STRIKT FINITISTISCHE REKENKUNDE ZONDER VREES

Albrecht Heeffer

Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie, Ugent

Inleiding

Morris Kline gaf zijn historische studie van de wiskunde van 1980 de bijtitel: "The Loss of Certainty" (Kline, 1980). Zijn betoog is dat de vreemde nieuwe meetkundes en algebras van de negentiende eeuw het geloof onderuit haalden in een absolute wiskunde die de natuur kan beschrijven. Vermits verschillende meetkundes, die onderling incompatibel zijn, de werkelijkheid kunnen beschrijven kan er niet één enkele absolute wiskunde bestaan. Hel lijkt me dat de opwerpingen en tegenargumenten op een strik finitistische wiskunde, waar Jean Paul Van Bendegem (2010) op reageert, binnen deze context moeten gezien worden. Het zijn reacties die een soort verontwaarding uiten op het verlies van zekerheid in een absolute wiskunde. Alsof met het wegvallen van oneindigheid ook een essentieel element van die absolute ware wiskunde verdwijnt. Van Bendegem verdedigd zijn project door de tegenargumenten te weerleggen. Vanuit onze sympathie voor dit levenswerk zou ik hierbij een andere strategie willen voorstellen. Stel de critici op hun gemak door aan te tonen dat hun vrees voor een wiskunde zonder oneindigheden onterecht is. Zeg hen dat ze een dubbele standaard hanteren: vanuit hun epistemologische vooronderstellingen verwerpen ze een strikt finitistische wiskunde maar anderzijds hanteren ze die dagelijks. Ik leg uit waarom.

Een inconsistente rekenkunde

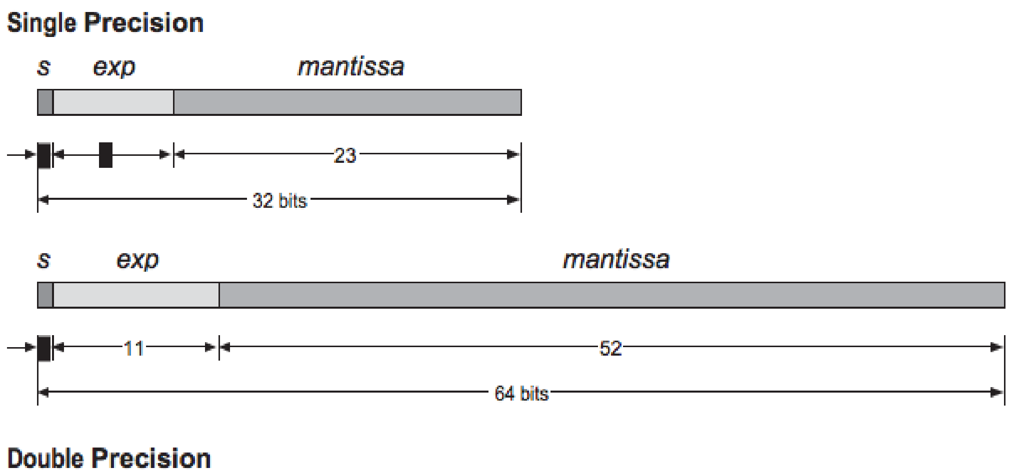
Eind 1994 ontdekte Thomas Nicely, prof aan het Lynchburg College, problemen met toen net gelanceerde Intel Pentium chip. Een programma voor de berekeningen van priemgetallen gaf vreemde resultaten. Bij nader onderzoek bleek er een reproduceerbare fout te zitten in de eenheid op de chip die verantwoordelijk is voor de deling van floating point getallen. Gegeven de berekening

$$x-\left(\frac{x}{y}\right)y=z$$

die vanzelfsprekend steeds een nul moet opleveren, gaf de Pentium chip het resultaat z = 256 voor x = 4195835 en y = 3145727 (Coe e.a., 1995). Het nieuws werd wereldkundig gemaakt, eerst in de vakpers, en toen CNN er op 21 november aandacht aan besteede, in de ganse wereldpers. Intel, die een belangrijke reputatie te verdedigen had, zette een grootscheeps programma op om alle defecte chips gratis te vervangen. Het volstond om een gratis nummer te bellen en een courrier kwam een nieuwe processor wereldwijd thuis afleveren. Maar wat bleek? Slechts een verwaarloosbaar klein percentage van de defecte chips werd vervangen. De overgrote meederheid van computergebruikers waren dus helemaal niet verontrust door een processor die een inconsistente rekenkunde hanteerde. Verder hebben we geen enkele zekerheid dat de processors die we vandaag gebruiken correct zijn, om nog niet te spreken over de correctheid van compilers die programma's vertalen naar computercodes of die programma’s zelf. Gegeven dat computers verkeerlichten bedienen, het anti-slip systeem in onze wagens besturen en de sterkte van bruggen en gebouwen berekenen, hebben we wel een sterk vertrouwen in zoiets onbetrouwbaar als een computer.

Een eindige rekenkunde bestaat

De situatie is eigenlijk nog veel erger. Elke computer hanteert een eindige, en dus vanuit axiomatisch oogpunt gezien, een inconsistente wiskunde. Processoren verdelen getallen in twee soorten: gehele getallen en reëele getallen. Operaties op gehele getallen worden uitgevoerd in de *arithmetic and logic unit* (ALU). Afhankelijk van het type processor is de grootte van gehele getallen beperkt. Bij 32-bit processoren is dit −2.147.483.648 tot +2.147.483.647. Als je bij 2.147.483.647 één bijtelt dan is het resultaat –1. Reëele getallen worden behandeld in de FPU, of *floating point unit*. Hier kunnen veel grotere getallen worden voorgesteld, maar er blijven limieten op de grootte van een getal, voor het *single precision* formaat is dit $\pm(2 - 2^{-23})\times 2^{128}$ of $6{,}8 \times 10^{38}$ (zie figuur 1).



Figuur 1: Het IEEE 754 standaard formaat voor computergetallen van 1985.

Van Bendegem bespreekt het argument tegen het grootste getal *L*. De geschiedenis van de eerste computers leert ons een interessante les. Er bestaat een grootste getal en dat getal is bepaald door een sociaal process van negotiatie. Er bestaat tevens een rekenkunde die dit grootste getal hanteerd en die rekenkunde wordt gebruikt in alle bestaande computers. Donald MacKenzie, één van de proponenten van het zogenaamde sterke programma van sociale studies van de wiskunde, beschreef de geschiedenis van dit negotiatieproces (MacKenzie 1993). Het Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) stelde een committe samen in 1977 dat acht jaar nodig gehad heeft om tot een compromis te komen, wat MacKenzie doet opmerken: “Negotiating arithmetic proved to be a lengthy process” (MacKenzie 1993, 44). Het moeilijkste punt van de discussie bleek niet de bovengrens te zijn van deze eindige rekenkunde maar de ondergrens. Voor het *single precision* formaat werd dit uiteindelijk $\pm 1.0 \times 2^{-127}$ of $\pm 5.9 \times 10^{-39}$ decimaal. Deze standaard is nu van toepassing voor alle computerchips en bijhorende programmatuur. Dit is een mooi voorbeeld hoe men via een proces van onderhandeling tot een eindige rekenkunde is gekomen.

Oneindigheid in de natuur?

Als we even terugkeren naar Kline dan ligt voor hem het voornaamste probleem in het loskomen van het idee van een absolute wiskunde en de natuur die door die wiskunde moet beschreven worden. De vraag die zich dan stelt is of die natuur wel door een strikt finitistische wiskunde *kan* beschreven worden. Een belangrijk epistemologisch probleem is te verklaren waarom wiskunde, die door velen als analystisch en a priori wordt beschouwd, zo goed in staat is om de empirische werkelijkheid te beschrijven. Die vraagstelling werd door Winger (1960) zo treffend omschreven als “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”. Als er sprake is van oneindigheden in de wereld dan is dit wel een sterk argument tegen een strikt finitistische benadering.

Ik werd me duidelijk bewust van de “onredelijke doeltreffendheid” van de wiskunde tijdens mijn ingenieurstudies. Ik herinner me de formule die gebruikt wordt om het Dopplereffect te beschrijven als een sterk voorbeeld. Dit is de waargenomen verhoging of verlaging van de frequentie van een object dat beweegt ten opzicht van een waarnemer, zoals bij een voorbij rijdende ambulance. De waargenomen frequentie f_w wordt hierbij bepaald als:

$$f_w = f_b\left(\frac{v+v_w}{v-v_b}\right) \qquad \text{of} \qquad f_w = f_b\left(\frac{v}{v-v_b}\right)$$

als de waarnemer niet beweegt. Hierbij is f_b de bronfrequentie en v de snelheid van het geluid (c. 340 meter per seconde). Wat hier onmiddelijk opvalt, is dat de noemer van de breuk nul wordt als de snelheid van de bron gelijk is aan de snelheid van het geluid. Wiskundig gesproken hebben we bij een deling door nul, oneindig als resultaat. Het wiskundig model voorspelde dus weinig goed toen tijdens de jaren veertig geëxperimenteerd werd met de zogenaamde geluidsmuur. Het model deed vermoeden dat een vliegtuig te pletter zou vliegen tegen een golffront met een oneindige druk. Zoals we nu allen weten gaat dit fenomeen gepaard met een luide knal. Hoewel dit merkwaardig fenomeen overeenkomt met een wiskundige anomalie, deling door nul, is er hier helemaal geen sprake van een oneindige frequentie of druk. Zoals vele andere voorbeelden die we kunnen geven is de wiskundige modelering van de werkelijkheid misleidend met betrekking tot oneindigheden.

Besluit

Van Bendegem schrijft: “De wereld is eindig, de wiskunde is eindig, waar is er een probleem?”. Het probleem is dat door te poneren dat ‘de wiskunde’ eindig is, hij een positie inneemt die nogal wat reactie uitlokt en hij daarbij steeds vanuit het defensief moet spelen. Dat blijkt al meteen uit de titel van zijn tekst. Ik heb trachten aan te tonen dat er op zijn minst een strikt finitistische rekenkunde bestaat en dat die behoorlijk wijd verspreid is. Een pluralistische benadering van wiskunde als een sociaal product van menselijke inventiviteit en praktijk vraagt veel minder verdediging.

Referenties

Coe, Tim, et al. (1995) “Computational aspects of the Pentium affair”, *IEEE Computational Science & Engineering* (spring), 18 – 30.

Kline, Morris (1980) *Mathematics: The Loss of Certainty,* Oxford University Press, Oxford.

MacKenzie, Donald (1993) “Negotiating Arithmetic, Constructing Proof: The Sociology of Mathematics and Information Technology”, *Social Studies of Science*, Vol. 23, No. 1 (Feb., 1993), pp. 37-65.

Van Bendegem, Jean Paul (2010) “Een verdediging van het strict finitisme”,

Wigner, Eugene (1960) “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”, in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, No. I, pp. 1-14 (February 1960).

Albrecht Heeffer is post-doctoraal medewerker van het FWO verbonden aan het Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie aan de Ugent. Zijn onderzoek is gericht op de geschiedenis en filosofie van de wiskunde, in het bijzonder de rol van symboliek. Enkele van zijn recente publicaties zijn:

“On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism” in B. Van Kerkhove (ed.) *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics*, World Scientific Publishing, Singapore 2009, pp. 1-27.

“Text production reproduction and appropriation within the abbaco tradition: a case study” *Sources and Commentaries in Exact Sciences*, 9, 2008, pp. 211-256.

“A Conceptual Analysis of Early Arabic Algebra” in S. Rahman, T. Street and H. Tahiri (eds.) *The Unity of Science in the Arabic Tradition*: *Science, Logic, Epistemology and their Interactions,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2008, pp. 89-128.