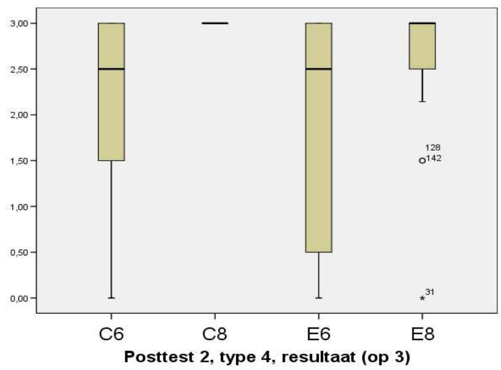
Opgave 4.4:
Is de veelterm $P(y) = y^8 - 256$ deelbaar door $y^2 - 4$? Waarom (niet)?

Verbeteringsschema (op 3):

- Enkel ja → **+0,5**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**
- Indien de conclusie overeenstemt met het gevonden resultaat **+1**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	71,4%
C6	72,5%
C8	100,0%
E6	63,3%
E8	85,5%



Type 5:

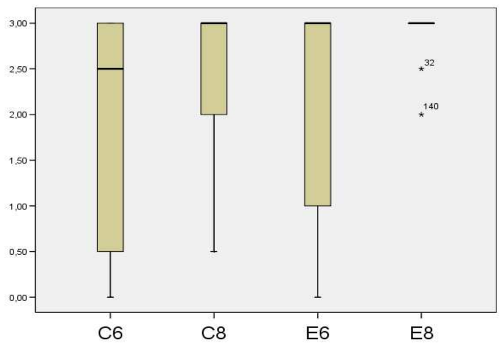
Opgave 4.5:
Op hoeveel manieren kan men 10 appels verdelen onder Wim, Tom en Greet zodanig dat Wim er minstens 3 krijgt, Tom en Greet elk minstens 2 en Greet hoogstens 3?

Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+2**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	71,6%
C6	63,8%
C8	78,6%
E6	72,1%
E8	97,2%



Type 6:

Opgave 4.6:
Een rechthoek met oppervlakte R wordt verkregen door in een vierkant met oppervlakte V twee overstaande zijden 25% te verlengen en de andere zijden 25% te verkorten. Bereken $\frac{R}{V}$.

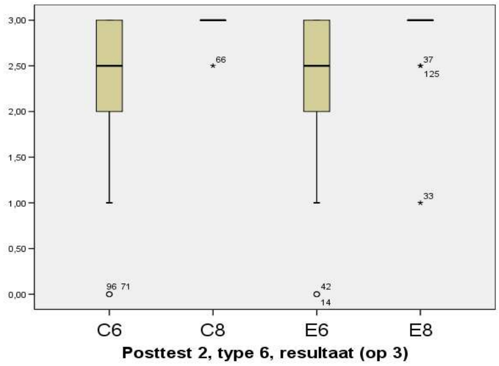
Verbeteringsschema (op 3):

- Correcte figuur → **+1**
- Correcte methode → **+1**
- Correcte uitwerking van de methode → **+1**

- Per rekenfout **-0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	83,1%
C6	81,7%
C8	97,6%
E6	80,0%
E8	94,4%



Type 7:

Opgave 4.7:

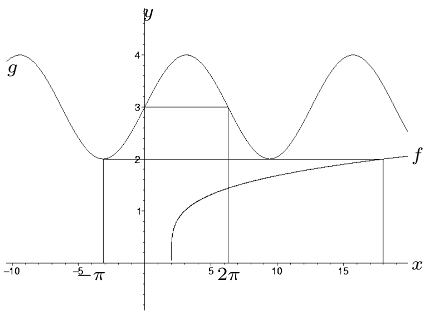
Gegeven:

$$f(x) = \sqrt[A]{x+B}$$

$$g(x) = \sin Cx + D$$

Gevraagd:

Bepaal A, B, C en D.



Voorziene oplossing:

$$\begin{aligned}
f(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[A]{2+B} = 0 \\
&\Rightarrow \quad B = -2 \\
f(18) = 2 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[A]{18-2} = \sqrt[A]{16} = 2 \\
&\Rightarrow \quad A = 4 \\
&\Rightarrow \quad f(x) = \sqrt[4]{x-2}
\end{aligned}$$

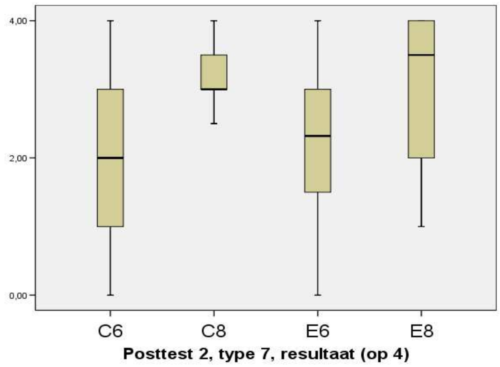
$$\begin{aligned} g(0) = 3 \quad &\Rightarrow \quad D = 3 \\ \text{periode } 4\pi \quad &\Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \end{aligned}$$

Verbeteringsschema (op 4):

- Per correcte parameter → **+1**
- Indien redenering (min of meer) correct maar resultaat niet → **+0,5**

Behaalde score:

Groep	Gemiddelde score
Totale groep	58,0%
C6	51,8%
C8	80,4%
E6	57,0%
E8	77,1%



Bijlage C

Enquêtes

C.1 Enquêteformulieren

C.1.1 Voor het secundair onderwijs - 2001

Naam:
Leeftijd:
Scholen:
Klassen:

1. Hoelang maakt u reeds gebruik van ICT in uw wiskundelessen? Hoe hebt u computeralgebrasystemen en ICT leren kennen?
2. Hoe vaak maakt u gebruik van dergelijke computeralgebrasystemen tijdens de wiskundelessen? In welke klassen?
3. Welke onderwerpen krijgen hierbij uw voorkeur?
4. Hoe gaat u te werk? Geeft u demonstraties of werken de leerlingen zelfstandig?
5. Waar hebben de sessies plaats? Heeft u een eigen wiskundeklas? Is deze klas voorzien van één of meerdere computers? Hebben de leerlingen grafische rekenmachines? Volstaat de materiële uitrusting van uw school?

6. Waar haalt u het lesmateriaal?

7. Wat vindt u van de volgende stellingen?

   - "Mijn conclusie is dat computertechnologie het onderwijs in veel technische, algebraïsche en algoritmische vaardigheden overbodig maakt. Er zal een verschuiving in de inhoud en de doelen van het wiskundeonderwijs moeten plaats vinden, zodat leerlingen met inzicht de computertechnologie kunnen toepassen. De nieuwe ruimte kan worden benut door meer nadruk te leggen op probleem oplossen, modeleren, redeneren." (van Streun, [81], p. 340)
   - "Een eenvoudige regel voor toetsen en examens. Wanneer je intellectuele fitheid beoordeelt, is geen werktuig toegelaten, zelfs geen eenvoudige rekenmachine. Wanneer je 'problem solving' beoordeelt, zijn alle werktuigen, in het bijzonder grafische rekenmachines, toegelaten." (Kutzler, [47], p. 78)
   - "De nascholing - bijna exclusief afgestemd op de integratie van de pc in de wiskunde - is zeer persoonsgebonden en minimaal. Zij is eerder op de eigen persoon gericht en vindt (voorlopig) geen implementatie in het lesgebeuren zelf." (*Verslag van de toestand van het onderwijs* van de Inspectie Secundair Onderwijs van het Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap voor 1997)
   - "Het gebruik van ICT in de lessen wiskunde zal een aanpassing van het onderwijsproces meebrengen. Dit houdt o.a. voor de leerlingen een grotere gedifferentieerde aanpak in." (Baeyens, [6], p. 377)

8. Hoe staan de leerlingen t.o.v. het gebruik van de computer in de wiskundeles? Welke invloed heeft ICT op hun leerproces?

9. Zou u zichzelf een voor- of tegenstander noemen van het gebruik van ICT in de wiskundeles? Waarom?

C.1.2 Voor het secundair onderwijs - 2005

Naam:
Leeftijd:
Geslacht:
Scholen:
Klassen:

1. Voorgeschiedenis
   (a) Hoelang maakt u reeds gebruik van een grafisch rekentoestel in uw wiskundelessen?
   (b) Hoelang maakt u reeds gebruik van computeralgebrasystemen in uw wiskundelessen?
   (c) Hoe hebt u deze ICT-hulpmiddelen leren kennen?
2. Infrastructuur
   (a) Welke computeralgebrasystemen en/of software heeft u ter beschikking?

☐ Derive	☐ Graphmatica
☐ Cabri	☐ Softmaths
☐ Excel	☐ Geocadabra
☐ Mathcad	☐ Eigen ontwerp
☐ Wirisonline	☐ Andere
☐ Maple	

   (b) Heeft u een eigen wiskundelokaal? Is deze klas voorzien van één of meerdere computers en projectiemogelijkheden?
   (c) Maakt u soms gebruik van een pc-lokaal? Zijn deze voldoende beschikbaar?
   (d) Beschikt de school over andere lokalen voorzien van ICT-hulpmiddelen (open leercentrum, mediatheek,...)?

2. (e) Beschikt de school over een elektronische leeromgeving? Maakt u hiervan gebruik?
   (f) Volstaat de materiële uitrusting van uw school?
   (g) Beschikken alle leerlingen over een (eigen) grafisch rekentoestel?

3. CAS in de praktijk
   (a) Hoe vaak maakte u tijdens het vorige schooljaar gebruik van computeralgebrasystemen tijdens de wiskundelessen? In alle klasgroepen?
   (b) Hoe ging u te werk? Gaf u demonstraties of werkten de leerlingen zelfstandig?
   (c) Welke onderwerpen behandelde u?
   (d) Waar vond u het nodige lesmateriaal?
   (e) Mochten/moesten de leerlingen de computer gebruiken tijdens overhoringen en/of examens?
   (f) Mochten de leerlingen het grafisch rekentoestel gebruiken tijdens overhoringen en/of examens?

4. Invloed op de leerlingen
   (a) Hoe stonden de leerlingen t.o.v. het gebruik van de computer in de wiskundelessen? Zijn er verschillen merkbaar tussen bepaalde klasgroepen?
   (b) Had het gebruik van ICT (in het bijzonder het gebruik van de computer) invloed op het leerproces van de leerlingen?
   (c) Slaagden de leerlingen erin om het gebruik van computer en/of grafisch rekentoestel te combineren met het maken van goede notities?
   (d) Stelden de leerlingen bij grotere problemen eerst een 'planning' op of wierpen ze zich onmiddellijk op de computer of de grafische rekenmachine?

4. (e) Konden de leerlingen op school of thuis verder oefenen met de gebruikte computeralgebrasystemen? Werd dit gestimuleerd?

5. Knelpunten

   Had u tijdens de wiskundelessen met ICT-gebruik soms te kampen met één van de volgende problemen?

   (a) Organisatie
   (b) Tijd
   (c) Discipline

6. De mening van leerkracht

   (a) Het gebruik van ICT vraagt soms extra tijd die er niet is. Welke veranderingen aan de huidige leerplannen zou u voorstellen om de tijdsdruk te laten afnemen?
   (b) Bieden de nascholingen en handboeken voldoende materiaal aan om de implementatie van ICT in de wiskundeles te bevorderen?
   (c) Een wiskundeleerkracht is steeds vaker een 'wiskundecoach'. Hoe voelt u zich onder deze 'nieuwe' rol?
   (d) Zou u zichzelf een voor- of tegenstander noemen van het gebruik van ICT? Waarom?

C.1.3 Voor het hoger onderwijs - 2005

Naam:
Instelling:
Departement:

Vak:
Richting(en): Eerste jaar bachelor ______________________

1. Voor de opmaak van de cursustekst en/of presentatie van de lessen maak ik gebruik van:
   ☐ Wetenschappelijk rekentoestel
   ☐ Grafisch rekentoestel
   ☐ Computersoftware, nl. ______________
   ☐ Applets
   ☐ Internet
   ☐ Geen van bovenstaande
2. Tijdens de lessen worden de studenten gestimuleerd om gebruik te maken van
   ☐ Wetenschappelijk rekentoestel
   ☐ Grafisch rekentoestel
   ☐ Computersoftware, nl. ______________
   ☐ Applets
   ☐ Internet
   ☐ Geen van bovenstaande
3. Tijdens het examen mogen de studenten gebruik maken van
   ☐ Wetenschappelijk rekentoestel
   ☐ Grafisch rekentoestel
   ☐ Computersoftware, nl. ______________
   ☐ Applets
   ☐ Geen van bovenstaande

4. Wordt het examen opgesplitst in meerdere delen om het gebruik van ICT-hulpmiddelen mogelijk te maken?
   ☐ Ja
   ☐ Neen
   ☐ Niet van toepassing

5. Hebben uw studenten voldoende voorkennis op het vlak van ICT-hulpmiddelen om deze efficiënt te kunnen gebruiken?
   ☐ Ja
   ☐ Neen
   ☐ Geen voorkennis vereist
   ☐ Niet van toepassing

6. Eventuele opmerkingen:
   ____
   ____
   ____

C.2 Representativiteit

Provincie	Verdeling scholen 2001-2002		Deelnemende scholen	
	Absoluut	Relatief	Absoluut	Relatief
Antwerpen	252	27,6%	26	18,2%
Vlaams Brabant	123	13,4%	18	12,6%
BHG[1]	32	3,5%	5	3,5%
West-Vlaanderen	185	20,2%	33	23,1%
Oost-Vlaanderen	191	20,9%	40	27,9%
Limburg	132	14,4%	21	14,7%
Totaal	915	100,0%	143	100,0%

Tabel C.1: Verdeling van de deelnemende scholen over de verschillende provincies

[1] Brussel Hoofdstedelijk Gewest

Net	Aange-schreven scholen	Deel-nemende scholen	Verdeling scholen 2001-2002	Deel-nemende leraars	Verdeling leraars 2001-2002
VGO	71,2%	76,2% (109)	65,5%	79,1% (201)	71,9%
GO	26,7%	21,7% (31)	26,1%	17,7% (45)	18,5%
OGO	2,1%	2,1% (3)	8,4%	3,2% (8)	9,6%
Totaal	100,0%	100,0% (143)	100,0%	100,0% (254)	100,0%

Tabel C.2: Verdeling van de deelnemende scholen en leraars over de verschillende netten

	Deelnemende leerkrachten	Verdeling personeelsleden 2001-2002
Vrouw	57,3% (121)	56,5%
Man	42,7% (90)	43,5%

Tabel C.3: Verdeling van de deelnemende leraars volgens geslacht

Leeftijdscategorie	Deelnemende wiskunde-leerkrachten	Verdeling personeelsleden 1999-2000
20-29 jaar	15,2%	9,9%
30-39 jaar	21,5%	19,2%
40-49 jaar	40,5%	35,7%
50-59 jaar	22,8%	32,5%
60+ jaar	0,0%	3,1%

Tabel C.4: Verdeling van de deelnemende leraars in leeftijdscategorieën

Provincie	Verdeling scholen 2005-2006		Deelnemende scholen	
	Absoluut	Relatief	Absoluut	Relatief
Antwerpen	257	27,8%	46	19,2%
Vlaams Brabant	128	13,8%	32	13,3%
BHG[2]	30	3,2%	7	2,9%
West-Vlaanderen	182	19,7%	64	26,7%
Oost-Vlaanderen	192	20,8%	55	22,9%
Limburg	136	14,7%	36	15,0%
Totaal	925	100,0%	240	100,0%

Tabel C.5: Verdeling van de deelnemende scholen over de verschillende provincies

[2]Brussel Hoofdstedelijk Gewest

Net	Aange-schreven scholen	Deelnemende scholen	Verdeling scholen 2005-2006	Deelnemende leraars leraars	Verdeling leraars 2005-2006
VGO	60,4%	73,8% (177)	67,3%	78,1% (296)	71,2%
GO	31,5%	21,7% (52)	24,6%	17,7% (67)	19,3%
OGO	8,1%	4,5% (11)	8,1%	4,2% (16)	9,5%
Totaal	100,0%	100,0% (240)	100,0%	100,0% (382)	100,0%

Tabel C.6: Verdeling van de deelnemende scholen en leraars over de verschillende netten

	Deelnemende leerkrachten	Verdeling personeelsleden 2005-2006
Vrouw	63,2% (242)	57,2%
Man	34,8% (129)	42,8%

Tabel C.7: Verdeling van de deelnemende leraars volgens geslacht

Leeftijdscategorie	Deelnemende wiskunde-leerkrachten	Verdeling personeelsleden 2005-2006
20-29 jaar	20,7%	16,9%
30-39 jaar	24,7%	21,3%
40-49 jaar	32,3%	26,6%
50-59 jaar	22,0%	31,4%
60+ jaar	0,3%	3,8%

Tabel C.8: Verdeling van de deelnemende leraars in leeftijdscategorieën

Bijlage D

Cd-rom met het ontwikkelde lesmateriaal

Op de bijgevoegde cd-rom vindt men het lesmateriaal terug dat we voor onze onderwijsexperimenten hebben ontwikkeld. Het materiaal staat eveneens online ter beschikking op:

http://cage.ugent.be/~svw/doctoraat/testgroepen2/derive-groep1/index.htm
(voor Derive-gebruikers en volgens het (oude) leerplan wiskunde van het vrij gesubsidieerd onderwijs)

http://cage.ugent.be/~svw/doctoraat/testgroepen2/derive-groep2/index.htm
(voor Derive-gebruikers en volgens het (oude) leerplan wiskunde van het gemeenschapsonderwijs)

http://cage.ugent.be/~svw/doctoraat/testgroepen2/mathcad-groep/index.htm
(voor Mathcad-gebruikers en volgens het (oude) leerplan wiskunde van het vrij gesubsidieerd onderwijs)

http://cage.ugent.be/~svw/doctoraat/testgroepen2/internet-groep/index.htm
(met applets en internetknoppen[1] en volgens het (oude) leerplan wiskunde van het vrij gesubsidieerd onderwijs)

[1] Sommige knoppen zijn ondertussen in onbruik geraakt.

Bibliografie

[1] Adams R.A. (1995), Calculus: a complete course, 3th ed., Addison-Wesley Publishers Limited

[2] Apostel T.M. (1967), Calculus: Volume I, 2nd ed., Blaisdell Publishing Company

[3] Artigue M. & Lagrange J.-B. (1997), Pupils Learning Algebra with DERIVE: a Didactic Perspective, *International Reviews on Mathematical Education (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik)*, Vol. 29, No. 4, 105-112 Beschikbaar op:
http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm974a1.pdf

[4] Artigue M. (2002), Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 7, 245-274 Beschikbaar op:
http://www.lkl.ac.uk/came/events/freudenthal/1-Presentation-Artigue.pdf

[5] Aspetsberger K. (1996), Investigations on the use of DERIVE for students at the age of 17 and 18, *International DERIVE Journal*, Vol. 3, No. 1., 58-72

[6] Baeyens P. (2000), ICT en wiskunde in de eerste graad van het secundair onderwijs. Een kritische reflectie..., *Wiskunde & Onderwijs*, 26ste jaargang, No. 103, 377-384

[7] Bakker A. & Gravemeijer K. (2006), An Historical Phenomenology of Mean and Median, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 62, No. 2, 149-169

[8] Barab S. & Squire K. (2004), Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground, *The Journal of the Learning Sciences*, Vol. 13, No. 1, 1-14
Beschikbaar op:
http://inkido.indiana.edu/research/onlinemanu/papers/dbr-jls.pdf

[9] Barzel B. (2005), New technology? New ways of teaching - no time left for that!, *Proceedings of CAME Meeting 2005, Roanoke (USA)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic3-Barzel-paper.pdf

[10] Bennett F. (1996), Computers as Tutors: Solving te crisis in Education, Faben Inc.
Beschikbaar op:
http://www.cris.com/~Faben1/

[11] Blume G. (2003), Reflections on John Monoghan's "Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach", *Proceedings of CAME Meeting 2005, Roanoke (USA)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic1-Blume-reaction.pdf

[12] Bogaert P. et al., Van Basis tot Limiet 6 - analyse 4: integraalrekening (6/8), Die Keure Educatief, Brugge

[13] Böhm J. (1999), Basic Skills and Technology - not a Contradiction, but a Completion, *5th ACDCA Summer Academy, Gösing, Austria*
Beschikbaar op:
http://www.acdca.ac.at/material/t3/t3skills.pdf

[14] Brackx F. & Van Wonterghem S. (2002), Het vernieuwd toelatingsexamen burgerlijk ingenieur: de jaren 2001 en 2002, *Wiskunde & Onderwijs*, 28ste jaargang, No. 112, 318-324

[15] Brackx F. & Van Wonterghem S. (2003), Het vernieuwd toelatingsexamen burgerlijk ingenieur: de zwanenzang, *Wiskunde & Onderwijs*, 29ste jaargang, No. 116, 344-351

[16] Brown A.L. (1992), Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings, *The Journal of the Learning Sciences*, Vol. 2, No. 2, 141-178

[17] Brown R. (2003), Comparing system wide approaches to the introduction of Computer Algebra Systems into examinations, *Proceedings of CAME Meeting 2003, Reims (France)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/1-Presentation-Brown.doc

[18] Brown R. (2004), The assessing of mathematics skills in a secondary school CAS environment, *Proceedings of TIME-2004, Montreal (Canada)*, ISBN 3-901769-59-5

[19] Buchberger B. (1990), Should Students Learn Integration Rules?, *SIGSAM Bulletin*, Vol. 24, No. 1, 10-17
Beschikbaar op:
http://www.risc.uni-linz.ac.at/people/buchberg/papers/1990-00-00-A.pdf

[20] Cobb P. & Stephan M. & McClain K. & Gravemeijer K. (2001), Participating in Classroom Mathematical Practices, *The Journal of the Learning Sciences*, Vol. 10, No. 1 & 2, 113-163

[21] De Block A. & Heene J. (1997), Inleiding tot de algemene didactiek, Standaard Educatieve Uitgeverij, Antwerpen

[22] De Clerck F. (2005), Proclamatie van de twintigste Vlaamse Wiskunde Olympiade en de vierde Junior Wiskunde Olympiade: Openingswoord, *Wiskunde & Onderwijs*, 31ste jaargang, No. 123, 201-208

[23] Persconferentie PISA2000 (2001), door Mevr. Marleen Vanderpoorten, Vlaams minister van Onderwijs en Vorming
Beschikbaar op:
http://www.ond.vlaanderen.be/schooldirect/bijlagen0102/pisa/pisa_perstekst.pdf

[24] De Meyer I. & Van de Poele L. (2004), Leerstijlen en onderwijsstrategieën in PISA2000, Vakgroep Onderwijskunde, Universiteit Gent

[25] De Meyer I. & Pauly J. & Van de Poele L. (2004), Leren voor de problemen van morgen: De eerste resultaten van PISA2003, Vakgroep Onderwijskunde, Universiteit Gent Beschikbaar op:
http://www.ond.vlaanderen.be/publicaties/eDocs/pdf/208.pdf

[26] Fensterdidaktik, *DERIVE-Texte auf dem Internet* Beschikbaar op:
http://www.elew.de/kurs1/ergebnisse/04fertig.html

[27] Drijvers P. (1992), DERIVE in the Dutch Classroom, *Teaching Mathematics with DERIVE*, Böhm J. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 133-140

[28] Drijvers P. & van Herwaarden O. (2000), Instrumentatie van ICT-gereedschap: algebra met computeralgebra, *Nieuwe Wiskrant*, Vol. 20, No. 1, 38-43
Beschikbaar op:
http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/3762.pdf

[29] Drijvers P. (2002), Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen, *Nieuwe Wiskrant*, Vol. 22, No. 1, 36-41
Beschikbaar op:
http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4796.pdf

[30] Drijvers P. (2003), Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter, *Dissertation*, Freudenthal Institute, Utrecht
Beschikbaar op:
http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2003-0925-101838/full.pdf

[31] Discussion session of the Mind & Machine group: report, coördinator Paul Drijvers, *CAME Meeting 2003, Reims (France)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/Theme2-Group-Summary.doc

[32] Gage J. (2002), Using the Graphic Calculator to Form a Learning Environment for the Early Teaching of Algebra, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. 9, No. 1, 3-25

[33] Gevers P. et al. (1993), Nieuwe Delta 6 Analyse (6-8u), Wolters Plantyn, Deurne

[34] Guin D. & Trouche L. (1999), The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 3, 195-227

[35] Guin D. & Trouche L. (2005), Distance training, a key mode to support teachers in the integration of ICT? Towards collaborative conception of living pedagogical resources, *Proceeding of CERME 4, Sante Feliu de Guixols (Spain)*

Beschikbaar op:
http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/9/Guin-Trouche.pdf

[36] Haspekian M. (2005), An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 10, 109-141

[37] Heugl H. (1996), Symbolic computation systems in the classroom, *International DERIVE Journal*, Vol. 3, No. 1, 1-10

[38] Heugl H. (1999), The necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems, *5th ACDCA Summer Academy, Gösing, Austria*
Beschikbaar op:
http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/g_heugl.pdf

[39] Jennekens E. & Deen G. (1974), Wiskunde '68: Deel B analyse, Uitgeverij De Sikkel, Oostmalle

[40] Jennekens E. & Deen G. (1990), Studiepakket wiskunde 6: analyse II, Uitgeverij De Boeck, Antwerpen

[41] Kadijevich D. (2002), Towards a CAS promoting links between procedural and conceptual mathematical knowledge, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. 9, No. 1, 69-73

[42] Kastberg S. & Leatham K. (2005), Research on graphing calculators at the secondary level: Implications for mathematics teacher education, *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, Vol. 5, No. 1, 25-37
Beschikbaar op:
http://www.editlib.org/index.cfm/files/paper_5641.pdf?fuseaction=Reader.Download FullText&paper_id=5641

[43] Kieran C. (2005), Interpreting and assessing the answer given by the CAS expert: a reaction paper, *Proceedings of CAME Meeting 2005, Roanoke (USA)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic2-Kieran-reaction.pdf

[44] Klinger W. (1993), Using Derive in the third and fourth form of grammar schools in Austria: elementary algebra, *DERIVE in Education: opportunities and strategies*, Heugl H. & Kutzler B. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 123-138

[45] Kutler B. (1994), The future of teaching mathematics, *International Derive Journal*, Vol. 1, No. 1, 37-48

[46] Kutzler B. (1999), The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, *5th ACDCA Summer Academy, Gösing, Austria* Beschikbaar op:
http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/g_kutzle.pdf

[47] Kutzler B. (2000), De algebraïsche rekenmachine als pedagogisch hulpmiddel om wiskunde te onderwijzen, *Wiskunde & Onderwijs*, 26ste jaargang, No. 101, 61-82

[48] Lagrange J.-B. (2005), Didactic time, epistemic gain and consistent tool: taking care of teachers' needs for classroom use of CAS, *Proceedings of CAME Meeting 2005, Roanoke (USA)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic3-Lagrange-reaction.pdf

[49] Lechner J. (1992), Einsatz von Derive von der 4.-7.Klasse AHS, *Teaching Mathematics with DERIVE*, Böhm J. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 159-174

[50] Lynch R.V. & Ostberg D.R. & Kuller R.G. (1973), Calculus with Computer Applications, Xerox College Publishing, Toronto, Canada

[51] Macintyre T. & Forbes I. (2002), Algebraic Skills and CAS - Could Assessment Sabotage the Potential?, *The International of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. 9, No. 1, 29-56

[52] Mayes R.L. (1994), Implications of Research on CAS in College Algebra, *International DERIVE Journal*, Vol. 1, No. 2, 21-37

[53] Medici P.R. (1992), Computer and Education: A High-School Experiment Using the Mathematical Software DERIVE, *Teaching Mathematics with DERIVE*, Böhm J. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 175-190

[54] Monaghan J. (2005), Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach, *Proceedings of CAME Meeting 2005, Roanoke (USA)* Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic1-Monaghan-paper.pdf

[55] Moore D.S. & McCabe G.P. (2005), *Statistiek in de Praktijk (theorieboek)*, 3e herziene uitgave, Academic Service, ISBN 90 395 1421 6

[56] Mullis I.V.S. & Martin M.O. & Gonzalez E.J. & Chrostowski S.J. (2004), TIMSS 2003 International Mathematics Report, International Study Center, Boston College, ISBN 1-889938-34-3

[57] Mullis I.V.S. & Martin M.O. & Smith T.A. & Garden R.A. & Gregory K.D. & Gonzalez E.J. & Chrostowski S.J. & O'Connor K.M. (2004), TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003, International Study Center, Boston College, ISBN 1-889938-30-0

[58] Ng W.L. (2003), Effects of Computer Algebra Systems on Secondary Students' Achievement in Mathematics: A Pilot Study in Singapore, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. 10, No. 4, 235-250

[59] Nocker R.J. (1996), The impact of DERIVE on classroom methodology, *International DERIVE Journal*, Vol. 3, No. 1, 73-95

[60] Papy G. (1998), Overwegingen bij de wiskundige vorming, *Wiskunde & Onderwijs*, 24ste jaargang, No. 96, 237-348

[61] Peschek W. (2005), The impact of CAS on our understanding of mathematics education, *Proceedings of CAME Meeting 2005, Roanoke (USA)* Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic2-Peschek-paper.pdf

[62] Rothery A. (1994), Using computer algebra systems in teaching mathematical modelling, *DERIVE in Education: Opportunities and Strategies*, Heugl H. & Kutzler B. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 233-246

[63] Ruthven K. (1990), The influence of graphic calculators use on transition from graphic to symbolic forms, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, 431-450

[64] Ruthven K. (2002), Instrumenting mathematical activity: reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 7, 275-291

[65] Russell M. & Haney W. (2000), Bridging the Gap between Testing and Technology in Schools, *Education Policy Analysis Archives*, Vol. 8, No. 19
Beschikbaar op:
http://olam.ed.asu.edu/epaa/v8n19.html

[66] Salas S.L. & Hille E. (1990), Calculus: One and Several Variables, 6th ed., John Wiley & Sons Inc.

[67] Schneider E. (1999), The use of CAS in teaching mathematics: reflections on possibilities and problems of cooperation between theory and practice on the basis of a research an development project, *Proceedings of CAME Meeting, Rehovot (Israel)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/weizmann/CAME-Forum2.pdf

[68] Schollum M. (1992), The usage of DERIVE in mathematics bij fifteen-year-old pupils, *Teaching Mathematics with DERIVE*, Böhm J. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 39-44

[69] Sherman G. (1996), A review of 'Computers as Tutors: Solving the crisis in Education, *Education Policy Analysis Archives*, Vol. 4, No. 16
Beschikbaar op:
http://epaa.asu.edu/epaa/v4n16.html

[70] Simon M.A. (1995), Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, No. 2, 114-145

[71] Tant D. (2002), Zeventiende Vlaamse Wiskunde Olympiade en Eerste Vlaamse Olympiade Junior: Tweede ronde en finale, *Wiskunde & Onderwijs*, 28ste jaargang, No. 110, 153-170

[72] Tant D. (2003), Achttiende Vlaamse Wiskunde Olympiade en Eerste Vlaamse Olympiade Junior: Tweede ronde en finale, *Wiskunde & Onderwijs*, 29ste jaargang, No. 114, 151-171

[73] Tant D. (2004), Negentiende Vlaamse Wiskunde Olympiade en Eerste Vlaamse Olympiade Junior: Eerste ronde. De slechtst beantwoorde vragen en gemeenschappelijke vragen, *Wiskunde & Onderwijs*, 30ste jaargang, No. 117, 55-73

[74] Tant D. (2005), Negentiende Vlaamse Wiskunde Olympiade en Eerste Vlaamse Olympiade Junior: Tweede ronde en finale, *Wiskunde & Onderwijs*, 30ste jaargang, No. 118, 147-170

[75] Tant D. (2005), Twintigste Vlaamse Wiskunde Olympiade en Eerste Vlaamse Olympiade Junior: Eerste ronde. De slechtst beantwoorde vragen en gemeenschappelijke vragen, *Wiskunde & Onderwijs*, 31ste jaargang, No. 122, 161-176

[76] Tant D. (2005), Twintigste Vlaamse Wiskunde Olympiade en Eerste Vlaamse Olympiade Junior: Tweede ronde en finale, *Wiskunde & Onderwijs*, 31ste jaargang, No. 123, 247-270

[77] Trouche L. (2003), Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE): Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations, *Proceedings of CAME Meeting 2003, Reims (France)*
Beschikbaar op:
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/2-Presentation-Trouche.doc

[78] Van den Broeck A. & Van Damme J. & Brusselmans-Dehairs C. & Valcke M. (2004), Vlaanderen in TIMSS 2003 Beschikbaar op:
http://www.ond.vlaanderen.be/publicaties/eDocs/pdf/209.pdf

[79] Van Maldeghem H. (1995), Wiskunde is ook Wiskunst, *Wiskunde & Onderwijs*, 21ste jaargang, No. 84, 398-401

[80] Van Petegem P. & Deneire A. (2003), Het Hoger Secundair Onderwijs in Vlaanderen geschetst. Resultaten van de International Survey of Upper Secondary Schools (ISUSS), Mechelen: Wolters Plantyn.

[81] van Streun A. (2000), Integratie computertechnologie in het wiskundeonderwijs, *Wiskunde & Onderwijs*, 26ste jaargang, No. 103, 323-340

[82] Van Wonterghem S. (1997), Ontwikkelen en verzamelen van toepassingen en computerinitiaties voor de tweede en de derde graad van het secundair onderwijs, *Proefschrift Licentie Wiskunde*, Universiteit Gent

Materiaal beschikbaar op:
http://cage.ugent.be/~svw/DfW/

[83] Van Wonterghem S. (2004), Can a Computer Algebra System improve the Mathematical Abilities of Pupils?, *Proceedings of TIME-2004, Montreal (Canada)*, ISBN 3-901769-59-5

[84] Van Wonterghem S. (2006), The use of Technology in Flemish Mathematics Education: Secondary versus Higher Education, *Proceedings of DES-TIME-2006, Dresden (Duitsland)*, ISBN 3-901769-74-9

[85] Vérillon P. & Rabardel P. (1995), Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education*, Vol. 10, No. 1, 77-101

[86] Vygotsky L.S. (1978), *Mind in society: The development of higher psychological processes*, Cambridge, Harvard University Press

[87] Watkins A.J. (1992), Introducing Calculus with DERIVE, *Teaching Mathematics with DERIVE*, Böhm J. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 1-19

[88] Watkins A.J. & Gadd K. (1993), DERIVE-centred Research at the University of Plymouth, *DERIVE in Education: opportunities and strategies*, Heugl H. & Kutzler B. (Ed.), Chartwell-Bratt, Bromley, England, 63-76

[89] Windels B. (2001), ICT-chatbox, *Wiskunde & Onderwijs*, 27ste jaargang, No. 106, 154-157

[90] Wurnig O. (1996), From the first use of the computer up to the integration of DERIVE in the teaching of mathematics, *International DERIVE Journal*, Vol. 3, No. 1, 11-24

[91] Wurnig O. (2001), A summary about the experiences how to integrate CAS hand-held computers (TI-89/92) in Mathematical Education in Austria, *Proceedings of World-Conference SCI 2001, Orlando (USA)*
Beschikbaar op:
http://www.acdca.ac.at/material/vortrag/sci2001.pdf

[92] Onderwijsspiegel: Verslag over de toestand van het onderwijs, Schooljaar 2003-2004, Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap.
Beschikbaar op:

http://www.onderwijsinspectie.be/onderwijsspiegel/onderwijsspiegel0304/Onderwijsspiegel2003-2004.PDF

[93] Statistisch Jaarboek van het Vlaams Onderwijs: schooljaar 2001-2002, Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap - Departement Onderwijs

[94] Statistisch Jaarboek van het Vlaams Onderwijs: schooljaar 2005-2006, Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap - Departement Onderwijs
Beschikbaar op:
http://www.ond.vlaanderen.be/onderwijsstatistieken/2005-2006/jb0506/default.htm

[95] Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs (2004), Wiskunde Leerplan A, Derde graad ASO, Studierichtingen met component wiskunde, LICAP BRUSSEL D/2004/0279/019, ISBN-nummer: 90-6858-380-8
Beschikbaar op:
http://ond.vvkso-ict.com/leerplannen/doc/Wiskunde-2004-019.pdf