

Lineaire, niet-lineaire en vaaglogische beeldinterpolatietechnieken

Dimitri Van De Ville

Promotoren: Prof. dr. I. Lemahieu, Prof. dr. ir. W. Philips

Proefschrift ingediend tot het behalen van de graad van
doctor in de Toegepaste Wetenschappen: Computerwetenschappen

Vakgroep Elektronica en Informatiesystemen
Voorzitter: Prof. dr. ir. J. Van Campenhout
Faculteit Toegepaste Wetenschappen
Academiejaar 2001-2002



Dankwoord

Ik zou hier in de eerste plaats een woord van dank willen richten tot een aantal mensen die hebben bijgedragen tot de voltooiing van mijn doctoraat.

Ik ben vooral mijn promotoren, prof. dr. Ignace Lemahieu en prof. dr. ir. Wilfried Philips, zeer dankbaar, omdat zij zowel mijn afstudeerwerk als mijn doctoraatswerk met interesse van nabij hebben gevolgd. Zij gaven mij door hun opbouwende kritiek en goede raad het nodige vertrouwen, om mijn werk in binnen- en buitenland voor te stellen en te verdedigen. In een latere fase van mijn doctoraat heeft ook prof. dr. ir. Rik Van de Walle mij op vakkundige wijze begeleid.

Verder bedank ik prof. dr. ir. Jan Van Campenhout, de voorzitter van de vakgroep ELIS, die, ondanks zijn drukke agenda, steeds tijd vrijmaakte om mij met raad en daad bij te staan.

In dit dankbetoon mogen natuurlijk ook mijn collega's en ex-collega's niet onvermeld blijven. Met genoegen denk ik aan de vriendschappelijke sfeer die er binnen de onderzoeksgroep MEDISIP heerst. Hierbij dank ik in het bijzonder Rita Breems voor de administratieve ondersteuning. Maar ook aan de hulpvaardigheid van de mensen van de vakgroepen ELIS en TELIN heb ik veel gehad.

Hierbij aansluitend wens ik eveneens alle wetenschappers te bedanken die mij via hun artikels in de vakliteratuur of via de elektronische post geïnspireerd hebben.

Ten slotte is dit de gepaste gelegenheid om mijn vrouw Heide te danken voor haar jarenlange onafgebroken steun en geduld. Daarnaast waardeer ik het vertrouwen dat mijn ouders, mijn schoonouders en andere familieleden in mij hebben.

Dit doctoraat is mede tot stand gekomen, dankzij mijn mandaat van aspirant bij het F.W.O. (Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek, Vlaanderen).

Dimitri Van De Ville
oktober 2001

Lijst met notaties

x	scalaire grootheid
\mathbf{x}	vectoriële grootheid
\mathbf{A}	matrix
\mathbf{A}'	getransponeerde matrix
\mathbf{R}	roostermatrix, vaak van het bronrooster
$\hat{\mathbf{R}}$	reciproque roostermatrix
$\tilde{\mathbf{R}}$	roostermatrix van het doelrooster
z^*	complex toegevoegde van z
\hat{g}	fouriergetransformeerde van de functie g
\tilde{c}	Z-getransformeerde van de reeks c
$\langle g_1, g_2 \rangle$	inwendig product functies g_1 en g_2
$\ g\ $	L_2 -norm van een functie g
$\ c\ _{l_2}$	l_2 -norm van een reeks c
$g_1 \otimes g_2$	convolutie twee functies g_1 en g_2
δ^k	kroneckerdelta
δ	diracfunctie
δ_T	kamfunctie met periode T
$\delta_{\mathbf{R}}$	nagelbed op het rooster \mathbf{R}
$\chi_{\mathbf{R}}$	indicatorfunctie van de voronoïcel geassocieerd met het rooster \mathbf{R}
ϕ	veralgemeende interpolatiefunctie, ook genererende functie
ϕ_{int}	klassieke interpolatiefunctie
β^n	splinefunctie van orde $n + 1$
Ψ^n	kardinale spline van orde $n + 1$
ψ	synthesefuncties
γ	analysefuncties
Ξ	indicatorfunctie risicofrequenties
Υ	risicomatrix

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Algemeen	1
1.1.1	Overzicht van het werk	1
1.2	Basisconcepten	3
1.2.1	Periodieke roosters	4
1.2.2	De fouriertransformatie	7
1.2.3	De interpolatietheorie	11
1.3	Overzicht eigen publicaties	18
2	Lineaire herbemonstering	19
2.1	Inleiding	19
2.2	Veralgemeende splines voor periodieke roosters	20
2.2.1	Basisprincipe	20
2.2.2	De splinetransformatie	29
2.2.3	De orde van approximatie	34
2.3	De kleinste-kwadratenbenadering	35
2.4	Reconstructie met optimale energieconcentratie	41
2.4.1	De prolate sferoïdale golf functies	41
2.4.2	De prolate sferoïdale rijen	42
2.4.3	Meerdimensionale uitbreiding	45
2.4.4	De optimale reconstructiefunctie	46
2.5	Artefacten door herbemonstering	50
2.6	Toepassingen en resultaten	52
2.6.1	Gravuredruk	56
2.6.2	Overbemonstering	81
2.6.3	Kleurendrukwerk	82
2.7	Conclusie	88

3	Niet-lineaire herbemonstering	89
3.1	Inleiding	89
3.2	Een nieuw criterium	90
3.2.1	Zichtbaarheid van moiré-patronen	91
3.2.2	Reproductie	91
3.2.3	Analyse van het ontstaan van moiré-patronen	92
3.2.4	Een nieuw criterium in het frequentiedomein	101
3.3	Gezamenlijke spatiale en spectrale analyse	108
3.4	Een niet-lineaire herbemonsteringstechniek	113
3.4.1	De berekening van de risicomatrix	113
3.4.2	Het gebruik van de risicomatrix	114
3.4.3	De invloed van de parameters van het gaborspectrogram	115
3.4.4	De invloed van de verschillende criteria	119
3.4.5	De invloed van randen	121
3.4.6	Een nieuwe niet-lineaire herbemonsteringstechniek	125
3.5	Resultaten	130
3.6	Conclusie	142
4	Herbemonstering van beeldsequenties m.b.v. vaaglogische bewegingsdetectie	143
4.1	Inleiding	143
4.2	Videoformaten	144
4.2.1	Inleiding	144
4.2.2	Formaatconversie	146
4.3	Lineaire herbemonstering	148
4.4	Bewegingsdetectie	153
4.5	Vaaglogische bewegingsdetectie	156
4.5.1	Basisconcepten vaaglogische informatieverwerking	156
4.5.2	Een vaaglogische regelaar als bewegingsdetector	159
4.6	Bewegingsadaptieve herbemonstering	163
4.6.1	Optimum	164
4.6.2	Resultaten	165
4.6.3	Evaluatie in ware tijd	177
4.7	Automatische aanpassing aan het ruisniveau	179
4.8	Conclusie	184
5	Verstoren van beelden	185
5.1	Inleiding	185
5.2	Verstoringsalgoritmen	186
5.2.1	Wyners methode voor eendimensionale signalen	186

5.2.2	Uitbreiding voor beelden	189
5.2.3	Een opmerking omtrent de versleuteling	192
5.3	Resultaten	193
5.4	Conclusie	200
6	Besluit	201
A	Analytische vorm van hexagonale splines	203
A.1	Eerste-ordespline op een hexagonaal rooster	203
A.2	Tweede-ordespline op een hexagonaal rooster	207
A.3	Derde-ordespline op een hexagonaal rooster	208
A.4	Hogere-ordesplines op een hexagonaal rooster	212
B	N-dimensionale uitbreiding van de DPSS	213
C	Simulatie druktechnieken	219
C.1	Simulatie gravurediepdruk	219
C.2	Simulatie kleurendrukwerk	223

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Algemeen

Sinds het ontstaan van de digitale beeldverwerking is er nood aan technieken voor het herbemonsteren van beelden van het ene rooster naar het andere. Ondanks deze vroege noodzaak wordt herbemonstering meestal stiefmoederlijk behandeld. De wijde verspreiding van eenvoudige methoden zoals dichtste-buur-interpolatie en bilineaire interpolatie wekt vaak verkeerdelijk de indruk dat herbemonstering van beelden een eenvoudig proces is. Niets is echter minder waar. Het veelvuldig optreden van artefacten in beelden en beeldsequenties die een rechtstreeks gevolg zijn van herbemonstering, bewijzen dat het belangrijk is om hier de nodige aandacht aan te besteden. Zo gebruiken de meeste PostScript RIPs (*Eng.* Raster Image Processor) b.v. bilineaire interpolatie en introduceren aldus vaak ongewenste artefacten zoals moiré-patronen. Een verbeterde aanpak van herbemonstering vraagt echter het incorporeren van vele parameters die het ontwerp van een geschikt algoritme beïnvloeden. Dit werk bestudeert, verbetert en introduceert nieuwe lineaire, niet-lineaire en vaaglogische herbemonsteringstechnieken voor beelden en beeldsequenties.

1.1.1 Overzicht van het werk

Digitale systemen stellen een signaal uit het continue domein voor aan de hand van een aantal monsterwaarden op een gegeven rooster. Voor bepaalde doeleinden is het noodzakelijk de monsterwaarden op een ander rooster te kennen en dient men dus te herbemonsteren van het bron- naar het doelrooster. Deze herbemonstering is sterk gekoppeld aan de wiskundige interpolatietheorie. Uitgaande van de gegeven reeks monsterwaarden kan men een functie in het continue domein reconstrueren m.b.v. een reconstructiefunctie die “ge-

plaatst” wordt op elk van de roosterpunten. Deze voorstelling in het continue domein wordt vervolgens bemonsterd op het doelrooster. De reconstructiefunctie stemt overeen met een klassieke interpolatiefunctie wanneer de reconstructie de originele monsterwaarden doorkruist. Bekende voorbeelden zijn dichtste-buur-interpolatie en lineaire interpolatie. In het vervolg van deze inleiding geven we een overzicht van de wiskundige basisconcepten die we nodig hebben voor dit werk. Zo introduceren we ondermeer periodieke roosters, de fouriertransformatie en de interpolatietheorie. Naast het klassieke bemonsteringstheorema van Shannon brengen we ook signaalmodellen en B-splines aan.

In het eerste deel (hoofdstuk 2 en 3) van dit werk leveren we een bijdrage tot het verbeteren van herbemonsteringstechnieken voor beelden, i.h.b. met het oog op toepassingen voor drukwerk. Het tweede hoofdstuk tast de grenzen af van wat mogelijk is m.b.v. lineaire methoden. Allereerst breiden we signaalmodellen gebaseerd op splines uit voor tweedimensionale periodieke roosters. Vervolgens wendden we deze uitbreiding aan voor een lineaire herbemonsteringstechniek die gebruik maakt van een kleinste-kwadratenbenadering. Het derde hoofdstuk licht de tekortkomingen van de algemene lineaire theorie toe aan de hand van een grondige analyse van het ontstaan van een belangrijk type artefacten: moiré-patronen. Hieruit zal blijken dat er zich in de praktijk een strenger criterium aandient dan het nyquistcriterium dat door lineaire herbemonsteringstechnieken wordt nagestreefd. Deze vaststelling wordt verder uitgewerkt en geeft aanleiding tot een niet-lineaire herbemonsteringstechniek die gebruik maakt van het gaborspectrogram, een gezamenlijke spatiale en spectrale analyse.

In het tweede deel (hoofdstuk 4) nemen we het herbemonsteringsprobleem voor beeldsequenties onder de loep. We tonen aan waarom de technieken uit de vorige hoofdstukken hier ontoereikend zijn en stellen een nieuwe bewegingsadaptieve techniek voor om het omzetten van een beeldsequentie van alternierend videoformaat naar progressief videoformaat te verbeteren. Hierbij doen we een beroep op een nieuwe bewegingsdetector, gebaseerd op de vaaglogische informatieverwerking. De evaluatie van deze aanpak gebeurt aan de hand van een implementatie in soft- en hardware, en toont een aanzienlijke verbetering ten opzichte van de bestaande algoritmen.

Tot slot behandelen we in het vijfde hoofdstuk een algoritme voor het verstoren van beelden (*Eng.* scrambling). Deze toepassing dient zich aan als een bijproduct van de wiskundige methoden uit de voorgaande hoofdstukken.

1.2 Basisconcepten

In dit werk noteren we scalaire grootheden in de gebruikelijke stijl, b.v. de variabele x , terwijl we vectoriële grootheden in het vet noteren, b.v. \mathbf{x} . De afzonderlijke componenten van de vector \mathbf{x} noteren we als x_i . Voor matrices gebruiken we hoofdletters, zoals \mathbf{M} . De getransponeerde matrix van \mathbf{M} noteren we als \mathbf{M}' .

Beschouwen we een continue N -dimensionale scalaire functie $g(\mathbf{x})$, met argument $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, dan leiden we de L_2 -norm van $g(\mathbf{x})$ af uit het inwendig product, die we ook als metriek gebruiken:

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^{N \times 1}} g_1(\mathbf{x}) g_2^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

$$\|g\| = \left(\int_{\mathbb{R}^{N \times 1}} |g(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

waarbij de integratie wordt uitgevoerd over de volledige ruimte $\mathbb{R}^{N \times 1}$ en de $*$ -operator duidt op de complex toegevoegde. Merk op dat we “ $d\mathbf{x}$ ” niet als een vector beschouwen, maar gebruiken als notatie¹ voor “ $dx_1 dx_2 \dots dx_N$ ”. Verder noteren we de convolutie van twee functies g_1 en g_2 als

$$(g_1 \otimes g_2)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{N \times 1}} g_1(\mathbf{t}) g_2(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (1.3)$$

De drager van een functie $g(\mathbf{x})$ is de convexe omhullende² van alle punten, waar de functie verschillend is van nul.

Analoog beschouwen we een discrete N -dimensionale rij $c(\mathbf{k})$, met $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N \times 1}$, waarbij de l_2 -norm gedefinieerd wordt via het inwendig product:

$$\langle c_1, c_2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} c_1(\mathbf{k}) c_2^*(\mathbf{k}), \quad (1.4)$$

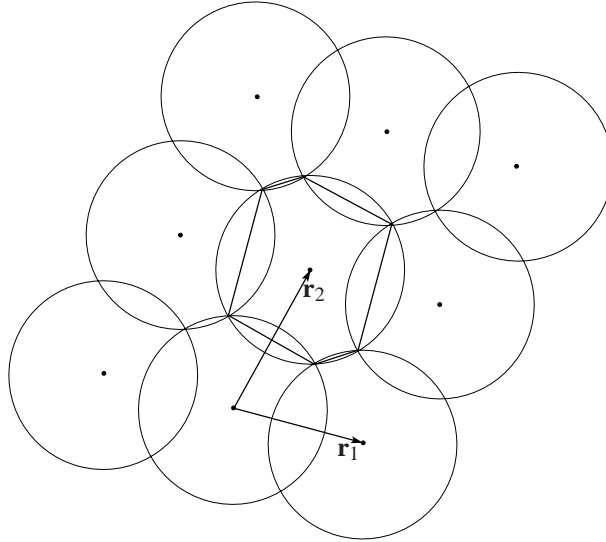
$$\|c\|_{l_2} = \left(\sum_{\mathbf{k}} |c(\mathbf{k})|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.5)$$

en de sommatie loopt over de ruimte $\mathbb{Z}^{N \times 1}$. De discrete convolutie van twee rijen c_1 en c_2 definiëren we dan als

$$(c_1 \otimes c_2)(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{l}} c_1(\mathbf{l}) c_2(\mathbf{k} - \mathbf{l}). \quad (1.6)$$

¹Deze notationale aanpak wordt ook vaak gebruikt in de literatuur, b.v. door Peterson en Middleton [103].

²De convexe omhullende van een verzameling punten is het kleinste mogelijke gebied zodanig dat elk verbindingslijnstuk tussen twee punten uit deze verzameling volledig in het gebied ligt.



Figuur 1.1: Een voorbeeld van een tweedimensionaal periodiek rooster. De rooster cel rond \mathbf{r}_2 is aangeduid.

1.2.1 Periodieke roosters

Een algemeen periodiek rooster in N dimensies is opgebouwd m.b.v. N lineair onafhankelijke vectoren \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$, ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel. Elk roosterpunt wordt dan aangeduid door een vector

$$\sum_{i=1}^N k_i \mathbf{r}_i = [\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 | \dots | \mathbf{r}_N] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix}, \quad \text{met } k_i \in \mathbb{Z} \quad (1.7)$$

$$= \mathbf{R}\mathbf{k}, \quad \text{met } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N \times 1}. \quad (1.8)$$

De roostermatrix \mathbf{R} beschrijft dus een regulier rooster. Het is handig om een nagelbed (*Eng.* nail bed) van impulsen op de roosterpunten te definiëren:

$$\delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{k}), \quad (1.9)$$

waarbij $\delta(\mathbf{x})$ een diracimpuls voorstelt op de oorsprong.

Enmaal het rooster is gedefinieerd, kan de corresponderende rooster cel worden bepaald. De rooster cel, ook voronoicel genaamd, bevat alle punten die zich niet verder van de oorsprong bevinden dan tot om het even welk ander

roosterpunt. De indicatorfunctie $\chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ van de roostercel is

$$\chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \text{voronoicel}, \\ 1/m, & \mathbf{x} \text{ op de rand van de voronoicel}, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \text{voronoicel}, \end{cases} \quad (1.10)$$

met m het aantal roosterpunten waartoe \mathbf{x} equidistant is. Het volume (of oppervlakte in het tweedimensionale geval) van de roostercel wordt gegeven door de determinant van de roostermatrix [146]. Merk bovendien op dat, wanneer we de functie $\chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ plaatsen op elk roosterpunt van \mathbf{R} , de volledige ruimte bedekt wordt:

$$\delta_{\mathbf{R}} \otimes \chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = 1. \quad (1.11)$$

Een laatste belangrijk concept i.v.m. roosters is het duale of reciproque rooster. Het reciproque rooster $\hat{\mathbf{R}}$ van een rooster \mathbf{R} wordt gedefinieerd als

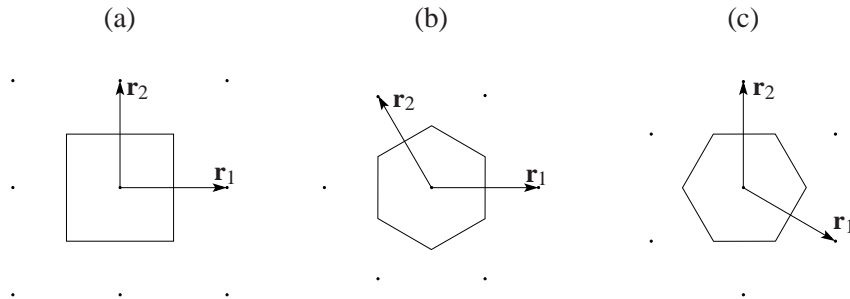
$$\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}^{-1})'. \quad (1.12)$$

Voor de roostervectoren $\hat{\mathbf{r}}_i$ van het reciproque rooster geldt $\langle \hat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \delta_{i,j}^k$, waarbij $\delta_{i,j}^k$ een kroneckerdelta voorstelt, d.w.z. 1 wanneer $i = j$, 0 elders. Het belang van het reciproque rooster wordt later duidelijk wanneer we de fouriertransformatie bespreken.

We beperken ons nu tot tweedimensionale periodieke roosters $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2]$. Bij wijze van voorbeeld beschouwen we het rooster in figuur 1.1. De stippen zijn roosterpunten opgebouwd met de vectoren \mathbf{r}_1 en \mathbf{r}_2 . De roostercel rond een roosterpunt kan grafisch bepaald worden op twee manieren [146]. Ten eerste door de middelloodlijnen tussen dit roosterpunt en zijn buurroosterpunten te bepalen en de opeenvolgende snijpunten te verbinden. Ten tweede door de cirkels te bepalen die, wanneer ze op de roosterpunten worden geplaatst, net groot genoeg zijn om de ruimte te bedekken. De snijpunten van deze cirkels bepalen de roostercel.

De roostercel van een rooster met een vrij gekozen vector \mathbf{r}_2 , zoals in het voorafgaande voorbeeld, heeft twee tekortkomingen: een gebrek aan symmetrie en moeilijk te bepalen roosterpunten ten opzichte van een orthogonaal referentiestelsel [146]. Daarom worden in praktijk vooral semi-reguliere roosters gebruikt, waarvan de corresponderende roostercel symmetrisch is ten opzichte van minstens twee assen. Er worden twee klassen van semi-reguliere roosters onderscheiden:

1. Rechthoekige roosters, waarbij $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = 0$, wat betekent $\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2$.
2. Hexagonale roosters, waarbij $|\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle| = \|\mathbf{r}_1\|_{l_2}^2 / 2$, wat betekent $\|\mathbf{r}_2\|_{l_2} |\cos \theta| = \|\mathbf{r}_1\|_{l_2} / 2$ (met θ de hoek tussen \mathbf{r}_1 en \mathbf{r}_2).



Figuur 1.2: Drie belangrijke semi-reguliere roosters. (a) Het vierkante rooster. (b) Het hexagonale rooster van het eerste type. (c) Het hexagonale rooster van het tweede type.

We kunnen verder drie belangrijke exemplaren van semi-reguliere roosters onderscheiden waarvan de roostervectoren alle genormeerd zijn. De roostervectoren van andere semi-reguliere roosters kunnen we afleiden door schaling van de horizontale en/of verticale coördinaten. Een goede maat voor deze schaling is de hoogte-breedteverhouding α , die gedefinieerd wordt als de verhouding van de horizontale bemonsteringsperiode ten opzichte van de verticale bemonsteringsperiode. Figuur 1.2 toont de drie belangrijke roosters:

(a) Het vierkante rooster:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1. \quad (1.13)$$

(b) Het hexagonale rooster van het eerste type:

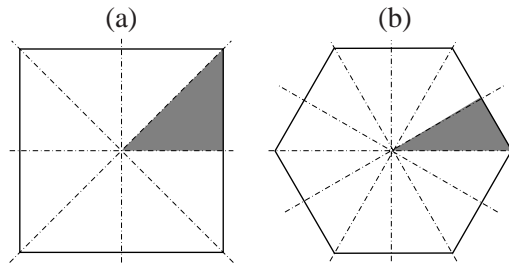
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 2/\sqrt{3}. \quad (1.14)$$

(c) Het hexagonale rooster van het tweede type:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 2\sqrt{3}. \quad (1.15)$$

In dit werk maken we vaak gebruik van het vierkante rooster en het hexagonale rooster van het tweede type. Andere semi-reguliere roosters zijn eenvoudig afleidbaar.

Hexagonale roosters hebben enkele belangrijke voordelen ten opzichte van rechthoekige, hetgeen in dit werk later zal toegelicht worden. We vermelden



Figuur 1.3: (a) De vierkante rooster cel bezit een achtvoudige symmetrie. (b) De hexagonale rooster cel daarentegen een twaalfvoudige.

alvast dat een vierkante rooster cel een achtvoudige symmetrie bevat, terwijl een hexagonale rooster cel over een twaalfvoudige symmetrie beschikt. D.w.z. dat we de vierkante en hexagonale basis cel kunnen bekomen door een driehoek respectievelijk zeven en elf keer te spiegelen rond de assen aangeduid in figuur 1.3.

1.2.2 De fouriertransformatie

Vele nuttige eigenschappen van functies en signalen blijken bijzonder goed bestudeerbaar aan de hand van hun karakteristieken in het frequentiedomein. De fouriertransformatie is daarbij een wiskundig hulpmiddel. Deze transformatie ontbindt een functie in basisfuncties die verschillende frequentiecomponenten voorstellen. We introduceren eerst het eendimensionale geval. De continue fouriertransformatie van een functie $g(x)$ luidt als volgt [100]:

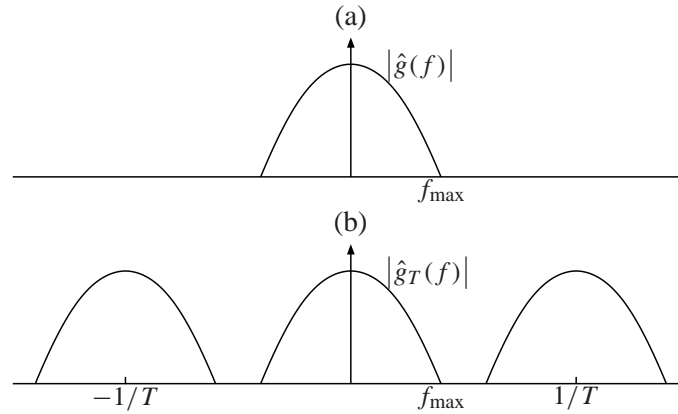
$$\mathcal{F}\{g(x)\}(f) = \hat{g}(f) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \exp(-j2\pi xf) dx. \quad (1.16)$$

De fouriergetransformeerde $\hat{g}(f)$ noemen we ook het spectrum van $g(x)$. Gezien $\hat{g}(f)$ complex is, onderscheiden we vaak de amplitude $|\hat{g}(f)|$ en de fase $\angle \hat{g}(f)$. Een functie wordt bandbeperkt genoemd, wanneer de drager van het spectrum beperkt is: het spectrum is slechts verschillend van nul in een eindig interval.

Eén van de belangrijkste eigenschappen van de fouriertransformatie is de convolutiestelling, die stelt dat de fouriergetransformeerde van de convolutie $g_1 \otimes g_2(x)$ gelijk is aan het product van de fouriergetransformeerden $\hat{g}_1(f)\hat{g}_2(f)$.

De inverse fouriertransformatie wordt gedefinieerd als

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}(f)\}(x) = g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(f) \exp(j2\pi fx) df. \quad (1.17)$$



Figuur 1.4: (a) Het spectrum van een eendimensionaal bandbeperkt signaal. De hoogste frequentiecomponent is f_{\max} . (b) Na bemonstering wordt het spectrum uitgevouwen op de frequenties k/T , $k \in \mathbb{Z}$.

We hebben nu het nodige wiskundige basismateriaal om het effect van bemonstering in het frequentiedomein na te gaan. Stel dat we een signaal $g(x)$ uit het continue domein bemonsteren met een periode T . Op elk roosterpunt kT , $k \in \mathbb{Z}$, bepalen we de waarde $g(kT)$. We stellen het bemonsterde signaal voor als

$$g_T(x) = g(x)\delta_T(x), \quad \text{met de kamfunctie } \delta_T(x) = \sum_k \delta(x - kT).$$

Op basis van de convolutiestelling weten we dat

$$\hat{g}_T(f) = \frac{1}{T} \hat{g} \otimes \delta_{1/T}(f).$$

In figuur 1.4 tonen we ter illustratie de amplitude van het spectrum van een functie $g(x)$ voor en na bemonstering: het originele spectrum wordt dus uitgevouwen (dit is verschoven en gekopieerd) op elk veelvoud van de bemonsteringsfrequentie.

Merk op dat we de fouriertransformatie van een bemonsterde functie kunnen schrijven als een reeks

$$\begin{aligned} \hat{g}_T(f) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_T(x) \exp(-j2\pi xf) dx \\ &= \sum_k g(kT) \exp(-j2\pi kTf). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Indien we onderstellen dat $g(kT)$ periodiek is met periode M :

$$g(kT) = g(kT + lM), \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (1.21)$$

en we beschouwen de rij $\bar{g}(k) = g(kT)$, $k = 0, \dots, M - 1$, dan bekomen we de discrete fouriertransformatie en zijn inverse:

$$\hat{g}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \bar{g}(k) \exp(-j2\pi nk/M), \quad (1.22)$$

$$\bar{g}(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \hat{g}(n) \exp(j2\pi kn/M), \quad (1.23)$$

waarbij $\hat{g}(n)$, $n = 0, \dots, M - 1$, de (discrete) fouriercoëfficiënten zijn. Er zijn efficiënte algoritmes voor de snelle berekening van deze transformatie.

De \mathcal{Z} -transformatie is een veralgemening van de fourierreeks uit formule (1.20). We definiëren de \mathcal{Z} -getransformeerde van de sequentie $c(k)$ als de functie

$$\mathcal{Z}\{c(k)\}(z) = \check{c}(z) = \sum_k c(k)z^k, \quad (1.24)$$

waarbij z een complexe variabele is.

De fouriertransformatie kan eenvoudig uitgebreid worden naar meerdere dimensies:

$$\mathcal{F}\{g(\mathbf{x})\}(\mathbf{f}) = \hat{g}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{N \times 1}} g(\mathbf{x}) \exp(-j2\pi \langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \rangle) d\mathbf{x}, \quad (1.25)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}(\mathbf{f})\}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{N \times 1}} \hat{g}(\mathbf{f}) \exp(j2\pi \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle) d\mathbf{f}. \quad (1.26)$$

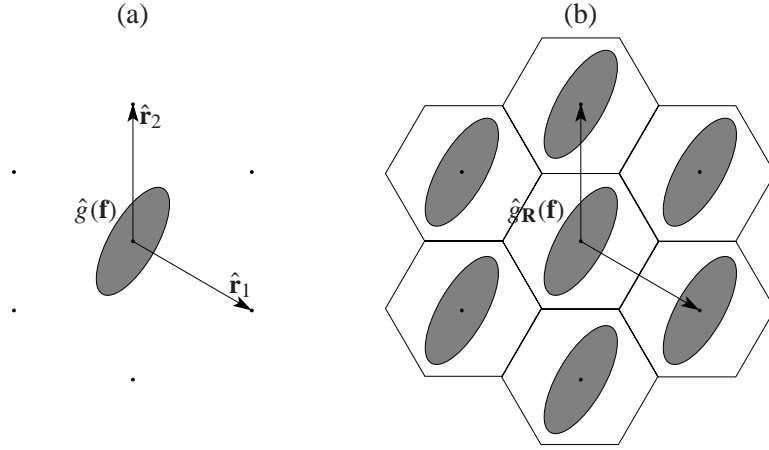
De invloed van bemonstering op het spectrum kan opnieuw geanalyseerd worden voor meerdimensionale periodieke roosters. Een functie $g(\mathbf{x})$, bemonsterd op een rooster \mathbf{R} stellen we voor als

$$g_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}). \quad (1.27)$$

Het spectrum $\hat{g}(\mathbf{f})$ wordt door bemonstering eveneens uitgevouwen [103], ditmaal echter op het reciproque rooster $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{g}_{\mathbf{R}}(\mathbf{f}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{R})|} \sum_{\mathbf{k}} \hat{g}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}). \quad (1.28)$$

Figuur 1.5 toont hoe het spectrum $\hat{g}(\mathbf{f})$ van een bandbeperkte functie, bemonsterd op een hexagonaal rooster van het eerste type, wordt uitgevouwen op het reciproque rooster (dat dan een hexagonaal rooster van het tweede type is).



Figuur 1.5: (a) De drager van het spectrum van een bandbeperkt signaal. (b) Na bemonstering op het rooster \mathbf{R} wordt het spectrum uitgevouwen op het reciproque rooster $\hat{\mathbf{R}}$.

Opnieuw kunnen we ook het spectrum van een bemonsterde functie herschrijven als

$$\hat{g}_{\mathbf{R}}(\mathbf{f}) = \int_{\mathbb{R}^{N \times 1}} g(\mathbf{x}) \delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) \exp(-j2\pi \langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \rangle) d\mathbf{x} \quad (1.29)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{R}\mathbf{k}) \exp(-j2\pi \langle \mathbf{R}\mathbf{k}, \mathbf{f} \rangle), \quad (1.30)$$

hetgeen aanleiding geeft tot de N -dimensionale uitbreiding van de \mathcal{Z} -transformatie van een rij $c(\mathbf{k}) = g(\mathbf{R}\mathbf{k})$ op een rooster \mathbf{R} :

$$\mathcal{Z}\{c(\mathbf{k})\}(\mathbf{z}) = \check{c}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N}. \quad (1.31)$$

Voor een periodieke functie $g(\mathbf{R}\mathbf{k}) = g(\mathbf{R}\mathbf{k} + M\mathbf{R}\mathbf{l})$, $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^{N \times 1}$, waarbij we ons beperken tot meerdimensionale vierkante roosters, kunnen we eveneens de discrete fouriertransformatie eenvoudig afleiden als

$$\hat{g}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{A}} \bar{g}(\mathbf{k}) \exp\left(-j2\pi \langle \mathbf{R}\mathbf{k}, \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} \rangle / M\right) \quad (1.32)$$

$$\bar{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{M^N} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} \hat{g}(\mathbf{n}) \exp\left(j2\pi \langle \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}, \mathbf{R}\mathbf{k} \rangle / M\right), \quad (1.33)$$

met \mathcal{A} de hyperkubus $\{\mathbf{n} \mid n_i = 0, \dots, M-1; 0 \leq i < N\}$.

1.2.3 De interpolatietheorie

Shannons bemonsteringstheorema

Het baanbrekend artikel “Communication in the Presence of Noise” [125,126] van Shannon uit 1949 legde de fundamenteën voor de informatietheorie. Shannon stelde zich de vraag wanneer hij een functie uit het continue domein getrouw kon voorstellen aan de hand van een reeks monsterwaarden. Dit leidde tot het fameuze bemonsteringstheorema van Shannon:³

Wanneer een functie $g(x)$ een bandbreedte F heeft, dan kan deze volledig gekarakteriseerd worden door monsterwaarden genomen met een periode $T = 1/F$.

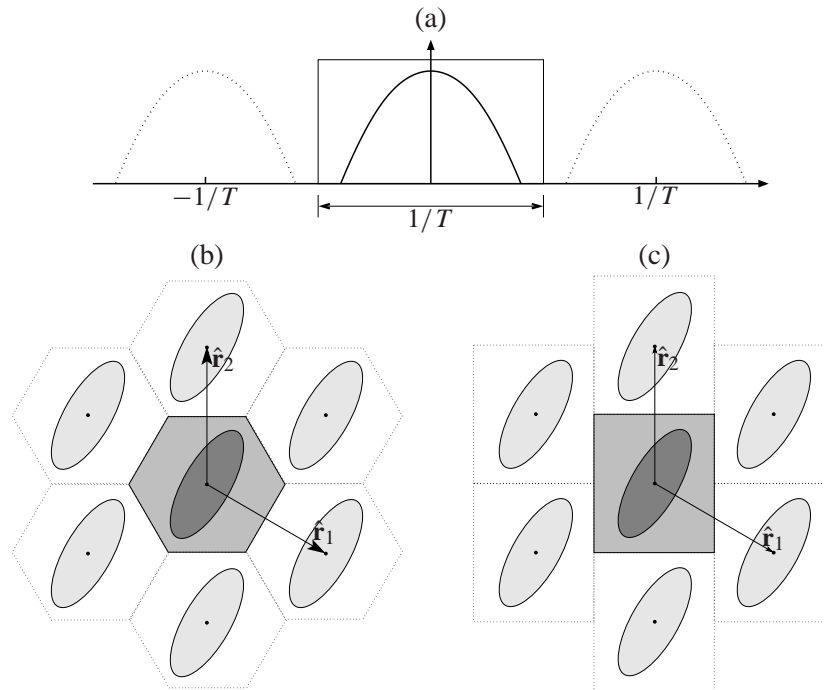
In dit werk beschouwen we steeds signalen waarvan het spectrum geconcentreerd is rond de nulrequentie (zogenaamde basisbandsignalen) die bovendien ook reëel zijn (en waarvan het spectrum dus complex toegevoegd symmetrisch is). De bandbreedte wordt dan gekenmerkt door de hoogst aanwezige frequentie $F = 2f_{\max}$ en de noodzakelijke bemonsteringsperiode wordt dan $T = 1/(2f_{\max})$. De reconstructie aan de hand van deze monsterwaarden $g(kT)$ gebeurt als volgt:

$$s(x) = \sum_k g(kT) \operatorname{sinc}(x/T - k), \quad (1.34)$$

waarbij de equidistante monsterwaarden kunnen geïnterpreteerd worden als coëfficiënten van basisfuncties, m.n. verschoven sinc-functies: $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Het bemonsteringstheorema geeft aan dat de reconstructie perfect is (d.w.z. $s(x) = g(x)$) wanneer $g(x)$ bandbeperkt is, wat betekent dat de hoogst aanwezige frequentie maximaal $1/(2T)$ bedraagt. Deze bovengrens wordt ook vaak de nyquistfrequentie genoemd [99].

Figuur 1.6 (a) toont het principe van het bemonsteringstheorema in het frequentiedomein. Wegens de convolutiestelling stemt formule (1.34) in het frequentiedomein immers overeen met de vermenigvuldiging van het uitgevouwen spectrum met een rechthoekig venster. Indien het spectrum bandbeperkt is, kan het oorspronkelijke spectrum inderdaad op deze wijze gereconstrueerd worden. Indien dit echter niet het geval is, treedt er frequentievervalsing (*Eng.* aliasing) op en is het spectrum verstoord. Het bemonsteringstheorema is uitbreidbaar naar meerdere dimensies [103]. In dat geval dient het spectrum bandbeperkt te zijn tot een meerdimensionaal nyquistgebied om

³Volledigheidshalve dient hierbij ook vermeld te worden dat equivalente theorema's reeds voordien werden gepubliceerd in de wiskundige literatuur door Whittaker [189] en Kotelnikov [76,77].



Figuur 1.6: (a) Het spectrum na bemonstering kan worden hersteld door een ideaal laagdoorlaatfilter. (b) In het tweedimensionale geval is de reciproque rooster cel een logische keuze als nyquistgebied. (c) Een voorbeeld van een alternatief nyquistgebied.

perfecte reconstructie te garanderen. Aangezien het spectrum na bemonstering wordt uitgevouwen op het reciproque rooster, ligt de keuze als nyquistgebied voor de hand: de reciproque rooster cel. Figuur 1.6 (b) toont het uitgevouwen spectrum en de reciproque rooster cel. Het reconstructiefilter komt in dat geval overeen met de inverse fouriergetransformeerde van de indicatorfunctie van de reciproque rooster cel:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \{ \chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{f}) \}(\mathbf{x}). \quad (1.35)$$

Merk op dat er meestal een oneindig aantal andere keuzes mogelijk zijn voor het nyquistgebied. Zo stelt figuur 1.6 (c) eveneens een geldig nyquistgebied voor.

Signaalmodellen

Ondanks de elegantie en wiskundige correctheid van het bemonsteringstheorema, treden er in de praktijk enkele fundamentele problemen op. Zo zijn

signalen in de praktijk nooit bandbeperkt door de eindigheid van hun drager in de temporale of spatiale ruimte.⁴ Beschouw b.v. de functie

$$\mu_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & b < x. \end{cases} \quad (1.36)$$

die een model zou kunnen zijn voor een “perfecte” rand in een beeld. Het spectrum $\hat{\mu}_{a,a}(f) = \sin(2\pi fa)/(\pi f)$ is duidelijk niet bandbeperkt [50]. Daarnaast is het onmogelijk om reële signalen perfect bandbeperkt te maken aan de hand van een ideaal laagdoorlaatfilter: de ideale interpolatiefunctie $\text{sinc}(x)$ is in de praktijk niet bruikbaar wegens zijn onbeperkte drager. Bovendien is een benadering op een beperkte drager lastig wegens de zeer trage afname (volgens $1/x$). Om al deze redenen gebruikt men in de praktijk andere interpolatiefuncties:

$$s(x) = \sum_k g(kT)\phi_{\text{int}}(x/T - k). \quad (1.37)$$

De mogelijke keuzes voor $\phi_{\text{int}}(x)$ zijn groot: dichtste-buur, lineair, Gauss, (parametrische) kubische convolutie [74, 101], alsook aangepaste sinc-functies m.b.v. “vensters” met welluidende namen zoals Bartlet, Blackman, Hamming, Hanning. Vooraleer echter enkele interpolatiefuncties te bespreken stellen we een veralgemeening van de interpolatieformule (1.37) voor:

$$s(x) = \sum_k c(k)\phi(x/T - k). \quad (1.38)$$

Zulke “veralgemeende interpolatie” weegt de basisfuncties niet meer rechtstreeks met de monsterwaarden $g(kT)$, maar met coëfficiënten $c(k)$. De signaalruimte $S(\phi)$ die wordt bepaald door de genererende functie $\phi(x)$ noteren we als

$$S(\phi) = \left\{ s(x) \mid s(x) = \sum_k c(k)\phi(x/T - k); c(k) \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.39)$$

Dit model legt een verband tussen een rij waarden $c(k)$ en een functie $s(x)$ in het continue domein. Om een zinnig model te bekomen, is het logisch dat de l_2 -norm van de coëfficiënten eindig is. Daarnaast moeten nog enkele andere voorwaarden vervuld worden [148]:

1. Het model dient stabiel en niet-ambigu te zijn. Stabiliteit garandeert dat een kleine variatie van de coëfficiënten slechts een kleine variatie

⁴Met uitzondering van het geval $g(x) = 0$.

van de functie veroorzaakt (in L_2 -zin). Opdat de basis niet ambigu zou zijn, dienen de basisfuncties lineair onafhankelijk te zijn: elk signaal $s(x) \in S(\phi)$ is uniek bepaald door zijn coëfficiënten $c(k)$. Een stabiele en niet-ambigue representatie vereist dat de basisfuncties $\phi(x - k)$ een Riesz-basis vormen: er moeten twee strikt positieve constanten $0 < A$ en $B < +\infty$ bestaan, waarvoor geldt dat

$$A \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_k c(k) \phi(x - k) \right\|^2 \leq B \|c\|_{l_2}^2, \forall c(k) \in l_2. \quad (1.40)$$

De l_2 -ruimte bevat alle rijen met eindige l_2 -norm. In het geval $A = B = 1$ vormen $\phi(x - k)$ een orthonormale basis.

2. Tenslotte dient het model te convergeren naar de gegeven functie $g(x)$ wanneer de bemonsteringsperiode afneemt. Daartoe dienen de basisfuncties een eenheidspartitie te vormen:

$$\sum_k \phi(x - k) = 1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.41)$$

In de praktijk legt deze laatste voorwaarde het meest restricties op aan de toelaatbare genererende functies.

Merk op dat de sinc-functies uit Shannons bemonsteringstheorema een orthonormale basis vormen, vermits de Riesz-grenzen A en B uit (1.40) beide 1 zijn. Bovendien vormen ze ook een eenheidspartitie.

B-splines

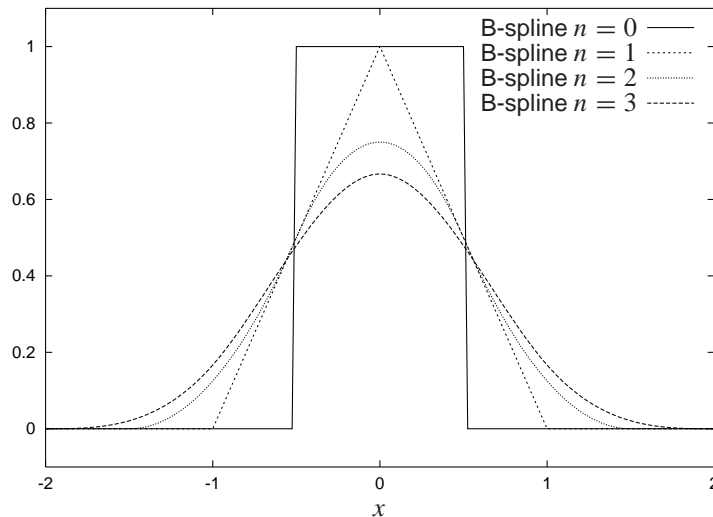
Om meer vertrouwd te raken met het algemeen signaalmodel van formule (1.39), is het nuttig een bekende klasse van interpolatiefuncties te bespreken: de B-splines [25, 149].

In eerste instantie bepalen we de kortste en eenvoudigste interpolatiefunctie die een eenheidspartitie vormt:

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1, & -1/2 < x \leq 1/2 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \quad (1.42)$$

Dit is de B-spline van graad 0 en geeft aanleiding tot “dichtste-buur-interpolatie” (*Eng.* nearest neighbour interpolation, sample-and-hold). Een mogelijke wijze om B-splines van hogere graad te bekomen, is m.b.v. opeenvolgende convoluties:

$$\beta^n(x) = \beta^0 \otimes \beta^{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (1.43)$$



Figuur 1.7: De B-splines van nulde t.e.m. derde graad.

Heel bekend is de B-spline van eerste graad, die aanleiding geeft tot “lineaire interpolatie”:

$$\beta^1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \quad (1.44)$$

Bovendien is elke B-spline van graad n een stuksgewijze polynoom: voor een even graad in de intervallen $[k - 1/2, k + 1/2]$, voor een oneven graad in de intervallen $[k, k + 1]$. In elk dergelijk interval vindt men een veelterm van graad n . Bovendien zijn deze veeltermen en hun afgeleiden continu aan de uiteinden van deze intervallen tot en met orde $n - 1$. Het zou ons evenwel te ver leiden alle eigenschappen van deze splines hier te vermelden.

De kubische B-spline (graad 3) wordt gegeven door

$$\beta^3(x) = \begin{cases} 2/3 - |x|^2 + |x|^3/2, & 0 \leq |x| < 1 \\ (2 - |x|)^3/6, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \quad (1.45)$$

Figuur 1.7 toont de B-splines van nulde t.e.m. derde graad.

Bekijken we nu het gebruik van B-splines voor interpolatie van naderbij. Met het oog op de eenvoud van de notatie, maar zonder verlies van algemeenheid, stellen we vanaf nu $T = 1$. Voor nulde en eerste graad is het triviaal om de resulterende functies $s^0(x)$ en $s^1(x)$ exact door de monsterwaarden te laten gaan. We kiezen de coëfficiënten $c(k) = g(k)$. Vanaf tweede graad is dit

echter niet meer vanzelfsprekend. De klassieke aanpak houdt het opstellen van een stelsel

$$[g(m)] = [\beta^n(m - k)][c(k)] \quad (1.46)$$

in, waarbij de te inverteren matrix banddiagonaal is (gezien de beperkte drager van $\beta^n(x)$). Het bepalen van de coëfficiënten noemt men de directe splinetransformatie. Mogelijke oplossingsmethoden zijn voorwaartse en achterwaartse substitutie of LU-decompositie [25].

Sinds het begin van de jaren '90 is de splinetransformatie ook benaderd vanuit het oogpunt van signaalverwerking als een filteroperatie. Beschouwen we de bemonsterde B-spline $b^n(k) = \beta^n(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, dan kunnen we de eis tot interpolatie van de monsterwaarden herschrijven onder de vorm van een discrete convolutie van $b^n(k)$ en $c(k)$:

$$g(k) = (b^n \otimes c)(k). \quad (1.47)$$

De coëfficiënten worden aldus gegeven na berekening van de inverse filteroperatie

$$c(k) = ((b^n)^{-1} \otimes \bar{g})(k), \quad (1.48)$$

waarbij we de rij $\bar{g}(k)$ afleiden uit de functie $g(k)$. Om de aandacht te trekken, beschouwen we de B-spline van derde graad. De waarden van $\beta^3(x)$ in $x = -1, 0$ en 1 zijn respectievelijk $1/6, 2/3$ en $1/6$. De \mathcal{Z} -getransformeerde van $b^3(k)$ luidt dus $\check{b}^3(z) = (z^{-1} + 4 + z)/6$. We bekommen het inverse filter

$$\left(\check{b}^3\right)^{-1}(z) = \frac{6}{z^{-1} + 4 + z} = 6 \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) \left(\frac{-a}{1 - az} \right), \quad (1.49)$$

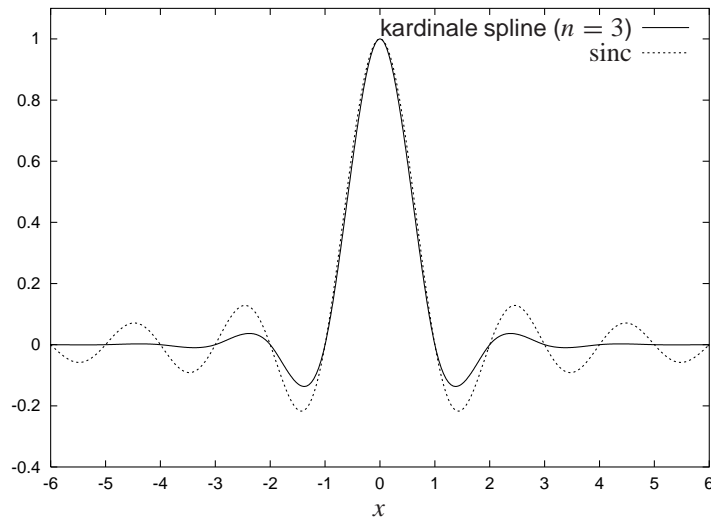
met $a = -2 + \sqrt{3}$. De factorizatie in het rechterlid geeft aanleiding tot de opeenvolging van een recursief causaal filter en een recursief anticausaal filter. Voor een uitgebreidere bespreking van deze techniek verwijzen we naar de literatuur [49, 147, 149].

De voorgaande beschouwingen laten toe om het verband te leggen tussen de klassieke en de veralgemeende interpolatieformule, respectievelijk formules (1.37) en (1.38). We kunnen immers de veralgemeende formule herschrijven als

$$\begin{aligned} s^n(x) &= \sum_k \left((b^n)^{-1} \otimes \bar{g} \right)(k) \beta^n(x - k) \\ &= \sum_k g(k) \Psi^n(x - k), \end{aligned} \quad (1.50)$$

waarbij

$$\Psi^n(x) = \sum_k (b^n)^{-1}(k) \beta^n(x - k). \quad (1.51)$$



Figuur 1.8: De kardinale spline interpolatiefunctie ($n = 3$) versus de sinc-interpolatiefunctie.

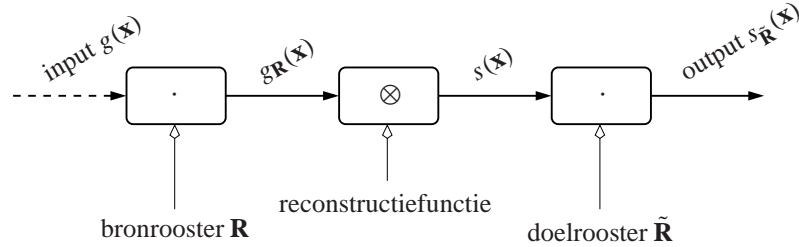
De gedaante van formule (1.50) is equivalent met de klassieke interpolatieformule (1.37). De interpolatiefunctie $\Psi^n(x)$ wordt de kardinale of interpolerende spline genoemd. Merk op dat deze functie voor $n \geq 2$ geen beperkte drager meer heeft. Desalniettemin is de afname voor praktische graden ($n \leq 3$) veel sneller dan de klassieke sinc-interpolatiefunctie. Wanneer we de graad van de B-spline laten toenemen, zal de kardinale spline streven naar de sinc-functie, hetgeen het signaalmodel op basis van B-splines mooi laat aansluiten bij Shannons bemonsteringstheorema.

Figuur 1.8 toont de kardinale spline voor $n = 3$. Merk op dat de interpolatiefunctie zeer snel afneemt ten opzichte van de sinc-interpolatiefunctie.

Wanneer we een signaal $g(x)$ voorstellen met een model $s^n(x)$ aan de hand van monsterwaarden $g(kT)$, kunnen we ons de vraag stellen hoe snel dit model evolueert naar $g(x)$. De orde van approximatie is de macht L van de bemonsteringsperiode T waarmee deze approximatiefout afneemt:

$$\|s^n - g\|^2 \propto T^L. \quad (1.52)$$

Merk op dat dit een zuiver theoretische vraagstelling is, aangezien we in de praktijk $g(x)$ niet kennen. Wiskundig kunnen we echter afleiden dat voor een B-spline van graad n , deze orde $n + 1$ bedraagt [22]. Daarom noemen we de B-spline van nulde graad ook de B-spline van eerste orde. We onderstellen stilzwijgend dat de gegeven functies $g(x)$ hetzij een beperkte drager hebben,



Figuur 1.9: Het concept van lineaire herbemonstering: (1) interpolatie aan de hand van de monsterwaarden op het bronrooster, (2) bemonstering op de roosterpunten van het doelrooster.

hetzij streven naar nul voor grote waarden van $|x|$. In de beeldverwerking is aan deze onderstelling steeds voldaan.

Lineaire herbemonstering

Aan de hand van de voorgaande begrippen, zijn we nu in staat om het concept van lineaire herbemonstering uit te leggen. We spreken over een bronrooster \mathbf{R} en een doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$. Grootheden verbonden met het doelrooster noteren we met een tilde. Van een oorspronkelijk signaal $g(\mathbf{x})$, dat enkel gekend is op het bronrooster \mathbf{R} , dienen we de waarden op het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$ te bepalen. Klassiek wenden we de gegeven monsterwaarden aan om (conceptueel) een functie in het continue domein te reconstrueren. Vervolgens bemonsteren we deze functie op de nieuwe roosterpunten. Uiteraard dient men in de praktijk enkel de waarden van deze reconstructie op de nieuwe roosterpunten te berekenen. Het gebruik van bovenstaande technieken geeft aanleiding tot lineaire herbemonstering. Een lineaire techniek \mathcal{L} laat immers toe om een lineaire combinatie van twee inputs te berekenen als de lineaire combinatie van de afzonderlijke resultaten:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{g_1\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{g_2\}. \quad (1.53)$$

Figuur 1.9 illustreert het concept van lineaire herbemonstering. Technieken die niet voldoen aan deze voorwaarde zijn per definitie niet-lineaire technieken.

1.3 Overzicht eigen publicaties

Het onderzoek, beschreven in dit werk, heeft reeds geleid tot drie publicaties in internationale tijdschriften [42, 159, 170], waarvan twee als eerste auteur. Daarnaast verschenen vijf publicaties als eerste auteur onder de vorm van hoofdstukken of bijdragen in boeken [163, 164, 167, 172, 176]. In het totaal werden tweeëntwintig publicaties voorgesteld op internationale conferenties, waarvan zeventien als eerste auteur [152–158, 160–162, 166, 168, 169, 173–175, 177].

Hoofdstuk 2

Lineaire herbemonstering

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk spitsen we ons toe op lineaire herbemonstering in twee dimensies, m.a.w. voor beelden. De meest voor de hand liggende uitbreiding van eendimensionale basisfuncties naar twee dimensies is zonder twijfel m.b.v. het tensorproduct. Deze mogelijkheid dient zich echter alleen aan wanneer we beide dimensies los van elkaar behandelen, zoals b.v. het geval is voor rechthoekige roosters. In dat geval kan men de tweedimensionale uitbreiding van de n -de graads B-spline scheidbaar definiëren als

$$\beta^n(x_1, x_2) = \beta^n(x_1)\beta^n(x_2). \quad (2.1)$$

Voor niet-rechthoekige roosters is de voronoïcel, die de meest efficiënte betegeling vormt voor een isotrope bron, echter niet meer scheidbaar. Daarom introduceren we in dit hoofdstuk een veralgemeende splinebasis, geschikt voor periodieke roosters in het algemeen. We bespreken allereerst uitvoerig de geldigheid van dit nieuwe signaalmodel. De klassieke uitbreiding zoals in formule (2.1) zal voorgesteld worden als een bijzonder geval van deze veralgemening.

Net als de klassieke interpolatiefuncties, houdt het veralgemeende signaalmodel niet expliciet rekening met het doelrooster. Gebaseerd op het principe van een kleinste-kwadratenbenadering, leiden we een algemene reconstructiefunctie af die de herbemonstering realiseert tussen twee periodieke roosters, met een minimaal informatieverlies (in kwadratische zin) tussen de signaalmodellen op beide roosters.

Vervolgens stellen we in dit hoofdstuk nog een andere aanpak voor, gebaseerd op de prolate sferoidale golf functies. De resulterende reconstructiefunctie bezit een optimale energieconcentratie in een gegeven gebied in het

frequentiedomein. Ook hier stellen we een veralgemening voor van de gangbare theorie voor een niet-scheidbaar tweedimensionaal criterium.

Tot slot tonen we de resultaten van al deze technieken aan de hand van enkele praktische applicaties, zoals gravurediepdruk en kleurendrukwerk. Naast een subjectieve evaluatie, stellen we ook een objectieve beoordeling van de resultaten voor aan de hand van een kwaliteitsmaat geïnspireerd op het menselijk visueel systeem.

2.2 Veralgemeende splines voor periodieke roosters

Eendimensionale splines zijn reeds uitgebreid bestudeerd in de literatuur. Ze vormen een unieke basis wanneer we een spline, met zijn beperkte drager, verschuiven en kopiëren op elk roosterpunt. De uitbreiding naar meerdere dimensies m.b.v. het tensorproduct is slechts handig voor scheidbare roosters. We noemen een rooster scheidbaar, wanneer de indicatorfunctie van de corresponderende roostercel kan ontbonden worden met eendimensionale functies langs de roostervectoren. Bij periodieke roosters geldt dit voor rechthoekige roosters. Andere meerdimensionale splines, zoals “box-splines” [26, 86, 109], worden gedefinieerd op rechthoekige en triangulaire lapjes (*Eng.* patches). In dit werk stellen we splines voor, gebaseerd op hetzelfde principe als de “box-splines”, m.n. een constructie door middel van opeenvolgende convoluties, maar toegepast op algemene roostercellen. We tonen aan dat deze definitie leidt tot een eenvoudig recept voor de constructie van tweedimensionale splines, ook voor niet-scheidbare roosters. Deze veralgemeende aanpak is nieuw en laat toe een nieuwe basis die geschikt is voor hexagonale roosters op te bouwen. Daarnaast leiden we ook de orde van approximatie af, die aangeeft hoe snel de basis convergeert naar een perfecte benadering van de originele functie in het continue domein.

2.2.1 Basisprincipe

Doorheen de voorstelling van de veralgemeende splines beschouwen we twee voorbeelden ter illustratie. Enerzijds een vierkant rooster

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

waarmee we dezelfde resultaten bekomen als bij de uitbreiding op basis van het tensorproduct. Anderzijds een hexagonaal rooster van het tweede type,

beschreven door de matrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

waarmee we een nieuwe, niet-scheidbare basis bekomen. De resultaten voor een hexagonaal rooster van het eerste type zijn analoog en algemeen semi-reguliere roosters zijn afleidbaar uit deze twee voorbeelden door middel van schaling van de verticale en/of horizontale component van de roostervectoren.

Een belangrijke eigenschap van de splinebasis die we wensen te bewaren is de convolutie-eigenschap zoals die voor het eendimensionale geval geldt in formule (1.43). Zoals later zal blijken, speelt deze een belangrijke rol bij het afleiden van een kleinste-kwadratenbenadering. We definiëren de eerste-orde spline $\beta^0(\mathbf{x})$ voor een hexagonaal rooster¹ door middel van de indicator-functie van de rooster cel van \mathbf{R} :

$$\beta^0(\mathbf{x}) = \chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

De oppervlakte van de rooster cel wordt gegeven door

$$\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \beta^0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\det(\mathbf{R})| \triangleq \Omega, \quad (2.5)$$

waarbij we deze rooster cel oppervlakte voor de eenvoud als Ω noteren. Hogere-orde splines worden geconstrueerd door opeenvolgende convoluties:

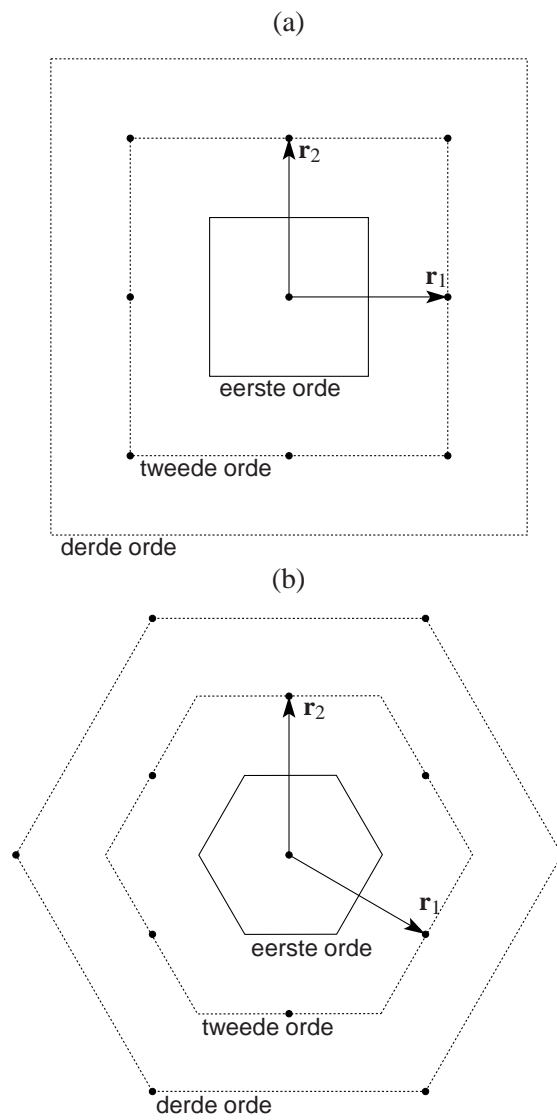
$$\beta^n(\mathbf{x}) = \frac{\beta^0 \otimes \beta^{n-1}(\mathbf{x})}{\Omega}, \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

De drager van deze splines is beperkt en op eenvoudige wijze afhankelijk van de orde (zie figuur 2.1).

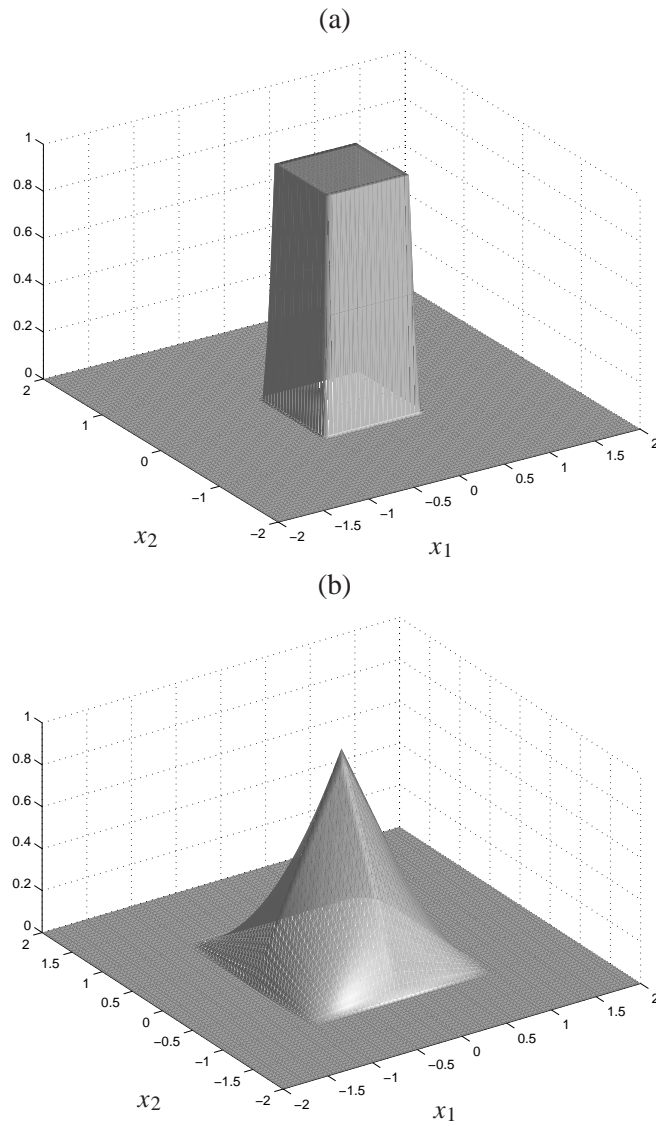
Figuur 2.2 toont de splines op een vierkant rooster van eerste t.e.m. vierde orde. Uiteraard zijn deze gelijk aan de tensorproductuitbreiding van de eendimensionale B-splines uit het vorige hoofdstuk. Figuur 2.3 toont het resultaat op een hexagonaal rooster, hetgeen aanleiding geeft tot een nieuwe familie (niet-scheidbare) splines. Door de opeenvolgende convoluties worden de splines duidelijk gladder bij hogere ordes. In het algemeen garandeert deze aanpak enkele nuttige eigenschappen. Zo zijn alle splines positief en convex [134], d.w.z. dat $\beta^n(\mathbf{x}) > 0$ en $\beta^n(\mathbf{x}) < 1$. De splines bewaren ook de symmetrie-eigenschappen van de rooster cel, ze zijn dus symmetrisch ten opzichte van vier assen in het geval van een vierkant rooster, of zes assen in het geval van een

¹De betekenis van en de verantwoording voor de benaming ‘‘eerste orde’’ wordt later verduidelijkt in 2.2.3.

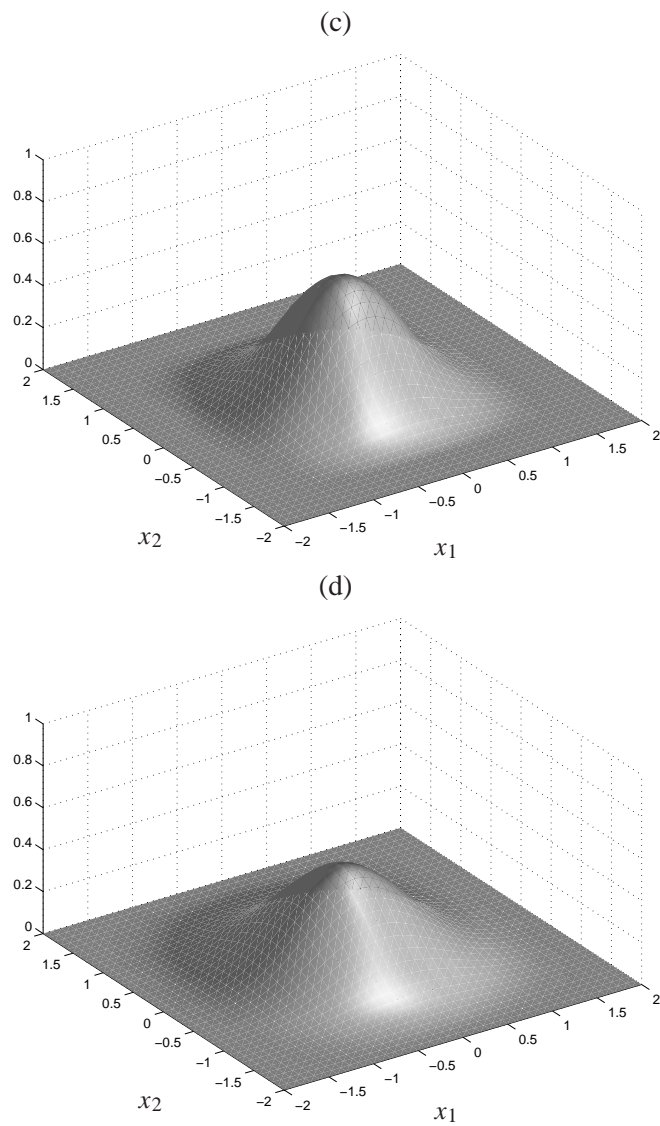
hexagonaal rooster. De analytische vorm van de splines op het vierkant rooster is gekend. In bijlage A leiden we een analytische vorm af voor eerste tot derde-ordesplines op een hexagonaal rooster. Gebruikmakend van de meerdimensionale centrale-limietstelling, is het verder mogelijk om aan te tonen dat de hogere-ordesplines snel convergeren naar een tweedimensionale gausiaanse functie.



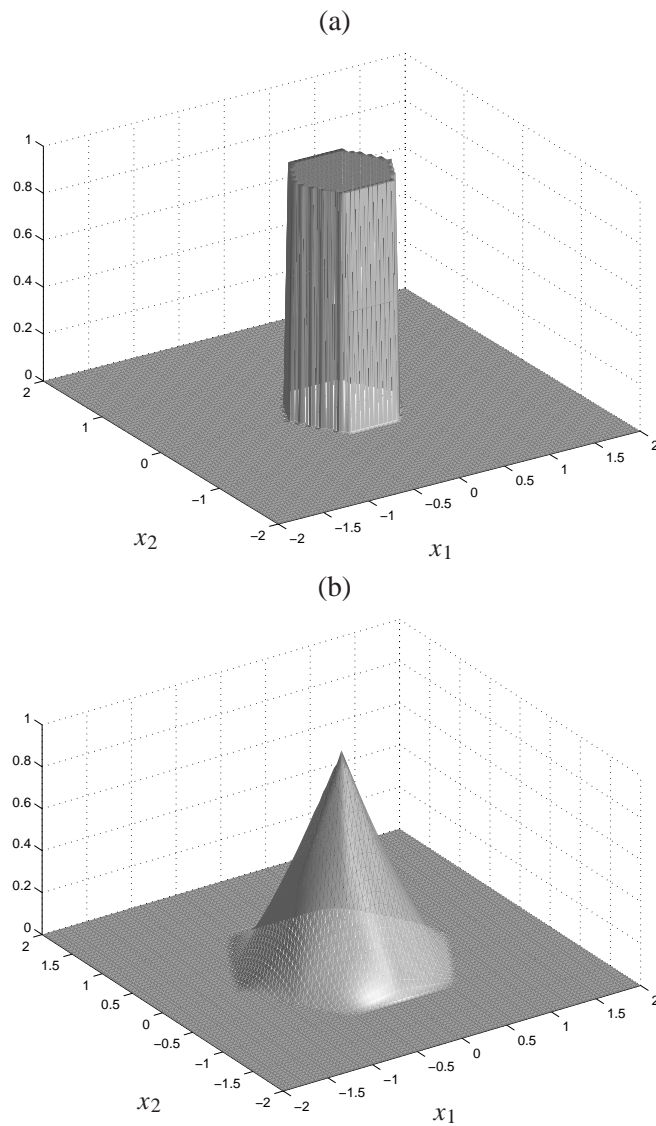
Figuur 2.1: De drager van de veralgemeende splines is op eenvoudige wijze afhankelijk van de orde. (a) Vierkant rooster. (b) Hexagonaal rooster.



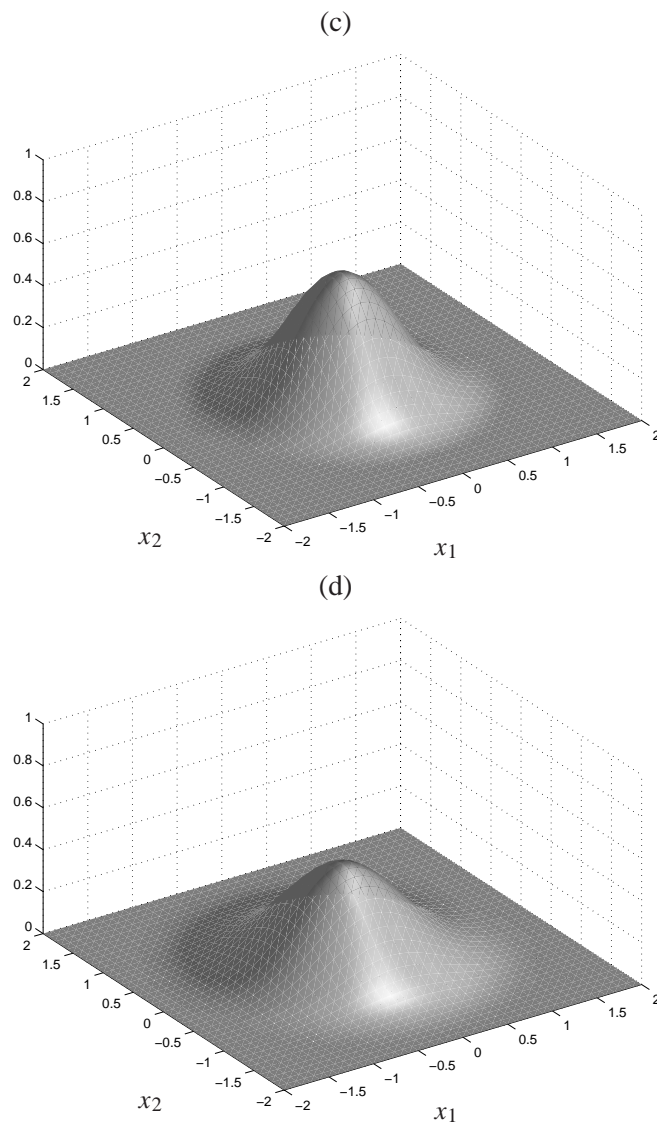
Figuur 2.2: Veralgemeende splines gedefinieerd op een vierkant rooster. (a) Eerste orde. (b) Tweede orde.



Figuur 2.2: (vervolg) Veralgemeende splines gedefinieerd op een vierkant rooster. (c) Derde orde. (d) Vierde orde.



Figuur 2.3: Veralgemeende splines gedefinieerd op een hexagonaal rooster. (a) Eerste orde. (b) Tweede orde.



Figuur 2.3: (vervolg) Veralgemeende splines gedefinieerd op een hexagonaal rooster. (c) Derde orde. (d) Vierde orde.

De ruimte opgespannen door deze splines op het rooster \mathbf{R} wordt gegeven door

$$S(\beta^n) = \left\{ s^n(\mathbf{x}) \mid s^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) \beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{k}); c(\mathbf{k}) \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.7)$$

Net zoals bij de eendimensionale splines vallen de splinecoëfficiënten $c(\mathbf{k})$ niet noodzakelijk samen met de monsterwaarden op $\mathbf{R}\mathbf{k}$.

Opdat het signaalmodel van formule (2.7) zin zou hebben, gaan we na of de voorwaarden van Riesz-basis en eenheidspartitie vervuld zijn. We hebben daarbij vooral de splines op een hexagonaal rooster voor ogen.

- De splines vormen een Riesz-basis, en zijn dus stabiel en niet-ambigu, wanneer er twee strikt positieve constanten $0 < A$ en $B < +\infty$ bestaan, zodanig dat

$$A \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) \beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{k}) \right\|^2 \leq B \|c\|_{l_2}^2. \quad (2.8)$$

Het is duidelijk in te zien dat deze voorwaarde voldaan is voor de eerste-orde spline, waarbij

$$\left\| \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) \phi(\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{k}) \right\|^2 = \Omega \|c\|_{l_2}^2, \quad (2.9)$$

en dus $A = B = \Omega$. Voor hogere ordes blijft de bovengrens identiek, terwijl de normalisatie en positiviteit van $\beta^n(\mathbf{x})$ garandeert dat er een benedengrens bestaat voor $n < +\infty$.

- Dankzij de recursieve definitie van formule (2.6), kunnen we aantonen dat de eenheidspartitie eveneens voldaan is:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{R}} \otimes \beta^n(\mathbf{x}) &= \frac{\delta_{\mathbf{R}} \otimes \beta^0 \otimes \beta^{n-1}}{\Omega}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1 \otimes \beta^{n-1}}{\Omega}(\mathbf{x}) = \frac{1 \otimes \beta^0 \otimes \beta^{n-2}}{\Omega^2}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1 \otimes \beta^{n-2}}{\Omega}(\mathbf{x}) = \dots = \frac{1 \otimes \beta^0}{\Omega}(\mathbf{x}) = 1. \end{aligned}$$

2.2.2 De splinetransformatie

Net als bij de eendimensionale B-splines, dienen we de splinecoëfficiënten te berekenen vanaf derde orde. Bovendien kunnen we enkel voor rechthoekige roosters de dimensies afzonderlijk behandelen.

We introduceren eerst de nodige hulpfuncties. Zo stellen we

$$\beta_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{x}) = \beta^n(\mathbf{x})\delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

de bemonsterde veralgemeende spline en

$$b^n(\mathbf{k}) = \beta^n(\mathbf{Rk}), \quad (2.11)$$

de corresponderende rij.

Opdat de voorstelling van een functie $g(\mathbf{x})$ m.b.v. een signaalmodel

$$s^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k})\beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{Rk}) \quad (2.12)$$

zou overeenstemmen op de roosterpunten \mathbf{Rk} , dient te gelden

$$g(\mathbf{Rk}) = \sum_{\mathbf{n}} c(\mathbf{n})\beta^n(\mathbf{Rk} - \mathbf{Rn}), \quad (2.13)$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} g(\mathbf{Rk}) &= \sum_{\mathbf{n}} c(\mathbf{n})b^n(\mathbf{k} - \mathbf{n}) \\ &= c \otimes b^n(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

zodat

$$c(\mathbf{k}) = \left((b^n)^{-1} \otimes \bar{g} \right) (\mathbf{k}), \quad (2.14)$$

waarbij we de rij $\bar{g}(\mathbf{k})$ gebruiken voor $g(\mathbf{Rk})$. Op het eerste gezicht kan de berekening analoog gebeuren, zoals in het eendimensionale geval: via het oplossen van een lineair stelsel. Er zijn echter twee belangrijke nadelen aan deze aanpak. Ten eerste is de corresponderende matrix niet langer banddiagonaal, gezien de tweedimensionale (niet-scheidbare) structuur. Ten tweede bekomt men snel zeer grote afmetingen. Een “beeld” met 100×100 beeldpunten geeft reeds aanleiding tot een (ijle) matrix van 10000×10000 .

Een tweede mogelijkheid is de berekening van $c(\mathbf{k})$ uit formule (2.14) m.b.v. inverse filters. Daartoe hebben we de tweedimensionale \mathcal{Z} -getransformeerde berekend van $b^n(\mathbf{k})$ (zie tabellen 2.1 en 2.2). In tegenstelling tot het eendimensionale geval, ligt een ontbinding van de inverse in recursieve

Tabel 2.1: \mathcal{Z} -transformatie van de veralgemeende vierkante splines.

n	
0	$\check{b}^0(z_1, z_2) = 1$
1	$\check{b}^1(z_1, z_2) = 1$
2	$\check{b}^2(z_1, z_2) = \frac{1}{64} (z_1 + 6 + z_1^{-1}) (z_2 + 6 + z_2^{-1})$
3	$\check{b}^3(z_1, z_2) = \frac{1}{36} (z_1 + 4 + z_1^{-1}) (z_2 + 4 + z_2^{-1})$

Tabel 2.2: \mathcal{Z} -transformatie van de veralgemeende hexagonale splines.

n	
0	$\check{b}^0(z_1, z_2) = 1$
1	$\check{b}^1(z_1, z_2) = 1$
2	$\check{b}^2(z_1, z_2) = \frac{42}{72} + \frac{5}{72} (z_1 + z_2 + z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1 z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1})$
3	$\check{b}^3(z_1, z_2) = \frac{37}{81} + \frac{29}{324} (z_1 + z_2 + z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_1 z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1}) + \frac{1}{972} (z_1^{-1} z_2 + z_1 z_2^{-1} + z_1 z_2^2 + z_1^{-1} z_2^{-2} + z_1^2 z_2^2 + z_1^{-2} z_2^{-2})$

filters voor de hexagonale splines niet voor de hand. We stellen daarom een alternatieve (benaderende) manier voor om alsnog de splinecoëfficiënten te kunnen berekenen.

We hernemen de afleiding, maar doen ditmaal enkel een beroep op de bemonsterde hexagonale spline $\beta_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{x})$. We kunnen de eis tot interpolatie van de monsterwaarden immers ook schrijven als

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) &= \delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})s^n(\mathbf{x}) \\ &= \delta_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) \left(\sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k})\beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{Rk}) \right), \end{aligned}$$

zodanig dat

$$c(\mathbf{k}) = \left((\beta_{\mathbf{R}}^n)^{-1} \otimes g \right) (\mathbf{Rk}). \quad (2.15)$$

De afleiding van de kardinaalvorm volgt nu onmiddellijk:

$$s^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \left((\beta_{\mathbf{R}}^n)^{-1} \otimes \beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{Rk}) \right) g(\mathbf{Rk}). \quad (2.16)$$

Voor splines vanaf derde orde heeft de kardinale of interpolerende spline $\Psi^n(\mathbf{x}) = (\beta_{\mathbf{R}}^n)^{-1} \otimes \beta^n(\mathbf{x})$ echter een oneindig uitgestrekte drager. We stel-

len voor om deze numeriek te benaderen op een eindige drager. De methode daartoe komt neer op het oplossen van de volgende vergelijking naar $h(\mathbf{x})$:

$$\beta^n(\mathbf{x}) = \beta_{\mathbf{R}}^n \otimes h(\mathbf{x}), \quad (2.17)$$

m.b.v. een iteratieve procedure (bekend onder de benaming iteratie van Van Cittert, Bially of Landweber [20, 123])

$$h_0(\mathbf{x}) = \zeta \beta^n(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

$$h_{k+1}(\mathbf{x}) = h_k(\mathbf{x}) + \zeta (\beta^n(\mathbf{x}) - h_k \otimes \beta_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{x})), \quad (2.19)$$

met ζ een positieve parameter die de convergentie bepaalt. De convolutie aan de rechterzijde van de iteratievergelijking is eenvoudig te evalueren wegens de beperkte drager van $\beta^n(\mathbf{x})$:

$$h_k \otimes \beta^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \beta^n(\mathbf{Rk}) h_k(\mathbf{x} - \mathbf{Rk}).$$

We kunnen vrij gemakkelijk aantonen dat het iteratieschema convergeert door formule (2.19) om te zetten naar het frequentiedomein. We bekomen in dat geval

$$\begin{aligned} \hat{h}_k(\mathbf{f}) &= \zeta \hat{\beta}^n(\mathbf{f}) \left[1 + (1 - \zeta \hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f})) + \dots + (1 - \zeta \hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f}))^k \right] \\ &= \frac{\hat{\beta}^n(\mathbf{f})}{\hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f})} \left[1 - (1 - \zeta \hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f}))^{k+1} \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

waaruit we besluiten dat, wanneer k zeer groot wordt $h_k(\mathbf{x}) \rightarrow (\beta_{\mathbf{R}}^n)^{-1} \otimes \beta^n(\mathbf{x})$, waarbij de voorwaarde

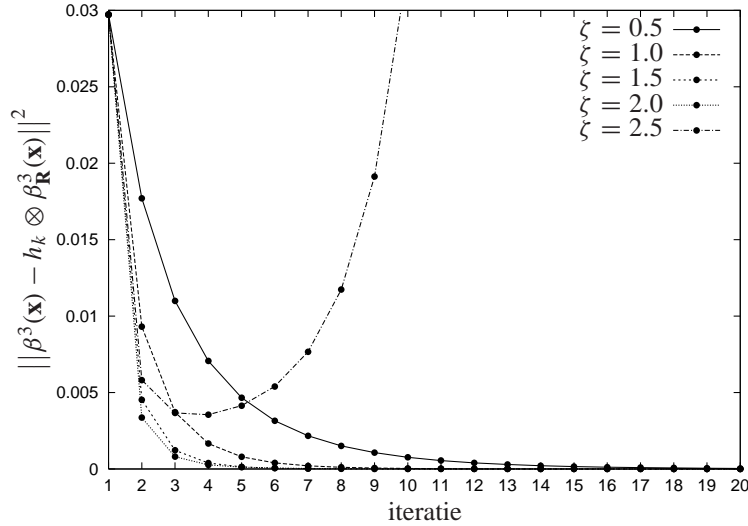
$$\left| 1 - \zeta \hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f}) \right| < 1, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad (2.22)$$

dient gerespecteerd te worden. Merk allereerst op dat we de fouriertransformatie van $\beta_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{x})$ reeds bepaald hebben onder de vorm van de \mathcal{Z} -transformatie:

$$\hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f}) = \check{b}^n(\exp(-j2\pi\mathbf{f})). \quad (2.23)$$

Gezien de symmetrie van de splines, is het spectrum $\hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f})$ zuiver reëel. Bovendien volgt uit de normalisatie van de splines dat

$$\max_{\mathbf{f}} \left(\hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f}) \right) \leq 1. \quad (2.24)$$



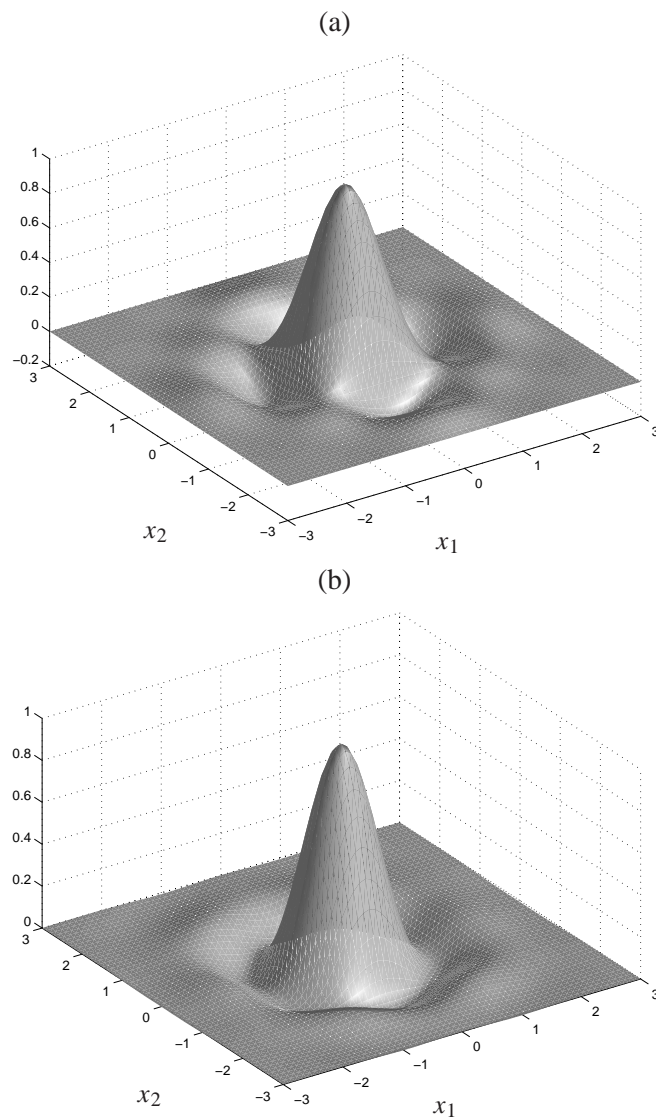
Figuur 2.4: De residuele fout bij het berekenen van de veralgemeende vierde-orde kardinale spline op een hexagonaal rooster neemt snel af.

Convergentie is dus verzekerd wanneer

$$\min_{\mathbf{f}} \left(\hat{\beta}_{\mathbf{R}}^n(\mathbf{f}) \right) > 0. \quad (2.25)$$

Op basis van tabel 2.2 blijkt deze voorwaarde alvast vervuld t.e.m. vierde orde.

De convergentievoorwaarde van formule (2.22) met de vaststellingen uit formules (2.24) en (2.25) laten $0 < \zeta < 2$ toe. Ter illustratie berekenen we de kardinale spline van vierde orde op een hexagonaal rooster. Figuur 2.4 toont de residuele fout $\|\beta^3(\mathbf{x}) - h_k \otimes \beta_{\mathbf{R}}^3(\mathbf{x})\|^2$, als functie van het aantal iteraties en de parameter ζ . Het is duidelijk dat het iteratieschema snel convergeert. Merk ook op dat er inderdaad divergentie optreedt voor $\zeta > 2$. Figuur 2.5 toont het resultaat: de tweedimensionale kardinale splines van vierde orde gedefinieerd op een vierkant en hexagonaal rooster.



Figuur 2.5: De tweedimensionale kardinale splines van vierde orde gedefinieerd op een vierkant en hexagonaal rooster.

2.2.3 De orde van approximatie

De orde van approximatie is een wiskundig concept dat ons leert in hoeverre we mogen verwachten dat een functie $g(\mathbf{x})$, die verondersteld is gekend te zijn, zal benaderd worden door ons signaalmodel. Beschouw het rooster

$$\mathbf{R}_h = h\mathbf{R}, \quad h \in \mathbb{R}^+, \quad (2.26)$$

waarbij h een schalingsfactor is, waarmee we het rooster kunnen verfijnen. Wanneer we de functie $g(\mathbf{x})$ kennen op de roosterpunten $\mathbf{R}_h\mathbf{k}$, kunnen we volgend signaalmodel opstellen:

$$s^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k})\beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{R}_h\mathbf{k}). \quad (2.27)$$

We kunnen intuïtief verwachten dat de fout $\|s^n - g\|^2$ afneemt, wanneer h verkleint. In het algemeen wordt de approximatiefout in het frequentiedomein gegeven door [22, 140]

$$\eta^2(h) = \int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} |\hat{s}^n(\mathbf{f})|^2 E_{\text{int}}(h\mathbf{f}) d\mathbf{f}, \quad (2.28)$$

waarbij $E_{\text{int}}(\mathbf{f})$ een foutkern is die enkel afhankelijk is van de interpolatiefunctie. De informatie van de functie $g(\mathbf{x})$, meer bepaald de monsterwaarden $g(\mathbf{R}_h\mathbf{k})$, zit vervat in het model $s^n(\mathbf{x})$. De foutkern is bekend in de literatuur [140] en wordt gegeven door

$$E_{\text{int}}(\mathbf{f}) = \frac{\left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_0^{2 \times 1}} \hat{\beta}^n(\mathbf{f} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \right|^2 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_0^{2 \times 1}} \left| \hat{\beta}^n(\mathbf{f} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \right|^2}{\left| \sum_{\mathbf{k}} \hat{\beta}^n(\mathbf{f} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \right|^2}, \quad (2.29)$$

waarbij $\hat{\mathbf{R}}$ het reciproque rooster is van \mathbf{R} .

In het geval van hexagonale roosters zijn we erin geslaagd om de analytische vorm van de fouriergetransformeerde $\hat{\beta}^0(\mathbf{f})$ van de eerste-orde spline te bepalen: (zie bijlage A)

$$\hat{\beta}^0(\mathbf{f}) = \frac{1}{\pi^2 f_1} \left(\frac{\cos(\pi f_1/\sqrt{3} + \pi f_2) - \cos(2\pi f_1/\sqrt{3})}{f_1 - \sqrt{3} f_2} + \frac{\cos(-\pi f_1/\sqrt{3} + \pi f_2) - \cos(2\pi f_1/\sqrt{3})}{f_1 + \sqrt{3} f_2} \right).$$

De constructie van hogere-ordesplines m.b.v. opeenvolgende convoluties en de convolutiestelling laten toe om een algemene analytische vorm te bepalen:

$$\hat{\beta}^n(\mathbf{f}) = \left(\hat{\beta}^0(\mathbf{f})\right)^{n+1} / \Omega^n. \quad (2.30)$$

Wanneer we de schalingsfactor h verkleinen, neemt ook het argument van E_{int} uit formule (2.28) af. We mogen dan ook verwachten dat voor een goede interpolatiefunctie E_{int} nul wordt in de oorsprong. De orde van approximatie is een maat voor hoe snel de residuele fout afneemt naar nul als functie van h : $\eta(h) \propto h^L$. Strang en Fix [132, 140] hebben de volgende equivalente voorwaarden geformuleerd, opdat de orde van approximatie L zou bedragen:

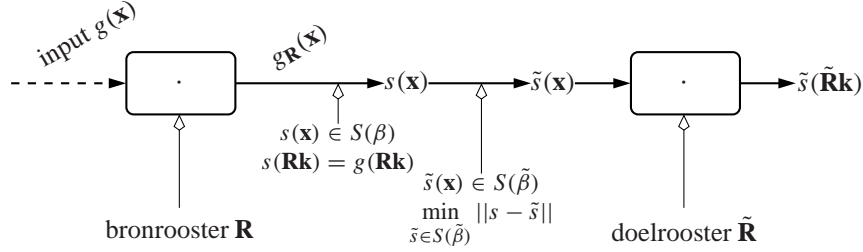
$$\begin{cases} \hat{\beta}^n(\mathbf{0}) = 1, \\ \frac{\partial^2 \hat{\beta}^n(\hat{\mathbf{R}}\mathbf{k})}{\partial f_1^{m_1} \partial f_2^{m_2}} = 0, \quad m_1 + m_2 \leq L. \end{cases} \quad (2.31)$$

Deze voorwaarde is geverifieerd m.b.v. een geavanceerd softwarepakket voor symbolische manipulatie [185]. Hieruit blijkt dat de benaming “ $(n + 1)$ -de orde” voor de veralgemeende splines overeenstemt met de orde van approximatie.

2.3 De kleinste-kwadratenbenadering

De klassieke methoden voor herbemonstering houden geen rekening met het doelrooster. Deze tekortkoming kan aanleiding geven tot storende artefacten ten gevolge van frequentieverwarring. Nochtans kunnen we, wanneer we een signaalmodel toepassen op het bron- en doelrooster, de eis opleggen dat er slechts een minimaal informatieverlies mag optreden. Een voor de hand liggende keuze is om de kwadratische fout tussen de splinevoorstelling voor en na herbemonstering te minimaliseren. Figuur 2.6 illustreert het principe van deze kleinste-kwadratenbenadering. Unser en Daubechies [150, 151] hebben een algoritme afgeleid dat gebaseerd is op het principe van een convolutiegebaseerde kleinste-kwadratenbenadering. Deze theorie werd ontwikkeld voor eendimensionale splinerepresentaties en uitgebreid voor scheidbare meerdimensionale splines. Dankzij onze veralgemeende tweedimensionale splines, is het nu mogelijk om eveneens een kleinste-kwadratenbenadering af te leiden voor niet-scheidbare roosters.

We beschouwen twee signaalruimten $S(\beta^n)$ en $S(\tilde{\beta}^n)$, respectievelijk ge-



Figuur 2.6: Herbemonstering m.b.v. een kleinste-kwadratenbenadering zoekt de nieuwe monsterwaarden $\tilde{s}(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k})$ zodat de fout $\|s - \tilde{s}\|^2$ tussen het signaalmodel $s(\mathbf{x})$ op het bronrooster \mathbf{R} en het signaalmodel $\tilde{s}(\mathbf{x})$ op het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$ minimaal is.

baseerd op splines voor het bronrooster \mathbf{R} en het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$S(\beta^n) = \left\{ s^n(\mathbf{x}) \mid s^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) \beta^n(\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{k}); c(\mathbf{k}) \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.32)$$

$$S(\tilde{\beta}^n) = \left\{ \tilde{s}^n(\mathbf{x}) \mid \tilde{s}^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{c}(\mathbf{k}) \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}); \tilde{c}(\mathbf{k}) \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.33)$$

Ons doel is het bepalen van een reconstructiefunctie $\Phi^n(\mathbf{x})$, zodanig dat het resultaat van

$$\tilde{s}^n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \Phi^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) s^n(\mathbf{R}\mathbf{k}), \quad (2.34)$$

de kleinste-kwadratenoplossing oplevert tussen beide signaalmodellen. Merk op dat we hier geen eis tot interpolatie van de originele monsterwaarden opleggen en dat dit in de praktijk ook niet het geval zal zijn.

Voor een willekeurige functie $g(\mathbf{x})$ kunnen we de beste benadering in $S(\tilde{\beta}^n)$ volgens de L_2 -norm vinden door orthogonale projectie op de signaalruimte. De residuele fout $g(\mathbf{x}) - \tilde{s}^n(\mathbf{x})$ zal aldus orthogonaal zijn ten opzichte van $S(\tilde{\beta}^n)$. Aangezien we de originele functie enkel kennen op de roosterpunten $\mathbf{R}\mathbf{k}$, vervangen we de functie $g(\mathbf{x})$ door de splinerepresentatie $s^n(\mathbf{x})$ op het bronrooster \mathbf{R} . Nog steeds echter moet gelden

$$\langle s^n(\mathbf{x}) - \tilde{s}^n(\mathbf{x}), \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \rangle = 0. \quad (2.35)$$

We onderstellen verder steeds dat we met reële grootheden werken en aldus de complex toegevoegde kunnen weglaten. Gebruikmakend van het signaalmodel

voor $\tilde{s}^n(\mathbf{x})$ kunnen we verder afleiden dat

$$\begin{aligned} \langle s^n(\mathbf{x}), \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \rangle &= \langle \tilde{s}^n(\mathbf{x}), \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\mathbf{l}} \tilde{c}(\mathbf{l}) \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{l}), \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \right\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{l}} \tilde{c}(\mathbf{l}) \langle \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{l}), \tilde{\beta}^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.36)$$

We kunnen nu de eigenschap die aan de basis ligt van de veralgemeende splines gebruiken: $\tilde{\beta}^n \otimes \tilde{\beta}^n(\mathbf{x}) / \Omega = \tilde{\beta}^{2n+1}(\mathbf{x})$. Formule (2.36) wordt dan

$$s^n \otimes \tilde{\beta}^n(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}) = \Omega \left(\sum_{\mathbf{l}} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{l}) \tilde{c}(\mathbf{l}) \right) \otimes \tilde{\beta}^{2n+1}(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}). \quad (2.37)$$

De oplossing voor de gezochte coëfficiënten $\tilde{c}(\mathbf{k})$ is dus

$$\tilde{c}(\mathbf{k}) = \frac{s^n \otimes \tilde{\beta}^n \otimes \left(\tilde{\beta}_{\tilde{\mathbf{R}}}^{2n+1} \right)^{-1}}{\Omega}(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}). \quad (2.38)$$

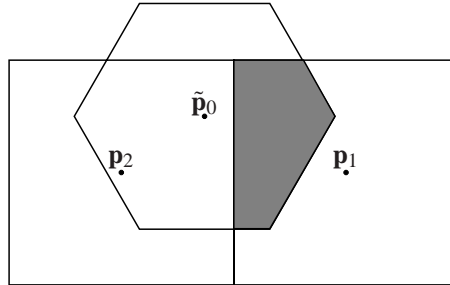
Dit laat ons toe om de kleinste-kwadratenoplossing voor herbemonstering van het bronrooster \mathbf{R} naar het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$ te schrijven onder de vorm van de reconstructiefunctie uit formule (2.34):

$$\Phi^n(\mathbf{x}) = \underbrace{\left(\beta_{\mathbf{R}}^n \right)^{-1} \otimes \beta^n}_{1} \otimes \underbrace{\tilde{\beta}^n \otimes \left(\tilde{\beta}_{\tilde{\mathbf{R}}}^{2n+1} \right)^{-1}}_{2} \otimes \underbrace{\tilde{\beta}_{\tilde{\mathbf{R}}}^n(\mathbf{x}) / \Omega}_{3}. \quad (2.39)$$

De deeldrukkingen 1 – 3 groeperen respectievelijk:

1. De directe splinetransformatie die de splinecoëfficiënten op het bronrooster berekent.
2. De kleinste-kwadratenbenadering.
3. De finale convolutie die de functie in de ruimte $S(\tilde{\beta}^n)$ construeert m.b.v. de nieuwe splinecoëfficiënten.

Merk op dat de keuze van n verschillend kan zijn voor het signaalmodel dat wordt aangewend voor bron- en doelrooster. Ter illustratie gaan we tonen de resultaten voor herbemonstering van een orthogonaal bronrooster \mathbf{R} naar een hexagonaal doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$.



Figuur 2.7: De kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline wordt ook “oppervlakteprojectie” genoemd. Zo zal de bijdrage van de monsterwaarde van het bronroosterpunt \mathbf{p}_1 aan de nieuwe monsterwaarde van het doelroosterpunt $\tilde{\mathbf{p}}_0$ proportioneel zijn met de gemeenschappelijke oppervlakte van de roosterzellen (aangeduid in het grijs).

In het geval $n = 0$ wordt de reconstructiefunctie van formule (2.39) vereenvoudigd tot

$$\Phi^0(\mathbf{x}) = \beta^0 \otimes \tilde{\beta}^0(\mathbf{x}) / \Omega. \quad (2.40)$$

Er zijn dus geen inverse filteroperaties nodig en de drager is bijgevolg beperkt. Dit geval wordt ook “oppervlakteprojectie” genoemd,² aangezien de herbemonstering proportioneel met de overlap van de roosterzellen gebeurt, zoals geïllustreerd in figuur 2.7. In dit voorbeeld zoeken we een monsterwaarde voor het doelroosterpunt $\tilde{\mathbf{p}}_0$. Merk op dat in het geval van eenvoudige interpolatie met de eerste-ordespline van het bronrooster, de nieuwe monsterwaarde gegeven wordt door die van het dichtste bronroosterpunt, in dit geval dus \mathbf{p}_2 . Figuur 2.8 (a) toont de reconstructiefunctie die overeenstemt met de kleinste-kwadraten spline van eerste orde.

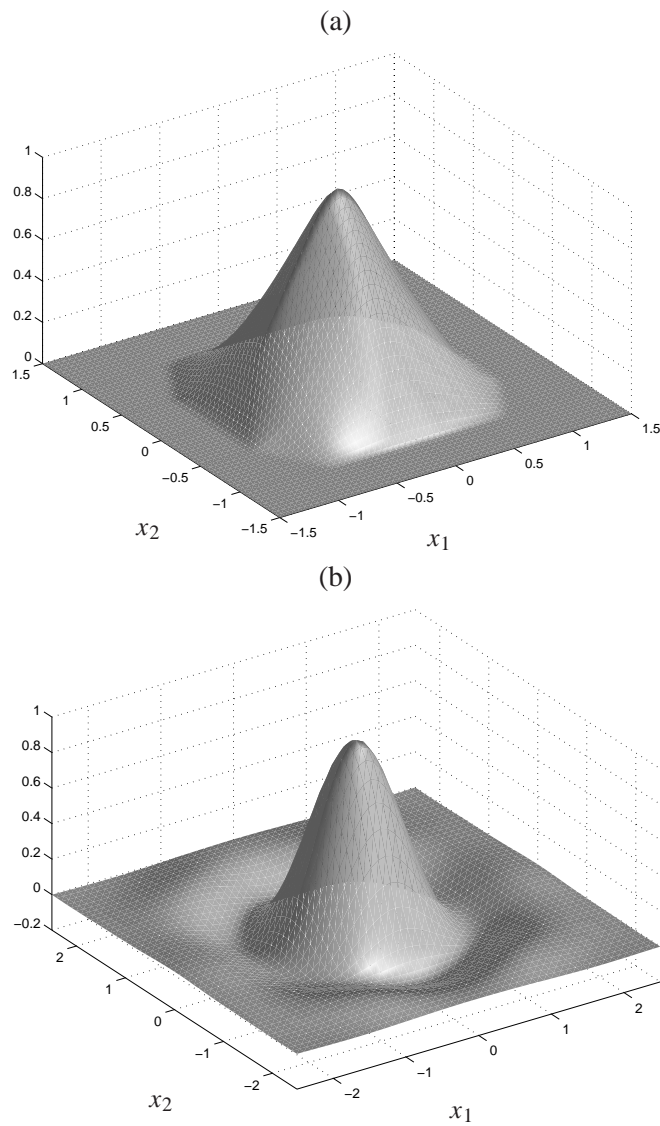
De kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline geeft aanleiding tot de reconstructiefunctie

$$\Phi^1(\mathbf{x}) = \beta^1 \otimes \tilde{\beta}^1 \otimes \left(\tilde{\beta}_{\mathbf{R}}^3 \right)^{-1}(\mathbf{x}) / \Omega. \quad (2.41)$$

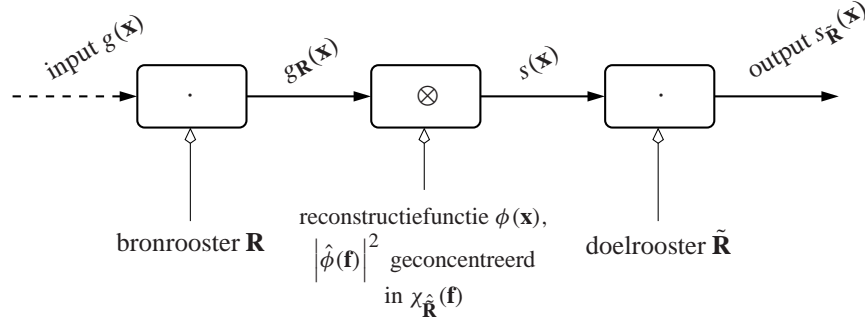
De aanwezigheid van de inverse filteroperatie $\left(\tilde{\beta}_{\mathbf{R}}^3 \right)^{-1}$ zorgt voor een (theoretisch) onbeperkte drager. De snelle afname maakt echter een benadering op een eindige drager mogelijk op dezelfde wijze als in formule (2.17). Figuur 2.8 (b) toont de kleinste-kwadraten spline van tweede orde benaderd op een drager van

²Er bestaat een (gepatenteerde) implementatie van deze methode in hardware voor herbemonstering tussen rechthoekige roosters [124].

$[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$. De snelle afname kan gecontroleerd worden door de reconstructiefunctie eerst te benaderen op een grotere drager. De reconstructiefuncties $\Phi^n(\mathbf{x})$ die we op deze wijze bekomen voor veralgemeende splines zijn een originele bijdrage van dit werk.



Figuur 2.8: De interpolatiefuncties volgens de kleinste-kwadratenbenadering voor herbemonstering van een vierkant naar een hexagonaal rooster. (a) Eerste orde (oppervlakteprojectie). (b) Tweede orde.



Figuur 2.9: Herbemonstering met optimale energieconcentratie zoekt naar de reconstructiefunctie $\phi(\mathbf{x})$ die optimaal geconcentreerd is in het nyquistgebied van het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$.

2.4 Reconstructie met optimale energieconcentratie

In dit gedeelte stellen we een alternatieve aanpak voor i.v.m. het ontwerp van een reconstructiefunctie. Beschouw de reconstructieformule

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{k})g(\mathbf{R}\mathbf{k}), \quad (2.42)$$

die in het frequentiedomein overeenstemt met

$$\hat{s}(\mathbf{f}) = \hat{\phi}(\mathbf{f})\hat{g}_{\mathbf{R}}(\mathbf{f}). \quad (2.43)$$

Aangezien het herbemonsteren van $s(\mathbf{x})$ op een doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$ het spectrum $\tilde{s}(\mathbf{f})$ uitvouwd op het reciproque rooster $\hat{\tilde{\mathbf{R}}}$, gaan we op zoek naar de reconstructiefunctie $\phi(\mathbf{x})$ die een optimale energieconcentratie bezit in het nyquistgebied van het doelrooster, m.a.w. de reciproque doelrooster cel. Figuur 2.9 illustreert het principe. We bepalen de reconstructiefunctie $\phi(\mathbf{x})$ door de grootheid

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \chi_{\hat{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{f})} |\hat{\phi}(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}}{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} \chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{f}) |\hat{\phi}(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}} \quad (2.44)$$

te maximaliseren. Bijkomend eisen we ook dat de functie beschikt over een beperkte drager en een eenheidspartitie vormt. Alvorens te komen tot de oplossing van deze probleemstelling, staan we even stil bij de prolate sferoïdale golffuncties, welke de sleutel tot de oplossing zullen vormen.

2.4.1 De prolate sferoïdale golffuncties

In een bekende reeks artikelen behandelen Slepian, Landau en Pollak [81, 82, 127, 129] een familie perfect bandgelimiteerde functies, die orthogonaal zijn over een eindig interval $[-T/2, T/2]$ én $(-\infty, +\infty)$.

Gegeven de constanten $T > 0$ en $\Theta > 0$, dan bestaat er een aftelbaar oneindig aantal functies $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ en een corresponderend aantal positieve reële getallen $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, zodanig dat

1. De functies $\psi_i(x)$ bandbeperkt zijn tot de frequentieband $[-\Theta, \Theta]$, orthonormaal, reëel en compleet op de reële as voor elke willekeurige bandbeperkte functie:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (2.45)$$

2. De functies $\psi_i(x)$ bovendien orthogonaal zijn en compleet voor alle functies met eindige energie en drager $[-T/2, T/2]$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i, & i = j. \end{cases} \quad (2.46)$$

3. De functies $\psi_i(x)$ voldoen aan de integraalvergelijking

$$\lambda_i \psi_i(x) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin(2\pi\Theta(x-t))}{\pi(x-t)} \psi_i(t) dt. \quad (2.47)$$

Slepian et al. ontdekten dat de gezochte functies, m.n. de oplossing van de integraalvergelijking (2.47), overeenstemmen met geschaalde versies van de oplossing van de golfvergelijking [96, hfdst. 11.3] [133] in het prolate sferoïdale coördinatenstelsel [97, hfdst. 5.1], vanwaar hun benaming.

Voor onze toepassing is vooral de nulde prolate sferoïdale functie van belang. Deze functie, bandbeperkt tot $[-\Theta, \Theta]$, heeft de hoogst mogelijke energieconcentratie in het interval $[-T/2, T/2]$. Vooraleer we de reconstructiefunctie op basis van een veralgemening van deze aanpak kunnen berekenen, dienen we echter de prolate sferoïdale rijen te introduceren.

2.4.2 De prolate sferoïdale rijen

De prolate sferoïdale rijen ontstaan door de probleemstelling te behandelen in een discreet domein [128]. Deze behandeling laat ons toe om de prolate sferoïdale golf functies effectief te berekenen.

We zoeken een rij $v(k), k = 0, \dots, M-1$, met spectrum $\hat{v}(f)$ gegeven door $\sum_{k=0}^{M-1} v(k) \exp(-j2\pi kf)$, zodanig dat de energieconcentratie in een gegeven frequentieband $[-W, W]$, $0 < W < 1/2$, gegeven door

$$\lambda = \frac{\int_{-W}^W |\hat{v}(f)|^2 df}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{v}(f)|^2 df}, \quad (2.48)$$

maximaal is. Merk op dat het spectrum $\hat{v}(f)$ periodiek is met periode 1. Steunend op de eigenschap van Parseval bekomen we

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{v}(f)|^2 df = \sum_{k=0}^{M-1} |v(k)|^2, \quad (2.49)$$

hetgeen ons toelaat om formule (2.48) te herschrijven als een quotiënt van kwadratische vormen. In matrixnotatie bekomen we

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}' \mathbf{v}}, \quad (2.50)$$

met $\mathbf{v} = [v(0) \ v(1) \ \dots \ v(M-1)]'$ en met \mathbf{A} een reëel symmetrische matrix die de convolutie met een ideaal laagdoorlaatfilter bewerkstelligt:

$$[\mathbf{A}]_{m,n} = \frac{\sin(2\pi W(m-n))}{\pi(m-n)}. \quad (2.51)$$

De discrete prolate sferoïdale rijen (DPSS, *Eng.* discrete prolate spheroidal sequences) zijn dan de genormaliseerde eigenvectoren van de matrix \mathbf{A} :

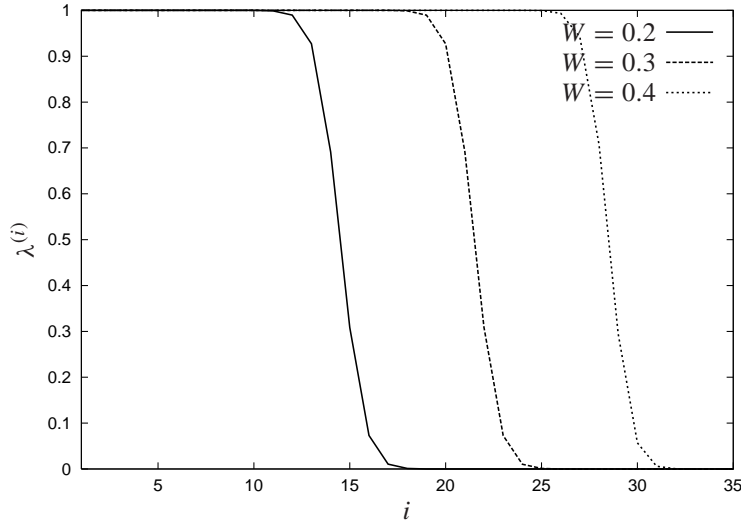
$$\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\sin(2W(m-n))}{\pi(m-n)} v(n) = \lambda v(m). \quad (2.52)$$

Dit eigenwaardenprobleem heeft M verschillende eigenwaarden $\lambda^{(i)}$ en eigenvectoren $\mathbf{v}^{(i)}$ [180, 181], die we normaliseren zodat

$$\sum_{n=0}^{M-1} (v^{(i)}(n))^2 = 1, \text{ en } \sum_{n=0}^{M-1} v^{(i)}(n) \geq 0, \quad \forall i. \quad (2.53)$$

De betekenis van de DPSS is vooral duidelijk door de vectoren te ordenen volgens dalende eigenwaarde. Het prolate sferoïdale venster (DPSW) is dan de eerste vector, namelijk die met de grootste eigenwaarde, en heeft aldus de beste energieconcentratie in het frequentiebereik $[-W, W]$. De volgende eigenvector staat loodrecht op deze eerste, en heeft daarenboven een zo hoog mogelijke energieconcentratie in de gegeven frequentieband. Op die wijze vormen de vectoren een orthonormale basis. Het prolate sferoïdale venster heeft vele toepassingen, b.v. als venster voor korte-tijdsfourieranalyse [43], bij het ontwerp van digitale filters [145], in de medische beeldverwerking [67] en bij de verwerking van radarbeelden [141].

Figuur 2.10 toont de eigenwaarden voor $M = 35$ en verschillende waarden van W . De eigenwaarden zijn allemaal verschillend, maar groeperen zich



Figuur 2.10: De eigenwaarden overeenstemmend met de discrete prolate sferoïdale rijen. Merk op dat de eigenwaarden samenklitten rond 0 en 1.

duidelijk rond 1 en 0. Hierdoor wordt het verschil tussen opeenvolgende eigenwaarden vanaf een bepaalde M kleiner dan de eindige precisie waarmee de meeste programma's rekenen, hetgeen belet om het probleem nog correct numeriek op te lossen [35, 180]. Figuur 2.11 geeft weer hoe het relatief verschil tussen de twee grootste eigenwaarden afneemt als functie van M voor verschillende W . Het ontaarden van de numerieke berekening kan worden voorkomen door het gebruik van een pakket met instelbare numerieke precisie [16] of door een alternatieve formulering [51, 181].

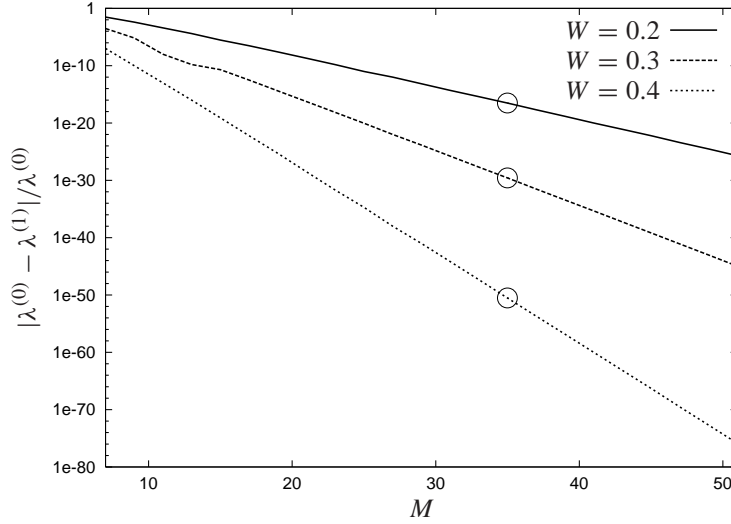
Een belangrijke eigenschap van de prolate sferoïdale rijen is de convergentie naar de prolate sferoïdale golffuncties [128]. Dit betekent dat men de prolate sferoïdale golffuncties kan berekenen m.b.v. de DPSS. Stel dat we T en Θ vast kiezen, dan geldt voor

$$M \rightarrow \infty, \quad W = \frac{T\Theta}{M}, \quad (2.54)$$

dat de DPSS evenredig zijn met de prolate golffuncties:

$$\begin{aligned} v^{(i)}(n) &\propto \psi_i \left(\frac{-T}{2} + \frac{Tn}{M} \right), \\ \lambda^{(i)} &= \lambda_i, \end{aligned}$$

en dit bij variatie van n . De waarden van $\psi_i(x)$ buiten het interval $[-T/2, T/2]$



Figuur 2.11: Het relatief verschil tussen de twee grootste eigenwaarden als functie van M en W .

kunnen bekomen worden door toepassing van formule (2.52):

$$\psi_i(x) \propto \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\sin(2W(x-n))}{\pi(x-n)} v^{(i)}(n). \quad (2.55)$$

2.4.3 Meerdimensionale uitbreiding

In de literatuur wordt de meerdimensionale uitbreiding slechts beperkt behandeld. Slepian [127] bespreekt enkel de sferische uitbreiding van de golf functies en de scheidbare uitbreiding van de rijen aan de hand van het tensorproduct. In dit werk stellen we een niet-scheidbare tweedimensionale golf functie voor, op basis van een hexagonaal frequentiegebied. We vertrekken van een veralgemeening van de DPSS naar twee dimensies en laten deze vervolgens convergeren naar de corresponderende continue tweedimensionale prolate sferoidale golf functie.

We zoeken een tweedimensionale rij $v(n_1, n_2)$ ($n_1, n_2 = 0, \dots, M-1$) met spectrum $\hat{v}(f_1, f_2)$ en een maximale energieconcentratie in een tweedimensionaal frequentiegebied \mathbf{W} , zodanig dat de verhouding

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbf{W}} |\hat{v}(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{v}(\mathbf{f})|^2 df_1 df_2} \quad (2.56)$$

maximaal is. Analoog aan het eendimensionale geval, bekomen we op basis van Parsevals theorema een eigenwaardenprobleem, waarbij de tweedimensionale indexering m.b.v. lexicografische ordening door één enkele index $i = 0, 1, \dots, M^2 - 1$ gebeurt:

$$\sum_{i=0}^{M^2-1} K(\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_i)v(\mathbf{n}_i) = \lambda v(\mathbf{n}_k), \quad (2.57)$$

waarbij $K(\mathbf{x})$ de inverse fouriergetransformeerde is van de indicatorfunctie van het gebied \mathbf{W} :

$$K(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}} \exp(j2\pi \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle) d\mathbf{f}. \quad (2.58)$$

De normalisatie van de eigenvectoren verloopt analoog als in het eendimensionale geval, alsook de convergentie volgens formule (2.54) naar de golffunctie in het continue domein. Indien we nu de inverse fouriergetransformeerde van een hexagonaal gebied (zie bijlage A) gebruiken voor $K(\mathbf{x})$, bekomen we een functie, optimaal geconcentreerd in dit gebied.

In bijlage B stellen we een algemene N -dimensionale uitbreiding voor van de DPSS en eveneens een methode om de symmetrie van het opgegeven frequentiegebied uit te buiten om een reductie te bekomen met een factor 2^N van de orde van de matrix waarvan de eigenwaarden dienen te worden bepaald.

2.4.4 De optimale reconstructiefunctie

We beschikken nu over de nodige achtergrond voor het ontwerp van een reconstructiefunctie met optimale energieconcentratie. Beschouw de volgende randvoorwaarden:

- Een vierkant bronrooster \mathbf{R} en een geschaald hexagonaal doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

- Een beperkte drager $[-5, 5] \times [-5, 5]$.
- Een optimale energieconcentratie in de reciproque doelroostercel.
- Het vormen van een eenheidspartitie.

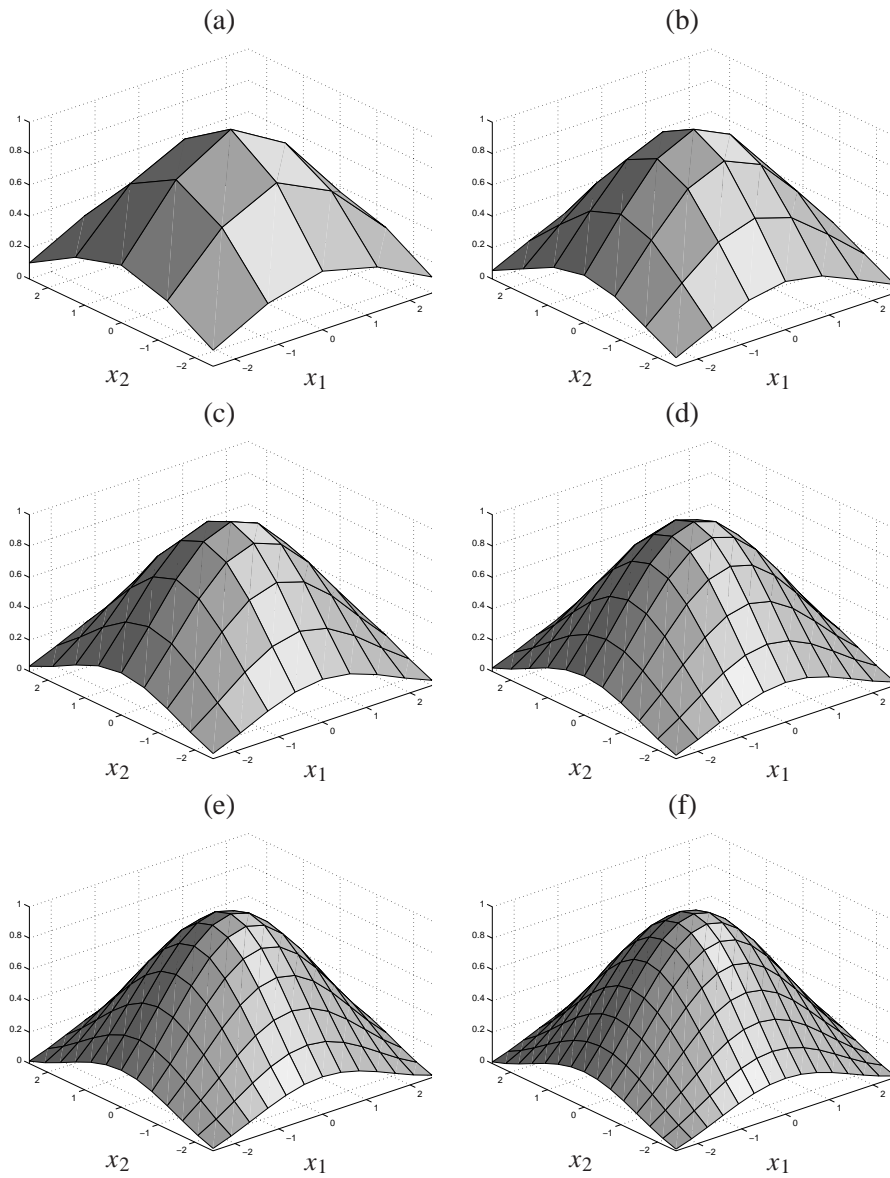
De functie $\psi_0(\mathbf{x})$ wordt berekend m.b.v. de voorgaande methode waarbij het gegeven frequentiegebied de reciproque doelroostercel is. Figuur 2.12 toont de convergentie van de tweedimensionale DPSS naar de continue functie $\psi_0(\mathbf{x})$.

Bij de overgang van $M = 13$ naar $M = 15$ is het relatief energieverval tussen beide (geïnterpoleerde³) oppervlaktes nog slechts 2%. Om een geldige reconstructiefunctie te zijn, dient deze functie ook een eenheidspartitie te vormen. Daartoe normaliseren we de functie als volgt:

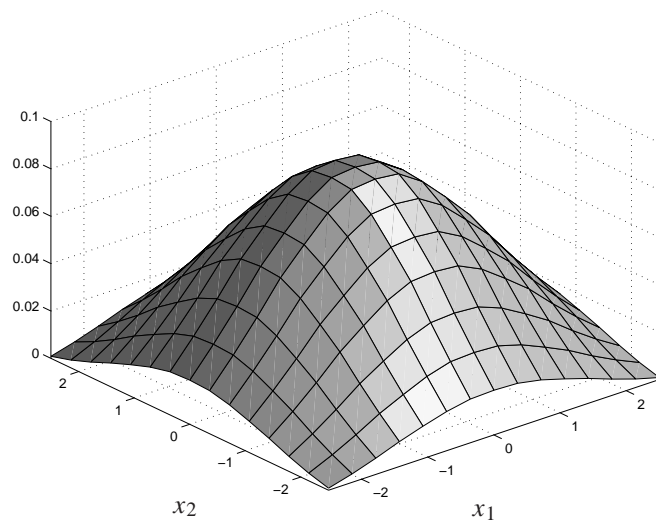
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\psi_0(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{k}} \psi_0(\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{k})}. \quad (2.60)$$

Gelukkig verschilt deze normalisatie weinig als functie van \mathbf{x} en vervormt dus in de praktijk nauwelijks de vorm van de originele functie $\psi_0(\mathbf{x})$. Figuur 2.13 geeft de uiteindelijke reconstructiefunctie weer. In tegenstelling tot de reconstructiefunctie gebaseerd op de kleinste-kwadratenbenadering vanaf tweede orde, wordt de drager van $\psi_0(\mathbf{x})$ reeds bij het ontwerp ervan beperkt.

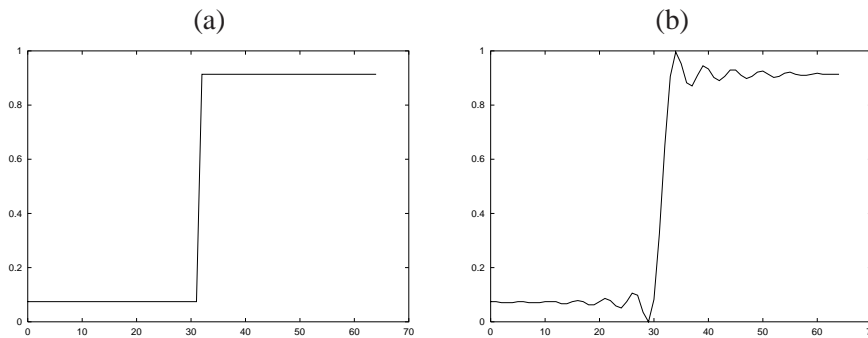
³In het gediscrètiseerde domein voor $M = 15$.



Figuur 2.12: Berekening van de functie $\psi_0(\mathbf{x})$ m.b.v. de DPSW voor (a) $M = 5$, (b) $M = 7$, (c) $M = 9$, (d) $M = 11$, (e) $M = 13$, (f) $M = 15$.



Figuur 2.13: De reconstructiefunctie met optimale energieconcentratie gebaseerd op de prolate sferoidale golf functie. Deze functie vormt een eenheidspartitie.



Figuur 2.14: Het gibbseffect wordt duidelijk zichtbaar in (b) nadat 60% van de fouriercoëfficiënten corresponderend met de hoogste frequenties uit het spectrum van de ideale rand in (a) op nul gezet zijn.

2.5 Artefacten door herbemonstering

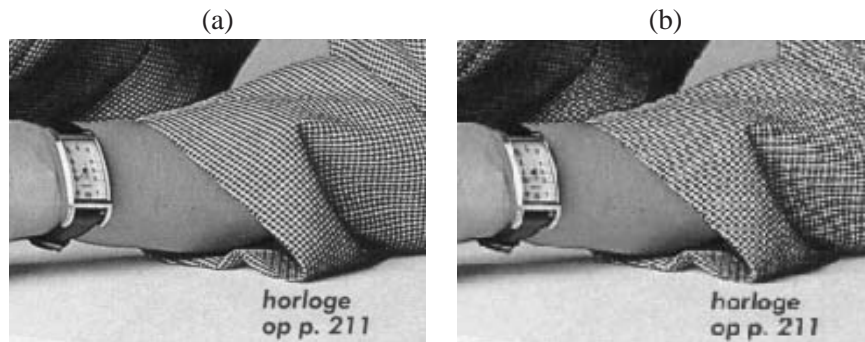
Een wiskundige analyse van interpolatiefuncties, zoals b.v. de orde van approximatie, geeft slechts een gedeeltelijke indicatie van mogelijke artefacten. In 2.6 zullen we aan de hand van toepassingen en resultaten mogelijke artefacten van herbemonstering illustreren en verklaren. We wensen echter allereerst een kort overzicht te geven van typische artefacten: ringvormige artefacten (*Eng. ringing*), frequentieverwarring (*Eng. aliasing*), blokartefacten (*Eng. jaggingness*) en vervaging (*Eng. blurring*).

Ringvormige artefacten

Doordat de meeste (goede) reconstructiefuncties oscilleren, kunnen er loodrecht op (scherpe) randen in een beeld ringvormige artefacten optreden. Dit wordt het gibbseffect genoemd. Het is in feite het gevolg van het (te) scherp afbreken van een spectrum in het frequentiedomein. Dit artefact is dan ook eigen aan de ideale interpolatiefunctie. Het experiment in figuur 2.14 illustreert het gibbseffect op een ideale rand. Nadat de hoogste fouriercoëfficiënten van de discrete fouriertransformatie van de ideale rand in (a) op nul zijn gezet, verschijnen duidelijk ringvormige artefacten in (b). Merk op dat dit experiment overeenstemt met sinc-interpolatie vertrekkend vanaf een gereduceerd aantal monsterwaarden.

Frequentieverwarring

Frequentieverwarring treedt op wanneer herbemonstering aanleiding geeft tot nieuwe frequentiecomponenten. Artefacten door frequentieverwarring treden



Figuur 2.15: Frequentieverwarring veroorzaakt storende moiré-patronen in dit testbeeld. (a) Voor herbemonstering. (b) Na herbemonstering.

vooral op bij hoge-frequentiecomponenten, d.w.z. bij frequenties buiten of rond de grens van het nyquistgebied van het doelrooster. Typische voorbeelden zijn artefacten in gestreepte kleding, jute stof, jaloezieën, texturen, enzovoort. Vele van deze artefacten worden geklasseerd onder de benaming “moiré-patronen”. Figuur 2.15 toont een testbeeld voor en na herbemonstering. De fijne structuur in het motief van de kleding veroorzaakt moiré-patronen ten gevolge van frequentieverwarring. Verder in dit werk, bij de bespreking van de resultaten voor praktische toepassingen, zullen we deze artefacten gedetailleerd toelichten.

Volledigheidshalve vermelden we dat moiré-patronen afkomstig zijn uit een veel ruimere context dan herbemonstering. In het algemeen kunnen ze optreden door de interactie van twee repetitieve structuren [48]. Een moiré-patroon is een (onverwachte) nieuwe, trager variërende, repetitieve structuur met vaak een verschillende oriëntatie. De zichtbaarheid van een moiré-patroon is meestal zo groot dat ze kan worden aangewend voor nuttige toepassingen zoals het meten van kleine verplaatsingen en hoeken, optische alignatie, kristallografie, creatie van kunst, enzovoort [13]. Deze patronen hebben bovendien hun naam te danken aan deze opvallende aanwezigheid. “Moiré” is het Franse woord voor “gevlamd”. Bij herbemonstering ontstaan moiré-patronen door interactie van de beeldinhoud met de bemonsteringsroosters. In dat geval vormen deze patronen echter een ongewenst verschijnsel dat, door zijn vaak grote zichtbaarheid, een opvallende achteruitgang van de beeldkwaliteit betekent.

Blokartefacten

Blokartefacten treden op bij reconstructiefuncties met een (zeer) kleine drager, zoals b.v. dichtste-buur-interpolatie [21]. De structuur van de reconstructiefunctie kan daardoor duidelijk optreden in het resultaat. Zo worden blokartefacten ondermeer zichtbaar bij het “vergroten” van een beeld m.b.v. dichtste-buur-interpolatie.

Vervaging

In een poging om frequentieverwarring tegen te gaan, kan een reconstructiefunctie worden ontworpen met een (betere) laagdoorlaatkarakteristiek, zodanig dat hoge-frequentiecomponenten, die aanleiding geven tot frequentieverwarring, krachtiger worden onderdrukt. Bij een sterkere laagdoorlaatfiltering worden de beelden onscherper. Deze vervaging geeft aanleiding tot een ongewenst kwaliteitsverlies dat vaak even storend of, volgens sommige onderzoekers [63, 64], zelfs storender wordt ervaren dan frequentieverwarring.

In de praktijk dienen lineaire herbemonsteringsmethoden een evenwicht te zoeken tussen deze artefacten. Daarbij is voornamelijk het vinden van een gulden middenweg tussen frequentieverwarring en vervaging een belangrijke uitdaging. Lineaire technieken die rekening houden met het doelrooster, trachten het nyquistgebied van dit doelrooster voorop te stellen als een te bereiken ideaal volgens een gegeven criterium (b.v. kleinste-kwadratenafwijking of energieconcentratie). Merk op dat het echter onnodig is dit wiskundig ideaal te bereiken [140]. De implementatie daarvan is immers niet mogelijk wegens een onbeperkte drager (of toch onpraktisch doordat een benadering een grote drager vereist door de trage afname van deze reconstructiefuncties). Daarenboven zorgt een te abrupte laagdoorlaatkarakteristiek in het frequentiedomein van deze reconstructiefuncties voor het gibbonseffect en aldus ringvormige artefacten. De kleinste-kwadratensplines laten toe om m.b.v. de orde die vrij kan gekozen worden, een compromis tussen vervaging, frequentieverwarring en ringvormige artefacten te bekomen.

2.6 Toepassingen en resultaten

In wat volgt werken we enkele toepassingen waar herbemonstering een onderdeel van het beeldverwerkingsproces vormt, verder uit. Aan de hand van deze toepassingen uit de praktijk, maken we bovendien de voorgaande begrippen aanschouwelijker. We doen dit door enkele druktechnieken onder de loep te nemen, waaronder gravurediepdruk en kleurendrukwerk. Daarbij besteden

we ook bijzondere aandacht aan de artefacten die bij herbemonstering kunnen optreden.

We introduceren eerst enkele interessante testbeelden (zie figuur 2.17). We vermelden telkens na de naam van het beeld de resolutie.

- (a) “Zoneplate” (256×256) is een interessant synthetisch testbeeld. Het is het tweedimensionaal equivalent van een frequentiezwaai: de frequenties lopen lineair op vanaf de linkerbovenhoek naar de uiteinden van het beeld, waar de maximale frequentie optreedt en dus de grens van het nyquistgebied wordt bereikt. Het beeld wordt gegenereerd m.b.v. de volgende functie:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{2M} \right) \right), \quad (2.61)$$

waarbij \mathbf{x} gedefinieerd is over een orthonormaal $M \times M$ rooster. De ogenblikkelijke genormaliseerde frequentie op een positie \mathbf{x} is $\mathbf{x}/(2M)$.

In wat volgt zullen we vaak experimenteren en redeneren met frequentiecomponenten. In het spatiale domein wordt een sinusoidale functie met frequentie \mathbf{p} gegeven door

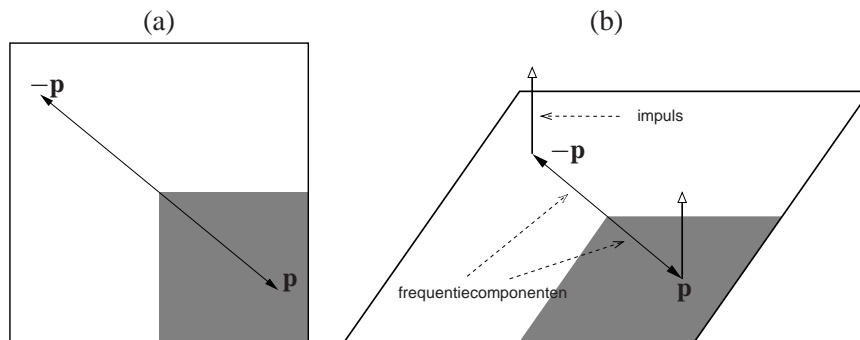
$$\cos(2\pi \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle) = \frac{\exp(j \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle) + \exp(-j \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle)}{2} \quad (2.62)$$

en stemt in het frequentiedomein overeen met twee diracimpulsen bij de frequenties \mathbf{p} en $-\mathbf{p}$:

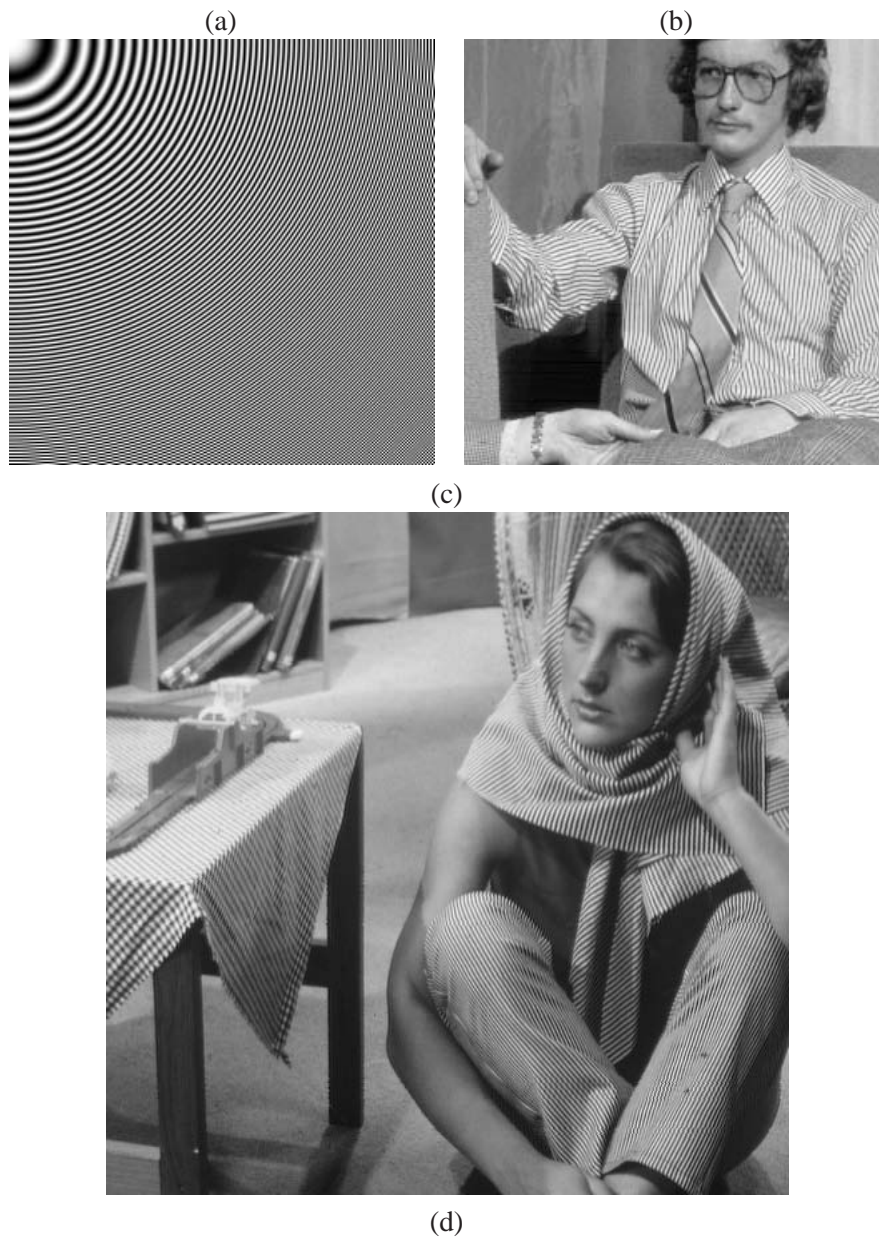
$$\mathcal{F} \{ \cos(2\pi \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle) \}(\mathbf{f}) = \frac{\delta(\mathbf{f} - \mathbf{p}) + \delta(\mathbf{f} + \mathbf{p})}{2}. \quad (2.63)$$

We stellen deze componenten vaak voor op de wijze zoals weergegeven in figuur 2.16. Merk op dat met de spatiale lokatie \mathbf{x} in het testbeeld “zoneplate” lokaal met een patroon met frequentie $\mathbf{x}/(2M)$ overeenstemt. Deze correspondentie zal bijzonder nuttig en krachtig blijken te zijn bij de bespreking van de resultaten die we bekomen met dit testbeeld.

- (b) “Hemd” (256×256) is een natuurlijk beeld. De hoge-frequentiecomponenten in het hemdmotief kunnen voor problemen zorgen bij herbemonstering.
- (c) “Barbara” (512×512) is ook een natuurlijk beeld. De gestreepte kleding vormt eveneens een potentieel gevaar bij herbemonstering.
- (d) “Tekst” (150×64) is een synthetisch beeld met enkele letters. Dit beeld bevat scherpe randen en fijne beeldstructuren.



Figuur 2.16: (a) In de reciproque rooster cel van het vierkant bronrooster stemt het grijze gebied overeen met het frequentiegebied dat door het testbeeld “zoneplate” wordt representeerd. De frequentiecomponenten $\delta(\mathbf{f} - \mathbf{p})$ en $\delta(\mathbf{f} + \mathbf{p})$ worden aangeduid door vectoren in het frequentiedomein. (b) In feite duiden deze vectoren enkel de geometrische plaats aan van hun frequentie. De intensiteit van een frequentiecomponent wordt weergegeven door de wegingsfactor van een diracimpuls op die plaats. Verderop maken we gebruik van de weergave uit (a).



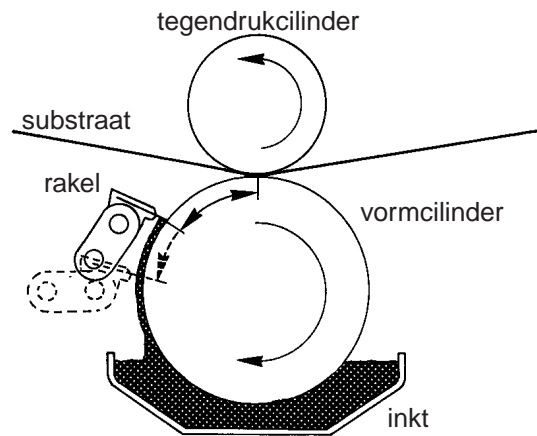
Figuur 2.17: De verschillende testbeelden. (a) “Zoneplate”. (b) “Hemd”. (c) “Barbara”. (d) “Tekst”.

2.6.1 Gravurediepdruk

Inleiding

Aan nagenoeg alle hedendaagse druktechnieken liggen binaire procédés ten grondslag: er is inkt of er is er geen. Deze beperking belet om rechtstreeks grijswaarden weer te geven. Rastertechnieken zorgen ervoor dat een menselijke waarnemer, wanneer hij het drukwerk vanop een normale afstand bekijkt, alsnog de illusie krijgt dat de beelden wel degelijk grijswaarden bevatten. Om dit resultaat te bekomen, doen rastertechnieken een beroep op de beperkte spatiale resolutie van het menselijk oog. Vanop een voldoende grote afstand worden kleine (binaire) stipjes als het ware geïntegreerd tot een uniforme grijswaarde gelijk aan de lokale gemiddelde bedekking. We onderscheiden twee grote categorieën in het rasteren. Enerzijds klassiek rasteren, waarbij rasterpunten van verschillende grootte op een periodiek rooster worden geplaatst. Anderzijds stochastisch rasteren [83], waarbij rasterpunten van gelijke grootte stochastisch verdeeld worden. Klassiek rasteren is nog steeds de meest gebruikte techniek voor professioneel drukwerk. Om monsterwaarden te verkrijgen die elk de grootte van een corresponderend rasterpunt bepalen, is een herbemonstering noodzakelijk naar het rooster gebruikt door de rastering. We bekijken nu eerst een specifieke druktechniek van naderbij, m.n. gravurediepdruk.

Rotationale gravurediepdruk [1,2,28,60] is een druktechniek die aan hoge snelheid grote oplagen kan produceren aan een constante en hoge kwaliteit. De principes werden reeds ontdekt in China rond 100 voor Christus. Figuur 2.18 illustreert de werking van een moderne rotationale gravurediepdrukpers. Een gladde metalen vormcilinder is bedekt met kleine inkepingen of napjes die het beeld voorstellen. Nadat de draaiende cilinder bevochtigd is met inkt, verwijdert een stalen rakel de inkt over de hele lengte van het gladde cilinderoppervlak, behalve in de verdiepte delen, m.n. de inkepingen. Vervolgens wordt de cilinder met grote druk tegen het substraat geplaatst, zodat elke inkeping een vlekje inkt in verhouding tot het volume van de inkeping achterlaat. De vormcilinder bestaat uit staal en is bedekt met een dunne laag elektrolytisch aangebracht koper. Aanvankelijk werd deze koperen laag chemisch geëetst, maar om ecologische redenen wordt momenteel bijna uitsluitend elektronische gravure gebruikt. Elektronische gravure kan gebeuren m.b.v. een diamanten kop die 9000 keer oscilleert per seconde. Het is ook mogelijk om meerdere koppen tegelijk (digitaal) aan te sturen. Een andere mogelijkheid is om de inkepingen te graven m.b.v. één laser aan 70000 cellen per seconde. Na het aanbrengen van de inkepingen, wordt de cilinder beschermd met een dun laagje chroom, zodat het oppervlak bestand is tegen de stalen rakel en een lange levensduur krijgt.



Figuur 2.18: De werking van moderne rotationele diepdruk [28].

De kosten die gepaard gaan met het aanmaken van een set vormcilinders, zijn vrij hoog. Gezien deze hoge kostprijs, de hoge druksnelheid (tot 15 meter per seconde) en de constante en goede kwaliteit, wordt deze druktechniek voornamelijk aangewend voor grote oplagen (in de orde van honderdduizend reproducties), zoals postordercatalogi, reisbrochures, verpakkingen, enzovoort.

Roosters en simulatie

Laten we ons in eerste instantie tot monochroom drukwerk beperken. Het rooster dat gebruikt wordt op de vormcilinder, stemt niet overeen met datgene waarmee typisch digitale beelden worden opgeslagen in de computer. Beschouwen we een origineel bronrooster van 300×300 dpi (*Eng.* dots per inch), opgeslagen volgens een genormaliseerd vierkant rooster. Gravure diepdruk gebruikt typisch een semi-regulier hexagonaal rooster (van het tweede type) met 127 lpi (lijnen per inch). Het rooster wordt dan in absolute coördinaten gegeven door

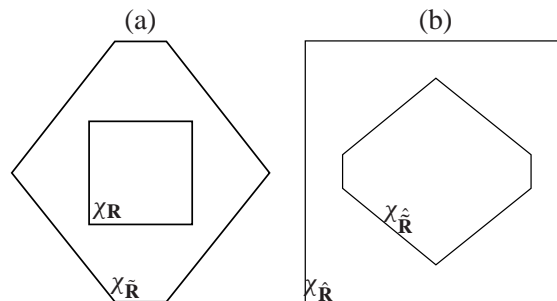
$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0.12\text{mm} & 0 \\ -0.1\text{mm} & 0.2\text{mm} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

en genormaliseerd ten opzichte van het vierkante bronrooster bekomen we

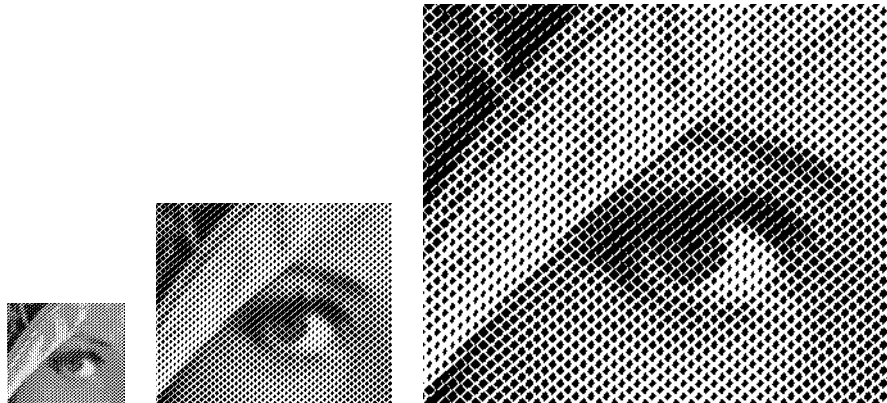
$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1.42 & 0 \\ -1.18 & 2.36 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Figuur 2.19 toont de respectievelijke spatiale en reciproque roosterzellen.

Om de resultaten na herbemonstering van het bronrooster \mathbf{R} naar het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$ te kunnen beoordelen, hebben we nood aan een simulatie van het ras-



Figuur 2.19: (a) De roostercel $\tilde{\chi}_{\mathbf{R}}$ in het geval van gravurediepdruk ten opzichte van de vierkante bronroostercel $\chi_{\mathbf{R}}$. (b) De reciproque roostercellen.



Figuur 2.20: Een stukje van het “lena” testbeeld gerasterd op de wijze van gravurediepdruk (simulatie: $\times 2$, $\times 4$, $\times 8$). De uitvergrotingen tonen duidelijk de individuele rasterpunten.

terproces. In bijlage C wordt deze simulatie uitvoerig besproken. Figuur 2.20 toont het resultaat voor een stukje uit het testbeeld “lena”. De kleinste van deze simulaties, bestemd voor afdrukapparaten met een adresseerbaar rooster van 600×600 dpi, is nog steeds tweemaal groter dan het “echte” resultaat op gravurediepdruk. Om hetzelfde effect te bekomen, dient men de simulaties vanop ongeveer 60 cm te bekijken, of tweemaal de gewone kijkafstand.

Een objectieve perceptuele kwaliteitsmaat

We zullen de resultaten die we bekomen vooreerst beoordelen aan de hand van onze eigen subjectieve indruk. Het is echter bijzonder nuttig om daarnaast ook over een objectieve kwaliteitsmaat te beschikken die toelaat de resultaten kwantitatief te vergelijken. Daarom zullen we, naast de subjectieve beoorde-

ling, ook gebruik maken van een objectieve kwaliteitsmaat die we zelf hebben ontwikkeld en die ons een kwantatieve indicatie geeft van de fout tussen het originele beeld en het herbemonsterde en gerasterde beeld. Deze kwaliteitsmaat is geïnspireerd op het menselijk visueel systeem (HVS, *Eng.* Human Visual System) en kan dus min of meer bestempeld worden als een objectieve perceptuele maat om beelden met hun gerasterde versies te vergelijken.

Er zijn twee belangrijke moeilijkheden die optreden wanneer we het originele beeld op het 300×300 dpi bronrooster en het gerasterde beeld wensen te vergelijken. Waar het originele beeld een grijswaardenbeeld is, is het gerasterd beeld een binair beeld, dat bovendien gegeven is op een veel fijner rooster. Dit gerasterd beeld kan het resultaat zijn van een simulatie (zoals in ons geval van gravurediepdruk), maar dit kan ook een intermediair beeld zijn voor een drukproces dat eveneens de rasterpunten construeert aan de hand van kleine micropuntjes (zoals b.v. een laserprinter). De meeste visuele kwaliteitsmaten die worden beschreven in de literatuur, zijn bedoeld om beelden voor en na verlieshebbende compressie te vergelijken [95]. Deze technieken bieden niet de mogelijkheid om beelden met een verschillende spatiale en een verschillende tonale resolutie te vergelijken. Verder zijn er ook technieken, zogenaamd “invers rasteren” (*Eng.* inverse halftoning), die als doel hebben om een gerasterd beeld opnieuw naar een grijswaardenbeeld om te zetten. Daarbij wordt er niet naar gestreefd om het bekomen beeld te vergelijken. Onze visuele kwaliteitsmaat combineert elementen uit beide technieken.

De techniek die we voorstellen, is conceptueel volledig opgesteld in het continue domein. Enerzijds beschouwen we het originele beeld $g_1(\mathbf{x})$ dat we bekomen m.b.v. dichtste-buur-interpolatie van de originele beelddata. Anderzijds hebben we het binaire beeld $g_2(\mathbf{x})$, dat ontstaat door herbemonstering naar een nieuw rooster en dat vervolgens gerasterd wordt. In een eerste fase zullen we de frequentiegevoeligheid van het HVS modelleren. Daarna zullen we de randen lokaliseren en hun sterkte schatten aan de hand van een gradiëntoperator.

Zoals reeds aangehaald, zijn rastertechnieken voor drukwerk gebaseerd op de laagdoorlaatkarakteristiek van het HVS. Het opmeten van een dergelijke karakteristiek gebeurt door een menselijke waarnemer bloot te stellen aan een sinusoidale patroon met een bepaalde frequentie, waarvan het contrast wordt verhoogd totdat de waarnemer het frequentiepatroon opmerkt. Aldus bekomen we de contrastdrempel voor een bepaalde frequentie. Het inverse van de contrastdrempel is de contrastgevoeligheid, waaruit men een model voor de frequentiekarakteristiek van het HVS kan afleiden. Een vaak gebruikt model is [95, 122, 184]

$$v_1(f) = 1.5 \exp(-\sigma^2 f^2) - \exp(-2\sigma^2 f^2), \quad (2.66)$$

met $\sigma = 0.21$ en f uitgedrukt in cycli per graad (cpd). In de praktijk is de waarde van σ afhankelijk van meerdere omgevingsfactoren zoals contrast, belichting, enzovoort [184]. Eenmaal de kijkafstand d is gekend, kan de omrekening tussen cycli per graad en cycli per mm (cpm) gebeuren als volgt:

$$f_{\text{cpd}} = \frac{\pi}{180} \left(\frac{f_{\text{cpm}}}{\tan^{-1}(1/d)} \right). \quad (2.67)$$

Het anisotrope gedrag van het HVS wordt gemodelleerd door

$$v(f_1, f_2) = v_1(f) \frac{1 + \exp(\beta(f - f_0)) \cos^4(2\theta)}{1 + \exp(\beta(f - f_0))}, \quad (2.68)$$

waarbij $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, $\theta = \arctan(f_2/f_1)$, $\beta = 8$ en $f_0 = 11.13$ cpd.

Allereerst filteren we beide beelden $g_1(\mathbf{x})$ en $g_2(\mathbf{x})$ met de frequentiekaracteristiek $v(\mathbf{f})$. We bekommen aldus $g_{1,v}(\mathbf{x})$ en $g_{2,v}(\mathbf{x})$. Merk op dat deze operatie de kleine (binaire) stipjes van de rastering in het beeld $g_2(\mathbf{x})$ “uitsmeert” en we aldus een grijswaardenbeeld $g_{2,v}(\mathbf{x})$ verkrijgen. Dit gedeelte van de kwaliteitsmaat komt overeen met invers rasteren. Beide beelden $g_{1,v}(\mathbf{x})$ en $g_{2,v}(\mathbf{x})$ zijn nu vergelijkbaar, hetgeen ons toelaat een foutbeeld

$$e(\mathbf{x}) = |g_{1,v}(\mathbf{x}) - g_{2,v}(\mathbf{x})| \quad (2.69)$$

te bepalen.

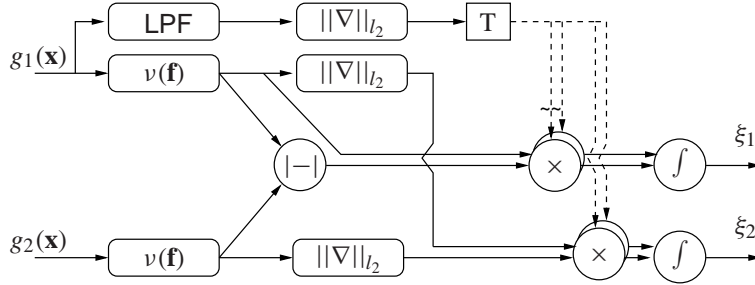
Een volgende stap in de berekening van de kwaliteitsmaat, is het afleiden van een binair beeld dat aangeeft waar zich “echte” randen in het beeld bevinden. Een veelgebruikte methode voor het schatten van randen is gebruik te maken van de gradiëntoperator [85, hfdst. 8]:

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

De vergelijking van $\|\nabla g(\mathbf{x})\|_{l_2}$ ten opzichte van een drempelwaarde laat toe om te beslissen of er al dan niet een rand aanwezig is:

$$g_T(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \|\nabla g(\mathbf{x})\|_{l_2} \leq T \\ 1, & \|\nabla g(\mathbf{x})\|_{l_2} > T. \end{cases} \quad (2.71)$$

Opdat we enkel randen zouden detecteren die geen aanleiding geven tot moirépatronen, filteren we het originele beeld vooraf met een laagdoorlaatfilter dat frequentiecomponenten onderdrukt die kunnen leiden tot moirépatronen. Het bekomen beeld noemen we $g_{1,L}(\mathbf{x})$ en het randbeeld $g_{1,T}(\mathbf{x})$. Het complementaire randbeeld is dan $g_{1,\bar{T}}(\mathbf{x}) = 1 - g_{1,T}(\mathbf{x})$.



Figuur 2.21: Een overzicht van het concept van de visuele kwaliteitsmaat.

We kunnen nu twee numerieke maten berekenen. De eerste maat ξ_1 geeft aan wat de fout is in gebieden die niet als “echte” rand zijn bestempeld:

$$\xi_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} g_{1,\bar{T}}(\mathbf{x}) e^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} g_{1,\bar{T}}(\mathbf{x}) g_{1,v}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}. \quad (2.72)$$

De energie uit het foutbeeld $e(\mathbf{x})$ wordt aldus genormaliseerd ten opzichte van de energie in het originele beeld. Met deze numerieke maat wensen we voornamelijk een indruk te krijgen van de fout geïntroduceerd door moiré-patternen. De tweede maat ξ_2 wordt gegeven door de verhouding van de energie in de gradiëntbeelden van $g_{1,v}(\mathbf{x})$ en $g_{2,v}(\mathbf{x})$:

$$\xi_2 = \frac{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} g_{1,T}(\mathbf{x}) \|\nabla g_{2,v}(\mathbf{x})\|_{l_2}^2 d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} g_{1,T}(\mathbf{x}) \|\nabla g_{1,v}(\mathbf{x})\|_{l_2}^2 d\mathbf{x}}. \quad (2.73)$$

Hoe groter de waarde van ξ_2 , hoe beter de scherpheid van de randen in het beeld $g_2(\mathbf{x})$ bewaard wordt.

Figuur 2.21 toont schematisch het principe van de berekening van de kwaliteitsmaat. In de praktijk dienen we uiteraard de berekening uit te voeren op een fijn rooster. We gebruiken daartoe het rooster waarmee we de gerasterde beelden simuleren. Het originele beeld wordt op dezelfde resolutie gebracht m.b.v. dichtste-buur-interpolatie. De gradiëntoperator benaderen we door een Sobeloperator [85]. Deze operator convolveert de beelden op de (vierkante) roosters achtereenvolgens met een discretisering van de afgeleide in horizontale en verticale richting:

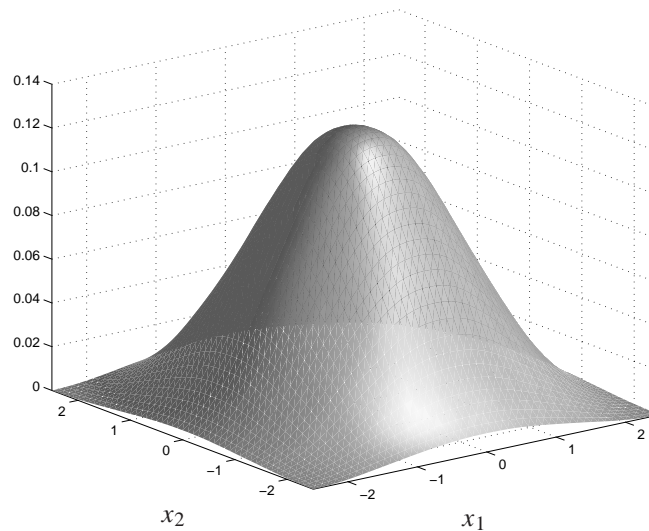
$$\mathbf{s}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_V = \mathbf{s}'_H. \quad (2.74)$$

De norm $\|\nabla g(\mathbf{x})\|_{l_2}$ wordt vervangen door het maximum van de absolute waarde van beide convoluties. De overige aanpassingen liggen voor de hand.

Resultaten

We zullen de zes lineaire herbemonsteringstechnieken uit dit hoofdstuk toepassen in het geval van gravurediepdruk. De eerste drie technieken maken gebruik van klassieke interpolatiefuncties en houden dus geen rekening met het doelrooster. De volgende drie technieken daarentegen zijn wel aangepast aan het doelrooster, het gravurediepdrukrooster. Vooreerst geven we nog even een korte schets van de herbemonsteringstechnieken.

- (a) Interpolatie met de eerste-ordespline. Deze methode stemt overeen met dichtste-buur-interpolatie.
- (b) Interpolatie met de tweede-ordespline. Deze methode stemt overeen met bilineaire interpolatie.
- (c) Interpolatie met de vierde-ordespline. Deze methode stemt overeen met kubische-B-spline-interpolatie. De implementatie gebeurt m.b.v. een benadering van de interpolatiefunctie op een eindige drager (en dus niet m.b.v. recursieve filters). Voor een drager met grootte 6×6 bedraagt de afwijking van de grootste waarde buiten deze drager⁴ ten opzichte van de grootste waarde binnen de drager slechts 1%.
- (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golffunctie. Deze reconstructiefunctie bereikt een optimale energieconcentratie in de reciproque doelrooster cel van het gravurediepdrukrooster voor een gegeven drager. Figuur 2.22 toont de reconstructiefunctie na normalisering, zodat de functie een eenheidspartitie vormt. Voor een drager met grootte 5×5 zijn de bijdragen aan de rand reeds zeer klein.
- (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. Zoals eerder aangegeven, stemt deze methode overeen met oppervlakteprojectie, waarbij het aandeel van de bronrooster cel in de doelrooster cel de bijdrage bepaalt van de monsterwaarde op een roosterpunt. De afbeelding van de reconstructiefunctie in figuur 2.23 geeft duidelijk aan dat de drager beperkt is.
- (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline. Opnieuw is het doelrooster dat van gravurediepdruk. De reconstructiefunctie wordt benaderd op een beperkte drager met grootte 8×8 , zodat de verhouding van grootste waarde buiten en binnen deze drager ongeveer 1% bedraagt. Figuur 2.24 toont de reconstructiefunctie.

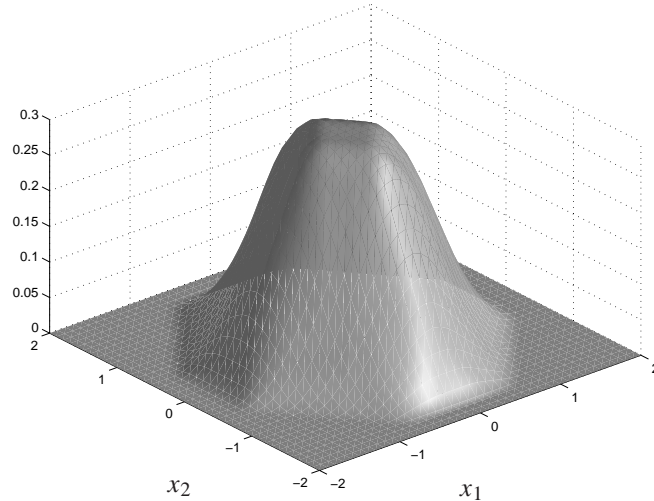


Figuur 2.22: De reconstructiefunctie afgeleid van de prolate sferoidale golffunctie met een drager van 5×5 waarbij de energieconcentratie optimaal is in de reciproque doelrooster cel van het gravurediepdruk raster.

De eerste belangrijke resultaten die we uitgebreid zullen bespreken, zijn die van de “zoneplate”. Het zal duidelijk worden hoe artefacten t.g.v. frequentieverwarring ontstaan door herbemonstering. Figuur 2.26 toont het testbeeld “zoneplate” na herbemonstering (en simulatie). In eerste instantie concentreren we ons op de resultaten (a)-(c), welke gebruik maken van herbemonstering m.b.v. klassieke interpolatiefuncties: (a) dichtste-buur-interpolatie, (b) bilineaire interpolatie en (c) kubische-B-spline-interpolatie. Rechts onder in het beeld zien we duidelijk een opvallend moiré-patroon onder de vorm van een nieuwe frequentiezwaai. In figuur 2.27 wordt het deel van de frequentiekaart waarmee dit testbeeld overeenstemt aangeduid in het grijs, alsook de twee plaatsen waar er duidelijk moiré-patronen ontstaan. Merk op dat het tweede moiré-patroon zich manifesteert binnen de reciproque rooster cel van het doelrooster. Om meer inzicht te verschaffen in het ontstaan van deze moiré-patronen ten gevolge van herbemonstering, zullen we ze nu uitgebreid toelichten.

We verklaren het eerste moiré-patroon aan de hand van figuur 2.28 (a). Het originele beeld, gegeven op een bronrooster \mathbf{R} , wordt geïnterpoleerd m.b.v. een

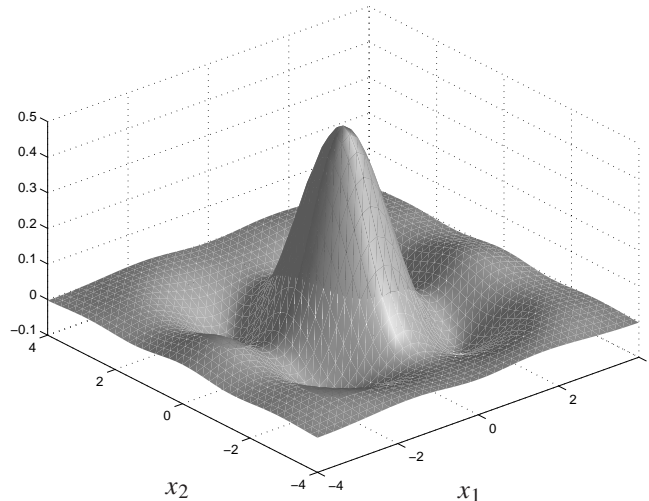
⁴Deze kan bepaald worden door de interpolatiefunctie te benaderen op een drager die groter is.



Figuur 2.23: De kleinste-kwadratenspline van eerste orde berekend voor het raster van gravurediepdruk.

interpolatiefunctie $\phi(\mathbf{x})$. Hierdoor wordt het originele spectrum gefilterd met $\hat{\phi}(\mathbf{f})$ en dus ook de aangeduide frequentiecomponenten bij \mathbf{p} en $-\mathbf{p}$. Wanneer nu het geïnterpoleerde beeld wordt herbemonsterd op het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$, wordt het spectrum uitgevouwen op elk van de reciproque doelroosterpunten, b.v. op het roosterpunt aangeduid met $\hat{\mathbf{r}}$. Hierdoor ontstaan de nieuwe frequentiecomponenten bij \mathbf{q} en $-\mathbf{q}$. Het zijn deze componenten met lage frequentie die aanleiding geven tot het moiré-patroon dat duidelijk zichtbaar is. Deze redenering verklaart bovendien ook waarom het centrum van het moiré-patroon exact op het reciproque doelroosterpunt $\hat{\mathbf{r}}$ ligt. Dit type moiré-patroon noemen we “nulde-ordemoiré”, vermits de nieuwe frequentiecomponent een gevolg is van het originele basisspectrum.

Het tweede moiré-patroon is voornamelijk zichtbaar in de beelden van figuur 2.26 (a)-(b). De verklaring is echter niet minder interessant, aangezien het moiré-patroon ditmaal optreedt binnen het nyquistgebied van het doelrooster. We dienen de redenering voor de verklaring van het eerste moiré-patroon uit te breiden en bekijken daartoe figuur 2.28 (b). Aangezien het originele beeld zelf ook bemonsterd is, m.n. op het bronrooster, is het spectrum uitgevouwen op het reciproque bronrooster, b.v. het roosterpunt $\hat{\mathbf{r}}$. De frequentiecomponent bij \mathbf{p} geeft aldus ook aanleiding tot een component bij $\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{p}$, die door de interpolatiestap gefilterd wordt volgens $\hat{\phi}(\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{p})$. Door herbemonstering wordt echter ook deze replica uitgevouwen op het reciproque doelrooster, en geeft zodoende



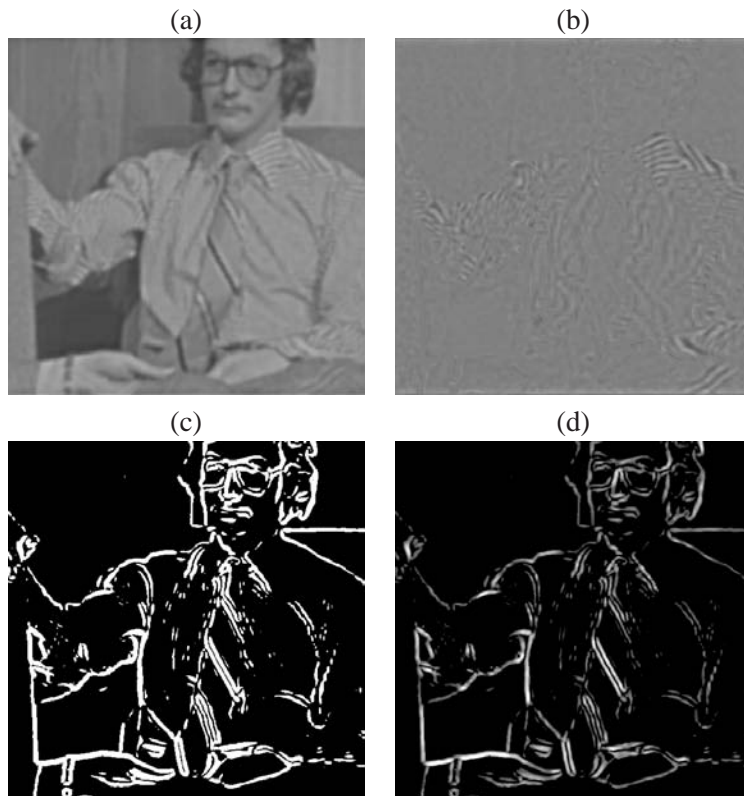
Figuur 2.24: De kleinste-kwadratenspline van tweede orde berekend voor het raster van gravurediepdruk.

aanleiding tot een nieuwe frequentiecomponent bij \mathbf{q} . Het centrum van het moiré-patroon ligt ditmaal op de frequentie $\hat{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}$. Aangezien interpolatie m.b.v. de kubische B-spline overeenstemt met een splinemodel van hogere orde voor het bronrooster, wordt de replica $\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{p}$ op het reciproque bronrooster reeds sterk onderdrukt, en manifesteert dit patroon zich veel minder in het beeld van figuur 2.26 (c). Dit type moiré-patroon noemen we “eerste-ordemoiré”, waarmee we aanduiden dat de nieuwe frequentiecomponent afkomstig is van een replica van het originele spectrum op een naburig reciproque bronroosterpunt.

We zullen nu de resultaten van de andere testbeelden overlopen en eerst een korte subjectieve beoordeling geven, vooraleer we de objectieve kwaliteitsmaat berekenen. De figuren 2.29, 2.30 en 2.31 tonen de resultaten voor respectievelijk de testbeelden “hemd”, “barbara” en “tekst”. In de resultaten van de natuurlijke beelden “hemd” en “barbara” treden opnieuw manifest moiré-patronen op voor de klassieke interpolatiefuncties (a)-(c). Het resultaat (a) van “tekst” bevat vooral storende blokartefacten.

Het resultaat m.b.v. de prolate sferoïdale golffunctie als reconstructiefunctie wordt weergegeven in (d). Het energiecriterium zorgt ervoor dat de moiré-patronen in “zoneplate” ditmaal zeer sterk onderdrukt worden, maar dit geeft duidelijk aanleiding tot vervaging in de beelden “hemd”, “barbara” en “tekst”.

De kleinste-kwadratenbenaderingen leveren een mooi compromis op tussen frequentieverwarring en vervaging. De kleinste-kwadratenspline van



Figuur 2.25: Enkele tussenresultaten bij het berekenen van de objectieve kwaliteitsmaat voor het testbeeld “hemd” (bij interpolatie met de vierde-ordespline). (a) Na filtering met de frequentiecarakteristiek $\nu(\mathbf{f})$. (b) Het foutbeeld $e(\mathbf{x})$ (egaal grijs is nul). (c) Het randbeeld $g_{1,T}(\mathbf{x})$. (d) Het gradiëntbeeld $\|\nabla g_{2,\nu}(\mathbf{x})\|_2$ (met verhoogd contrast) waar het randbeeld positief is.

tweede orde geeft voor de natuurlijke beelden “hemd” en “barbara” zelfs het scherpste resultaat. Een nadeel van deze techniek is wel het optreden van ringvormige artefacten bij het testbeeld “tekst”. Merk echter op dat de randen hierdoor scherper lijken. Tabel 2.3 vat de resultaten van deze subjectieve beoordeling samen.

Voor elk van de natuurlijke testbeelden hebben we de objectieve kwaliteitsmaat berekend onder de vorm van ξ_1 en ξ_2 . De foutmaat ξ_1 geeft een indicatie van de fouten in gebieden buiten de randen, zoals moiré-patternen, en willen we zo klein mogelijk. De maat ξ_2 daarentegen kwantificeert de scherpste in het beeld en dient dus zo groot mogelijk te zijn. Figuur 2.25 geeft ter illustratie alvast enkele tussenresultaten bij het berekenen van de objectieve kwaliteitsmaat.

In (a) zien we duidelijk dat het gerasterd beeld na filtering met de frequentiekaracteristiek $\nu(\mathbf{f})$ van het HVS omgezet is naar een grijswaardenbeeld. Dit laat ons toe om het foutbeeld $e(\mathbf{x})$ in (b) te berekenen. In (c) zien we het randbeeld dat aangeeft waar zich “echte” randen bevinden. We komen later in dit hoofdstuk nog terug op de keuze van de drempelwaarde T . Tot slot, in (d) stellen we het gradiëntbeeld $\|\nabla g_{2,\nu}(\mathbf{x})\|_{l_2}$ voor waar de echte randen zich bevinden volgens (c).

Tabel 2.4 geeft de waarden van ξ_1 en ξ_2 voor de verschillende testbeelden en herbemonsteringstechnieken. Het is voornamelijk onze bedoeling om de waarden onderling te vergelijken; m.a.w. tussen de verschillende technieken voor eenzelfde testbeeld. Nemen we b.v. de klassieke herbemonsteringstechnieken. De interpolatie met de eerste-ordespline geeft duidelijk scherpe beelden (hoge ξ_2), maar geeft ook aanleiding tot grote fouten buiten de randen (in dit geval in hoofdzaak te wijten aan moiré-patronen). Interpolatie met de tweede-ordespline is veel minder scherp, maar vertoont ook een stuk minder moiré-patronen. Interpolatie met de vierde-ordespline zorgt voor scherpere beelden, maar meestal ook sterkere moiré-patronen. Herbemonstering op basis van de prolate sferoidale golffunctie heeft zeer duidelijk een nefaste invloed op de beeldscherpte, maar onderdrukt wel goed moiré-patronen (lage ξ_1).

Het is opvallend hoe goed de kleinste-kwadratenbenaderingen scoren volgens deze numerieke maten. Merk echter op dat deze methoden, alhoewel ze meer moiré-patronen introduceren dan de prolate sferoidale golffunctie, toch leiden tot een lagere waarde voor ξ_1 . Dit komt voornamelijk doordat ook andere afwijkingen in het foutbeeld $e(\mathbf{x})$ (buiten de moiré-patronen) doorwegen in de maat ξ_1 . De kleinste-kwadratenspline van tweede orde levert voor wat ξ_2 betreft de scherpste beelden op, maar zorgt wel enigszins voor andere artefacten, m.n. ringvormige artefacten.

Het testbeeld “tekst” is een buitenbeentje, aangezien er in dit beeld enkel scherpe randen zijn. Vermits er geen moiré-patronen optreden in de herbemonsterde versies, zijn deze resultaten geschikt om aan te tonen dat de maat ξ_1 inderdaad ook door andere factoren wordt bepaald. Bijvoorbeeld de ringvormige artefacten die duidelijk ontstaan bij de kleinste-kwadratenspline van tweede orde door de zeer scherpe randen, leveren een hoge waarde voor ξ_1 op. In het algemeen kunnen we echter stellen dat de resultaten van de objectieve kwaliteitsmaat in overeenstemming zijn met onze subjectieve waarneming.

Het is verder zinvol om de invloed van de waarde van de drempel T , die door de objectieve kwaliteitsmaat gebruikt wordt, aan te geven. We beschouwen als voorbeeld de herbemonstering van het testbeeld “hemd” met de vierde-ordespline en de prolate sferoidale golffunctie. Figuur 2.32 toont dat de waarden van ξ_1 en ξ_2 duidelijk afhankelijk zijn van T , maar de onderlinge

verschillen tussen de technieken blijven voor een vaste waarde van T bewaard. Deze trend hebben we ook vastgesteld bij de andere testbeelden.

Tot nog toe hebben we geen aandacht besteed aan de vereiste rekentijd voor elk van deze herbemonsteringstechnieken. Aangezien de implementatie van de meeste van de technieken niet geoptimaliseerd is, wensen we vooral een indicatie te geven van de algoritmische complexiteit. Het doel is om de complexiteit van de lineaire technieken te kunnen vergelijken met die van de niet-lineaire in het volgende hoofdstuk.

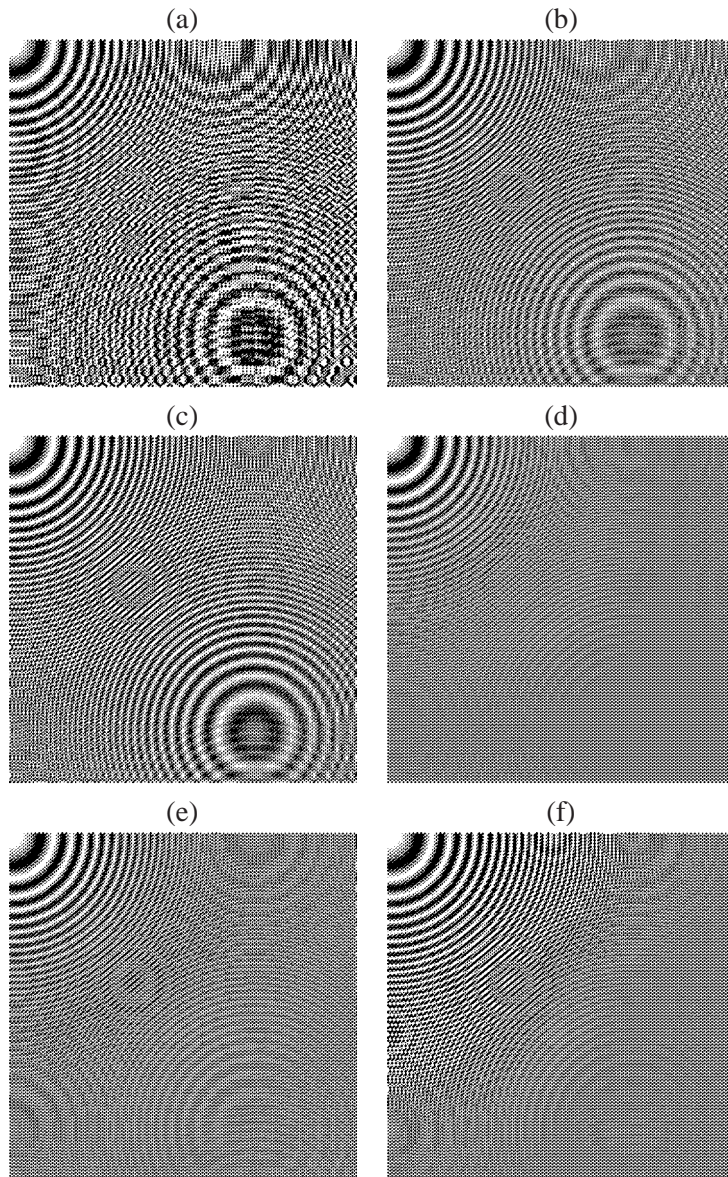
Veronderstel D_1^2 en D_2^2 het aantal monsterwaarden op respectievelijk het bron- en het doelrooster. Onderstel bovendien dat de drager van de reconstructiefunctie D^2 bronroosterpunten bedekt. De reconstructiefunctie dient D_2^2 keer te worden berekend en de algoritmische complexiteit is dus $\mathcal{O}(D^2 D_2^2)$. Indien de reconstructiefunctie scheidbaar is, zoals de klassieke splines op een rechthoekig bronrooster, kan een nieuw roosterpunt berekend worden m.b.v. twee opeenvolgende eendimensionale convoluties. De complexiteit daalt dan tot $\mathcal{O}(2DD_2^2)$. De klassieke splines uit tabel 2.3 zijn scheidbaar en vallen dus onder deze klasse. De laatste drie technieken zijn aangepast aan het (niet-scheidbaar) doelrooster en hebben daardoor een complexiteit $\mathcal{O}(D^2 D_2^2)$.

Tabel 2.3: Een overzicht van de lineaire herbemonsteringstechnieken en hun subjectieve beoordeling voor elk van de artefacten op een schaal van drie (–: merkbaar, ––: duidelijk merkbaar, – – –: zeer duidelijk merkbaar).

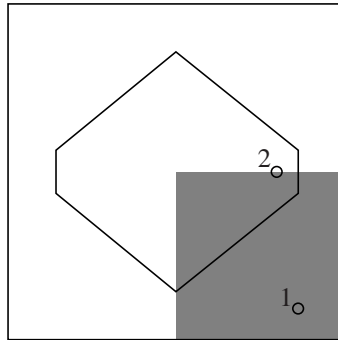
reconstructiefunctie	grote drager	ringvormige artefacten	frequentieverwarring	blokartefacten	vervaging
eerste-ordespline	1×1		– – –	– – –	
tweede-ordespline	2×2		– –		–
vierde-ordespline	6×6	–	– – –		
prolate sferoïdale golffunctie	5×5				– – –
kleinste-kwadratenspline van eerste orde	4×4		–		–
kleinste-kwadratenspline van tweede orde	8×8	–	–		

Tabel 2.4: Resultaten van de objectieve kwaliteitsmaat voor de lineaire herbemonsteringstechnieken.

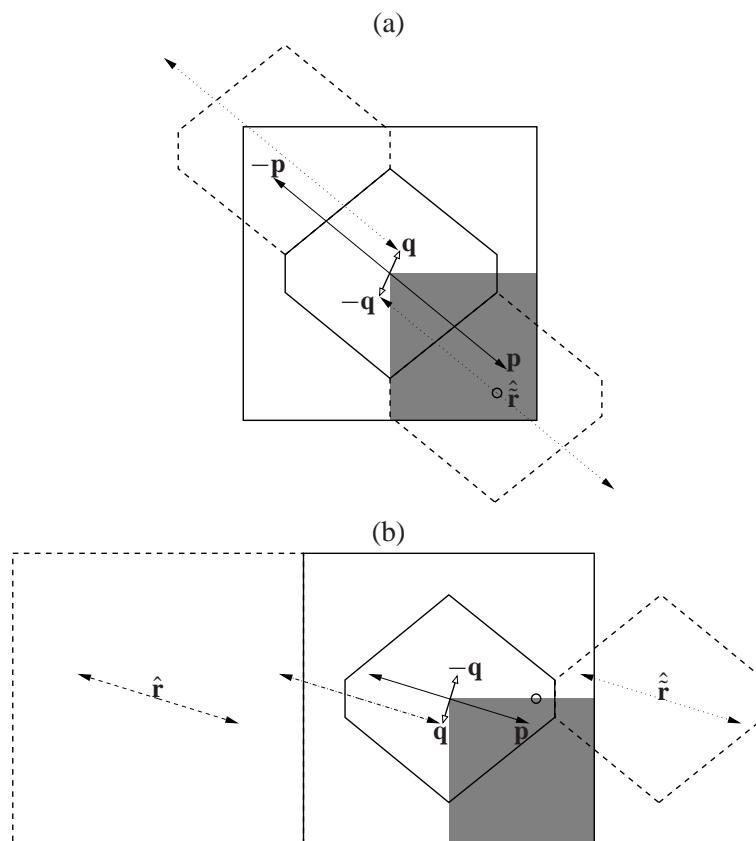
testbeeld	reconstructiefunctie	ξ_1	ξ_2
hemd	eerste-ordespline	6.38	89.7
	tweede-ordespline	1.83	80.8
	vierde-ordespline	1.78	86.4
	prolate sferoïdale golffunctie	1.25	60.4
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	0.99	72.9
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	0.85	93.1
barbara	eerste-ordespline	3.14	84.7
	tweede-ordespline	1.32	77.1
	vierde-ordespline	1.42	81.5
	prolate sferoïdale golffunctie	1.18	59.3
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	1.05	70.35
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	0.96	89.24
tekst	eerste-ordespline	2.30	88.7
	tweede-ordespline	1.10	78.0
	vierde-ordespline	1.55	74.8
	prolate sferoïdale golffunctie	2.13	57.0
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	1.26	70.5
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	2.77	70.1



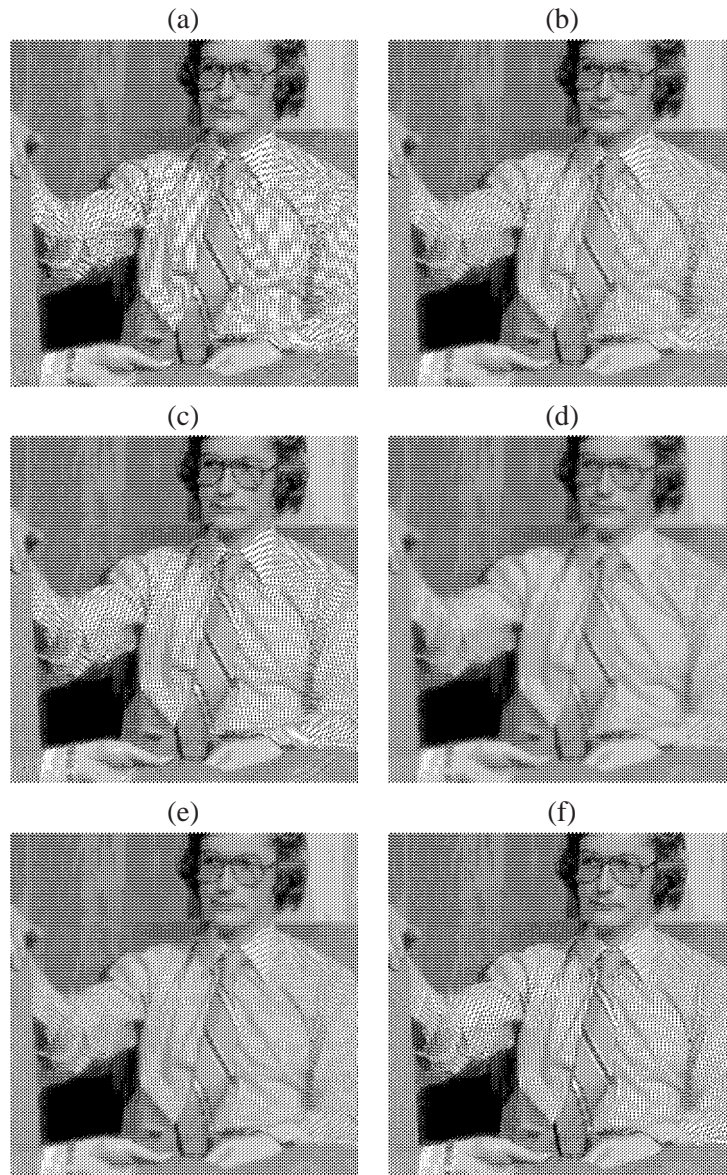
Figuur 2.26: Resultaten na herbemonstering van het testbeeld “zoneplate”. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline (dichtste-buur-herbemonstering). (b) Interpolatie met de tweede-ordespline (bilineaire interpolatie). (c) Interpolatie met de vierde-ordespline (kubische-B-spline-interpolatie). (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golf functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.



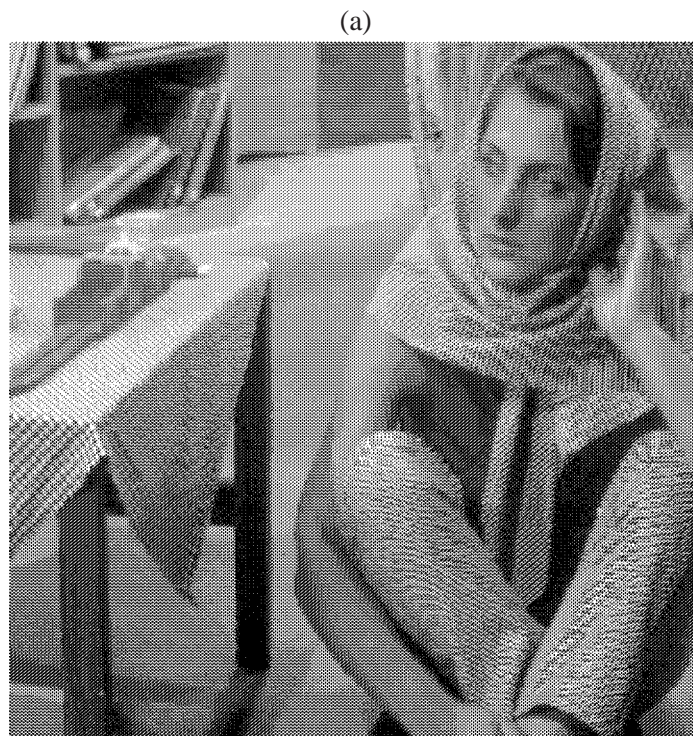
Figuur 2.27: Het testbeeld “zoneplate” is een spatiale voorstelling van een deel van een kwadrant van het frequentiedomein (aangeduid in het grijs). De aanduidingen ‘1’ en ‘2’ markeren de frequenties die duidelijk twee moiré-patronen veroorzaken in figuur 2.26 na herbemonstering met klassieke interpolatietechnieken.



Figuur 2.28: Het ontstaan van de moiré-patronen ‘1’ en ‘2’ (figuur 2.27) kan verklaard worden aan de hand van replica’s van het originele spectrum.



Figuur 2.29: Resultaten na herbemonstering van het testbeeld “hemd”. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline (dichtste-buur-herbemonstering). (b) Interpolatie met de tweede-ordespline (bilineaire interpolatie). (c) Interpolatie met de vierde-ordespline (kubische-B-spline-interpolatie). (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golf-functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.



Figuur 2.30: Resultaten na herbemonstering van het testbeeld “barbara”. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline (dichtste-buur-interpolatie).

(b)



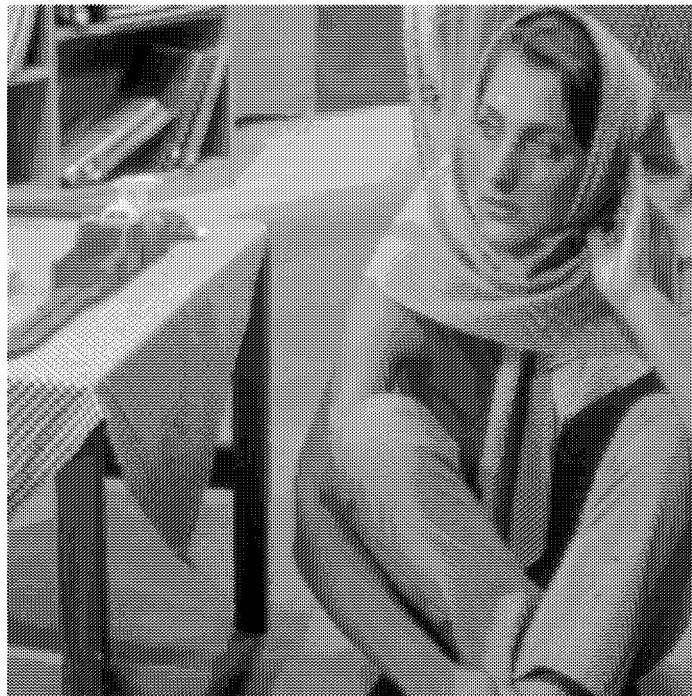
Figuur 2.30: (vervolg) Resultaten na herbemonstering van het testbeeld “barbara”.
(b) Interpolatie met de tweede-ordespline (bilineaire interpolatie).

(c)



Figuur 2.30: (vervolg) (c) Interpolatie met de vierde-ordespline (kubische-B-spline-interpolatie).

(d)

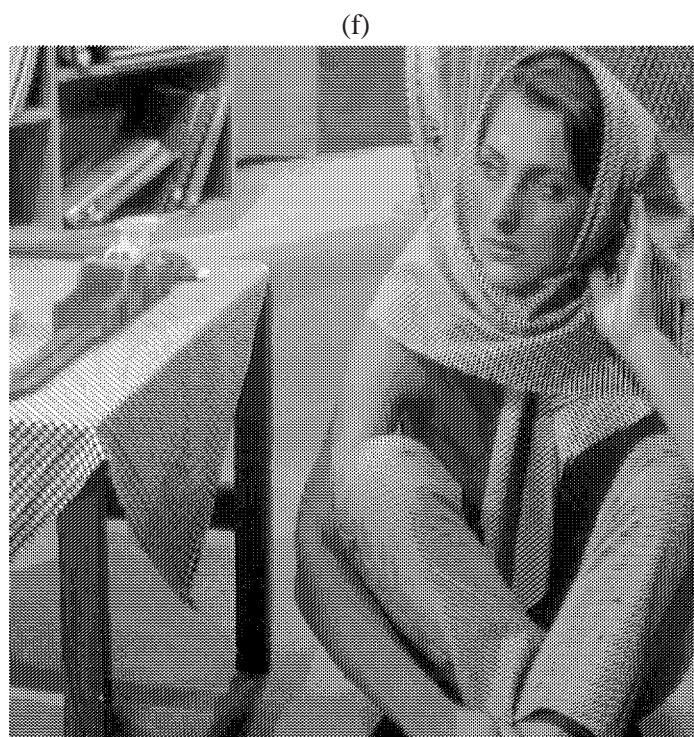


Figuur 2.30: (vervolg) (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golffunctie.

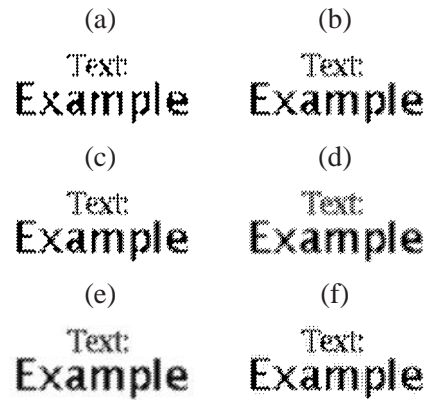
(e)



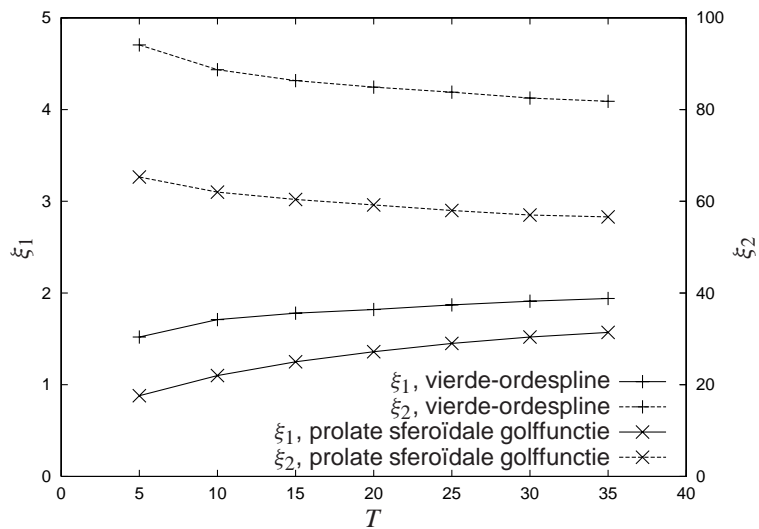
Figuur 2.30: (vervolg) (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline.



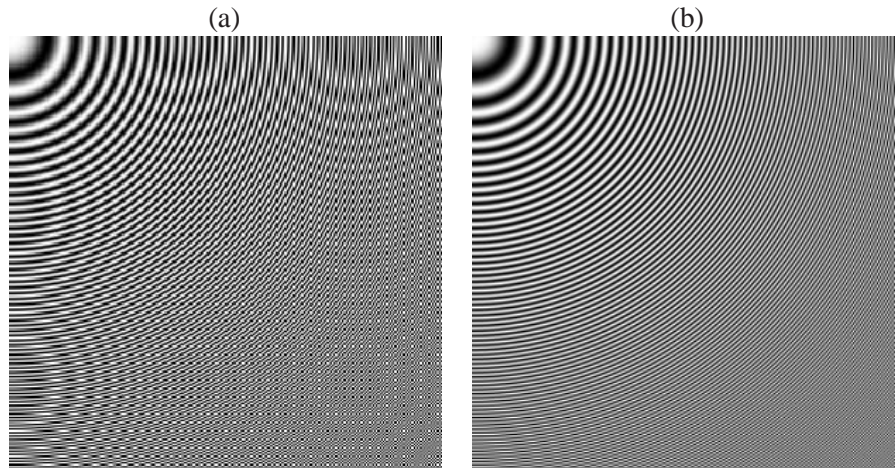
Figuur 2.30: (vervolg) (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.



Figuur 2.31: Resultaten na herbemonstering van het testbeeld “tekst”. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline (dichtste-buur-herbemonstering). (b) Interpolatie met de tweede-ordespline (bilineaire interpolatie). (c) Interpolatie met de vierde-ordespline (kubische-B-spline-interpolatie). (d) Reconstructie met de prolate sferoïdale golf-functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.



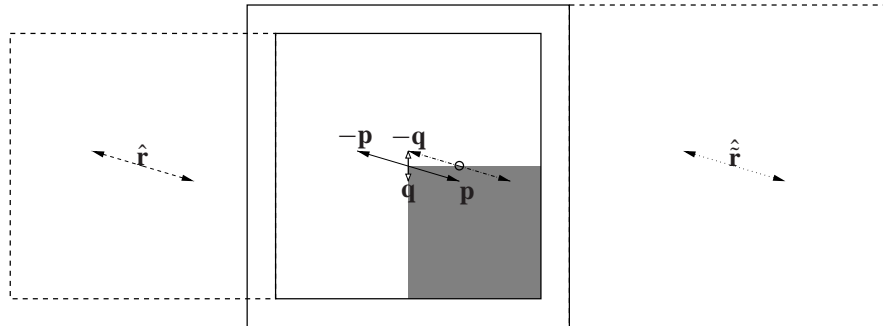
Figuur 2.32: Invloed van de drempel T die gebruikt wordt bij het bepalen van het randbeeld $g_{1,T}$ voor het testbeeld “hemd”.



Figuur 2.33: Het testbeeld “zoneplate” na herbemonstering naar een vierkant rooster dat 20% fijner is dan het bronrooster in beide dimensies. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline. (b) Interpolatie met de vierde-ordespline.

2.6.2 Overbemonstering

De grote aandacht die in dit werk wordt besteed aan gravurediepdruk zou ten onrechte de indruk kunnen wekken dat artefacten door herbemonstering, en voornamelijk frequentieverwarring, enkel voorkomen bij onderbemonstering, dit is herbemonstering naar een grover rooster. Dit is echter niet het geval. Ook bij herbemonstering naar een fijner rooster, overbemonstering genaamd, kunnen dergelijke artefacten optreden. Het is wel zo dat de betere klassieke interpolatiemethoden, die aangepast zijn aan het bronrooster, scherpe resultaten geven met weinig moiré. Bovendien kunnen er geen moiré patronen van nulde orde optreden aangezien de reciproque bronrooster cel kleiner is dan de reciproque doelrooster cel. Figuur 2.33 toont het resultaat na herbemonstering van het testbeeld “zoneplate” naar eveneens een vierkant rooster, dat echter 20% fijner is in beide dimensies. Interpolatie met de eerste-ordespline (dichtste-buur-interpolatie) leidt duidelijk tot moiré patronen. Merk op dat herbemonstering van beelden voor weergave op een computerscherm vaak ruwweg op deze manier wordt uitgevoerd. Figuur 2.34 illustreert hoe één van deze moiré patronen (van eerste orde) ontstaat. Het resultaat van interpolatie met de vierde-ordespline is reeds veel beter, aangezien de uitgevouwen frequentiecomponenten op het originele reciproque bronrooster sterk onderdrukt worden.

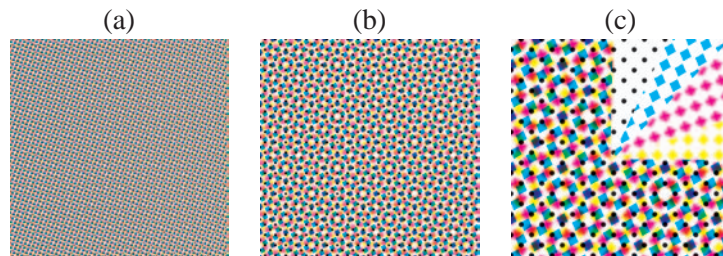


Figuur 2.34: De moiré-patternen in figuur 2.33 (a) zijn opnieuw verklaarbaar door replica's van het origineel bemonsterde spectrum. De frequentiecomponent bij $-\mathbf{p}$ is allereerst uitgevouwen op \hat{r} . Door herbemonstering wordt het spectrum de component bij $\hat{r} - \mathbf{p}$ opnieuw teruggevouwen op $-\mathbf{q}$.

2.6.3 Kleurendrukwerk

Het principe van kleurendrukwerk steunt op de kleurperceptie van het menselijk visueel systeem [184]. Hierdoor is het mogelijk om (ongeveer) alle kleuren te produceren volgens een subtractief proces aan de hand van slechts vier primaire inktkleuren: cyaan (C), magenta (M), geel (Y) en zwart (K). De zwarte inkt is zelfs overbodig (zwart kan immers worden bekomen door cyaan, magenta en geel over elkaar te drukken), maar wordt toch steeds toegevoegd om technische en economische redenen [70]. Een origineel kleurenbeeld wordt eerst opgesplitst in deze vier kleurcomponenten. Vervolgens wordt elke kleur-separatie gerasterd volgens hetzelfde principe als dat van monochroom drukwerk [3–5].

De kleurseparaties gebruiken elk een periodiek (vierkant) rooster om te rasteren. Opdat de kleuren elkaar niet (te veel) zouden overlappen, zijn deze roosters onderling geroteerd. Door onderlinge interactie kunnen de roosters echter ongewenste moiré-patternen veroorzaken (interseparatiemoiré). Een minimale interactie wordt bekomen door de onderlinge hoeken zo groot mogelijk te kiezen. Daarbij wordt geen rekening gehouden met de gele separatie, gezien de geringe zichtbaarheid van geel. Voor de zwarte separatie, die het beste zichtbaar is, wordt een hoek van 45° gekozen, omdat het oog het minst gevoelig is voor een periodiek rooster onder deze hoek. Vervolgens worden de hoeken voor cyaan (105°) en magenta (75°) vastgelegd. Voor geel stelt men dan een hoek van 90° in. De hoeken worden gevisualiseerd in figuur 2.35 (c). In een correct gealigneerd rooster wordt een rozettestructuur zichtbaar (figuur 2.35 (a) en (b)), die visueel aanvaardbaar is. Een kleine afwijking van de onderlinge hoeken van de roosters geeft echter aanleiding tot moiré-patternen. In de li-



Figuur 2.35: Kleurendrukwerk gebeurt door vier kleurseparaties over elkaar te drukken. (a) Een origineel kleuren raster. (b) Vergroting $\times 2$. (c) Vergroting $\times 4$ waarbij ook de afzonderlijke separaties worden getoond.



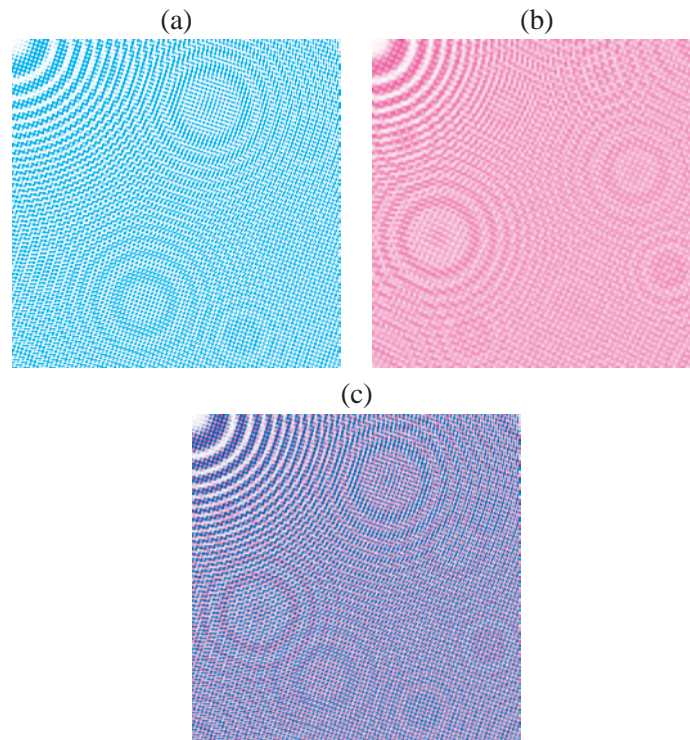
Figuur 2.36: Een voorbeeld van bemonsteringsmoiré in commercieel kleurendrukwerk.

teratuur [13, 37, 70] zijn algoritmen beschreven voor het minimaliseren van interseparatiemoiré.

Naast interseparatiemoiré kunnen er nog steeds artefacten ontstaan door frequentieverwarring tussen de beeldinhoud en de roosters van de afzonderlijke kleurseparaties (bemonsteringsmoiré). Figuur 2.36 toont een voorbeeld uit commercieel kleurendrukwerk, m.n. offsetdruk, waarbij de fijne textuur van de muur aanleiding heeft gegeven tot bemonsteringsmoiré.

Om het ontstaan van moiré-patternen bij kleurendrukwerk beter te begrijpen, tonen we de resultaten na herbemonstering van het testbeeld “zoneplate” voor verschillende kleurseparaties. We maken gebruik van een raster, beschikbaar in Adobe PhotoShop.⁵ De gebruikte herbemonsteringstechniek is bilineaire interpolatie. Het originele beeld heeft een resolutie van 300×300 dpi.

⁵Cyaan: 94.8 lpi, 108.4°. Magenta: 94.8 lpi, 161.6°. Geel: 100 lpi, 90°. Zwart: 106 lpi, 45°.



Figuur 2.37: Het testbeeld “zoneplate” na rastering van de verschillende kleurseparaties ($\times 2$). (a) Cyaan. (b) Magenta. (c) Cyaan en magenta.

Aan de uiteinden van de “zoneplate” worden dus frequenties van 150 dpi (horizontaal of verticaal) bereikt. Figuur 2.37 geeft in (a) en (b) het resultaat na rastering van de “zoneplate” met respectievelijk de kleurseparatie cyaan en magenta weer. De weergave van de beelden is, net als de resultaten bij gravurediepdruk, tweemaal vergroot om duidelijk het raster te tonen. De normale kijkafstand bedraagt dus opnieuw ongeveer 60 cm. Er treden duidelijk moirépatronen op, voornamelijk rond de roosterpunten van de reciproque doelroosters van de rasters. Figuur 2.37 (c) combineert beide kleurseparaties, waardoor duidelijk wordt dat de moirépatronen ook een andere kleurindruk veroorzaken.

Figuur 2.38 toont de nyquistgebieden van de kleurseparaties cyaan (C), magenta (M) en zwart (K), waarbij we de lijnfrequentie van elk rooster op 100 lpi hebben benaderd. We wensen nu een reconstructiefunctie te gebruiken die rekening houdt met de criteria voortvloeiend uit deze nyquistgebieden. De cirkel in korte stippellijn is de kleinst ingeschreven cirkel van de drie gero-

teerde vierkanten. De hexagonale rooster cel vormt de meest efficiënte roosterbedekking van een (omschrijvende) cirkel [91, 103, 146]. Daarom berekenen we een reconstructiefunctie volgens de kleinste-kwadratenbenadering voor de volgende respectievelijke reciproque bron- en doelroosters:

$$\hat{\mathbf{R}} = 300 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dpi}, \quad \hat{\tilde{\mathbf{R}}} = 100 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dpi}. \quad (2.75)$$

Merk op dat de hexagonale cel ook het nyquistgebied van de gele kleurseparatie insluit. Aangezien het in de praktijk moeilijk is om de reconstructiefunctie, waarmee de herbemonstering wordt uitgevoerd, aan te passen, stellen we voor om de beeldinhoud vooraf te filteren met de ontworpen reconstructiefunctie $\phi_1(\mathbf{x})$, waarna de herbemonstering nog steeds gebeurt met de “gewone” interpolatiefunctie $\phi_2(\mathbf{x})$. Aldus bekomen we een herbemonstering in twee stappen:

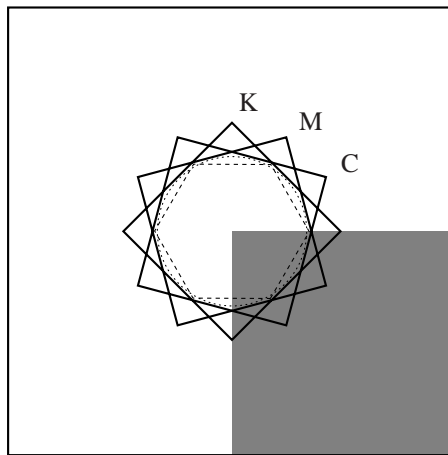
$$g(\mathbf{Rk}) \rightarrow s_1(\mathbf{Rk}) \rightarrow s_2(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{k}), \quad (2.76)$$

waarbij

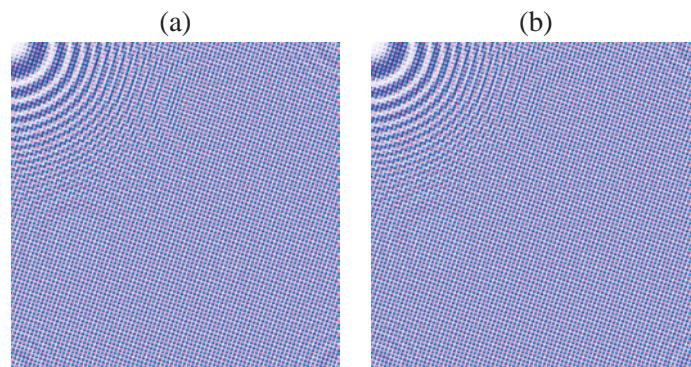
$$\begin{aligned} s_1(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \phi_1(\mathbf{x} - \mathbf{Rk}) g(\mathbf{Rk}), \\ s_2(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} \phi_2(\mathbf{x} - \mathbf{Rk}) s_1(\mathbf{Rk}). \end{aligned}$$

Een dergelijke prefiltering kan eenvoudig gebeuren door een aangepaste coëfficiëntenmatrix in een grafisch softwarepakket in te geven. Figuur 2.39 toont de resultaten na prefiltering met de kleinste-kwadratenspline van eerste en tweede orde. De moiré-patronen zijn duidelijk onderdrukt.

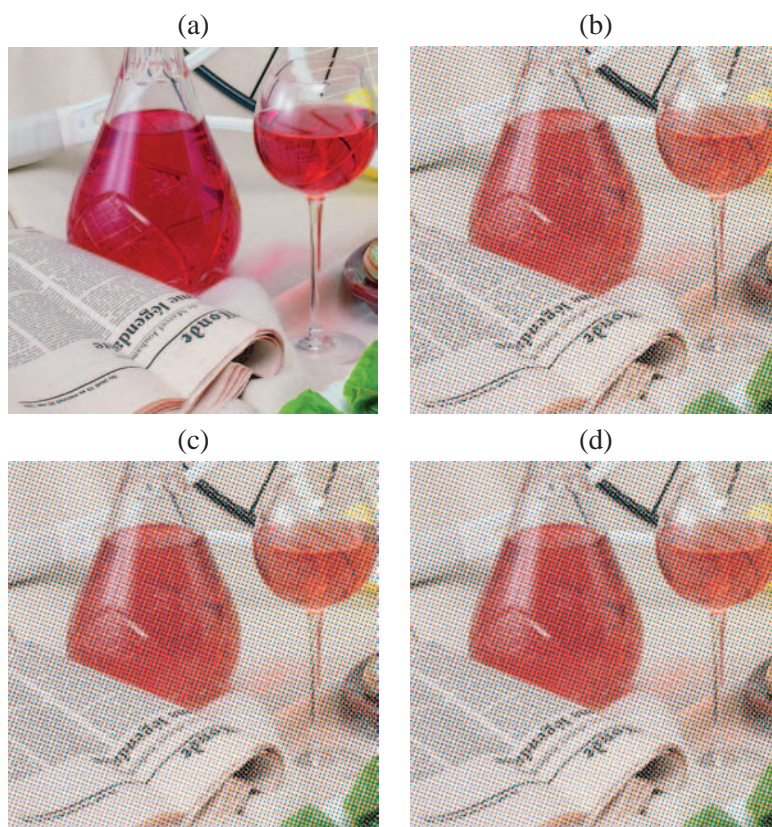
Om aan te tonen dat de prefiltering nauwelijks de scherpte van de beelden aantast, toont figuur 2.40 een fragment van een kleurentestbeeld uit de ISO CMYK-testset [66]. Het resultaat in (c) en (d) is perceptueel identiek aan (b).



Figuur 2.38: De reciproque doelroostercellen van de verschillende kleursepatis worden ingeschreven door de cirkel in korte stippellijn. De meest efficiënte bedekking corresponderend met een periodiek rooster wordt gegeven door het hexagon in lange stippellijn.



Figuur 2.39: Het testbeeld “zoneplate” na rastering, maar met prefiltering met de reconstructiefunctie volgens de kleinste-kwadratenbenadering. (a) Eerste orde. (b) Tweede orde.



Figuur 2.40: Een kleurentestbeeld na rastering. (a) Origineel beeld. (b) Na rastering. (c) Na prefiltering met de kleinste-kwadratenspline van eerste orde en rastering. (d) Na prefiltering met de kleinste-kwadratenspline van tweede orde en rastering.

2.7 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we tweedimensionale lineaire herbemonsteringstechnieken bestudeerd, uitgebreid en geëvalueerd. Belangrijk daarbij is het concept van reconstructie van een functie in het continue domein m.b.v. een reconstructiefunctie en de originele monsterwaarden op het bronrooster. Deze reconstructie wordt vervolgens bemonsterd op de roosterpunten van het doelrooster. Het grote voordeel van lineaire technieken is ongetwijfeld de mogelijkheid tot analyse van de reconstructiefunctie in het frequentiedomein. Lineaire herbemonsteringstechnieken kunnen bovendien eenvoudig geïmplementeerd en geoptimaliseerd worden.

Klassieke herbemonsteringstechnieken op basis van dichtste-buurinterpolatie en bilineaire interpolatie worden nog steeds zeer frequent gebruikt, ondanks het feit dat interpolatie met hogere-ordesplines zoals kubische B-splines reeds uitgebreid in de literatuur werden besproken. Geen van deze technieken houden echter rekening met het doelrooster, zodat vooral artefacten door frequentieverwarring duidelijk tot uiting komen. Met behulp van de veralgemeende klasse van niet-scheidbare tweedimensionale splines hebben we een reconstructiefunctie ontworpen die de kleinste-kwadratenbenadering realiseert. De kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline blijkt al vaak gebruikt te worden onder het principe van “oppervlakteprojectie” en leverde aanvaardbare resultaten op. De niet-triviale kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline gaf aanleiding tot minder vervaging en dus scherpere beelden.

Naast een nieuwe aanpak m.b.v. veralgemeende splines, hebben we ook een reconstructiefunctie ontworpen met een optimale energieconcentratie in het nyquistgebied van het doelrooster. De resultaten toonden aan dat bij deze reconstructiefunctie duidelijk moiré patronen t.g.v. frequentieverwarring voorkomen worden, maar dat de laagdoorlaatkarakteristiek in het frequentiedomein een sterke vervaging veroorzaakt.

De toepassingen van lineaire herbemonsteringstechnieken zijn zeer ruim. Als voorbeeld hebben we de resultaten voor gravurediepdruk en kleurendrukwerk besproken. De voorgestelde kleinste-kwadratensplines geven betere resultaten dan de klassieke interpolatiefuncties, zowel volgens een subjectieve beoordeling als volgens een zelf ontworpen objectieve kwaliteitsmaat.

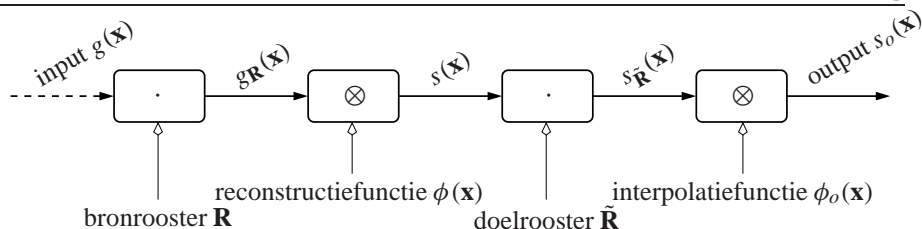
Hoofdstuk 3

Niet-lineaire herbemonstering

3.1 Inleiding

Het voorgaande hoofdstuk resulteerde reeds in enkele bruikbare reconstructiefuncties. We kunnen gerust stellen dat zowel de kleinste-kwadratensplines als de prolate sferoidale golffuncties, zij het op een andere wijze, rekening houden met het doelrooster. In dit hoofdstuk stellen we een grondige analyse voor van het ontstaan van moiré-patronen voor een gegeven reconstructiefunctie. Deze analyse laat toe een verbeterde niet-lineaire herbemonsteringstechniek te ontwerpen die efficiënt moiré-patronen onderdrukt en terzelfder tijd de randen goed bewaart.

Een eerste belangrijke component die in het vorige hoofdstuk buiten beschouwing werd gelaten, is de reproductie van het herbemonsterd beeld b.v. door druktechnieken of op beeldschermen. Het originele stroomdiagram uit figuur 1.9 dient dan ook te worden uitgebreid, zoals in figuur 3.1, met een extra stap die de reproductie modelleert. Een uitgebreide bespreking toont aan op welke manier frequentieverwarring door herbemonstering nieuwe (ongewenste) frequentiecomponenten introduceert. Daarnaast ontstaan er in de praktijk additionele moiré-patronen door “zweving” tussen frequentiecomponenten reeds aangewezen in het originele spectrum en nieuwe componenten ten gevolge van herbemonstering. Het combineren van de analyse van het ontstaan van moiré-patronen met de frequentiegevoeligheid van de menselijke waarneming, geeft aanleiding tot een modellering die het risico op een zichtbaar moiré-patroon bepaalt. Wanneer we het criterium dat voortvloeit uit deze modellering, vergelijken met onze eigen waarneming van welke frequentiecomponenten moiré-patronen veroorzaken (b.v. aan de hand van het testbeeld



Figuur 3.1: Het concept van lineaire herbemonstering: (1) reconstructie aan de hand van de monsterwaarden op het bronrooster, (2) bemonstering op de roosterpunten van het doelrooster, (3) reproductie m.b.v. de nieuwe monsterwaarden.

“zoneplate”) bekomen we een goede overeenkomst. Dit criterium blijkt bovendien strenger te zijn dan het klassieke nyquistcriterium.

Het gaborspectrogram is een techniek voor gezamenlijke spatiale en spectrale analyse van de beeldinhoud, die toelaat om m.b.v. het nieuwe criterium een plaatsafhankelijk risico te bepalen voor zichtbare moiré patronen bij gebruik van een gegeven reconstructiefunctie. Dit is mogelijk dankzij een risicomatrix die toelaat de gaborcoëfficiënten te wegen. We onderzoeken ook de invloed van de parameters van het gaborspectrogram en de invloed van randen in het beeld op de risicoschatting. Uiteindelijk geeft dit aanleiding tot een niet-lineaire herbemonsteringstechniek die adaptief, rekening houdend met de grootte van het gevaar op moiré, de reconstructiefunctie wijzigt.

Om de ideeën die we in dit hoofdstuk uitwerken aanschouwelijker voor te stellen, zullen we regelmatig terugrijpen naar de toepassing van gravurediepdruk. Uiteraard zijn de resultaten niet beperkt tot deze particuliere toepassing.

3.2 Een nieuw criterium voor frequentiecomponenten die leiden tot moiré patronen

Het voorgaande hoofdstuk bracht reeds een verklaring aan voor sommige van de waargenomen moiré patronen in de herbemonsterde versies van het testbeeld “zoneplate”. Vooraleer het ontstaan van moiré patronen diepgaander te bespreken, introduceren we enkele nieuwe elementen die in dit betoog belangrijk zijn. Moiré patronen ontstaan door de introductie van nieuwe frequentiecomponenten die niet in het originele spectrum aanwezig zijn. Het is belangrijk hierbij ook rekening te houden met de frequentiegevoeligheid van het menselijk visueel systeem (HVS), aangezien een moiré patroon slechts waargenomen wordt wanneer de geïntroduceerde frequentiecomponent zichtbaar is. We gebruiken een vereenvoudigd model uit de literatuur [70, 184] voor de frequentie karakteristiek van het HVS. Daarnaast zullen we ditmaal ook de aanwezigheid en de kenmerken van een reproductietechniek in rekening bren-

gen. De analyse zal vervolgens toelaten om alle waargenomen moiré-patronen in de testbeelden uit het vorige hoofdstuk systematisch te verklaren (en dus ook te voorspellen). Concreet leiden deze bevindingen tot een modellering die het mogelijk maakt om te bepalen of een willekeurige frequentiecomponent aanleiding zal geven tot een moiré-patroon en hoe sterk dit moiré-patroon zich zal manifesteren. Hiermee kunnen we een nieuw criterium in het frequentiedomein opstellen dat strenger blijkt te zijn dan het klassieke nyquistcriterium, hetgeen betekent dat het corresponderend gebied van “veilige” frequenties kleiner is.

3.2.1 Zichtbaarheid van moiré-patronen

Een belangrijke vraag bij het ontstaan van nieuwe frequentiecomponenten door herbemonstering is of ze aanleiding geven tot een zichtbaar moiré-patroon. We maken voor deze analyse gebruik van een vereenvoudigd model voor de frequentiegevoeligheid van het HVS. Nasanen [98] stelt het volgende eenvoudige model voor als functie van de spatiale frequentie uitgedrukt in het aantal cycli per graad (cpd):

$$v(f_{\text{cpd}}) = \exp\left(-f_{\text{cpd}}^2/\sigma^2\right), \quad (3.1)$$

waarbij $\sigma = 7.75$ cpd. In werkelijkheid is de gevoeligheid van het menselijk visueel systeem ook anisotroop, d.w.z. lager langs de diagonaalrichting [146, 184]. Bovendien is het zo dat heel lage frequenties niet waarneembaar zijn. Voor onze doeleinden volstaat echter het eenvoudig model gegeven door formule (3.1). Vermits moiré-patronen zich manifesteren als nieuwe sterke frequentiecomponenten, voldoet een model voor het HVS gebaseerd op de frequentiegevoeligheid voor de doeleinden van dit werk.

3.2.2 Reproductie

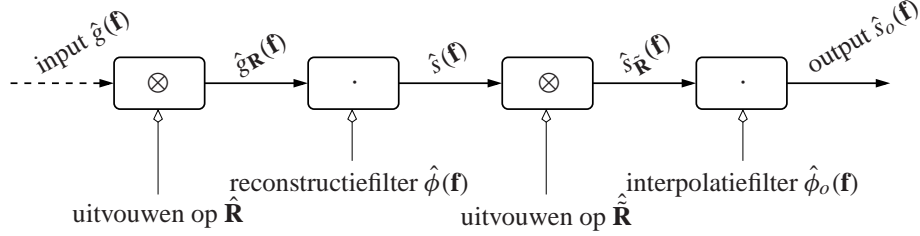
Een (her)bemonsterd beeld op zich heeft geen betekenis voor een menselijke waarnemer. In de praktijk gebruikt men een reproductieproces om m.b.v. de monsterwaarden een fysisch waarneembaar beeld te bekomen. De karakteristieken van de reproductie beïnvloeden ondermeer de aanwezigheid en de zichtbaarheid van moiré-patronen. Neem als voorbeeld de LCD-technologie (LCD, *Eng.* liquid crystal display) die een beeld produceert dat we kunnen voorstellen als een matrix van rechthoekige beeldpunten. Het resulterend beeld kan dan ook gemodelleerd worden als zijnde verkregen via dichtste-buur-interpolatie [63]. Een beeldpunt van een klassieke CRT-monitor (CRT, *Eng.* cathode ray tube) daarentegen wordt beter benaderd door een gaussiaanse puls [63, 102, 146]. De reproductie is dan ook modelleerbaar als een convolutie

van een bemonsterd beeld (voorgesteld m.b.v. diracimpulsen) met een gaussi-aanse reconstructiefunctie.

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben besproken, doen druktechnieken een beroep op rastermethoden om de reproductie te realiseren. In dit werk hebben we ons beperkt tot een belangrijke klasse van rastermethoden die een periodiek rooster gebruiken waarop rasterpunten met verschillende grootte geplaatst worden. Een hogere monsterwaarde geeft aanleiding tot een kleiner rasterpunt. Dit reproductieproces kan gemodelleerd worden als de combinatie van een dichtste-buur-interpolatie en een drempeloperatie. Deze modellering wordt in bijlage C diepgaander uitgelegd. In zijn totaliteit is het rasterproces daardoor niet meer lineair. Kermisch en Roetling [71] hebben als eerste een modellering van klassiek rasteren aangewend om het spectrum van een gerasterd beeld te bepalen. Hun uitdrukkingen zijn echter zeer omslachtig en leveren slechts subtiele verschillen op ten opzichte van een eenvoudige lineaire modellering van het reproductieproces. In dit hoofdstuk wensen we vooral rekening te houden met de aanwezigheid van een reproductieproces en kiezen we verder voor een modellering ervan door een lineaire herbemonsteringstechniek, in het bijzonder door de dichtste-buur-interpolatie op het doelrooster. We noteren de interpolatiefunctie, geassocieerd met de reproductie als $\phi_o(\mathbf{x})$.

3.2.3 Analyse van het ontstaan van moiré-patronen

De volgende analyse van moiré-patronen heeft tot doel het ontstaan ervan systematisch te verklaren. Alle moiré-patronen door (her)bemonstering zijn het gevolg van het bemonsteringsproces en het uitvouwen van het spectrum op het reciproque bemonsteringsrooster. In het voorgaande hoofdstuk werden reeds enkele opvallende moiré-patronen verklaard door de aanwezigheid van sterke frequentiecomponenten die werden teruggevouwen in de nabijheid van de nulfrequentie tijdens herbemonstering. We bespreken nu een systematische aanpak om deze gevaarlijke frequentiecomponenten te lokaliseren. Deze werkwijze is enigszins vergelijkbaar met die van Amidror [13], met dat verschil dat wij ook rekening houden met de invloed van de reconstructiefuncties bij herbemonstering en reproductie. Verder kunnen we twee soorten moiré-patronen onderscheiden die we apart zullen behandelen. De replica's van het uitgevouwde spectrum kunnen niet alleen aanleiding geven tot een nieuwe frequentiecomponent in de buurt van de nulfrequentie, maar ook in de buurt van een frequentiecomponent (niet noodzakelijk met lage frequentie) die reeds aanwezig is in het originele spectrum. In het laatste geval kan er een moiré-patroon ontstaan door zweving tussen de originele en de geïntroduceerde frequentiecomponent.



Figuur 3.2: Het concept van lineaire herbemonstering uit figuur 3.1 voorgesteld in het frequentiedomein.

Moiré t.g.v. frequentieverwarring

Beschouw een beeld $g_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$, gegeven op een bronrooster \mathbf{R} , dat we herbemonsteren naar het doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$. We veronderstellen dat $g_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ de bemonsterde versie is van een beeld $g(\mathbf{x})$ dat bandbeperkt is tot de reciproque bronrooster $\chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{f})$. Figuur 3.2 herneemt ter illustratie het concept van lineaire herbemonstering in het frequentiedomein. Door bemonstering is het spectrum $\hat{g}_{\mathbf{R}}(\mathbf{f})$ uitgevouwen op het reciproque bronrooster $\hat{\mathbf{R}}$. Na herbemonstering naar een rooster $\tilde{\mathbf{R}}$ m.b.v. een reconstructiefunctie $\hat{\phi}(\mathbf{x})$, wordt het gefilterde spectrum $\hat{g}_{\mathbf{R}}(\mathbf{f})\hat{\phi}(\mathbf{f})$ opnieuw uitgevouwen op het reciproque doelrooster $\tilde{\mathbf{R}}$ tot

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{f}) &= \frac{1}{|\det(\tilde{\mathbf{R}})|} \sum_{\mathbf{k}} \hat{g}_{\mathbf{R}}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k})\hat{\phi}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{|\det(\tilde{\mathbf{R}})\det(\mathbf{R})|} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{n}} \hat{g}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n})\hat{\phi}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Een moiré-patroon ontstaat wanneer een frequentiecomponent uit het spectrum $\hat{g}(\mathbf{f})$, door herbemonstering belandt in de omgeving van de nulrequentie in het nieuwe spectrum $\hat{s}_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{f})$. De centra van de moiré-patronen in de herbemonsterde beelden van het testbeeld “zoneplate” corresponderen met de frequentiecomponenten die belanden op de nulrequentie zelf. We spreken verder van de centrumfrequentie van een moiré-patroon. Formule (3.2) kan worden gebruikt om de centrumfrequenties te bepalen.

We beschouwen een spectrum $\hat{g}(\mathbf{f})$ dat uit één enkele frequentiecomponent bestaat: $\hat{g}(\mathbf{f}) = \delta(\mathbf{f} - \mathbf{p})$. Deze onderstelling kan beschouwd worden als een model voor een beeld waar lokaal deze frequentiecomponent dominant aanwezig is. De sommatie uit formule (3.2) kan dan herschreven worden als

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} - \mathbf{p})\hat{\phi}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}) = \\ \delta(\mathbf{f} - \mathbf{p})\hat{\phi}(\mathbf{p}) + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \text{ en } \mathbf{n} \neq \mathbf{0}} \delta(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} - \mathbf{p})\hat{\phi}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}),\end{aligned}$$

Tabel 3.1: Algoritme voor het lokaliseren van centrumfrequenties van moiré-patronen t.g.v. frequentieverwarring.

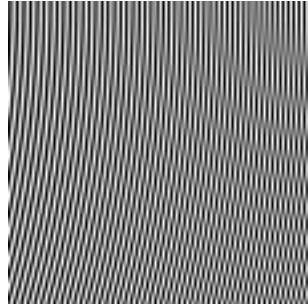
```

for  $\mathbf{n}$  in  $\mathcal{R} = \left\{ \mathbf{n} \mid \left\| \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} \right\|_{l_2}^2 \leq r^2 \right\}$ 
  for  $\mathbf{k}$  in  $\tilde{\mathcal{R}} = \left\{ \mathbf{k} \mid \exists \mathbf{n} \in \mathcal{R} : \chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}) = 1 \right\}$ 
     $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} + \hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}$ 
    if  $\chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{p}) = 1$ ,
      store  $\mathbf{p}$ 
      store  $\mathbf{n}$ 
    end if
  end for
end for

```

waarbij we de originele frequentiecomponent hebben afgezonderd. Als de frequentie \mathbf{p} kan geschreven worden als $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{k}}$ voor een bepaalde $\dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{k}} \in \mathbb{Z}_0^{2 \times 1}$, dan belandt één van de replica's van $\delta(\mathbf{f} - \mathbf{p})$ op de nulrequentie voor $\mathbf{k} = -\dot{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{n} = -\dot{\mathbf{n}}$. In dat geval bevat de sommatie een nieuwe nulrequentiecomponent $\delta(\mathbf{f})\hat{\phi}(\mathbf{f} + \hat{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{k}})$. De reconstructiefunctie heeft deze nieuwe frequentiecomponent afgezwakt volgens $|\hat{\phi}(\hat{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{k}})| = |\hat{\phi}(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{n}})|$. Merk op dat de teruggevouwen component van $\delta(\mathbf{f} - \mathbf{p})$ zelf geen moiré veroorzaakt aangezien deze op de nulrequentie wordt teruggevouwen, maar bij een kleine afwijking \mathbf{q} van de frequentie van de originele frequentiecomponent ontstaat een moiré-patroon met frequentie \mathbf{q} . Tot slot zal de reproductie de nieuwe component afzwakken volgens $\hat{\phi}_o(\mathbf{q})$.

Op basis van deze uiteenzetting kunnen we een handig algoritme afleiden dat de centrumfrequenties van moiré-patronen door frequentieverwarring systematisch opzoekt. Het algoritme is gegeven als pseudocode in tabel 3.1. De verzameling \mathcal{R} bevat alle vectoren \mathbf{n} zodat $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}$ bronroosterpunten zijn in een straal r rond de oorsprong. De straal r bepaalt hoeveel naburige replica's in het frequentiedomein in rekening worden gebracht door het algoritme. De verzameling $\tilde{\mathcal{R}}$ bevat alle vectoren \mathbf{k} voor doelroosterpunten $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{k}$ die een bronroosterpunt uit \mathcal{R} kunnen "terugvouwen" binnen de reciproque bronrooster cel. Alle combinaties van \mathbf{k} en \mathbf{n} die aanleiding geven tot een frequentie binnen de reciproque bronrooster cel (en waarvoor dus geldt $\chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{p}) = 1$), stemmen immers overeen met een mogelijke frequentiecomponent uit het originele spectrum die door herbemonstering teruggevouwen wordt op de nulrequentie.

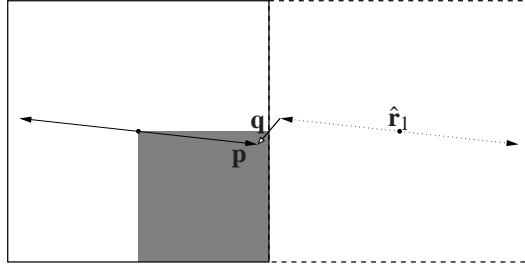


Figuur 3.3: Een uitvergroting van de rechterbovenhoek van het testbeeld “zoneplate”.

Moiré t.g.v. zwevingsfrequenties

In de praktijk zijn de reconstructiefuncties, zowel voor herbemonstering als reproductie, niet bandbeperkt. Zoals daarnet besproken, kunnen hierdoor ongewenste nieuwe frequentiecomponenten ontstaan die een moiré-patroon veroorzaken. Het is echter ook mogelijk dat een geïntroduceerde frequentiecomponent op zich niet leidt tot een moiré-patroon, b.v. omdat de frequentie te hoog is, maar dat er interactie optreedt met een originele component waarvan de frequentie weinig verschilt. Het gevolg is een moiré-patroon door de zwevingsfrequentie (*Eng.* beat frequency) tussen de originele en de geïntroduceerde frequentiecomponent. Dit soort moiré-patronen zijn van een andere aard dan de vorige, omdat ze zich manifesteren als een lage frequentie (de moiré) die gemoduleerd wordt op een hoge frequentie (de centrumfrequentie).

We verduidelijken deze redenering eerst met een voorbeeld. Figuur 3.3 toont de uitvergroete rechterbovenhoek van het originele testbeeld “zoneplate” uit figuur 2.17 (a) op het bronrooster zonder herbemonstering. Een moiré-patroon is klaarblijkelijk reeds aanwezig voordat het beeld is herbemonsterd. De reden ligt in de grove interpolatie (dichtste-buur-interpolatie), gebruikt voor het vergroten van dit beeld. Het patroon is ook goed zichtbaar wanneer we het beeld weergeven op een computerscherm of na afdrukken. Om het ontstaan ervan te verklaren, beschouwen we figuur 3.4. Een patroon uit de rechterbovenhoek van het testbeeld “zoneplate” stemt overeen met twee frequentiecomponenten $\delta(\mathbf{f} - \mathbf{p})$ en $\delta(\mathbf{f} + \mathbf{p})$ die door bemonstering uitgevouwen worden op, dit is gekopieerd worden naar, alle reciproque bronroosterpunten, zoals b.v. $\hat{\mathbf{r}}_1$. Hierdoor belandt een nieuwe component met frequentie $\hat{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{p}$ in de buurt van \mathbf{p} . Doordat de interpolatiefunctie van de reproductie deze component niet of onvoldoende onderdrukt, geeft dit aanleiding tot de zwevingsfrequentie



Figuur 3.4: De meeste reconstructiefuncties onderdrukken slechts gedeeltelijk de replica met frequentie $\hat{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{p}$ van de frequentiecomponent $\delta(\mathbf{f} + \mathbf{p})$. Dit kan aanleiding geven tot een zwevingsfrequentie \mathbf{q} .

$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{r}}_1 - 2\mathbf{p}$. We kunnen dit als volgt inzien

$$\begin{aligned} & \exp(-j2\pi\langle\mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle) + \exp(-j2\pi\langle\hat{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle) \\ &= 2 \cos(2\pi\langle\hat{\mathbf{r}}_1 - 2\mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle) \exp\left(-j2\pi\left\langle\frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{2}, \mathbf{x}\right\rangle\right), \end{aligned}$$

waaruit blijkt dat de zwevingsfrequentie gemoduleerd wordt op een hoge frequentie $\hat{\mathbf{r}}_1/2$. Figuur 3.3 bevestigt deze vaststelling: we merken inderdaad de lage frequentie $\hat{\mathbf{r}}_1 - 2\mathbf{p}$ en de nyquistfrequentie $\hat{\mathbf{r}}_1/2$ op. De intensiteit van deze patronen is afhankelijk van hoe sterk de reconstructiefunctie (bij herbemonstering en/of reproductie) de replica onderdrukt. De uiteindelijke zichtbaarheid is ook sterk afhankelijk van het contrast tussen de zwevingsfrequentie en de hoge-frequentiecomponent. Dit contrast kan verschillend zijn naargelang de karakteristieken van het reproductieproces.

Moiré-patternen t.g.v. van zwevingsfrequenties verschillen van de vorige, omdat de onderliggende operatie ditmaal niet multiplicatief is (de vermenigvuldiging met een roosterstructuur), maar additief (de som van twee frequentiecomponenten waarvan de frequenties weinig verschillen). De zwevingsfrequentie zelf is trouwens niet als frequentiecomponent aanwezig in het spectrum, maar de reproductie maakt haar zichtbaar.

Merk op dat in het geval van ideale interpolatie, waarbij enkel het spectrum binnen het nyquistgebied overblijft, de uitgevouwen frequentiecomponent $\hat{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{p}$ volledig wordt onderdrukt en er aldus geen sprake kan zijn van zwevingsfrequenties.

De voorgaande analyse kan ook worden herhaald voor een origineel spectrum met meerdere frequentiecomponenten, waarbij een teruggevouwen component bij een andere originele frequentiecomponent kan terechtkomen. Aangezien deze veralgemening de analyse echter bijzonder complex maakt, beperken we ons tot één enkele frequentiecomponent. In dat geval ontstaat deze

Tabel 3.2: Algoritme voor het lokaliseren van centrumfrequenties van moiré-patronen t.g.v. zwevingsfrequenties voor het bronrooster \mathbf{R} en het doelrooster $\hat{\mathbf{R}}$.

<pre> for \mathbf{n} in $\{ \mathbf{n} \mid 0 < \chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}/2) < 1 \}$ $\mathbf{p} = \mathbf{n}\hat{\mathbf{R}}/2$ store \mathbf{p} end for </pre>	<pre> for \mathbf{n} in $\{ \mathbf{n} \mid 0 < \chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}/2) < 1 \}$ $\mathbf{p} = \mathbf{n}\hat{\mathbf{R}}/2$ store \mathbf{p} end for </pre>
---	---

soort van moiré-patronen voor componenten bij frequenties aan de rand van het nyquistgebied. De centrumfrequentie wordt bepaald door het snijpunt van de rand van het nyquistgebied met de verbindinglijn tussen de oorsprong en een naburig reciproque roosterpunt. Voor een toepassing zoals gravurediepdruk betekent dit dat deze moiré-patronen kunnen optreden door imperfecte reconstructie tijdens de herbemonstering (dus langs de rand van het nyquistgebied van het bronrooster) en door imperfecte interpolatie tijdens de reproductie achteraf (dus langs de rand van het nyquistgebied van het doelrooster).

Deze uiteenzetting laat opnieuw toe om een algoritme af te leiden dat de centrumfrequenties van deze moiré-patronen berekent. Tabel 3.2 toont hoe het algoritme alle naburige roostercellen overloopt en de centrumfrequenties opslaat.

Een praktisch voorbeeld

Aan de hand van een voorbeeld zullen we de werking van de algoritmen van naderbij bekijken. Daartoe beschouwen we opnieuw de toepassing van gravurediepdruk uit het vorige hoofdstuk. We zullen de analyse uitvoeren voor de lineaire herbemonsteringstechnieken. De resultaten van de algoritmen worden voorgesteld in het frequentiegebied $[0, 150] \times [0, 150]$ dpi, hetgeen overeenstemt met het frequentiegebied voorgesteld door het testbeeld “zoneplate”. De reproductie modelleren we aan de hand van de dichtste-buur-interpolatie op het doelrooster.

Figuur 3.5 toont de herbemonsterde testbeelden “zoneplate” uit het vorige hoofdstuk, met de analyse voor de verschillende reconstructiefuncties in het corresponderend frequentiegebied, waarin we de centrumfrequenties aanduiden. De correspondentie tussen een locatie \mathbf{x} en de frequentiecomponent die lokaal optreedt in “zoneplate” blijkt nu bijzonder nuttig. We gebruiken enkele tekens om de verschillende soorten moiré-patronen van elkaar te onderscheiden:

- Een vierkantje duidt een moiré-patroon van nulde orde aan, d.w.z. veroorzaakt door het niet-uitgevouwen originele spectrum:

$$\mathcal{R}_0 = \{\mathbf{0}\}. \quad (3.3)$$

- Een driehoekje geeft een moiré-patroon van eerste orde aan:

$$\mathcal{R}_1 = \{\mathbf{n} \mid -1 \leq n_1, n_2 \leq 1\} \setminus \mathcal{R}_0. \quad (3.4)$$

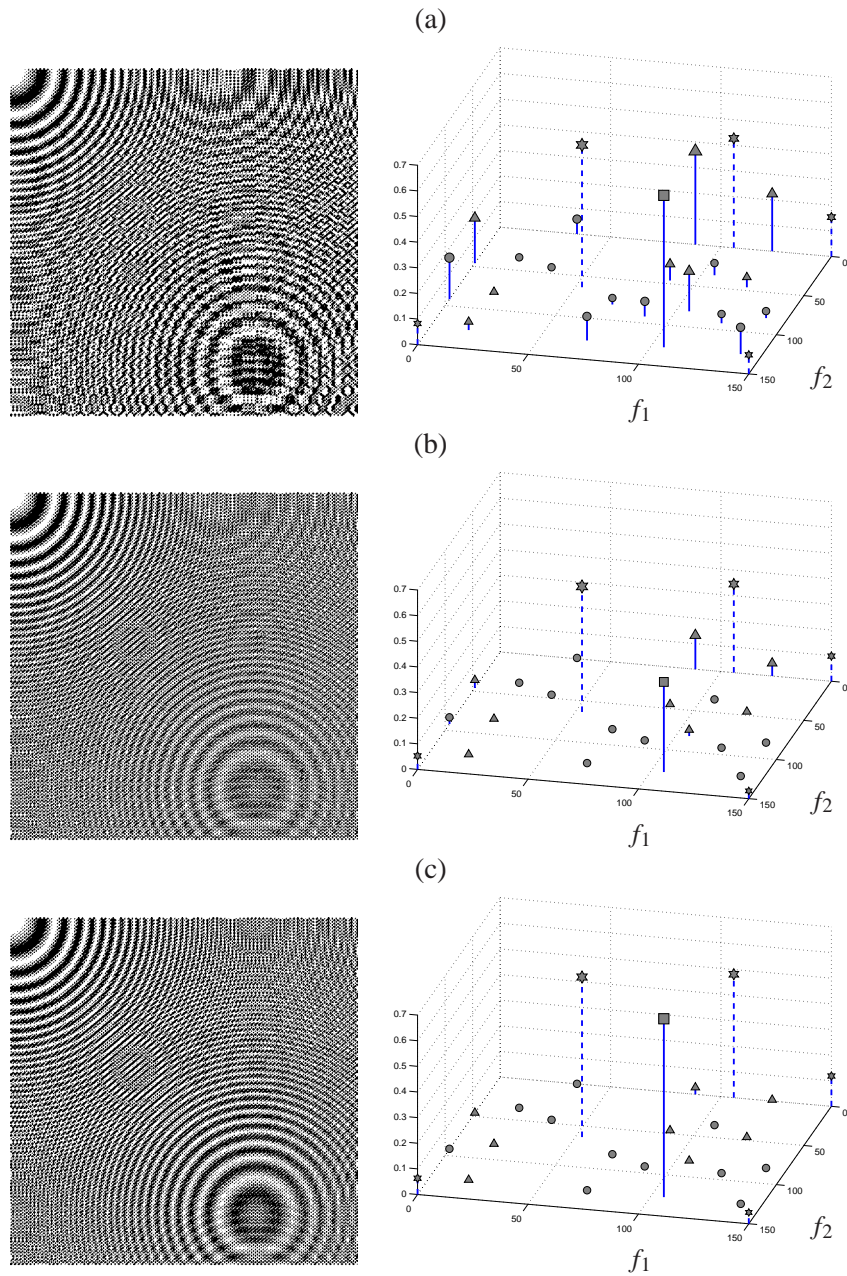
- Een cirkeltje geeft een moiré-patroon van tweede orde aan:

$$\mathcal{R}_2 = \{\mathbf{n} \mid -2 \leq n_1, n_2 \leq 2\} \setminus \mathcal{R}_1. \quad (3.5)$$

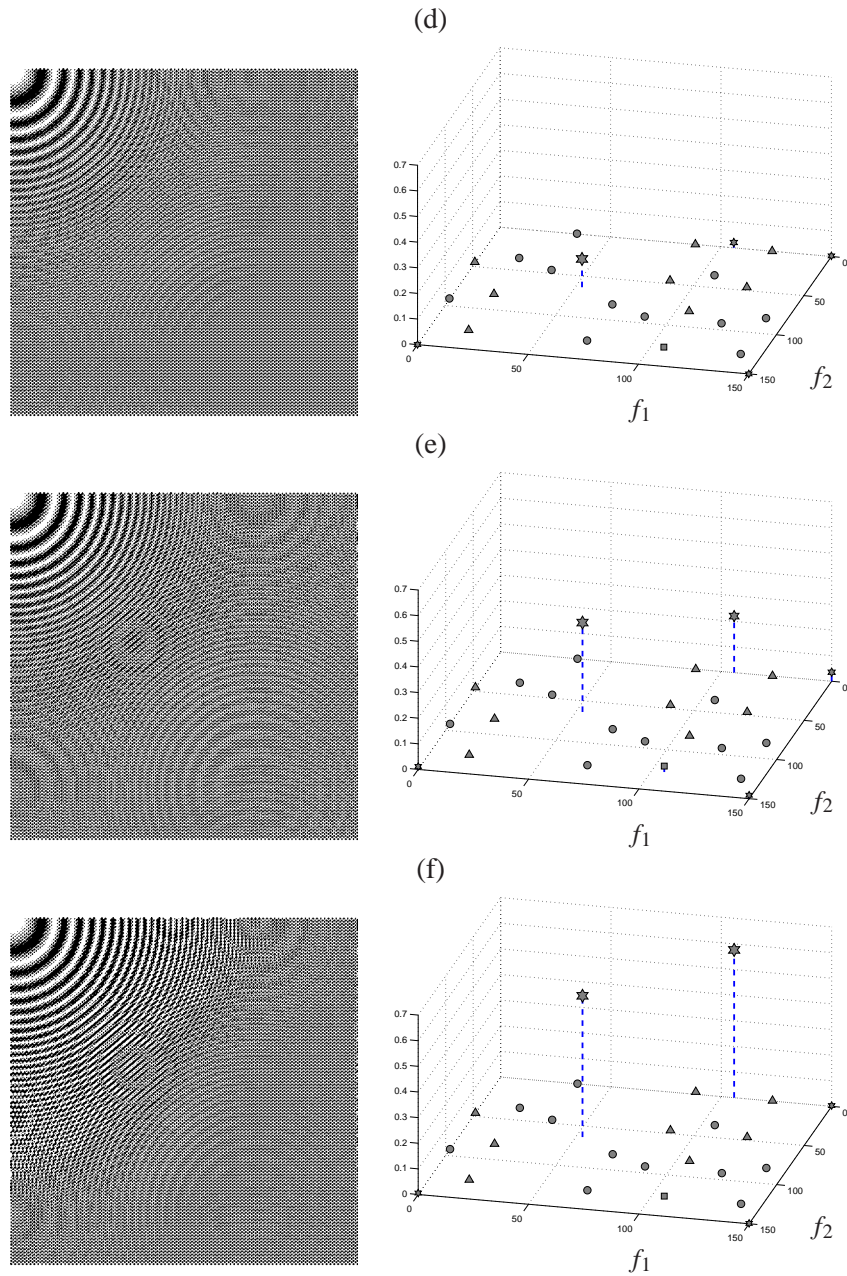
- Een zeshoekje duidt op een moiré-patroon dat ontstaat door een zwevingsfrequentie.

De intensiteit van de moiré-patronen wordt afgebeeld door de hoogte.

Bekijken we eerst en vooral in (a) het resultaat na herbemonstering m.b.v. dichtste-buur-interpolatie. Er zijn talrijke moiré-patronen zichtbaar. Merk op dat verschillende centrumfrequenties opduiken binnen het nyquistgebied van de doelroostercel. Bij bilineaire interpolatie in (b) duiken slechts enkele moiré-patronen op. Herbemonstering m.b.v. kubische-B-spline-interpolatie onderdrukt zeer goed replica's van het spectrum op het reciproque bronrooster, waardoor de moiré-patronen vanaf eerste orde sterk onderdrukt worden, maar het moiré-patroon van nulde orde (dat veroorzaakt wordt door frequentiecomponenten binnen de reciproque bronroostercel) en de moiré-patronen door zwevingsfrequenties zijn nog steeds aanwezig. De prolate sferoïdale golffunctie daarentegen geeft in (d) nauwelijks aanleiding tot moiré-patronen. Bij de kleinste-kwadratensplines in (e) en (f) treedt vooral moiré door zwevingsfrequenties op. Het moiré-patroon van nulde orde rechtsonder wordt grotendeels onderdrukt.



Figuur 3.5: Een analyse van de moiré-patronen die ontstaan in het testbeeld “zone-plate” na herbemonstering. (a) Dichtste-buur-interpolatie. (b) Bilineaire interpolatie. (c) Kubische-B-spline-interpolatie.



Figuur 3.5: (vervolg) (d) Reconstructie met de prolate sferoïdale golf-functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.

3.2.4 Een nieuw criterium in het frequentiedomein

De voorgaande analyse laat toe om een belangrijk kenmerk van moiré-patronen af te leiden, namelijk hun centrumfrequentie. Het zijn de frequentiecomponenten in de buurt van deze centrumfrequenties die na herbemonstering nieuwe componenten introduceren die aanleiding geven tot moiré-patronen. We wensen nu af te leiden of een willekeurige frequentiecomponent een zichtbaar moiré-patroon veroorzaakt. Daarbij combineren we de kennis van de centrumfrequenties (voor gegeven bron- en doelrooster) met de frequentiekaracteristiek van de reconstructiefuncties (voor herbemonstering en reproductie) en de frequentiegevoeligheid van het HVS. We behandelen achtereenvolgens de centrumfrequenties van moiré door frequentieverwarring en door zwevingsfrequenties.

Noemen we \mathbf{p}_i de centrumfrequenties van de moiré-patronen die kunnen ontstaan door frequentieverwarring en \mathbf{n}_i de index van het corresponderende bronroosterpunt. Zowel \mathbf{p}_i als \mathbf{n}_i bekomen we aan de hand van het algoritme uit tabel 3.1 en zijn afhankelijk van het bron- en doelrooster. De mate waarin een willekeurige component uit het spectrum met frequentie \mathbf{f} aanleiding kan geven tot een zichtbaar moiré-patroon met frequentie $\mathbf{f} - \mathbf{p}_i$ is afhankelijk van drie factoren: de zichtbaarheid $\nu(\mathbf{f} - \mathbf{p}_i)$ voor de nieuwe frequentiecomponent, de filterende werking $\hat{\phi}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}_i)$ op de uitgevouwen component bij herbemonstering door de reconstructiefunctie, en de filterende werking $\hat{\phi}_o(\mathbf{f} - \mathbf{p}_i)$ bij reproductie. Aldus kunnen we de zichtbaarheid van het moiré-patroon met centrumfrequentie \mathbf{p}_i voor een willekeurige frequentiecomponent bij \mathbf{f} modelleren als:

$$\nu_i(\mathbf{f}) = \nu(\mathbf{f} - \mathbf{p}_i) \left| \hat{\phi}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}_i) \right| \left| \hat{\phi}_o(\mathbf{f} - \mathbf{p}_i) \right|. \quad (3.6)$$

Voor moiré-patronen t.g.v. zwevingsfrequenties is de situatie iets gecompliceerder. Aan de hand van de algoritmen uit tabel 3.2 bekomen we de centrumfrequenties \mathbf{p}_k en \mathbf{p}_l , respectievelijk voor het bronrooster en het doelrooster. Voor de duidelijkheid behandelen we beide gevallen afzonderlijk. Beschouw allereerst een component met frequentie \mathbf{f} in de buurt van \mathbf{p}_k . Door de beperkingen van de reconstructiefunctie tijdens de herbemonstering, ontstaat een nieuwe component met frequentie $2\mathbf{p}_k - \mathbf{f}$. Aldus manifesteert zich een zwevingsfrequentie $2(\mathbf{f} - \mathbf{p}_k)$ die dubbel zo groot is als de afstand tussen \mathbf{f} en \mathbf{p}_k . De zichtbaarheid van het moiré-patroon met deze zwevingsfrequentie is afhankelijk van drie factoren. Allereerst is er de zichtbaarheid van de zwevingsfrequentie $2(\mathbf{p}_k - \mathbf{f})$, die in werkelijkheid ook afhankelijk is van de centrumfrequentie \mathbf{p}_k . Bij benadering modelleren we deze zichtbaarheid echter nog steeds door $\nu(2(\mathbf{p}_k - \mathbf{f}))$, waarbij we onderstellen dat de reproductietechniek voldoende contrast laat tussen het patroon met frequentie \mathbf{p}_k en de

gemoduleerde frequentie $2(\mathbf{p}_k - \mathbf{f})$. Vervolgens hebben we ook de filterende werking van de herbemonstering door $\hat{\phi}(\mathbf{f})$ en $\hat{\phi}(2\mathbf{p}_k - \mathbf{f})$ en de filterende werking van de reproductie door $\hat{\phi}_o(\mathbf{f})$ en $\hat{\phi}_o(2\mathbf{p}_k - \mathbf{f})$. De zwevingsfrequentie kan slechts ontstaan voor zover beide frequentiecomponenten bij \mathbf{f} en $2\mathbf{p}_k - \mathbf{f}$ aanwezig zijn, hetgeen we uitdrukken m.b.v. het minimum:

$$v_k(\mathbf{f}) = v(2(\mathbf{f} - \mathbf{p}_k)) \min \left(\left| \hat{\phi}(\mathbf{f})\hat{\phi}_o(\mathbf{f}) \right|, \left| \hat{\phi}(2\mathbf{p}_k - \mathbf{f})\hat{\phi}_o(2\mathbf{p}_k - \mathbf{f}) \right| \right). \quad (3.7)$$

Bij de centrumfrequenties \mathbf{p}_l ontstaat de zwevingsfrequentie door interactie met een nieuwe frequentiecomponent als gevolg van de replica's op het reciproque doelrooster en de beperkingen van de interpolatiefunctie tijdens de reproductie. We krijgen daardoor een licht verschillende uitdrukking

$$v_l(\mathbf{f}) = v(2(\mathbf{f} - \mathbf{p}_l)) \min \left(\left| \hat{\phi}(\mathbf{f})\hat{\phi}_o(\mathbf{f}) \right|, \left| \hat{\phi}(\mathbf{f})\hat{\phi}_o(2\mathbf{p}_l - \mathbf{f}) \right| \right). \quad (3.8)$$

We leiden nu de zichtbaarheid $v_{\mathbf{R}}(\mathbf{f})$ af van moiré-patronen voor een willekeurige frequentiecomponent bij \mathbf{f} , door het maximum te bepalen van alle potentiële moiré-patronen:

$$v_{\mathbf{R}}(\mathbf{f}) = \max_{i,k,l} (v_i(\mathbf{f}), v_k(\mathbf{f}), v_l(\mathbf{f})). \quad (3.9)$$

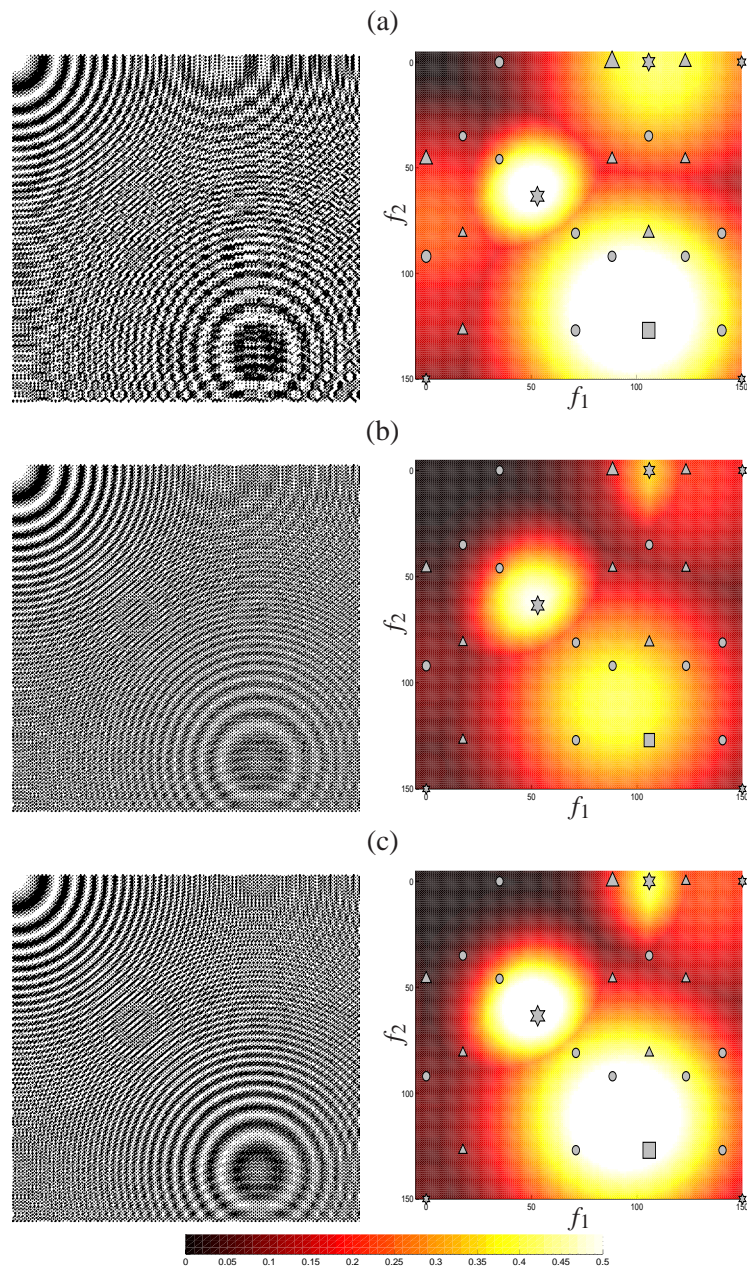
Figuur 3.6 toont het resultaat van deze modellering voor de verschillende lineaire herbemonsteringstechnieken. De tekens zijn opnieuw aangeduid met dezelfde betekenis als in figuur 3.5, maar ditmaal is hun grootte geschaald volgens de maximale bijdrage van de zichtbaarheid van het corresponderend moiré-patroon. Rond de centrumfrequentie van een moiré-patroon krijgen we op die manier een gebied waarin het moiré-patroon zichtbaar is. Het filteren van het spectrum door de reconstructiefuncties voor herbemonstering en reproductie zorgt ervoor dat de centrumfrequentie vaak niet centraal in dit gebied ligt.

De klassieke herbemonsteringstechnieken leiden duidelijk tot moiré-patronen binnen en buiten het nyquistgebied van het doelrooster. Herbemonstering m.b.v. de prolate sferoïdale golf functie daarentegen geeft bijna geen aanleiding tot moiré-patronen. De kleinste-kwadratensplines geven dan weer wel aanleiding tot moiré, ook binnen het nyquistgebied van het doelrooster. Uit deze modellering blijkt dat bij het toepassen van deze reconstructiefuncties in de praktijk frequentiecomponenten die “veilig” zijn volgens het nyquistcriterium toch moiré-patronen kunnen veroorzaken.

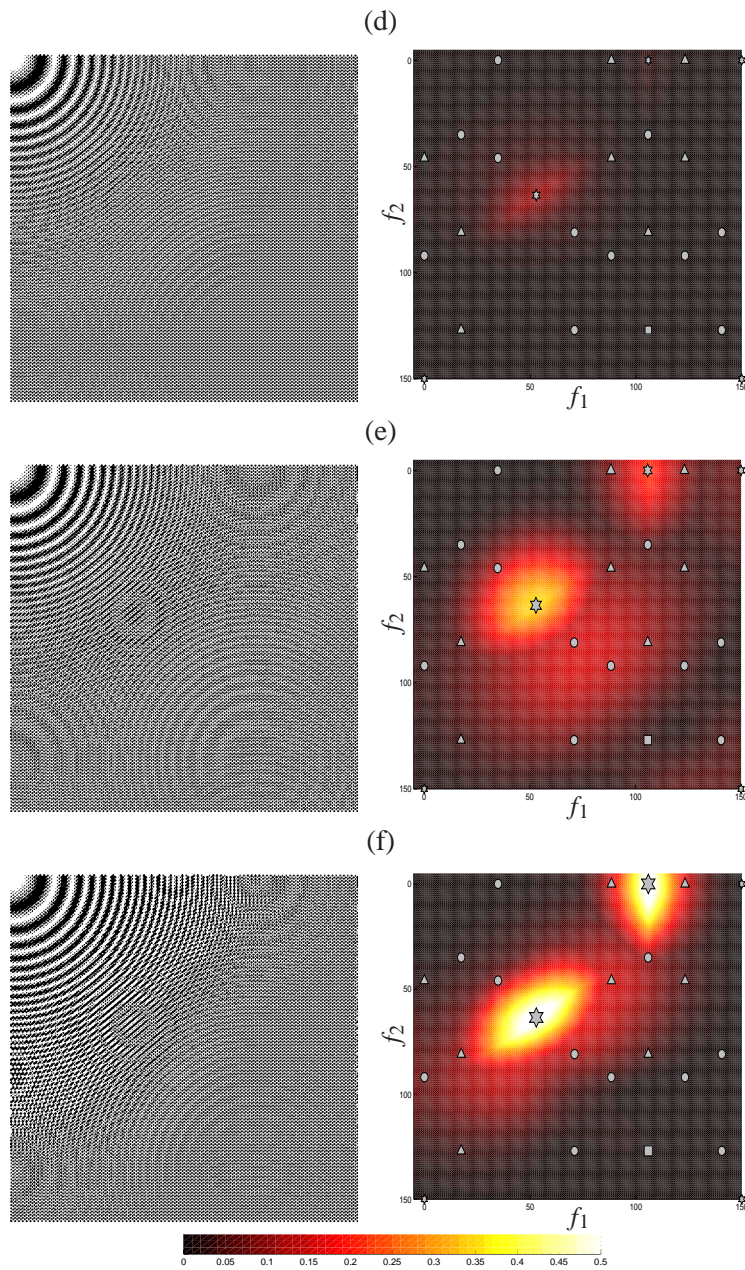
We willen nu, op basis van de bekomen resultaten van de modellering, een nieuw criterium afleiden dat aangeeft of een frequentiecomponent “veilig” is bij herbemonstering met een bepaalde reconstructiefunctie. Daartoe voeren we

een drempeloperatie uit op de functie $\nu_{\mathbf{R}}(\mathbf{f})$, waarvan figuur 3.7 het resultaat toont. Waarden groter dan deze drempel zijn zwart gekleurd, het overblijvende gebied buiten de reciproque doelrooster cel grijs. Het witte gebied bevat dan de “veilige” frequenties. De drempel (waarde 0.12) werd empirisch gekozen, om een zo goed mogelijke overeenkomst tussen wat we manueel zouden klasseren als “goed zichtbare moiré-patronen” (aan de hand van het de herbemonsterde testbeelden “zoneplate”) en het bekomen criterium. Tenslotte stellen we voor later gebruik dit criterium voor m.b.v. de indicatorfunctie $\Xi(\mathbf{f})$ die 1 is in de grijze en zwarte gebieden, d.w.z. waar er “gevaar” bestaat, en 0 elders. De waarden in de andere kwadranten bekomen we door spiegeling van het criterium rond de horizontale en verticale assen.

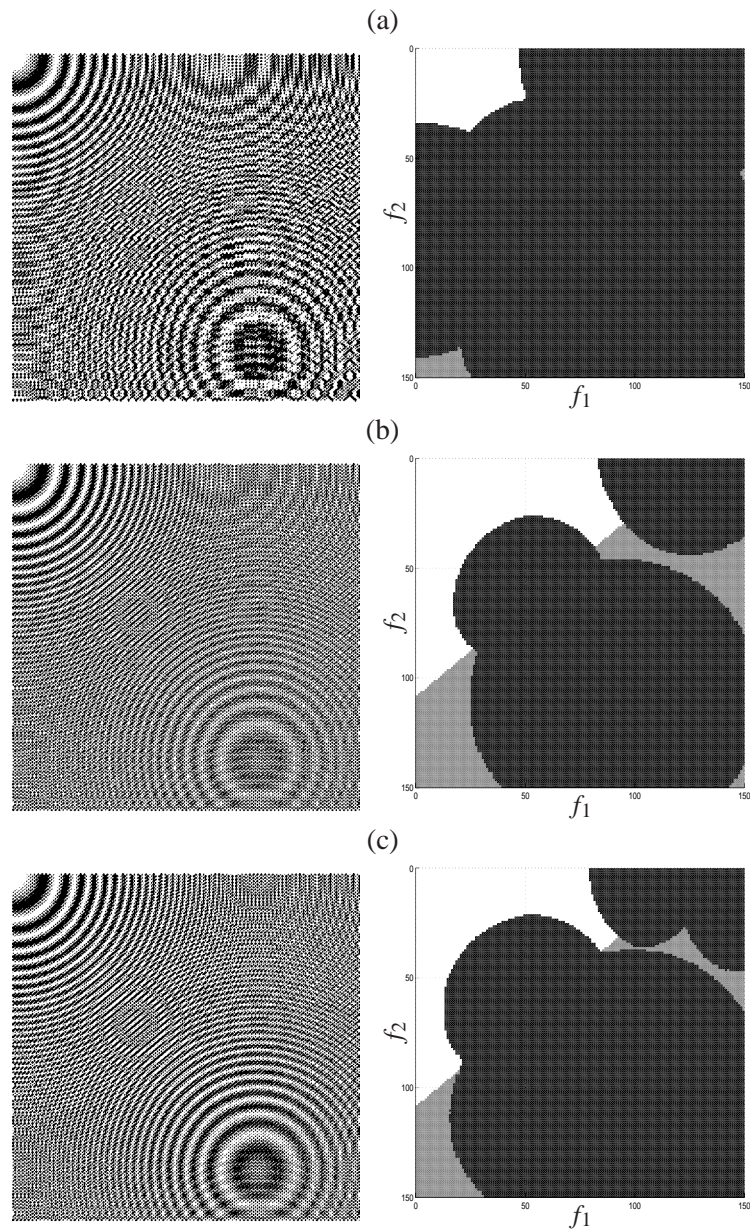
We beschikken nu over een nieuw criterium in het frequentiedomein. In de meeste beelden varieert de spectrale inhoud echter plaatsafhankelijk. Vandaar dat we nu eerst een gezamenlijke spatiale en spectrale analyse voorstellen.



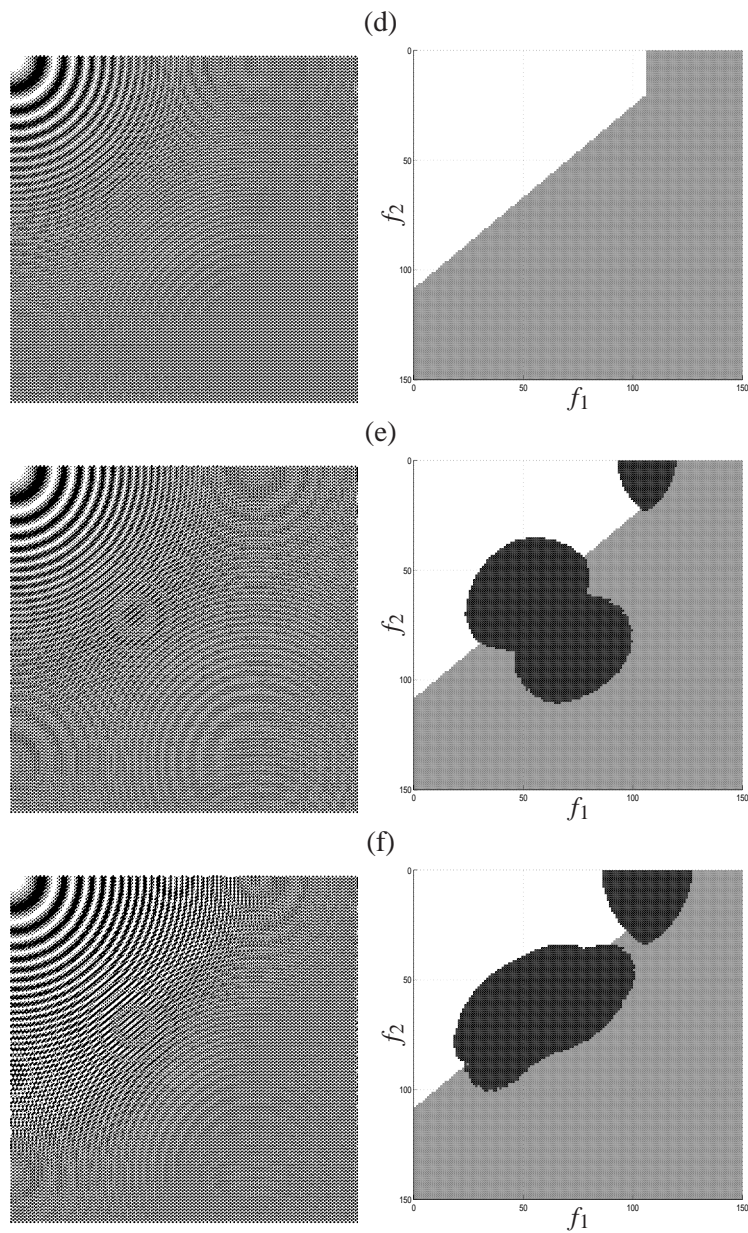
Figuur 3.6: Het criterium voor zichtbare moiré-patternen die ontstaan in het testbeeld “zoneplate” na herbemonstering. (a) Dichtste-buur-interpolatie. (b) Bilineaire interpolatie. (c) Kubische-B-spline-interpolatie.



Figuur 3.6: (vervolg) (d) Reconstructie met de prolate sferoïdale golf-functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.



Figuur 3.7: Het criterium voor zichtbare moiré-patternen na een drempeloperatie. (a) Dichtste-buur-interpolatie. (b) Bilineaire interpolatie. (c) Kubische-B-spline-interpolatie.



Figuur 3.7: (vervolg) (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golf functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.

3.3 Gezamenlijke spatiale en spectrale analyse

De fouriertransformatie, zoals we die reeds hebben voorgesteld in het inleidende hoofdstuk, laat toe om de frequentie-inhoud van een functie te bestuderen. Deze transformatie ontbindt een functie in oneindig uitgestrekte sinusoidale signalen. De fourierreeks van een signaal $g(x)$ met periode M wordt aldus gegeven door

$$g(x) = \sum_k c(k) \psi_k(x),$$

waarbij de basisfuncties $\psi_k(x)$ gegeven zijn door $\exp(j2\pi kx/M)$. De basis $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bevat de verschillende (complexe) harmonischen. De coëfficiënten $c(k)$ worden bekomen door het inwendig product met de duale functies $\{\gamma_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$c(k) = \langle g, \gamma_k \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x) \gamma_k^*(x) dx. \quad (3.10)$$

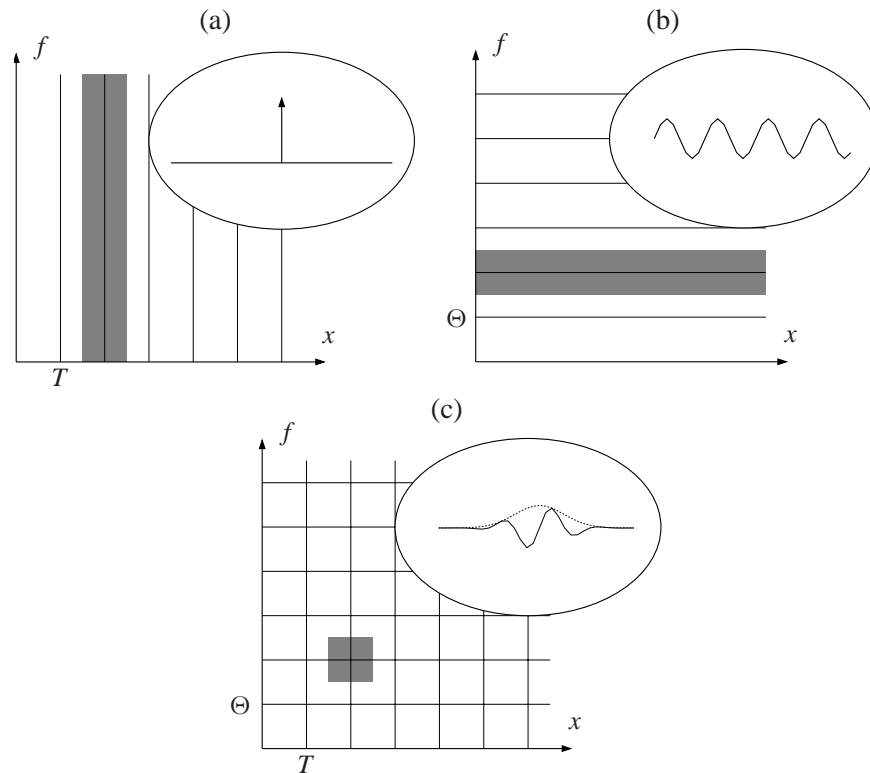
De duale functies zijn bij de fourierreeks identiek aan de basisfuncties: $\gamma_k(x) = \psi_k(x)$. Ze vormen een unieke basis die de intensiteit van de verschillende frequentiecomponenten aangeeft. We noemen de functies $\gamma_k(x)$ ook analysefuncties en de functies $\psi_k(x)$ synthesefuncties.

Figuur 3.8 toont in (a) op kwalitatieve wijze de basisfuncties die overeenstemmen met een spatiale analyse van een signaal bemonsterd met periode T . De ontbinding volgens deze basisfuncties levert de verschillende monsterwaarden op. Figuur 3.8 (b) toont op kwalitatieve wijze de basisfuncties die overeenstemmen met een spectrale analyse. De verschillende basisfuncties zijn oneindig uitgestrekte sinusoidale functies en corresponderen met frequentiecomponenten.

De gabortransformatie

In de praktijk heeft men veelal te maken met signalen waarvan de frequentie-inhoud wijzigt als functie van een spatiale (of temporale) coördinaat. De analyse van dit soort signalen vereist een gezamenlijke spatiale en spectrale analyse zoals figuur 3.8 (c) dat kwalitatief toont. Om dit te bereiken, stelde Gabor [47] reeds in 1946 een ontbinding voor, waarvan de coëfficiënten verbonden zijn met synthesefuncties die zowel spatiaal als spectraal gelokaliseerd zijn:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_m \sum_n c(m, n) \psi_{m,n}(x), \\ \psi_{m,n}(x) &= \psi(x - mT) \exp(j2\pi n \Theta x), \end{aligned} \quad (3.11)$$



Figuur 3.8: De analyse van een signaal kan kwalitatief worden voorgesteld door de spatiale en spectrale lokalisatie grafisch voor te stellen. (a) Spatiale analyse. (b) Spectrale analyse. (c) Gezamenlijke spatiale en spectrale analyse. Voor elk van deze mogelijkheden wordt een “typische” basisfunctie weergegeven.

waarbij T en Θ de spatiale en spectrale bemonsteringsperioden voorstellen. De functies $\psi_{m,n}(x)$ zijn verschoven en gemoduleerde versies van $\psi(x)$. De ontbinding in (3.11) is mogelijk voor een willekeurige $g(x)$ wanneer het product $T\Theta \leq 1$. Het geval $T\Theta = 1$ wordt kritische bemonstering genoemd, $T\Theta < 1$ overbemonstering. De idee achter de gabortransformatie is dat de coëfficiënten $c(m, n)$ een maat zijn voor de signaalactiviteit rond $[mT, n\Theta]$ in de gezamenlijke spatiale en spectrale ruimte. Omdat de gaussiaanse functie de beste gezamenlijke energieconcentratie heeft in zowel het spatiale als het spectrale domein, koos Gabor voor

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{0.25} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right). \quad (3.12)$$

De parameter α ruilt spatiale voor spectrale resolutie en vice versa. Een lagere waarde van α zal immers resulteren in een lagere spatiale resolutie (een

“bredere” functie $\psi(x)$), maar een betere frequentieresolutie (een “smaller” spectrum $\hat{\psi}(f)$) [14]. De functies $\psi_{m,n}(x)$ vormen echter geen orthogonale basis, tenzij voor een welbepaalde functie $\psi(x)$ die noodzakelijkerwijze slecht gelokaliseerd is, hetzij spatiaal, hetzij spectraal [68]. Een mogelijke aanpak, voorgesteld door Bastiaans [15], berekent de coëfficiënten $c(m, n)$ m.b.v. een hulpfunctie $\gamma(x)$ (als pseudo-analysefunctie) en het gebruikelijke inwendig product:

$$c(m, n) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \gamma_{m,n}^*(x) dx, \quad (3.13)$$

met

$$\gamma_{m,n}(x) = \gamma(x - mT) \exp(j2\pi n \Theta x). \quad (3.14)$$

Merk op dat formule (3.13) een bemonsterde versie is van de fouriertransformatie van de functie $g(x)\gamma(x)$. De compleetheid van (3.14) vereist dat de analysefunctie $\gamma(x)$, voor een gegeven functie $\psi(x)$ en de bemonsteringsintervallen T en Θ , voldoet aan de biorthogonaliteitsvoorwaarde die ook bekend staat als de Wexler-Raz identiteit [188]

$$\frac{T_0 \Theta_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \gamma^*(x - mT_0) \exp(-j2\pi n \Theta_0 x) dx = \delta_{m,n}^k, \quad (3.15)$$

met $T_0 = 1/\Theta$ en $\Theta_0 = 1/T$. Er is echter geen algemene oplossing voorhanden om de functie $\gamma(x)$ te bepalen [112].

De discrete gabortransformatie

Ondanks het ontbreken van een algemene oplossing in het continue geval, heeft men meer succes geboekt in het discrete geval. De discrete gabortransformatie van een rij $\bar{g}(k)$ wordt gegeven door

$$c(m, n) = \sum_k \bar{g}(k) \gamma^*(k - m\Delta M) \exp\left(\frac{-j2\pi nk}{\hat{M}}\right), \quad (3.16)$$

$$\bar{g}(k) = \sum_m \sum_{n=0}^{\hat{M}-1} c(m, n) \psi(k - m\Delta M) \exp\left(\frac{j2\pi nk}{\hat{M}}\right). \quad (3.17)$$

De constanten ΔM en \hat{M} duiden respectievelijk op de stapgrootte, waarmee het venster $\gamma(k)$ verschoven wordt, en het aantal frequentiecomponenten. Verder heeft de drager van het analyse- en synthesevenster $\gamma(k)$ en $\psi(k)$ een lengte L . De verhouding $a = \hat{M}/\Delta M$ geeft de mate van redundantie aan

in de voorstelling door de coëfficiënten $c(m, n)$. Wegens overwegingen van optimale energieconcentratie, gebruiken we opnieuw de gaussiaanse functie als synthesevenster:

$$\psi(k) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{0.25} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(k - L/2)^2\right). \quad (3.18)$$

Ook ditmaal vormt $\{\psi_{m,n}(k)\}$ geen basis, tenzij in het geval $\hat{M} = \Delta M$ (kritische bemonstering). In dat geval is het analysevenster $\gamma(k)$ uniek, maar niet gelokaliseerd [113] (noch in het spatiale domein, noch in het frequentiedomein). Naargelang de verhouding $\hat{M}/\Delta M$ stijgt, neemt de redundantie toe en zijn zowel de coëfficiënten $c(m, n)$ als het analysevenster $\gamma(k)$ niet langer uniek. Opdat de coëfficiënten $c(m, n)$ de signaaleigenschappen rond $[m\Delta M, n]$ zo goed mogelijk zouden weergeven, dient het analysevenster $\gamma(k)$ het synthesevenster $\psi(k)$ zo goed mogelijk te benaderen:

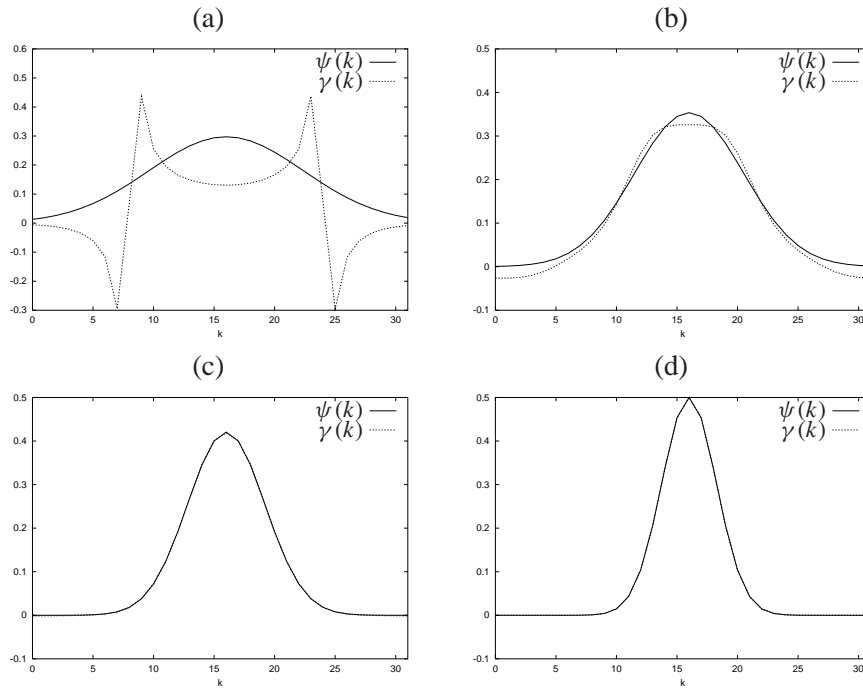
$$\min \left\| \frac{\gamma}{\|\gamma\|_{l_2}} - \psi \right\|_{l_2}^2. \quad (3.19)$$

Bovendien zijn beide vensters ook afhankelijk van de parameter α . De optimale waarde van α treedt op, wanneer de fout (3.19) minimaal is:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\Delta M \hat{M}}. \quad (3.20)$$

Voor meer details over de berekening en de keuze van het optimaal analysevenster, verwijzen we naar de literatuur [112–114]. Alhoewel de ontbinding voor $a > 1$ niet uniek is, noemt men de discrete gabortransformatie met het optimaal synthesevenster een “ontbinding op orthogonale wijze” (*Eng.* orthogonal-like gabor transformation).

Beschouwen we bij wijze van voorbeeld $L = 32$, $\hat{M} = 16$. De spatiale stapgrootte ΔM en dus de mate van redundantie a kan nog vrij gekozen worden. Figuur 3.9 toont het analyse- en (optimaal) synthesevenster $\gamma(k)$ en $\psi(k)$ als functie van a . Het is duidelijk dat in het geval van kritische bemonstering beide vensters sterk verschillen waardoor de coëfficiënten $c(m, n)$ minder goed een significante component rond $[m\Delta M, n]$ kunnen weerspiegelen. Dit is wel het geval vanaf $a = 2$ à 4. Voor toepassingen die gebruik maken van het gaborspectrogram, is deze interpretatie van $c(m, n)$ cruciaal [113]. Gezien de sterke gelijkheid tussen $\psi(k)$ en $\gamma(k)$ voor praktische waarden van a , stelt men daarom vaak $\gamma(k) = \psi(k)$.



Figuur 3.9: Het analyse- en synthesevenster $\psi(k)$ en $\gamma(k)$ voor $L = 32$, $\hat{M} = 16$ (optimale waarde van α). (a) $a = 1$, $\Delta M = 16$. (b) $a = 2$, $\Delta M = 8$. (c) $a = 4$, $\Delta M = 4$. (d) $a = 8$, $\Delta M = 2$.

Het gaborspectrogram

Bij de discrete fouriertransformatie kan men de energie per frequentiecomponent verkrijgen door de fouriercoëfficiënten te kwadrateren [110, hfdst. 13]. De verdeling van de energie over de verschillende frequentiebanden wordt een spectrogram genoemd. Ook de discrete gabortransformatie laat toe om een spectrogram, het gaborspectrogram, te berekenen. De gekwadrateerde coëfficiënten $|c(m, n)|^2$ kunnen worden beschouwd als een maat voor de energie van het signaal rond de spatiospectrale coördinaat $[m\Delta M, n]$.

3.4 Een niet-lineaire herbemonsteringstechniek

Op basis van het criterium voor de zichtbaarheid van moiré-patronen en het gaborspectrogram leiden we nu een nieuwe niet-lineaire herbemonsteringstechniek af. Vooreerst leggen we het verband tussen het criterium voor de zichtbaarheid van moiré-patronen, dat is opgesteld in het continue frequentiedomein, en de discrete coëfficiënten van het gaborspectrogram. Deze link laat vervolgens toe om voor elke gaborcoëfficiënt een corresponderende risicocoëfficiënt te berekenen. Deze risicocoëfficiënten plaatsen we ten slotte in een risicomatrix die wordt gebruikt om het risico op moiré-patronen voor een willekeurig beeld plaatsafhankelijk te bepalen. Aan de hand van experimentele en theoretische overwegingen bespreken we de invloed van de parameters van het gaborspectrogram, de keuze van de reconstructiefunctie, en de invloed van randen op deze risicoschatting.

3.4.1 De berekening van de risicomatrix

Het eerste wat we ons moeten afvragen, is: wat is het verband tussen de discrete gaborcoëfficiënten $c(m, n)$ en het (denkbeeldig) fourierspectrum in het continue domein? We stellen daartoe in formule (3.16) de spatiale coördinaat $m = 0$ en plaatsen de waarden $\bar{g}(k)\gamma^*(k)$ in een hulpfunctie in het continue domein

$$h(x) = \sum_k \delta(x - k) \bar{g}(k) \gamma^*(k). \quad (3.21)$$

De fouriergetransformeerde $\hat{h}(f)$ is dan

$$\hat{h}(f) = \hat{g} \otimes \hat{\gamma}(f), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2, \quad (3.22)$$

met $\hat{\gamma}(f) = \sum_k \gamma(k) \exp(-j2\pi fk/L)$. Merk op dat de bemonsterde versie $\hat{h}(n/\hat{M})$ overeenstemt met de gaborcoëfficiënten $c(0, n)$ uit formule (3.16). De monsterwaarden die we aldus bekomen van het spectrum $\hat{g}(f)$ zijn verstoord door de convolutie met $\hat{\gamma}(f)$. Aangezien dit spectrum niet bandbeperkt is, draagt het hele spectrum $\hat{g}(f)$ in meer of mindere mate bij tot een bepaalde coëfficiënt. De bijdragen van verder afgelegen frequentiecomponenten tot de waarde van een coëfficiënt worden frequentielekken (*Eng.* frequency leakage) genoemd. Merk op dat ook de gewone discrete fouriertransformatie frequentielekken vertoont, gekarakteriseerd door de impliciete analysefunctie $\gamma(k) = 1, 0 \leq k < L$.

Alle voorgaande definities en concepten zijn gemakkelijk uitbreidbaar naar tweedimensionale rechthoekige roosters m.b.v. het tensorproduct. In dat geval stellen we de gaborcoëfficiënten $c(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ op in een vierdimensionale ruimte

met twee spatiale en twee spectrale dimensies. Doordat we ons hier beperken tot rechthoekige roosters, zullen we verder ook werken met scheidbare vensters $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma(x_1)\gamma(x_2)$.

De relatie tussen het spectrum in het continue domein en de gaborcoëfficiënten laat toe om, op basis van de indicatorfunctie $\Xi(\mathbf{f})$ die we hebben opgesteld bij het criterium voor de zichtbaarheid van moiré-patronen (zie pagina 103), een maat af te leiden voor het “gevaar” dat een frequentiecomponent aanleiding kan geven tot moiré-patronen. We associëren het risico $\nu(\mathbf{n})$ met een gaborcoëfficiënt $c(\cdot, \mathbf{n})$ door het relatief aandeel van de energie van de vensterfunctie in het “gevaarlijk” gebied te berekenen:

$$\nu(\mathbf{n}) = \frac{\int_{\chi_{\hat{\mathbf{R}}}} \Xi(\mathbf{f}) \left| \hat{\gamma}(\mathbf{f} - \mathbf{n}/\hat{M}) \right|^2 d\mathbf{f}}{\int_{\chi_{\hat{\mathbf{R}}}} \left| \hat{\gamma}(\mathbf{f} - \mathbf{n}/\hat{M}) \right|^2 d\mathbf{f}}. \quad (3.23)$$

Aangezien de indicatorfunctie $\Xi(\mathbf{f})$ symmetrisch is ten opzichte van de horizontale en verticale coördinaatassen, kunnen we deze resultaten schikken in een risicomatrix:

$$\Upsilon = [\nu(\mathbf{n})], \quad \mathbf{n} \in \left\{ \mathbf{n} \mid 0 \leq n_1, n_2 \leq \hat{M}/2 \right\}. \quad (3.24)$$

Merk op dat deze matrix afhankelijk is van het risicogebied opgelegd door de indicatorfunctie $\Xi(\mathbf{f})$ en het gekozen venster $\gamma(\mathbf{k})$ (dat op zijn beurt afhankelijk is van \hat{M} en ΔM), maar niet van de beeldinhoud zelf. In de praktijk dienen we deze matrix dus maar één maal te berekenen.

3.4.2 Het gebruik van de risicomatrix

De risicomatrix laat ons toe om de energie van het gaborspectrogram te wegen en aldus de fractie “gevaarlijke” energie te bepalen. We hebben een $L \times L$ -blok dat over het beeld $g(\mathbf{k})$ schuift met een horizontale en verticale stapgrootte ΔM . Voor elk blok kunnen we het risico op een zichtbaar moiré-patroon als volgt berekenen:

1. We bepalen de gaborcoëfficiënten $c(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ waarbij \mathbf{m} overeenstemt met de positie van het blok.
2. Het gaborspectrogram wordt bepaald door $|c(\mathbf{m}, \mathbf{n})|^2$.
3. Het risico op moiré-patronen is de verhouding van de “gevaarlijke” energie tot de totale energie. De risicomatrix Υ geeft aan hoe onveilig deze

coëfficiënten zijn:

$$\eta(\mathbf{m}) = \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} |c(\mathbf{m}, \mathbf{n})|^2 v(n_1 \boxplus \hat{M}, n_2 \boxplus \hat{M})}{\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} |c(\mathbf{m}, \mathbf{n})|^2 + \epsilon}, \quad (3.25)$$

met $\mathcal{A} = \{\mathbf{n} \mid 0 \leq n_1, n_2 \leq \hat{M} - 1\}$ en ϵ een klein getal om een deling door nul te vermijden. De \boxplus -operator vouwt de risicomatrix opnieuw open naar de vier kwadranten:

$$n \boxplus \hat{M} = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq \hat{M}/2 \\ \hat{M} - n, & \hat{M}/2 < n \leq \hat{M} - 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

In de praktijk worden monsterwaarden van beelden gegeven in een positief interval. Daardoor is de nulfrequentiecomponent, die ook de gemiddelde waarde van de monsterwaarden binnen een venster voorstelt, typisch de numeriek grootste frequentiecomponent en “verstoort” aldus de verhouding van formule (3.25). Het is belangrijk om de nulfrequentiecomponent te verwijderen uit de waarden $g(\mathbf{k})$ die binnen het blok vallen, alvorens het venster $\gamma(\mathbf{k})$ toe te passen. Zoniet laat de nulfrequentiecomponent zijn invloed gelden op de naburige frequentiecomponenten door frequentielekken, volgens het principe van formule (3.22).

3.4.3 De invloed van de parameters van het gaborspectrogram

In een eerste reeks van experimenten wensen we de invloed van de parameters van het gaborspectrogram te bespreken. Deze zijn de blokgrrootte $L \times L$, de spatiale stapgrrootte ΔM en het aantal frequentiecomponenten $\hat{M} \times \hat{M}$. De spectrale stapgrrootte wordt dan gegeven door $\Delta \hat{M} = L/\hat{M}$ en de mate van redundantie door $a = \hat{M}/\Delta M$. Als criterium kiezen we het klassieke nyquistcriterium en definiëren aldus $\Xi(\mathbf{f})$ als $1 - \chi_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{f})$. Dit laat ons toe op een eenvoudige manier te controleren hoe goed het berekende risico overeenstemt met $\Xi(\mathbf{f})$, alsook de invloed van de parameters van het gaborspectrogram na te gaan.

Figuur 3.10 toont de risicobeelden van de “zoneplate” voor verschillende gaborparameters. De grijswaardenschaal correspondeert met het risico. Om de snelle implementaties van de discrete fouriertransformatie (FFT, Eng. Fast Fourier Transform) te gebruiken, kiezen we best voor L een macht van twee [44, 85]. Opdat de gaborcoëfficiënten een goede spatiale en spectrale lokaliteit zouden vertonen, opteren we voor een mate van redundantie $a \geq 2$. Het blijkt dat zowat alle resultaten het frequentiegebied opgelegd via het criterium,

zijnde het nyquistgebied, goed benaderen. We vergelijken de resultaten verder ook onderling, om een goede keuze van de parameters te kunnen maken.

- We merken duidelijk dat we spatiale resolutie inruilen voor spectrale. Het resultaat (a) heeft een hoge spatiale resolutie ($\Delta M = 2$), maar de overgang rond de grens van het opgelegde criterium spreidt zich breder uit dan in (c) waar $\Delta M = 8$. Het vergroten van de drager zonder het aantal frequentiekanalen mee te verhogen, zoals in (d), heeft weinig zin. De resultaten in (e) en (f) zijn nog beter, maar vereisen een grote drager. Bovendien wordt de spatiale resolutie in (f) vrij klein.
- Een ander belangrijk aspect in de evaluatie is de algoritmische complexiteit. Veronderstel dat het originele beeld $D_1 \times D_1$ monsterwaarden bevat, dan dienen er $D_1^2/\Delta M^2$ tweedimensionale FFTs te worden berekend. Elk van deze FFTs heeft een complexiteit van $\mathcal{O}(2L^2 \log_2(L))$ [44]. Als totale complexiteit bekomen we aldus $\mathcal{O}(2D_1^2 L^2 \log_2(L)/\Delta M^2)$. In feite mogen we slechts resultaten met (ongeveer) dezelfde complexiteit vergelijken. Indien we b.v. de drager L verdubbelen, alsook de stapgrootte ΔM , bekomen we quasi dezelfde complexiteit, op een factor

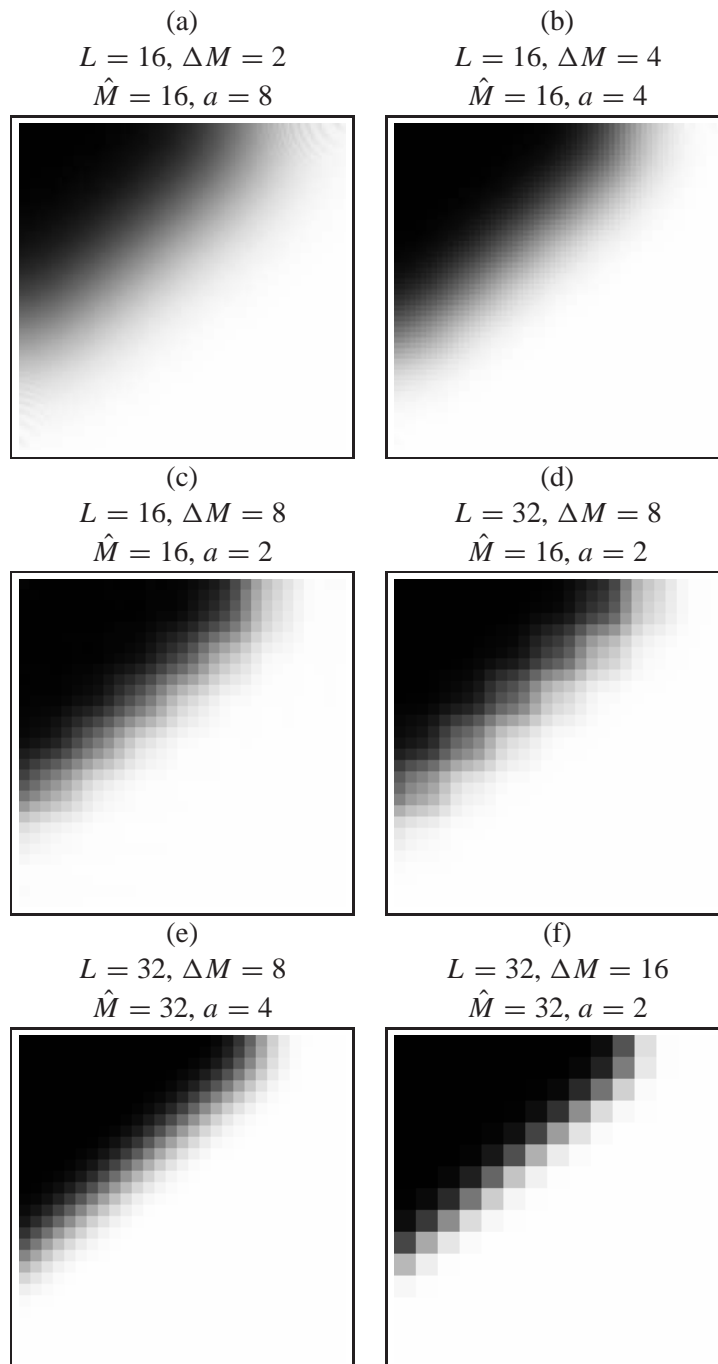
$$\frac{1 + \log_2(L)}{\log_2(L)}$$

na. Dit betekent dat we (b) dienen te vergelijken met (e), en (c) met (f).

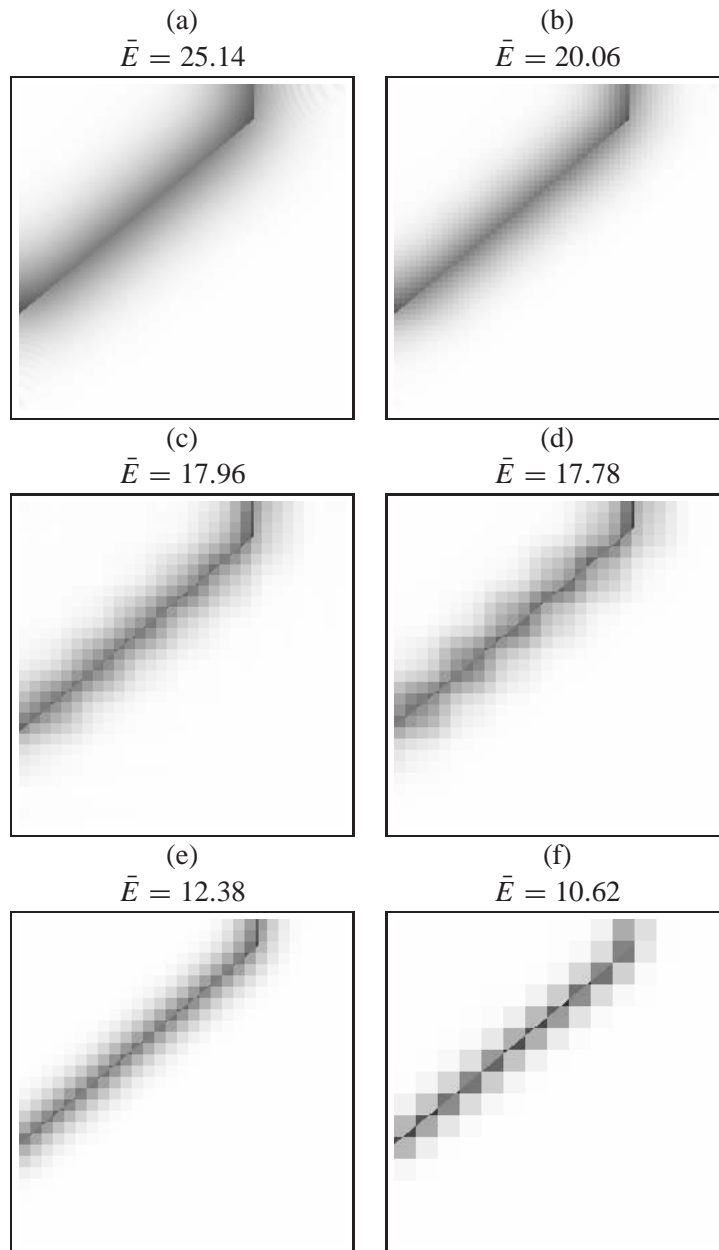
- In figuur 3.11 tonen we het verschilbeeld tussen de risicobeelden en de indicatorfunctie van het nyquistgebied. We geven ook de gemiddelde absolute fout (\bar{E}) weer tussen beide beelden. We merken enerzijds het inruilen van spatiale en spectrale resolutie¹ en anderzijds het effect van een grotere drager.

Een grote drager ($L = 32$) geeft duidelijk goede resultaten, maar een goede spatiale resolutie vereist toch $\Delta M \leq 8$. Indien deze complexiteit te groot is, verkiezen we eerder een kleinere drager ($L = 16$) met $\Delta M = 8$ dan een te groot spatiaal resolutieverlies.

¹Hoewel de gaborcoëfficiënten beschikken over een slechte lokaliteit voor $a < 2$, vermelden we volledigheidshalve dat de fout \bar{E} opnieuw stijgt voor dergelijke a .



Figuur 3.10: De risicobeelden van het testbeeld “zoneplate” voor verschillende parameters.

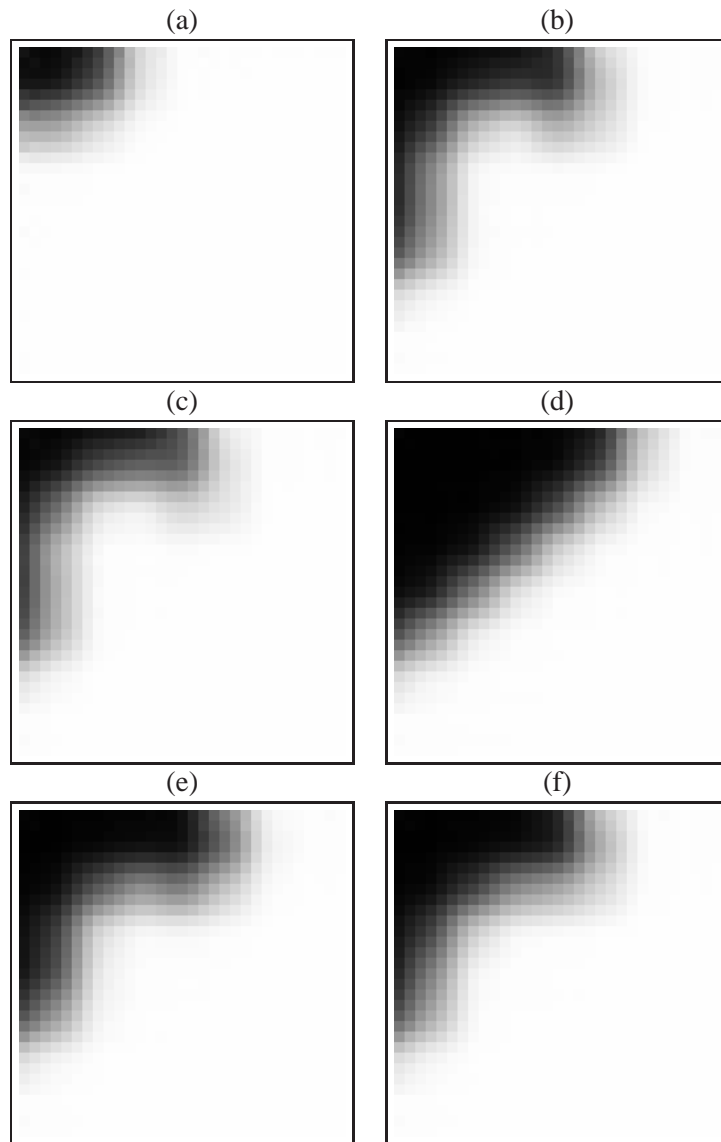


Figuur 3.11: Het verschil tussen de risicobeelden uit figuur 3.10 en de indicatorfunctie van het nyquistgebied.

3.4.4 De invloed van de verschillende criteria

In een tweede reeks experimenten kiezen we vaste parameters ($L = 16$, $\Delta M = 8$, $\hat{M} = 16$), maar gebruiken we de verschillende criteria $\Xi(\mathbf{f})$ die de zichtbaarheid van moiré-patronen bepalen. Figuur 3.12 toont de risicobeelden van het testbeeld “zoneplate” voor de criteria berekend op basis van de verschillende reconstructiefuncties.

Het criterium voor interpolatie met de eerste-ordespline is duidelijk zeer streng en bestempelt veel frequentiecomponenten (terecht) als gevaarlijk. De tweede- en derde-ordesplines zorgen vooral dat horizontale en verticale frequentiecomponenten minder riskant zijn. Het risicobeeld van de prolate sferoïdale golffunctie legt naast het nyquistgebied van het doelrooster geen extra vereisten op. De kleinste-kwadratensplines doen het, omdat ze op een goede manier rekening houden met het doelrooster, duidelijk beter dan de klassieke interpolatiefuncties en veroorzaken voornamelijk een bijkomend risico (ten opzichte van het nyquistgebied) voor zwevingsfrequenties in de diagonale richting.



Figuur 3.12: De risicobeelden van het testbeeld “zoneplate” voor de verschillende criteria. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline. (b) Interpolatie met de tweede-ordespline. (c) Interpolatie met de vierde-ordespline. (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golffunctie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenspline met de tweede-ordespline.

3.4.5 De invloed van randen

We kunnen voorlopig besluiten dat de risicomatrices toelaten om de coëfficiënten die we met het gabor spectrogram bekomen, te wegen. Het is evident dat een beeld met een sterke hoge-frequentiecomponent een hoog risico zal inhouden. In gebieden met hoge risico's zal later de gepaste vervaging tijdens de herbemonstering worden toegepast. Het is echter niet de bedoeling dat ook randen in een beeld leiden tot een hoog risico en aldus hun scherpte verliezen. Daarom onderzoeken we wat de invloed van randen op de risicoschatting is.

Het is zeer nuttig om deze vraag te beantwoorden met een analytisch model. Beschouw de eendimensionale functie $\mu_{d,L/2}(x)$ (zie formule (1.36)) met $d > 0$ en met drager $[-L/2, L/2]$ als model voor een "perfecte" rand. We dienen de term $(L - 2d)/(2L)$ van deze functie af te trekken om de nul-frequentiecomponent te verwijderen. Figuur 3.13 illustreert dit model. Aldus bekomen we, met het venster $\gamma(x)$, de volgende functie:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\mu_{d,L/2}(x) - \frac{L - 2d}{2L} \right) \gamma^*(x) \\ &= \left(\mu_{d,L/2}(x) - \frac{L - 2d}{2L} \right) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{0.25} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right), \end{aligned}$$

waarvan de fouriergetransformeerde kan worden berekend als

$$\begin{aligned} \hat{g}(f) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{0.25} \exp\left(-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha}\right) \left[\left(1 + \frac{2d}{L}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha L + j4\pi f}{2\sqrt{2\alpha}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{2d}{L}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha L - j4\pi f}{2\sqrt{2\alpha}}\right) - 2 \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha d + j2\pi f}{\sqrt{2\alpha}}\right) \right], \end{aligned}$$

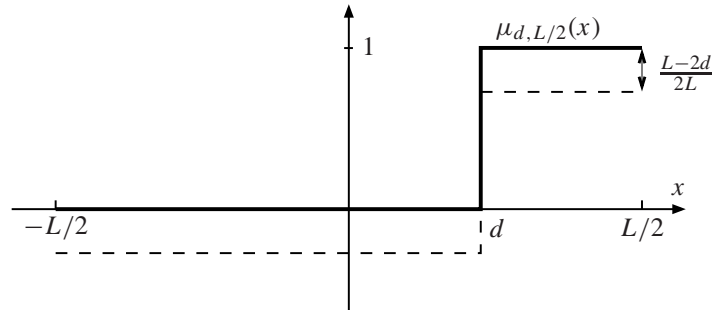
waarbij we gebruikmaken van de foutfunctie (*Eng.* error function):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\tau^2) d\tau. \quad (3.28)$$

De fractie van de energie $|\hat{g}(f)|^2$ die zich boven een bepaalde frequentie bevindt, geeft ons dan het risico voor frequentiecomponenten in het gebied $[f, 1/2]$:

$$\eta_{\text{rand}}(f) = \frac{\int_f^{1/2} |\hat{g}(\tau)|^2 d\tau}{\int_0^{1/2} |\hat{g}(\tau)|^2 d\tau}. \quad (3.29)$$

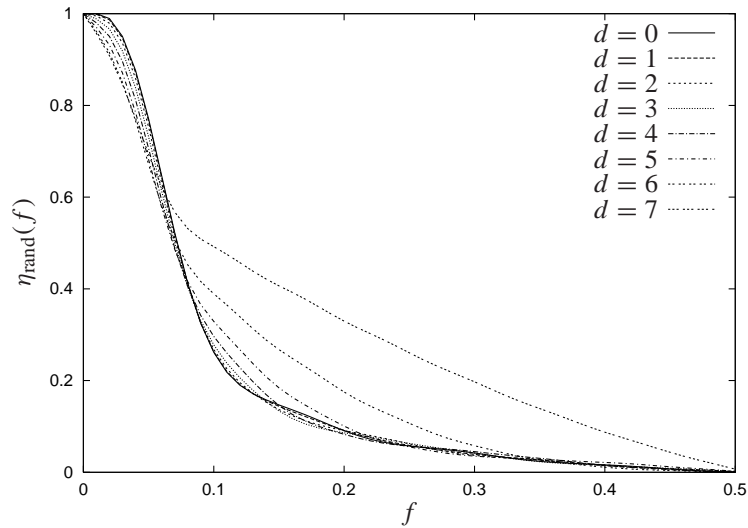
Figuur 3.14 toont het numerieke resultaat van $\eta_{\text{rand}}(f)$ als functie van d . Naarmate de frequentie f stijgt, daalt het risico. Voor de criteria die we voorheen



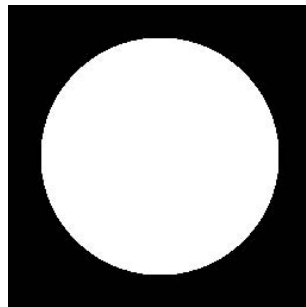
Figuur 3.13: De functie $\mu_{d,L/2}(x)$ met de drager $[-L/2, L/2]$ als model voor een rand. De verschoven versie (in stippellijn) heeft geen nulfrequentiecomponent.

hebben bekomen, geldt steeds $f_{\min} \geq 0.1$. Dit betekent dat er nog steeds een maximaal risico kan optreden van ongeveer 0.5 als risicowaarde van een rand. Merk op dat zo'n hoog risico zich voordoet voor $d = 6$ à 7 , m.a.w. wanneer de rand zich helemaal aan het uiteinde van het venster bevindt en aanleiding geeft tot een “impuls”. Wanneer we onderstellen dat $\Delta M = L/2$, dan geldt voor het venster dat zich het dichtst bij de rand bevindt steeds $d < L/4$. De hoge risicowaarde treedt dus op in het naburige venster. Merk tenslotte op dat dergelijke “perfecte” randen enkel optreden in synthetische beelden en niet in natuurlijke beelden.

We wensen nu de voorgaande modellering te toetsen aan de hand van enkele experimentele resultaten. Het testbeeld in figuur 3.15 toont een schijf als model voor een (lokaal) perfecte rand in een bepaalde richting. De risicobeelden in figuur 3.16 tonen duidelijk (meestal lage) risicowaarden langs de rand. De uitzonderlijke hogere waarden treden op, zoals voorspeld door het theoretisch model, wanneer de rand zich aan de rand van het venster bevindt. Merk op dat de risicobeelden niet isotroop zijn, hetgeen logisch is, aangezien de criteria niet even streng zijn in elke richting. Op basis van deze criteria (zie figuur 3.7) hebben we de laagste gevaarlijke frequentie f_{\min} bepaald en de maximale risicowaarde (voor $d = 7$) berekend volgens het theoretisch model. Uit tabel 3.3 blijkt dat deze waarden vrij goed overeenstemmen.



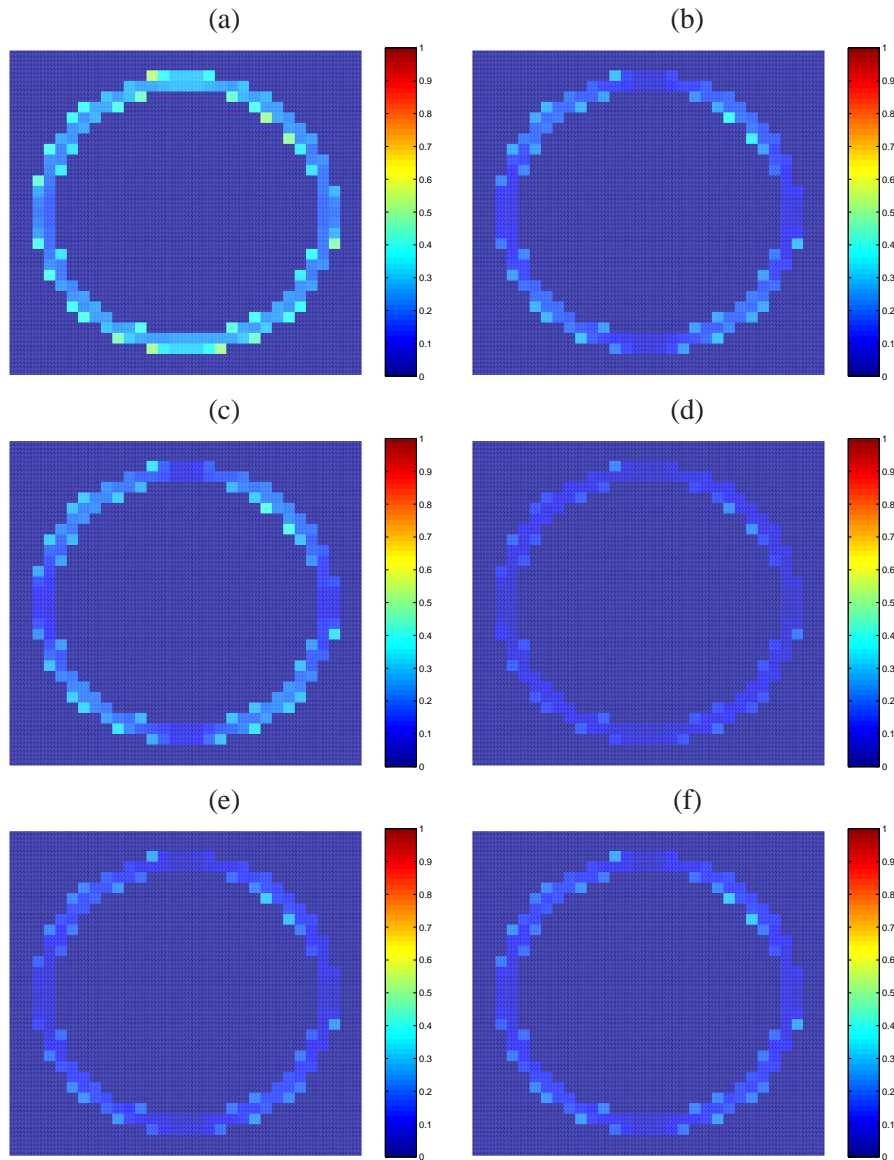
Figuur 3.14: Het risico $\eta_{\text{rand}}(f)$ van een scherpe rand $\mu_{d,L/2}(x)$ ($L = 16$, $\Delta M = 8$) met als gevaarlijke frequentieband $[f, 1/2]$.



Figuur 3.15: Testbeeld om de risicoschatting voor ideaal scherpe randen te berekenen.

Tabel 3.3: De maximale risicowaarden voor een perfecte rand. Experimenteel bepalen we de maximale η uit figuur 3.16 en volgens het theoretisch model bekomen we η_{rand} .

reconstructiefunctie	max η	η_{rand}
eerste-ordespline	0.53	0.48
tweede-ordespline	0.37	0.35
vierde-ordespline	0.41	0.39
prolate sferoïdale golffunctie	0.22	0.19
kleinste-kwadratenspline van eerste orde	0.31	0.30
kleinste-kwadratenspline van tweede orde	0.31	0.31



Figuur 3.16: De risicobeelden van het testbeeld uit figuur 3.15 voor de criteria corresponderend met de verschillende herbemonsteringstechnieken. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline. (b) Interpolatie met de tweede-ordespline. (c) Interpolatie met de tweede-ordespline. (d) Reconstructie met de prolate sferoïdale golf-functie. (e) Kleinste-kwadratebenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratebenadering met de tweede-ordespline.

3.4.6 Een nieuwe niet-lineaire herbemonsteringstechniek

We beschikken nu over de nodige componenten om een niet-lineaire herbemonsteringstechniek te ontwikkelen. We beschouwen daartoe twee lineaire herbemonsteringstechnieken met reconstructiefuncties $\phi_1(\mathbf{x})$ en $\phi_2(\mathbf{x})$, waarvan de eerste op goede wijze randen bewaart, maar moiré-patronen kan introduceren, en de tweede goed moiré-patronen onderdrukt, maar aanleiding geeft tot vervaging. Het doel is beide te combineren zodanig dat we een nieuwe reconstructiefunctie

$$\phi(\mathbf{x}; \alpha) = (1 - \alpha) \phi_1(\mathbf{x}) + \alpha \phi_2(\mathbf{x}) \quad (3.30)$$

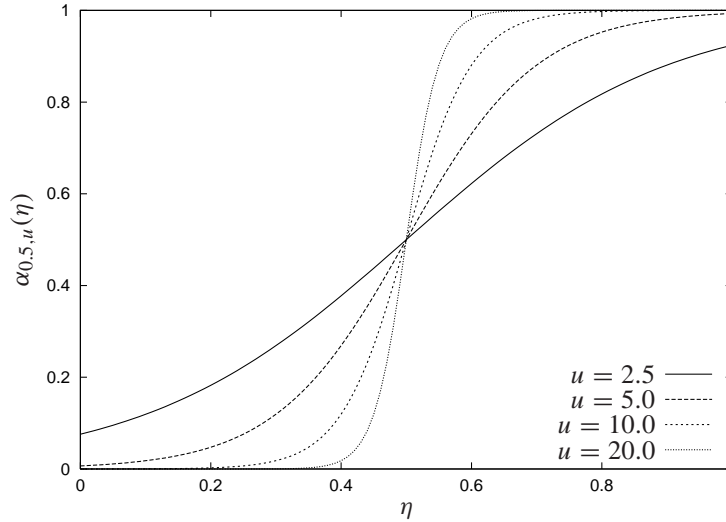
bekomen, waarbij de wegingsfactor α plaatsafhankelijk is en wijzigt als functie van het risico op zichtbare moiré-patronen bij gebruik van $\phi_1(\mathbf{x})$.

Uit de randbewarende herbemonsteringstechniek met reconstructiefunctie $\phi_1(\mathbf{x})$ leiden we het criterium af voor de zichtbaarheid van moiré-patronen. Dit criterium laat toe om de risicomatrix op te stellen. We kunnen vervolgens risicobeelden berekenen m.b.v. de gewogen gaborcoëfficiënten. Dit risico wensen we te gebruiken om beide (lineaire) herbemonsteringstechnieken te combineren. Het is evident dat we in gebieden met een hoog risico de voorkeur geven aan de moiré-onderdrukkende techniek en vice versa. Een binaire beslissing op basis van een eenvoudige drempel leidt echter tot een sterke overgang tussen beide technieken. Daarom kiezen we voor een sigmavormige zachte drempel:

$$\alpha_{t,u}(\eta) = \frac{1}{1 + \exp(u(-\eta/t + 1))}. \quad (3.31)$$

Figuur 3.17 toont deze zachte drempel. De parameter t bepaalt de ordinaat van het buigpunt ($\alpha_{t,u}(t) = 0.5$) en de parameter u laat toe om de sterkte van de drempel te variëren: hoe groter u , hoe scherper de drempelfunctie. Een logische keuze voor t is $\eta_{\text{rand}}(f_{\text{min}})$, de maximale risicowaarde bij een ideale rand. In dat geval zal de risicoschatting voor randen steeds beperkt blijven.

We illustreren het aanpassen van de risicobeelden met de drempelfunctie $\alpha_{t,u}(\eta)$ aan de hand van het testbeeld “hemd”. Figuur 3.18 toont de originele risicobeelden van het testbeeld “hemd” voor de verschillende reconstructiefuncties (en bijbehorende criteria en risicomatrices). Het risicobeeld voor reconstructie met de eerste-ordespline vertoont nogal wat hoge risicowaarden buiten het hemd. Dit is een gevolg van het strenge criterium, waardoor veel energie als potentieel gevaarlijk wordt geklasseerd. De overige risicobeelden vertonen allen hoge risicowaarden in het hemd en in veel mindere mate daarbuiten. De absolute grootte van deze risicowaarden in het hemd is echter verschillend. De aanpassing van deze risicobeelden met de drempelfunctie $\alpha_{t,u}(\eta)$ (parameters



Figuur 3.17: De drempelfunctie $\alpha_{0.5,u}(\eta)$.

$t = \eta_{\text{rand}}(f_{\text{min}})$ en $u = 5.0$) levert in figuur 3.19 bijna identieke risicobeelden op.

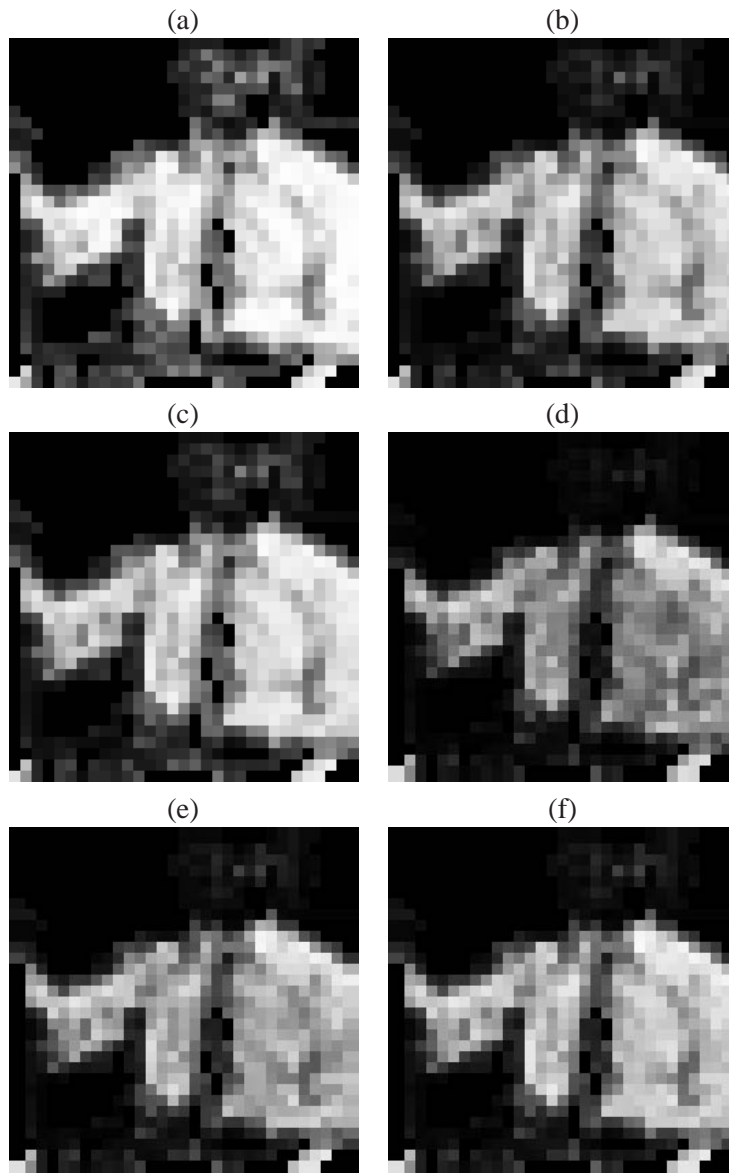
De uiteindelijke adaptieve herbemonsteringstechniek kan dan als volgt worden neergeschreven:

$$s(\mathbf{x}) = (1 - \alpha(\mathbf{x})) \phi_1 \otimes g_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x}) \phi_2 \otimes g_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}), \quad (3.32)$$

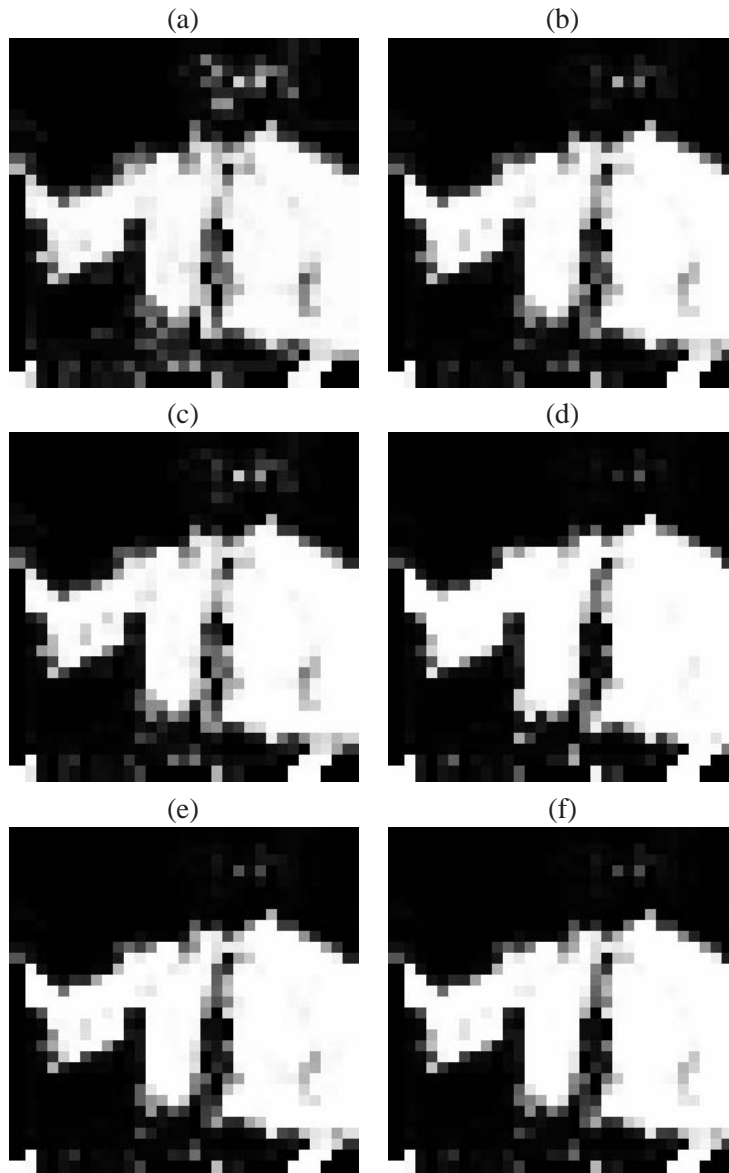
waarbij het aangepaste risico $\alpha(\mathbf{x})$ plaatsafhankelijk is. Voor een constante waarde van $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha$ geeft formule (3.32) aanleiding tot een reconstructiefunctie met als spectrum

$$\hat{\phi}(\mathbf{f}; \alpha) = (1 - \alpha)\hat{\phi}_1(\mathbf{f}) + \alpha\hat{\phi}_2(\mathbf{f}). \quad (3.33)$$

Dit laat toe om de lokale frequentiecarakteristiek van de niet-lineaire techniek te bestuderen als een gewogen gemiddelde van de lineaire technieken.



Figuur 3.18: De originele risicobeelden van het testbeeld “hemd”. (a) Interpolatie met de eerste-ordespline. (b) Interpolatie met de tweede-ordespline. (c) Interpolatie met de vierde-ordespline. (d) Reconstructie met de prolate sferoidale golf-functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.



Figuur 3.19: De aangepaste risicobeelden van het testbeeld “hemd” (parameters $t = \eta_{\text{rand}}(f_{\text{min}})$ en $u = 5.0$). (a) Interpolatie met de eerste-ordespline. (b) Interpolatie met de tweede-ordespline. (c) Interpolatie met de vierde-ordespline. (d) Reconstructie met prolate sferoidale golf functie. (e) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (f) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline.

Algoritmische complexiteit

Het is interessant om de extra algoritmische complexiteit van de niet-lineaire herbemonsteringstechniek te vergelijken met die van de lineaire technieken. We onderstellen D_1^2 en D_2^2 monsterwaarden op het bron- en doelrooster. Voor een niet-scheidbare reconstructiefunctie met een drager van grootte D^2 betekent dit een complexiteit $\mathcal{O}(D^2 D_2^2)$. Zoals reeds aangehaald, is de complexiteit van het gaborspectrogram met venstergrootte $L \times L$ en spatiale stapgrootte ΔM gelijk aan $\mathcal{O}(2D_1^2 L^2 \log_2(L)/\Delta M^2)$. Kiezen we de parameters $L = 16$, $\Delta M = 8$ en $D = 5$, dan bekommen we $\mathcal{O}(50D_2^2)$ als complexiteit voor de (twee) lineaire herbemonsteringstechnieken en $\mathcal{O}(32D_1^2)$ voor de risicoanalyse. Deze complexiteiten zijn dus quasi gelijk (voor een grover doelrooster geldt immers $D_2 < D_1$), hetgeen betekent dat de niet-lineaire techniek ongeveer vier keer de complexiteit heeft van een lineaire herbemonsteringstechniek.

3.5 Resultaten

We stellen nu de resultaten voor die we bekomen met de niet-lineaire herbemonsteringstechniek. We beschouwen opnieuw de gravurediepdruktoepassing, voornamelijk omdat dit ons toelaat de resultaten met die van het vorige hoofdstuk te vergelijken. De bekomen resultaten zullen verder weer zowel subjectief als aan de hand van de objectieve kwaliteitsmaat beoordeeld worden.

We geven nog mee dat we hier slechts een klein deel van de ruimte van alle mogelijke vrijheidsgraden die de niet-lineaire techniek ons biedt, kunnen exploreren. Eerst en vooral dienen we de keuze van de reconstructiefuncties vast te leggen. Op basis van de resultaten op het einde van het vorige hoofdstuk, kiezen we de vierde-ordespline als randbewarende reconstructiefunctie en de prolate sferoïdale golffunctie als moiré-onderdrukkende reconstructiefunctie. Het gaborspectrogram berekenen we voor een 16×16 venster dat over het origineel beeld glijdt met een stapgrootte $\Delta M = 8$. De drempelfunctie $\alpha_{t,u}(\eta)$ stellen we in volgens de maximale risicowaarde voor een perfecte rand bij de vierde-ordespline en kunnen we dus berekenen als $t = \eta_{\text{rand}}(f_{\text{min}})$. De parameter u van de drempelfunctie blijft over als vrije parameter.

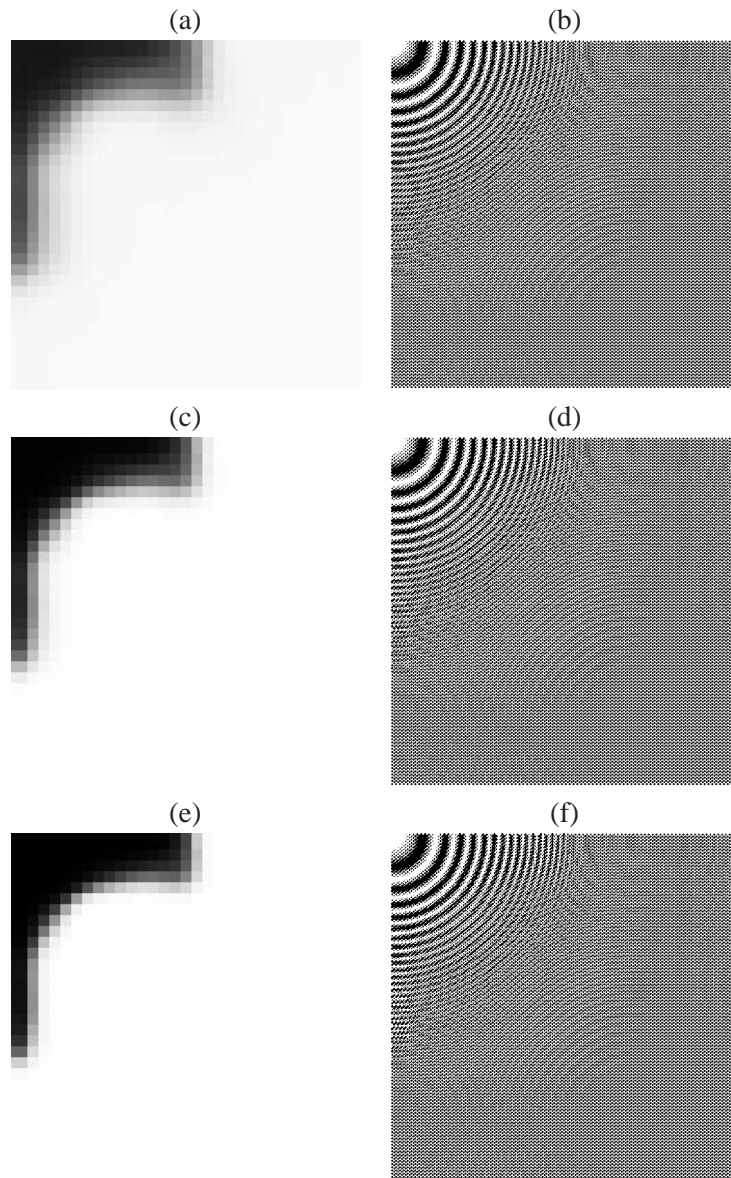
In figuur 3.20 tonen we de aangepaste risicobeelden en de bijhorende niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “zoneplate” voor verschillende waarden van de parameter u . Het is duidelijk dat de waarde $u = 7.5$ zorgt voor een scherpe overgang tussen beide lineaire herbemonsteringstechnieken. De overgang tussen beide technieken is te opvallend en komt niet natuurlijk over. Een waarde $u = 2.5$ à 5.0 geeft een betere indruk. We nodigen de lezer uit om deze resultaten te vergelijken met de resultaten bekomen door lineaire herbemonstering uit het vorige hoofdstuk.

De resultaten voor de natuurlijke testbeelden “hemd” en “barbara” in figuren 3.21 en 3.22 bevestigen de bovenstaande vaststelling over de parameter u . Het niet-lineair herbemonsterde resultaat geeft een veel scherpere indruk dan het resultaat met de prolate sferoïdale golffunctie, en onderdrukt bovendien wel veel beter moiré patronen. De aangepaste risicobeelden van het testbeeld “tekst” geven nog vrij hoge risicowaarden. Het resultaat ligt dan ook, wat scherpte betreft tussen dat bij gebruik van de prolate sferoïdale golffunctie en de vierde-ordespline. Merk op dat tekstuele informatie in de meeste beelden niet zo “ideaal” is als in dit synthetisch testbeeld. Ter illustratie tonen we in figuur 3.24 een additioneel testbeeld “horloge”, waar de tekstuele informatie ditmaal niet als risicovol wordt bestempeld en dus nog zeer scherp blijft in het eindresultaat.

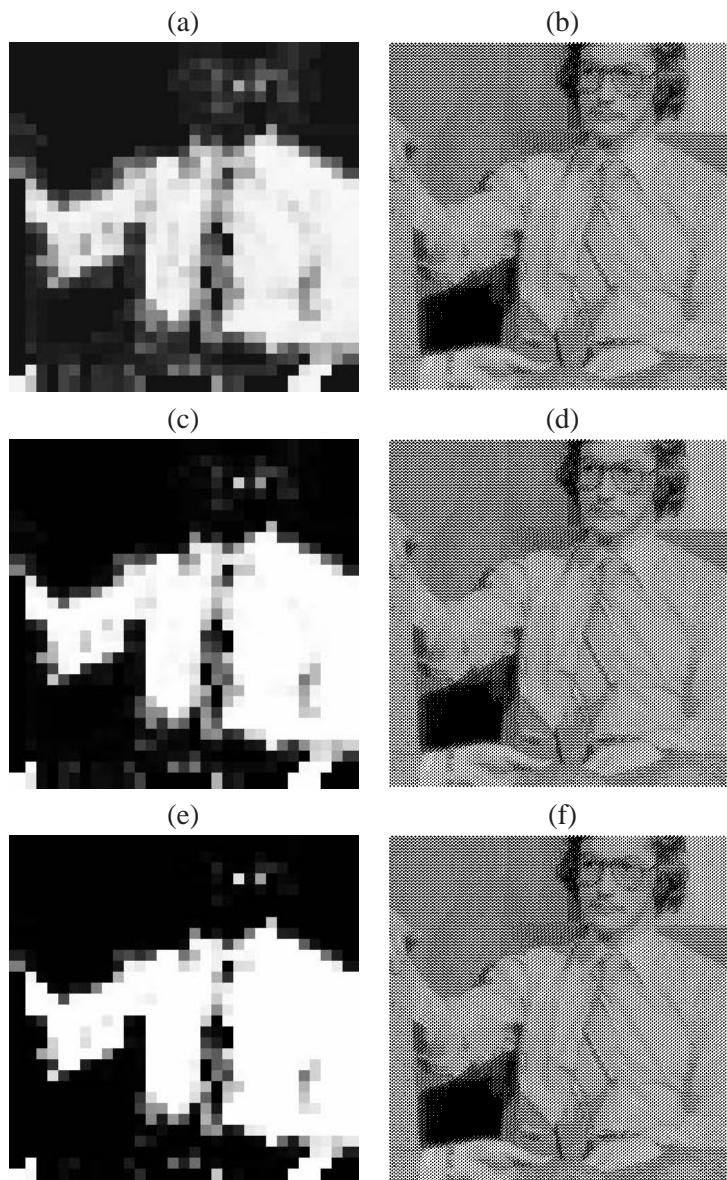
Voor elk van de natuurlijke testbeelden hebben we de objectieve kwali-

teitsmaat berekend onder de vorm van ξ_1 en ξ_2 . Tabel 3.4 geeft de waarden van ξ_1 en ξ_2 voor de verschillende testbeelden en herbemonsteringstechnieken. Ter vergelijking hebben we ook de resultaten van de lineaire technieken opgenomen. De niet-lineaire techniek zoekt een optimaal evenwicht tussen reconstructie met de vierde-ordespline en de prolata sferoidale golf functie. Het is opvallend dat de foutmaat ξ_1 voor de niet-lineaire techniek vaak beter is dan bij elk van beide lineaire technieken, omdat niet enkel de fout veroorzaakt door moiré patronen meetelt. Qua scherpte bekomen we echter niet dezelfde hoge waarde van ξ_2 als bij de vierde-ordespline. De parameter u kan best gekozen worden rond $u = 5$, aangezien er geen verbetering optreedt wanneer we u veel kleiner kiezen en de overgang tussen beide lineaire technieken te scherp wordt wanneer we u groter kiezen.

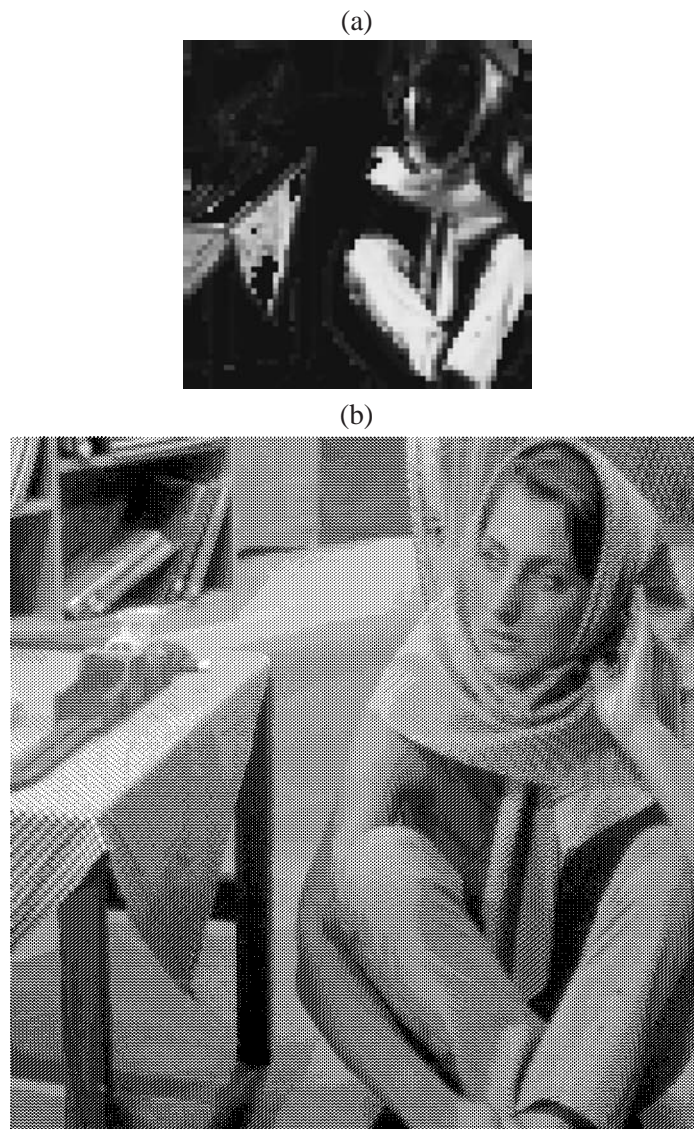
De figuren 3.25, 3.26 en 3.27 vatten de resultaten van de verschillende herbemonsteringstechnieken per testbeeld samen. We merken op dat de klassieke lineaire herbemonsteringstechnieken zich wat ξ_1 betreft afscheiden, als het aandeel van moiré patronen toeneemt in het beeld. De overige technieken onderscheiden zich vooral door een verschillende waarde voor ξ_2 . Volgens deze kwaliteitsmaat levert herbemonstering met de kleinste-kwadratenspline van tweede orde het beste resultaat op: een lage waarde voor ξ_1 en de hoogste waarde voor ξ_2 . Desalniettemin zijn de beelden die we bekomen met deze techniek toch niet geheel vrij van moiré patronen (ondermeer door de beperkingen van de reproductietechniek). De maat ξ_1 is te grof om hier duidelijk discriminerend te zijn. Naargelang de toepassing en de gestelde kwaliteitseisen kan het resultaat van herbemonstering m.b.v. een kleinste-kwadratenspline aanvaardbaar zijn. Zoniet staat de niet-lineaire herbemonsteringstechniek garant voor zowel een betere onderdrukking van moiré patronen als een goede scherpte in de rest van het beeld.



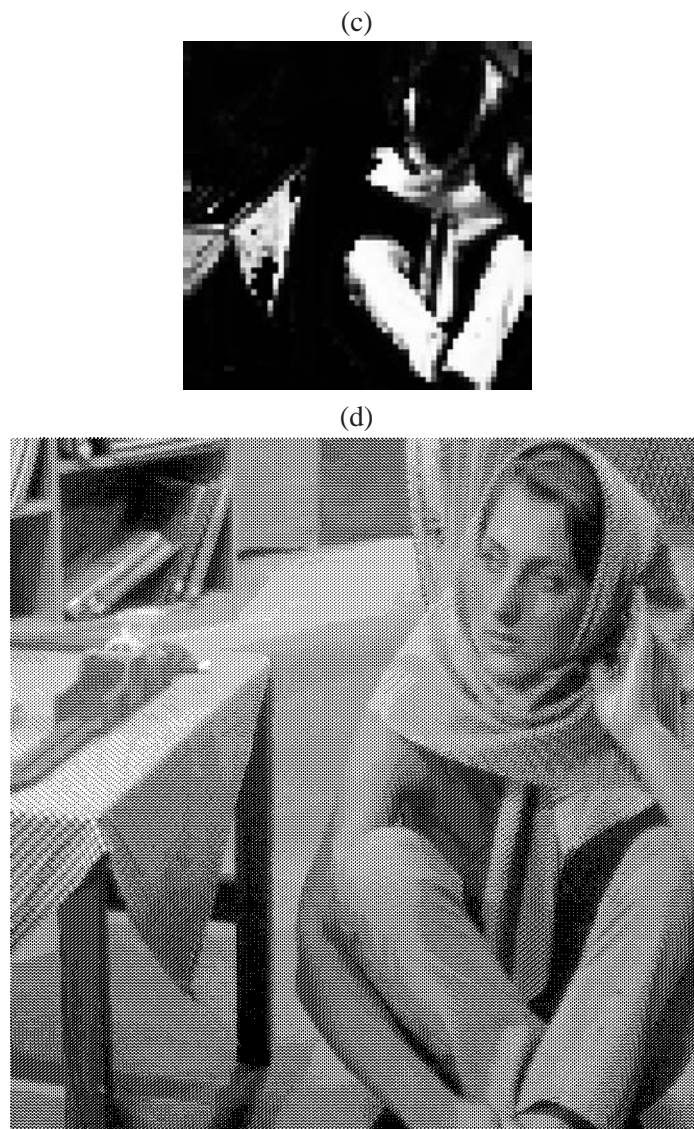
Figuur 3.20: De aangepaste risicobeelden en de niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “zoneplate”. (a)-(b) Parameter $u = 2.5$. (c)-(d) Parameter $u = 5.0$. (e)-(f) Parameter $u = 7.5$.



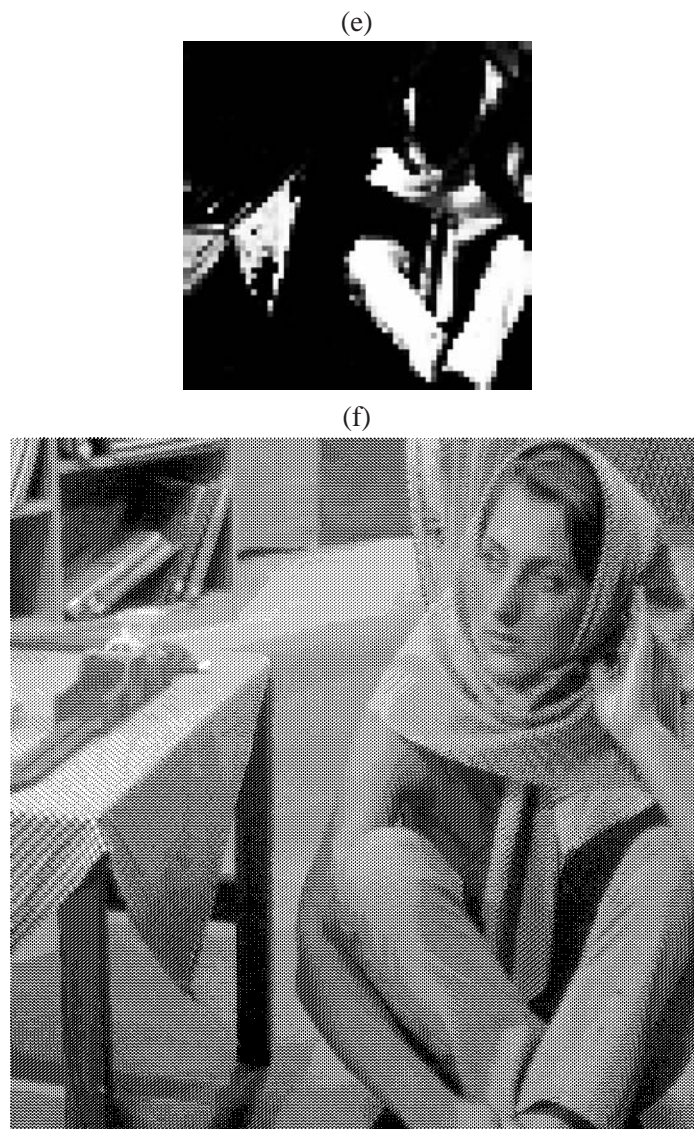
Figuur 3.21: De aangepaste risicobeelden en de niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “hemd”. (a)-(b) Parameter $u = 2.5$. (c)-(d) Parameter $u = 5.0$. (e)-(f) Parameter $u = 7.5$.



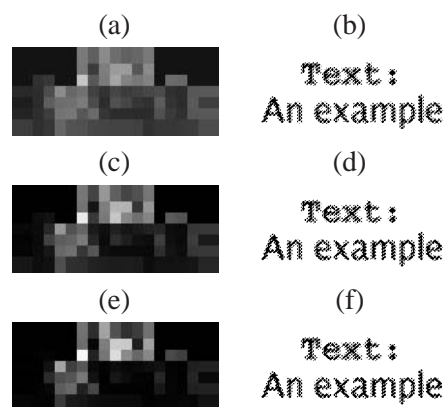
Figuur 3.22: De aangepaste risicobeelden en de niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “barbara”. (a)-(b) Parameter $u = 2.5$.



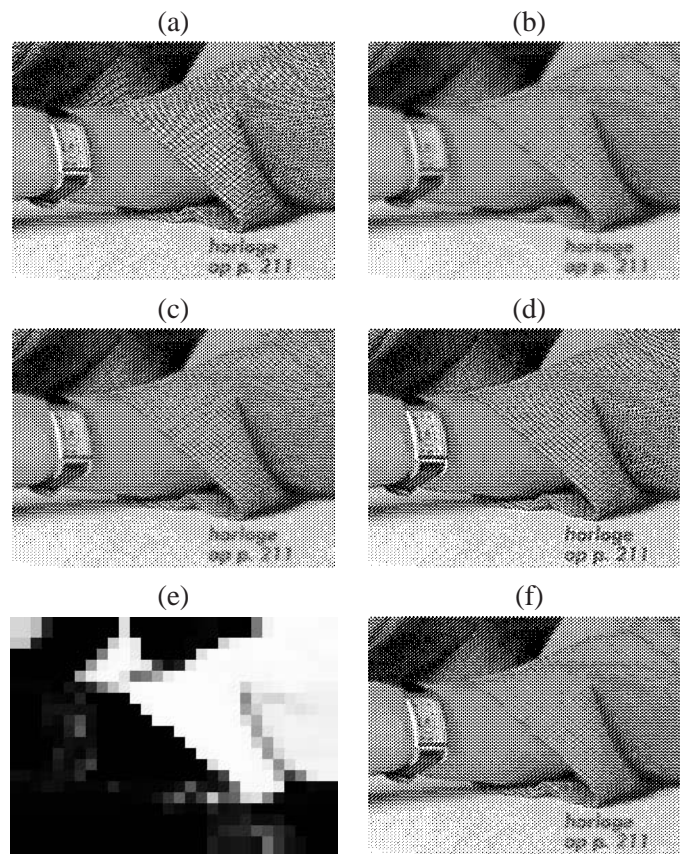
Figuur 3.22: (vervolg) De aangepaste risicobeelden en de niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “barbara”. (c)-(d) Parameter $u = 5.0$.



Figuur 3.22: (vervolg) De aangepaste risicobeelden en de niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “barbara”. (e)-(f) Parameter $u = 7.5$.



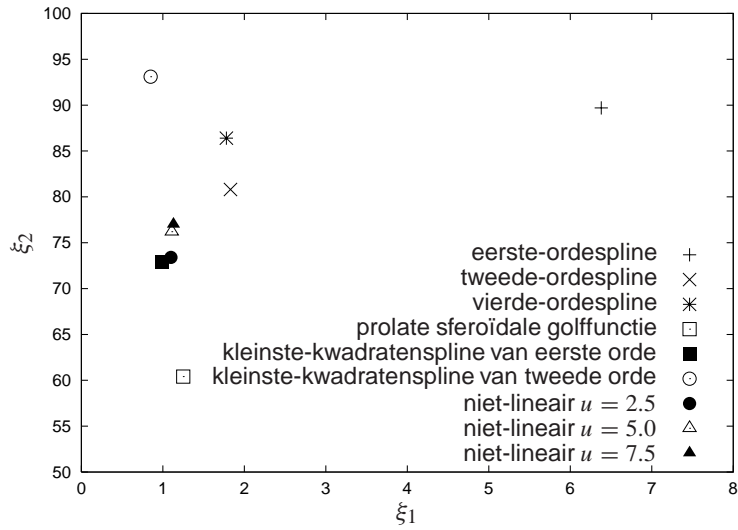
Figuur 3.23: De aangepaste risicobeelden en de niet-lineaire herbemonstering van het testbeeld “tekst”. (a)-(b) Parameter $u = 2.5$. (c)-(d) Parameter $u = 5.0$. (e)-(f) Parameter $u = 7.5$.



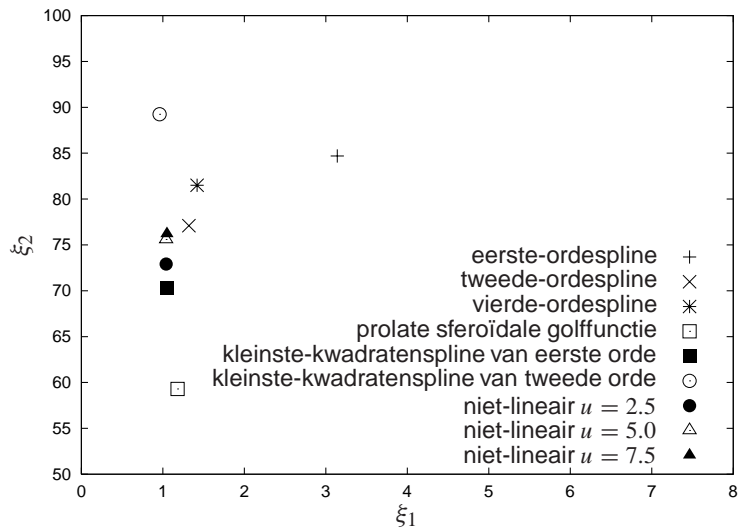
Figuur 3.24: Het bijkomend testbeeld “horloge” met tekstuele informatie. (a) Interpolatie met de vierde-ordespline. (b) Reconstructie met de prolate sferoïdale golf-functie. (c) Kleinste-kwadratenbenadering met de eerste-ordespline. (d) Kleinste-kwadratenbenadering met de tweede-ordespline. (e) Aangepast risicobeeld ($u = 5.0$). (f) Niet-lineaire herbemonstering.

Tabel 3.4: Resultaten van de objectieve kwaliteitsmaat voor de lineaire en niet-lineaire herbemonsteringstechnieken.

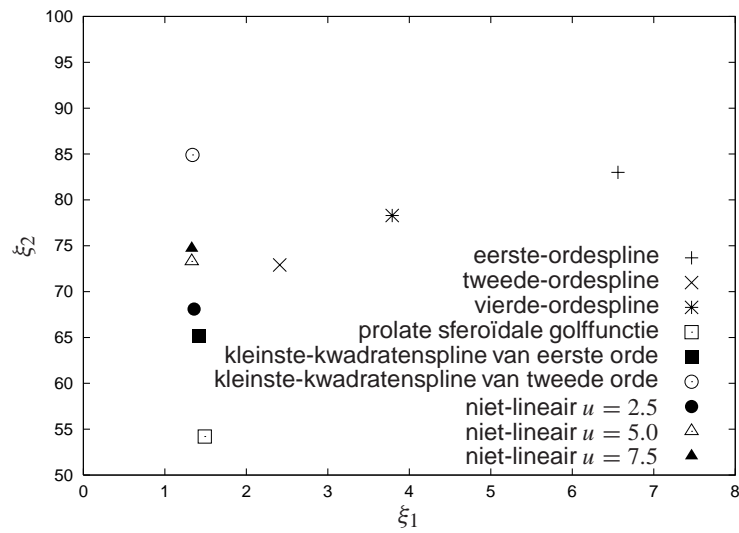
testbeeld	reconstructiefunctie	ξ_1	ξ_2
hemd	eerste-ordespline	6.38	89.7
	tweede-ordespline	1.83	80.8
	vierde-ordespline	1.78	86.4
	prolate sferoïdale golffunctie	1.25	60.4
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	0.99	72.9
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	0.85	93.1
	niet-lineair ($u = 2.5$)	1.10	73.4
	niet-lineair ($u = 5.0$)	1.11	76.2
	niet-lineair ($u = 7.5$)	1.13	77.0
barbara	eerste-ordespline	3.14	84.7
	tweede-ordespline	1.32	77.1
	vierde-ordespline	1.42	81.5
	prolate sferoïdale golffunctie	1.18	59.3
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	1.05	70.35
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	0.96	89.24
	niet-lineair ($u = 2.5$)	1.04	72.9
	niet-lineair ($u = 5.0$)	1.04	75.6
	niet-lineair ($u = 7.5$)	1.05	76.2
tekst	eerste-ordespline	2.30	88.7
	tweede-ordespline	1.10	78.0
	vierde-ordespline	1.55	74.8
	prolate sferoïdale golffunctie	2.13	57.0
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	1.26	70.5
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	2.77	70.1
	niet-lineair ($u = 2.5$)	1.87	66.6
	niet-lineair ($u = 5.0$)	1.73	69.7
	niet-lineair ($u = 7.5$)	1.68	71.0
horloge	eerste-ordespline	6.56	83.0
	tweede-ordespline	2.41	72.9
	vierde-ordespline	3.79	78.3
	prolate sferoïdale golffunctie	1.49	54.2
	kleinste-kwadratenspline van eerste orde	1.42	65.2
	kleinste-kwadratenspline van tweede orde	1.34	84.9
	niet-lineair ($u = 2.5$)	1.36	68.1
	niet-lineair ($u = 5.0$)	1.33	73.3
	niet-lineair ($u = 7.5$)	1.33	74.7



Figuur 3.25: Resultaten van de objectieve kwaliteitsmaat voor het testbeeld “hemd”.



Figuur 3.26: Resultaten van de objectieve kwaliteitsmaat voor het testbeeld “barbara”.



Figuur 3.27: Resultaten van de objectieve kwaliteitsmaat voor het testbeeld “horloge”.

3.6 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we een grondige analyse voorgesteld van het ontstaan van moiré-patronen. Daarbij hebben we zowel het ontstaan van moiré-patronen door frequentieverwarring, als door zwevingsfrequenties bekeken. Op basis van deze analyse hebben we vervolgens de zichtbaarheid van moiré-patronen gemodelleerd. In tegenstelling tot het vorige hoofdstuk, telde naast de invloed van de reconstructiefunctie bij herbemonstering, ook de interpolatiefunctie bij reproductie en de frequentiegevoeligheid van de menselijke waarneming mee. Aangezien deze modellering rekening houdt met de beperkingen van praktische technieken, ontstaat een nieuw criterium in het frequentiedomein dat strenger is dan het klassieke nyquistcriterium. Het combineren van het nieuwe criterium met een gezamenlijke spatiale en spectrale analyse (namelijk het gaborspectrogram) laat toe om voor een gegeven beeld een risicobeeld af te leiden dat aangeeft in hoeverre een bepaald gebied in een beeld aanleiding kan geven tot moiré-patronen. Tenslotte hebben we de informatie van het risicobeeld gebruikt om een nieuwe niet-lineaire techniek te bekomen, die het beste van twee lineaire technieken samenvoegt.

De nieuwe niet-lineaire techniek presteert goed want laat toe om terzelfder tijd moiré-patronen zeer sterk te onderdrukken in gebieden waar dat nodig is, zonder het gehele beeld te vervagen. Toepassingen waarbij moiré zeer ongewenst is (en waar tot nog toe een manuele voorbewerking nodig was [93]), kunnen dan ook ten volle van deze techniek gebruikmaken. De complexiteit van de niet-lineaire techniek is ongeveer vier maal zo groot als die van een enkele lineaire herbemonsteringstechniek. De numerieke resultaten die we bekomen met de objectieve kwaliteitsmaat bevestigen de waargenomen resultaten. Tot slot merken we op dat de niet-lineaire herbemonsteringstechniek die we hebben voorgesteld een nieuwe waaier van mogelijkheden opent. Er zijn ongetwijfeld nog vele andere manieren om de informatie uit het risicobeeld aan te wenden. Enerzijds kunnen andere lineaire technieken gecombineerd worden. Anderzijds kan de informatie uit het risicobeeld nog op vele andere manieren aangewend worden om de herbemonstering adaptief uit te voeren.

Hoofdstuk 4

Herbemonstering van beeldsequenties m.b.v. vaaglogische bewegingsdetectie

4.1 Inleiding

Tot nog toe hebben we ons in dit werk toegespitst op het herbemonsteren van beelden. Dit hoofdstuk handelt over herbemonstering van beeldsequenties. Het omzetten van een beeldsequentie van het ene videoformaat naar het andere wordt in de vakliteratuur ook “formaatconversie” (*Eng. standards conversion*) genoemd. Een belangrijke conversie die we gedetailleerd zullen bestuderen is de omzetting van een alternerend naar een progressief videoformaat. We bespreken eerst beide formaten, waarna we het belang van deze conversie toelichten. Vervolgens tonen we aan waarom de herbemonsteringstechnieken uit vorige hoofdstukken ontoereikend zijn voor deze toepassing en geven een overzicht van andere technieken die in de literatuur voorhanden zijn. Het bekomen van goede resultaten vereist dat men over een mechanisme beschikt om rekening te houden met beweging in de beeldsequentie. We stellen een nieuwe geavanceerde bewegingsdetector voor die gebaseerd is op de vaaglogische informatieverwerking. De betrouwbare indicatie voor beweging die we bekomen, kan worden aangewend voor een bewegingsadaptieve herbemonstering. De evaluatie van deze methode gebeurt aan de hand van een implementatie in soft- en hardware. Tot slot stellen we ook een methode voor die de parameters van de bewegingsdetector automatisch aanpast als functie van het ruisniveau.

4.2 Videoformaten

4.2.1 Inleiding

Reeds geruime tijd voor de komst van de televisie was het principe van de bioscoopfilm bekend. Een camera voor het opnemen van speelfilms heeft daarvoor tot op de dag van vandaag een fotografische film (vaak ook pellicule genoemd) nodig, net als een klassiek fototoestel trouwens. Professionele filmproducties vereisen een filmrol met een breedte van 35mm, die 24 keer per seconde belicht wordt. De aldus bekomen 24 beelden (*Eng.* frames) per seconde, die elk tweemaal geprojecteerd worden, geven een menselijke waarnemer de indruk van een vloeiende beweging. De resolutie van elk van deze beelden is nog steeds superieur aan die bekomen met de modernste digitale technieken. De resolutie stemt immers overeen met die van het net van kleine lichtgevoelige kristallen. Voor de digitale nabewerking van speelfilms worden hoge resoluties gebruikt van ongeveer 4000 beeldelementen in beide dimensies.

De komst van de televisie maakte het echter noodzakelijk videoformaten te definiëren. De beeldinformatie diende immers te worden omgezet van het spatio-temporale domein naar een eendimensionaal (analoog) signaal dat langs een transmissiekanaal kon worden doorgestuurd. Daartoe diende men een compromis te zoeken tussen beschikbare bandbreedte, gewenste spatiale en temporale resolutie en specifieke randvoorwaarden, opgelegd door de technologie van de televisie zelf, zoals de snelheid van de elektronica en de reminescentie van de fosforen. In tegenstelling tot pellicule, ligt de haalbare spatiale resolutie van televisie veel lager. Bovendien bleek een verversingsfrequentie van 24 beelden per seconde voor de weergave op een televisiescherm veel te laag en dat gaf aanleiding tot flikkering. Uiteindelijk zijn twee grote standaarden van televisieformaten ontstaan: NTSC (*Eng.* National Television Systems Committee) in de Verenigde Staten en PAL (*Eng.* Phase Alternating Line) in Europa. Tabel 4.1 toont de belangrijkste karakteristieken van deze formaten. Merk op dat er minder actieve lijnen zijn dan respectievelijk 525 en 625, omdat meerdere lijnen gebruikt worden voor synchronisatie en extra informatie zoals teletekst [107]. Net als alle andere televisieformaten zijn NTSC en PAL een zogenaamd alternerend videoformaat: de beelden bevatten afwisselend enkel de even en de oneven lijnen. In tegenstelling tot een eenvoudiger progressief formaat, waarbij elk beeld even en oneven lijnen bevat, verzoent een alternerend formaat een gegeven bandbreedte en een gekozen temporale resolutie (aantal beelden per seconde) met een (schijnbaar) hogere spatiale resolutie [30]. Naast een luminantiesignaal, wordt ook kleurinformatie meegestuurd onder de vorm van twee chrominantiesignalen. De kleurbemonstering gebeurt volgens een

Tabel 4.1: Een overzicht van de karakteristieken van de belangrijkste videoformaten. NTSC wordt gebruikt in Noord- en Midden-Amerika en Japan. PAL wordt gebruikt in Europa, het Midden-Oosten en Hong Kong. De karakteristieken zijn gespecificeerd als functie van een volledig beeld (even en oneven lijnen samen).

	NTSC	PAL
beelden / seconde	29.97	25
ms / beeld	33.37	40
lijnen / beeld	525	625
hoogte-breedteverhouding	4:3	4:3
alternerend	2:1	2:1
μs / lijn	63.56	64.00
digitale resolutie	640×480	768×576
kleurbemonstering	4:2:2	4:2:2

“4:2:2” bemonstering, waarmee wordt aangegeven dat de horizontale resolutie van de chrominantiesignalen tweemaal lager is dan deze van het luminantie-sigitaal [108].

Een alternerend videoformaat heeft echter ook nadelen. Artefacten eigen aan het alternerend videoformaat degraderen de beeldkwaliteit [116, 131]. De belangrijkste artefacten zijn flikkering (*Eng. flicker*), trillen (*Eng. twitter*) en kruipen (*Eng. crawling*). Flikkering ontstaat in een statische scène met fijne verticale details. Een extreem voorbeeld is een statische beeldsequentie met afwisselend zwarte en witte horizontale lijnen, die worden weergegeven als een opeenvolging van zwarte en witte beelden. Trillen is een specifieke soort flikkering, waarbij een fijne horizontale lijn of rand op en neer lijkt te dansen. Kruipen ontstaat wanneer het oog een object in het beeld observeert met een verticale snelheid van een oneven aantal lijnen per half beeld. Bij PAL komt een verticale snelheid van één lijn per half beeld overeen met 11.5 seconden per beeldhoogte. De lijnstructuur wordt dan zeer zichtbaar en lijkt langs de rand van het object te kruipen. Merk op dat het optreden van dit artefact ook gepaard gaat met een verlies aan verticale resolutie.

Daarenboven kunnen sommige reproductietechnieken niet overweg met een alternerend videoformaat en hebben behoefte aan een progressief formaat. Bijvoorbeeld afdrukapparaten voor video [137], grafische kaarten voor computers [88], plasma- en LCD-schermen [23, 105, 142].

Tot slot maakt het alternerend videoformaat sommige beeldverwerkingsoperaties complexer, zoals codering, bewegingsestimatie en herbemonstering [36]. In het bijzonder leidt een alternerend videoformaat tot een afnemende verticale en temporale correlatie van een beeldsequentie [52, 105].

In het kader van de convergentie tussen de televisie-, telecommunicatie- en computerwereld waren er in het midden van de jaren '90 sterke indicaties dat het alternerend videoformaat plaats moest ruimen voor een progressief formaat [39]. Toch stellen we nu vast dat de standaard voor digitale televisie (DTV) nog steeds alternerende formaten bevat en dat deze waarschijnlijk de voorkeur zullen genieten [27]. Ook recent industrieel onderzoek [18, 19] geeft te kennen dat het alternerend videoformaat nog steeds een valabele keuze is, als men voor een gegeven bandbreedte het evenwicht tussen temporale en (hogere) spatiale resoluties zoekt. Ook voor digitale compressie van beeldsequenties blijkt het alternerend videoformaat een niet te verwaarlozen videoformaat [17]. Zo ondersteunt de MPEG-1 standaard enkel progressieve videoformaten, terwijl MPEG-2 expliciet rekening houdt met het alternerend videoformaat [58].

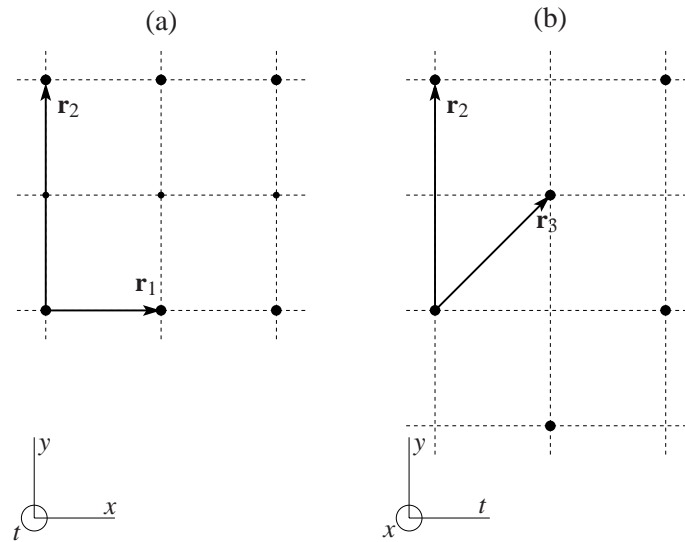
4.2.2 Formaatconversie

Onder formaatconversie verstaan we het omzetten van een beeldsequentie van het ene naar het andere formaat. Formaatconversie omvat ondermeer het verhogen van de spatiale resolutie [124], het verhogen van het aantal beelden per seconde [54] en het omzetten van een alternerend naar een progressief formaat [138, 187]. Een interessant voorbeeld is ook het omzetten van een bioscoopfilm naar het NTSC-formaat. Dit gebeurt m.b.v. de zogenaamde "3:2 pulldown" techniek die ongeveer 60 (halve) beelden per seconde uit 24 originele afleidt.

In het algemeen kunnen we technieken voor formaatconversie opdelen in drie categorieën:

1. Spatiale technieken houden geen rekening met beweging. Enkel de beelddata binnen één (half) beeld tellen.
2. Bewegingsadaptieve technieken houden rekening met de aanwezigheid van beweging. Daarbij wordt meestal gebruikgemaakt van een bewegingsdetector die de aanwezigheid van beweging aangeeft. Het signaal dat de bewegingsdetector produceert, kan gelden voor een gedeelte van het beeld of het hele beeld.
3. Bewegingsgecompenseerde technieken houden niet louter rekening met de aanwezigheid, maar ook met de aard van de beweging (richting en grootte) en maken daarvoor gebruik van een bewegingsestimator die het vectorveld met de bewegingsvectoren van het beeld bepaalt.

Zoals reeds vermeld, zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot het omzetten van een alternerend naar een progressief beeldformaat (*Eng.* deinterlacing). Deze bewerking komt neer op een herbemonstering, waarbij de



Figuur 4.1: Het bemonsteringsrooster van een alternerend videoformaat. (a) De horizontale en verticale dimensie. (b) De verticale en temporale dimensie.

ontbrekende lijnen in elk half beeld dienen te worden opgevuld. De bedoeling is het verbeteren van de beeldkwaliteit door de artefacten, eigen aan het alternerend formaat, zo goed mogelijk weg te werken en daarenboven de spatiale resolutie te verhogen.

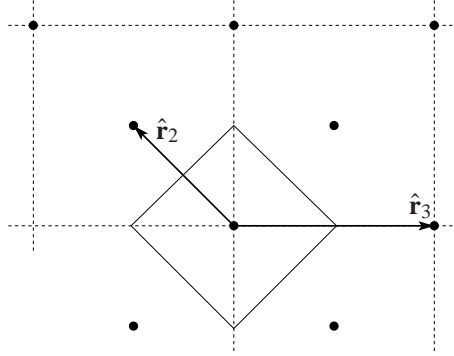
Een opnametoestel capteert telkens een (half) beeld. Aldus bekomen we monsterwaarden in de spatio-temporale ruimte bepaald door het vlak waarop geprojecteerd wordt en het tijdsverloop. Beschouw een (genormaliseerd) alternerend bemonsteringsrooster, gekarakteriseerd door de roostermatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

waarbij de roostervectoren \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 en \mathbf{r}_3 respectievelijk de horizontale, verticale en temporale dimensie aanduiden. Figuur 4.1 toont de roosterpunten van het alternerend rooster. Het progressieve doelrooster wordt dan eenvoudigweg gegeven door

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Omdat de horizontale componenten (\mathbf{r}_1 en $\tilde{\mathbf{r}}_1$) van de matrix onveranderd blijven, zullen we vaak enkel de verticale en temporale dimensie afbeelden. Het



Figuur 4.2: Het reciproque alternerend bemonsteringsrooster en de roostercel (de verticale en temporale dimensie).

reciproque alternerend rooster wordt gegeven door

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Zoals figuur 4.2 laat zien, bestaat het nyquistgebied uit een geroteerde balk.

Om de notaties gebruiksvriendelijker te maken, schrijven we een coördinaat (x_1, x_2, x_3) als (x, y, t) , waardoor het duidelijker is dat we de horizontale, verticale en temporale dimensie bedoelen. Een coördinaat in het frequentiedomein noteren we als (f_x, f_y, f_t) .

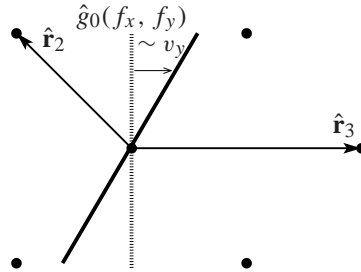
4.3 Lineaire herbemonstering

In dit gedeelte passen we enkele lineaire herbemonsteringstechnieken toe bij de conversie van een alternerend naar een progressief videoformaat. We beschouwen een originele beeldsequentie $g_{\mathbf{R}}(x, y, t)$, gegeven op een alternerend rooster \mathbf{R} , die dient te worden omgezet naar een beeldsequentie $g_{\tilde{\mathbf{R}}}(x, y, t)$ op een progressief rooster $\tilde{\mathbf{R}}$. Om te beginnen, besteden we enkel aandacht aan het luminantiesignaal.

Een interessant inzicht is het effect van beweging op het spectrum. Daarom gaan we de verandering van het spectrum bij een starre translationele beweging na. Een statische beeldsequentie kunnen we beschrijven als

$$g_{\mathbf{R}}(x, y, t) = g_0(x, y)\delta_{\mathbf{R}}(x, y, t), \quad (4.4)$$

waarbij $g_0(x, y)$ een stilstaand beeld is. Indien we dit beeld nu verschuiven



Figuur 4.3: Door beweging ondergaat het vlak $\hat{g}_0(f_x, f_y)$ een affine transformatie en schuift in de temporale dimensie.

met een snelheid (v_x, v_y) per beeld bekomen we volgende beeldsequentie:

$$g_{\mathbf{R}}(x, y, t) = g_0(x - v_x t, y - v_y t) \delta_{\mathbf{R}}(x, y, t). \quad (4.5)$$

Dit laat ons toe om het spectrum van de beeldsequentie te bepalen:

$$\hat{g}(f_x, f_y, f_t) = \hat{g}_0(f_x, f_y) \delta(f_x + v_x f_t, f_y + v_y f_t). \quad (4.6)$$

Dit betekent dat het vlak $\hat{g}_0(f_x, f_y)$ in de temporale dimensie schuift. Figuur 4.3 illustreert dit.

Een eerste eenvoudige lineaire herbemonsteringstechniek is dichtste-buur-interpolatie. Het roosterpunt van een beeldelement op een in te vullen lijn bevindt zich echter even dicht bij zijn vier naburen: zijn boven- en onderbuur en zijn burens op dezelfde spatiale locatie, maar uit het vorige of volgende halve beeld. Indien we kiezen voor een nabuur uit hetzelfde halve beeld, bekomen we een zuivere spatiale techniek die eenvoudigweg de vorige of volgende lijn uit het halve beeld dupliceert (*Eng.* line-replication). We kunnen deze operatie voorstellen door de convolutie van de originele beeldsequentie $g_{\mathbf{R}}(x, y, t)$ (gegeven op het alternerend rooster \mathbf{R}) met het impulsantwoord $\phi(x, y, t)$:

$$g_{\tilde{\mathbf{R}}}(x, y, t) = (g_{\mathbf{R}} \otimes \phi)(x, y, t), \quad (4.7)$$

waarbij

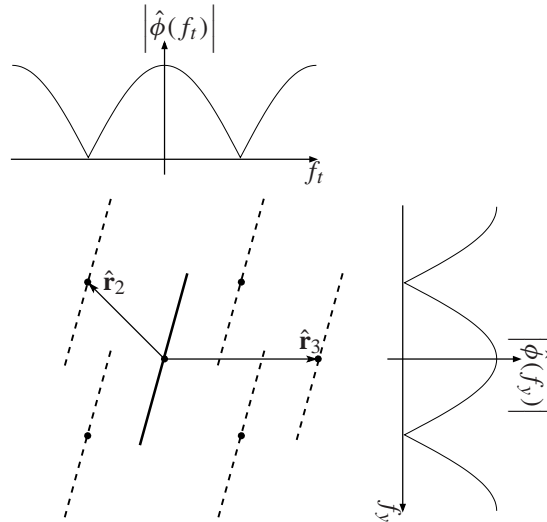
$$\phi(x, y, t) = \delta(x, y, t) + \delta(x, y + 1, t) \quad (4.8)$$

om de beeldsequentie op het progressieve rooster $\tilde{\mathbf{R}}$ te bekomen. Merk op dat het spectrum van $\phi(x, y, t)$ gegeven wordt door

$$\hat{\phi}(f_x, f_y, f_t) = 2 \cos(\pi f_y) \exp(j\pi f_y). \quad (4.9)$$

Indien we echter kiezen voor een nabuur uit het vorige of volgende halve beeld, krijgen we het impulsantwoord

$$\phi(x, y, t) = \delta(x, y, t) + \delta(x, y, t + 1), \quad (4.10)$$



Figuur 4.4: Het basisspectrum en zijn replica's (in lange stippellijn) van een alternerende beeldsequentie. Dichtste-buur-interpolatie is zowel spatiaal als temporaal mogelijk. In het spatiale geval wordt het spectrum gefilterd met $\hat{\phi}(f_y)$, in het temporale geval met $\hat{\phi}(f_t)$.

met als spectrum

$$\hat{\phi}(f_x, f_y, f_t) = 2 \cos(\pi f_t) \exp(j\pi f_t). \quad (4.11)$$

In deze beide gevallen van dichtste-buur-interpolatie wordt het spectrum slechts in één dimensie gefilterd. De andere dimensies blijven onaangeroerd. Figuur 4.4 toont de filterkarakteristiek voor beide gevallen. Wanneer er geen beweging aanwezig is in de beeldsequentie, onderdrukt temporale dichtste-buur-interpolatie de nabijgelegen replica's in het frequentiedomein. Bij een statische sequentie voegt deze techniek immers de even en oneven lijnen tussen elkaar en reconstrueert op die manier een progressief beeld. Dit wordt vaak gebruikt in de computerwereld en staat bekend als “weave” [17,88]. Indien we temporale dichtste-buur-interpolatie echter toepassen bij beweging, zorgen restanten van de nabije replica's voor zogenaamde “spookartefacten” (*Eng.* ghost artifacts). Ter illustratie tonen we in figuur 4.5 een fragment uit een testsequentie. In (a) zien we het originele progressieve beeld. Nadat we zelf de sequentie hebben omgezet naar een alternerend formaat (eenvoudigweg door lijnen weg te laten), bekommen we een gereconstrueerd progressief beeld in (b) met temporale dichtste-buur-interpolatie en in (c) met spatiale dichtste-buur-interpolatie. We merken dat de beweging spookartefacten introduceert in het gezicht in (b). Het resultaat in (c) lijdt hier niet onder, maar heeft duidelijk ingeboet aan spa-



Figuur 4.5: Fragment uit een testsequentie. (a) Originele progressieve versie. (b) Temporale dichtste-buur-interpolatie. (c) Spatiale dichtste-buur-interpolatie.

tiale resolutie. Het grote nadeel van (c) is echter dat de opeenvolgende beelden uit de sequentie vrij veel verschillen, waardoor er flikkering ontstaat. Ook andere artefacten, eigen aan het altemnerend formaat, zoals “trillen” en “kruipen” blijven aanwezig in de bekomen progressieve beeldsequentie.

Niettegenstaande de eenvoud van temporale dichtste-buur-interpolatie, blijkt deze in de praktijk een voortreffelijke techniek voor statische sequenties. In het geval van beweging daarentegen kan het resultaat van spatiale dichtste-buur-interpolatie duidelijk nog verbeterd worden door te kiezen voor een interpolatiefunctie van hogere orde. In het geval van lineaire interpolatie wordt de nieuwe lijn berekend als het gemiddelde van de lijn erboven en eronder (*Eng.* line-averaging). We bekomen dan het impulsantwoord

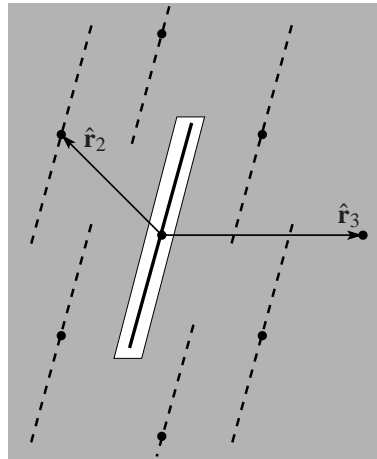
$$\phi(x, y, t) = \delta(x, y, t) + \frac{\delta(x, y + 1, t) + \delta(x, y - 1, t)}{2}, \quad (4.12)$$

waarbij het spectrum gegeven wordt door

$$\hat{\phi}(f_x, f_y, f_t) = 2 \cos^2(\pi f_y). \quad (4.13)$$

De replica's worden aldus sterker onderdrukt en de temporale artefacten, zoals flikkering, zijn minder prominent aanwezig dan bij spatiale dichtste-buur-interpolatie. Deze techniek staat in de computerwereld bekend als “bob” [17, 88].

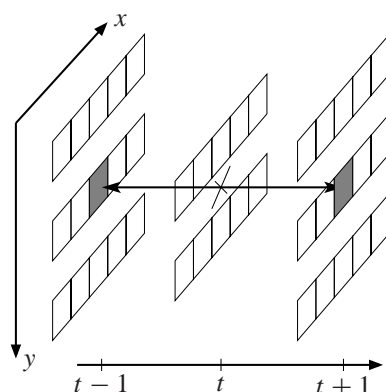
De constructie van complexere lineaire filters is uiteraard mogelijk en dat zowel spatiaal als spatio-temporaal. De additionele kost die de berekening en de opslag van meerdere beelden voor dergelijke filters met zich meebrengt, neemt echter snel toe [31]. Dit is immers de reden waarom de temporale dimensie steeds met de nodige omzichtigheid wordt benaderd. Bovendien is er een fundamenteel probleem met altemnerende beeldsequenties dat het resultaat van deze aanpak hypothekeert: zowel de verticale als de temporale dimensie zijn onderbemonsterd, waardoor de beeldsequenties vaak frequentiecomponenten bevatten boven de nyquistgrens. Hierdoor zal zelfs een ideale



Figuur 4.6: Een bewegingsgecompenseerd interpolatiefilter dient het basisspectrum te scheiden van de replica's in het frequentiedomein. De oriëntatie van het filter is afhankelijk van een bewegingsestimatie.

interpolatiefunctie, gebaseerd op het nyquistcriterium van het alternerend videoformaat, geen bevredigend resultaat bieden [131, 138]. Deze vaststelling houdt echter ook in dat televisiebeelden onvoldoende worden gefilterd tijdens hun creatie.

Het omzetten van een alternerende naar een progressieve beeldsequentie kan vooral worden verbeterd door rekening te houden met beweging. Zoals reeds vermeld, kunnen we een onderscheid maken tussen bewegingsadaptieve en bewegingsgecompenseerde technieken. De eerste beschouwen een (gedeelte van het) beeld met of zonder beweging. De interpolatie wordt dan aangepast van spatiaal, waarbij enkel het huidige halve beeld in ogenschouw wordt genomen, naar temporaal, waarbij ook informatie uit andere beelden wordt aangewend. Bewegingsgecompenseerde technieken zijn complexer en trachten ook in het geval van beweging nog rekening te houden met beelddata uit vorige en volgende beelden [115, 143]. In het frequentiedomein komt dit neer op een filter dat het basisspectrum tracht te bewaren door rekening te houden met de grootte en de richting van de beweging (zie figuur 4.6). Essentieel is uiteraard het maken van een nauwkeurige bewegingsestimatie [53, 136, 186]. Hartwig [57] toont zelfs aan dat een accuraatheid van de bewegingsvectoren van een vierde van een beeldelement noodzakelijk is vooraleer we een redelijk resultaat mogen verwachten. Het is dan ook niet mogelijk om grove bewegingsvectoren, die in coderingstechnieken zoals MPEG-compressie voorkomen, te gebruiken voor bewegingsgecompenseerde interpolatie.



Figuur 4.7: De eenvoudigste bewegingsdetector neemt het verschil $\vartheta(x, y, t)$ tussen twee beeldelementen op dezelfde spatiale lokatie.

4.4 Bewegingsdetectie

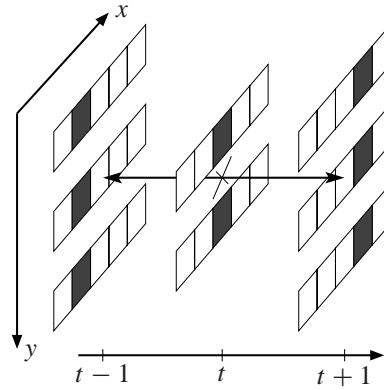
In dit werk introduceren we een nieuwe bewegingsadaptieve herbemonsteringstechniek voor de omzetting van een beeldsequentie van een alternerend naar een progressief videoformaat. We geven eerst een kort overzicht van de belangrijkste bewegingsadaptieve technieken uit de literatuur en bespreken vervolgens het principe dat aan de basis ligt van onze eigen bewegingsdetectie en dat stoelt op de vaaglogische informatieverwerking.

In een alternerend videoformaat is bewegingsdetectie niet vanzelfsprekend. We kunnen immers tussen twee opeenvolgende halve beelden geen beeldelementen vergelijken op dezelfde spatiale lokatie. De eenvoudigste bewegingsdetector, de eenpuntdetector, neemt dan ook het verschil tussen een vorig en een volgend half beeld

$$\vartheta(x, y, t) = \frac{|g_{\mathbf{R}}(x, y, t + 1) - g_{\mathbf{R}}(x, y, t - 1)|}{2} \quad (4.14)$$

en vergelijkt het resultaat met een drempelwaarde (zie figuur 4.7). Merk op dat we hier stilzwijgend de wegingsfactoren van de diracfuncties gebruiken. De met formule (4.14) corresponderende transfertfunctie wordt gegeven door $|\sin(2\pi f_t)|$. Deze functie is nul voor $f_t = 0$, hetgeen overeenstemt met statische gebieden, maar ook op de temporale nyquistfrequentie ($f_t = 0.5$). Dit betekent dat artefacten zoals flikkering, die niet het gevolg zijn van echte beweging, niet opgemerkt worden door de bewegingsdetector. Anderzijds zullen ook kleine bewegende details, zoals de fijne verticale lijn uit figuur 4.8 niet gedetecteerd worden [32].

De kwaliteit van een bewegingsdetector kan verhoogd worden door meer-



Figuur 4.8: De eenpuntsbewegingsdetector mist de bewegende verticale lijn.

dere eenpuntsdetectoren te combineren. Voorbeelden zijn de driepunts- en zevenpuntsdetectoren voorgesteld door Haavisto [56]. Deze bewegingsdetectoren worden gegeven door

$$\vartheta_3(x, y, t) = \max(\vartheta(x, y, t), \vartheta(x, y - 1, t - 1), \vartheta(x, y + 1, t - 1)) \quad (4.15)$$

en

$$\begin{aligned} \vartheta_7(x, y, t) = \max(\vartheta(x, y, t), \vartheta(x, y - 1, t - 1), \vartheta(x, y + 1, t - 1), \\ \vartheta(x - 1, y - 1, t - 1), \vartheta(x + 1, y - 1, t - 1), \\ \vartheta(x - 1, y + 1, t - 1), \vartheta(x + 1, y + 1, t - 1)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Het is belangrijk op te merken dat deze technieken in essentie de kwaliteit van de bewegingsdetectie trachten te verbeteren door de spatiale en temporale correlatie uit te buiten.

Een andere aanpak die door Roberts [117] werd voorgesteld aan het BBC Research Department, houdt in dat een temporaal en spatiaal hoogdoorlaatfilter tegenover elkaar worden afgewogen:

$$\vartheta_R(x, y, t) = \frac{\vartheta(x, y, t)}{\vartheta(x, y, t) + \vartheta_S(x, y, t)}, \quad (4.17)$$

waarbij

$$\begin{aligned} \vartheta(x, y, t) &= \frac{|g_R(x, y, t + 1) - g_R(x, y, t - 1)|}{2}, \\ \vartheta_S(x, y, t) &= \frac{|g_R(x, y - 1, t) - g_R(x, y + 1, t)|}{2}. \end{aligned}$$

Toch komt men ook hier tot de slotsom dat de spatiale en temporale correlatie best wordt uitgebuit door de resultaten van formule (4.17) eerst spatiaal uit te middelen.

Wij wensen bewegingsdetectie aan te wenden om het resultaat van de herbemonstering te verbeteren. Zowel Prodan [111], Achiha [7] als Bock [24] stellen voor om twee eenvoudige technieken te combineren m.b.v. een bewegingsdetector. Zodoende bekomen we een samengestelde interpolatieformule

$$\phi(x, y, t) = \gamma(x, y, t)\phi_1(x, y, t) + (1 - \gamma(x, y, t))\phi_2(x, y, t), \quad (4.18)$$

waarbij de parameter $\gamma(x, y, t)$ een waarde kan aannemen tussen 0 en 1. Bij weinig of geen beweging is de waarde van $\gamma(x, y, t)$ ongeveer 0 en wordt gekozen voor de temporale interpolatiefunctie $\phi_2(x, y, t)$. Indien er wel beweging is, wordt $\gamma(x, y, t)$ ongeveer 1 en wordt de voorkeur gegeven aan de spatiale interpolatiefunctie $\phi_1(x, y, t)$. Deze aanpak kan eenvoudig worden uitgebreid voor kleur. De parameter $\gamma(x, y, t)$ wordt berekend aan de hand van het luminantiesignaal, waarna de bewegingsadaptieve herbemonstering wordt toegepast op het luminantiesignaal en de chrominantiesignalen.

Volledigheidshalve wensen we ook de technieken die gebaseerd zijn op de mediaan en die impliciet bewegingsadaptief zijn, aan te halen omdat we deze later ter vergelijking zullen gebruiken. De “driepuntsmediaan” berekent de waarde van een ontbrekend beeldelement als:

$$g(x, y, t) = \text{med}(g_{\mathbf{R}}(x, y - 1, t), g_{\mathbf{R}}(x, y + 1, t), g_{\mathbf{R}}(x, y, t - 1)). \quad (4.19)$$

De onderliggende redenering is dat, in het geval van beweging, de correlatie tussen de waarden van de beeldelementen uit het huidige beeld groot is. Daardoor is de kans groot dat een waarde uit het huidige beeld wordt gekozen. Ook op deze aanpak zijn verscheidene uitbreidingen voorgesteld [55, 69], die de mediaan van meer dan drie waarden gebruiken. Ter informatie vermelden we nog de negenpuntsmediaan:

$$g(x, y, t) = \text{med}\left(g_{\mathbf{R}}(x - 1, y - 1, t), g_{\mathbf{R}}(x, y - 1, t), g_{\mathbf{R}}(x + 1, y - 1, t),\right. \\ g_{\mathbf{R}}(x - 1, y + 1, t), g_{\mathbf{R}}(x, y + 1, t), g_{\mathbf{R}}(x + 1, y + 1, t), \\ g_{\mathbf{R}}(x, y, t - 1), g_{\mathbf{R}}(x, y, t + 1), \\ \left.\frac{g_{\mathbf{R}}(x, y - 1, t) + g_{\mathbf{R}}(x, y + 1, t)}{2}\right). \quad (4.20)$$

4.5 Vaaglogische bewegingsdetectie

Het nadeel van een klassieke bewegingsdetector die meerdere eenpuntsdetectoren combineert, is dat de bewegingsdetector vaak teveel (valse) bewegingen detecteert. Meestal wordt immers een maximumoperator gebruikt en aldus een strenge keuze gemaakt. De vaaglogische informatieverwerking (*Eng.* fuzzy logic) helpt ons om imperfecte kennis en onzekerheid over exacte drempelwaarden te modelleren. Op die manier zal onze vaaglogische bewegingsdetector de informatie van verschillende klassieke eenpuntsbewegingsdetectoren combineren op een meer geraffineerde wijze. De bewegingsdetector zal opgebouwd zijn volgens het principe van een vaaglogische regelaar. In het domein van bewegingsdetectie is deze aanpak nieuw. Toch heeft de vaaglogica zijn nut bewezen in andere succesvolle beeldverwerkingstechnieken [59], zoals b.v. randdetectie [92], ruisonderdrukking [73, 121] en het controleren van de compressieverhouding bij MPEG-video [144].

Vooraleer we onze vaaglogische bewegingsdetector introduceren, stellen we enkele basisconcepten uit de vaaglogische informatieverwerking voor.

4.5.1 Basisconcepten vaaglogische informatieverwerking

Essentieel in de vaaglogica [72], is het uitbreiden van de klassieke verzamelingenleer, waar een element al dan niet deel uitmaakt van een verzameling, naar een vage verzameling F . De vage verzameling F in een ruimte U wordt gekarakteriseerd door de lidmaatschapsfunctie μ_F die een waarde uit het interval $[0, 1]$ aanneemt:

$$F : U \rightarrow [0, 1], u \mapsto \mu_F(u). \quad (4.21)$$

Een vaaglogisch singleton wordt dan gegeven door

$$F_0 : U \rightarrow [0, 1], u \mapsto \mu_{F_0}(u) = \begin{cases} 1, & u = u_0 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \quad (4.22)$$

De klassieke doorsnede en unie van verzamelingen hebben ook hun vaaglogische tegenhangers. Een vage doorsnede van twee vage verzamelingen A en B wordt gegeven door

$$A \cap B : U \rightarrow [0, 1], u \mapsto \mu_A(u) \wedge \mu_B(u), \quad (4.23)$$

waarbij de \wedge -operator een vage conjunctie voorstelt (ook triangulaire norm genaamd). Mogelijke keuzes voor deze operator worden weergegeven in tabel 4.2. Een vage unie van A en B wordt dan gegeven door

$$A \cup B : U \rightarrow [0, 1], u \mapsto \mu_A(u) \vee \mu_B(u), \quad (4.24)$$

Tabel 4.2: Enkele vaak gebruikte vaaglogische conjunctie-operatoren.

vage conjunctie $x \wedge y$	
minimum	$\min(x, y)$
algebraïsch product	xy
gebonden product	$\max(0, x + y - 1)$
drastisch product	$\begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & x, y < 1 \end{cases}$

Tabel 4.3: Enkele vaak gebruikte vaaglogische disjunctie-operatoren.

vage disjunctie $x \vee y$	
maximum	$\max(x, y)$
algebraïsche som	$x + y - xy$
gebonden som	$\min(1, x + y)$
drastische som	$\begin{cases} x, & y = 0 \\ y, & x = 0 \\ 1, & x, y > 0 \end{cases}$

waarbij de \vee -operator een vage disjunctie voorstelt (of triangulaire conorm genaamd). Mogelijke keuzes voor deze operator worden weergegeven in tabel 4.3).

Een vaaglogische relatie R van U naar V kunnen we uitdrukken als een vage verzameling in $U \times V$:

$$R : U \times V \rightarrow [0, 1], (u, v) \mapsto \mu_R(u, v). \quad (4.25)$$

In het algemeen formuleert een conditionele regel “ALS antecedent DAN consequent” in het antecedent de noodzakelijke voorwaarde opdat het consequent geactiveerd wordt. Een vage controleregel “ALS x is F DAN y is G ” wordt voorgesteld door een vaaglogische relatie m.b.v. een vage implicatiefunctie \mathcal{I} :

$$R : U \times V \rightarrow [0, 1], (u, v) \mapsto \mu_R(u, v) = \mathcal{I}(\mu_F(u), \mu_G(v)). \quad (4.26)$$

Verschillende keuzes voor de implicatiefunctie zijn mogelijk. Bijvoorbeeld Mamdani’s minimum en Larsens product (zie tabel 4.4) worden vaak gebruikt door vaaglogische regelaars. Merk op dat deze in de limiet niet overeenstemmen met de scherpe implicatie uit de klassieke logica, waarbij een onwaar antecedent een willekeurig consequent tot gevolg kan hebben. Mamdani’s en Larsens implicatiefunctie verminderen echter de invloed van de regel wanneer de waarheidswaarde van het antecedent afneemt.

Tabel 4.4: Enkele vaak gebruikte vaaglogische implicatiefuncties.

vage implicatiefunctie \mathcal{I}	
Mamdani	$\mathcal{I}(x, y) = \min(x, y)$
Larsen	$\mathcal{I}(x, y) = xy$

Regels worden geactiveerd door een inferentiemechanisme. In een vaaglogische regelaar wordt meestal een eenvoudiger vorm van inferentie gebruikt dan in een uitgebouwd expertsysteem. Een vaaglogische regelaar is gebaseerd op een voorwaarts inferentiemechanisme met één niveau. Bij een expertsysteem daarentegen kan het resultaat van een regel opnieuw andere regels activeren. Het inferentiemechanisme is gebaseerd op een veralgemening van de modus ponens uit de logica:

$$\begin{array}{l}
 \text{premissie 1: } x \text{ is } F' \\
 \text{premissie 2: } \text{ALS } x \text{ is } F \text{ DAN } y \text{ is } G \\
 \hline
 \text{consequent: } y \text{ is } G'
 \end{array} \quad (4.27)$$

Een compositieregel combineert de eerste met de tweede premisse. Vaak gebruikt men volgende regel:

$$G' = F' \circ R : V \rightarrow [0, 1], v \mapsto \mu_{G'}(v) = \sup_u (\mu_R(u, v) \wedge \mu_{F'}(u)). \quad (4.28)$$

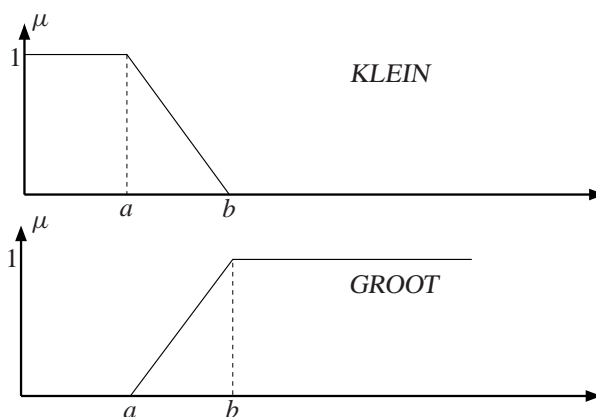
In het geval van trapezoïdale lidmaatschapsfuncties, zoals wij die later zullen gebruiken (zie figuur 4.9), kunnen we het supremum evengoed vervangen door het maximum. Daarnaast gebruiken we een conjunctie-operator uit tabel 4.2.

Ook samengestelde antecedenten kunnen worden gebruikt. Bijvoorbeeld “ x_1 is F_1 en x_2 is F_2 ” wordt geïmplementeerd door een vage conjunctie:

$$\mu_{F_1 \wedge F_2}(u_1, u_2) = \mu_{F_1}(u_1) \wedge \mu_{F_2}(u_2). \quad (4.29)$$

We beschikken nu over het nodige basismateriaal om een vaaglogische regelaar voor te stellen [33, 84]. Zulke regelaar bevat drie belangrijke stappen: fuzzificatie (het omzetten van de inputs in lidmaatschapsgraden van vage verzamelingen), het toepassen van een regelset en de defuzzificatie (het bepalen van een nuttige outputwaarde). Een regelset voor een MISO-systeem (Eng. Multiple-Input-Single-Output) kunnen we als volgt karakteriseren:

$$\begin{array}{l}
 R_1 : \text{ALS } x_1 \text{ is } A_{1,1} \wedge \dots \wedge x_n \text{ is } A_{1,n} \text{ DAN } z \text{ is } C_1 \\
 R_2 : \text{ALS } x_1 \text{ is } A_{2,1} \wedge \dots \wedge x_n \text{ is } A_{2,n} \text{ DAN } z \text{ is } C_2 \\
 \dots \\
 R_m : \text{ALS } x_1 \text{ is } A_{m,1} \wedge \dots \wedge x_n \text{ is } A_{m,n} \text{ DAN } z \text{ is } C_n.
 \end{array} \quad (4.30)$$



Figuur 4.9: De lidmaatschapsfuncties van de vage verzamelingen *KLEIN* en *GROOT*. Het universum is het interval van mogelijke waarden van de verschilsignalen.

In deze canonische vorm bevatten de antecedenten enkel een conjunctie-operator. Indien meerdere regels hetzelfde consequent bevatten, worden deze resultaten gecombineerd m.b.v. een vage disjunctie-operator. Voor elk van de regels wordt aldus een waarheidswaarde bekomen, in de vaaglogica een plausibiliteit genoemd, omdat deze, in tegenstelling tot een probabilliteit, niet genormeerd is. De defuzzificatie tenslotte is het invers proces van de fuzzificatie: de plausibiliteiten van de consequenten van de verschillende regels worden gecombineerd tot een zinvol resultaat (b.v. één enkele scalaire grootheid) als output.

4.5.2 Een vaaglogische regelaar als bewegingsdetector

Net als de meerpuntsbewegingsdetectoren combineert de vaaglogische detector, zij het op een meer geraffineerde manier, verscheidene exemplaren van het verschilsignaal $\vartheta(x, y, t)$.

Rond een beeldelement dat we wensen te bepalen op een onbekende lijn, gebruiken we de $2K + 1$ ($K \in \mathbb{N}$) verschilsignalen:

$$\vartheta(x - i, y, t), \quad -K \leq i \leq K. \quad (4.31)$$

In de eerste stap, de fuzzificatie, worden hun lidmaatschapsgraden berekend ten opzichte van twee eenvoudige vage verzamelingen: *KLEIN* en *GROOT*. Figuur 4.9 toont de trapezoïdale en complementaire lidmaatschapsfuncties die vaak worden gebruikt in de vaaglogica, en die ook wij zullen aanwenden.

De kern van de vaaglogische regelaar is de regelset. In ons geval zijn de

regels minder algemeen, in die zin dat het consequent een waarde geeft aan een vaag singleton. Beschouw ter illustratie de volgende situatie:

- een inputwaarde x_0 ,
- een vage verzameling F gekenmerkt door een lidmaatschapsfunctie μ_F ,
- een lidmaatschapsfunctie corresponderend met: $\mu_Y(true) = 0$, $\mu_Y(false) = 1$,
- een regel “ALS x is F DAN y is $false$ ”.

De waarde van de uitspraken en “ y is $true$ ” en “ y is $false$ ”, die we noteren als de plausibiliteit $\pi_Y(y)$, bekommen we dan door toepassing van de voorheen geïntroduceerde regels:

$$\begin{aligned}
 \pi_Y(true) &= \sup_x (\mu_R(x, true) \wedge \mu_{X'}(x)) \\
 &= \sup_x (\mathcal{I}(\mu_F(x), \mu_Y(true)) \wedge \mu_{X'}(x)) \\
 &= \mathcal{I}(\mu_F(x_0), \mu_Y(true)) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
 \pi_Y(false) &= \sup_x (\mu_R(x, false) \wedge \mu_{X'}(x)) \\
 &= \sup_x (\mathcal{I}(\mu_F(x), \mu_Y(false)) \wedge \mu_{X'}(x)) \\
 &= \mathcal{I}(\mu_F(x_0), \mu_Y(false)) \\
 &= \mu_F(x_0).
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Deze resultaten gelden zowel voor Mamdani’s minimum-operator als Larsens product-operator.

Tabel 4.5 toont de regelset. Elke regel heeft als resultaat of er beweging is ($M(x, y, t) = true$) of niet ($M(x, y, t) = false$). We bespreken nu kort de grondgedachten van elk van deze regels.

1. De eerste regel stelt dat wanneer elk verschilsignaal $\vartheta(x, y, t)$ als klein kan worden beschouwd (op een vaaglogische manier), er geen beweging is. Het antecedent maakt gebruik van de vaaglogische verzameling *KLEIN*.
2. De tweede regel is bedoeld om in de buurt van een bewegend object, de verschilsignalen die slechts optreden langs één zijde (in de horizontale richting), niet als een indicatie voor beweging in te schatten.

Tabel 4.5: De regelset voor algemene K van de vaaglogische bewegingsdetector.

regel	antecedent	consequent
1	$\bigwedge_{i=-K}^K \vartheta(x+i, y, t) = KLEIN$	$M(x, y, t) = false$
2	$(\bigwedge_{i=0}^K \vartheta(x+i, y, t) = KLEIN) \wedge$ $(\bigvee_{i=-K}^{-1} \vartheta(x+i, y, t) = GROOT)$	$M(x, y, t) = false$
3	$(\bigwedge_{i=-K}^0 \vartheta(x+i, y, t) = KLEIN) \wedge$ $(\bigvee_{i=1}^K \vartheta(x+i, y, t) = GROOT)$	$M(x, y, t) = false$
4	$(\bigvee_{i=0}^K \vartheta(x+i, y, t) = GROOT) \wedge$ $(\bigvee_{i=-K}^0 \vartheta(x+i, y, t) = GROOT)$	$M(x, y, t) = true$

3. De derde regel is identiek aan de tweede, maar voor de andere zijde.
4. De vierde regel tenslotte houdt in dat er beweging is, wanneer er zich aan beide zijden een groot verschilsignaal voordoet.

In het totaal gebruiken de regels dus $2K + 1$ verschilsignalen. We kunnen de regelset ook in canonische vorm schrijven waarbij de antecedenten enkel een conjunctie-operator benutten. Dit maakt de betekenis van de regels makkelijker interpreteerbaar en het is bovendien vereist voor sommige software- en hardware-implementaties [84]. We kunnen deze omzetting bekomen door de antecedenten uit te werken m.b.v. de distributiviteitseigenschap.¹ In tabel 4.6 doen we dit voor het geval $K = 2$. De eerste regel bevindt zich reeds in canonische vorm. De tweede en derde regel geven elk aanleiding tot K regels, terwijl de vierde regel $K^2 + 1$ regels induceert. In totaal bekomen we aldus een canonische regelset van $1 + 2K + K^2 + 1 = (K + 1)^2 + 1$ regels. Voor de duidelijkheid gebruiken we een notatie voor de antecedenten, waarbij elk hokje een evaluatie van een verschilsignaal voorstelt. De symbolen ‘ S ’ en ‘ L ’ staan voor “ $KLEIN$ ” en “ $GROOT$ ”, terwijl ‘ X ’ betekent dat er met het corresponderend verschilsignaal geen rekening dient gehouden te worden. Bijvoorbeeld, het antecedent

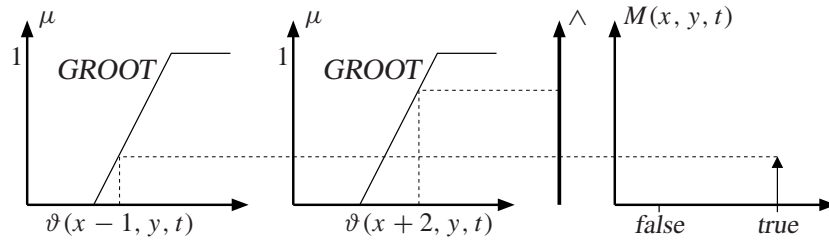
$$\boxed{X} \boxed{L} \boxed{X} \boxed{X} \boxed{L} \quad (4.34)$$

van de vierde regel betekent “ALS $\vartheta(x-1, y, t) = GROOT \wedge \vartheta(x+2, y, t) = GROOT$, DAN $M(x, y, t) = true$ ”. Figuur 4.10 illustreert hoe men vaak de evaluatie van deze regel voorstelt in de vaaglogica.

¹Deze eigenschap geldt voor de maximum- en minimumimplementaties van de vaaglogische disjunctie- en conjunctieoperatoren. Voor de overige implementaties gelden zwakke of geen distributiviteitswetten [72].

Tabel 4.6: De canonische regelset voor $K = 2$.

regel	antecedent	consequent																									
1	<table border="1"><tr><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td></tr></table>	S	S	S	S	S	$M(x, y, t) = false$																				
S	S	S	S	S																							
2	<table border="1"><tr><td>L</td><td>X</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td></tr><tr><td>X</td><td>L</td><td>S</td><td>S</td><td>S</td></tr></table>	L	X	S	S	S	X	L	S	S	S	$M(x, y, t) = false$															
L	X	S	S	S																							
X	L	S	S	S																							
3	<table border="1"><tr><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>L</td><td>X</td></tr><tr><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>X</td><td>L</td></tr></table>	S	S	S	L	X	S	S	S	X	L	$M(x, y, t) = false$															
S	S	S	L	X																							
S	S	S	X	L																							
4	<table border="1"><tr><td>L</td><td>X</td><td>X</td><td>L</td><td>X</td></tr><tr><td>L</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>L</td></tr><tr><td>X</td><td>L</td><td>X</td><td>L</td><td>X</td></tr><tr><td>X</td><td>L</td><td>X</td><td>X</td><td>L</td></tr><tr><td>X</td><td>X</td><td>L</td><td>X</td><td>X</td></tr></table>	L	X	X	L	X	L	X	X	X	L	X	L	X	L	X	X	L	X	X	L	X	X	L	X	X	$M(x, y, t) = true$
L	X	X	L	X																							
L	X	X	X	L																							
X	L	X	L	X																							
X	L	X	X	L																							
X	X	L	X	X																							



Figuur 4.10: De vaaglogische regel met het antecedent uit formule (4.34) kan worden voorgesteld door beide lidmaatschapsgraden te combineren en toe te kennen aan $M(x, y, t)$.

De laatste stap van de vaaglogische bewegingsdetector is de defuzzificatie, waarbij het de bedoeling is één enkel getal te bekomen dat de indicatie is voor beweging. Net als de meerpuntsdetectoren uit formules (4.15) en (4.16), willen we dat onze bewegingsdetector rekening houdt met de resultaten uit het vorige beeld. We combineren dan ook de vertraagde versies tot $M'(x, y, t)$

$$\begin{aligned}
 (M'(x, y, t) = false) &= (M(x, y - 1, t - 1) = false) \vee \\
 & (M(x, y + 1, t - 1) = false), \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M'(x, y, t) = true) &= (M(x, y - 1, t - 1) = true) \vee \\
 & (M(x, y + 1, t - 1) = true). \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Merk op dat dit neerkomt op het impliciet uitbreiden van de regelset. De uiteindelijke plausibiliteit voor de uitspraken “er is beweging” en “er is geen be-

weging” wordt

$$\begin{aligned}\pi_{M(x,y,t)}(\text{true}) &= (M(x, y, t) = \text{true} \vee M'(x, y, t) = \text{true}) \\ \pi_{M(x,y,t)}(\text{false}) &= (M(x, y, t) = \text{false} \wedge M'(x, y, t) = \text{false}).\end{aligned}$$

De numerieke waarde uit het interval $[0, 1]$ die de kans op beweging aangeeft wordt tenslotte gegeven door

$$\gamma(x, y, t) = \frac{\pi_{M(x,y,t)}(\text{true})}{\pi_{M(x,y,t)}(\text{true}) + \pi_{M(x,y,t)}(\text{false})}. \quad (4.37)$$

Deze defuzzificatiemethode stemt overeen met het vaaglogisch gemiddelde (*Eng.* fuzzy mean), dat wegens zijn efficiëntie vaak gebruikt wordt in vaaglogische regelaars [179].

4.6 Bewegingsadaptieve herbemonstering

We zullen nu de vaaglogische bewegingsdetector aanwenden, om een beeldsequentie van het alternerend naar het progressief videoformaat om te zetten. Net als andere onderzoekers [7, 24, 111] stellen we voor om als functie van wat de bewegingsdetector aangeeft, een spatiale en temporale interpolatietechniek te combineren. Een vaak voorkomende keuze is temporale dichtste-buurinterpolatie (voor de statische gebieden) en spatiale lineaire interpolatie (voor de bewegende gebieden), zodat de waarden van de ontbrekende lijnen kunnen berekend worden met

$$\begin{aligned}g(x, y, t) &= (1 - \gamma(x, y, t)) g_{\mathbf{R}}(x, y, t - 1) \\ &+ \gamma(x, y, t) \frac{g_{\mathbf{R}}(x, y - 1, t) + g_{\mathbf{R}}(x, y + 1, t)}{2}.\end{aligned} \quad (4.38)$$

Prodan [111] toont aan hoe de frequentiekaracteristiek van het gecombineerde interpolatiefilter wijzigt, naarmate de wegingsfactor $\gamma(x, y, t)$ wijzigt. In het geval dat de bewegingsdetector correct de aanwezigheid van beweging inschat, worden de ongewenste replica's in het frequentiedomein verwijderd of onderdrukt.

Voor kleur wordt vaak de YUV-kleurenruimte gebruikt die een kleur karakteriseert aan de hand van één luminantie- (Y) en twee chrominantiesignalen (U en V). Naar het voorbeeld van de meeste andere technieken doet ook bij ons het luminantiesignaal dienst als ingangssignaal voor de bewegingsdetector en passen we de gekozen herbemonsteringstechniek daarna toe op beide chrominantiesignalen.

4.6.1 Optimum

De twee interpolatietechnieken, waaruit formule (4.38) is opgebouwd, zijn vrij eenvoudig. Een belangrijke vraag die we ons daarom vooraf stellen (en die niet beantwoord wordt in de vakliteratuur) is het potentieel van deze gecombineerde herbemonsteringstechniek. We zoeken dan ook eerst uit wat de theoretisch maximaal haalbare performantie van deze aanpak is. Uit ons onderzoek zal blijken dat het optimum hoog is, zelfs voor beeldsequenties met relatief veel beweging.

Stel dat we beschikken over een originele beeldsequentie $g_{\text{pro}}(x, y, t)$ in progressief videoformaat, die we altemerend maken door onderbemonstering naar het rooster \mathbf{R} . Interpolatie op de ontbrekende lijnen gebeurt dan m.b.v.

$$g(x, y, t) = (1 - \gamma(x, y, t)) g_T(x, y, t) + \gamma(x, y, t) g_S(x, y, t), \quad (4.39)$$

waarbij $g_T(x, y, t)$ en $g_S(x, y, t)$ respectievelijk de resultaten m.b.v. de temporale en spatiale interpolatietechniek voorstellen:

$$\begin{aligned} g_T(x, y, t) &= g_{\mathbf{R}}(x, y, t - 1), \\ g_S(x, y, t) &= \frac{g_{\mathbf{R}}(x, y - 1, t) + g_{\mathbf{R}}(x, y + 1, t)}{2}. \end{aligned}$$

We zoeken nu de optimale waarde $\gamma_{\text{opt}}(x, y, t)$, zodanig dat de kwadratische fout tussen de herbemonsterde versie $g(x, y, t)$ en de originele versie $g_{\text{pro}}(x, y, t)$ minimaal wordt:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{opt}}(x, y, t) &= \arg \left(\min_{\gamma(x, y, t)} \left((1 - \gamma(x, y, t)) g_T(x, y, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma(x, y, t) g_S(x, y, t) - g_{\text{pro}}(x, y, t) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

We kunnen de optimale waarde $\gamma_{\text{opt}}(x, y, t)$ bekomen door het rechterlid af te leiden naar $\gamma(x, y, t)$ en gelijk te stellen aan nul. Aldus bekomen we

$$\gamma_{\text{opt}}(x, y, t) = \frac{g_{\text{pro}}(x, y, t) - g_T(x, y, t)}{g_S(x, y, t) - g_T(x, y, t)}, \quad (4.40)$$

waarbij we $\gamma_{\text{opt}}(x, y, t)$ beperken tot het interval $[0, 1]$, omdat dit ook het bereik is van een ‘echte’ bewegingsdetector.

Om de fout tussen een originele en herbemonsterde beeldsequentie te kwantificeren, wordt vaak de gemiddelde kwadratische fout (MSE, *Eng.* Mean-Squared-Error) aangewend, die we berekenen m.b.v. het luminantiesignaal:

$$\text{MSE} = \frac{\sum_x \sum_y \sum_t (g_{\text{pro}}(x, y, t) - g_{\mathbf{R}}(x, y, t))^2}{M_x M_y M_t}, \quad (4.41)$$

waarbij we sommeren over alle beeldpunten op het progressieve rooster $\tilde{\mathbf{R}}$ en M_x , M_y en M_t het totaal aantal waarden in de horizontale, verticale en temporele dimensie zijn. Daarnaast wordt ook geregeld de afgeleide pieksignaalruisverhouding (PSNR, *Eng.* Peak-Signal-to-Noise-Ratio) gebruikt:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{L^2}{\text{MSE}} \right), \quad (4.42)$$

waarbij L de maximale waarde van het luminantiesignaal voorstelt.

4.6.2 Resultaten

We zullen de resultaten van de verschillende herbemonsteringstechnieken voor het omzetten van een beeldsequentie naar progressief videoformaat bespreken aan de hand van verschillende testsequenties. Figuur 4.11 toont de zes testsequenties met een representatief beeld. Elk van deze sequenties is progressief, hetgeen toelaat om de foutmaat te berekenen na onderbemonstering en herbemonstering. Naast een kwantitatieve evaluatie zullen we ook trachten enkele kwalitatieve resultaten te tonen. Het is van belang om de verschillende technieken afzonderlijk te evalueren voor gebieden met en zonder beweging, omdat in beide gevallen het gedrag totaal anders is. Hiertoe beschouwen we twee fragmenten uit de testsequentie “salesman” (zie figuur 4.12).

De vaaglogische bewegingsdetector heeft drie belangrijke parameters: het aantal verschilsignalen waarmee rekening wordt gehouden (afhankelijk van K) en de parameters a en b die de vorm van de lidmaatschapsfuncties *KLEIN* en *GROOT* bepalen. Figuur 4.13 toont de MSE van het fragment met veel beweging voor verschillende waarden van K , a en b . Het is logisch dat al te grote waarden van a en b de fout vergroten door het introduceren van spookartefacten. Anderzijds blijkt er zich een optimale waarde te bevinden voor $a = 1$ à 2 en $b = 5$ à 6 , wat betekent dat het verschillend maken van a en b (en aldus het introduceren van een “vaag” gebied in de lidmaatschapsfuncties) een positieve invloed heeft op het resultaat. Door meer verschilsignalen te laten bijdragen tot de bewegingsdetector (en dus K te vergroten), wordt de spreiding van de foutmaat kleiner over het bereik van a en b dat we hebben onderzocht. De bewegingsdetector wordt dus robuuster, doordat de spatiale en temporale correlatie meer wordt uitgebuit. Figuur 4.14 geeft een heel ander resultaat voor de MSE van het statische fragment. De fout vermindert alleen maar voor hogere waarden van a en b . Zeker de keuze $a \geq 1$ lijkt noodzakelijk: de aanwezigheid van ruis wordt anders verkeerdelijk geïnterpreteerd als beweging door kleine verschilsignalen. Zoals figuur 4.15 toont, krijgen we voor de testsequentie in zijn geheel een fout die het evenwicht houdt tussen de hoeveelheid bewegende en statische beeldfragmenten. De “optimale” waarden voor a en b , die

een minimale MSE voor de totale beeldsequentie opleveren, scoren kwalitatief ruim onvoldoende. Dit zorgt bij de meeste testsequenties immers voor te hoge waarden van a en b , zodat er veel bewegingsartefacten (zoals spookartefacten) optreden.

Als compromis tussen robuustheid en computationele complexiteit kiezen we vanaf nu voor $K = 2$. Vervolgens onderzoeken we het gebruik van andere implementaties voor de vaaglogische conjunctie- en disjunctieoperatoren. Figuur 4.16 toont de resultaten van de andere implementaties (in vergelijking met figuur 4.13 (b)). Het algebraïsch product/som presteren iets minder goed voor kleine waarden van a en iets beter voor hoge waarden van b . Het gebonden en drastisch product/som scoren minder goed, in het bijzonder voor lage waarden van a . Deze resultaten tonen aan dat het minimum en maximum een goede keuze zijn voor de vaaglogische conjunctie en disjunctie, die bovendien eenvoudig geïmplementeerd kunnen worden in zowel soft- als hardware.

We vergelijken nu de resultaten van de bewegingsadaptieve herbemonsteringstechniek m.b.v. de vaaglogische bewegingsdetector met andere methoden voor de verschillende testsequenties. Wij geven eerst een kort overzicht van de methoden die we hebben geïmplementeerd:

- Spatiale dichtste-buur-interpolatie (*Eng.* line-replication). Dupliceert eenvoudigweg de vorige lijn.
- Spatiale lineaire interpolatie (*Eng.* line-averaging). Berekent de ontbrekende lijn als het gemiddelde van de vorige en de volgende.
- Temporale dichtste-buur-interpolatie (*Eng.* field-replication). Dupliceert de lijn uit het vorige halve beeld. Deze en de vorige techniek worden vaak gebruikt voor televisiecaptatiekaarten.
- De driepuntsmediaan (*Eng.* 3-taps median) volgens formule (4.19).
- De negenpuntsmediaan (*Eng.* 9-taps median) volgens formule (4.20).
- Roberts' methode volgens formule (4.17). Daarnaast hebben we ook een meer geavanceerde versie geïmplementeerd [117] die de verschillende termen een additionele wegingsfactor geeft.
- ELA (*Eng.* edge-based line-averaging) is een niet-lineaire spatiale interpolatietechniek die rekening tracht te houden met de randen [80].
- Bewegingsadaptieve interpolatie m.b.v. de driepuntsbewegingsdetector (volgens formule (4.15)).

- Bewegingsadaptieve interpolatie m.b.v. de zevenpuntsbewegingsdetector (volgens formule (4.16)).
- Bewegingsadaptieve interpolatie m.b.v. de vaaglogische bewegingsdetector.

Tabel 4.7 toont de MSE-waarden voor elk van deze methoden en testsequenties. Op basis van deze resultaten kunnen we numeriek de beste technieken bepalen: de methoden van Roberts en de bewegingsadaptieve technieken (m.b.v. de driepunts-, zevenpunts- en vaaglogische bewegingsdetector). Op kwalitatief vlak presteert de vaaglogische methode echter beter dan de andere methoden. Dit wordt trouwens duidelijk wanneer we de fout per beeld laten zien. Figuur 4.17 toont de MSE voor de eerste 70 beelden van de testsequentie “suzie”. Wanneer er veel beweging optreedt (beelden 40 tot 60), presteert het vaaglogisch algoritme zeer goed, terwijl de andere algoritmen lijden onder de bewegingsartefacten. In een fragment met minder beweging (beelden 1 tot 40) is de prestatie van de vaaglogische interpolatie beter dan de interpolatie m.b.v. de meerpuntdetectoren en iets minder goed dan Roberts’ methoden. Figuur 4.18 geeft een ander voorbeeld, waarbij er duidelijk bewegingsartefacten optreden in een fragment uit de testsequentie “salesman”. De vaaglogische techniek legt aldus de nodige “voorzichtigheid” aan de dag in gebieden met (snelle) beweging, waardoor bewegingsartefacten minder snel optreden.

We kunnen voor elk van de testsequenties het optimum van de bewegingsadaptieve interpolatietechniek berekenen. Hieruit blijkt dat er nog ruimte is voor verbetering van bewegingsdetectoren. Merk op dat ook kwalitatief deze “optimale” resultaten zeer goed zijn. Zelfs voor sequenties met heel veel beweging (zoals “foreman”) zijn bijzonder goede resultaten haalbaar: de MSE is nog steeds een stuk kleiner dan bij de andere methoden.

Tabel 4.7: Een overzicht van de resultaten (MSE) die we bekomen voor de verschillende testsequenties met de methoden voor het omzetten van een beeldsequentie van een alternerend naar een progressief videoformaat.

	“salesman”	“foreman”	“mobile”	“suzie”	“deadline”	“tcm”
herbemonsteringstechniek						
spatiale dichtste-buur-interpolatie	71.9	112	61.2	28.8	128	482
spatiale lineaire interpolatie	29.5	43.7	26.2	9.76	58.5	259
temporale dichtste-buur-interpolatie	40.2	101	73.5	29.9	27.2	11.0
driepuntsmediaan	67.3	112	61.0	29.3	128	482
negenpuntsmediaan	39.9	101	73.7	30.0	26.8	908
ELA	43.5	39.9	32.3	12.4	95.2	353
Roberts’ methode	14.1	32.2	23.5	7.67	10.3	8.07
Roberts’ methode (geavanceerd)	13.3	31.3	20.9	6.41	8.83	3.67
adaptief m.b.v. driepuntsbewegingsdetector	12.5	40.0	23.5	8.51	11.4	41.0
adaptief m.b.v. zevenpuntsbewegingsdetector	13.0	41.4	24.4	8.93	12.8	5.47
adaptief m.b.v. vaaglogische bewegingsdetector	11.9	31.6	20.8	7.61	8.93	8.19
optimum	6.03	10.8	8.82	2.57	3.28	1.51

(a)
“salesman”
 352×288
50 beelden



(b)
“foreman”
 176×144
400 beelden



(c)
“mobile”
 720×576
40 beelden



(d)
“suzie”
 176×144
150 beelden



(e)
“deadline”
 352×288
45 beelden



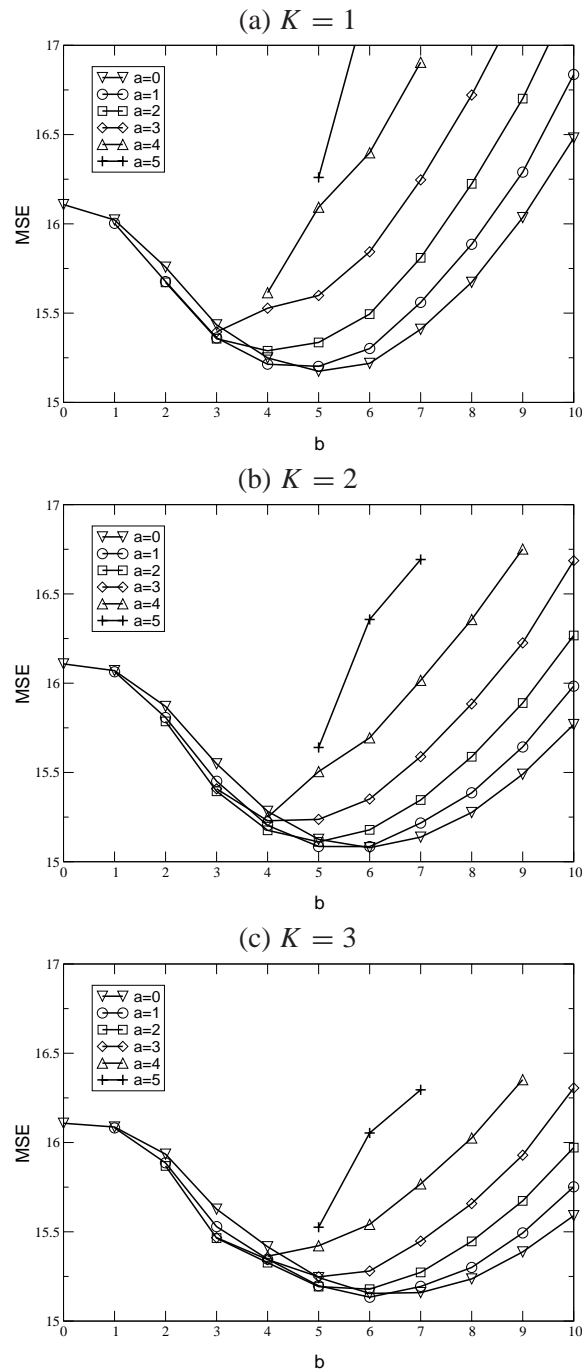
(f)
“tcm”
 640×360
150 beelden



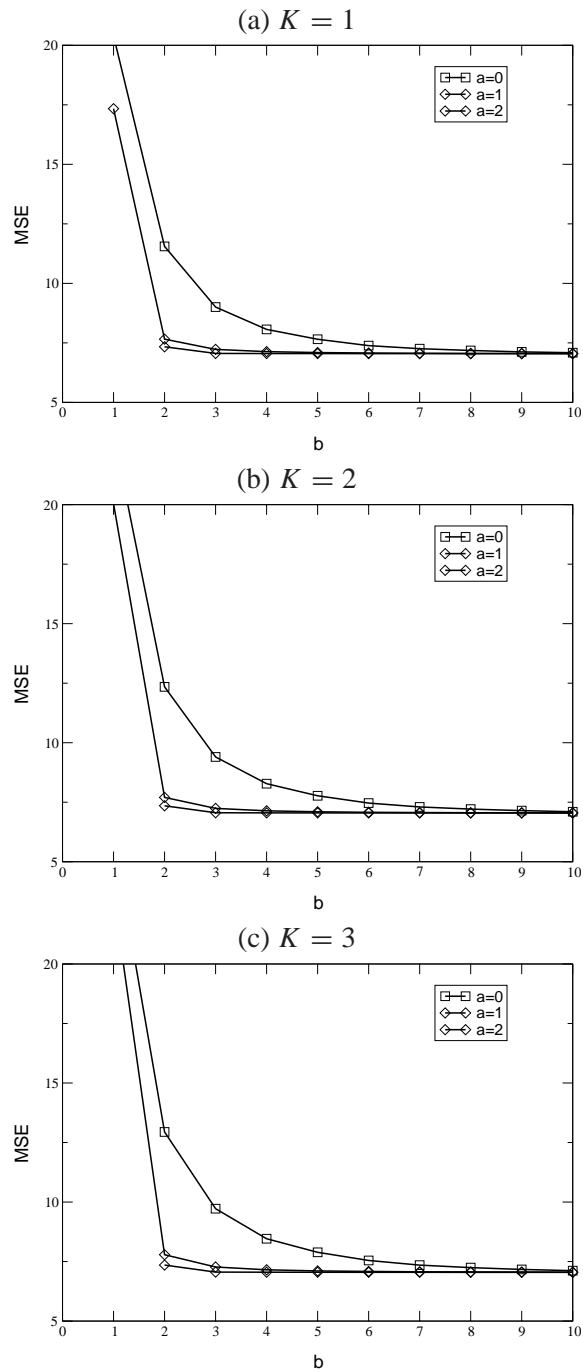
Figuur 4.11: De verschillende testsequenties met hun spatiale resolutie en het aantal beelden.



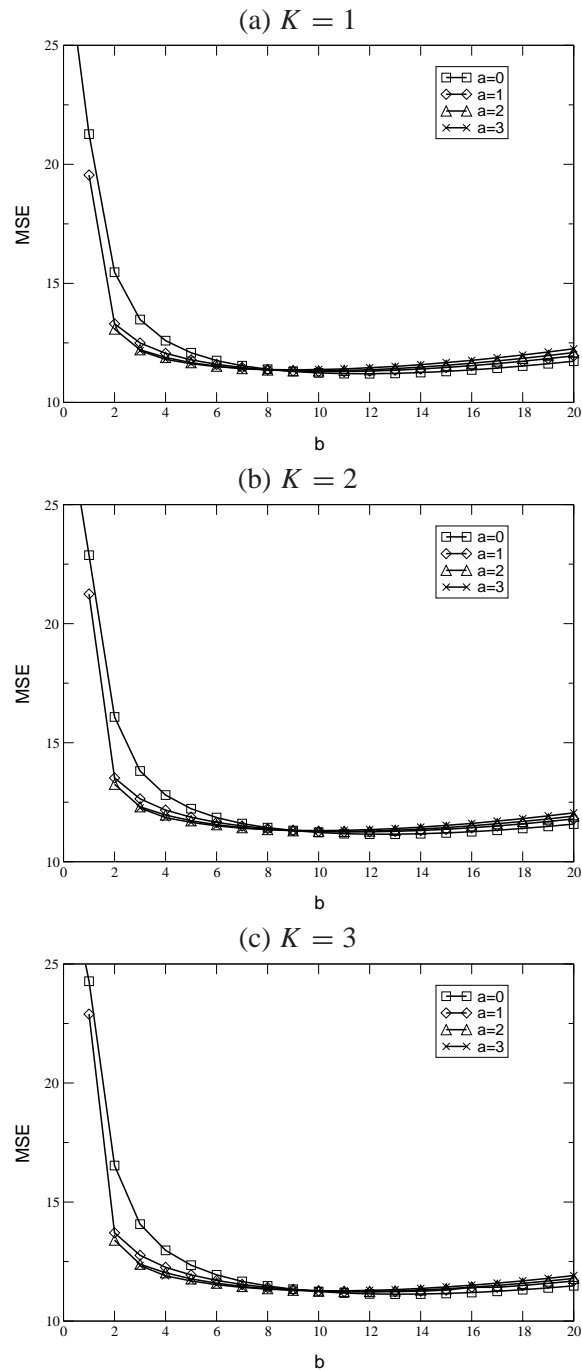
Figuur 4.12: De rechthoekige gebieden $(120, 90) \rightarrow (200, 210)$ (beelden 34 tot 44) en $(270, 225) \rightarrow (350, 285)$ (beelden 10 tot 20) uit de testsequentie “salesman” bevatten respectievelijk veel en weinig beweging.



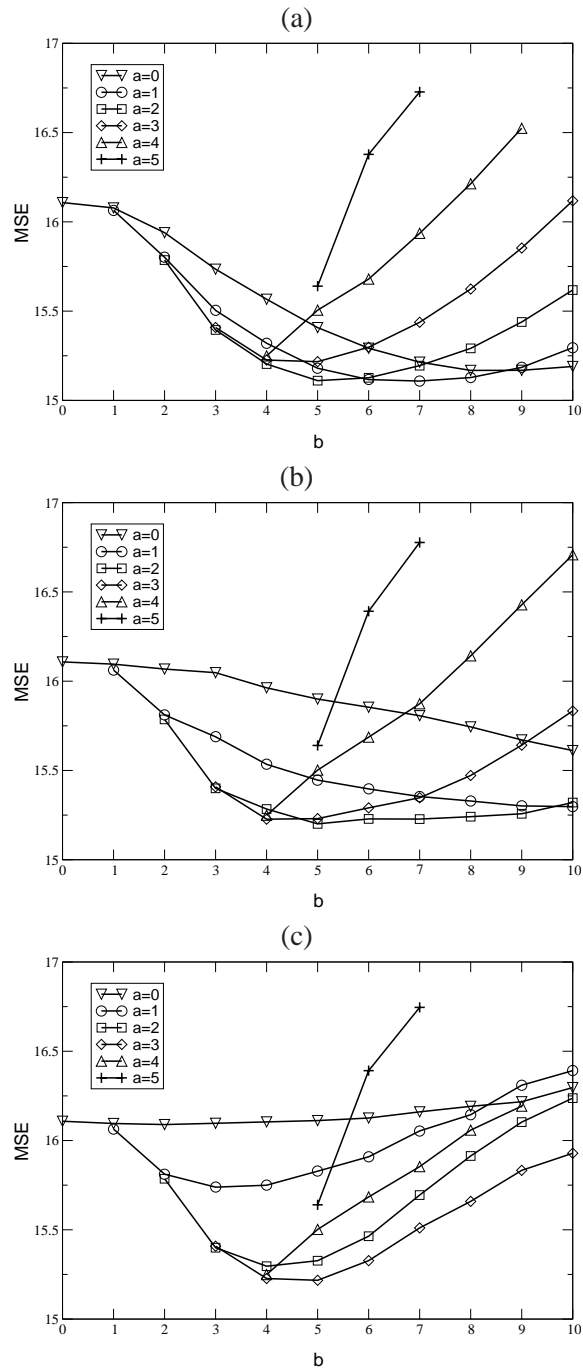
Figuur 4.13: Het fragment uit de testsequentie “salesman” met veel beweging: de MSE voor verschillende waarden van de parameters a , b en (a) $K = 1$, (b) $K = 2$, (c) $K = 3$.



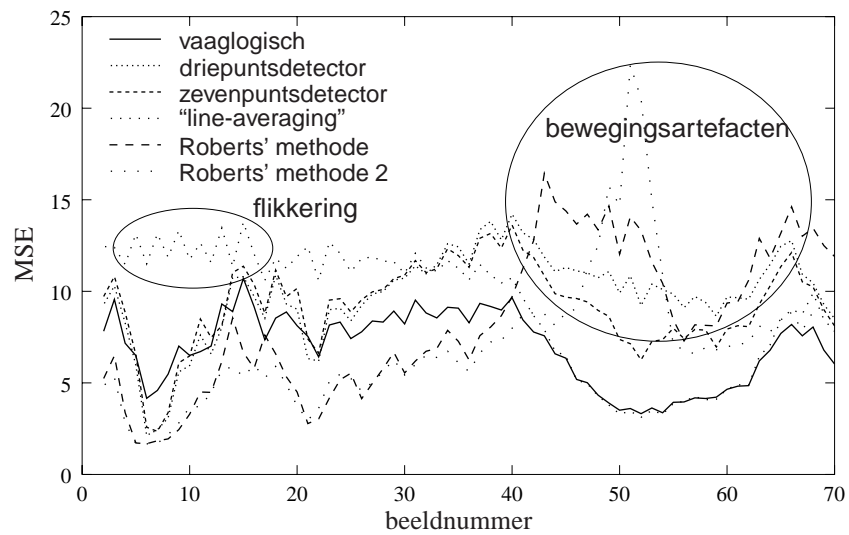
Figuur 4.14: Het statische fragment uit de testsequentie “salesman”: de MSE voor verschillende waarden van de parameters a , b en (a) $K = 1$, (b) $K = 2$, (c) $K = 3$.



Figuur 4.15: De testsequentie “salesman” in zijn geheel: de MSE voor verschillende waarden van de parameters a , b en (a) $K = 1$, (b) $K = 2$, (c) $K = 3$.



Figuur 4.16: Het fragment uit de testsequentie “salesman” met veel beweging: de MSE voor andere implementaties voor de vaaglogische conjunctie- en disjunctie-operatoren: (a) algebraïsch product/som, (b) gebonden product/som, (c) drastisch product/som.



Figuur 4.17: MSE voor de testsequentie "suzie" als functie van het beeldnummer. Merk op dat de techniek met de vaaglogische bewegingsdetector het goed doet in fragmenten met weinig beweging (de eerste 40 beelden), maar verder ook weinig bewegingsartefacten introduceert bij veel beweging (beelden 40-60).

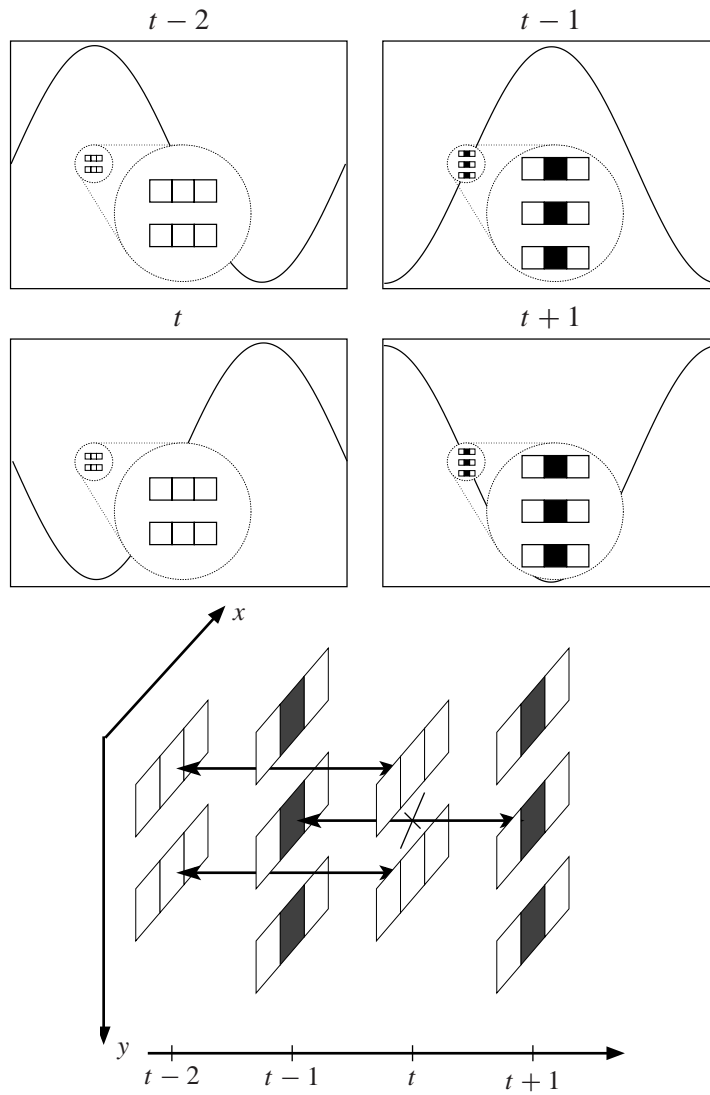


Figuur 4.18: Een beeld van het fragment uit de testsequentie “salesman” met veel beweging. (a) Driepuntsdetector. (b) Zevenpuntsdetector. (c) Roberts’ methode. (d) Roberts’ methode (geavanceerd). (e) Vaaglogische methode. De MSE voor het fragment zijn respectievelijk 27.04, 21.39, 47.24, 52.59 en 16.38.

4.6.3 Evaluatie in ware tijd

In het kader van een samenwerking met de industriële partner BARCO werd de vaaglogische bewegingsdetector geïmplementeerd in een hardwareprototype dat gebruik maakt van generische componenten zoals FPGAs (*Eng.* Field Programmable Gate Array). Deze implementatie toont de haalbaarheid van een implementatie in hardware aan en laat toe om het algoritme ook in ware tijd te evalueren.

Voor natuurlijke beeldsequenties, zoals b.v. televisiebeelden, zijn de resultaten overtuigend en beter dan andere methoden die eveneens in hardware werden geïmplementeerd. Ook eenvoudige synthetische beelden, zoals stilstaande tekst (b.v. voetbaluitslagen of teletekst), worden goed omgezet naar het progressieve videoformaat. Het algoritme scoort echter niet goed voor synthetische beeldsequenties met (zeer) fijne details die op een periodieke manier bewegen. We illustreren dit m.b.v. een vereenvoudigd voorbeeld in figuur 4.19. De sinusoidale curve schuift elk beeld een kwart van zijn periode naar rechts. De situatie voor een vaste spatiale lokatie in het beeld wordt aangegeven door de cirkeltjes. Onderaan krijgen we een indruk van hetgeen de bewegingsdetector in die omgeving waarneemt. Door de periodieke aard van de beweging is het onmogelijk te zeggen of het hier al dan niet om beweging gaat. Aangezien de vaaglogische bewegingsdetector in dit geval geen beweging detecteert, zal er verkeerdelijk voor temporale interpolatie gekozen worden die storende spookartefacten zal veroorzaken. Ook andere technieken, zoals Roberts' methode en de meerpuntsbewegingsdetectoren kennen dit probleem. De spatiale en de mediaanmethoden echter niet.



Figuur 4.19: De sinusoidale curve (bovenaan) schuift elk beeld een kwart van zijn periode naar rechts. We beschouwen steeds dezelfde spatiale lokatie aangeduid in de afzonderlijke beelden. Onderaan stellen we deze lokale situatie voor. Op basis van de verschilsignalen, die allen nul zijn, is het onmogelijk om de beweging te detecteren.

4.7 Automatische aanpassing aan het ruisniveau

De resultaten die we tot nog toe besproken hebben, maken duidelijk dat een gepaste instelling van de parameters a en b noodzakelijk is voor de goede werking van de vaaglogische bewegingsdetector. De testsequenties zijn allen van dezelfde aard en bevatten zeer weinig ruis, waardoor de instelling van deze parameters voor elk van hen gelijk kan gekozen worden. In de praktijk is het echter mogelijk dat er hogere ruisniveaus optreden. Zowel tijdens de captatie, de verwerking als de transmissie van beeldsequenties kan er ruis geïntroduceerd worden [139]. Omwille van zijn eenvoud wordt het model van additieve gausiaanse ruis vaak gebruikt [62, 65, 139]. We stellen een aanpak voor om de parameters a en b automatisch in te stellen, als functie van de geschatte ruisinhoud.

De grondgedachte van de methode die we voorstellen, is vrij eenvoudig. We schatten de standaardafwijking van de ruis door gebruik te maken van de hypothese, dat een percentage p van het beeld bestaat uit homogene gebieden. We gebruiken in wat volgt het luminantiesignaal, dat we onderstellen in het interval $[0, 1]$.

1. Allereerst verdelen we het beeld in niet-overlappende blokken \mathbf{B}_i die elk $M_1 \times M_2$ beeldelementen bevatten.
2. Binnen elk blok \mathbf{B}_i berekenen we de standaardafwijking $\sigma_{\mathbf{B}_i}$.
3. Vervolgens stellen we een histogram op van deze standaardafwijkingen.
4. We gebruiken nu de hypothese die stelt dat een percentage p van de blokken behoort tot homogene gebieden in het beeld. Met behulp van het histogram kunnen we de standaardafwijking σ bepalen, zodat een percentage p van de blokken homogener is (hetgeen wil zeggen met een lagere standaardafwijking dan σ). Deze waarde is onze schatting voor de standaardafwijking van de ruis.

Indien we deze methode wensen te gebruiken voor elk beeld uit een beeldsequentie, vraagt vooral het berekenen van de standaardafwijking per blok vrij veel rekentijd. Een mogelijke vereenvoudiging die we voorstellen, is om de standaardafwijking te vervangen door de heterogeniteit. De heterogeniteit wordt gedefinieerd als het verschil tussen de maximum- en minimumwaarde binnen een blok:

$$h_i = \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}_i} g(\mathbf{x}) - \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}_i} g(\mathbf{x}). \quad (4.43)$$

In tegenstelling tot de standaardafwijking, kan de heterogeniteit veel gemakkelijker berekend worden. Een belangrijk nadeel van de heterogeniteit is wel dat

deze statistisch minder robust is. Een grote afwijking van de waarde van één enkel beeldelement zal een sterke invloed hebben. Voor sommige ruistypes, zoals b.v. impulsruis, biedt deze aanpak daarom geen oplossing.

Het verband tussen de heterogeniteit en de standaardafwijking is eenvoudig af te leiden. Beschouwen we de waarden binnen een blok als exemplaren van eenzelfde toevalsproces. Indien de standaardafwijking van de probabiliteitsverdeling wordt aangepast, herschaalt de probabiliteitsdichtheidsfunctie analoog. Ook het maximum en het minimum zal dus geschaald worden met dezelfde factor, waardoor er een lineair verband bestaat tussen de heterogeniteit en de standaardafwijking:

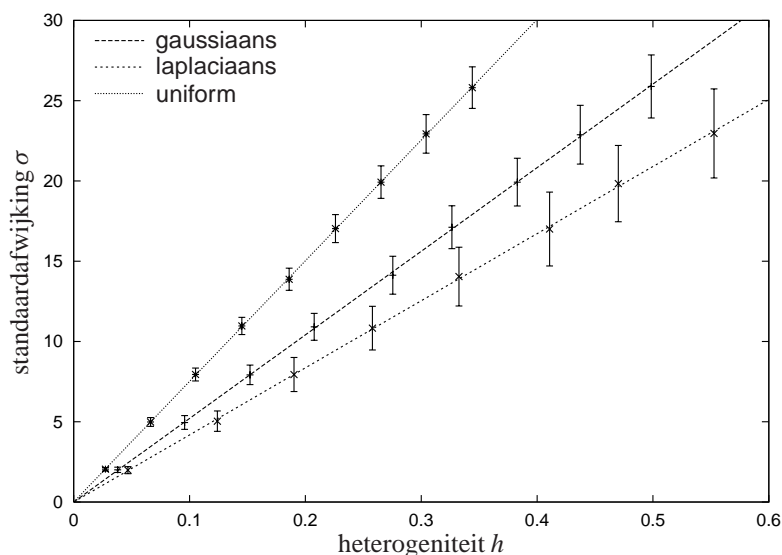
$$\sigma = \kappa_{M_1 \times M_2} h. \quad (4.44)$$

De factor $\kappa_{M_1 \times M_2}$ is afhankelijk van de blok grootte en het ruismodel. Deze factor kan empirisch bepaald worden door een groot aantal synthetische blokken te genereren, waaraan we zelf synthetisch gegenereerde ruis toevoegen met een gekende distributie en standaardafwijking. Het bepalen van de heterogeniteit toont het lineair verband met de standaardafwijking. Figuur 4.20 geeft het resultaat dat we verkrijgen voor een blok grootte van 9×9 en verschillende probabiliteitsdichtheidsfuncties.

Een eerste experiment bestaat erin de voorgestelde methode uit te testen op de originele testsequenties. Rekening houdend met het alternerend videoformaat, kiezen we voor een blok grootte van 8×4 . Daarnaast gebruiken we de hypothese dat 10% van deze blokken afkomstig zijn uit homogene gebieden. De afwijking tussen de opeenvolgende schattingen van de ruisinhoud in de beelden van de beeldsequenties blijkt klein te zijn. Daardoor kunnen we aan de hand van de vorige resultaten, die ons de gepaste waarden voor a en b opleveren, de volgende vuistregel afleiden voor de keuze van a en b als functie van σ :

$$a = \sigma, \quad b = 3\sigma. \quad (4.45)$$

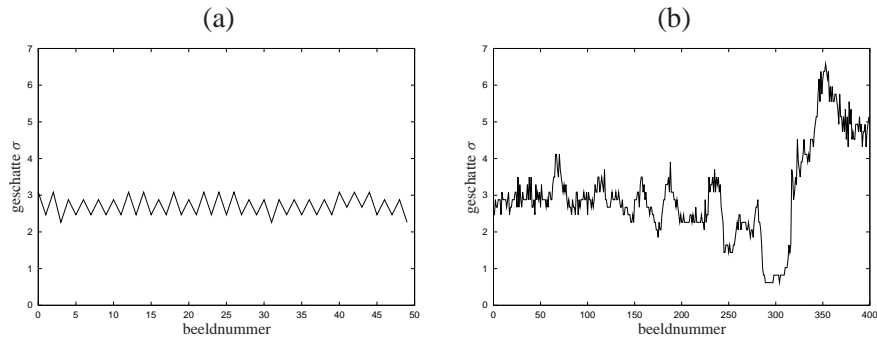
Figuur 4.21 (a) toont als voorbeeld het verloop van de schatting van de standaardafwijking van de ruis als functie van het beeldnummer voor “salesman”. De enige uitzondering waarvoor de variaties op de geschatte ruisinhoud groter zijn, is de beeldsequentie “foreman”, hetgeen wordt getoond in figuur 4.21 (b). Op het einde van de beeldsequentie is er duidelijk een sterke variatie op de geschatte ruisinhoud. We kunnen deze als volgt verklaren. De lage waarden rond het beeldnummer 300 treden op tijdens een sterke beweging van de camera. De bewegingsvervaging die hierdoor optreedt, veroorzaakt meer homogeniteit in de beelden en leidt aldus tot een lagere schatting van de heterogeniteit. De hogere waarden rond het beeldnummer 350 daarentegen, treden op, omdat de



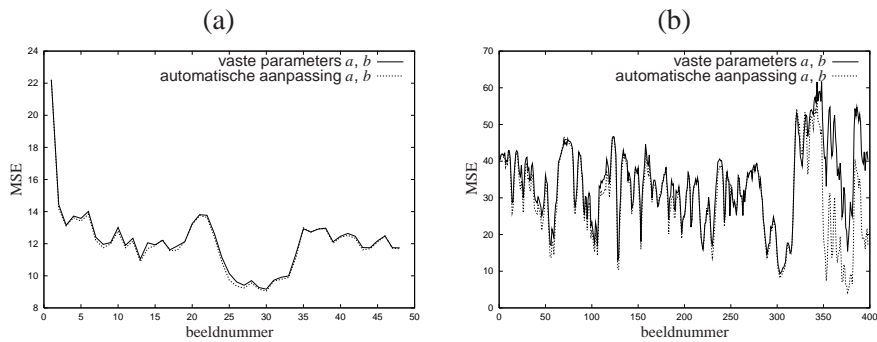
Figuur 4.20: Het verband tussen de heterogeniteit h en de standaardafwijking σ in het geval van gaussiaanse, laplaciaanse en uniforme ruis is lineair. De foutbalken duiden op de nauwkeurigheid van deze schatting (m.n. de standaardafwijking). De blokgrootte is 9×9 .

camera tot rust komt en de spatiale details scherp in beeld komen, waardoor de beelden minder homogeen zijn. Het uiteindelijke resultaat van de bewegings-adaptieve herbemonsteringstechniek stellen we voor in figuur 4.22 onder de vorm van de kwadratische fout als functie van het beeldnummer. Voor beeldsequenties, zoals “salesman”, is er nauwelijks een verschil. Voor de beeldsequentie “foreman” merken we vooral een verbetering op het einde van de beeldsequentie.

In een tweede experiment voegen we zelf ruis toe aan de beeldsequenties. We degraderen het luminantiesignaal van elk beeld met gaussiaans en onafhankelijk verdeelde ruis met standaardafwijking $\sigma = 2.5$ en $\sigma = 5.5$. Figuur 4.23 toont hoe de heterogeniteit stijgt als functie van de toegevoegde ruis. Het is echter moeilijk om deze resultaten kwantitatief voor te stellen, aangezien de progressieve beeldsequentie met ruis geen doel op zich is. Merk op dat ook de progressieve beeldsequentie zonder ruis geen doel op zich is, aangezien we ons niet toespitsen op ruisreductie. Een subjectieve beoordeling van de beeldsequenties leert echter dat de bewegingsadaptieve herbemonsteringstechniek zonder automatische aanpassing van de parameters a en b teveel aanleiding geeft tot valse detectie van beweging. Hierdoor ontstaan, vooral in een statische achtergrond, vele flikkerartefacten. We kunnen dit illustreren door de

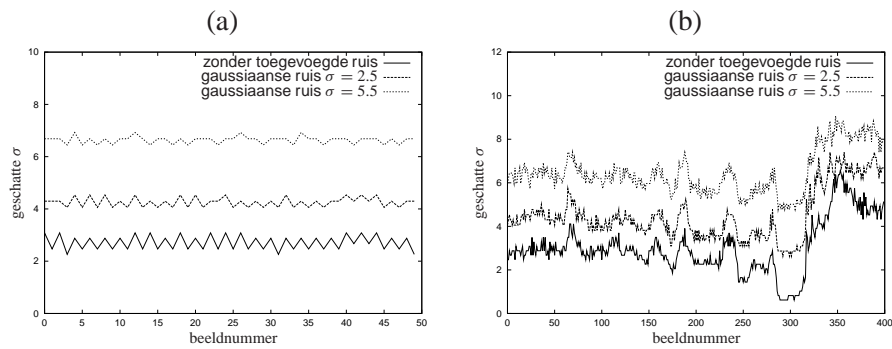


Figuur 4.21: De schatting van de standaardafwijking σ als functie van het beeldnummer. (a) Testsequentie "salesman". (b) Testsequentie "foreman".

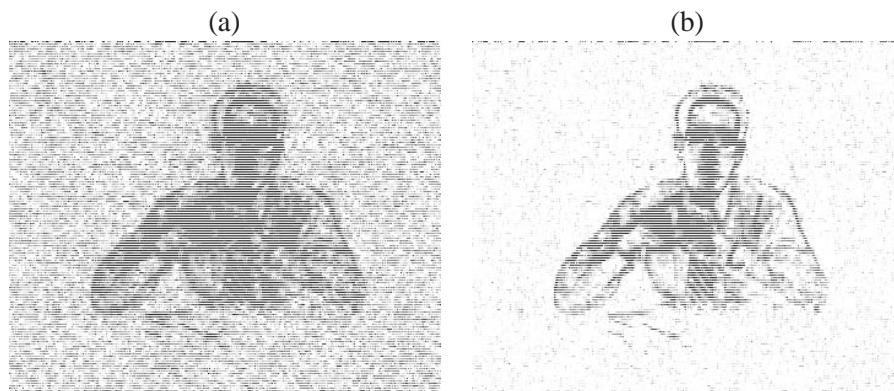


Figuur 4.22: De kwadratische fout van de bewegingsadaptieve herbemonsteringstechniek als functie van het beeldnummer. (a) Testsequentie "salesman". (b) Testsequentie "foreman".

waarde $\gamma(x, y, t)$ van de bewegingsdetector voor te stellen voor één beeld. Figuur 4.24 toont $\gamma(x, y, t)$ zonder en met automatische aanpassing van a en b . Merk op dat $\gamma(x, y, t)$ enkel berekend wordt voor de ontbrekende lijnen van het alternerend videoformaat. Tot slot merken we op dat deze resultaten kwalitatief een betere indruk maken dan de originele gedegradeerde progressieve beeldsequenties. We kunnen dit verklaren vanuit de filterende werking van de interpolatiefuncties, die een gedeelte van de toegevoegde ruis onderdrukt.



Figuur 4.23: De schatting van de standaardafwijking σ stijgt naarmate we meer ruis aan de beeldsequentie toevoegen. (a) Testsequentie “salesman”. (b) Testsequentie “foreman”.



Figuur 4.24: De waarde $\gamma(x, y, t)$ van de bewegingsdetector voor beeldnummer 11 uit de testsequentie “salesman” bij gaussiaanse ruis met $\sigma = 2.5$. (a) De waarden van de parameters a en b zijn vast en optimaal voor de beeldsequentie zonder ruis. (b) De automatische aanpassing stelt hogere waarden in voor a en b , hetgeen betere resultaten oplevert.

4.8 Conclusie

Het alternerend videoformaat is nog steeds alomtegenwoordig in de televisiewereld. Belangrijke nadelen zijn de visuele artefacten en de ongeschiktheid voor reproductietechnieken die nood hebben aan een progressief beeld. Een goede techniek voor het omzetten van een beeldsequentie van het alternerend naar het progressief videoformaat kan hier een oplossing bieden. Een eerste vaststelling van ons onderzoek is dat een eenvoudige bewegingsadaptieve herbemonsteringstechniek een groter potentieel heeft dan algemeen wordt aangenomen. De vaaglogische bewegingsdetector doet een poging de spatiale en temporale correlatie die aanwezig is in een beeldsequentie uit te buiten om een betrouwbare uitspraak te doen over de aanwezigheid van beweging. Deze methode werd vergeleken met andere technieken en bleek zeer goed te presteren. Een belangrijk voordeel van de vaaglogische techniek is de “voorzichtigheid” in gebieden met beweging waardoor bewegingsartefacten zelden voorkomen. Dankzij de samenwerking met de industriële partner BARCO was het mogelijk om m.b.v. een prototype in hardware het algoritme te evalueren in ware tijd. Naast de algemeen goede resultaten, traden er enkel problemen op voor synthetische beeldsequenties met fijne details en periodieke beweging. Tot slot hebben we een methode voorgesteld die toelaat om de parameters van de vaaglogische bewegingsdetector automatisch in te stellen.

Hoofdstuk 5

Verstoren van beelden

5.1 Inleiding

Een interessant bijproduct van dit werk is het gebruik van de discrete prolate sferoidale rijen (DPSS) voor het verstoren van beelden (*Eng.* scrambling). Verstoringsalgoritmen maken een beeld onherkenbaar en dienen voor het beschermen van het intellectueel eigendomsrecht (IPMP, *Eng.* intellectual property management and protection) [45]. Deze algoritmen zijn encryptietechnieken die gebruik maken van een sleutel [61, 87, 90, 104]. Daarnaast zijn er ook technieken die een watermerk aanbrengen in de multimediale data [34, 135, 190].

De meeste technieken voor het verstoren van beelden zijn gebaseerd op het wijzigen van de scanvolgorde, b.v. het permuteren van de beeldlijnen. Het grote nadeel daarvan is echter dat het onmogelijk is te voorspellen in welke mate de bandbreedte van het verstoord beeld is gewijzigd. Wyner [191, 192] heeft een interessante techniek voorgesteld die gebruik maakt van de DPSS en die eendimensionale signalen (in het bijzonder spraak) verstoort, zonder de bandbreedte van het signaal te laten toenemen. Door onze ervaring met de meerdimensionale DPSS in de vorige hoofdstukken, kwamen we op het idee deze techniek te veralgemenen voor beelden.

We geven eerst een kort overzicht van de klassieke verstoringsalgoritmen voor beelden. Vervolgens leggen we gedetailleerd Wyners methode, alsook de uitbreidingen naar twee dimensies, uit. Tot slot tonen we de resultaten van enkele experimenten om de haalbaarheid van deze aanpak te bewijzen. Mogelijke toepassingen zijn b.v. betaaltelevisie, beveiligde transmissie voor videoconferentie, fax, medische en militaire toepassingen.

5.2 Verstoringsalgoritmen

De eerste verstoringsalgoritmen voor beelden (en beeldsequenties, door toepassing op elk beeld afzonderlijk) waren vrij eenvoudig gezien de beperkte mogelijkheden van de elektronica. Tot de eerste technieken behoort b.v. het omkeren van een lijn uit het beeld, het omwisselen van delen uit een lijn, enzovoort. De komst van snellere en goedkopere VLSI (*Eng.* Very Large Scale Integration) maakte het mogelijk om beelden op te slaan in een geheugen en er digitaal bewerkingen op uit te voeren. Een techniek die nog steeds wordt gebruikt door verscheidene betaaltelevisiezenders is Nagravision [78], die lijnen permuteert. Het grootste nadeel van al deze technieken is hun gevoeligheid aan zogenaamde “correlatieaanvallen”: de correlatie aanwezig in de meeste beelden laat toe om het oorspronkelijke beeld te reconstrueren [79]. Een meer geavanceerde manier om de scanvolgorde aan te passen is voorgesteld door Matias [89] en wijzigt de scanvolgorde volgens een curve die het beeld volledig in pseudo-randomvolgorde doorloopt (*Eng.* space-filling curve). Zeng [194] stelt een andere aanpak voor die een beeldsequentie, gecompriemd m.b.v. MPEG, verstoort door aanpassingen in de gecompriemde stroom.

5.2.1 Wyners methode voor eendimensionale signalen

De techniek van Wyner is ontwikkeld voor het verstoren van spraaksignalen [191, 192]. Hij merkte terecht op dat het gebruik van de DPSS toelaat om een signaal te verstoren met een verwaarloosbare expansie van de bandbreedte.

Basisconcepten

We beschouwen een rij reële getallen $a(n)$, $-\infty < n < \infty$, met als spectrum

$$\hat{a}(f) = \sum_n a(n) \exp(-j2\pi n f). \quad (5.1)$$

Dit spectrum is periodiek met periode 1 en wordt daarom enkel beschouwd voor $|f| \leq 1/2$. We zeggen in het bijzonder dat het spectrum bandgelimiteerd is tot een frequentieband $[-W, W]$, $0 \leq W \leq 1/2$, wanneer geldt dat $\hat{a}(f) = 0$, voor $W < |f| \leq 1/2$. Door middel van een bandlimiterende operator \mathcal{B}_W kunnen we elk signaal in bandbreedte beperken met $\mathcal{B}_W a$ waarbij

$$\widehat{\mathcal{B}_W a}(f) = \begin{cases} \hat{a}(f), & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W. \end{cases} \quad (5.2)$$

Deze operator laat ons toe de energieconcentratie van de rij $a(n)$ in de frequentieband $[-W, W]$ te definiëren als

$$c_W(a) = \frac{\|\mathcal{B}_W a\|_{l_2}^2}{\|a\|_{l_2}^2}. \quad (5.3)$$

We willen nu de rij $a(n)$ door middel van een lineaire orthonormale en inverteerbare transformatie omzetten in een verstoorde rij $b(n)$. Het voordeel van een orthonormale transformatie is dat ze de afstand bewaart en dus additieve ruis niet versterkt.

In het algemeen zal een orthonormale transformatie, zoals een permutatie, nieuwe hoge-frequentiecomponenten introduceren in het spectrum van het verstoord signaal. De bandbreedte-expansie kan worden vermeden (of althans beperkt) door gebruik te maken van het volgende principe. De deelruimte \mathcal{S}_W van l_2 bevat de rijen die bandgelimiteerd zijn tot de frequentieband $[-W, W]$ en heeft een orthonormale basis $\{e_j(n)\}_{j=-\infty}^{\infty}$. Elke rij $a(n) \in \mathcal{S}_W$ kan dan ontbonden worden als volgt:

$$a(n) = \sum_j \alpha_j e_j(n), \quad (5.4)$$

waarbij de coëfficiënten bepaald worden door $\alpha_j = \langle a, e_j \rangle$. Indien we nu een permutatie (of een andere orthonormale transformatie) uitvoeren op de coëfficiënten α_j , dan is de verstoorde rij

$$b(n) = \sum_j \beta_j e_j(n), \quad (5.5)$$

samengesteld als een lineaire combinatie van de basisvectoren $e_j(n)$ en maakt die nog steeds deel uit van \mathcal{S}_W , of m.a.w. is die nog steeds bandbeperkt.

Het gebruik van de DPSS

In de praktijk beschouwen we rijen met een drager beperkt tot het interval $[0, M - 1]$. Hoewel geen enkele rij met een beperkte drager (met uitzondering van de rij $a(n) = 0$) bandbeperkt kan zijn voor $W < 1/2$, kan de energieconcentratie in de frequentieband $[-W, W]$ toch relatief hoog zijn. De DPSS¹ vormen een orthonormale basis die de deelruimte van rijen, die benaderd bandbeperkt zijn, opspant met optimale energieconcentratie [128]. Wyner gebruikt deze vaststelling om een verstoringsalgoritme op te stellen met

¹Voor een meer gedetailleerde bespreking verwijzen we naar 2.4.1, pagina 41.

verwaarloosbare bandbreedte-expansie buiten de gegeven frequentieband. We herhalen kort dat de DPSS, geassocieerd met een drager $[0, M - 1]$ en een frequentieband $[-W, W]$, een verzameling van M reële rijen $\{v_j(n)\}_{j=0}^{M-1}$ zijn met corresponderende getallen $\{\lambda^{(j)}\}_{j=0}^{M-1}$. De waarden $\lambda^{(j)}$ komen overeen met de energieconcentraties $\mathcal{C}_W(v_j)$ in de frequentieband $[-W, W]$.

We kunnen nu op identieke wijze een rij op een eindige drager ontbinden m.b.v. de basisvectoren $v_j(n)$:

$$a(n) = \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j v_j(n), \quad (5.6)$$

met opnieuw $\alpha_j = \langle a, v_j \rangle$. We definiëren de coëfficiëntenmatrix $\alpha_k = [\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}]'$ die de eerste k coëfficiënten bevat. Daarbij gaan we ervan uit dat de basisvectoren gesorteerd zijn volgens dalende energieconcentratie $\lambda^{(j)}$. Wyner stelt voor om de coëfficiënten die corresponderen met basisvectoren die een hoge energieconcentratie bezitten, onderling te transformeren. Hierdoor zal enkel de frequentieband $[-W, W]$ gebruikt worden door het verstoringsalgoritme. Veronderstellen we de rij $a(n)$ met een grote energieconcentratie in de frequentieband $[-W, W]$. We kiezen een parameter $k \in [0, M - 1]$, zodanig dat $\lambda^{(k-1)}$ nog voldoende dicht bij 1 ligt. Een gedeelte van de coëfficiënten α_j , namelijk voor $0 \leq j < k$, wordt vervolgens getransformeerd door een orthonormale $k \times k$ matrix \mathbf{M} . We noemen de matrix \mathbf{M} ook de "sleutel" van het verstoringsalgoritme. Uiteindelijk bekommen we de verstoorte rij

$$b(n) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j v_j(n) + \sum_{j=k}^{M-1} \alpha_j v_j(n), \quad (5.7)$$

met $\beta_k = \mathbf{M}\alpha_k$. Merk op dat we formule (5.7) eveneens kunnen herschrijven als

$$b(n) = a(n) + \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j - \alpha_j) v_j(n), \quad (5.8)$$

zodanig dat we enkel de coëfficiënten α_j , voor $j = 0, \dots, k - 1$, dienen te berekenen. Wyner toont aan dat de energieconcentratie van de rij $b(n)$ hoogstens $1 - \lambda^{(k-1)}$ verschilt van die van $a(n)$:

$$|\mathcal{C}_W(a) - \mathcal{C}_W(b)| < 1 - \lambda^{(k-1)}. \quad (5.9)$$

Indien we de bandbreedte-expansie buiten de frequentieband $[-W, W]$ willen beperken, mogen we k niet te groot te kiezen. De reconstructie van de oorspronkelijke sequentie uit de verstoorte is dan eenvoudig. We bepalen de coëfficiënten $\beta_j = \langle b, v_j \rangle$ uit de verstoorte rijen en bekommen vervolgens de oorspronkelijke coëfficiënten: $\alpha_k = \mathbf{M}'\beta_k$.

5.2.2 Uitbreiding voor beelden

Het toepassen van Wyners methode op beelden, vereist de uitbreiding naar twee dimensies. De uitbreiding van de basisfuncties, de tweedimensionale DPSS, hebben we reeds eerder uitgewerkt en zullen we nu gebruiken. We noteren een tweedimensionale rij als $a(n_1, n_2)$, $0 \leq n_1, n_2 \leq M - 1$. Verder maken we vaak gebruik van de lexicografische ordening om de tweedimensionale rij te adresseren: $a(n) \triangleq a(n \bmod M, \lfloor n/M \rfloor)$, met $0 \leq n \leq M^2 - 1$. Op die manier slaan we de waarden op in een kolommatrix $\mathbf{a} = [a(0) \dots a(M^2 - 1)]'$. Het tweedimensionale spectrum bepalen we als

$$\hat{a}(f_1, f_2) = \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{M-1} a(n_1, n_2) \exp(-j2\pi(n_1 f_1 + n_2 f_2)). \quad (5.10)$$

De keuze voor een frequentiegebied is nu ruimer dan in het eendimensionale geval. We stellen twee aanvaardbare alternatieven voor.

Allereerst definiëren we de bandbeperkende operator \mathcal{B}_W^\square , waarbij het spectrum van $\mathcal{B}_W^\square a(n_1, n_2)$ beperkt wordt tot een tweedimensionaal vierkant gebied:

$$\widehat{\mathcal{B}_W^\square a}(f_1, f_2) = \begin{cases} \hat{a}(f_1, f_2), & |f_1| \leq W \text{ en } |f_2| \leq W \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Deze keuze geeft aanleiding tot de cartesiaanse uitbreiding van de DPSS. Ze kunnen gevonden worden door de eendimensionale DPSS te combineren: $v^{(2D)}(n_1, n_2) = v_{j_1}^{(1D)}(n_1) v_{j_2}^{(1D)}(n_2)$ met hun corresponderende eigenwaarden (= energieconcentraties) $\lambda_{(1D)}^{(j_1)} \lambda_{(1D)}^{(j_2)}$. Een direct gevolg is dat er $M(M - 1)/2$ paren gelijke en M unieke eigenwaarden zijn.

Een andere mogelijkheid bestaat erin om de bandbeperkende operator \mathcal{B}_W° te baseren op een circulair frequentiegebied. Aldus correspondeert het spectrum van $\mathcal{B}_W^\circ a(n_1, n_2)$ met

$$\widehat{\mathcal{B}_W^\circ a}(f_1, f_2) = \begin{cases} \hat{a}(f_1, f_2), & \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq W \\ 0, & \text{elders.} \end{cases} \quad (5.12)$$

In dit geval zijn de corresponderende tweedimensionale DPSS niet meer scheidbaar. De tweedimensionale kernfunctie die de toeplitz-matrix opbouwt (zie bijlage B), wordt gegeven door de inverse fouriergetransformeerde van het circulair frequentiegebied:

$$K(\mathbf{x}) = W \frac{J_1\left(2\pi W \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (5.13)$$

Tabel 5.1: Eigenwaarden van de tweedimensionale DPSS met vierkant frequentiegebied voor $M = 3$, $W = 0.35$ en $k = 3$.

j	$\lambda^{(j)}$	de corresponderende coëfficiënten
0	0.9926	} mogen vrij getransformeerd worden
1	0.8482	
2	0.8482	
3	0.7248	} mogen onderling getransformeerd worden
4	0.2514	
5	0.2514	} mogen onderling getransformeerd worden
6	0.2148	
7	0.2148	
8	0.0637	

met $J_1(\cdot)$ de Besselse functie van de eerste soort en van de eerste orde.

Omdat het verstoringsalgoritme effectief zou werken, is het natuurlijk nodig dat een belangrijk deel van de energie zich binnen het gekozen frequentiegebied bevindt. Voor de vele beelden is het inderdaad het geval dat een aanzienlijk gedeelte van de energie zich concentreert in het lage-frequentiegebied.

De werking van het tweedimensionale verstoringsalgoritme is identiek aan het eendimensionale geval. De coëfficiënten $\alpha_j = \langle a, e_j \rangle$ worden berekend en diegene die met hoge energieconcentraties $\lambda^{(j)}$ gepaard gaan, worden getransformeerd. Het tweedimensionale schema biedt echter de mogelijkheid om ook andere coëfficiënten te transformeren. De tweedimensionale DPSS bevat immers paren van gelijke eigenwaarden, die corresponderen met symmetrische eigenvectoren: $e_{j_1}(n_1, n_2) = e_{j_2}(n_2, n_1)$. Deze coëfficiënten kunnen onafhankelijk van hun eigenwaarde onderling getransformeerd worden, zonder expansie van bandbreedte. Tabel 5.1 toont een voorbeeld voor $M = 3$ en $W = 0.35$. Indien we kiezen voor $k = 3$, kunnen we uiteraard de coëfficiënten die corresponderen met de drie grootste eigenwaarden transformeren. Additiekoneel kunnen echter ook de coëfficiënten $j = 4, 5$ en $j = 6, 7$ onderling getransformeerd worden.

We stellen nu het verstoringsalgoritme in zijn totaliteit voor waarbij we achtereenvolgens de coëfficiënten bepalen, (een deel van) de coëfficiënten transformeren en terugkeren naar het oorspronkelijke domein. De eerste stap kan worden beschouwd als een matrixvermenigvuldiging $\alpha_k = \mathbf{E}\mathbf{a}$, waarbij de j -de rij van \mathbf{E} de basisvector $e_j(n)$ bevat. Vervolgens transformeren we de coëfficiënten naar $\beta_k = \mathbf{M}\alpha_k$. Tot slot stellen we het verstoorte beeld samen met $\mathbf{b} = \mathbf{E}'\beta_k$. We kunnen deze stappen samenvoegen tot één enkele transfor-

matiematrix:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}'\mathbf{M}\mathbf{E}. \quad (5.14)$$

Aangezien we de verstoorde matrix \mathbf{b} nog steeds als een beeld willen opslaan en behandelen, dienen we het bereik van de transformatie (5.14) te bepalen. Indien we onderstellen dat de elementen van \mathbf{a} een waarde aannemen in het interval $[-1, 1]$ en vermits \mathbf{S} een orthonormale transformatie is (en dus de afstand bewaart), zal elke verstoorde \mathbf{b} begrensd zijn door $\max \|\mathbf{S}\mathbf{a}\|_{l_2} = \max \|\mathbf{a}\|_{l_2} = M$. In theorie dienen we \mathbf{b} dus te herschalen met een factor M , om opnieuw waarden uit $[-1, 1]$ te bekomen. Uit de experimentele resultaten blijkt echter dat deze theoretische factor te groot is. Daarom gebruiken we een nog niet nader gespecificeerde factor ρ . Voor beelden met grijswaarden uit het interval $[0, 1]$ kunnen we het verstoringsalgoritme als volgt samenvatten:

1. We verdelen het beeld in blokken met grootte $M \times M$. We beschouwen een dergelijk blok $g(n_1, n_2) \in [0, 1]$, met $0 \leq n_1, n_2 \leq M - 1$.
2. We slaan de inhoud van het blok op in

$$a(n_1, n_2) = g(n_1, n_2) - 1/2. \quad (5.15)$$

3. We bepalen het verstoorde blok m.b.v. de totale transformatie $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$.
4. We bekomen de nieuwe grijswaarden van het verstoorde beeld als

$$g_s(n_1, n_2) = \text{round}(b(n_1, n_2)/\rho + 1/2), \quad (5.16)$$

waarbij $\text{round}(\cdot)$ afrondt naar de dichtste gehele getal en de factor ρ het bereik herschaalt.

5. De inverse operatie aan de ontvangerszijde slaat het verstoorde blok op als

$$b_r(n_1, n_2) = \rho(g_s(n_1, n_2) - 1/2). \quad (5.17)$$

6. Na de inverse transformatie $\mathbf{a}_r = \mathbf{S}'\mathbf{b}_r$ bekomen we bij benadering de originele waarden van het blok:

$$g_r(n_1, n_2) = \text{round}(a_r(n_1, n_2) + 1/2). \quad (5.18)$$

De (noodzakelijke) herschalingen van formules (5.16) en (5.17) hebben twee nadelen. Ten eerste stemt het gereconstrueerde beeld, door afrondingsfouten, niet perfect overeen met het originele beeld. Ten tweede wordt ruis, toegevoegd aan het verstoorde beeld, versterkt met een factor ρ .

5.2.3 Een opmerking omtrent de versleuteling

Hoewel het niet onze bedoeling is om bijzonder diep in te gaan op de keuze van de “sleutel”, m.n. het transformeren van een gedeelte van de coëfficiënten corresponderend met de DPSS-basisvectoren, willen we wel een indicatie geven van de grootte van de ruimte, waaruit mogelijke sleutels kunnen gekozen worden.

Indien we voor de versleuteling (de keuze van \mathbf{M}) een beroep doen op permutaties, kunnen we een vector van lengte k transformeren op $k!$ mogelijke manieren. Het is echter zo dat vele van deze mogelijke sleutels slechts een beperkte wijziging teweeg brengen aan de coëfficiënten. Een andere mogelijkheid, gebaseerd op een artikel van Šenk [182], bestaat erin om (genormaliseerde) hadamardmatrices te gebruiken.

Een hadamardmatrix \mathbf{H} is een $k \times k$ matrix wiens rijen en kolommen orthogonaal zijn en die enkel elementen $+1$ en -1 bevat. De inverse matrix wordt gegeven door

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{H}', \quad (5.19)$$

waarbij k de orde is van de matrix. De mogelijke ordes zijn beperkt tot 1, 2, of $4n$, $n \in \mathbb{N}$. Een hadamardmatrix kan getransformeerd worden in een nieuwe hadamardmatrix door permutatie van rijen en kolommen en door vermenigvuldiging van rijen en kolommen met een factor -1 . Op deze manier kunnen we $(k!2^k)^2$ zogenaamde H -equivalente matrices vinden van orde k , waarvan sommige echter identiek zijn [182]. Daarnaast is een hadamardmatrix H -genormaliseerd, wanneer elk element van de eerste rij en eerste kolom gelijk is aan $+1$. Deze matrix staat bekend als “dé hadamardmatrix”.

De transformatiematrix \mathbf{M} uit formule (5.14), en dus de sleutel van het algoritme, stellen we nu samen als de geschaalde versie van een H -equivalente matrix:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{k}} \mathbf{P}_r \mathbf{H} \mathbf{P}_c, \quad (5.20)$$

waarbij \mathbf{P}_r en \mathbf{P}_c respectievelijk de permutatiematrices (met mogelijk wijziging van teken) voor de rijen en kolommen zijn. De centrale matrix \mathbf{H} is de originele H -genormaliseerde hadamardmatrix. Deze aanpak heeft enkele belangrijke voordelen ten opzichte van het gebruik van enkel permutaties:

- De grootte van de ruimte, waaruit de sleutel kan gekozen worden, is flink uitgebreid. Tabel 5.2 toont de grootte van die ruimte in het geval van permutaties en hadamardmatrices. Merk op dat er voor sommige ordes een aantal niet H -equivalente matrices bestaan (b.v. voor orde 16 zijn er dat 5), hetgeen de grootte van de sleutelruimte nog vergroot [130].

Tabel 5.2: De grootte van de ruimte waaruit de sleutel kan gekozen worden in het geval van permutaties en hadamardmatrices als functie van k , het aantal coëfficiënten dat getransformeerd wordt [182].

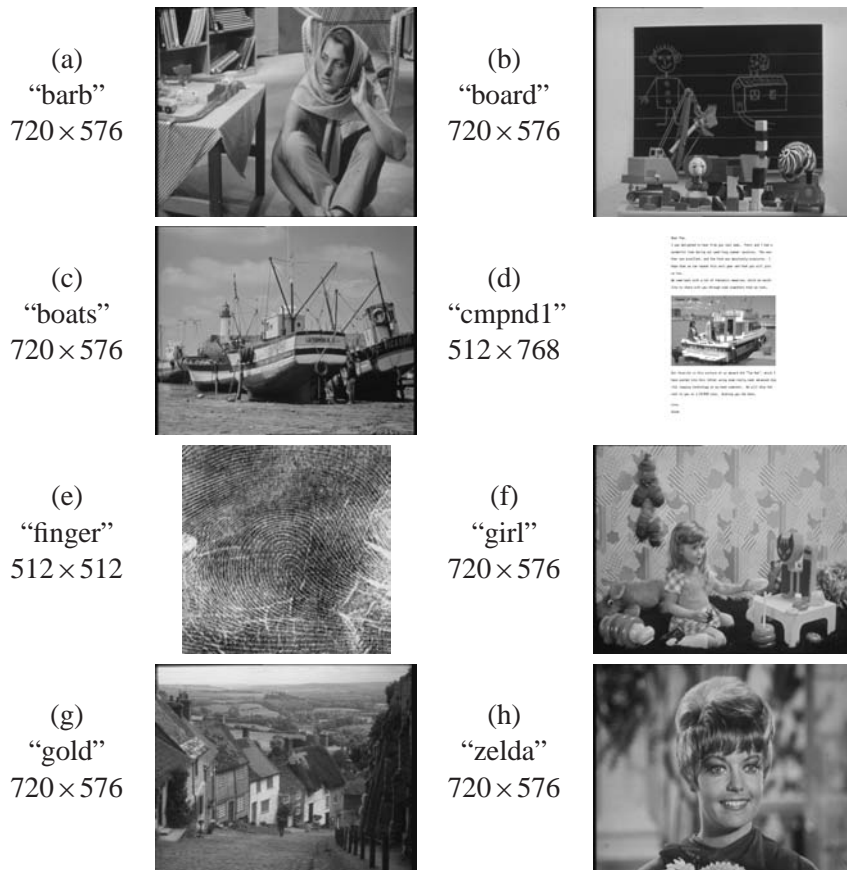
	k						
	8	12	16 ₁	16 ₂	16 ₃	16 ₄	16 ₅
permutaties	2^{15}	2^{28}	2^{44}	—	—	—	—
hadamardmatrices	2^{32}	2^{64}	2^{97}	2^{102}	2^{104}	2^{104}	2^{106}

- De mogelijke sleutels kunnen eenvoudig geadresseerd worden aan de hand van het enumeratie-algoritme voor permutaties van Knuth [75, algo. 3.3.2P].
- In tegenstelling tot permutaties, zorgt elke mogelijke H -equivalente matrix voor (ongeveer) dezelfde mate van “mengen” van de coëfficiënten [38].

5.3 Resultaten

Om de werking van het verstoringsalgoritme te demonstreren, hebben we een prototype geïmplementeerd in software. De beelden worden opgedeeld in blokken van 8×8 . Vervolgens gebruiken we de tweedimensionale DPSS voor $W = 0.25$ en in eerste instantie een vierkant frequentiegebied. De eerste acht coëfficiënten ($k = 8$) corresponderend met de acht grootste eigenwaarden (van de 64) worden getransformeerd met een willekeurige H -equivalente hadamardmatrix. De eigenwaarde die correspondeert met $\lambda^{(k-1)} = \lambda^{(7)}$ is 0.97. Daarenboven kiezen we ervoor om de 50 coëfficiënten die overeenstemmen met paren van gelijke eigenwaarden onderling om te wisselen. Hier kunnen ook andere mogelijkheden gebruikt worden.

We hebben een testset samengesteld, bestaande uit acht grijswaardenbeelden, weergegeven in figuur 5.1. De grijswaarden worden opgeslagen met een nauwkeurigheid van 8 bits. De herschalingsfactor ρ wordt best zo klein mogelijk gekozen, zodat ruis, toegevoegd aan het verstoorte beeld, weinig wordt versterkt. Anderzijds zal een te kleine waarde van ρ de transformatie negatief beïnvloeden doordat teveel waarden worden begrensd binnen het interval van mogelijke grijswaarden. Elk van de beelden uit de testset wordt verstoord en weer gereconstrueerd. De herschaling blijkt een klein verschil teweeg gebracht te hebben tussen het gereconstrueerde en het originele beeld. Figuur 5.2 toont de gemiddelde absolute fout (MAE, Eng. Mean-Absolute-Error) en de gemiddelde kwadratische fout (MSE) voor deze beelden als functie van ρ . Deze



Figuur 5.1: De testbeelden voor het verstoringsalgoritme.

fouten zijn het gemiddelde voor 20 verschillende willekeurige sleutels van de eerste 8 coëfficiënten. De theoretische waarde van ρ , namelijk 8, is duidelijk onnodig hoog. We kiezen als optimum $\rho = 3$. In tabel 5.3 hebben we de resultaten nog eens numeriek opgesomd, waarbij ook de standaardafwijking voor de gebruikte sleutels is weergegeven. Voor elk van de testbeelden is de residuele absolute en kwadratische fout bij een herschalingsfactor $\rho = 3$ lager dan 1 (op een schaal van 256 grijswaarden). Een dergelijk klein verschil is in de praktijk niet waarneembaar. Voor het beeld "cmpnd1", dat sterke zwart/wit-contrasten vertoont, is deze afwijking iets groter, maar nog steeds aanvaardbaar. De kleine standaardafwijkingen illustreren de gelijke mate van "mengen" door de H -equivalente sleutels.

Figuur 5.4 toont een voorbeeld van een verstoorde versie van het testbeeld

“zelda”. Merk op dat het verstoringsalgoritme het beeld behoorlijk onherkenbaar maakt, terwijl slechts een kwart van het beschikbare frequentiegebied wordt gebruikt. Figuur 5.5 toont enkele verstoorte versies (met willekeurige sleutels) van het testbeeld “cmpnd1”. Het verstoringsalgoritme produceert steeds verstoorte beelden die “ongeveer” dezelfde uitzicht hebben. Naargelang de keuze van de sleutel blijft er meer of minder residuele herkenbaarheid over in het beeld. Een mogelijke verbetering zou erin kunnen bestaan, om de sleutel te wijzigen over de verschillende blokken in een beeld hetgeen ook homogene gebieden een meer “gevarieerder” uitzicht zou verschaffen.

Daarnaast hebben we een identiek experiment overgedaan, maar ditmaal met een circulair frequentiegebied voor de tweedimensionale DPSS. We verkiezen opnieuw om de eerste $k = 8$ coëfficiënten te gebruiken voor de sleutel. Aangezien een circulair frequentiegebied met straal W kleiner is dan een vierkant frequentiegebied met halve zijde W , is de waarde $\lambda^{(k-1)} = 0.89$ lager dan in het vierkant geval, waardoor de te verwachten bandbreedte-expansie iets hoger is. Figuur 5.3 toont dat de fouten die in dit geval optreden, ongeveer gelijk zijn of soms een fractie lager liggen dan bij het vierkant frequentiegebied. Tabel 5.3 laat zien dat er een heel klein verschil is voor dezelfde herschalingsfactor $\rho = 3$.

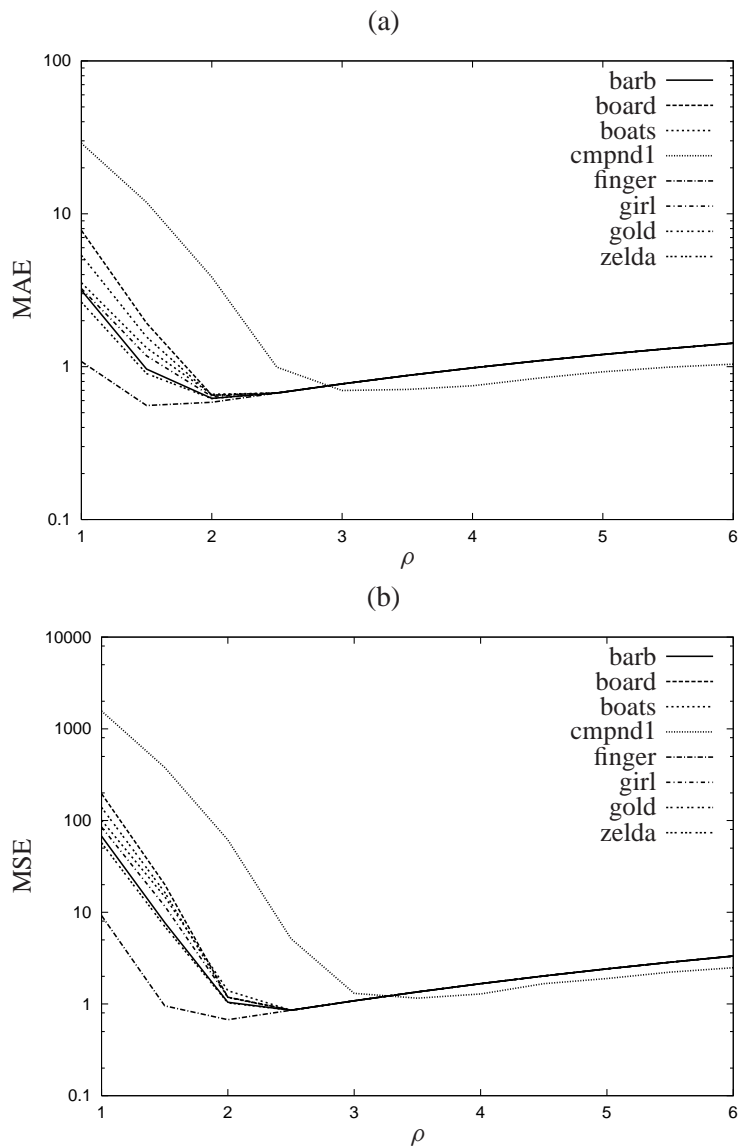
Tot slot hebben we het experiment herhaald voor een circulair frequentiegebied met dezelfde oppervlakte als een vierkant frequentiegebied met halve zijde W . Daartoe kiezen we de straal gelijk aan $2W/\sqrt{\pi}$. De waarde van $\lambda^{(k-1)}$ is dan opnieuw 0.97 en de fouten zijn praktisch identiek aan die voor het vierkant frequentiegebied. We kunnen hieruit besluiten dat een circulair frequentiegebied geen uitgesproken voordeel bezit. In het geval van een vierkant frequentiegebied kan men bovendien gebruikmaken van de scheidbare eigenschap van de tweedimensionale DPSS. Voor een blokgrootte van $M \times M$ daalt de algoritmische complexiteit van een volledige ontbinding in basisvectoren van $\mathcal{O}(M^4)$ naar $\mathcal{O}(M^3)$.

In de praktijk zal de blokgrootte moeten gekozen worden in overeenstemming met de toepassing die men voor ogen heeft, het beschikbare werkgeheugen en de rekenkracht. Merk op dat een grotere blokgrootte ook de herschalingsfactor zal verhogen.

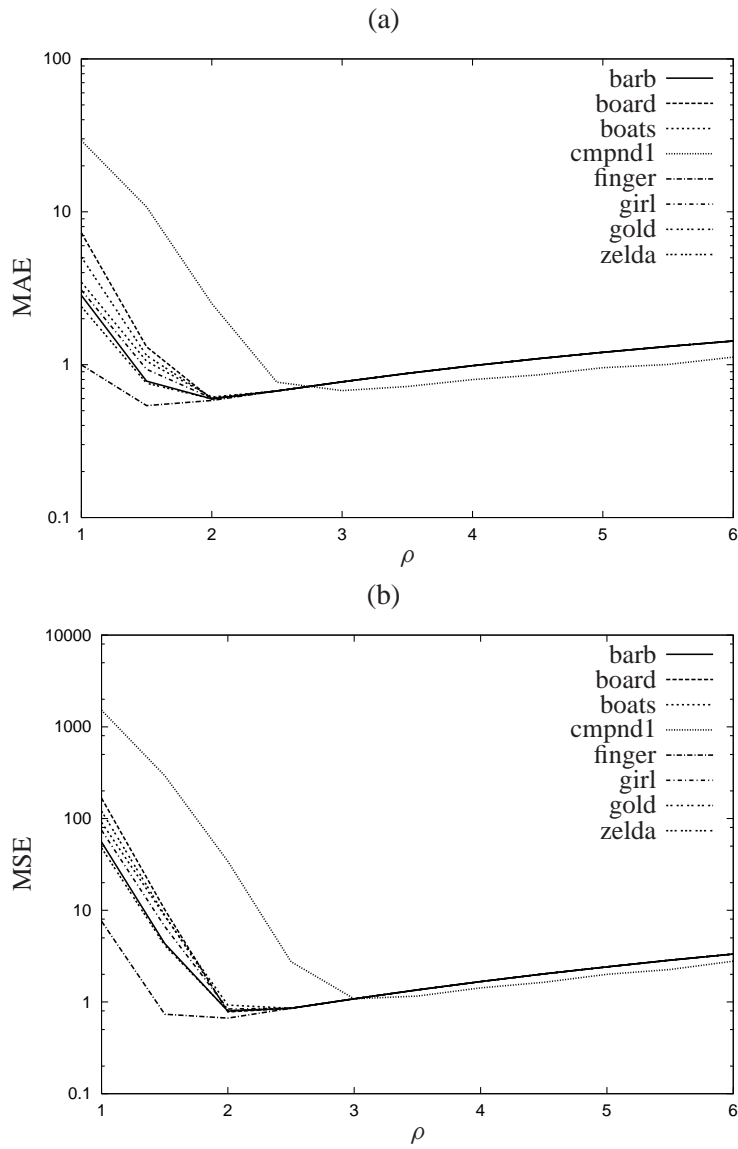
Naargelang de toepassing kan een zekere mate van residuele herkenbaarheid al dan niet gewenst zijn. Bijvoorbeeld voor een betaaltelevisiezender kan dit nuttig zijn om potentiële abonnees aan te trekken [87].

Tabel 5.3: De gemiddelde residuele fouten (met standaardafwijkingen) voor de testbeelden ($\rho = 3.0$, $W = 0.25$).

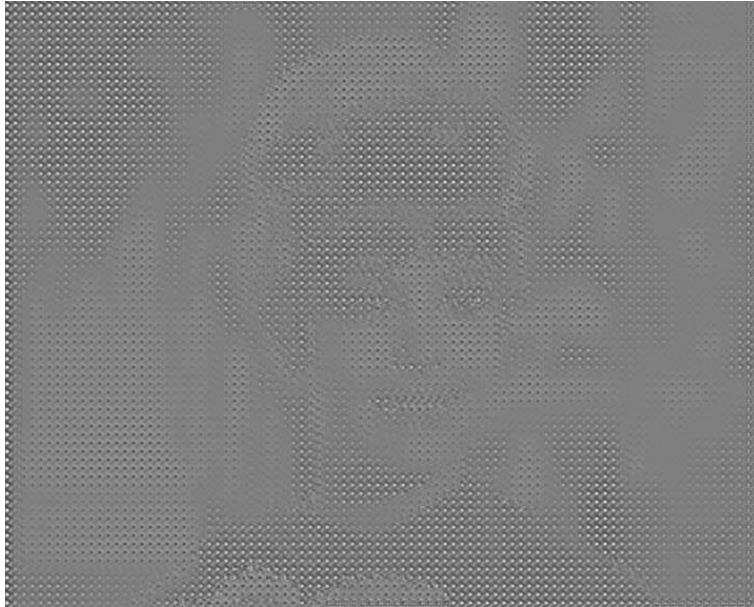
testbeeld	vierkant		circular	
	MAE	MSE	MAE	MSE
barb	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01
board	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01
boats	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01
cmpnd1	0.69 ± 0.03	1.30 ± 0.31	0.68 ± 0.07	1.08 ± 0.17
finger	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01
girl	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01
gold	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01
zelda	0.77 ± 0.01	1.08 ± 0.01	0.72 ± 0.01	1.08 ± 0.01



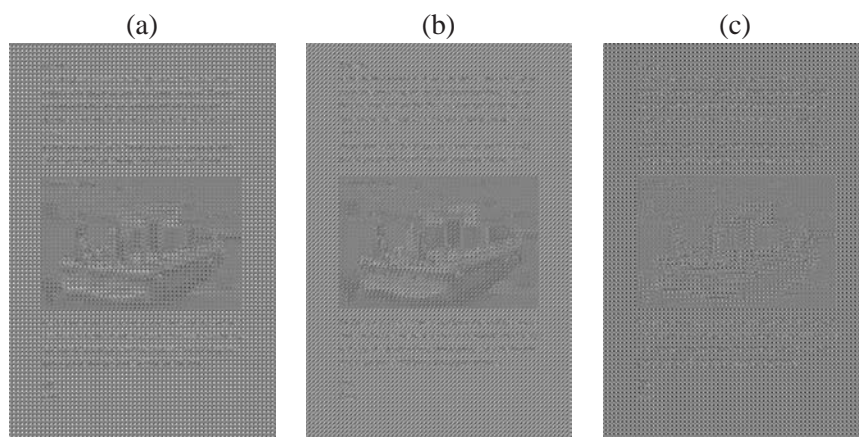
Figuur 5.2: De residuele fout van het verstoringsalgoritme in het geval van een vierkant frequentiegebied als functie van de herschalingsfactor ρ . (a) Gemiddelde absolute fout. (b) Gemiddelde kwadratische fout.



Figuur 5.3: De residuele fout van het verstoringsalgoritme in het geval van een circulair frequentiegebied als functie van de herschalingsfactor ρ . (a) Gemiddelde absolute fout. (b) Gemiddelde kwadratische fout.



Figuur 5.4: Een voorbeeld van een verstoord testbeeld “zelda”.



Figuur 5.5: Enkele voorbeelden van verstoorde testbeelden “cmpnd1” voor verschillende willekeurige sleutels.

5.4 Conclusie

In dit hoofdstuk hebben we een verstoringsalgoritme voor beelden voorgesteld dat zich aandient als bijproduct van de tweedimensionale DPSS. We hebben het algoritme van Wyner voor eendimensionale signalen uitgebreid en experimenteel uitgeprobeerd. Het verstoringsalgoritme heeft als belangrijke eigenschap dat het een beeld omvormt in een onherkenbaar beeld, waarbij we het gebruikte frequentiegebied kunnen vastleggen. Voor dit tweedimensionaal frequentiegebied hebben we een vierkant en een circulair gebied gekozen en vergeleken. Tussen beide opties blijken echter geen significante verschillen op te treden. Een goede keuze voor de sleutel is het gebruik van hadamardmatrices, omdat de ruimte waaruit de sleutel kan gekozen worden, dan veel groter is dan bij permutaties. Er zijn vele mogelijkheden om de mate van verstoring verder op te drijven, b.v. door coëfficiënten van aangrenzende blokken samen te transformeren.

Tot slot merken we op dat er nog verder onderzoek dient te gebeuren i.v.m. de toepasbaarheid van dit verstoringsalgoritme en de interactie met digitale compressie zoals MPEG.

Hoofdstuk 6

Besluit

Met dit werk hebben we getracht inzicht te verschaffen in, en oplossingen aan te reiken voor de problemen die opduiken bij het herbemonsteren van beelden en beeldsequenties.

In het eerste deel hebben we daarbij vooral aandacht geschonken aan de herbemonstering van beelden, met vooral toepassingen voor drukwerk (zoals gravurediepdruk) in het achterhoofd. Vandaag de dag wordt voor vele (geavanceerde) toestellen, zoals b.v. RIPs, immers nog steeds een beroep gedaan op eenvoudige technieken, zoals bilineaire interpolatie of in het beste geval bikubische convolutie. Het voorkomen van storende artefacten t.g.v. herbemonstering, zoals moiré-patronen, vereist een inzicht in de aard en het ontstaan ervan. De toenemende kwaliteitseisen die aan professioneel drukwerk gesteld worden en de opkomst van scanners en digitale fotografie met hun steeds hogere resoluties, zullen in de toekomst de nodige aandacht voor de herbemonsteringsstap opeisen. Tegenwoordig schuift men deze problemen door naar een operator die manueel gebieden in het beeld dient te vervagen, om op die manier moiré-patronen door frequentieverwarring te voorkomen [93,120]. In dit werk hebben we de grenzen van wat mogelijk is m.b.v. lineaire technieken verkend. Een veralgemeend splinemodel voor tweedimensionale periodieke roosters liet toe om m.b.v. een kleinste-kwadratenbenadering rekening te houden met het doelrooster. Voor vele toepassingen hebben de kleinste-kwadraten-splines een gepast evenwicht tussen het onderdrukken van moiré-patronen en vervaging. Daarnaast hebben we ook een reconstructiefunctie ontworpen met een optimale energieconcentratie in het nyquistgebied van het doelrooster. Deze reconstructiefunctie geeft echter aanleiding tot teveel vervaging. Om een beter compromis te bekomen tussen de verschillende artefacten, hebben we ook een niet-lineaire techniek voorgesteld die twee lineaire methoden combineert aan de hand van een gezamenlijke spatiale en spectrale analyse. Alle resultaten

werden beoordeeld m.b.v. een objectieve kwaliteitsmaat, geïnspireerd op het menselijk visueel systeem. Deze resultaten bewijzen dat het de moeite loont om voldoende aandacht te besteden aan herbemonstering.

In een tweede deel van dit werk hebben we ons toegespitst op het herbemonsteren van beeldsequenties, in het bijzonder het omzetten van een beeldsequentie van een alternerend videoformaat naar een progressief videoformaat. De meeste beeldsequenties zijn onderbemonsterd, hetgeen het gebruik van heel wat technieken voor formaatconversie ongeschikt maakt. We hebben aangetoond dat een bewegingsadaptieve herbemonsteringstechniek, waarbij gebruikgemaakt wordt van een bewegingsdetector, het potentieel bezit voor het leveren van goede resultaten. Een eigen bewegingsdetector, gebaseerd op de principes van de vaaglogische informatieverwerking, stuurt de interpolatie op betere wijze dan de klassieke oplossingen, zowel kwantitatief, volgens een numerieke foutmaat, als kwalitatief, wat geïntroduceerde artefacten (zoals flikkering en spookartefacten) betreft. De evaluatie van dit nieuwe algoritme gebeurde zowel in soft- als hardware. Tot slot hebben we ook een methode voorgesteld om de parameters van de bewegingsdetector automatisch aan te passen aan het ruisniveau.

Daarnaast heeft het onderzoek nog een interessant bijproduct opgeleverd, namelijk een algoritme voor het verstoren van beelden en beeldsequenties.

Als slotboodschap willen we kort meegeven dat er nog interessante onderzoeksmogelijkheden overblijven voor de toekomst. Een ontbinding van de directe splinetransformatie voor de veralgemeende splines op hexagonale roosters zou toelaten om de splinetransformatie uit te voeren m.b.v. recursieve filters. Daarnaast tonen de “optimale” resultaten voor de videoformaatconversie aan dat er nog ruimte is voor verbetering van de bewegingsadaptieve interpolatietechniek. Hierbij denken we b.v. aan neurale netwerken, waarbij een gepaste training de resultaten dichter bij het optimum zou kunnen brengen. Een eerste versie van het neurale netwerk kan bekomen worden door de vaaglogische regelaar te “vertalen” naar een neurale netwerk (hetgeen aanleiding geeft tot hybride technieken). Verder kan er gezocht worden naar bijkomende toepassingen, waarbij deze technieken een meerwaarde kunnen bieden. In bijlage B werd reeds een voorbeeld uit de medische beeldvorming aangehaald.

Het onderzoek beschreven in dit werk heeft aanleiding gegeven tot drie publicaties in internationale tijdschriften [42, 159, 170], waarvan twee als eerste auteur. Daarnaast verschenen vijf publicaties als eerste auteur onder de vorm van hoofdstukken of bijdragen in boeken [163, 164, 167, 172, 176]. In het totaal werden tweeëntwintig publicaties voorgesteld op internationale conferenties, waarvan zeventien als eerste auteur [152–158, 160–162, 166, 168, 169, 173–175, 177].

Bijlage A

Analytische vorm van hexagonale splines

In deze bijlage behandelen we de analytische vorm van de veralgemeende hexagonale spline. We zullen daarbij vooral aandacht hebben voor het geval van de splines gedefinieerd op een hexagonaal rooster van het tweede type, waarvan de roostermatrix gegeven wordt door

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

We gaan van start met de analytische vorm van de eerste-ordespline, waarbij we ook de fouriergetransformeerde bespreken. Vervolgens komen de tweede- en derde-ordespline aan bod. Tot slot geven we aan hoe ook hogere-ordesplines elegant kunnen benaderd worden.

A.1 Eerste-ordespline op een hexagonaal rooster

De hexagonale spline van eerste orde is identiek aan de indicatorfunctie van de voronoïcel. Voor het rooster uit formule (A.1) definiëren we deze spline als

$$\begin{aligned} \beta^0(\mathbf{x}) &= \chi_{\mathbf{R}(\mathbf{x})} \\ &= \mu_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x_2) \mu_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x_1 - x_2}{2}\right) \mu_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x_1 + x_2}{2}\right), \end{aligned}$$

waarbij de hulpfunctie $\mu_{a,b}(x)$ gedefinieerd is als

$$\mu_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

Tabel A.1: Numeriek gebruik van de fouriergetransformeerde $\hat{\beta}^0(\mathbf{f})$ uit formule (A.3) vereist het bepalen van verschillende limietuitdrukkingen voor f_1 en f_2 .

geval	uitdrukking
$f_1 = 0$ $f_2 = 0$	1
$f_1 = 0$ $f_2 \neq 0$	$\frac{2}{3\pi f_2} \sin(\pi f_2) + \frac{2}{3\pi^2 f_2^2} (1 - \cos(\pi f_2))$
$f_2 = 0$ $f_1 \neq 0$	$\frac{2}{\pi^2 f_1^2} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi f_1}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\sqrt{3}\pi f_1}{3}\right) \right)$
$f_1^2 = 3f_2^2$ $f_1 \neq 0$ $f_2 \neq 0$	$\frac{\sqrt{3}}{3\pi f_1} \sin\left(\frac{2\sqrt{3}\pi f_1}{3}\right) + \frac{1}{2\pi^2 f_1^2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\sqrt{3}\pi f_1}{3}\right)\right)$
elders	$\frac{1}{\pi^2 f_1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi f_1}{3} + \pi f_2\right) - \cos\left(\frac{2\sqrt{3}\pi f_1}{3}\right)}{f_1 - \sqrt{3}f_2} + \frac{\cos\left(-\frac{\sqrt{3}\pi f_1}{3} + \pi f_2\right) - \cos\left(\frac{2\sqrt{3}\pi f_1}{3}\right)}{f_1 + \sqrt{3}f_2} \right)$

De randen van de eerste-ordespline $\beta^0(\mathbf{x})$ definiëren we als 1/2 en de hoekpunten als 1/3.

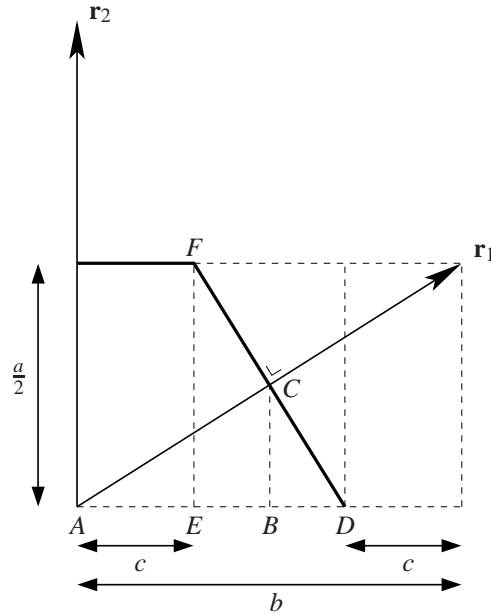
De fouriergetransformeerde van de eerste-ordespline speelt een belangrijke rol, b.v. voor het afleiden van de orde van approximatie of om eigenschappen in het frequentiedomein van dichtste-buur-interpolatie te onderzoeken. We hebben deze fouriergetransformeerde berekend, door gebruik te maken van een artikel van Chanan [29]:

$$\hat{\beta}^0(\mathbf{f}) = \frac{1}{\pi^2 f_1} \left(\frac{\cos(\pi f_1/\sqrt{3} + \pi f_2) - \cos(2\pi f_1/\sqrt{3})}{f_1 - \sqrt{3}f_2} + \frac{\cos(-\pi f_1/\sqrt{3} + \pi f_2) - \cos(2\pi f_1/\sqrt{3})}{f_1 + \sqrt{3}f_2} \right). \quad (\text{A.3})$$

Deze uitdrukking kan niet zomaar voor elke waarde van f_1 en f_2 geëvalueerd worden. In sommige gevallen dienen we immers de limietuitdrukking te bepalen. Tabel A.1 overloopt deze gevallen met telkens de corresponderende analytische uitdrukking.

In de praktijk ontmoeten we ook hexagonale roosterzellen die niet semi-regulier zijn, b.v. bij gravurediepdruk. Daarom leiden we nu eerst de karakteristieke afmetingen af van een algemene hexagonale cel. Beschouw de algemene roostermatrix van een hexagonale cel van het tweede type:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ a/2 & a \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$



Figuur A.1: De afmetingen van een algemene hexagonale rooster cel van het tweede type.

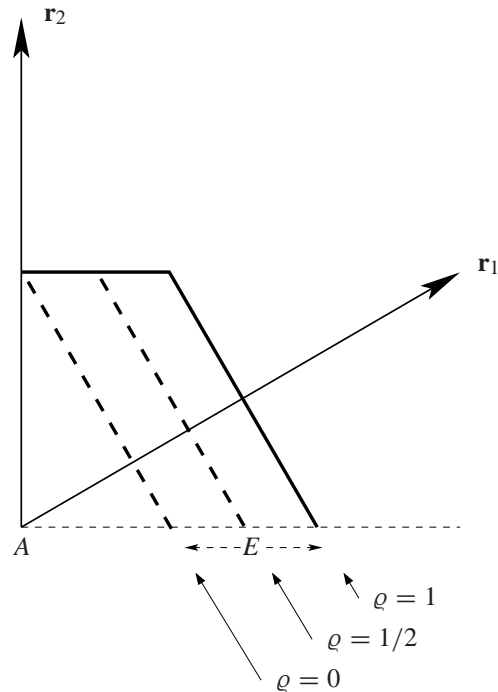
waarbij geldt $b \geq a/2$. Figuur A.1 toont één kwadrant van de cel. Aan de hand van driehoeksmeting kunnen we de afstand c bepalen als functie van a en b als

$$c = \frac{4b^2 - a^2}{8b}. \quad (\text{A.5})$$

De fouriergetransformeerde van de algemene hexagonale rooster cel kunnen we afleiden als volgt. Allereerst introduceren we in formule (A.3) een parameter $0 \leq \varrho \leq 1$, die de schuine rand van de corresponderende rooster cel verschuift:

$$\hat{\beta}^0(\mathbf{f}) = \frac{1}{\pi^2 f_1} \left(\frac{\cos(\varrho \pi f_1 / \sqrt{3} + \pi f_2) - \cos((\varrho + 1) \pi f_1 / \sqrt{3})}{f_1 - \sqrt{3} f_2} + \frac{\cos(-\varrho \pi f_1 / \sqrt{3} + \pi f_2) - \cos((\varrho + 1) \pi f_1 / \sqrt{3})}{f_1 + \sqrt{3} f_2} \right) \quad (\text{A.6})$$

Figuur A.2 toont hoe de rooster cel verandert als functie van ϱ . De afstand AE wijzigt aldus met een factor ϱ . Merk op dat we voor $\varrho < 1$ niet meer te maken hebben met een “echte” rooster cel, aangezien de rechte vanuit de oorsprong en



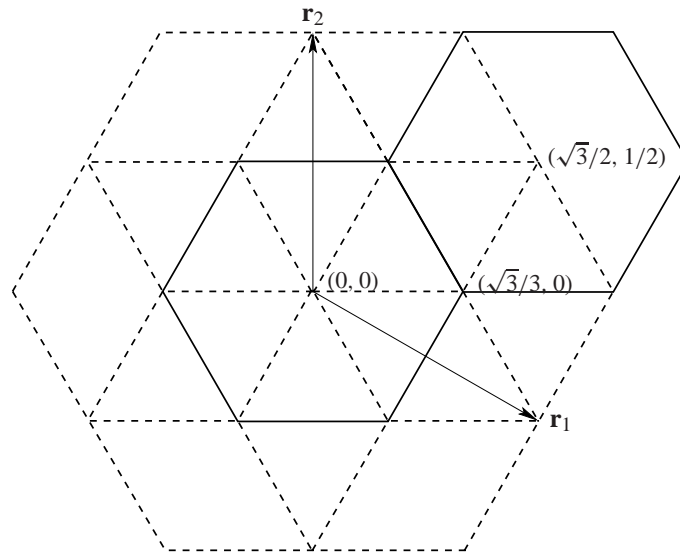
Figuur A.2: De indicatorfunctie van de roostercel waarvan formule (A.6) de fouriergetransformeerde is. De schuine zijde wordt verschoven als functie van de parameter ρ .

loodrecht op de schuine zijde (waarop de roostervector \mathbf{r}_1 ligt) niet het midden van deze schuine zijde snijdt. We kunnen dit corrigeren door de horizontale dimensie te herschalen. Voor het geval $\rho = 1$ is er uiteraard geen herschaling nodig, maar voor $\rho = 0$ dienen we de horizontale ordinaat $\sqrt{3}/6$ te herschalen naar $1/2$ (zodanig dat we een geroteerd vierkant bekommen). De herschaling wordt gegeven door

$$f_{1,\rho} = \left((1 - \sqrt{3})\rho + \sqrt{3} \right) f_1. \quad (\text{A.7})$$

We beschikken nu over de nodige componenten om de fouriergetransformeerde van de algemene hexagonale roostercel te berekenen.

1. We bepalen de roostervectoren en aldus de waarden voor a en b . We normaliseren deze zodanig dat $a = 1$.
2. Met behulp van formule (A.5) berekenen we de waarde van c .



Figuur A.3: De tweede-ordespline bestaat uit ruitvormige gebieden waarbinnen we makkelijk de analytische vorm kunnen bepalen. De functiewaarde langs de lijnstukken in stippellijn verloopt lineair.

3. Vervolgens kunnen we de gepaste waarde van de parameter ϱ bepalen door de volgende vergelijking op te lossen:

$$c = \frac{\sqrt{3}}{6} \varrho \left((1 - \sqrt{3})\varrho + \sqrt{3} \right), \quad (\text{A.8})$$

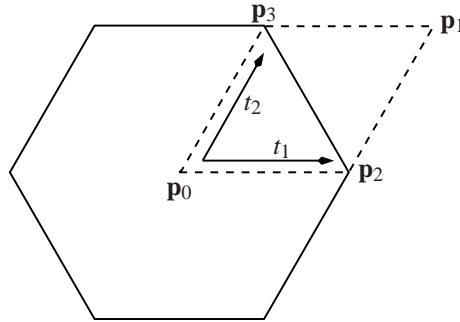
zodanig dat we

$$\varrho = \frac{-3 + \sqrt{9 - 72c + 24c\sqrt{3}}}{-6 + 2\sqrt{3}} \quad (\text{A.9})$$

bekomen. In het geval van gravurediepdruk bekomen we aldus $\varrho = 0.2003$. We kunnen nu formule (A.6) gebruiken, waarbij we de horizontale frequentiecomponent f_1 herscalen volgens formule (A.7).

A.2 Tweede-ordespline op een hexagonaal rooster

We beschouwen opnieuw het semi-reguliere hexagonale rooster. De tweede-ordespline wordt geconstrueerd door convolutie van de eerste-ordespline met zichzelf. De buitenste rand in stippellijn in figuur A.3 maakt duidelijk hoe groot de drager zal zijn. Wanneer we nu een tweede roostercel verschuiven van



Figuur A.4: De waarde van de tweede-ordespline in elk van de ruitvormige gebieden kan bepaald worden als functie van de hoekpunten en lokale parameters t_1 en t_2 .

$(\sqrt{3}/2, 1/2)$ naar $(\sqrt{3}/3, 0)$ en telkens de overlap met de centrale rooster cel bepalen, dan is het duidelijk dat de toename in oppervlakte van de overlap langs dit traject lineair zal zijn als functie van de afgelegde afstand. Deze vaststelling geldt voor elk pad langs de stippellijnen. Binnenin de ruitvormige gebieden, kunnen we de waarde bepalen als functie van de hoekpunten en twee parameters die we bekommen m.b.v. een isoparametrische transformatie. Beschouw b.v. het ruitvormig gebied weergegeven in figuur A.4, dan kunnen we elke lokatie in dit gebied bekommen m.b.v. de parameters $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$:

$$\mathbf{p}(t_1, t_2) = (1 - t_1)(1 - t_2) \mathbf{p}_0 + t_1 t_2 \mathbf{p}_1 + (1 - t_1)t_2 \mathbf{p}_2 + t_1(1 - t_2) \mathbf{p}_3. \quad (\text{A.10})$$

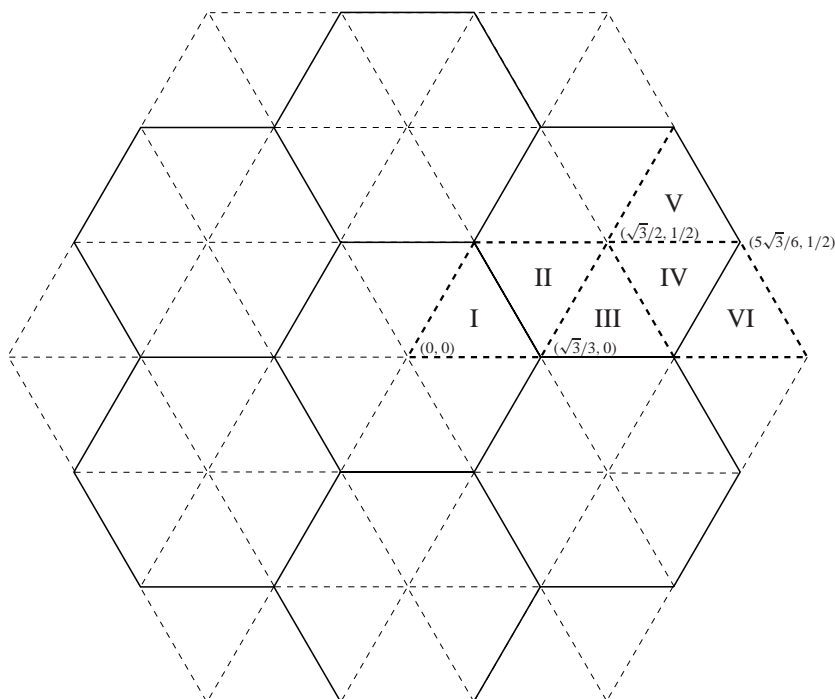
De waarde van de tweede-ordespline is op dezelfde eenvoudige manier afhankelijk van de parameters t_1 en t_2 en de waarden v_0, v_1, v_2 en v_3 op elk van de roosterpunten $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ en \mathbf{p}_3 :

$$v(t_1, t_2) = (1 - t_1)(1 - t_2)v_0 + t_1 t_2 v_1 + (1 - t_1)t_2 v_2 + t_1(1 - t_2)v_3. \quad (\text{A.11})$$

In het voorbeeld van figuur A.4 zijn de waarden voor v_0, v_1, v_2 en v_3 respectievelijk 1, 0, $1/3$ en $1/3$. De waarden op andere knooppunten van het net uit figuur A.3 zijn eenvoudig afleidbaar, indien we een beroep doen op de twaalfvoudige symmetrie van de hexagonale rooster cel.

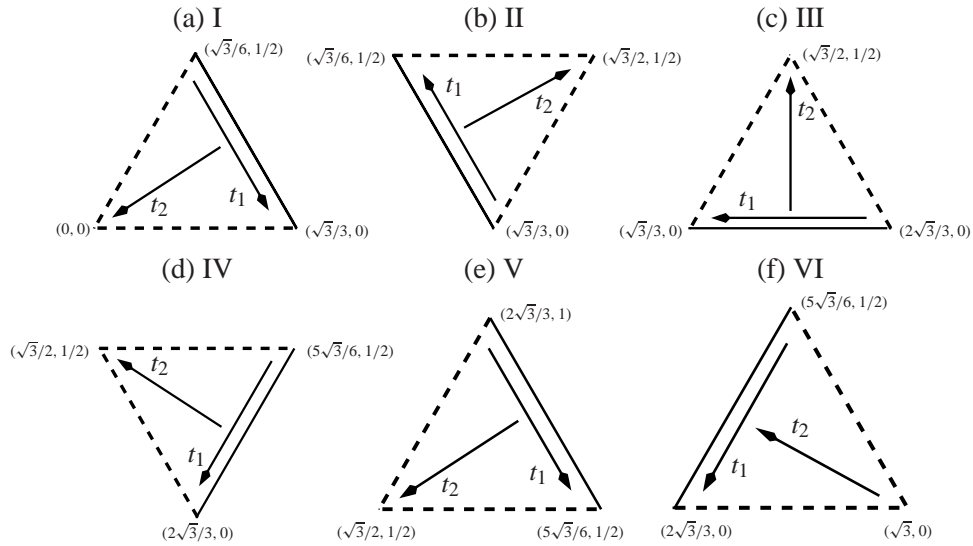
A.3 Derde-ordespline op een hexagonaal rooster

De analytische vorm van de derde-ordespline kan op analoge wijze afgeleid worden. Net als bij de tweede-ordespline, gaan we allereerst op zoek naar een pad, waarlangs we de graad waarmee de functiewaarde wijzigt, kunnen voorspellen. In figuur A.5 lokaliseren we eerst de grens van de drager van de eerste-



Figuur A.5: De derde-ordespline kan analytisch benaderd worden door een opdeling in driehoeken. Binnen elk van deze driehoeken kunnen we een polynomiaal oppervlak afleiden.

en tweede-ordespline. Aangezien de derde-ordespline ontstaat door convolutie van de tweede-ordespline met een primitieve rooster cel, bekijken we de overlap tussen beide, wanneer we deze rooster cel verplaatsen langs het pad van $(5\sqrt{3}/6, 1/2)$ naar $(2\sqrt{3}/3, 0)$. De overlap gebeurt steeds tussen een ruitvormig gebied van de tweede-ordespline en neemt lineair toe. Aangezien de functiewaarde van de tweede-ordespline binnen het ruitvormig gebied in deze richting reeds lineair toeneemt, mogen we verwachten dat de functiewaarde van de derde-ordespline langs dit pad kwadratisch zal toenemen. Deze redenering is mogelijk voor elk traject, aangeduid met een volle lijn in figuur A.5. Beschouwen we echter een traject langs de lijnstukken in stippellijn, b.v. het pad van $(\sqrt{3}, 0)$ naar $(2\sqrt{3}/3, 0)$. De functiewaarde binnen het ruitvormig gebied (met hoekpunten $(\sqrt{3}/3, 0)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $(2\sqrt{3}/3, 0)$ en $(\sqrt{3}/2, -1/2)$) van de tweede-ordespline in deze richting neemt kwadratisch toe, maar de overlap met de rooster cel, die we verschuiven, neemt eveneens kwadratisch toe. We nemen dus aan dat de functiewaarde van de derde-ordespline langs dit pad zal toenemen volgens een vierde macht.



Figuur A.6: Met behulp van symmetrie kunnen we in figuur A.5 zes verschillende soorten driehoeken onderscheiden. In elk van hen definiëren we de parameters t_1 en t_2 .

We delen het “grondplan” van de derde-ordespline op in driehoeken. Met behulp van de twaalfvoudige symmetrie kunnen we zes verschillende soorten driehoeken onderscheiden (zie figuur A.6), waarbinnen we opnieuw twee parameters $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ definiëren. We gebruiken dezelfde parametervoorstelling als in formule (A.10), maar stellen \mathbf{p}_1 en \mathbf{p}_2 aan elkaar gelijk:

$$\mathbf{p}(t_1, t_2) = (1 - t_1)(1 - t_2) \mathbf{p}_0 + t_2 \mathbf{p}_1 + t_1(1 - t_2) \mathbf{p}_3. \quad (\text{A.12})$$

Voor elk van de driehoeken kunnen we nu de parametervergelijking afleiden als functie van t_1 en t_2 . We gebruiken daarbij randvoorwaarden zoals de waarde op de knooppunten (die we kunnen berekenen m.b.v. de analytische vorm van de tweede-ordespline) en de continuïteit t.e.m. de eerste afgeleide in elke richting [132, hfdst. 3]. Tabel A.2 toont de parametervergelijking voor elk van de driehoeken.

De analytische vorm van zowel de tweede-ordespline als de derde-ordespline kunnen we numeriek controleren aan de hand van een algemene kleinste-kwadratenmethode [110, hfdst. 15.4]. We berekenen vooreerst een benadering van de spline door de opeenvolgende convoluties numeriek uit te voeren. Vervolgens beschouwen we een klein gebied, waarbinnen we de analytische vorm willen controleren en kiezen de maximale orde Q van de parametervergelijking die we als model wensen te gebruiken. Vervolgens delen we

Tabel A.2: De parametervergelijkingen van de derde-ordespline binnenin de driehoeken uit figuur A.6.

gebied	uitdrukking
I	$\frac{t_1^2}{9} (t_2^4 - 4t_2^3 + 3t_2^2 + 2t_2 - 2) + \frac{t_1}{9} (-t_2^4 + 4t_2^3 - 3t_2^2 - 2t_2 + 2) + \frac{1}{36} (2t_2^4 - 8t_2^3 + 16t_2 + 11)$
II	$\frac{t_1^2}{18} (-t_2^4 + 6t_2^3 - 13t_2^2 + 12t_2 - 4) + \frac{t_1}{18} (t_2^4 - 6t_2^3 + 13t_2^2 - 12t_2 + 4) + \frac{1}{72} (-3t_2^4 + 12t_2^3 - 10t_2^2 - 16t_2 + 22)$
III	$\frac{t_1^2}{18} (-t_2^4 + 2t_2^3 + 2t_2^2 - 6t_2 + 3) + \frac{t_1}{18} (2t_2^3 - 5t_2^2 + t_2 + 2) + \frac{1}{72} (t_2^4 - 4t_2^3 + 2t_2^2 + 4t_2 + 2)$
IV	$\frac{t_1^2}{36} (t_2^4 - 2t_2^2 + 1) + \frac{t_1}{18} (-2t_2^3 + t_2^2 + t_2) + \frac{1}{72} (-t_2^4 + 4t_2^3 + 2t_2^2)$
V	$\frac{t_1^2}{18} (-t_2^4 + 2t_2^3 - t_2^2) + \frac{t_1}{18} (t_2^4 - 2t_2^3 + t_2^2) + \frac{1}{72} (-t_2^4 + 4t_2^3 + 2t_2^2)$
VI	$\frac{1}{36} t_1^2 t_2^4$

het gebied op in $(P + 1)^2$ datapunten $(t_1, t_2) = (k_1\epsilon, k_2\epsilon)$, waarbij $\epsilon = 1/P$ en $0 \leq k_1, k_2 \leq P$. We kunnen nu een matrix met dimensie $(P + 1)^2 \times (Q + 1)^2$ opstellen als volgt:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \text{basisfuncties} \\ & \overbrace{t_1^0 t_2^0 \quad t_1^1 t_2^0 \quad \dots \quad t_1^Q t_2^Q} \\ \text{datapunten} \left\{ \begin{matrix} (0, 0) \\ (\epsilon, 0) \\ (2\epsilon, 0) \\ \vdots \\ (P\epsilon, P\epsilon) \end{matrix} \right. & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \epsilon & \dots & 0 \\ 1 & 2\epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & P\epsilon & \dots & (P\epsilon)^{2Q} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Daarnaast hebben we ook nog een $(P + 1)^2 \times 1$ kolommatrix \mathbf{d} die de waarde van de numerieke benadering van de spline bevat op de datapunten en tot slot de (gezochte) $(Q + 1)^2 \times 1$ coëfficiëntenmatrix \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{1,0} \\ \vdots \\ c_{Q,Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} v(0, 0) \\ v(\epsilon, 0) \\ v(2\epsilon, 0) \\ \vdots \\ v(P\epsilon, P\epsilon) \end{bmatrix}.$$

De kleinste-kwadratenbenadering van de coëfficiënten vinden we dan als die \mathbf{c} , waarvoor de fout $\|\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{d}\|_2^2$ minimaal is. Merk op dat het probleem overgedetermineerd is, aangezien er veel datapunten voorhanden zijn ($P > Q$). De Moore-Penrose pseudoinverse \mathbf{A}^+ van \mathbf{A} is een unieke $(P + 1)^2 \times (Q + 1)^2$ matrix, waarvoor geldt dat

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^+ \mathbf{d}$$

de kleinste kwadratische fout oplevert waarbij bovendien de norm $\|\mathbf{c}\|_2^2$ minimaal is [35]. Deze aanpak laat ons toe de analytische vorm die we hebben afgeleid te controleren. Indien we b.v. een hogere orde trachten op te leggen, blijken de extra coëfficiënten nul te zijn.

A.4 Benadering voor hogere-ordesplines op een hexagonaal rooster

Met behulp van de tweedimensionale centrale-limietstelling kunnen we aantonen dat de hogere-ordesplines convergeren naar een gaussiaanse functie. We beschouwen daartoe de genormaliseerde eerste-ordespline $\beta^0(\mathbf{x})/\Omega$ als een probabiliteitsdichtheidsfunctie met gemiddelde $\boldsymbol{\mu}$ en covariantiematrix $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{144} & 0 \\ 0 & \frac{5\sqrt{3}}{144} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

De centrale-limietstelling geeft aan dat opeenvolgende convoluties van $\beta^0(\mathbf{x})/\Omega$ met zichzelf convergeren naar

$$\beta^n(\mathbf{x}) \rightarrow \Omega N_2(\boldsymbol{\mu}, (n + 1)\boldsymbol{\Sigma}/\Omega), \quad (\text{A.16})$$

waarbij $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ de probabiliteitsdichtheidsfunctie voorstelt van een tweedimensionale normale verdeling:

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{|\det(\boldsymbol{\Sigma})|}} \exp(-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})). \quad (\text{A.17})$$

De relatieve kwadratische fout tussen de vierde-ordespline bepaald door opeenvolgende convoluties en de benadering m.b.v. de centrale-limietstelling is slechts 0.43%.

Bijlage B

N-dimensionale uitbreiding van de DPSS

In deze bijlage stellen we de N -dimensionale uitbreiding van de prolate sferoïdale rijen voor. Eén van de bijdragen van dit werk is een methode voor het reduceren van de orde van het corresponderende eigenwaardenprobleem met een factor 2^N [170]. Deze reductie kan worden aangewend om de prolate sferoïdale rij met de hoogste energieconcentratie, m.n. de DPSW, met een aanzienlijk minder aantal bewerkingen te berekenen.

Beschouw een N -dimensionale rij $h(\mathbf{n})$, met $\mathbf{n} \in \mathcal{A} = \{\mathbf{n} \mid n_i = 0, 1, \dots, M_i - 1\}$. We zoeken die $h(\mathbf{n})$, zodat het spectrum

$$\hat{h}(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} h(\mathbf{n}) \exp(-j2\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{f} \rangle) \quad (\text{B.1})$$

van $h(\mathbf{n})$ de energieconcentratie in een N -dimensionaal frequentiegebied \mathbf{W} maximaliseert:

$$\lambda = \frac{\int_{\mathbf{W}} |\hat{h}(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}}{\int_{\mathbf{V}} |\hat{h}(\mathbf{f})|^2 d\mathbf{f}}, \quad (\text{B.2})$$

met \mathbf{V} de N -dimensionale hyperkubus

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{f} \mid -1/2 \leq f_i \leq 1/2\}. \quad (\text{B.3})$$

Analoog aan het eendimensionale geval, kunnen we het theorema van Parseval gebruiken om aan te tonen dat

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{A}} K(\mathbf{k} - \mathbf{n})h(\mathbf{n}) = \lambda h(\mathbf{k}), \quad \forall \mathbf{k} \in \mathcal{A} \quad (\text{B.4})$$

moet gelden, met $K(\mathbf{x})$ de N -dimensionale kernfunctie die we bepalen als de inverse fouriergetransformeerde van de indicatorfunctie van het frequentiegebied \mathbf{W} :

$$K(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}} \exp(j2\pi \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle) d\mathbf{f}. \quad (\text{B.5})$$

Het herschrijven van formule (B.4) als een standaard eigenwaardenprobleem kan door de coëfficiënten lexicografisch te nummeren. De index i , $i = 0, 1, \dots, \left(\prod_{j=1}^N M_j - 1\right) = (L - 1)$ adresseert elke vector $\mathbf{n} \in \mathcal{A}$, zodat we kunnen schrijven:

$$\sum_{i=0}^{L-1} K(\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_i) h(\mathbf{n}_i) = \lambda h(\mathbf{n}_k), \quad 0 \leq k \leq L - 1. \quad (\text{B.6})$$

Voor de meeste praktische toepassingen is het frequentiegebied \mathbf{W} symmetrisch ten opzichte van zijn coördinaatassen, hetgeen betekent dat ook de eigenvector corresponderend met de grootste eigenwaarde (het N -dimensionale prolate sferoïdale venster) symmetrisch is ten opzichte van de N coördinaatassen. Deze eigenschap laat ons toe om de orde van het eigenwaardenprobleem aanzienlijk te reduceren. We veronderstellen nu allereerst dat alle M_i oneven zijn. In het eindimensionale geval is $h(n)$ symmetrisch ten opzichte van de centrale vensterpositie $n = (M_1 - 1)/2$. Het tweedimensionale venster $h(n_1, n_2)$ is symmetrisch rond de twee assen $n_1 = (M_1 - 1)/2$ en $n_2 = (M_2 - 1)/2$, zodanig dat één enkel kwadrant het hele venster bepaalt. In het algemeen kunnen we op die wijze de orde reduceren van $\prod_{i=1}^N M_i$ naar $\prod_{i=1}^N \left(\frac{M_i-1}{2} + 1\right)$. Beschouw nu een zogenaamde reductiematrix \mathbf{T}_N die het gereduceerde venster \mathbf{w} afbeeldt op het originele venster: $\mathbf{h} = \mathbf{T}_N \mathbf{w}$. De reductiematrix wordt recursief opgebouwd, dimensie per dimensie:

$$\mathbf{T}_0 = [1],$$

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{T}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{T}_{n-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

De matrix \mathbf{T}_n heeft dus $\frac{M_n-1}{2} + 1$ exemplaren van de matrix \mathbf{T}_{n-1} op de eerste diagonaal en $\frac{M_n-1}{2}$ exemplaren op de tweede diagonaal eronder. Opdat de reductiematrix de eigenwaarden zou bewaren, dient te gelden dat $\mathbf{h}'\mathbf{h} = \mathbf{w}'\mathbf{T}_N'\mathbf{T}_N\mathbf{w}$. De genormaliseerde reductiematrix $\check{\mathbf{T}}_N$ luidt aldus

$$\check{\mathbf{T}}_N = \frac{\mathbf{T}_N}{(\mathbf{T}_N'\mathbf{T}_N)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.8})$$

waarbij $\mathbf{T}_N^V \mathbf{T}_N$ een diagonaalmatrix vormt. In het geval dat alle M_i even zijn, wordt de middelste rij van \mathbf{T}_i weggelaten.

De eigenvector \mathbf{w} , corresponderend met de grootste eigenwaarde van de gereduceerde matrix $\mathbf{B} = \check{\mathbf{T}}_N^V \mathbf{A} \check{\mathbf{T}}_N$, kan omgezet worden naar $\mathbf{h} = \check{\mathbf{T}}_N \mathbf{w}$. Wanneer alle M_i gelijk zijn aan M , wordt het eigenwaardenprobleem gereduceerd met een factor

$$\left(\frac{M}{(M-1)/2 + 1} \right)^N \approx 2^N. \quad (\text{B.9})$$

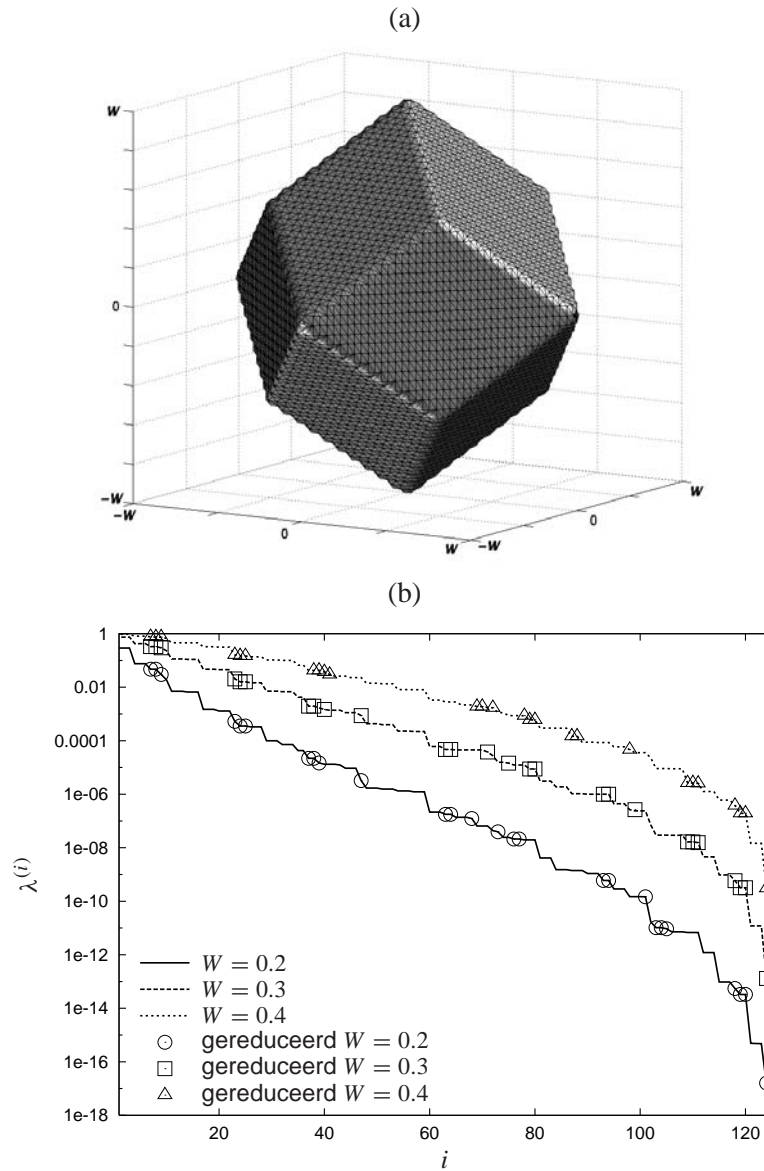
Ter illustratie berekenen we het driedimensionale prolate sferoidale venster, corresponderend met een regelmatig ruitvormig twaalfvlak (dodecaëder), dat weergegeven wordt in figuur B.1 (a). Een dergelijk twaalfvlak stemt overeen met de meest compacte bedekking van de driedimensionale ruimte [103]. De kernfunctie bekomen we door de inverse fouriergetransformeerde van het twaalfvlak te berekenen. Indien we de afstand tussen de parallelle vlakken gelijk aan $\sqrt{2}W/2$ stellen, bekomen we:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}) = K(x_1, x_2, x_3) = & \\ & (-2x_1 \sin(2\pi W x_1) - 2x_2 \sin(2\pi W x_2) - 2x_3 \sin(2\pi W x_3)) \\ & + (x_1 + x_2 + x_3) \sin(\pi W(x_1 + x_2 + x_3)) \\ & + (x_1 - x_2 + x_3) \sin(\pi W(x_1 - x_2 + x_3)) \\ & + (x_1 - x_2 - x_3) \sin(\pi W(x_1 - x_2 - x_3)) \\ & + (x_1 + x_2 - x_3) \sin(\pi W(x_1 + x_2 - x_3)) \Big/ \\ & (\pi^3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2))). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Figuur B.1 (b) toont de eigenwaarden van het corresponderende eigenwaardenprobleem voor $M = 5$ en verschillende waarden van W . De orde van het oorspronkelijke eigenwaardenprobleem is 125, maar wordt gereduceerd tot 27, dankzij de symmetrie-eigenschappen. De energieconcentraties voor $W = 0.2, 0.3, 0.4$ zijn respectievelijk 0.70, 0.95 en 0.99.

Naast toepassingen van de N -dimensionale DPSS voor interpolatie, vermelden we kort dat deze ook kunnen gebruikt worden voor extrapolatie [193]. De gegeven data kunnen ontbonden worden volgens de DPSS-basisvectoren die (benaderd) bandbeperkt zijn (analoog aan het principe van het verstoringalgoritme uit hoofdstuk 5). Vervolgens kunnen we de basisvectoren met een hoge energieconcentratie gebruiken voor extrapolatie. De basisvectoren kunnen immers uitgebreid worden buiten hun drager door gebruik te maken van formule (2.55) op pagina 45. Een mogelijke toepassing van dit principe bevindt zich in de medische beeldvorming. We denken b.v. aan MR-beeldvorming (MR, magnetische resonantie), waar de data worden opgemeten

in de zogenaamde k -ruimte die equivalent is met het frequentiedomein. Om de meettijd te beperken, zijn algoritmen voor inter- en extrapolatie noodzakelijk [67, 183].



Figuur B.1: (a) Het regelmatig ruitvormig twaalfvlak gebruiken we ter illustratie als driedimensionaal frequentiegebied. (b) De eigenwaarden van het corresponderende oorspronkelijke en gereduceerde eigenwaardenprobleem voor $M_1 = M_2 = M_3 = 5$ en $W = 0.2, 0.3, 0.4$.

Bijlage C

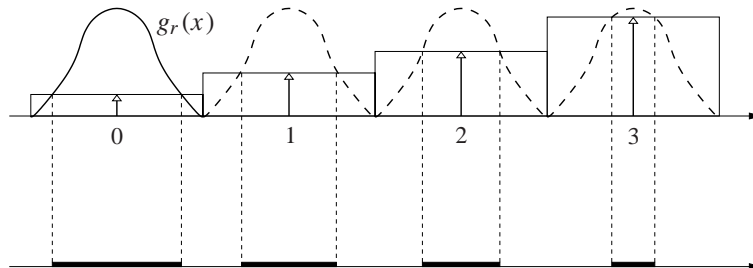
Simulatie druktechnieken

C.1 Simulatie gravurediepdruk

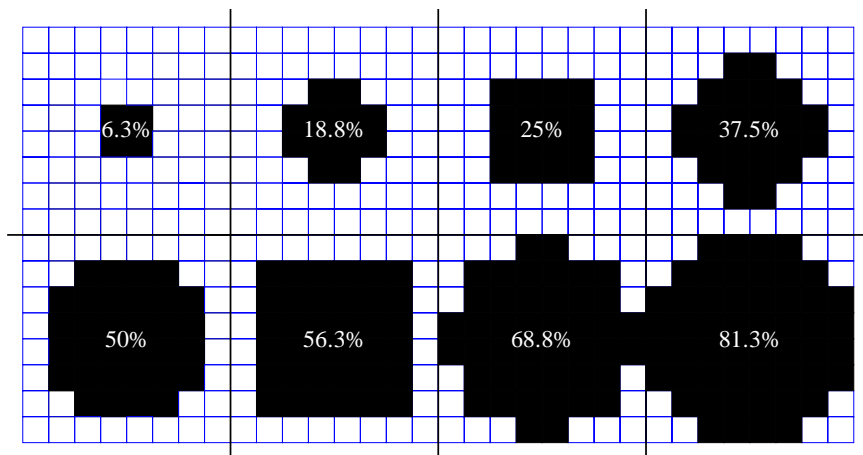
In dit werk hebben we de voorgestelde technieken vaak gedemonstreerd aan de hand van voorbeelden voor drukwerk. In tegenstelling tot reproductietechnieken zoals fotografie, televisie en computerschermen, zijn druktechnieken niet in staat om intermediaire kleurtinten weer te geven. We klasseren deze dan ook onder de binaire technieken: er is inkt of er is er geen. Gelukkig is het mogelijk om spatiale resolutie in te ruilen voor tonale, waarbij een beroep wordt gedaan op de beperkte spatiale resolutie van het menselijk visueel systeem, zodanig dat kleine (binaire) vlekjes de illusie van een intermediaire tint kunnen opwekken. De manier van aanbrengen en de aard van deze vlekjes zit vervat in een rastertechniek. Klassiek rasteren brengt rasterpunten van verschillende grootte (*Eng.* clustered dot dithering) aan op een periodiek rooster. Er zijn echter ook nog andere rastertechnieken in omloop. Zo kunnen de rasterpunten b.v. verspreid zijn over een roostercel (*Eng.* dispersed dot dithering), hetgeen vaak gebruikt wordt bij matrixprinters. Een andere mogelijkheid bestaat erin om de rasterpunten op een stochastisch raster te plaatsen, hetgeen vaak gebruikt wordt bij inktjetprinters. Onze aandacht gaat hier uit naar het klassiek rasteren die het meest gebruikt wordt, wegens zijn grotere robuustheid [46, 70].

De vorm en de grootte van een rasterpunt worden gekarakteriseerd door de rasterpuntfunctie. In figuur C.1 stellen we het principe voor aan de hand van een eendimensionaal voorbeeld. De rasterpuntfunctie $g_r(x)$ wordt geplaatst op elk roosterpunt en vergeleken met de dichtste monsterwaarde. De inkt wordt aangebracht, wanneer de rasterpuntfunctie groter is dan deze monsterwaarde. Dit principe kan eenvoudig uitgebreid worden naar twee dimensies.

Vele druktechnieken genereren het gerasterd beeld elektronisch op een (zeer) fijn microrooster. Laserprinters gebruiken een microrooster van typisch



Figuur C.1: Klassiek rasteren kan wiskundig gemodelleerd worden aan de hand van een dichtste-buur-interpolatie en een drempeloperatie met een rasterpuntfunctie.



Figuur C.2: De rasterpunten “groeien” naarmate de onderliggende monsterwaarde kleiner wordt. De percentages duiden op de bedekkingsgraad binnen de rooster cel. De vorm van het rasterpunt wordt bepaald door de rasterpuntfunctie [46].

600 à 2400 dpi. Het aanmaken van drukplaten voor offsetdruk gebeurt al gauw met een resolutie van 3000 à 6000 dpi. De rasterpunten worden nu samengesteld door verschillende micropunten te combineren. Figuur C.2 toont een microrooster, waarop rasterpunten van verschillende grootte worden weergegeven. De rasterpuntfunctie vertaalt zich als een drempelmatrix, ook bekend als rasterberg. Figuur C.3 toont een mogelijke drempelmatrix die de rasterpunten uit figuur C.2 kan genereren. Conventioneel wordt de matrix genummerd, naargelang het rasterpunt groeit.

Bij gravurediepdruk worden de rasterpunten meestal fysisch gevormd in de drukplaats m.b.v. een trillende diamanten kop. Wij zullen dit proces simuleren aan de hand van een rastermatrix. Figuur C.4 toont hoe we binnen een hexagonale rooster cel een drempelmatrix opstellen die ons toelaat om 61 tinten

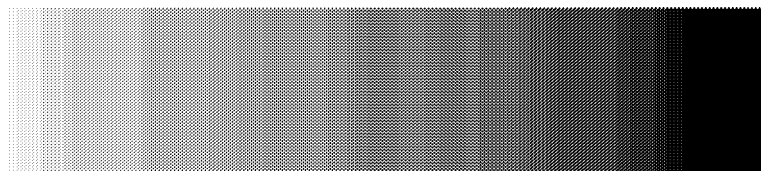
weer te geven. Figuur C.5 geeft een beeld weer, waarvan de monsterwaarden in horizontale richting lineair afnemen om duidelijk de tonale spreiding van de rasterpunten te tonen.

61	53	45	37	41	49	60	63
57	35	25	17	21	29	33	56
51	32	15	5	9	13	27	47
44	24	12	1	2	7	19	39
40	20	8	3	4	11	23	43
48	28	14	10	6	16	31	52
55	34	30	22	18	26	36	54
64	59	50	42	38	46	58	62

Figuur C.3: Een mogelijke drempelmatrix die de rasterpunten uit figuur C.2 kan genereren. De drempelmatrix laat het rasterpunt punt per punt toenemen in grootte volgens de nummering.

				50	40				
			51	35	21	42			
		54	28	15	11	23	44		
	59	34	22	9	4	13	30	47	
57	37	25	17	1	3	7	18	31	52
46	32	19	8	2	5	16	26	39	60
	48	29	14	6	10	24	38	58	
		49	33	12	20	36	56		
			45	27	41	55			
				43	53				

Figuur C.4: Het principe van een drempelmatrix laat ons toe om een benadering van de hexagonale roostercel op te vullen met een rasterpunt.



Figuur C.5: Een testbeeld waarbij de waarde lineair afneemt in horizontale richting, toont duidelijk de tonale spreiding van de rasterpunten.

C.2 Simulatie kleurendrukwerk

Bij kleurendrukwerk wordt elke separatie afzonderlijk gerasterd. Om inter-separatiemoiré zo veel mogelijk te vermijden, dienen de onderlinge hoeken tussen de separaties nauwkeurig bepaald te worden [6, 46]. Daarom hebben we voor onze experimenten een beroep gedaan op een professioneel softwarepakket dat vaak gebruik wordt in de grafische industrie [11]. Dit pakket laat toe om een beeld af te drukken, waarbij men het raster zelf kan instellen. Het nadeel is echter dat de gegenereerde PostScript-bestanden niet geschikt zijn om geïncludeerd te worden als figuren in dit werk. Daarom bespreken we hier hoe we dit toch gerealiseerd hebben.

1. Allereerst slaan we de gerasterde beelden op in twee afzonderlijke PostScript-bestanden: één voor de kleurseparaties (CMY) en één voor de zwarte separatie (K).
2. We gebruiken een populaire PostScript-tolk in software [12] die in staat is om elk van deze bestanden om te zetten naar een hoge-resolutiebitmap in RGB, rekening houdend met de opgelegde rastering.
3. We lezen beide bitmaps in en combineren de beelddata, om een ruwe CMYK-bitmap te bekomen. De kleurconversie van RGB naar CMYK is bijzonder eenvoudig, aangezien enkel “volle” tinten worden gebruikt.
4. Met behulp van een conversieprogramma zetten we het bestand met de ruwe CMYK-bitmap om naar een TIFF-bestand in de CMYK-kleurenruimte.
5. Dit bestand openen we in het grafische softwarepakket [11] en we slaan het vervolgens op als een gewoon EPS-bestand (*Eng.* Encapsulated PostScript) in CMYK.
6. Omdat het beeld in dit EPS-bestand enkel “volle” tinten gebruikt, is additioneel rasteren overbodig. Daarom schakelen we de normale rasterprocedure uit, door volgende lijnen aan het EPS-bestand toe te voegen: [6, 8–10]

```
50 0 {pop pop 0 1 exch sub}
50 0 {pop pop 0 1 exch sub}
50 0 {pop pop 0 1 exch sub}
50 0 {pop pop 0 1 exch sub}
setcolorscreen
```

We bekomen zodoende een EPS-bestand dat geschikt is voor inclusie in dit werk.

Bibliografie

- [1] The European Rotogravure Association. <http://www.era.eu.org>.
- [2] The Gravure Association of America. <http://www.gaa.org>.
- [3] *Digital Color Prepress*, volume 1. Agfa-Gevaert N.V., 1991.
- [4] *Digital Color Prepress*, volume 2. Agfa-Gevaert N.V., 1991.
- [5] *Digital Color Prepress – An Introduction to Digital Scanning*, volume 4. Agfa-Gevaert N.V., 1991.
- [6] Halftones and Screens. Technisch rapport, Adobe Developers Association, oktober 1997.
- [7] M. Achiha, K. Ishikura, en T. Fukinuki. A motion-adaptive high-definition convertor for NTSC color TV signals. *SMPTE Journal*, 93, p. 470–476, mei 1994.
- [8] Adobe Systems Incorporated. *PostScript Language—Reference manual*. Addison-Wesley, 1985.
- [9] Adobe Systems Incorporated. *PostScript Language—Tutorial and Cookbook*. Addison-Wesley, 1985.
- [10] Adobe Systems Incorporated. *PostScript Language—Program design*. Addison-Wesley, 1988.
- [11] Adobe Systems Incorporated. Photoshop 6, 2001.
- [12] Aladdin Enterprises, Menlo Park, CA (USA). *Details of Ghostscript output devices*, 5de editie, 1998.
- [13] I. Amidror. *The Theory of the Moiré Phenomenon*, volume 15 van *Computational Imaging and Vision*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [14] M. J. Bastiaans. Gabor's expansion of a signal into Gaussian elementary signals. *Proceedings of the IEEE*, 68, p. 538–539, april 1980.
- [15] M. J. Bastiaans. On the sliding-window representation in digital signal processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(4), p. 868–873, augustus 1985.

- [16] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, en M. Olivier. Pari/gp. www.pari-gp-home.de, november 2000.
- [17] E. B. Bellers en G. de Haan. *De-interlacing: A Key Technology for Scan Rate Conversion*. Nummer 9 in *Advances in Image Communication*. Elsevier, 2000.
- [18] E. B. Bellers en G. de Haan. Towards an optimal television display format. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume 1, p. 749–752. IEEE, Vancouver, Canada, september 2000.
- [19] E. B. Bellers, I. de Weert, G. de Haan, en I. E. J. Heynderickx. Optimal television scanning format for CRT-displays. In *Digest of the IEEE International Conference on Consumer Electronics*. IEEE, Los Angeles, USA, juni 2001.
- [20] J. Biemond, R. Lagendijk, en R. Mersereau. Iterative methods for image deblurring. *Proceedings of the IEEE*, 78(5), p. 856–883, mei 1990.
- [21] J. F. Blinn. Jim Blinn's Corner: Return of the Jaggy. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9, p. 82–88, maart 1989.
- [22] T. Blu en M. Unser. Quantitative fourier analysis of approximation techniques: Part I—interpolators and projectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(10), p. 2783–2795, oktober 1999.
- [23] H. Blume, O. Franzen, en M. Schmidt. Optimizing video signal processing algorithms by evolution strategies. *Computational Intelligence*, 1226, p. 547–548, 1997.
- [24] A. M. Bock. Motion-adaptive standards conversion between formats of similar field rates. *Signal Processing: Image Communication*, 6, p. 275–280, juni 1994.
- [25] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*, volume 27 van *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1978.
- [26] C. de Boor, K. Höllig, en S. Riemenschneider. *Box splines*, volume 98 van *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1993.
- [27] S. A. Booth. Digital TV in the U.S. *IEEE Spectrum*, p. 39–46, maart 1999.
- [28] F. Caron et al. *Verpakkingsdiepdruk*. GOC-uitgeverij Amsterdam, 1989.
- [29] G. Chanan en M. Troy. Strehl ratio and modulation transfer function for segmented mirror telescopes as functions of segment phase error. *Applied Optics*, 38, p. 6642–6647, 1999.
- [30] C. Clarke. Future television systems: Comparison of sequential and interlaced scanning. Technisch rapport 1987/18, BBC, november 1987.
- [31] C. Clarke en N. Tanton. Digital standards conversion: interpolation theory and aperture synthesis. Technisch rapport 1984/20, BBC, december 1984.
- [32] D. J. Connor, B. G. Haskell, en F. W. Mounts. A frame-to-frame picturephone coder for signals containing differential quantizing noise. *The Bell System Technical Journal*, 52(1), p. 35–51, 1973.

- [33] E. Cox. Fuzzy fundamentals. *IEEE Spectrum*, p. 58–61, oktober 1992.
- [34] I. Cox, J. Kilian, en F. T. Leighton. Secure spread spectrum watermarking for multimedia. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(12), p. 1673–1687, december 1997.
- [35] B. N. Datta. *Numerical Linear Algebra and Applications*. Brooks/Cole Publishing Company, 1995.
- [36] G. De Haan en E. B. Bellers. Deinterlacing—An Overview. *Proceedings of the IEEE*, 86(9), p. 1839–1857, september 1998.
- [37] P. A. Delabastita. Recent trends in digital halftoning. In *SPIE Proceedings Series*, volume 2949, p. 318–331. 1996.
- [38] D. Delić, V. S. Milošević, en V. Šenk. A new speech scrambling method—comparative analysis and a fast algorithm. In *Proceedings of the 8th European Signal Processing Conference, EUSIPCO-96*, p. 1705–1708. Trieste, Italy, 1996.
- [39] P. Delogne. Comparison between interlaced and progressive scanning formats. Technisch rapport, CEC RACE/HAMLET Overview R2110, december 1995.
- [40] K. Denecker, P. De Neve, B. Rogge, D. Van De Ville, en I. Lemahieu. Visually uniform near-lossless CMYK image compression. In W. Hahn, E. Walther-Klaus, en J. Knop, redacteurs, *Euromedia*, p. 59–63. Society for Computer Simulation International, München, Germany, april 1999.
- [41] K. Denecker, D. Van De Ville, F. Habils, en I. Lemahieu. Software and hardware implementation of an improved lossless halftone image compression algorithm. In *International Congress on Imaging Science, Electronic Imaging*, volume 2, p. 263–267. Antwerp, Belgium, september 1998.
- [42] K. Denecker, D. Van De Ville, F. Habils, W. Meeus, M. Brunfaut, en I. Lemahieu. Design of an improved lossless halftone image compression codec. *Signal Processing: Image Communication*, aanvaard ter publicatie, 2001.
- [43] A. Eberhard. An optimal discrete window for the calculation of power spectra. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 21(1), p. 37–43, februari 1973.
- [44] Engineering Productivity Tools. The FFT demystified. <http://www.eptools.com/tn/T0001/INDEX.HTM>, 1999.
- [45] A. M. Eskicioglu en E. J. Delp. An overview of multimedia content protection in consumer electronics devices. *Signal Processing: Image Communication*, 16(7), p. 681–699, april 2001.
- [46] P. Fink. *PostScript Screening: Adobe Accurate Screens*. Adobe Press, augustus 1992.

- [47] D. Gabor. Theory of communication. *Journal of the IEE*, 93(III), p. 429–457, november 1946.
- [48] A. Glassner. Inside moiré patterns. *IEEE Computer Graphics and Applications*, p. 97–101, 1997.
- [49] A. Goshtasby, F. Cheng, en B. A. Barsky. B-spline curves and surfaces viewed as digital filters. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 52, p. 264–275, 1990.
- [50] I. Gradshteyn en I. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1994.
- [51] D. M. Gruenbacher en D. R. Hummels. A simple algorithm for generating the discrete prolate spheroidal sequences. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11), p. 3276–3278, november 1994.
- [52] P. Guillotel en S. Pigeon. Coding efficiency comparisons of both interlaced and progressive scanning formats. Technisch rapport, CEC RACE/HAMLET Deliverable R2110/WP2/DS/S/012/b1, december 1995.
- [53] G. de Haan, P. W. A. C. Biezen, H. Huijgen, en A. O. Olukayode. True-motion estimation with 3-D recursive search block matching. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 3(5), p. 368–379, oktober 1993.
- [54] G. de Haan, P. W. A. C. Biezen, en A. O. Olukayode. An evolutionary architecture for motion-compensated 100 Hz television. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 5(3), p. 207–217, juni 1993.
- [55] P. Haavisto, J. Juhola, en Y. Neuvo. Fractional frame rate up-conversion using weighted median filters. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 35(3), p. 272–278, augustus 1989.
- [56] P. Haavisto en Y. Neuvo. Motion adaptive scan rate up-conversion. *Multidimensional Systems Signal Processing*, 3, p. 113–130, mei 1992.
- [57] S. Hartwig. On the performance bounds of motion-compensated deinterlacing. *Signal Processing: Image Communication*, (10), p. 291–302, 1997.
- [58] B. Haskell, A. Puri, en A. Netravali. *Digital Video: an Introduction to MPEG-2*. Digital Multimedia Standards Series. Chapman and Hall, 1997.
- [59] H. Haussecker en H. R. Tizhoosh. *Handbook of Computer Vision and Applications*, volume 2, hoofdstuk Fuzzy Image Processing, p. 683–728. Academic Press, 1999.
- [60] G. Hekkert, C. Wagenvoorde, en G. Goorman. *Het grafische productieproces*. GOC-uitgeverij Veenendaal, 2de editie, 1986.
- [61] M. E. Hellman. An extension of the shannon theory approach to cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23(5), p. 289–294, mei 1977.

- [62] C. Hentschel en H. He. Noise measurement in video images. In *Digest of the IEEE International Conference on Consumer Electronics*, p. 56–67. IEEE, 2000.
- [63] G. C. Holst. *Sampling, Aliasing, and Data Fidelity*. JCD Publishing and SPIE, 1998.
- [64] G. C. Holst. Electronic imaging: Real data or artifacts? Technisch rapport, SPIE Short Course Notes (SC065), 2000.
- [65] T. Huang, redacteur. *Image Sequence Analysis*. Springer-Verlag, 1981.
- [66] ISO 12640:1997. CMYK standard colour image data. CD-ROM, 1997.
- [67] J. I. Jackson, C. H. Meyer, D. G. Nishimura, en A. Macovski. Selection of a convolution function for fourier inversion using gridding. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(3), p. 473–478, september 1991.
- [68] H. E. Jensen, T. Hohold, en J. Justesen. Double series representation of bounded signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(4), p. 613–625, juli 1988.
- [69] J. Juhola, A. Nieminen, J. Solo, en Y. Neuvo. Scan rate conversion using weighted median filtering. In *ISCAS*, p. 433–436. IEEE, 1989.
- [70] H. R. Kang. *Digital Color Halftoning*. SPIE Optical Engineering Press, 1999.
- [71] D. Kermisch en P. Roetling. Fourier spectrum of halftone images. *Journal of the Optical Society of America A*, 65(6), p. 716–723, juni 1975.
- [72] E. Kerre. *Introduction to the basic principles of fuzzy set theory and some of its applications*. Communication & Cognition, 1991.
- [73] E. Kerre en M. Nachtgeael, redacteurs. *Fuzzy Techniques in Image Processing*, volume 52 van *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag, 2000.
- [74] R. G. Keys. Cubic convolution interpolation for digital image processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(6), p. 1153–1160, december 1981.
- [75] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume Seminumerical algorithms. Addison-Wesley, 2de editie, 1981.
- [76] V. Kotel'nikov. On the transmission capacity of “ether” and wire in electro-communications. *Izd. Red. Upr. Svyazzi RKKA (Moscow)*, 1933.
- [77] V. Kotel'nikov. *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*, hoofdstuk Reprint: On the transmission capacity of “ether” and wire in electro-communications. Birkhauser, 2000.
- [78] A. Kudelski. Method for scrambling and unscrambling a video signal. 1994. US Patent 5375168.

- [79] M. G. Kuhn. Analysis of the Nagravision video scrambling method. <http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25>, 1998.
- [80] C. J. Kuo, C. Liao, en C. C. Lin. Adaptive interpolation technique for scanning rate conversion. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 6(3), p. 317–321, juni 1996.
- [81] H. J. Landau en H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty — ii. *The Bell System Technical Journal*, 40(1), p. 65–84, januari 1961.
- [82] H. J. Landau en H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty — iii: The dimension of essentially time- and band-limited signals. *The Bell System Technical Journal*, 41(4), p. 1295–1336, juli 1962.
- [83] D. L. Lau en G. R. Arce. *Modern Digital Halftoning*. Marcel Dekker, 2001.
- [84] C. C. Lee. Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 20(2), p. 404–435, maart 1990.
- [85] J. S. Lim. *Two-dimensional Signal and Image Processing*. Signal Processing Series. Prentice Hall PTR, 1990.
- [86] C. T. Loop. *Generalized B-spline Surfaces of Arbitrary Topological Type*. Doctoraatsthesis, University of Washington, 1992.
- [87] B. Macq en J. Quisquater. Cryptology for digital TV broadcasting. *Proceedings of the IEEE*, 83(6), p. 944–957, 1995.
- [88] D. Marsh. TV and the PC, State of the Union. In *WinHEC 99 White Paper*. Microsoft Corporation, september 1999.
- [89] Y. Matias en A. Shamir. Video scrambling apparatus and method based on space filling curves. 1991. US Patent 5058158.
- [90] J. Menezes, P. C. van Oorschoot, en S. A. Vanstone. *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press, 1997.
- [91] R. Mersereau. The processing of hexagonally sampled two-dimensional signals. In *Proceedings of the IEEE*, volume 67, p. 930–949. juni 1979.
- [92] F. Michaud, C. T. L. Dinh, en G. Lachiver. Fuzzy detection of edge-direction for video line doubling. *IEEE Transactions on circuits and systems for video technology*, 7(3), p. 539–542, juni 1997.
- [93] M. D. Miller en R. Zaucha. *The Color PC—Production Techniques*. Hayden Books, 1995.
- [94] D. Mitchell en A. Netravali. Reconstruction filters in computer graphics. *ACM Computer Graphics*, 22(4), p. 221–228, augustus 1988.
- [95] M. Miyahara, K. Kotani, en V. R. Algazi. Objective picture quality scale (PQS) for image coding. *IEEE Transactions on Communications*, COM-46(9), p. 1215–1226, september 1998.

- [96] P. M. Morse en H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume 2. McGraw-Hill, 1953.
- [97] P. M. Morse en H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, volume 1. McGraw-Hill, 1953.
- [98] R. Nasanen. Visibility of halftone dot textures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-14, p. 920–924, 1984.
- [99] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Trans. Amer. Inst. Elect. Eng.*, 47, p. 617–644, 1928.
- [100] A. Papoulis. *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill, 1962.
- [101] S. K. Park en R. A. Schowengerdt. Image reconstruction by parametric cubic convolution. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, (23), p. 258–272, 1983.
- [102] J. Peddie. *High-Resolution Graphics Display Systems*. McGraw-Hill, 1994.
- [103] D. Petersen en D. Middleton. Sampling and reconstruction of wave-number-limited functions in N-dimensional Euclidean spaces. *Information and control*, 5, p. 279–323, 1962.
- [104] F. A. P. Petitcolas, R. J. Anderson, en M. G. Kuhn. Information hiding—A Survey. *Proceedings of the IEEE*, 87(7), p. 1062–1078, juli 1999.
- [105] S. Pigeon en P. Guillotel. Advantages and drawbacks of interlaced and progressive scanning formats. Technisch rapport, CEC RACE/HAMLET Deliverable R2110/WP2/DS/R/004/b1, juni 1995.
- [106] A. Pizurica, W. Philips, I. Lemahieu, M. Acheroy, en D. Van De Ville. Image denoising using a multiscale nonlinear filtering technique. In J. Blanc-Talon en D. Popescu, redacteurs, *Proceedings of the 11th International Conference on Systems research, informatics and cybernetics, workshop on Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, p. 9–13. The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics, Baden-Baden, Germany, augustus 1999.
- [107] C. A. Poynton. *A Technical Introduction to Digital Video*. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [108] C. A. Poynton. Color FAQ. Technisch rapport, <http://www.inforamp.net/~poynton/ColorFAQ.html>, 1997.
- [109] H. Prautzsch en W. Boehm. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, hoofdstuk Box Splines. Springer, 2001.
- [110] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, en B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992.
- [111] R. S. Prodan. Multidimensional digital signal processing for television scan conversion. *Philips Journal of Research*, 41(6), p. 576–603, 1986.

- [112] S. Qian en D. Chen. Discrete Gabor Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(7), p. 2429–2438, juli 1993.
- [113] S. Qian en D. Chen. *Joint Time-Frequency Analysis: Methods and Applications*. Prentice Hall, 1996.
- [114] S. Qian en D. Chen. Joint time-frequency analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, 16(2), p. 52–67, maart 1999.
- [115] T. Reuter. Standards conversion using motion compensation. *Signal Processing*, 16, p. 73–82, 1989.
- [116] A. Roberts. The improved display of 625-line television pictures. Technisch rapport 1983/8, BBC, 1983.
- [117] A. Roberts. The improved display of 625-line television pictures: Adaptive interpolation. Technisch rapport 1985/5, BBC, mei 1985.
- [118] B. Rogge, D. Van De Ville, R. Van de Walle, W. Philips, en I. Lemahieu. SXML: Streaming XML. In J.-P. Veen, redacteur, *Proceedings of the PRORISC IEEE Benelux Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, p. 389–394. STW Technology Foundation, Mierlo, the Netherlands, november 1999.
- [119] B. Rogge, D. Van De Ville, R. Van de Walle, W. Philips, en I. Lemahieu. A new method for synchronizing media based on XML. In F. Broeckx en L. Pauwels, redacteurs, *Euromedia*, p. 15–19. Society for Computer Simulation International, Antwerp, Belgium, mei 2000.
- [120] J. C. Russ. *The image processing handbook*. CRC Press Inc., 1992.
- [121] F. Russo. Fire operators for image processing. *Fuzzy Sets and Systems*, 103(2), p. 265–275, 1999.
- [122] D. J. Sakrison. On the role of the observer and a distortion measure in image transmission. *IEEE Transactions on Communications*, COM-25(11), p. 1251–1267, november 1977.
- [123] R. W. Schafer, R. M. Mersereau, en M. A. Richards. Constrained iterative restoration algorithms. *Proceedings of the IEEE*, 69(4), p. 432–450, april 1981.
- [124] J. Schaumont en P. Candry. A method and a device for converting a picture. Technisch rapport WO95/01047, Barco, International application published under the Patent Cooperation Treaty, januari 1995.
- [125] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37, p. 10–21, 1949.
- [126] C. E. Shannon. Classic paper: Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IEEE*, 86(2), p. 447–457, 1998.
- [127] D. Slepian. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty — iv: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions. *The Bell System Technical Journal*, 43(6), p. 3009–3058, november 1964.

- [128] D. Slepian. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty — v: The discrete case. *The Bell System Technical Journal*, 57(5), p. 1371–1430, mei 1978.
- [129] D. Slepian en H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty — i. *The Bell System Technical Journal*, 40(1), p. 43–64, januari 1961.
- [130] N. J. A. Sloane. A library of hadamard matrices. <http://www.research.att.com/~njas/hadamard>, 1999.
- [131] N. van Someren. *High Quality De-interlacing of Television Images*. Doctoraatsthesis, Trinity College, University of Cambridge, september 1994.
- [132] G. Strang en G. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, 1973.
- [133] J. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little, en F. J. Corbato. *Spheroidal Wave Functions*. The M.I.T. Press, 1956.
- [134] K. Strom. On convolutions of B-splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 55(1), p. 1–29, 1994.
- [135] M. D. Swanson, M. Kobayashi, en A. H. Tewfik. Multimedia data-embedding and watermarking technologies. *Proceedings of the IEEE*, 86(6), p. 1064–1088, juni 1998.
- [136] A. Tabatabai, R. Jasinski, en T. Naveen. Motion estimation methods for video compression—A Review. *Journal of the Franklin Institute*, 335B(8), p. 1411–1441, 1998.
- [137] S. Takada, M. Ohsawa, et al. Video signal-processing technique for video printer. *Sharp Technical Journal*, (62), p. 5–9, 1995.
- [138] M. Tekalp. *Digital Video Processing*, hoofdstuk Standards Conversion, p. 302–330. Prentice Hall PTR, 1995.
- [139] M. Tekalp. *Digital Video Processing*, hoofdstuk Noise Filtering, p. 262–282. Prentice Hall PTR, 1995.
- [140] P. Thévenaz, T. Blu, en M. Unser. Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(7), p. 739–758, juli 2000.
- [141] G. Thomas, B. C. Flores, en J. Sok-Son. SAR sidelobe apodization using the Kaiser window. In *Proceedings ICIP*, volume 1, p. 709–712. IEEE, Vancouver (BC), Canada, september 2000.
- [142] G. A. Thomas. A comparison of motion-compensated interlace-to-progressive conversion methods. Technisch rapport 1996/9, BBC, augustus 1996.
- [143] G. A. Thomas. A comparison of motion-compensated interlace-to-progressive conversion methods. *Signal Processing: Image Communication*, 12, p. 209–229, 1998.

- [144] D. H. K. Tsang, B. Bensaou, en S. T. C. Lam. Fuzzy-based rate control for real-time mpeg video. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4), p. 504–516, november 1998.
- [145] D. W. Tufts en J. T. Francis. Designing digital low-pass filters—Comparison of some methods and criteria. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 18(4), p. 487–494, december 1970.
- [146] R. A. Ulichney. *Digital Halftoning*. MIT Press, 1987.
- [147] M. Unser. Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(3), p. 277–285, maart 1991.
- [148] M. Unser. Sampling—50 years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4), p. 569–587, april 2000.
- [149] M. Unser, A. Aldroubi, en M. Eden. B-spline signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2), p. 821–848, februari 1993.
- [150] M. Unser, A. Aldroubi, en M. Eden. Enlargement or reduction of digital images with minimum loss of information. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(3), p. 247–258, maart 1995.
- [151] M. Unser en I. Daubechies. On the approximation power of convolution-based least squares versus interpolation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(7), p. 1697–1711, juli 1997.
- [152] D. Van De Ville. Non-linear resampling for edge preserving moiré suppression. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 3, p. 1508–1513. IEEE Press, Bled, Slovenia, juli 1999.
- [153] D. Van De Ville. Non-linear resampling for printing applications. In *First FTW PhD Symposium*, p. 23. RUG, Ghent, Belgium, december 2000.
- [154] D. Van De Ville. Image resampling using least-squares spline models. In *Second FTW PhD Symposium*, p. 76. RUG, Ghent, Belgium, december 2001.
- [155] D. Van De Ville, K. Denecker, en I. Lemahieu. Non-Linear Filtering for Moiré Suppression in Gravure Printing. In *International Congress on Imaging Science, Electronic Imaging*, volume 2, p. 252–256. Antwerp, Belgium, september 1998.
- [156] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. Non-linear resampling for both moiré suppression and edge preservation. In G. Beretta en R. Eschbach, redacteurs, *Color Imaging: Device-Independent Color, Color Hardcopy, and Graphic Arts IV*, volume 3648, p. 432–441. SPIE Proceedings Series, San Jose, CA, USA, januari 1999.
- [157] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. An overview of resampling filters for halftoned images. In G. Joubert en E. D'Hollander, redacteurs, *High Performance Computing: Biomedical Applications and Parallel Architectures*, p. 91–106. Clausthal, Germany, januari 1999.

- [158] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. Gabor spectrogram based risk of aliasing. In N. Mastorakis, redacteur, *Fourth World Multi-Conference on: Circuits, Systems, Communications and Computers*, p. 3631–3636. World Scientific and Engineering Society, juli 2000.
- [159] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. Nonlinear resampling for edge preserving moiré suppression. *Journal of Electronic Imaging*, 9(4), p. 534–547, oktober 2000.
- [160] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. An objective quality measure for the assessment of aliasing and sharpness in halftones. In J. Blanc-Talon en D. Popescu, redacteurs, *Proceedings of the Second International Symposium on Intelligent Vision Systems*, p. 23–30. The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics, Baden-Baden, Germany, augustus 2000.
- [161] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. On the measurement of aliasing and sharpness in halftones. In F. Broeckx en L. Pauwels, redacteurs, *Euromedia*, p. 311–316. Society for Computer Simulation International, Antwerp, Belgium, mei 2000.
- [162] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. A quality measure for halftones obtained by linear and nonlinear resampling. In J.-P. Veen, redacteur, *Proceedings of the PRORISC IEEE Benelux Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, p. 549–556. STW Technology Foundation, Veldhoven, the Netherlands, november 2000.
- [163] D. Van De Ville, K. Denecker, W. Philips, en I. Lemahieu. *Signal Processing, Communications and Computer Science*, hoofdstuk Gabor spectrogram based risk of aliasing, p. 37–42. Electrical and Computer Engineering Series. World Scientific Engineering Society Press, 2000.
- [164] D. Van De Ville, J. Duysens, B. Rogge, R. Van de Walle, W. Philips, en I. Lemahieu. *Recent Research Developments in Pattern Recognition*, volume 1, hoofdstuk Head-controlled mouse system using a low-budget webcam, p. 247–257. Transworld Research Network, 2000.
- [165] D. Van De Ville, M. Nachtegael, D. Van der Weken, E. Kerre, W. Philips, en I. Lemahieu. Noise reduction by fuzzy image filtering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, aangeboden ter publicatie, 2001.
- [166] D. Van De Ville, M. Nachtegael, D. Van der Weken, W. Philips, I. Lemahieu, en E. Kerre. A new fuzzy filter for gaussian noise reduction. In G. Bernd, C. A. Bouman, en E. G. Steinbach, redacteurs, *Visual Communications and Image Processing*, volume 4310 van *SPIE Proceedings Series*, p. 1–9. SPIE, San Jose, CA, januari 2001.
- [167] D. Van De Ville, W. Philips, en I. Lemahieu. *Fuzzy Techniques in Image Processing*, volume 52 van *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, hoofdstuk Fuzzy-based motion detection and its application to de-interlacing, p. 337–369. Springer-Verlag, 2000.

- [168] D. Van De Ville, W. Philips, en I. Lemahieu. Motion compensated deinterlacing for both realtime video and still images. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, p. 680–683. IEEE, Vancouver, Canada, september 2000.
- [169] D. Van De Ville, W. Philips, en I. Lemahieu. Image scrambling using an optimal basis with isotropic energy concentration. In J. Blanc-Talon en D. Popescu, redacteurs, *Proceedings of the Second International Symposium on Intelligent Vision Systems*, volume 3, p. 39–44. The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics, Baden-Baden, Germany, augustus 2001.
- [170] D. Van De Ville, W. Philips, en I. Lemahieu. On the N-dimensional extension of the discrete prolate spheroidal window. *IEEE Signal Processing Letters*, aanvaard ter publicatie, 2001.
- [171] D. Van De Ville, W. Philips, en I. Lemahieu. Least-squares spline resampling to a hexagonal lattice. *Signal Processing: Image Communication*, aangeboden ter publicatie.
- [172] D. Van De Ville, W. Philips, en I. Lemahieu. *Imaging and Vision Systems: Theory, Assessment and Applications*, hoofdstuk Joint edge-preserving and moiré-suppressing image resampling using the discrete Gabor transform. *Advances in Computation: Theory and Practice*. NOVA Science Books, NY, USA, aanvaard ter publicatie.
- [173] D. Van De Ville, B. Rogge, W. Philips, en I. Lemahieu. Deinterlacing using fuzzy-based motion detection. In L. Jain, redacteur, *Proceedings of the third international conference on knowledge-based intelligent information engineering systems*, p. 263–267. IEEE, Adelaide, Australia, augustus 1999.
- [174] D. Van De Ville, B. Rogge, W. Philips, en I. Lemahieu. Evaluation of several operators for fuzzy-based motion adaptive deinterlacing. In J.-P. Veen, redacteur, *Proceedings of the PRORISC IEEE Benelux Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*, p. 535–544. STW Technology Foundation, Mierlo, the Netherlands, november 1999.
- [175] D. Van De Ville, B. Rogge, W. Philips, en I. Lemahieu. Motion adaptive deinterlacing using a fuzzy-based motion detector. In J. Blanc-Talon en D. Popescu, redacteurs, *Proceedings of the First International Symposium on Intelligent Vision Systems*, p. 21–26. The International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics, Baden-Baden, Germany, augustus 1999.
- [176] D. Van De Ville, R. Van de Walle, W. Philips, en I. Lemahieu. *Advances in Signal Processing, Robotics and Communications*, hoofdstuk Image scrambling using 2D DPSS, p. 39–44. Electrical and Computer Engineering Series. World Scientific Engineering Society Press, 2001.
- [177] D. Van De Ville, R. Van de Walle, W. Philips, en I. Lemahieu. Image scrambling using 2D DPSS. In V. Kluev en N. Mastorakis, redacteurs, *Proceedings*

- of the WSES International Conference on Speech, Signal and Image Processing, p. 1381–1386. World Scientific and Engineering Society, Malta, september 2001.
- [178] D. Van De Ville, R. Van de Walle, W. Philips, en I. Lemahieu. Image scrambling without bandwidth expansion. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, aangeboden ter publicatie.
- [179] W. Van Leeckwijck en E. Kerre. Defuzzification: criteria and classification. *Fuzzy Sets and Systems*, 108, p. 159–178, 1999.
- [180] J. Varah. The prolate matrix. *SIAM Journal on Linear Algebra and Its Applications*, (187), p. 269–278, 1993.
- [181] T. Verma, S. Bilbao, en T. H. Y. Meng. The digital prolate spheroidal window. In *Proceedings ICASSP*, p. 1351–1354. IEEE, mei 1996.
- [182] V. Šenk, D. Delić, en V. S. Milošević. A new speech scrambling concept based on hadamard matrices. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(6), p. 161–163, juni 1997.
- [183] R. Van de Walle, H. H. Barrett, J. M. Kyle, M. I. Altbach, B. Desplanques, A. F. Gmitro, J. Cornelis, en I. Lemahieu. Reconstruction of MR images from data acquired on a general nonregular grid by pseudoinverse calculation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(12), p. 1160–1167, december 2000.
- [184] B. A. Wandell. *Foundations of Vision*. Sinauer Associates, 1995.
- [185] Waterloo Maple Inc. Maple 6, 2000.
- [186] J. Watkinson. The engineer's guide to motion compensation. Technisch rapport, Snell & Wilcox, 1994.
- [187] J. Watkinson. The engineer's guide to standards conversion. Technisch rapport, Snell & Wilcox, 1994.
- [188] J. Wexler en S. Raz. Discrete gabor expansion. *Signal Processing*, 21, p. 207–220, 1990.
- [189] J. Whittaker. The Fourier theory of the cardinal functions. *Proceedings of the Mathematical Society Edinburgh*, 1, p. 169–176, 1929.
- [190] R. B. Wolfgang, C. I. Podilchuk, en E. J. Delp. Perceptual watermarks for digital images and video. *Proceedings of the IEEE*, 87(7), p. 1108–1126, juli 1999.
- [191] A. D. Wyner. An analog scrambling scheme which does not expand bandwidth, part i: Discrete time. *IEEE Transactions on Information Theory*, 25(3), p. 261–274, mei 1979.
- [192] A. D. Wyner. Analog signal scrambling system. 1983. US Patent 4379205.
- [193] J. S. You. A note on one-step extrapolation procedure. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(8), p. 2462–2463, augustus 2000.

- [194] W. Zeng en S. Lei. Efficient frequency domain video scrambling for content access control. In *Proceedings of the Seventh ACM International Multimedia Conference*. november 1999.

