



Faculteit Letteren en Wijsbegeerte

Logische bewijsdynamieken voor de formele explicatie van wetenschappelijke probleemoplossingsprocessen

Peter Verdée

Proefschrift voorgedragen tot het bekomen van de graad van Doctor in de
Wijsbegeerte

Vakgroep Wijsbegeerte en Moraalwetenschap
Faculteit Letteren en Wijsbegeerte
Universiteit Gent

12 maart 2008

Peter Verdée: *Logische bewijsdynamieken voor de formele explicatie van wetenschappelijke probleemoplossingsprocessen*, Proefschrift voorgedragen tot het bekomen van de graad van Doctor in de Wijsbegeerte, © 12 maart 2008

[...] chaque vérité que je trouvois étant une règle qui me servoit après à en trouver d'autres, non seulement je vins à bout de plusieurs [questions] que j'avois jugées autrefois très difficiles, mais il me sembla aussi vers la fin que je pouvois déterminer, en celles même que j'ignorois, par quels moyens et jusqu'où il étoit possible de les résoudre.

— Rene Descartes, Discours de la Méthode.

Opgedragen aan Veerle en aan mijn op 7 maart 2008 overleden tante Lilianne.

Promotor: Prof. dr. Diderik Batens
Vakgroep Wijsbegeerte en Moraalwetenschap

Decaan: Prof. dr. Freddy Mortier
Rector: Prof. dr. Paul Van Cauwenberge

Auteursrecht

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enige andere manier, zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Gent, 12 maart 2008

Peter Verdée

Drowning problems in an ocean of information is not the same as solving them.
— Ray E. Brown

Korte inhoud

In deze thesis werk ik enkele aspecten uit van het onderzoeksprogramma betreffende de formele explicatie van wetenschappelijke probleemoplossing. Het prospectieve bewijssysteem dat een cruciaal onderdeel vormt van dit programma, wordt uitgebreid naar de predikatieve klassieke logica en voorzien van een semantiek. Er worden enkele technieken voorgesteld om leren uit prospectieve bewijzen te formaliseren. Daarnaast heb ik een formaat ontwikkeld voor de constructie van prospectieve bewijzen voor een groot aantal adaptieve logica's. Ten slotte worden enkele adaptieve logica's voor het redeneren met vage termen geformuleerd.

English abstract

In this thesis I elaborate some aspects of the research program concerning the formal explication of scientific problem solving. The prospective proof system,

which is a crucial part of this program, is extended to full predicative classical logic and provided with a semantics. Some techniques are presented to explicate learning from prospective proofs. I have developed a format for the construction of prospective proofs for a large number of adaptive logics. Finally some adaptive logics for reasoning with vague terms are formulated.

*We can't solve problems by using the same kind of thinking we used when we
created them.
— Albert Einstein*

Bedanking

Ik ben iedereen enorm dankbaar die op een of andere bijgedragen heeft aan mijn onderzoek, zowel inhoudelijk (promotor en collega's), psychologisch (vrienden, familie en promotor) als financieel (het FWO en Universiteit Gent). Verder zou ik een aantal mensen persoonlijk willen bedanken. Op de eerste plaats komt mijn liefde Veerle. De momenten waarop het werken aan mijn onderzoek wat moeilijker verliep hebben haar misschien wel nog meer stress bezorgd dan mezelf. Ze heeft er alles aan gedaan om me zoveel mogelijk steun te bezorgen in moeilijke tijden en het huishouden helemaal alleen op zich genomen de laatste weken van mijn schrijfproces. Ze heeft met me meegeleefd en me opgepept wanneer het nodig was. Bovendien heeft ze de tekst nagelezen op taalfouten.

Vervolgens zou ik ook graag mijn promotor Dirk en de co-promotor van het FWO-project waarop ik werkte, Joke, hartelijk willen bedanken. Zij zijn mijn leermeesters. Heel veel van wat in dit doctoraat staat is op zijn minst geïnspireerd door hun werk. Ik ben van mening dat hun onderzoek naar adaptieve logica's van zeer groot belang is voor de filosofie en de computerwetenschappen. Het heeft even geduurd voor ik hiervan echt overtuigd was, maar nu ben ik misschien wel een van de meest overtuigde voorstanders van adaptieve logica geworden. Ik ben er zeker van dat deze logica's (en dus onrechtstreeks ook Dirk en Joke) op een of andere manier een rol zullen blijven spelen in mijn hele verdere leven. Ook wil ik hen bedanken omdat hun aanmoedigingen en positieve commentaren over mij en mijn onderzoek op de moeilijkste momenten zeer veel impact hebben gehad en me de moed hebben gegeven om door te gaan. Daarnaast hebben zij

de laatste 3 jaar ook zeer veel teksten van mij nagelezen en in de goede richting gestuurd. Ook hiervoor ben ik hen heel dankbaar.

Daarnaast komen mijn ouders Annemie en Guido en de ouders van Veerle: Christelle en Chris. Aan mijn ouders heb ik gewoon alles te danken: mijn karakter, mijn passies, mijn leven, mijn studies, enz. Te veel om op te sommen. Maar ik wil hen in de eerste plaats bedanken voor het luisterend oor en de plaats van rust die zij me konden bieden, telkens ik bij hen op bezoek kwam. Veerle's ouders hebben ook zeer veel betekend voor dit doctoraat. Dankzij hen kon ik de vier zwaarste weken in alle rust werken met zicht op zee. Dit heeft me zeer veel deugd gedaan. Daarom zou ik ook de Noordzee willen bedanken. De zee maakte me steeds weer duidelijk dat mijn geploeter eigenlijk maar een bagatel is in vergelijking met haar eindeloze rust, verandering en beweging.

Ook essentieel zijn al mijn vrienden geweest. Vooral Yumi en Wilfried hebben me op de allermoeilijkste momenten weer moed en hoop bezorgd. Zonder bijvoorbeeld het tripje met hen naar het Zwin in december 2007, had ik misschien wel afgehaakt. Hun vriendschap, humor, levensvreugde en levenswijsheid hebben ervoor gezorgd dat ik opnieuw kon relativieren en doorgaan. Ook Frederik is er met zijn enthousiasme en onze muziekmakerij in geslaagd om op een scharniermoment mijn hoofd leeg te maken en de passie in mij terug aan te wakkeren.

Ten slotte dank ik mijn collega's van het Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie voor de goede samenwerking, de steun en het overnemen van mijn andere taken in de laatste maanden. In de eerste plaats dank ik natuurlijk Stephan, die veel meer is dan een collega. Een groot deel van dit doctoraat is er maar gekomen dankzij hem. De artikels die aanleunen bij het laatste hoofdstuk hebben we in uitstekende samenwerking geschreven. Over andere hoofdstukken hebben we veel gediscussieerd en daaruit heb ik zeer veel bijgeleerd. Omdat hij af en toe met min of meer dezelfde moeilijkheden zat als ikzelf bij het voltrekken van ons onderzoek en bij het schrijven van ons doctoraat, kon hij als geen ander mijn moeilijkheden begrijpen en me steunen in de oplossing ervan.

Om af te ronden zou ik me nog bij al mijn vrienden en kennissen willen verontschuldigen voor mijn wat egocentrische en afwezige houding van de laatste maanden van het schrijfproces.

Science [...] never solves a problem without creating ten more.
— George Bernard Shaw

Voorwoord

Dit doctoraat is eigenlijk een kruising tussen een traditioneel doctoraat en een bundeling van artikels. De Engelstalige artikels zijn te vinden in de appendix en vormen de kern van het doctoraat. Toch heb ik er daarnaast voor gekozen om een aantal nieuwe bijdragen uit te werken die nog niet in artikelvorm staan. Om pragmatische redenen heb ik dit in het Nederlands gedaan.

Dit heb ik gedaan om verschillende redenen. Ten eerste vond ik het belangrijk om de rode draad doorheen mijn onderzoek en de filosofische relevantie van het geheel van resultaten expliciet te maken. De verschillende problemen die in de gepresenteerde artikels aangepakt worden, lijken op het eerste zicht nogal ver uit elkaar te liggen. Toch passen ze perfect binnen een groter opgezet onderzoeksprogramma. Een doctoraatsverhandeling leek mij de ideale plaats om toe te lichten hoe de over de artikels verspreide resultaten passen binnen het kader van dit onderzoeksprogramma.

Ten tweede heb ik ook de kans gegrepen om een aantal resultaten te presenteren die op elkaar voortbouwen. Het hoofdstuk over de predikatieve prospectieve bewijzen, bijvoorbeeld, is volledig gebaseerd op het hoofdstuk over de logica **LA**. Ik ben ervan overtuigd dat dit de meest elegante kijk op deze prospectieve bewijzen is. Toch is het onmogelijk om de prospectieve bewijzen in de **LA**-context te presenteren in een publiceerbaar artikel, om de eenvoudige reden dat de logica **LA** onbekend is en niet uit te leggen is in voorbereidende secties van een artikel over prospectieve bewijzen. In een thesis is het geen probleem om resultaten te presenteren die in een hoge mate op elkaar verder bouwen.

Tenslotte maakt een thesis het ook mogelijk om resultaten, ideeën en technieken te presenteren die voornamelijk van nut zijn binnen een onderzoeksprogramma. Dit nut blijkt pas in het licht van problemen die voortkomen uit andere resultaten binnen hetzelfde onderzoeksprogramma. Indien men dergelijke ideeën zou willen gieten in vorm van een publiceerbaar artikel, zou men eerst het hele onderzoeksprogramma en het voorgaande onderzoek moeten uitleggen om pas daarna tot de eigenlijke resultaten te komen. Een artikel van een dergelijke omvang wordt in geen enkel tijdschrift aanvaard, maar daarom zijn de resultaten nog niet minder interessant. Een voorbeeld van dergelijk resultaten vindt u in hoofdstuk 6.

Ik heb geprobeerd de thesis zo self-contained mogelijk, maar dat neemt niet weg dat enige ervaring met (filosofische) logica wel vereist is. Bovendien is kennis van de basisconcepten (prospectieve bewijzen en adaptieve logica), vooral wat hun motivering en toepassingen betreft, aangewezen. Hiervoor moet de lectuur van [41] en [29] volstaan.

De lezer zal merken dat alle voorgestelde resultaten van technisch-formele aard zijn. Toch komen alle resultaten voort vanuit epistemologische en wetenschapsfilosofische problemen. Ik hoop dat de lezer, eenmaal hij zich doorheen de techniek heeft gewerkt, verhelderende, elegante en zinvolle oplossingen zal aantreffen. Ik heb geprobeerd om de lezer nergens nodeloos complexe technieken voor te schotelen. Waar mogelijk heb ik weinig relevante techniciteiten weggelaten. Bovendien heb ik zo vaak mogelijk relatief eenvoudige concrete voorbeelden toegevoegd. De lezer zal misschien van mening zijn dat wat meer uitleg bij de formele technieken of de voorbeelden geen overbodige luxe zou geweest zijn. Toch denk ik dat grondige studie van de technieken in principe moet volstaan om zowat alles wat in dit doctoraat voorgesteld wordt, volledig te begrijpen. Ik heb uit mijn eigen ervaring met wiskundige teksten ondervonden dat het vaak zo is dat meer uitleg rond zaken die in feite na nauwgezette analyse ook reeds te begrijpen zijn zonder uitleg, de materie duisterder maakt en de lezer op een verkeerd spoor zet. Waarschijnlijk is dit een persoonlijke psychologische kwestie die afhangt van de manier waarop verschillende lezers abstracte informatie vatten en onthouden. Mensen die een eerder visueel inzicht hebben in abstracte informatie (zoals ik) ondervinden blijkbaar weinig positieve effecten van talige verhelderingen. Ik heb gekozen voor de presentatiewijze die ik zelf het efficiëntst vind en verontschuldig me dan ook tegenover lezers die van mening zijn dat een droge compacte aanpak als de mijne moeilijk te volgen is.

Ik wil me ook verontschuldigen voor de aanwezigheid van inconsequenties, incoherenties, tikfouten en grotere technische fouten. Deze zijn natuurlijk te wijten aan slordigheid, maar ook aan tijdgebrek (zie hieronder) en mijn blindheid

voor mijn eigen fouten. Ik kan mijn eigen teksten 10 keer lezen en telkens lezen wat er eigenlijk zou moeten staan en niet het foutieve dat er eigenlijk staat.

De metabewijzen in hoofdstukken 4 en 5 hebben eerder een schetsmatig karakter. Gebrek aan tijd heeft ervoor gezorgd dat ik enkel de grote lijnen van deze bewijzen heb kunnen uit de doeken doen. Ik ben echter van mening dat de resultaten op zich wel interessant genoeg zijn en dat de formele constructies stevig genoeg op hun poten staan, om deze hoofdstukken toch in mijn doctoraat op te nemen. De volledige uitwerking van de bewijzen zal ik later op papier zetten in functie van publicaties.

Een andere moeilijkheid bij het lezen van dit doctoraat kan voortkomen uit de keuze voor een combinatie van een traditioneel Nederlandstalig proefschrift en een bundeling Engelstalige publicaties. De publicaties zijn stuk voor stuk intern coherent, maar omdat ze op verschillende momenten geschreven zijn als op zichzelf staande gehelen, is de terminologie niet altijd coherent met de terminologie die gebruikt wordt in de andere publicaties of in het Nederlandstalige deel van de thesis. Dit heeft zeker zijn nadelen, maar ik ben van mening dat een vertaling en herschrijving van al deze publicaties een te groot tijdsverlies zou geweest zijn. Dit resulteert immers niet in nieuwe zinvolle resultaten en iedere lezer van deze thesis is ongetwijfeld in staat de publicaties afzonderlijk naar waarde te schatten en in te passen in het geheel.

Om dit voorwoord af te sluiten zou ik nog kort willen toelichten hoe dit doctoraat tot stand is gekomen. Ik heb 3 jaar en 4 maand gewerkt aan dit doctoraat in het kader van een FWO-onderzoeksproject aan het Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie van de Gentse universiteit. De eerste twee jaren verliepen chaotisch. Ik voelde me wat onwennig ten opzichte van de filosofische kijk op logische systemen en, hoewel ik de bestaande formalismes wel begreep, zag ik niet onmiddellijk welke logische problemen waarom interessant waren vanuit filosofisch oogpunt. Ik heb in die eerste twee jaren daarom vooral zeer veel gelezen en andermans werk bestudeerd. Ik heb me verdiept in zeer uiteenliggende onderwerpen (modale logica, intuïtionistische logica, relevante logica, filosofie van de wiskunde, berekenbaarheid, artificiële intelligentie en de onderwerpen waarover dit doctoraat eigenlijk gaat). Al dit lezen leidde toen niet tot publiceerbare eigen resultaten.

Na een tweetal jaar rondzwerven doorheen de literatuur begon ik me terug meer te concentreren op de problemen waarover het onderzoeksproject waarop ik werkte eigenlijk ging. Meer bepaald begon ik op een eigen alternatieve manier te kijken naar adaptieve logica's en doelgerichte bewijzen. Deze kijk en onrechtstreeks de ideeën uit de literatuur die ik die eerste twee jaren had doorgenomen, leverde me in korte tijd een aantal mooie resultaten op. Ik geraakte

helemaal gefascineerd door logica. Mijn onderzoek werd vooruitgestuwd door het genieten van de schoonheid van het samenvallen van formele puzzelstukken in een elegante formele constructie. Onder invloed van deze passie vond ik steeds nieuwe ideeën voor de oplossing van allerlei problemen. Hierdoor slaagde ik er niet in om al mijn ideeën tijdig uit te werken tot publiceerbare artikels. 5 maanden voor het geplande indienen van mijn doctoraat besloot ik het neerschrijven van resultaten in artikels te staken en begon ik me te concentreren op het samenleggen van alle resultaten in een thesis. Dit bleek echter veel meer voeten in de aarde te hebben dan enkel het samenleggen van resultaten. Een aantal ideeën bleken fundamentele fouten te bevatten en ik vond veel elegantere manieren om de resultaten te presenteren. Het gevolg was zeer veel stress en een dikke 2 maanden waarin ik meer resultaten moest schrappen en opnieuw herdenken dan dat ik resultaten op papier kreeg. Rond 10 januari 2008 stonden de problematische resultaten toch weer helemaal op hun poten en sterker dan ooit. Er restten me dan nog 2 maanden om het doctoraat uit te schrijven. De snelheid waarmee deze thesis geschreven is, zal sowieso gevolgen hebben voor de accurateheid van de presentatie en van de inhoud. Niettemin denk ik dat ik toch trots mag zijn op de hoeveelheid en vooral de originaliteit van de resultaten die in dit doctoraat gepresenteerd worden.

Hoewel het logica-onderzoek vaak heel frustrerend was en me veel piekerende slapeloze nachten heeft bezorgd, ben ik iedereen die ervoor gezorgd heeft dat ik dit onderzoek mocht doen, enorm dankbaar. Ik denk dat ik de laatste 3 jaren meer heb bijgeleerd dan in de rest van mijn leven. Ik heb het gevoel dat ik ben uitgegroeid van een zoekende knoeier tot een logica-onderzoeker in wording. Bovendien maakt het zalige EUREKA-gevoel dat gepaard gaat met het vinden van een elegante oplossing voor een formeel probleem waar je al lang mee zat, al de frustratie, de stress en de slapeloze nachten meer dan goed.

Inhoudsopgave

I	Inleiding	1
1	Algemene inleiding	3
1.1	De formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing: wat en waarom	4
1.2	De epistemologische situering van het onderzoeksprogramma . . .	6
1.2.1	Door de inhoud geleid	6
1.2.2	Creativiteit	7
1.2.3	Artificiële intelligentie	8
1.2.4	Het statuut van bewijzen en logica	8
1.2.5	Normatieve explicatie en formalisering	12
1.2.6	Algoritmes, (lokale en globale) heuristieken en methodologieën: poging tot uitpuring van het vocabularium	13
1.3	Deelproblemen van het fps-programma	14
1.4	Welke problemen wil dit doctoraat oplossen en hoe worden deze problemen opgelost?	22
1.4.1	Welke problemen?	22
1.4.2	Bewijzen als instrumenten	23
1.4.3	'De computationele benadering van logica' als instrument . . .	25
2	Cruciale formele constructies	27
2.1	Adaptieve logica's in standaard formaat	28
2.2	Prospectieve bewijzen	32
2.2.1	Inleiding	32
2.2.2	Afkortingen	32
2.2.3	Lijnen	33

2.2.4 Regels	33
2.3 Keurige semantiek	35
2.3.1 Voorbereidingen	35
3 Kort overzicht van de hoofdstukken	41
3.1 Deel 1: Inleiding	41
3.2 Deel 2: Prospectieve dynamieken	42
3.3 Deel 3: Adaptieve dynamieken	44
3.4 Deel 4: Conclusie	46
II Prospectieve dynamiek bij probleemoplossing	47
4 De paraconsistente logica's CL^- en LA	49
4.1 Inleiding	49
4.2 Taal van de logica's LA en CL^-	53
4.3 Afkortingen	54
4.4 Tweewaardige deterministische semantiek voor LA	55
4.5 Axiomatisering van LA	57
4.5.1 Axioma's	57
4.5.2 Voorbeeld	59
4.5.3 Correctheid	61
4.5.4 Volledigheid	61
4.6 Regelsysteem voor fitch-stijl bewijzen voor LA_f en LA_{fp}	65
4.6.1 Regels voor LA_f	66
4.6.2 Regels voor LA_{fp}	67
4.6.3 Voorbeelden	68
4.6.4 Correctheid	72
4.6.5 Volledigheid	72
4.7 LA vat het volledige consistente fragment van CL	73
4.8 De vertaling van lijnen in prospectieve bewijzen naar LA	75
4.9 Adaptieve logica's met onderlimietlogica LA	75
4.10 Besluit	77
5 Prospectieve bewijzen voor de klassieke predikatenlogica	81
5.1 Inleiding	81
5.2 Wat is de filosofische betekenis van prospectieve bewijzen?	82
5.3 Lijn	85
5.4 Afkortingen	86
5.5 Regel voor de introductie van hypothesen in een prospectief bewijs	86

5.6	Regels	89
5.6.1	Propositionele regels	90
5.6.2	Formule-analiserende regels	90
5.6.3	Conditie-analiserende regels	91
5.6.4	Speciale Trans-regels	91
5.6.5	Regels voor =	91
5.7	Hoe moet een prospectief bewijs geconstrueerd worden?	92
5.8	Voorbeelden	92
5.9	Correctheid	95
5.10	Volledigheid	97
5.11	Speciale regel voor de predikatieve klassieke prospectieve dynamiek	100
5.12	Besluit	100
6	Nuttige informatie extraheren uit prospectieve bewijzen	101
6.1	Inleiding	101
6.2	Een informele beschrijving van een formaat voor lokale heuristieken voor de constructie van prospectieve bewijzen	104
6.2.1	Analogieën	105
6.2.2	Formalisering van een lokale heuristiek in een prospectief bewijs	106
6.2.3	Extraheren van heuristische elementen uit prospectieve bewijsprocessen	108
6.3	Inductie van heuristieken	109
6.4	Expliciet maken van contextuele zekerheden in prospectieve bewijzen	111
6.4.1	Besluit	113
III	Adaptieve dynamiek bij probleemoplossing	115
7	Prospectieve bewijzen voor adaptieve logica's	117
7.1	Inleiding	117
7.2	Prospectieve bewijzen voor logica's met een keurige semantiek	119
7.3	Keurige adaptieve logica's	120
7.4	Prospectieve bewijzen voor conditionele afleidbaarheid van keurige adaptieve logica's	122
7.5	Prospectieve bewijzen voor keurige adaptieve logica's	123
7.6	Besluit	123

8 De complexiteit van adaptieve logica's	125
8.1 Inleiding	125
8.2 Overzicht van een aantal bijkomende resultaten	126
9 Dynamieken veroorzaakt door vaagheid	129
9.1 Inleiding	129
IV Conclusie	131
10 Besluit en verder onderzoek	133
V Appendix	137
A Prospectieve bewijzen voor klassieke logica	139
A.1 Afkortingen	140
A.2 Regels	141
A.2.1 Propositionele regels	141
A.2.2 Formule-analiserende regels	141
A.2.3 Conditie-analiserende regels	142
A.2.4 Regels voor =	142
A.3 De 'Positief Deel'-relatie voor CLc	142
A.4 Correctheid	143
A.4.1 Voorbereidingen	143
A.4.2 Bewijs	146
A.5 Voorbeelden	149
B Embedding Gluts and Gaps in CL	153
B.1 Aim and Preliminaries	154
B.2 Preliminaries	154
B.3 Classical Logic and Its Basic Fragments	156
B.4 Extensions and Fragments of the Basic Fragments	160
B.4.1 Extending a Basic Fragment	160
B.4.2 Some Maximal Fragments of CL	162
B.4.3 Linguistic Extensions and Fragments	164
B.4.4 Other Roads to Gluts and Gaps	164
B.5 The Embedding	165
B.5.1 Logics Following the RoI Scheme	165
B.5.2 Logics Following the Non-RoI Scheme	170

C	A Proof Procedure for Adaptive Logics	177
C.1	Introduction	178
C.2	Adaptive logics: standard format, CLuN^m and CLuN^r	181
C.2.1	The standard format of AL	181
C.2.2	The proof theory of AL	182
C.2.3	The semantics of AL	183
C.2.4	CLuN^m and CLuN^r	183
C.2.5	Generic notation	184
C.3	A (partial) proof procedure for the lower limit logic CLuN	184
C.4	Two (partial) proof procedures for conditional derivability	189
C.4.1	A brute force proof procedure	189
C.4.2	A goal directed proof procedure for ACLuN	190
C.5	(Partial) proof procedures for final derivability	191
C.5.1	Minimal Abnormality	192
C.5.2	Reliability	196
C.6	Metatheory	199
C.7	Conclusion	204
D	Most Human Reasoning is Complex	207
D.1	Aim of This Paper	208
D.2	Adaptive Logics in Standard Format	209
D.3	Horsten and Welch’s Contentions	214
D.4	Adaptive Proofs	217
D.5	The Complexity of Reasoning	221
E	The Minimal Abnormality strategy is Π_1^1-complex	229
E.1	Introduction	230
E.2	A Π_1^1 -complete problem expressed in graph theory	231
E.3	Adaptive logics	233
E.3.1	The standard format of AL	233
E.3.2	The proof theory of AL	233
E.3.3	The semantics of AL	235
E.3.4	CLuN^m and CLuN^r	235
E.4	Expressing the graph problem in propositional CLuN^m	235
E.5	Expressing the graph problem in predicative CLuN^m	241
E.6	Conclusion and philosophical comments	241

F	A Framework for Adaptive Vague Logics	245
F.1	Introduction	246
F.2	Adaptive logics	247
F.2.1	The standard format of AL	247
F.2.2	The proof theory of AL	249
F.2.3	The semantics of AL	250
F.2.4	A concrete example: ACLuN^m	251
F.3	The generic vague lower limit logic VL	252
F.3.1	The minimal criteria for vague lower limit logic	252
F.3.2	\mathcal{K} -extensions of the fuzzy logic BL_Δ	254
F.3.3	Fuzzy logics with an acceptability threshold ϵ lower than 1	257
F.3.4	Other vague logics based on modal operators	258
F.3.5	Higher-order vagueness	259
F.4	Adaptive vague logic: AVL	260
F.4.1	Upper Limit Logic	261
F.4.2	The predicative case	263
F.5	Some examples of AVL -proofs	263
F.6	Conclusion	265
G	Modeling sorites reasoning with adaptive fuzzy logic	267
G.1	Introduction	268
G.2	The sorites paradox	268
G.2.1	Contemporary representations	268
G.2.2	Contemporary solutions	270
G.2.3	An adaptive fuzzy logic solution	272
G.3	Adaptive logic	274
G.3.1	The standard format of adaptive logic	275
G.3.2	The proof theory of AL	276
G.3.3	The semantics of AL	278
G.3.4	A concrete example: CLuN^m	279
G.4	The adaptive fuzzy logics \mathbb{L}_n^{mg} , \mathbb{L}_n^{rg} , \mathbb{L}_n^{ml} and \mathbb{L}_n^{rl}	280
G.4.1	The fuzzy logic \mathbb{L} with only one designated value	280
G.4.2	The lower limit logic \mathbb{L}_n with a non-singleton interval of designated values	282
G.4.3	Adaptive logics for fuzziness: \mathbb{L}_n^{mg} , \mathbb{L}_n^{rg} , \mathbb{L}_n^{ml} and \mathbb{L}_n^{rl}	283
G.5	Dealing with the sorites paradox	284
G.5.1	A first example	284
G.5.2	Simplified concrete version	287
G.6	Conclusion	291

Deel I

Inleiding

Algemene inleiding

In dit voornamelijk formeel-technische doctoraat zal ik enkele belangrijke bijdragen leveren aan het gebruik van logische bewijsdynamieken voor de formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing. Ik werk enkele bestaande formele constructies verder uit. Deze constructies zijn tot stand gekomen binnen het ruimere formele probleemoplossing-onderzoeksprogramma (verder *fps-programma* genoemd) en moeten de formalisering van wetenschappelijke probleemoplossingsprocessen. De formalisering van deze processen noemen we formele probleemoplossingsprocessen (verder *fpsp's* genoemd). Mijn bijdrage is te situeren in de studie naar logische bewijzen die dynamiek vertonen. Het betreft prospectieve en adaptieve bewijzen (en de combinatie van de twee). Prospectieve bewijzen zijn alternatieve doelgerichte bewijzen voor bestaande logica's (zie [41], [25], [94] en [95]) en adaptieve bewijzen zijn de bewijzen van adaptieve logica's (zie [29], [31], [7], [19], [12] en [13]). De lijnen van beide soorten bewijzen bevatten behalve de afgeleide formules ook een verzameling formules als conditie. Kort samengevat zijn prospectieve bewijzen die starten vanuit de te bewijzen formule (met diezelfde formule als conditie) en de gebruiker leiden richting de constructie van een bewijs waarin de te bewijzen formule onconditioneel is afgeleid. Adaptieve bewijzen zijn bewijzen met lijnen waarop formules afgeleid worden op voorwaarde dat de formules in de conditie van de lijn niet afleidbaar zijn. Als die condities toch afleidbaar blijken te zijn, verliest de formule haar status van afgeleid zijn.

Ik vat kort mijn bijdrage samen aan deze bewijssystemen. In het eerste deel van dit doctoraat presenteer ik een predikatieve versie van het prospectieve bewijssysteem. Daarnaast definieer ik een paraconsistente versie van klassieke

logica die enkele fascinerende eigenschappen heeft en een semantiek verschaft voor de prospectieve bewijzen. Vervolgens formuleer ik enkele technieken om (heuristische en theoretische) informatie te extraheren uit prospectieve bewijzen, in functie van toekomstige prospectieve bewijzen. In het tweede deel ga ik na hoe prospectieve bewijzen kunnen geconstrueerd worden voor een grote groep adaptieve logica's. Hierbij aansluitend bestudeer ik de complexiteit van adaptieve logica's. Ten slotte heb ik samen met Stephan van de Waart van Gulik onderzoek gedaan naar adaptieve logica's die overweg kunnen met vage begrippen, in functie van probleemoplossingsprocessen in vage contexten.

Deze thesis wil dus bijdragen tot de oplossing van enkele belangrijke formeel-logische problemen uit een veel breder onderzoeksprogramma: de formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing¹. In deze algemene inleiding licht ik eerst kort toe wat dit onderzoeksprogramma precies inhoudt en waarom het zeer zinvol is. Dit programma zit stevig geworteld in een specifiek epistemologisch kader waarin contexten een belangrijke rol spelen (zie [6]). Ik som de belangrijkste ideeën op uit dat kader. Vervolgens formuleer ik de belangrijkste hoofdvragen waarvoor oplossingen moeten bedacht worden binnen dit onderzoeksprogramma. Ten slotte vermeld ik hoe ik welke van deze vragen zal aanpakken in dit doctoraat. Deze inleiding is niet origineel omdat ik mezelf inkapsel in een bestaand onderzoeksprogramma. Ik leg wel enkele eigen accenten. Het meeste is gebaseerd op filosofisch werk van Batens en Meheus (zie [11], [20], [26], [21], [28], [77], [83] en [75]) en in mindere mate op werk van Simon en Newell (zie bvb. [87]) en Nickles (zie bvb. [88]). De laatste auteurs bevinden zich niet binnen het onderzoeksprogramma, maar hun werk heeft wel mee aanleiding gegeven tot de formulering van het programma.

1.1 De formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing: wat en waarom

De formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing heeft als doel met formeel-logische instrumenten een realistische normatieve beschrijving te ver-

¹In dit doctoraat wordt het woord probleem op twee niveaus gebruikt. Enerzijds zijn er de wetenschappelijke (object)problemen die aanleiding geven tot oplossingsprocessen die ik bestudeer. Anderzijds zijn er de (meta)problemen die ik zelf wil oplossen door de oplossingsprocessen van de wetenschappelijke (object)problemen te analyseren. Soms is dit misschien verwarrend, maar ik ben van mening dat het niet zinvol is mijn (meta)problemen een andere naam te geven. Deze (meta)problemen kunnen immers zelf ook gewoon gezien worden als wetenschappelijke problemen (en meer bepaald epistemologische problemen). Voor het oplossen ervan lijken dezelfde methodes gebruikt te worden als voor het oplossen van de bestudeerde wetenschappelijke problemen.

schaffen voor oplossingsprocessen van wetenschappelijke problemen. In tegenstelling tot traditionele wetenschapsfilosofie (de logische positivisten, maar ook bijvoorbeeld Kuhn en Popper) ligt hierbij de focus op het proces en niet op de resultaten van verschillende vormen van wetenschappelijk redeneren. Ik geef een voorbeeld. Traditionele wetenschapsfilosofen hebben zeer uitgebreid geanalyseerd wat rationele wetenschappelijke abductie en verklaring precies zijn. In het fps-programma zijn we eerder geïnteresseerd in de redeneerprocessen die subjecten doorlopen wanneer ze op zoek gaan naar abductieve verklaringen en waarom ze op zoek gaan naar die verklaringen. Het concept abductie is heel ingewikkeld en daarom zal een subject niet in staat zijn onmiddellijk een absoluut correcte abductieve verklaring te verschaffen. Het resultaat is een dynamisch proces waarbij het subject informatie afleidt die voor herziening vatbaar is.

Het perspectief van het fps-onderzoeksprogramma op de wetenschappen ligt dus veel dichterbij de eigenlijke wetenschappelijke praktijk, dan de meer abstracte idealistische traditionele wetenschapsfilosofie. Toch is de opzet geenszins puur descriptief. Net zoals klassieke wetenschapsfilosofie willen we een exacte en normatieve benadering geven. De geformaliseerde oplossingsprocessen hoeven niet overeen te stemmen met de echte processen. Ze moeten haalbaar zijn voor echte subjecten en zoveel mogelijk intuïtieve ideeën vatten van wat rationele probleemoplossing is, maar dit betekent niet dat de formele processen een perfecte beschrijving zijn van de eigenlijke wetenschappelijke processen. Wetenschappers maken veel fouten en weinig coherente hersenkronkels. Natuurlijk is het niet de bedoeling om ook deze aspecten van wetenschappelijke probleemoplossing te vatten binnen het fps-programma. We willen enkel een formele beschrijving geven van wat rationele redeneerstappen zouden kunnen zijn opdat ze zouden leiden tot het oplossen van de wetenschappelijke problemen die aan de orde zijn.

Wat is het nut van dergelijk onderzoek? In eerste instantie moet het systematische inzichten in wetenschappelijk redeneren opleveren en past het in die zin perfect in de lange wetenschapsfilosofische traditie. Met behulp van die inzichten kan er echter ook voor gezorgd worden dat toekomstige problemen op een exacte systematische manier kunnen opgelost worden. Dit heeft een evidente pedagogische functie, maar ook binnen de computerwetenschappen kan dit dienst doen. Omdat de aanpak van het fps-programma formeel en procedureel is, is het in principe perfect mogelijk om de formele processen te implementeren op een computersysteem als een onderdeel van een artificieel intelligent softwareproject voor wetenschappelijke probleemoplossing.

1.2 De epistemologische situering van het onderzoeksprogramma

1.2.1 Door de inhoud geleid

Terwijl positivisten methodologie zagen als een vooraf bepaalde kwestie, gaan we hier fundamenteel uit van een dynamiek in de methodologie. Telkens we nieuwe kennis verwerven, kunnen ook onze methodologische inzichten veranderen. Toch is onze benadering niet relativistisch of historicistisch: wetenschap is rationeel als het rekening houdt met de huidige methodologische inzichten. Wat precies de rationele handelwijzen zijn, verandert naarmate de kennis verandert, maar er is wel een algemene notie van rationaliteit en dit kan best gezien worden in een probleemoplossingskader: de rationele handelwijzen in een bepaalde context zijn deze die, gegeven de opvattingen van dat moment, bijdragen aan de oplossingen van problemen die zich aandienen gegeven de stand van de kennis op dat moment. Hierbij gaat het om handelwijzen zoals het opzetten van experimenten, gevolgen trekken uit aanwezige kennis, bepaalde oude zekerheden verwerpen, nieuwe concepten definiëren en nieuwe problemen stellen.

Het is de bedoeling van een formele aanpak voor probleemoplossing om, gegeven een formele beschrijving van de relevante contextuele zekerheden van de kennistoestand en een formele beschrijving van de problemen die zich stellen in deze kennistoestand, uit te drukken wat de rationele handelwijzen zijn met oog op het oplossen van de problemen.

Het is cruciaal dat de aldus formeel beschreven probleemoplossingsprocessen dynamische processen zijn. Ze zijn dynamisch op verschillende niveaus. Ten eerste kan de verworven kennis af- en toenemen. De contextuele zekerheden hoeven geen zekerheden te blijven. Naarmate een proces in een nieuwe toestand komt, kan het nodig zijn om eerdere rationeel verworven contextuele zekerheden opnieuw te verwerpen. Dit is de typische niet-monotonie van de verworven zekerheden in een rationeel probleemoplossingsproces. Naast deze dynamiek is er de hiermee samenhangende dynamiek van de inferentieregels en andere methodologische kennis. Afhankelijk van de contextuele zekerheden veranderen de inferentieregels en de andere methodologische kennis. Elke inferentieregel is gekaderd in een verzameling vooronderstellingen over de zekerheden waarop die inferentieregels inwerken. Zolang deze vooronderstelling geldig zijn gegeven de zekerheden van de kennistoestand, kunnen ze probleemloos toegepast worden. Een inperking of verruiming van de zekerheden kan aanleiding geven tot het niet langer voldaan zijn van de voorwaarden voor de toepasbaarheid van bepaalde inferentieregels. Hetzelfde geldt voor andere methodologische kennis-

elementen. Ik illustreer dit in de twee volgende paragrafen voor het formuleren van nieuwe problemen en het creëren van nieuwe begrippen.

Veranderingen in wat de aanvaarde zekerheden zijn, kunnen leiden tot het rationeel zijn van het formuleren van nieuwe problemen of kan leiden tot het irrelevant of zelfs nonsensicaal worden van oudere problemen. Zo is het bijvoorbeeld contraproductief om inconsistenties te proberen lokaliseren in een theorie waarvoor geen enkele aanwijzing is dat ze inconsistent zou zijn. Indien dit toch het geval zou zijn, wordt het stellen van vragen die pogen de inconsistenties te lokaliseren wel relevant.

Er zijn contexten waarin het rationeel is om bestaande begrippen de herdefiniëren, of om nieuwe begrippen te definiëren. Het herdefiniëren van bestaande begrippen en het definiëren van nieuwe begrippen is geenszins altijd rationeel, ook al zijn de nieuwe definities probleemloos. Het is pas rationeel nieuwe begrippen in te voeren als de invoering tot het oplossen van problemen van het oude definitiekader leidt. Het hangt dus af van de zekerheden en de problemen van de context, welk type epistemologische acties rationeel zijn.

We besluiten dus dat een formele aanpak voor de explicatie van wetenschappelijke probleemoplossing met de verandering van verschillende soorten methodologische kennis om moet kunnen gaan en een motivatie en een verklaring moet kunnen geven voor deze veranderingen.

1.2.2 Creativiteit

De hier beschreven probleemoplossingsaanpak wil ook in staat zijn tot de explicatie van creatieve denkprocessen. Het is een oud romantisch vooroordeel dat logica en creativiteit niets met elkaar te maken hebben. Dit komt voort uit de weinig productieve overtuiging dat creativiteit en genialiteit iets magisch zijn. Goede creatieve oplossingen voor problemen zijn echter ook gewoon het gevolg van zeer efficiënte probleemoplossingsprocessen.

De creatieve inbreng in wetenschappelijk onderzoek zit hem in de creatie van nieuwe methodes, nieuwe theorieën, het invoeren van nieuwe concepten en het samenbrengen van oude gegevens (theorieën, waarnemingen en concepten) die op het eerste zich weinig met elkaar te maken hebben.

Creativiteit is natuurlijk een vaag begrip. De wetenschappelijke problemen zijn niet op eenvoudige wijze op te delen in deze die creatieve oplossingen vereisen en deze die niet-creatieve oplossingen vereisen. Vaak is het zo dat ook creatieve oplossingen het finale resultaat zijn van veel kleine minder creatieve oplossingsprocessen. Wetenschappers die nieuwe doorbraken hebben gerealiseerd in de geschiedenis van de wetenschappen, hebben deze doorbraak niet

gevonden uit het niets. Men stelt vast dat deze wetenschappers er vaak al vele jaren over aan het redeneren waren. Hoewel veel van dit redeneerproces oppervlakkig kan beschreven worden als een richtingloos trial and error-proces, weten deze wetenschappers zeer goed waarom ze een bepaalde trial de moeite vinden om te testen en een andere niet.

Een minimale (hier zinvolle) definitie van een creatief redeneerproces zou de volgende kunnen zijn: het redeneerproces probeert een probleem op te lossen waarvoor geen eenvoudige oplossingsalgoritme bestaat. Het subject moet dus zelf proberen zo te handelen dat zijn kansen op het vinden van de oplossing vergroten. Enige nuancering is aan het orde wat betreft het niet a priori bestaan van een eenvoudig oplossingsalgoritme voor het concrete probleem. Het is goed mogelijk dat een subject een creatieve oplossing bedenkt voor een probleem waarvoor reeds een oplossingsalgoritme bestaat. In dat geval heeft het subject een alternatieve oplossing bedacht die een creatieve oplossing vormt voor gerelateerde problemen zoals: het vinden van de oplossing is te duur, het oplossingsproces kan niet veralgemeend worden naar gelijkaardige problemen, het proces geeft geen inzicht in het probleem, etc. Voor het hoofdprobleem plus deze gerelateerde problemen is er geen eenvoudig oplossingsalgoritme beschikbaar, zodat ook de alternatieve oplossingsmethode creatief kan zijn.

1.2.3 Artificiële intelligentie

De resultaten van dit onderzoek kunnen zinvol zijn voor de artificiële intelligentie (AI). De onderzoeker naar artificiële intelligentie poogt machines in staat te stellen hun omgeving waar te nemen, deze waarnemingen te interpreteren en (met behulp van het voorgaande) creatieve oplossingen te vinden voor concrete problemen. Het is wat de laatste stap betreft, dat het zeker de moeite loont de hier en elders bekomen resultaten toe te passen met het oog op de creatie van probleem-oplossende computerprogramma's.

1.2.4 Het statuut van bewijzen en logica

De traditionele functie van logica is de precieze afbakening van wat deductief kan besloten worden uit een verzameling formules. De logica moet behoud van waarheid garanderen: als de premissen waar zijn, dan moet alles wat men besluit met de logica uit deze premissen ook waar zijn. Welke logica de correcte gevolgen toelaat, hangt af van de betekenis van de symbolen van de taal waarmee wordt gewerkt. Deductieve logica's bepalen ook op welke manier theorieën gestructureerd zijn. Theorieën worden meestal voorgesteld als een kleine verzameling zinnen, maar de hele theorie is eigenlijk de deductieve sluiting van de

kleine verzameling zinnen. Wat deze deductieve sluiting precies is hangt natuurlijk af van welke logica de onderliggende logica is van de theorie.

In de traditionele visie op logica is de belangrijkste functie van logische bewijzen de demonstratie van de laatste formule van het bewijs. Indien een bewijs correct is neergeschreven, indien men aanvaardt dat de premissen correct zijn en indien men de regels van de logica aanvaardt, moet men de bewezen formules aanvaarden. Het doet er niet toe of deze bewijzen overzichtelijk of efficiënt zijn, als het bewijs correct is, is de missie vervuld. Het nut van deze bewijzen buiten de logica zelf is verantwoording en argumentatie. Zowel in alledaagse als in wetenschappelijke contexten zal men, wanneer men een stelling verdedigt, proberen met eenvoudige tussenstappen vanuit iets voor de hand liggend te gaan naar de stelling die men verdedigt.

Binnen het fps-programma ligt de klemtoon op een ander soort logica's die ik hier *fps-logica's* noem. Het gaat in de eerste plaats over prospectieve en adaptieve logica's. De fps-logica's definiëren dynamische bewijzen. De functie van dergelijke logica's binnen het fps-programma gaat verder dan de traditionele functie. De traditionele functie is zeer belangrijk, maar heeft in de basis enkel oog voor de resultaten van het redeneren. Een traditioneel bewijs van een bepaalde stelling binnen een bepaalde theorie vormt een mooi afgewerkte redenering, maar deductieve logica's zijn niet in staat om te beschrijven hoe het redenerende subject tot deze redenering is gekomen of hoe de theorie tot stand is gekomen. Dit is natuurlijk geen kritiek op deze logica's. Ze zijn ook niet ontwikkeld om dergelijke redeneerprocessen te beschrijven. Toch kunnen ideeën en instrumenten uit de traditionele logica zeer goed aangewend worden om redeneerinstrumenten te ontwikkelen die wel in staat zijn dergelijke redeneerprocessen te beschrijven.

De voornaamste functie van dynamische bewijzen is dan ook de explicatie van concrete creatieve redeneerprocessen in plaats van de demonstratie van stellingen binnen een theorie. Dynamische bewijzen vertrekken, net als traditionele bewijzen, vanuit een verzameling zinnen en bevatten ook 1 formule per lijn. Bovendien zijn ze evenzeer als klassieke bewijzen geconstrueerd met behulp van regels die toelaten uit de ene lijn een andere lijn af te leiden op basis van de formele structuur van de formules. Het verschil zit hem in de aanwezigheid van condities op de lijnen van de dynamische bewijzen en de mogelijkheid om lijnen te markeren. Deze toevoeging zorgt ervoor dat de formules op lijnen van het bewijs in het ene stadium wel de status 'afgeleid' krijgen en in een verder stadium deze status weer kunnen verliezen, naarmate het redenerende subject meer kennis vergaart. Een reusachtig voordeel van deze weerlegbare bewijzen is dat, omdat ze geen absolute afleidingen vereisen, ze veel complexere redeneercon-

cepten kunnen vatten dan traditionele deductieve logica's, waaronder bekende niet-monotone concepten zoals abductie, inductie, het maximaal consistent interpreteren van een premisseverzameling, etc.

Er is dus een verschil tussen de aard van de bewijzen van de traditionele logica's en de aard van dynamische bewijzen. Het belangrijkste verschil ligt in de functie van deze bewijzen en hun regels. Om duidelijk te maken wat deze functie en het verschil met de functie van traditionele logica's precies is, zal ik een wiskundige abstractie invoeren.

Beschouw een gerichte graaf bestaande uit knopen en uit pijlen die de knopen verbinden. De graaf stelt het netwerk van kennistoestanden en redeneermogelijkheden voor die een subject heeft. Elke knoop staat voor een epistemologische toestand van het subject. Er zijn twee soorten pijlen. Een pijl staat voor een (fysisch) mogelijke overgang van de ene epistemologische toestand naar de andere. Een groene pijl staat voor een rationele overgang van de ene toestand naar de andere en een zwarte pijl staat voor irrationele overgangen van de ene toestand naar de andere. We gaan ervan uit dat alle rationele overgangen van de ene kennistoestand naar de andere op een of andere manier proberen bij te dragen tot het oplossen van problemen die aan de orde zijn in de betrokken kennistoestanden. De overgangen zijn dus pas rationeel wanneer ze kunnen bijdragen aan het op lange termijn bereiken van een epistemologische toestand waarin de problemen opgelost zijn die zich stelden in de originele toestand.

Een fps-logica legt vast welke de groene pijlen zijn voor concrete kennistoestanden. De pijlen komen overeen met het afleiden van nieuwe lijnen in dynamische bewijzen en het markeren van oude lijnen. Wat rationele kennisovergangen zijn, kan niet in algemeenheid vastgelegd worden. Alles kan immers veranderen wanneer het subject in een nieuwe redeneertoestand en in een andere context terecht komt. De gemaakte redeneerstap tussen de oude en de nieuwe toestand kan ervoor zorgen dat het subject oude kennis moet verwerpen of zelfs dat hij zijn methodologische kennis moet herzien omdat de redeneerstap hem geleerd heeft dat bepaalde redeneermethodes blijkbaar verstandiger zijn dan andere waarvan hij voorheen dacht dat ze verstandig waren. Bovendien verandert de toestand van de wereld natuurlijk ook van de ene kennistoestand naar de andere. Dit kan er bijvoorbeeld voor zorgen dat problemen die in de vorige toestand nog aan de orde waren, in de nieuwe toestand hun belang verliezen.

Welke pijlen nu groen zijn in een dergelijke graaf, hangt af van de probleemcontext, de beschikbare theoretische kennis en de methodologische context die overeenstemt met de epistemologische toestand waarin de pijlen vertrekken. De probleemcontext bestaat onder andere uit de omschrijving van het probleem, de voorwaarden waaraan een kennistoestand moet voldoen om te kunnen be-

schouwd worden als een toestand waarin het probleem opgelost is en de contextuele zekerheden waarbinnen het probleem geformuleerd is. De methodologische context bestaat uit het geheel van handswijzen, methodes en heuristieken die als rationeel, zinvol, correct, efficiënt, enz. worden beschouwd. Groene pijlen hoeven geen garantie te bieden dat een oplossingstoestand bereikt wordt en al zeker niet dat het meest goedkope en eenvoudige pad wordt gevolgd naar de oplossing toe, maar ze moeten, gegeven de beschikbare kennis in de vertrektoestanden, wel verantwoordbaar zijn. Meer kan men ook niet verwachten in realistische omstandigheden: de complexiteit van zeer veel wetenschappelijke problemen laat onmogelijk toe dat het subject in staat zou zijn elke stap meteen in de goede richting te zetten.

Een fps-logica is net als een traditionele logica onderdeel van de methodologische context van een kennissysteem. In tegenstelling tot een traditionele logica bepaalt een fps-logica wat creatieve kennisovergangen zijn die kunnen bijdragen tot het oplossen van de problemen van de kennistoestand in kwestie. Omdat deze overgangen zeer afhankelijk zijn van welk type probleem opgelost wordt ('moet er een verklaring gezocht worden?', 'moeten er nieuwe veralgemening uitgedacht worden?', 'moet er een oplossing gezocht worden voor een inconsistente kennistoestand?', etc.) en van het type contextuele zekerheden dat aan de orde is in de vertrektoestand ('zijn de zekerheden inconsistent?', 'bevatten ze vage termen?' 'zijn het default-veralgemeningen?'), is er hoe dan ook nood aan verschillende logica's voor verschillende contexten.

Ook de waarde van traditionele logica's kan gevat worden binnen een dergelijke grafentheoretische voorstelling. Deze logica's bepalen de structuur van kennistoestanden (als de onderliggende logica's van de theorieën waaruit ze zijn opgebouwd) en bepalen welke overgangen naar andere kennistoestanden garanderen dat de theorieën niet wordt uitgebreid en men dus kan garanderen dat er geen nieuwe problemen ontstaan met de gevestigde kennis. Een traditioneel logische redeneerstap kan bijdragen tot het oplossen van een probleem, maar dit hoeft zeker niet het geval te zijn. Bovendien kan een traditionele logica geen creatieve, weerlegbare stappen toelaten. In onze graaf zullen traditionele logica's dus het volgen van een aantal van de groene en een aantal van zwarte pijlen toelaten, maar niet alle groene of alle zwarte pijlen.

Probleemoplossen kan dus gezien worden als het zoeken van een pad doorheen een graaf van kennistoestanden. Logica's die ons in staat stellen het probleemoplossingsproces te formaliseren, bepalen dus welke paden kunnen gevolgd worden, zodat het rationeel is te veronderstellen dat als de probleemoplosser de uitgestippelde paden volgt, hij dichterbij zijn oplossing komt.

1.2.5 Normatieve explicatie en formalisering

De formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing wil een formele explicatie geven van wetenschappelijke probleemoplossingsprocessen. Het woord *explicatie* gebruiken we als een vertaling van *explication* zoals het door R. Carnap gebruikt is in zijn [48]. Een explicatie is het proces dat een explicatum in de plaats stelt van een explicandum. Een *explicatum* is een exact concept dat in de plaats komt van het *explicandum*, een vaag concept, met het oog op de verheldering van het explicandum. Het exacte concept heeft met het vage concept zoveel mogelijk belangrijke (intuïtieve) eigenschappen gemeen. Een goed explicatum is exact, gelijkaardig aan zijn explicandum, vruchtbaar en eenvoudig.

Dynamische bewijzen moeten in die zin explicata zijn van echte probleemoplossingsprocessen. Ze moeten exact, vruchtbaar en eenvoudig zijn en ze moeten bepaalde belangrijke eigenschappen gemeen hebben met de eigenlijke redeneerprocessen. Het belang van een dergelijke explicatie ligt in verklaring, unificatie en verheldering. Hoewel de bewijzen meestal een idealisering zijn, zijn ze nuttig voor het begrijpen van de eigenlijke processen. De bewijzen leren eigenlijk hoe redeneren te verstaan en hoe zelf systematisch te redeneren.

De explicaties die in het fps-programma beoogd worden, zijn idealisering. We willen niet beweren dat de formele probleemoplossingsprocessen precieze weergaven zijn van hoe mensen feitelijk redeneren. Het is een normatieve aanpak. We willen formeel uitdrukken hoe mensen hun problemen zouden kunnen (of zouden moeten) aanpakken op een rationele manier. Toch heeft de aanpak ook een belangrijke realistische component. In tegenstelling tot de a priori aanpak van traditionele wetenschapsfilosofen die enkel geïnteresseerd zijn in de finale resultaten, ligt de klemtoon hier op het redeneerproces dat leidt tot de finale resultaten. Zelfs als het niet realistisch is voor een mens om uit te maken of een resultaat finaal is, hoort het proces ernaartoe wel realistisch te zijn voor een probleemoplosser. De formele processen mogen niet gebaseerd zijn op onrealistische veronderstellingen. In die zin zijn dynamische processen meer descriptief en realistisch dan statische processen. Het is immers zeer onrealistisch om te vooronderstellen dat een probleemoplosser van alles wat hij afleidt onmiddellijk al weet dat hij het niet meer zal moeten terugnemen, naarmate het redeneerproces vordert. Een realistische weergave van redeneren moet rekening houden met de feilbaarheid van menselijk redeneren. Een realistische aanpak vereist ook dat men niet enkel oog heeft voor abstracte redeneerconcepten zoals abductie, inductie, default-veralgemening (waarbij men enkel interesse heeft voor de gevolgen van een theorie na toepassing van die concepten) maar ook voor de (dynamische) processen die leiden tot deze gevolgen.

Logica's zijn onbruikbaar als ze berusten op foutieve vooronderstellingen (zo-

als logische alwetendheid). Toch is het belangrijk dat de opzet in de basis nog steeds normatief en idealiserend is. Normatief-logische aanpakken hebben, in de mate dat ze helder en eenvoudig zijn, een heel belangrijke heuristische waarde. Hierdoor kunnen de formalisering en methodes om problemen op een systematische wijze aan te pakken. Bovendien kunnen normatieve aanpakken als degene waarnaar gestreefd wordt binnen het fps-programma, heel efficiënt dienst doen als de basis voor computerprogramma's die redeneren en probleemoplossen proberen te automatiseren. Doordat de menselijke (of artificiële) probleemoplosser de problemen op een systematische manier gaat aanpakken, ontwikkelt hij ook inzicht in de problemen en de redeneermethodes.

1.2.6 Algoritmes, (lokale en globale) heuristieken en methodologieën: poging tot uitpuring van het vocabularium

De begrippen procedure, algoritme, methodes, (locale en globale) heuristiek, methodologieën liggen doorgaans nogal dicht bij elkaar of hebben toch op z'n minst een overlappende betekenis. Ik licht hier kort toe hoe ik de begrippen zal gebruiken in deze thesis. Voor ik begin, wil ik erop wijzen dat ik met deze begrippen niet alleen de toepassingen bedoel die te maken hebben met het verwerken van informatie (hetgeen kan gebeuren met een computer, uit het hoofd, of met pen en papier), maar ik bedoel even goed fysieke procedures, heuristieken of algoritmes die een fysieke verandering van de wereld als gevolg (en tot doel) hebben. Een goed voorbeeld is een algoritme voor de uitvoering van een bepaald experiment.

Een procedure is een gedetailleerde beschrijving van wat iemand (hij die de procedure uitvoert) moet doen (om een bepaald doel te bereiken). Voor elk stadium in de procedure wordt verondersteld dat de stap die resulteert in het volgende stadium ondubbelzinnig bepaald is. Een bewijsprocedure, bijvoorbeeld, is de opeenvolging van een reeks eenvoudige regels, die telkens resulteren in het toevoegen van nieuwe lijnen aan een lijst formules waarbij men bij afloop van de procedure een bewijs zal bekomen voor het te bewijzen. Procedures die enkel te maken hebben met de verwerking van informatie zijn perfect vertaalbaar naar een computerprogramma of een Turingmachine. In deze dissertatie zal ik de procedures weergeven in een (ondubbelzinnige) pseudo-programmeertaal.

Ik zal spreken van een algoritme, een recept of een methode (ik gebruik deze drie begrippen als synoniemen) daar waar ik geen gedetailleerde procedure voor ogen heb, maar er wel een bestaat. Een algoritme is het abstracte idee achter of de grote lijnen van een procedure, waarbij de concrete implementatie van het

algoritme enkel een kwestie is van willekeurige keuzes maken, of het oplossen van heel eenvoudige problemen. Een (weinig performant) zoekalgoritme kan bijvoorbeeld het volgende zijn: overloop alle elementen totdat je uitkomt bij het gezochte element. Er wordt niet vermeld hoe die elementen moeten overlopen worden en hoe je moet weten dat je bij het overlopen de juiste te pakken hebt. Dit zijn echter zaken die afhangen van het type elementen en de middelen die de zoekende mens/computer voor handen heeft en hebben weinig te maken met het abstracte probleem.

Ik zal spreken van een heuristiek, om een afgezwakte versie van een algoritme aan te duiden. De afzwakking heeft te maken met het opgeven van precisie of volledigheid. Een heuristiek kan slaan op slechts een aantal stappen van een procedure of een heel algemene lijn die te vinden is doorheen de procedure. Een algoritme hoort precies te zijn (of op eenvoudige wijze te preciseren), maar een heuristiek kan een vaag idee zijn dat het proces toch kan beïnvloeden. Een voorbeeld van een heuristiek is de 'diepte eerst'-heuristiek voor het zoeken in boomstructuren (als je geen redenen hebt om afstammende deelbomen te snoeien, zoek eerst door tot aan de verste afstammelingen, ga dan pas naar broers of zussen kijken). Ik zal de term *globale heuristiek* bij het oplossen van problemen gebruiken als de heuristiek enkel afhangt van de logische vorm van het probleem (en dus te omschrijven is in algemeenheid, los van de inhoud van het probleem). De term *lokale heuristiek* behoud ik voor voor heuristieken die slechts bedoeld zijn voor een typische klasse van analoge problemen (en dus afhankelijk zijn van de inhoud van het probleem).

Een methodologie is een systematisch geheel van procedures, algoritmes en heuristieken die zeer verscheiden problemen uit een heel probleemdomein moeten aanpakken. De systematisering kan veel verder gaan dan enkel de omschrijving van heuristieken, algoritmes en procedures. Vaak houdt deze ook in dat er een eigen terminologie en een eigen formalisme wordt ontwikkeld.

1.3 Wat zijn de deelproblemen die opgelost moeten worden om te komen tot een formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing?

De formalisering van probleemoplossingsprocessen waarin deze thesis kadert, moet een explicatie vormen van wetenschappelijke probleemoplossing. Om dit te bereiken moeten antwoorden gevonden worden op de volgende vragen, die de belangrijkste aspecten van wetenschappelijke probleemoplossing vormen:

- P1 Wat zijn wetenschappelijke problemen? Hoe kunnen deze expliciet gemaakt worden?

Dit is een fundamenteel probleem. Als welk type vraag zijn de problemen formuleerbaar? Welke soorten vragen bestaan er allemaal? We onderscheiden ‘waarom’ (vragen naar ofwel (a) een verklaring, ofwel (b) een doel ofwel (c) een oorzaak), ‘hoe’ (vragen naar (d) een methode), ‘ja/nee’ (vragen naar de (e) juistheid van een uitspraak gegeven de contextuele zekerheden), ‘welke’ (vragen naar (f) welke objecten een bepaalde eigenschappen hebben), en andere. Belangrijk om deze vragen met behulp van fpsp’s te kunnen oplossen, is een vertaling naar een logische metauitdrukking. De vraag: ‘Is het mogelijk dat er leven is op Mars?’ kan vertaald worden naar $\Gamma \vdash_{\text{CO}} \exists x(Lx \wedge Mx)$, waarin Γ de verzameling van alle relevante kennis is over Mars en over wat leven is, CO een adaptieve logica voor compatibiliteit is, Lx staat voor “ x is in leven” en Mx voor “ x is aanwezig op Mars”. Sommige problemen zijn niet rechtstreeks gegeven als een vraag of een reeks vragen. Inconsistenties en paradoxen of expliciete vaagheden zijn vaak grote problemen maar leveren niet onmiddellijk vragen op. Echter, indien men nagaat waarom de inconsistenties problematisch zijn, stuit men al snel op een relevante vraagstelling: “waarom is het zo dat dit inconsistente resultaat afleidbaar is?”.

- P2 Hoe komt men ertoe dat een bepaald probleem relevant is en een ander niet, gegeven de contextuele beperkingen? Hoe worden nieuwe problemen gegenereerd uit de oplossingsprocessen van oude problemen?

Een erotetische logica bepaalt hoe een context aanleiding geeft tot een bepaalde vraagstelling.

- P3 Wat zijn rationele redeneerstappen gegeven de huidige context en de problemen die men wil oplossen?

Een deel van de redeneerstappen in de richting van de oplossing van de problemen kan als rationeel beschouwd worden op grond van de formele structuur van de contextuele zekerheden en de problemen. De belangrijkste aspecten hiervan benaderen we in het fps-programma met behulp van doelgerichte bewijssystemen. Het betreft bewijzen omdat het gaat om rationele redeneerstappen op formele gronden en het betreft een doelgerichte en procedurele aanpak, omdat de redeneerstappen moeten leiden tot het oplossen van de problemen.

- P4 Wat zijn heuristieken bij het oplossen van problemen? Hoe komt een probleemoplosser tot heuristische kennis? Kan er een onderscheid gemaakt worden tussen efficiënte of economische probleemoplossing en rationele probleemoplossing?

Een procedurele doelgerichte logica mag geen sluitende procedure vormen. Elk probleem kan immers op zeer veel verschillende rationele manieren opgelost worden (achteraf beschouwd zal mss blijken dat sommige manieren efficiënter waren dan anderen, maar dit doet geen afbreuk aan het in abstractie rationele karakter van de methodes). Er moet nog plaats zijn voor lokale en globale oplossingsheuristieken die de probleemoplosser kan ontwikkelen en gebruiken. Er moet bepaald worden wat een heuristiek precies is in een geformaliseerd probleemoplossingsproces en hoe een oplosser tot deze heuristieken komt.

- P5 Welke nieuwe kennis kan, afhankelijk van de context, op een veilige manier rationeel afgeleid worden uit de contextuele zekerheden zonder nieuwe waarnemingen te doen of op een andere manier de kennis uit te breiden? Hoe kan deze kennis bijdragen tot het oplossen van het probleem?

Bij probleemstelling P1, hebben we gezien dat vragen worden vertaald naar logische meta-uitdrukkingen. De logica's waarnaar in deze vragen verwezen wordt, kunnen monotone deductieve logica's zijn. We moeten bepalen hoe deze logica's gekarakteriseerd worden. Anderzijds kan de oplossing van een aantal complexe vragen ook deels gevonden worden door monotone deductie^a. Welke vorm van deductie of welke monotone logica is in welke probleemcontext aan de orde? Moet men zich beperken tot een relevante of intuïtionistische logica bij de formalisering van wiskundige probleemoplossing?

^aIk gebruik de termen *deductie* en *deductieve logica* voor gevolgrelaties die te maken hebben met het behoud/overdracht van waarheid. Een deductieve logica is per definitie monotoon, omdat een zin die waar is gegeven de waarheid van een verzameling zekerheden niet onwaar zal worden als men zekerheden toevoegt.

- P6 Welke nieuwe kennis kan, afhankelijk van de context, op een weerlegbare rationele manier afgeleid worden uit de contextuele zekerheden. Hoe kan het systeem van zekerheden (de theorie) uitgebreid worden? Hoe kan de bijgewonnen kennis bijdragen tot het oplossen van de problemen?

Een aantal redeneerconcepten waaraan onmiddellijk gerefereerd wordt in de probleemstelling (bij 'waarom'-vragen (er wordt naar abductie verwezen) of bij 'is het mogelijke dat'-vragen (er wordt naar compatibiliteit verwezen)) kunnen niet gekarakteriseerd worden met een monotone gevolgrelatie. Men heeft nood aan een adaptieve logica. Anderzijds is het gebruik van adaptieve logica's ook aan de orde wanneer de voorradige contextuele zekerheden niet voldoende algemeen zijn om (deductief) iets af te leiden over gevallen waarin de oplosser geïnteresseerd is. In dat geval moet men aan inductie doen. Voor formalisering hiervan heeft men een inductie-adaptieve logica nodig. Ook andere ampliatieve adaptieve logica's kunnen gevolgtrekkingen valideren die niet door een deductieve logica gevalideerd worden en die om die reden ook later kunnen weerlegd worden.

- P7 Welke kennis kan er, afhankelijk van de context, nog worden overgehouden van een problematische verzameling van contextuele zekerheden? Hoe kan de kennis die men overhoudt bijdragen tot het oplossen van de problemen?

Voor sommige problematische contexten/theorieën kan het gebruik van standaard deductieve logica's zoals klassieke logica tot problemen leiden: trivialiteiten en andere ongewenste resultaten. Sommige relevante problemen kunnen opgelost worden door de problematische aspecten van de theorie te vermijden (zoals het geval is met een zwakke paraconsistente logica: de problematische gevolgen van inconsistenties worden vermeden, waardoor de inconsistenties eigenlijk niet langer problematisch zijn). Op lange termijn is het echter nodig dat de theorie gecorrigeerd/geremedieerd wordt in zijn problematische toestand, zodat alle relevante problemen kunnen opgelost worden. Hiervoor heeft men een correctieve adaptieve logica nodig zoals een vaagheids-adaptieve logica (zie hoofdstuk 9) of een inconsistentie-adaptieve logica.

- P8 Hoe leidt het oplossen van vroegere problemen tot contextuele zekerheden die kunnen gebruikt worden voor het oplossen van nieuwe problemen?

Bij het oplossen van een probleem komt de probleemoplosser tot nieuwe contextuele zekerheden. Hoe worden deze zekerheden nu gebruikt voor nieuwe probleemcontexten? Omdat de context verschuift wanneer zich een nieuw probleem aankondigt, kan men niet zomaar alles wat afgeleid is in het (al dan niet) opgeloste probleem beschouwen als achtergrondkennis voor het nieuwe probleem. Men moet weten of de afgeleide informatie past binnen de constraints die de context oplegt aan het nieuwe probleem. Concreet moet bepaald worden hoe informatie over logische gevolgen of niet-gevolgen standhoudt wanneer (een deel van) de premissen veranderen (als $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ dan ook nog $\Gamma' \cup \Delta \vdash A$ of als $\Gamma \cup \Delta \not\vdash A$ dan ook nog $\Gamma' \cup \Delta \not\vdash A$?). Ik verwijs naar hoofdstuk 6 voor meer informatie over hoe dit kan gebeuren.

- P9 Hoe leidt het oplossen van vroegere problemen tot nieuwe oplossingsmethodes?

Naast nieuwe theoretische informatie kan een probleemoplossingsproces ook nieuwe heuristische informatie opleveren bij het doorlopen van gelukke en mislukte zoekpaden naar het oplossen van het probleem. Een geslaagd oplossingsproces kan een aanzet zijn om bij het oplossen van nieuwe gelijkaardige problemen gelijkaardige oplossingstechnieken te gebruiken en gelijkaardige heuristische keuzes te maken. Een mislukt pad kan dan weer aanleiding geven tot het vermijden van bepaalde heuristische keuzes. Ik verwijs naar hoofdstuk 6 voor meer informatie over hoe dergelijk processen formeel kunnen gebeuren.

- P10 Wanneer moet men in een probleemoplossingsproces welke nieuwe waarnemingen doen? Hoe moet men de experimenten opzetten opdat ze tot waarnemingen zouden leiden die zinvol zijn met betrekking tot het oplossen van de huidige problemen?

Bepaalde soorten informatie kunnen enkel bekomen worden door beroep te doen op waarnemingen. Wanneer is het nodig om welk experiment op te zetten? Een deel van de informatie die nodig is om dit te bepalen is probleem- en contextafhankelijk. Bepaalde heuristieken voor het consulteren van de 'wereld', kunnen echter wel uitgedrukt worden enkel op basis van hun logische vorm. Zo kan met een inductieve logica ingebouwd in een fvsp uitgedrukt worden wanneer waarnemingen nodig zijn om de relevante problemen op te lossen en onbesliste knopen door te hakken.

- P11 Wat is inzicht in (het oplossen van) een verzameling analoge problemen?

P12 Wanneer en hoe moet een probleemoplosser contextuele zekerheden in vraag stellen?

Een adaptieve logica kan afgeleide informatie in vraag stellen (niet langer afgeleid beschouwen) door de lijnen waarop de informatie afgeleid is te markeren. Natuurlijk zijn er ook veel situaties waarin de contextuele zekerheden waaruit deze informatie wordt afgeleid zelf in vraag moeten gesteld worden. Dit deel kan opgelost worden met behulp van geprioritiseerde adaptieve logica's, waarbij de mate van plausibiliteit van contextuele zekerheden wordt uitgedrukt in de premisses. De informatie die met maximale plausibiliteit kan afgeleid worden met behulp van een geprioritiseerde adaptieve logica uit een dergelijke premisseverzameling, kan een consistente selectie maken uit de informatie die aanwezig is in de premisseset. Op deze manier kan het afleiden van een contextuele zekerheid met maximale plausibiliteit later gemarkeerd worden. Zo worden dus ook de achtergrond-zekerheden weerlegbaar.

P13 Hoe kunnen meerdere verschillende probleemoplossers (met andere contextuele zekerheden) productief samenwerken aan het oplossen van problemen? Wat is rationeel discussiëren over een bepaald probleem?

Er wordt op dit moment uitgebreid onderzoek gedaan naar logica's die uitdrukken hoe verschillende subjecten (agenten) op elkaar inwerken bij het redeneren. Met behulp van verschillende soorten modaliteiten kunnen de uitspraken of beliefs van verschillende agenten geformaliseerd worden. Dit maakt het onder andere mogelijk om discussies te formaliseren. Als dergelijke logische systemen kunnen ingebouwd worden in de adaptieve logica's en de fpsp's, kan uitgedrukt worden hoe verschillende agenten samen een probleem aanpakken.

P14 Welke externe factoren beïnvloeden het oplossen van een probleem op een al dan niet controleerbare manier?

Externe factoren zijn van een sociaal-economische, politieke of psychologische aard. Hoe zijn de sociale structuren georganiseerd binnen welke de problemen moeten opgelost worden? Voor welke problemen zijn er welke middelen beschikbaar? Hoe bepaalt persoonlijke interesse, passie, concentratie, ambitie, angst en verveling welke problemen opgelost worden en hoe die problemen opgelost worden? Logica lijkt niet geschikt om deze externe dynamieken aan te pakken. Met behulp van de sociologische, economische, politieke en psychologische studie van wetenschappelijke probleemoplossing kan men nagaan hoe deze factoren het oplossen beïnvloeden. Op deze manier kan men deze factoren eventueel als extralogische input voor de fvsp's beschouwen.

- P15 Welke regulariteiten die vast te stellen zijn binnen wetenschappelijke probleemoplossing zijn context-afhankelijk? Welke regulariteiten kunnen binnen een bepaald conceptueel kader vastgesteld worden, maar zijn niet geldig buiten het kader? Wat is het nut van een discipline-specifieke analyse van probleemoplossingsprocessen?

De aard van de problemen en de aard van hun oplossingsprocessen is afhankelijk van de discipline waartoe de problemen behoren. De formalisering van de oplossingsprocessen kan ook discipline-afhankelijk aangepakt worden. Een algemene aanpak is een goede start, maar de discipline-afhankelijke kijk kan tot meer genuanceerde en efficiëntere formele oplossingsprocessen leiden. Zo is het mijn bedoeling om in de toekomst na te gaan hoe wiskundige problemen met de tools uit het fvs-programma kunnen aangepakt worden.

- P16 Hoe kan een probleem opgelost worden door beroep te doen op kennis uit een ander conceptueel kader? Hoe zoekt de probleemoplosser naar bruikbare verbanden tussen de oplossingsprocessen van problemen uit heel verschillende contexten? Hoe vindt hij analogieën tussen contextuele zekerheden, methodes en heuristische afkomstig uit kennissystemen (verzamelingen contextuele zekerheden) die een heel ander soort problemen oplossen?

In het kader van het fps-programma is het vooral belangrijk om formeel te kunnen uitdrukken dat problemen analoog zijn, en in welke aspecten ze analoog zijn. Een deel van de analogieën worden bepaald door de logische vorm van de problemen. Een formele aanpak zou deze analogieën kunnen afleiden en nuttig aanwenden voor het oplossen van de problemen. Dit probleem wordt veel moeilijker als de problemen uit totaal andere contexten en disciplines komen. Toch is het niet onrealistisch dat iemand bijvoorbeeld een probleem uit de psychologie oplost met behulp van gebruikelijke technieken uit de computerwetenschappen.

P17 Wanneer en hoe leidt het oplossen van een probleem tot de creatie van nieuwe concepten en de herdefiniëring van oude concepten?

Deze vraagstelling moet behandeld worden met behulp van een logica voor conceptuele verandering: een logica die aangeeft hoe problematische toestanden van theorieën kunnen opgelost worden met behulp van de verandering van de extensie en de definitie van begrippen en hoe problemen kunnen opgelost worden met behulp van de creatie en de definitie van nieuwe concepten. Dergelijke logica's moeten ook overweg kunnen met met uitspraken van voor de conceptuele verandering wanneer de extensie van de gebruikte begrippen veranderd zou blijken.

P18 Wat is de complexiteit van relevante klassen van problemen? Welke deelklassen zijn minder complex?

De complexiteit van een beslisbaar probleem heeft te maken met de benodigde tijd en opslagruimte voor het bereiken van een oplossing. De complexiteit van een onbeslisbaar probleem heeft te maken met de mathematische structuur van de verzameling oplossingen. Een formele aanpak van probleemoplossing laat ook toe de complexiteit van de problemen in algemeenheid te bestuderen. Het is belangrijk om dit doen om oog te hebben op de haalbaarheid van de oplossing van problemen. Wanneer het probleem zeer complex is, kan het bijvoorbeeld heel rationeel zijn om voor een voorwaardelijke of benaderende oplossing te kiezen of om voorrang te geven aan andere, meer haalbare problemen, die misschien een nieuw licht kunnen werpen op het moeilijk oplosbare probleem. Zonder inzicht in de complexiteit kan men dergelijk afwegingen niet maken.

P19 Hoe gaat een probleemoplosser om met een heel hoge complexiteit (fundamentele onoplosbaarheid van problemen)?

Zoals reeds aangegeven bij de vorige vraagstelling, moet een probleemoplosser een manier vinden om te gaan met hoge complexiteit. Moet de probleemoplosser deze problemen vermijden of zich tevreden stellen met een voorwaardelijke of benaderende oplossing van het probleem (die wel binnen afzienbare termijn kan bekomen worden)? Adaptieve en prospectieve bewijzen staan (omwille van hun conditionele lijnen) een dergelijk voorwaardelijke oplossing toe.

- P20 Wanneer beslist de probleemoplosser de uitzichtloze zoektocht naar de oplossing van heel complexe problemen te staken? Wat blijft er over van deze oplossingsprocessen?

Er kan nooit in algemeenheid bepaald worden of een procedure na verloop van tijd zal stoppen of vastzit in een uitzichtloze berekening (deze uitspraak is bekend als het halting-probleem). Dit neemt niet weg dat er voor bepaalde concrete oplossingsprocedures wel dergelijke halting-algoritmes kunnen bestaan. Er moet onderzocht worden hoe formeel-logische technieken kunnen bepalen hoe men tot dergelijk halting-algoritmes komt.

- P21 Waarom is het zinvol voor het oplossen van wetenschappelijke problemen om pragmatische factoren terug te dringen? Hoe slaagt de probleemoplossing er in om deze pragmatische factoren terug te dringen?

Het terugdringen van pragmatische factoren (zoals de psychologie van het subject, de plaats en tijd waarin het probleem wordt opgelost, enz.—zie [6]) is een cruciale bezigheid van de wetenschappelijke probleemoplosser. Kan dit op een algemene manier gebeuren? Kan dit proces vastgelegd worden met behulp van logische technieken?

1.4 Welke problemen wil dit doctoraat oplossen en hoe worden deze problemen opgelost?

1.4.1 Welke problemen?

Het hele fps-programma is natuurlijk een lange termijn onderzoeksproject. In dit doctoraat worden maar enkele van de vele vragen die hierboven opgesomd staan, opgelost. De antwoorden op de andere vragen zijn echter ook relevant voor de oplossingen in dit doctoraat. Ofwel dragen de technieken die hier voorgesteld zijn bij tot de oplossing van de problemen die andere vragen oproepen

ofwel is hun oplossing nodig vooraleer de gepresenteerde technieken in de praktijk zouden kunnen gebruikt worden. Zo is het bijvoorbeeld absurd om oplossingsprocessen te gaan formaliseren als men nog niet weet hoe de problemen te formaliseren zijn. De technieken die in dit doctoraat gegeven worden, hebben allen te maken met het gebruik van logische dynamische bewijzen als instrumenten bij formele probleemoplossing. Aan het oplossen van de volgende probleemstellingen wil ik met de technieken uit deze thesis een bijdrage leveren:

- P3 Wat zijn rationele redeneerstappen gegeven de huidige context en de problemen die men wil oplossen?
- P4 Wat zijn heuristieken bij het oplossen van problemen? Hoe komt een probleemoplosser tot heuristische kennis? Kan er een onderscheid gemaakt worden tussen efficiënte of economische probleemoplossing en rationele probleemoplossing?
- P6 Welke nieuwe kennis kan, afhankelijk van de context, op een weerlegbare rationele manier afgeleid worden uit de contextuele zekerheden. Hoe kan het systeem van zekerheden (de theorie) uitgebreid worden? Hoe kan de bijgewonnen kennis bijdragen tot het oplossen van de problemen?
- P7 Welke kennis kan er, afhankelijk van de context, nog worden overgehouden van een problematische verzameling van contextuele zekerheden? Hoe kan de kennis die men overhoudt bijdragen tot het oplossen van de problemen?
- P8 Hoe leidt het oplossen van vroegere problemen tot contextuele zekerheden die kunnen gebruikt worden voor het oplossen van nieuwe problemen?
- P9 Hoe leidt het oplossen van vroegere problemen tot nieuwe oplossingsmethodes?
- P18 Wat is de complexiteit van relevante klassen van problemen? Welke deelklassen zijn minder complex?
- P19 Hoe gaat een probleemoplosser om met een heel hoge complexiteit (fundamentele onoplosbaarheid van problemen)?

1.4.2 Bewijzen als instrumenten

We zullen bewijzen gebruiken als instrumenten binnen f_{psp}'s. Klassieke logische bewijzen zijn op zich niet bruikbaar binnen het f_{psp}-programma. Op zichzelf kunnen zij niet bijdragen aan het oplossen van problemen. Klassieke bewijzen bevatten immers geen enkele vorm van doelgerichtheid. Redeneerstappen in een klassiek bewijs hoeven op geen enkele wijze bij te dragen aan het oplossen van de problemen van het f_{psp}. Klassieke bewijzen zijn bovendien bedoeld als demonstraties van een of andere stelling. Een probleemoplosser is niet in de eerste instantie geïnteresseerd in de demonstratie van een stelling. Klassieke

bewijzen garanderen enkel het behoud van waarheid, niet de relevantie van die waarheid. De toepassing van de regel additie (doorgaans als probleemloos beschouwd) kan wel rationeel zijn op basis van behoud van waarheid, maar hoeft zeker niet rationeel te zijn binnen een probleemoplossingsproces. Stel je een wiskundige voor die het eenvoudige probleem “is 259 een priemgetal?” moet oplossen. Stel dat de wiskundige begint met de bekende stelling $259 = 259$. Vervolgens beargumenteert hij dat $259 = 259$ of $0 = 1$. Hij gaat hierna verder met het afleiden van $259 = 259$ of $0 = 1$ of $0 = 2$ en daarna $259 = 259$ of $0 = 1$ of $0 = 2$ of $0 = 3$, enzovoort. Niemand zal vinden dat deze wiskundige op rationele wijze bezig is met het oplossen van zijn probleem, maar al de redeneerstappen die de wiskundige onderneemt zijn onproblematisch correct volgens bijna alle deductieve logica’s.

Als we bewijzen willen gebruiken voor de fvsp’s, moeten deze bewijzen op een af andere manier in relatie staan tot het op te lossen probleem. Op een of andere manier moeten we in logische bewijzen kunnen inbouwen dat de regels die het bewijs leiden, garanderen dat de stappen bijdragen tot het oplossen van het doel of het probleem. Dit gebeurt met behulp van een prospectieve dynamiek.

Definitie 1 *Prospectieve dynamiek.*

Een regelsysteem voor de constructie van logische bewijzen vertoont een prospectieve dynamiek als:

1. *de bewijzen worden geconstrueerd met behulp van afleidingsregels en een procedure. Alle informatie die moet bijgehouden worden voor het doorlopen van de procedure moet aanwezig op de lijnen van het bewijs zelf.*
2. *de lijnen van een prospectief bewijs conditioneel zijn. Deze condities hebben de volgende betekenis: als de conditie van de lijn zou kunnen gevonden worden dan is de formule van de lijn afgeleid.*
3. *de bewijzen starten met een lijn waarop de uiteindelijk af te leiden formule (het doel/de goal) conditioneel is afgeleid. De procedure aan de hand waarvan de bewijzen geconstrueerd worden, stoppen wanneer de formule onconditioneel is afgeleid of als blijkt dat het doel niet onconditioneel afleidbaar is.*

Als eerste stap richting een doelgerichte bewijsnotie, zijn niet-doelgerichte bewijzen wel belangrijk. Voor de meeste probleemcontexten zijn deductieve logica’s en hun bewijzen echter te beperkt. Wetenschappelijk redeneren en probleemoplossen is immers veel meer dan zuivere deductie. Afgeleide uitspraken

moeten weerlegbaar zijn. Zoals ik reeds benadrukte bij de discussie over realisme, is het zeer onrealistisch om te veronderstellen dat de concrete probleemoplosser pas uitspraken doet als hij er absoluut zeker van is dat hij op deze uitspraken niet zal terugkomen. Om die reden zullen de bewijzen die we gebruiken bij de constructie van f_{psp}'s naast een doelgerichte dynamiek ook een adaptieve dynamiek vertonen.

Definitie 2 *Adaptieve dynamiek.*

Een bewijs vertoont een adaptieve dynamiek als de lijnen conditioneel zijn, op zo'n manier dat de formules van een lijn is afgeleid op voorwaarde dat een welbepaalde formule op basis van de conditie van de lijn niet afleidbaar is. Zolang niet afgeleid is in het bewijs dat deze formule op basis van de conditie wel afleidbaar is, wordt de formule van de lijn beschouwd als afgeleid.

1.4.3 'De computationele benadering van logica' als instrument

Grof samengevat wil dit doctoraat de abstracte traditionele logica's computationeel benaderen. Met andere woorden: (1) "hoe kan je procedures opstellen die bepalen hoe een probleemoplosser (indien dit bijdraagt tot het oplossen van zijn huidige problemen) er kan in slagen te bepalen of een formule afleidbaar is met een bepaalde logica?" en (2) "kan dit redeneerproces zelf geëxpliceerd worden als een bewijs?". Ik zoek dus naar logische regels die niet enkel bepalen hoe een probleemoplosser infereert vanuit zijn contextuele zekerheden, maar ook bepalen hoe dit bijdraagt tot het oplossen van zijn problemen. Ik ben in dit doctoraat geïnteresseerd naar hoe logica's kunnen omgezet worden in berekenbare procedures en in welke mate dit mogelijk is. Met andere woorden: wat is de rol van de complexiteit van vele redeneerconcepten in de constructie van een procedurele aanpak van logica. Verlamt onbeslisbaarheid en de afwezigheid van een positieve test de probleemoplosser, of pleit deze hoge complexiteit net voor een concrete doelgerichte procedurele aanpak tegenover de traditionele abstracte wetenschapsfilosofische benadering?

Hoofdstuk 2

Cruciale formele constructies

Omdat dit doctoraat slechts een schakel is een groter programma, werk ik verder op de verwezenlijkingen van het programma uit het verleden. Het is niet zeer zinvol om volledige hoofdstukken te besteden aan formele constructies die elders uitstekend uitgelegd zijn. Toch is het belangrijk dat de inhoud van dit doctoraat minimaal self contained is en dat de terminologie en notatiewijzes coherent zijn. Prospectieve bewijzen en adaptieve logica's zijn op verschillende plaatsen anders neergeschreven. Nieuwe resultaten hebben vaak aanleiding gegeven tot het herzien van de precieze terminologie en voorstellingswijze van de formele constructies. In dit hoofdstuk definieer ik de relevante noties zoals ik ze zal gebruiken in de rest van de verhandeling (behalve in de artikels in de appendix).

De laatste sectie van dit hoofdstuk is van een andere aard. In die sectie wordt de notie *keurige semantiek* gedefinieerd. Deze notie is, in tegenstelling tot de eerste twee secties van dit hoofdstuk, wel een nieuw resultaat. Echter, omdat de definitie van de notie op zichzelf niet onmiddellijk binnen het kader van deze thesis valt, maar hij wel op verschillende plaatsen gebruikt wordt in deze thesis, heb ik hem aan dit hoofdstuk toegevoegd.

Let op: hoewel ik heb geprobeerd de terminologie doorheen de thesis zo consequent mogelijk te hanteren, is de terminologie die ik in dit hoofdstuk introduceer op sommige plaatsen niet dezelfde als de terminologie die gebruikt is in de verschillende artikels die in de appendix zijn opgenomen. Dit komt omdat de artikels letterlijk zoals ze zijn ingestuurd zijn opgenomen in deze thesis en dateren van voor ik de resultaten heb samengevoegd in de vorm van een thesis.

2.1 Adaptieve logica's in standaard formaat

Hier geef ik een zeer beknopte beschrijving van adaptieve logica's, voor meer informatie omtrent de motivering, de toepassing en de metabewijzen verwijs ik naar [29]. Een eenvoudige inleiding tot adaptieve logica's en een overzicht van de beschikbare literatuur is te vinden op <http://logica.ugent.be/adlog/al.html>.

De meest aantrekkelijke beschrijving van adaptieve logica's vandaag de dag wordt het standaard formaat genoemd, verschenen in [17] en het meest uitgebreid besproken in [29], waarin ook alle metatheoretische bewijzen voorkomen. Bijna alle gekende adaptieve logica's zijn uitgedrukt in het standaard formaat. Alles wat ik in deze verhandeling schrijf over adaptieve logica's is gebaseerd op het standaardformaat.

Een adaptieve logica **AL** is gedefinieerd als een tripel:

1. Een *onderlimiet logica* (in het engels *lower limit logic*) **LLL**: Een reflexieve, transitieve, monotone en compacte logica die een karakteristieke semantiek heeft en **CL** (klassieke logica) bevat.¹
2. Een *verzameling abnormaliteiten* Ω : Een verzameling **LLL**-contingente formules, gekarakteriseerd door een (mogelijk beperkte) logische vorm F die tenminste 1 logisch symbool bevat.
3. Een *adaptieve strategie*: Betrouwbaarheid of Minimale Abnormaliteit (in het Engels respectievelijk Reliability en Minimal Abnormality). Dit zijn markeringsstrategieën die bepalen hoe om te gaan met formules waarvan de condities abnormaliteiten bevatten die voorkomen in afgeleide disjuncties van abnormaliteiten.

De oudste adaptieve logica's **CLuN^m** en **CLuN^r** worden in dit doctoraat als typische voorbeelden gebruikt. Ze worden als volgt gedefinieerd: de onderlimietlogica is **CLuN** (*Classical Logic allowing for gluts with respect to Negation*), nl. volledige positieve **CL** met $(A \supset \neg A) \supset \neg A$ toegevoegd als enige axioma voor de standaard negatie, en uitgebreid² met de klassieke negatie \neg (zie voetnoot 1). $A \vee \neg A$ is een **CLuN**-stelling, $A \wedge \neg A$ is **CLuN**-contingent. De verzameling abnormaliteit Ω bevat alle formules van de vorm $\exists(A \wedge \sim A)$ (de existentiële sluiting van $A \wedge \sim A$).³ De strategieën zijn respectievelijk Betrouwbaarheid en Minimale

¹Dit wordt gerealiseerd door de toevoeging van klassiek logische symbolen (deze hebben dezelfde betekenis als in **CL**) aan de taal. Deze zullen geschreven worden als \neg, \vee, \exists , enz. De klassieke symbolen hebben vooral een technisch nut and en moeten niet voorkomen in de premisen of conclusies van de standaard toepassingen.

²Geschikte axioma's zijn $(A \supset \neg A) \supset \neg A$ en $A \supset (\neg A \supset B)$.

³Dus, voor het propositionele fragment, Ω bevat alle formules van de vorm $A \wedge \sim A$.

abnormaliteit.

Als de onderlimietlogica wordt uitgebreid met een axioma dat alle abnormaliteiten vals maakt, bekomt men de *bovenlimietlogica* ULL. Als een premisseverzameling Γ niet vereist dat bepaalde disjuncties van abnormaliteiten waar zijn, dan zijn de **AL**-gevolgen van Γ identiek aan de **ULL**-gevolgen. De bovenlimietlogica van CLuN^{re}_n van CLuN^{mi}_s **CL**.

In de uitdrukking $Dab(\Delta)$ zal Δ altijd een eindige deelverzameling zijn van Ω , en $Dab(\Delta)$ zal refereren naar de *klassieke* disjunctie (zie voetnoot 1) van de leden van Δ . $Dab(\Delta)$ wordt een *Dab*-formule genoemd. $Dab(\Delta)$ is een *minimaal Dab-gevolg* van Γ alss⁴ $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} Dab(\Delta)$ en $\Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} Dab(\Delta')$ voor iedere $\Delta' \subset \Delta$. Waar $Dab(\Delta_1), Dab(\Delta_2), \dots$ de minimale *Dab*-gevolgen zijn van Γ , $U(\Gamma) = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots$; $U(\Gamma)$ is de verzameling abnormaliteiten die *onbetrouwbaar* zijn met betrekking tot Γ . Als M een **LLL**-model is, is $Ab(M)$ de verzameling van abnormaliteiten die geverifieerd worden door M .

Definitie 3 Een **LLL**-model M van Γ is betrouwbaar alss $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.

Definitie 4 $\Gamma \vDash_{\text{AL}} A$ alss A wordt geverifieerd door alle betrouwbare modellen van Γ .

Dus, een **LLL**-model van Γ is betrouwbaar alss het enkel abnormaliteiten verifieert die toch onbetrouwbaar zijn met betrekking tot Γ . Voor een adaptieve logica die Betrouwbaarheid als strategie heeft, zijn de semantische gevolgen van Γ de formules die geverifieerd worden door alle betrouwbare modellen van Γ .

Definitie 5 Een **LLL**-model M van Γ is minimaal abnormaal alss er is geen **LLL**-model M' van Γ is waarvoor geldt dat $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Definitie 6 $\Gamma \vDash_{\text{AL}^m} A$ alss A wordt geverifieerd door alle minimaal abnormale modellen van Γ .

Dus, een **LLL**-model M van Γ is minimaal abnormaal alss geen ander **LLL**-model van Γ (verzameling-theoretisch) minder abnormaliteiten dan M verifieert. Voor een adaptieve logica die Minimale Abnormaliteit als z'n strategie heeft, zijn de semantische gevolgen van Γ de formules die geverifieerd worden door alle minimaal abnormale modellen van Γ .

Een geannoteerd **AL**-bewijs bestaat uit lijnen die vier elementen hebben: een lijn nummer, een formule, een verantwoording en een conditie. Wanneer

A Δ

⁴De afkorting 'alss' staat voor 'als en slechts als'.

afkort dat A in het bewijs voorkomt op de conditie Δ , zijn de (generieke) afleidingsregels:

$$\begin{array}{ll}
 \text{PREM} & \text{Als } A \in \Gamma: \\
 & \frac{\dots \quad \dots}{A \quad \emptyset} \\
 \\
 \text{RU} & \text{Als } A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B: \\
 & \frac{\begin{array}{l} A_1 \quad \Delta_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n} \\
 \\
 \text{RC} & \text{Als } A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B \check{\vee} Dab(\Theta) \\
 & \frac{\begin{array}{l} A_1 \quad \Delta_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n \cup \Theta}
 \end{array}$$

De lege lijst lijnen is stadium 0 van een bewijs en het toevoegen van lijnen aan een bewijs in stadium s brengt het in stadium $s + 1$. De bovenstaande *regels* bepalen welke lijnen kunnen toegevoegd worden aan een bewijs uit Γ . De *Markeringsdefinitie* bepaalt welke lijnen gemarkeerd worden op een stadium van het bewijs.

$Dab(\Delta)$ is een *minimale Dab-formule* in stadium s van een **AL**-bewijs alss $Dab(\Delta)$ is afgeleid op dat stadium op de conditie \emptyset terwijl er geen $\Delta' \subset \Delta$ is waarvoor $Dab(\Delta')$ afgeleid is op de conditie \emptyset .⁵ Een *keuzeverzameling* van $\Sigma = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots\}$ is een verzameling die een element van elk lid van Σ bevat. Een *minimale keuzeverzameling* van Σ is een keuzeverzameling van Σ waarvan geen echte deelverzameling een keuzeverzameling van Σ is. Beschouw een bewijs uit Γ in stadium s en laat $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ de minimale *Dab*-formules zijn op dat stadium. $U_s(\Gamma) = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ ⁶ en $\Phi_s(\Gamma)$ is de verzameling minimale keuzeverzamelingen van $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$.⁷

Definitie 7 *Markeringsdefinitie voor de Betrouwbaarheidsstrategie: Lijn i wordt gemarkeerd in stadium s alss, wanneer Δ de conditie is van deze lijn, $\Delta \cap U_s(\Gamma) \neq \emptyset$.*

⁵Merk de gelijkenis op met de definitie van een minimaal *Dab*-gevolg van Γ . De minimale *Dab*-formules op een stadium staan voor een schatting van de minimale *Dab*-gevolgen van Γ ; de schatting hangt af van de inzichten die het stadium van het bewijs verschaft.

⁶ $U_s(\Gamma)$ kan gezien worden als de schatting van $U(\Gamma)$ die verschaft wordt door stadium s van het bewijs.

⁷Laat $\Phi(\Gamma)$ op dezelfde wijze gedefinieerd zijn uit de minimale *Dab*-gevolgen van Γ . Er kan aangetoond worden $\varphi \in \Phi(\Gamma)$ alss er een minimaal abnormaal model M van Γ is, waarvoor geldt $\varphi = Ab(M)$. $\Phi_s(\Gamma)$ kan gezien worden als de schatting voor $\Phi(\Gamma)$ die verschaft wordt door stadium s van het bewijs.

Definitie 8 *Markeringsdefinitie voor de Minimale Abnormaleitenstrategie: Stel A is afgeleid op de conditie Δ op lijn i . Lijn i wordt gemarkeerd in stadium s alss, (i) er is geen $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ waarvoor geldt dat $\varphi \cap \Delta = \emptyset$, of (ii) voor minstens een $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ is er geen lijn waarop A is afgeleid op een conditie Θ waarvoor geldt $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.*

Het volgende leest gemakkelijker: waar A afgeleid is op de conditie Δ op lijn i , lijn i is niet gemarkeerd in stadium s alss (i) er is een $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ waarvoor $\varphi \cap \Delta = \emptyset$ en (ii) voor iedere $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ is er een lijn waarop A is afgeleid op een conditie Θ waarvoor geldt dat $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.

Een formule A is afgeleid in stadium s van een bewijs uit Γ alss A is afgeleid op een niet gemarkeerde lijn van dat stadium. Markeringen kunnen komen en gaan, en dus is er ook nood aan een stabiel soort afleidbaarheid, de zogenaamde *finale afleidbaarheid*. Waar P een bewijs is in stadium s , is P' een uitbreiding van P alss stadium s van P is gelijk aan stadium s van P' .

Definitie 9 *A is finaal afgeleid uit Γ op lijn i van een bewijs in stadium s alss (i) A is het tweede element van lijn i , (ii) lijn i is niet gemarkeerd in stadium s en (iii) elke uitbreiding van het bewijs waarin lijn i wel gemarkeerd is, kan verder uitgebreid worden op zulke manier dat lijn i niet langer gemarkeerd is.*

Het bewijs in stadium s is een eindig bewijs. Voor de Betrouwbaarheidsstrategie hoeft definitie 9 enkel te verwijzen naar *eindige* uitbreidingen. Voor Minimale Abnormaliteit moet de definitie ook verwijzen naar oneindige uitbreidingen, zoals is bewezen in [12, p. 479].

De intuïtieve notie achter finale afleidbaarheid is het bestaan van een bewijs dat *stabiel is met betrekking tot een niet gemarkeerde lijn i* : A is afgeleid op lijn i en lijn i is noch gemarkeerd in het bewijs noch in zijn uitbreidingen. Voor sommige **AL**, Γ , en A , is enkel een oneindig bewijs uit Γ stabiel met betrekking tot lijn i , waarbij A de formule van i is.

Definitie 9 heeft een aantrekkelijke speltheoretische interpretatie. De protagonist heeft bewezen dat A finaal is afgeleid op lijn i alss, telkens de tegenstander het bewijs uitbreidt op zulke manier dat lijn i wordt gemarkeerd, dan is de protagonist in staat de uitbreiding verder uit te breiden op zulke manier dat lijn i wordt gedemarkeerd.

Correctieve adaptieve logica's hebben **CL** als hun bovenlimietlogica. De onderlimietlogica kan paraconsistent zijn, maar kan ook zwakker zijn dan **CL** omdat een ander logisch symbool 'gebrekkig' is (t.o.v. **CL**), omdat verschillende symbolen gebrekkig zijn, of omdat enkele niet-logische symbolen vaag of ambigu zijn. Vele andere adaptieve logica's zijn *ampliatief*. Deze hebben **CL** als hun

onderlimiet. Dit zijn onder andere logica's voor inductieve generalisering, voor abductie, voor het omgaan met achtergrondinformatie, om vragen te genereren, enz. Andere adaptieve logica's zijn ampliatief en correctief.

Als een adaptieve logica in standaardformaat staat, wordt de bewijstheoretische en de semantische karakterisering van de logica onmiddellijk voorzien door het standaard formaat. Het standaardformaat zorgt ook voor metatheoretische resultaten, waaronder correctheids- en volledigheidsbewijzen en de bewijzen voor de meeste interessante eigenschappen—zie [29]. Het verschaft ook *criteria* voor finale afleidbaarheid, nl. procedures die toelaten om wanneer A afgeleid is op de conditie Δ op lijn i , dan na te gaan, voor specifieke A en Γ , dat A finaal is afgeleid uit Γ .

2.2 Prospectieve bewijzen

2.2.1 Inleiding

De prospectieve bewijzen voor een logica L zijn bewijzen die volgens een bepaalde procedure in een bepaald formaat worden opgesteld op zulke manier dat, als de procedure eindigt, G is afgeleid op een ongemarkeerde lijn van het bewijs uit Γ alss $\Gamma \vdash_L G$. Om dit mogelijk te maken wordt er voor klassieke logica gebruik gemaakt van het toevoegen van een conditie aan een lijn (naast de gewone formule van de lijn). Deze toevoeging slaagt erin het bewijs te leiden in de richting van het afleiden van het doel G . De conditie is een verzameling formules, zodat een lijn met conditie Δ en formule A , kan gelezen worden als “we hebben A afgeleid uit Γ op voorwaarde dat we erin slagen alle elementen van Δ uit Γ af te leiden”. De lijnen leiden de constructie in die zin dat we met behulp van een lijn met formule A en conditie Δ dus weten dat het zinvol is voor het verdere verloop van het bewijs te proberen om de elementen van Δ af te leiden, als het ons doel is om A af te leiden. Ik presenteer een formaat voor prospectieve bewijzen voor klassieke propositionele logica.

2.2.2 Afkortingen

- (i) $\mathcal{S} = \{p, q, r, s, t, p_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor propositionele constanten (ook wel zinsletters genoemd).

Voor de definiëring van de regels voer ik tevens de volgende lijst van afkortingen in:

\mathfrak{a}	\mathfrak{a}_1	\mathfrak{a}_2		\mathfrak{b}	\mathfrak{b}_1	\mathfrak{b}_2
$A \wedge B$	A	B		$\neg(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\neg(A \equiv B)$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(B \supset A)$
$\neg(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\neg(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$\neg\neg A$	A	A				

Tabel 2.1: \mathfrak{a} - en \mathfrak{b} -formules in het prospectieve bewijssysteem

2.2.3 Lijnen

De lijnen van een prospectief bewijs bestaan uit een lijnnummer i , een conditie Δ , een formule A , een verantwoording en eventueel een markering. Van een dergelijke lijn wordt gezegd dat $[\Delta]A$ erop is afgeleid. Ook in de definitie van de regels zal ik de lijnen beschrijven met uitdrukkingen van de vorm $[\Delta]A$.

2.2.4 Regels

Doel Een hoofddoel G mag geïntroduceerd worden op een lijn met $[G]G$ als tweede element.

Prem Eender welke premisse A mag niet-conditioneel geïntroduceerd worden.⁸

$$\mathfrak{aE}, \mathfrak{bE} \quad \frac{[\Delta]\mathfrak{a}}{[\Delta]\mathfrak{a}_1 \quad [\Delta]\mathfrak{a}_2} \quad \frac{[\Delta]\mathfrak{b}}{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}_2\}]\mathfrak{b}_1 \quad [\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1\}]\mathfrak{b}_2}$$

$$\mathfrak{CaE}, \mathfrak{CbE} \quad \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}]A} \quad \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1\}]A \quad [\Delta \cup \{\mathfrak{b}_2\}]A}$$

$$\text{Trans} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}]A \quad [\Delta']B}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\text{EM} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}]A \quad [\Delta' \cup \{\neg B\}]A}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

⁸Het niet-conditioneel afleiden van een formule A komt op hetzelfde neer als het afleiden van $[\emptyset]A$ in een bewijs. We schrijven dan ook kortweg A in het tweede element van een lijn indien A wordt afgeleid onder de lege conditie.

$$\text{EM0} \quad \frac{[\Delta \cup \{ *A \}]A}{[\Delta]A}$$

EFQ Als $A \in \Gamma$, dan mag het hoofddoel G geïntroduceerd worden op een lijn met $[\neg A]G$ als tweede element.

Om het bewijs te leiden zijn er restricties nodig op de toepassing van regels. Hiervoor hebben we eerst en vooral de definitie van een *positief-deel*-relatie nodig. Dat A een *positief deel* van een andere formule is, is recursief gedefinieerd door de volgende clausules:

1. $\text{pp}(A, A)$.
2. Als $\text{pp}(A, a_1)$ of $\text{pp}(A, a_2)$, dan $\text{pp}(A, a)$.
3. Als $\text{pp}(A, b_1)$ of $\text{pp}(A, b_2)$, dan $\text{pp}(A, b)$.
4. Als $\text{pp}(A, B)$ en $\text{pp}(B, C)$, dan $\text{pp}(A, C)$.

Vervolgens moeten we bepalen hoe lijnen moeten gemarkeerd worden. De markering wordt bepaald met behulp van de volgende definitie:

Definitie 10 Wanneer $[\Delta]A$ is afgeleid op lijn i , dan wordt lijn i gemarkeerd als een van de volgende voorwaarden vervuld is:

1. lijn i is geen toepassing van een doelregel en $A \in \Delta$,
2. voor bepaalde $\Delta' \subset \Delta$, $[\Delta']A$ komt voor in het bewijs,
3. geen toepassing van de EFQ-regel komt voor op een lijn die lijn i voorafgaat en $B, \neg B \in \Delta$ voor tenminste een B ,
4. geen toepassing van de EFQ-regel komt voor op een lijn i en voor bepaalde $B \in \Delta$, $\neg B$ komt voor in het bewijs.

De leden van de condities van *ongemarkeerde* lijnen van het bewijs worden *doelwitten* van het bewijs genoemd.

De hierboven gedefinieerde regels mogen maar toegepast worden onder bepaalde restricties:

1. De bewijzen starten met een toepassing van de doelregel.
2. Premissen worden geïntroduceerd en formules worden geanalyseerd als een doelwit een positief deel is van de formule van de toegevoegde lijn.

3. Conditie-analyserende regels worden enkel toegepast op doelwitten.
4. Een formule analyserende regel wordt nooit toegepast op een formule die geen premisse in zijn pad heeft.
5. Eenmaal $[\Delta]A$ voorkomt in een bewijs voegt men nooit een andere lijn met diezelfde formule en conditie toe (zelfs als de verantwoording van de lijn verschilt).
6. EFQ wordt enkel toegepast als de andere regels niet meer kunnen toegepast worden.

2.3 Keurige semantiek

Keurige semantiek zijn tweewaardige semantiek met een klassiek-logische metataal. Deze maakt het mogelijk om de logica's met dergelijke semantiek in te bedden in klassieke logica. De correctheid van deze inbedding/vertaling is bewezen in appendix B. Voor meer uitleg over dergelijke semantiek verwijst ik ook naar appendix B (hier geef ik de zuiver formele definitie, zonder verder uitleg). Het bijzondere aan keurige semantiek (t.o.v. standaard semantiek) is dat de toekenningsfunctie niet enkel primitieve formules een waarheidswaarde geeft. Dit maakt het mogelijk om logica's die met standaard technieken geen deterministische semantiek hebben, toch een deterministische semantiek te bezorgen.

Er zijn twee types keurige semantiek: deze die het *RoI-schema* (Replacement of Identicals-schema) volgen en deze die het *niet-RoI-schema* volgen. Dit heeft te maken met de geldigheid van de afleidingsregel $A(\alpha), \alpha = \beta \vdash A(\beta)$ in de logica's waarvoor de keurige semantiek bedoeld is. Van de keurige semantiek van logica's die deze regel valideren zullen we zeggen dat ze het RoI-schema volgen. Van de andere zullen we zeggen dat ze het niet-RoI-schema volgen.

2.3.1 Voorbereidingen

Laat \mathcal{L} de taal van CL zijn met de logische symbolen $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists$, en $=$ (maar zonder functiesymbolen). \mathcal{L} is gedefinieerd met $\langle \mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \dots \rangle$, waarbij \mathcal{C} de verzameling (letters voor) individuele constanten, \mathcal{V} de verzameling individuele variabelen, en \mathcal{P}^r de verzameling predikaten van rang $r \geq 0$ is—predikaten van rang 0 zullen dienst doen als propositieletters. De leden van \mathcal{P}^r zullen $P^r, Q^r, R^r, P_1^r, \dots$ zijn, maar we zullen de superscripts vaak onzichtbaar schrijven, waarbij we betrouwen op de gebruikelijke afspraak om enkel welgevormde

formules op te schrijven. Laat \mathcal{F} en \mathcal{W} respectievelijk staan voor de verzameling formules en de verzameling gesloten formules van \mathcal{L} .

Beschouw vervolgens een taal $\mathcal{L}_\#$, die een uitbreiding vormt van \mathcal{L} . We introduceren eerst enkele functies die \mathcal{F} als hun domein hebben. Laat $f(A)$ de string zijn die bekomen wordt door in A elk voorkomen van een individuele constante en elk vrij voorkomen van een individuele variabele te vervangen door een gecentreerd punt. Dus: $f(\exists y(Pay \supset Qbx)) = f(\exists y(Pxy \supset Qxx)) = \exists y(P \cdot y \supset Q \cdot \cdot)$. Laat $h(A)$ het aantal gecentreerde punten zijn die voorkomen in $f(A)$ —bijvoorbeeld $h(\exists y(Pay \supset Qbx)) = 3$. Laat $g(A)$ de (mogelijk lege) string zijn die bekomen wordt door uit A door alle symbolen te verwijderen behalve voorkomens van individuele constanten en vrije voorkomens van individuele variabelen. Dus: $g(\exists y(Pay \supset Qbx)) = abx$, en $g(\exists y(Pxy \supset Qxx)) = xxx$. Tenslotte, laat de functies $g_i(A)$ staan voor het *ide* item in $g(A)$, waar $g_i(A)$ ongedefinieerd is voor $i < 1$ en $i > h(A)$. Bijvoorbeeld, $g_2(\exists y(Pay \supset Qbx)) = b$ en $g_4(\exists y(Pay \supset Qbx))$ is ongedefinieerd.

De taal $\mathcal{L}_\#$ wordt bekomen uit \mathcal{L} door het toevoegen van een verzameling nieuwe predikaten die, voor iedere $A \in \mathcal{F}$, een predikaat $P_{f(A)}^{h(A)}$ bevat. Dus P_P^0 en $P_{\forall x(Px \supset Qx)}^0$ zijn nieuw predikaten van rang 0, P_P^1 en $P_{\forall x(P \cdot \supset Qx)}^1$ zijn nieuwe predikaten van rang 1, etc. Laat, voor elke $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_\#^r$ de verzameling nieuwe predikaten van rang r zijn en laat $\mathcal{P}_\# = \mathcal{P}_\#^1 \cup \mathcal{P}_\#^2 \cup \dots$. Laat $\mathcal{F}_\#$ en $\mathcal{W}_\#$ staan voor respectievelijk de verzameling formules en de verzameling gesloten formules van $\mathcal{L}_\#$.

Om de karakterisering van de semantische systemen eenvoudiger te maken, introduceren we twee pseudotalen. Laat \mathcal{O} de verzameling *pseudoconstanten* zijn; \mathcal{O} moet minstens the kardinaliteit hebben van de grootste verzameling—het domein van een model is een verzameling en \mathcal{O} moet een naam bevatten voor ieder element van het domein. De pseudotaal ${}^+\mathcal{L}$ is gedefinieerd uit $\langle \mathcal{C} \cup \mathcal{O}, \mathcal{V}, \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \dots \rangle$. Laat ${}^+\mathcal{F}$ en ${}^+\mathcal{W}$ respectievelijk staan voor de verzameling formules en de verzameling gesloten formules van ${}^+\mathcal{L}$. Op een gelijkaardige wijze wordt de pseudotaal ${}^+\mathcal{L}_\#$ uit $\mathcal{L}_\#$ gedefinieerd. De verzameling formules van deze taal is ${}^+\mathcal{F}_\#$ en de verzameling van de gesloten formules is ${}^+\mathcal{W}_\#$.

Breid de functies f , g en h uit naar de pseudotalen ${}^+\mathcal{L}$ en ${}^+\mathcal{L}_\#$ door hen te laten verwijzen naar $\mathcal{C} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{V}$ in plaats van naar $\mathcal{C} \cup \mathcal{V}$. Laat $\mathcal{Z}^0 = \{f(A) \mid A \in {}^+\mathcal{W}; h(A) = 0\} \cup {}^+\mathcal{W}$ en, voor alle $r > 0$, $\mathcal{Z}^r = \{f(A) \mid A \in {}^+\mathcal{W}; h(A) = r\}$. $\mathcal{Z}_\#^0$ en $\mathcal{Z}_\#^r$ ($r > 0$) worden op gelijkaardige wijze gedefinieerd, waarbij ${}^+\mathcal{W}$ vervangen wordt door ${}^+\mathcal{W}_\#$. Breid ook f , h en de g_i uit naar de metataal op de standaard wijze.

In de semantische systemen, de toekenningsfuncties v zijn functies die aan elke $f(A)$ van de taal een verzameling van $h(A)$ -tupels van leden van het domein

toekennen. Dus, $v(f(P^2ab)) = v(P^2 \cdot \cdot)$ is een verzameling koppels. Als v een waarde zou moeten toekennen aan P^2 , zou men natuurlijk vereisen dat $v(P^2) = v(P^2 \cdot \cdot)$. Om deze reden zullen we, voor elke $\pi^r \in \mathcal{P}^r$, $v(\pi^r)$ identificeren met $v(\pi^r \cdot \dots)$ (waar \dots staat voor r gecentreerde punten). Bijgevolg is $\mathcal{P}^r \subset \mathcal{Z}^r$. Bovendien, een 0-tupel zal geïdentificeerd worden met \emptyset —zie, bijvoorbeeld, clause C2.1. Dus, als $h(\neg A) = 0$, $\langle v(g_1(\neg A)), \dots, v(g_h(\neg A)(\neg A)) \rangle$ is een 0-tupel, en wordt dus geïdentificeerd met \emptyset —zie, bijvoorbeeld, clause C2.3^{o=}.

Laat, voor elke $r > 0$, $D^{(r)}$ staan voor het r -de Cartesiaanse product van D en laat $D^{(0)} = \{\emptyset\}$.

Laat $\mathbb{P} \subset \mathcal{F}$ de verzameling formules waarin geen logische symbolen voorkomen (zelfs de identiteit niet), en laat $\mathbb{P}^= = \mathbb{P} \cup \{\alpha = \beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}\}$. Laat $\mathbb{P}^- = \mathbb{P} \cup \{\neg A \mid A \in \mathbb{P}\}$. We zullen de elementen van deze verzameling primitieve formules noemen. Laat ${}^+\mathbb{P}$ en ${}^+\mathbb{P}^=$ analoog gedefinieerd zijn in termen van ${}^+\mathcal{F}$ en $\mathcal{C} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{V}$. Ten slotte, laat ${}^m\mathbb{P}$ de verzameling metatalige formules zijn waarin geen logische symbolen voorkomen en ${}^m\mathbb{P}^=$ de verzameling van metatalige formules waarin geen logische symbolen voorkomen behalve de identiteit.

Het verdere gebruik van symbolen zal zichzelf uitwijzen, behalve (misschien) de volgende. ${}^m\mathcal{W}$ zal staan voor de verzameling van welgevormde metatalige formules (waarin alleen metavariablen en logische symbolen van de objecttaal voorkomen). We zullen de volgende metametatalige variabelen gebruiken: A en B als variabelen voor metatalige formules, P^r als een variabele voor metavariablen voor predikaten van rang r , a , b , c en d als variabelen voor metavariablen voor individuele constanten en individuele pseudoconstanten, en x als een variabele voor metavariablen voor individuele variabelen.

Een model M (voor de taal \mathcal{L}) is een paar $\langle D, v \rangle$ waarin D een niet-lege verzameling is. De toekenningfunctie v is als volgt:

$$\text{C1.1} \quad v: \mathcal{C} \cup \mathcal{O} \rightarrow D \quad (\text{waar } D = \{v(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\})$$

$$\text{C1.2} \quad v: \mathcal{Z}^r \rightarrow \wp(D^{(r)}) \quad (\text{voor elke } r \in \mathbb{N})$$

Voor **CL**, de valuatiefunctie $v_M: {}^+\mathcal{W} \rightarrow \{0, 1\}$, bepaald door M , is gedefinieerd door:

$$\text{C2.1} \quad v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ alss } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r) \quad (r \geq 0)^9$$

$$\text{C2.2} \quad v_M(\alpha = \beta) = 1 \text{ alss } v(\alpha) = v(\beta)$$

$$\text{C2.3} \quad v_M(\neg A) = 1 \text{ alss } v_M(A) = 0$$

$$\text{C2.4} \quad v_M(A \supset B) = 1 \text{ alss } v_M(A) = 0 \text{ of } v_M(B) = 1$$

$$\text{C2.5} \quad v_M(A \wedge B) = 1 \text{ alss } v_M(A) = 1 \text{ en } v_M(B) = 1$$

$$\text{C2.6} \quad v_M(A \vee B) = 1 \text{ alss } v_M(A) = 1 \text{ of } v_M(B) = 1$$

⁹Zoals hierboven bepaald, $\langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle = \emptyset$ als $r = 0$. Dus $v_M(\pi^0) = 1$ alss $v(\pi^0) = \{\emptyset\}$.

$$\text{C2.7} \quad v_M(A \equiv B) = 1 \text{ alss } v_M(A) = v_M(B)$$

$$\text{C2.8} \quad v_M(\forall \xi A(\xi)) = 1 \text{ alss } v_M(A(\alpha)) = 1 \text{ voor alle } \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$$

$$\text{C2.9} \quad v_M(\exists \xi A(\xi)) = 1 \text{ alss } v_M(A(\alpha)) = 1 \text{ voor ten minste een } \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$$

Voor dit en alle verdere semantische systemen zijn waarheid in een model, semantisch gevolg, en geldigheid gedefinieerd zoals gewoonlijk—we zullen $M \models A$ schrijven om uit te drukken dat M A verifieert. Zoals gewoonlijk wordt “model” in deze paragraaf (en in gelijkaardige passages verder in de tekst) zowel gebruikt om te verwijzen naar een model $M = \langle D, v \rangle$ in de strikte zin als om te verwijzen naar de evaluatiefunctie voor de specifieke logica, welke hier CL is.

Laat \bar{A} de verzameling zijn van niet-logische symbolen die voorkomen in A . Laat m een *instantiatiefunctie* zijn alss m elk symbool dat voorkomt in metatalige formules afbeeldt op een symbool of formule uit de objecttaal op zulke wijze dat elk logisch symbool afgebeeld wordt op zichzelf en elk niet-logisch symbool afgebeeld wordt op een symbool of formule waarvoor het een variabele is.

Laat $i(A)$ de verzameling zijn van alle formules $A \in \mathcal{L}^+$ zodat er een instantiatiefunctie m is, waarvoor geldt dat $m(A) = A$. A heeft de vorm A en B heeft de *overeenkomstige vorm* B alss er bestaat een instantiatiefunctie m zodat $m(A) = A$ en $m(B) = B$. We zullen de term *complexiteitsfunctie* gebruiken om te verwijzen naar een functie c met $c : {}^+\mathcal{F} \cup {}^m\mathcal{F} \mapsto \mathbb{N}$.

A restrictie con_A op een logische vorm $A \in {}^m\mathcal{W}$ is een metatalige voorwaarde (waarin A de enige (meta)variabele is) die A beperkt. Een instantiatiefunctie m beeldt con_A af op $con_{m(A)}$, wanneer $A = m(A)$. Laat $i(con_A)$ de verzameling zijn van alle formules $A \in \mathcal{L}^+$ zodat er een instantiatiefunctie m is waarvoor con_A geldt en $m(A) = A$.

Definitie 11 Een eindige verzameling Ψ van koppels $\langle A, con_A \rangle$, die bestaan uit een element van ${}^m\mathcal{W}$ en een restrictie hierop, is een volledige verzameling van beperkte logische vormen voor ${}^+\mathcal{L}$ alss $\bigcup \{i(con_B) \mid \langle B, con_B \rangle \in \Psi\} = {}^+\mathcal{L}$ en voor elke $\langle A, con_A \rangle, \langle B, con_B \rangle \in \Psi$, $i(con_A) \cap i(con_B) = \emptyset$.

Definitie 12 Een complexiteitsfunctie c is regulier met betrekking tot een volledige verzameling van beperkte logische vormen Ψ alss (1) $c(B(\xi)) = c(B(\psi)) = c(B(\alpha)) = c(B(\beta))$ voor iedere $B(\alpha) \in {}^+\mathcal{W}$, en (2) $c(B) < c(A)$ wanneer $c(B) < c(A)$, $\langle A, con_A \rangle \in \Psi$, $\langle B, con_B \rangle \in \Psi$, $\bar{B} \subseteq \bar{A}$, A heeft de vorm A , con_A geldt, B heeft de overeenkomstige vorm B , en con_B geldt.

Definitie 13 Een semantiek voor een logica L met taal \mathcal{L} is keurig alss (1) het heeft dezelfde toekenningsfunctie als de CL-semantiek hierboven en (2) er is (i) een volledige verzameling beperkte logische vormen Ψ voor ${}^+\mathcal{L}$ en (ii) een

complexiteitsfunctie die regulier is met betrekking tot Ψ , zodat:
 voor elke $\langle A, \text{con}_A \rangle \in \Psi$ is er een clause die de volgende vorm heeft:

$$[\text{als } \text{con}_A, \text{dan}] v_M(A) = 1 \text{ alss def} \quad (2.1)$$

waarin def een uitdrukking is die bestaat uit haakjes, voorkomens van “of” en “en”, en een of meer welgevormde semantische uitdrukkingen van de volgende vormen—de uitdrukking worden aangeduid door aanhalingstekens:

- (i) “ $v_M(B) = \dagger$ ” met $\dagger \in \{0, 1\}$, $c(B) < c(A)$, en $\bar{B} \subseteq \bar{A}$
- (ii) “ $v_M(B(b)) = \dagger$ voor alle $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” met $\dagger \in \{0, 1\}$, $c(B(x)) < c(A)$, en $\bar{B}(x) \subseteq \bar{A}$
- (iii) “ $v_M(B(b)) = \dagger$ voor tenminste 1 $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” met $\dagger \in \{0, 1\}$, $c(B(x)) < c(A)$, en $\bar{B}(x) \subseteq \bar{A}$
- (iv) “ $\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \dagger v(P^r)$ ” met $\dagger \in \{\in, \notin\}$ en $a_1, \dots, a_r, P^r \in \bar{A}$
- (v) “ $v(a) \dagger v(b)$ ” met $\dagger \in \{=, \neq\}$ en $a, b \in \bar{A}$,
- (vi,a) als L het RoI-schema volgt: “ $\langle v(g_1(B)), \dots, v(g_h(B)(B)) \rangle \dagger v(f(B))$ ” met $\dagger \in \{\in, \notin\}$, B is niet van de vorm $a = b$, en $\bar{B} \subseteq \bar{A}$,
- (vi,b) als L het RoI-schema niet volgt: “ $v(B) = \dagger$ ” met $\dagger \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, B is niet van de vorm $a = b$, en $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.
- (vii) “ $0 \dagger 0$ ” met $\dagger \in \{=, \neq\}$

Voor het bewijs van volgend theorema, zie appendix B.

Theorema 1 Een keurige semantiek is recursief.

Een verzameling logica's die een keurige semantiek hebben, zijn de C_i systemen ($i \in \mathbb{N}$) uit [50], verder bestudeerd in [51] en vele andere publicaties.

Hoofdstuk 3

Kort overzicht van de hoofdstukken

Sommige resultaten in dit werk lijken behoorlijk ver uit elkaar te liggen. Toch is er een duidelijke rode draad doorheen de thesis. Daarom leek het mij het best om kort de lijn te beschrijven die doorheen het doctoraat loopt, met de bedoeling de lezer wegwijs te maken.

Mijn doctoraat bestaat uit 4 grote delen: (1) een filosofische en technische inleiding, (2) een diepgaande technische studie van predikatieve prospectieve dynamieken voor klassieke logica, (3) Het gebruik van adaptieve logica's voor probleemoplossing, en (4) een korte conclusie.

3.1 Deel 1: Inleiding

De inleiding bevat een korte introductie tot de filosofische en technische bagage die nodig is om de opzet van het hele proefschrift te begrijpen. Ik heb de lezer in de vorige 2 hoofdstukken een crash course gegeven in het filosofische kader dat de formalisering van probleemoplossing motiveert. Dit kader staat reeds goed op zijn poten en behoeft geen verdere eigen inbreng, hoewel ik wel enkele eigen accenten naar voor breng, zonder echter tegen de kern in te gaan. Deze filosofisch inleiding wordt gevolgd door een hoofdstuk dat een minimale technische inleiding bevat tot het standaardformaat voor adaptieve logica's, de doelgerichte bewijzen en de zogenaamde *keurige semantiek*, een formaat voor een heel algemeen type deterministische tweewaardige semantieken. De drie

technische concepten vormen een fundamentele basis voor de rest van de verhandeling. Adaptieve logica's en doelgerichte bewijzen zijn het hoofdonderwerp van deze tekst, en de keurige semantieken zullen toelaten om doelgerichte bewijzen te ontwikkelen voor een zeer ruime klasse alternatieve logica's. Bovendien is ook de fundamentele logica **LA** uit het eerste deel van mijn doctoraat opgesteld binnen dit formaat.

3.2 Deel 2: Prospectieve dynamieken

Het tweede deel is volledig gewijd aan de doelgerichte bewijzen. Ik verruim daar het bestaande formalisme naar het predikatieve geval. Ik doe dit door in het eerste hoofdstuk van het tweede deel te beginnen met de constructie van een predikatieve logica die een semantiek, een fitch stijl regelsysteem en een axiomatisering oplevert voor de prospectieve bewijzen. Deze logica geeft een interessant inzicht in de structuur van de notie logische analyse. De doelgerichte bewijzen en de probleemoplossingsprocessen zijn geconstrueerd rond analyse. Dit is een belangrijk onderscheid met de klassieke visie op logica en redeneren. Klassiek-logische bewijzen vertrekken van de reeds aanwezige kennis en staan toe dat het redenerende subject om het even welke redeneerstap zet, zolang maar gegarandeerd wordt dat de waarheid van de reeds aanwezige kennis behouden blijft. Het zoeken naar wat afgeleid moet worden en waarom en hoe dit moet gebeuren (het bekomen van zinvolle problemen) werd traditioneel eerder gezien als een extralogische, psychologische kwestie. De formalisering van allerlei soorten menselijke probleemoplossing maakt duidelijk dat traditioneel synthetische redeneerstappen ook een belangrijke analytische component hebben. Vergelijk het voorlopig hiermee: als een schrijnwerker een trap construeert, dan creëert hij iets dat tot voor kort niet bestond. Nochtans doet hij dit niet zomaar omdat hij een ingeving krijgt, nee: hij heeft de bouwmethode van zijn voorgangers lange tijd geobserveerd en hij maakt een uitgebreide analyse van de concrete situatie waarin die trap moet worden opgetrokken. Hetzelfde geldt voor een redenerend subject. Er worden wel synthetische stappen ondernomen, maar deze blijken (als ze rationeel zijn) op een dieper niveau toch steeds te bestaan uit analytische stappen.

Een van de grootste voordelen van de analytische aanpak die de doelgerichte bewijzen volgen en die wordt geformaliseerd met behulp van de logica **LA**, is dat er geen sprake kan zijn van trivialiteit. Het wordt meestal als een tekortkoming en een paradox gezien dat met klassieke logica alles mag besloten worden uit een inconsistente premisseverzameling. Om evidente redenen is dit niet het geval wat analytische aanpakken betreft. Hoe zou het immers kunnen dat je door

het analyseren van een verzameling formules een triviale formule zou kunnen bekomen die niets te maken heeft met de premisseverzameling? Dit stelt ons in staat een paraconsistente logica CL^- te definiëren die alle klassieke gevolgen valideert van consistente premisseverzamelingen, niet-triviaal is en toch monotoon en even complex als klassieke logica; enkel ten koste van transitiviteit. Deze verrassende logica is definieerbaar binnen de prospectieve bewijzen en binnen **LA**. Dit betekent dat de logica bovendien ook over een keurige semantiek beschikt en axiomatiseerbaar is.

Het tweede hoofdstuk van het tweede deel definieert vervolgens de prospectieve bewijzen voor het predikatieve geval. Een aantal jaar geleden (toen ik nog maar pas werkzaam was op het Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie) hebben Dagmar Provijn en Diderik Batens gezocht naar een predikatieve versie voor dat bewijsformaat. Toen zijn er een aantal voorlopige varianten naar voor geschoven die elk hun voor- en nadelen hadden, en waarvoor nog geen volledigheidsbewijs uitgedacht was. Gebaseerd op deze voorstellen heb ik nu een mijn inziens elegantere versie ontwikkeld met een volledigheidsbewijs. In het betreffende hoofdstuk presenteer ik dit nieuwe bewijsformaat, bewijs dat het correct is, toon dat het binnen het **LA** kader valt en verklaar waarom deze versie meer voordelen heeft dan de reeds gedefinieerde versies.

Om het tweede deel af te ronden stel ik in het laatste hoofdstuk enkele pseudoformele technieken en ideeën voor technieken voor om te formaliseren hoe een redenerend subject kan leren uit vroegere (al dan niet succesvolle) probleemoplossingsprocessen. De voornaamste techniek die ik uit de doeken doe, moet het mogelijk maken dat met zekerheid afgeleide informatie uit het ene proces kan gebruikt worden ten behoeven van een ander proces. Concreet komt dit er op neer dat ten eerste afgeleide lijnen van vroegere doelgerichte bewijzen (met een andere doel, en eventueel andere premissen) kunnen geïntroduceerd worden in het huidige doelgerichte bewijs en ten tweede, en dit is hoogst ongebruikelijk, dat zekerheid over niet-afleidbaarheid kan aangewend worden voor verder gebruik binnen en buiten bewijzen. Hiervoor baseer ik me op de adaptieve logica voor compatibiliteit, ontwikkeld door Meheus en Batens.

Daarnaast geef ik in dat hoofdstuk ook een aanzet tot wat ik *inductie van heuristieken* noem. Hiervoor is het belangrijk dat de notie van (probleem-) oplossingsheuristiek wordt geformaliseerd, zodanig dat het mogelijk wordt om heuristische informatie (informatie over hoe het probleem (efficiënt) moet/kan opgelost worden) uit te drukken in de objecttaal. Eenmaal is bepaald hoe dit soort informatie kan geïntroduceerd worden in de bewijzen, kan ook uitgedacht worden hoe je die informatie kan veralgemenen. Hoewel er enkele duidelijke verschillen zijn tussen klassieke wetenschappelijke inductie (hiervoor is reeds een adaptieve

logica voorhanden) en doorgaans veel minder betrouwbare heuristische inductie, kan een gelijkaardig mechanisme aangewend worden om deze informatie te bekomen. Deze betrouwbaarheid wordt ook niet verwacht: heuristieken zijn slechts vuistregels. Ik geef in het betreffende hoofdstuk aanwijzingen over hoe en in welke mate de ideeën uit de inductieve adaptieve logica's kunnen aangewend worden voor de explicatie van redeneerprocessen die te maken hebben met het leren van heuristieken.

3.3 Deel 3: Adaptieve dynamieken

Dit deel behandelt de manieren waarop adaptieve logica's kunnen functioneren binnen formele probleemoplossingsprocessen. Het bestaat uit drie grote hoofdstukken. De meeste resultaten uit deze hoofdstukken zijn reeds neergeschreven in de vorm van publiceerbare artikels. Ik geef in het Nederlands een korte inleiding en overzicht van de allerbelangrijkste resultaten. Voor de echte inhoud verwijs ik naar de appendix van dit doctoraat, waarin de volledige Engelstalige versie van de artikels aanwezig is.

Het eerste hoofdstuk gaat dieper in op het incorporeren van adaptieve logica's in de prospectieve bewijzen. Dit is de belangrijkste stap die nodig is om toe te laten dat de adaptieve dynamieken die aanwezig zijn in de meeste probleemoplossingsprocessen ook kunnen geëxpliceerd worden binnen de f_{psp}'s. Het is dus de bedoeling van dit hoofdstuk om bewijsprocedures voor finale afleidbaarheid te creëren: een procedure die gegeven een premiseverzameling en een conclusie een adaptief bewijs genereert waarin de conclusie finaal afgeleid is. De aanpak die hierbij wordt gevolgd is modulair. Er zijn drie grote modules: de prospectieve bewijzen voor de onderlimietlogica, de prospectieve bewijzen voor conditionele afleidbaarheid en ten slotte de prospectieve bewijzen voor de adaptieve logica. Elke volgende module maakt gebruik van zijn voorgangers. De volledige algemene modulaire aanpak is uit de doeken gedaan in een artikel dat toegevoegd is in de appendix. In het betreffende hoofdstuk zal ik me concentreert op de toepassing van deze ideeën op zogenaamde keurige adaptieve logica's. Dit zijn adaptieve logica's met een onderlimietlogica die over een keurige semantiek beschikt en met abnormaliteiten die verwijzen naar het alternatieve gedrag van specifieke symbolen.

Het hoofdstuk vangt aan met de definitie van keurige adaptieve logica's. vervolgens presenteer ik prospectieve bewijzen voor logica's met een keurige semantiek. Gebaseerd op de resultaten uit het eerste hoofdstuk van het tweede deel over prospectieve bewijzen voor klassieke predikatenlogica en een artikel dat ik samen met D. Batens en K. Declercq heb geschreven (toegevoegd in de

appendix van dit doctoraat) over de embedding van logica's met een keurige semantiek in klassieke logica, worden prospectieve bewijzen gedefinieerd voor vele mogelijke onderlimietlogica's met een keurige semantiek. Vervolgens licht ik enkele technieken toe om prospectieve bewijzen voor conditionele afleidbaarheid te construeren voor keurige adaptieve logica's. Met behulp van de eerste twee modules kan met behulp van de resultaten van het algemene artikel in de appendix, een procedure bekomen worden om prospectieve bewijzen voor adaptieve logica's te construeren.

Het tweede hoofdstuk gaat over de algemene complexiteit van adaptieve logica's (niet over specifieke adaptieve logica's, maar over een grote groep typische adaptieve logica's). Gezien prospectieve bewijzen in feite procedures zijn, is het essentieel te weten wanneer de procedures al dan niet beslisbaar zijn, en als ze niet beslisbaar zijn, hoe complex ze dan zijn. Bovendien is het op z'n minst een interessante vraagstelling of een hoge complexiteit geen negatieve invloed heeft op de bruikbaarheid van adaptieve logica's en de fvsp's waarvan ze een onderdeel zijn. De analyse van de complexiteit geeft ook een beeld van de speltheoretische structuur van adaptieve logica's en hun procedures. Ik start in dat hoofdstuk met de opsomming van enkele belangrijk complexiteitsresultaten. Vervolgens ga ik kort in op hun betekenis. Voor de belangrijkste details en bewijzen voor dit hoofdstuk verwijs ik naar twee publicaties in *Synthese* over de complexiteit van adaptieve logica's toegevoegd in de appendix (1 van mezelf alleen en 1 van D. Batens, J. Meheus, K. De Clercq en mezelf).

De twee hoofdstukken kunnen gevat worden onder de noemer *computationele aspecten van adaptieve logica's*. Het derde hoofdstuk van dit deel bespreekt een heel andere thematiek. Voor de meeste alledaagse en voorwetenschappelijke problemen zijn veel relevante concepten (bij de probleemomschrijving en -oplossing) niet wel-gedefinieerd; er is geen scherpe grens tussen de objecten die in de extensie vallen en deze die erbuiten vallen. Er zijn veel verschillende logische aanpakken voor dit verschijnsel dat meestal *vaagheid* wordt genoemd. Toch zijn de bewijzen die deze logica's definiëren te streng om alledaagse redeneerprocessen te expliceren. Verschillende intuïtief aanvaardbare klassiek-logische gevolgen zijn niet langer geldig. S. van der Waart van Gulik en ikzelf stellen echter een alternatieve adaptieve aanpak voor, waarbij het redenerende subject klassiek-logisch kan redeneren, tot hij expliciet vaststelt dat de gebruikte concepten vaag zijn. Op dat moment moeten de problematische afleidingen terug ingetrokken worden. We hebben dit uitgewerkt in 2 artikels. Deze artikels zijn toegevoegd in de appendix van dit doctoraat en worden kort ingeleid in het Nederlands in het besproken hoofdstuk. Het eerste artikel bevat een generieke aanpak voor adaptieve logica's voor vaagheid, het tweede laat zien hoe

deze logica's ook als een zinnige aanpak kunnen functioneren voor de cruciale sorites-paradoxen van vaag taalgebruik.

3.4 Deel 4: Conclusie

In de conclusie geef ik een overzicht van de nog openstaande problemen en de toekomst van het onderzoek naar de formalisering van probleemoplossingsprocessen.

Deel II

Prospectieve dynamiek bij probleemoplossing

Hoofdstuk 4

De paraconsistente logica's CL^- en LA

4.1 Inleiding

Het prospectieve bewijssysteem voor klassieke logica, propositioneel gedefinieerd in hoofdstuk 2 en predikatief gedefinieerd en besproken in volgend hoofdstuk, geeft aanleiding tot het definiëren van een nieuwe paraconsistente logica CL^- : $Cn_{CL^-}(\Gamma)$ wordt gedefinieerd als de verzameling van alle formules waarvoor een prospectief bewijs uit Γ bestaat, zonder gebruik te maken van de EFQ-regel. Ik gebruik hier de term *paraconsistente logica* voor gevolgrelaties (met een bewijstheorie) die voor inconsistente premissen niet tot trivialiteit leiden¹. CL^- is een zeer sterke paraconsistente logica. Hoewel het systeem niet complexer is dan klassieke logica, zijn de CL^- -gevolgen voor alle consistente premisseverzamelingen identiek aan de CL -gevolgen (zie [41]). Dit is op z'n minst merkwaardig te noemen. Het is niet moeilijk een paraconsistente logica te ontwikkelen met alle klassieke gevolgen voor het consistente geval, maar doorgaans zijn deze systemen niet-monotoon en hierdoor veel complexer dan klassieke logica.

Men kan bijvoorbeeld de volgende (wat simplistische) paraconsistente gevolgrelatie P ontwikkelen: $\Gamma \vdash_P A$ als $A \in \Gamma$ of $(\Gamma \not\vdash_{CL} A \wedge \neg A$ en $\Gamma \vdash_{CL} A)$. De lezer kan nagaan dat het ook niet zeer moeilijk is om voor een dergelijk sys-

¹Van een logica die niet paraconsistent is, zal ik zeggen dat ze explosief is of EFQ (ex falso quotlibet: $A, \neg A \vdash B$) valideert

teem een (dynamische) bewijstheorie te ontwikkelen. Dit systeem heeft de mooie aspecten van klassieke logica, zonder de meest rampzalige kant. Toch is dit systeem niet bruikbaar als alternatief voor klassieke logica. Het is namelijk veel complexer dan klassieke logica en zelfs de klassiek meest eenvoudige stap, zoals het toepassen van adjunctie, kan al enorme berekeningen vergen.

Dergelijke systemen kunnen zeer zinvol zijn om het redeneerproces te modeleren van subjecten die geconfronteerd worden met expliciete inconsistenties en hun theorie wensen te corrigeren en daarbij zoveel mogelijk informatie wensen te behouden. Adaptieve logica's zijn vermoedelijk de beste voorbeelden van dergelijke systemen. Deze logica's zijn dan ook zeer complex in vergelijking met klassieke logica. In hoofdstukken 8 leg ik uit waarom deze complexiteit geen bezwaar kan vormen voor de bruikbaarheid van adaptieve logica.

Er bestaan andere paraconsistente logica's, die net als CL , monotoon, reflexief en transitief zijn, met een complexiteit die niet hoger is (of zelfs lager is) dan deze van klassieke logica. Dit zijn omwille van hun eenvoud en elegantie zeer nuttige tools bij de ontwikkeling van andere logica's, maar ze maken elk op hun beurt belangrijke algemeen aanvaarde regels van klassieke logica ongeldig. Indien de motivatie de oplossing betreft van andere paradoxen en problemen van CL (dan explosie), kan dat zeer zinvol zijn. Echter, als deze logica's enkel een oplossing willen bieden voor de explosiviteit van CL , is de filosofische verantwoording voor deze beslissingen meestal nogal flauw en weinig onderbouwd. Men begint te argumenteren waarom deze of gene verzameling klassieke regels zeer intuïtief en belangrijk zijn en stelt vervolgens vast dat men de overgebleven regels dan wel moet laten vallen omdat men anders toch weer trivialiteiten zou bekomen. Dit discours is wat willekeurig, want ELKE basisregel van klassieke logica is verdedigbaar en het hangt er maar van af voor welke deelverzameling je een persoonlijk voorkeur hebt. Deze logica's zijn dus ook geen goede paraconsistente alternatieve voor klassieke logica, en wel omdat ze veel te voorzichtig zijn met betrekking tot algemeen aanvaarde redeneervormen. Geen enkele wiskundige of wetenschapper zal bijvoorbeeld problemen hebben met de toepassing van disjunctief syllogisme omdat hij weet dat zijn theorie wel eens inconsistent zou kunnen zijn.

Blijkbaar vormt CL^- een gulden middenweg tussen beide paraconsistente tradities. Het procedurele aspect van de logica zorgt er schijnbaar voor dat EFQ zonder problemen kan geïsoleerd worden uit CL , wat resulteert in een logica die zeker niet complexer is dan CL en bovendien alle CL -gevolgen van consistente premissen valideert en op een bepaalde manier dus ook alle primitieve CL -regels toelaat. De enige opofferingen die men hiervoor moet doen, lijken transitiviteit en het standaard deductieve karakter van de logica (te vervangen

door een procedurele doelgerichte aanpak) te zijn.

Ik zal hier laten zien dat procedurele bewijzen geen noodzaak zijn om deze logica te definiëren. Dit doe ik door een axiomatisering en een fitch-stijl regelsysteem te presenteren voor deze logica CL^- . Ik zal dit laten zien door te tonen dat de prospectieve bewijzen zonder de EFQ-regel kunnen ingebed worden in een reguliere monotone, transitieve en reflexieve zwakke paraconsistente logica LA die probleemloos axiomatiseerbaar is. LA blijkt in feite de eigenlijke logica te zijn achter de prospectieve bewijzen en definieert een semantiek voor afzonderlijke lijnen van deze bewijzen (zie volgend hoofdstuk). Maar LA is ook een zinvolle logica op zichzelf. De logica kan immers gezien worden als de explicatie van de notie ‘klassiek-logische analyse’. De logica legt vast welke gevolgen je kan bekomen door middel van zuivere analyse. Concreet betekent dit dat de logica alles toelaat behalve de constructie van nieuwe, meer complexe formules. We lichten dit toe door de klassiek-logische fitch-stijl regels onder te verdelen in analytische en niet analytische regels. Beschouw de regels additie, adjunctie, introductie van de implicatie, introductie van dubbele negatie en voorwaardelijk bewijs (respectievelijk $A/A \vee B$, $A, B/A \wedge B$, $\neg A/A \supset B$, $B/A \supset B$, $A/\neg\neg A$ en als B afgeleid is in een voorwaardelijk bewijs uit hypothese A , besluit tot $A \supset B$). Elke regel in dat rijtje construeert een nieuwe formule door bestaande of nieuwe formules te nemen en er een logisch symbool tussen te plaatsen. De lokale conclusie van de regel noch zijn negatie zijn subformules van de lokale premissen. Dit is anders voor de regels modus ponens, transitiviteit, modus tollens en disjunctief syllogisme (respectievelijk $A, A \supset B/B$, $A \supset B, B \supset C/A \supset C$, $A, \neg B \supset \neg A/B$ en $\neg A, A \vee B/B$), waarbij geen nieuwe complexere formules worden gecreëerd.

In normale klassieke bewijzen worden constructieve en analytische regels door elkaar gebruik. In prospectieve bewijzen echter, gebruikt men daarentegen enkel analytische stappen. Toch zijn dergelijke bewijzen in staat dezelfde gevolgen af te leiden als klassieke bewijzen. Dit komt omdat ook het doel wordt geanalyseerd. Vanuit het klassieke niet-doelgerichte standpunt is de analyse van het doel in feite een constructieve stap (elementen bekomen uit de premissen worden opgebouwd tot de doelformule).

Wat is nu zo anders aan prospectieve bewijzen (tegenover klassieke bewijzen) dat het mogelijk is dat explosie in de prospectieve bewijzen wel kan geïsoleerd worden? Men zou kunnen stellen dat prospectieve bewijzen niet toestaan dat een formule, nadat hij geconstrueerd is, terug wordt geanalyseerd. Klassieke bewijzen staan dit wel toe, maar dit is blijkbaar niet noodzakelijk om dezelfde gevolgen te bekomen (althans voor consistente premisseverzamelingen). Elke manier om met intuïtieve klassieke regels explosie ($A, \neg A/B$) af te leiden veron-

derstelt de analyse van een geconstrueerde formule. We geven twee voorbeelden van eenvoudige manieren om explosie af te leiden. Zowel in dit bewijs:

1 p	Premise
2 $\neg p$	Premise
3 $p \vee q$	1; Additie
4 q	2,3; Disjunctief syllogisme

als in dit bewijs

1 p	Premise
2 $\neg p$	Premise
3 $ \neg q$	Hypothese
4 $ p$	1; Reïteratie
5 $\neg q \supset p$	3, 4; Voorwaardelijk bewijs
6 q	2,5; Modus tollens

bemerken we dat respectievelijk de formules $p \vee q$ en $\neg q \supset p$ eerst worden geconstrueerd en daarna opnieuw worden geanalyseerd. Precies dit is niet toegelaten in de prospectieve bewijzen en in het systeem dat we in dit hoofdstuk presenteren. Op deze wijze wordt dus explosie (en alleen explosie) verwijderd uit de klassieke logica.

We geven twee versies van LA. Ze hebben beide dezelfde semantiek en definiëren beide dezelfde gevolgrelatie, behalve dat het eerste systeem een extra implicatie bevat. De eerste versie is een axiomatisering met een extra paraconsistente implicatie. De tweede versie is geformuleerd in de vorm van een fitch-stijl bewijssysteem. De taal is gelijk aan de taal van klassieke logica, behalve dat sommige formules kunnen voorafgegaan worden door een $+$. Dit symbool maakt duidelijk dat de formule het gevolg is van een constructieve stap. Zoals hierboven duidelijk gemaakt is, mag een geconstrueerde formule niet terug geanalyseerd worden. Het $+$ teken moet dus in feite gewoon duidelijk maken dat de formule waaraan het teken voorafgaat niet meer mag geanalyseerd worden. CL^- kan in een dergelijk systeem ingebed worden door uit een stel premissen alle formules af te leiden die voorafgegaan worden door een $+$ teken. De formules die niet door een $+$ voorafgegaan worden, zijn de zuivere analytische gevolgen. De $+$ zorgt ervoor dat ook constructies toegelaten zijn (maar geen analyse van geconstrueerde formules, anders zou het systeem weer explosie toelaten). Het fitch-stijl systeem bevat allemaal regels die (op de $+$ -symbolen na) heel natuurlijk zijn in klassieke fitch-stijl bewijssystemen. Het enige verschil is dat voor

constructieve regels de lokale conclusie voorafgegaan moet worden door een $+$ en dat analyserende regels niet mogen inwerken op formules die voorafgegaan worden door een $+$. Om te garanderen dat alle klassieke gevolgen kunnen afgeleid worden uit consistente premisseverzamelingen, zijn er meerdere primitieve regels nodig dan in klassieke logica, maar elke afzonderlijke regel is (na weglating van de $+$ -symbolen) een afgeleide regel in een klassiek fitch-stijl systeem.

Het eerste bewijssysteem voor LA dat in dit hoofdstuk gedefinieerd wordt, heeft een extra paraconsistente implicatie en is gedefinieerd in de vorm van een axiomatisch systeem. Een extra voordeel van dit rijker systeem is dat de lijnen van prospectieve bewijzen onmiddellijk kunnen vertaald worden naar lijnen van de bewijzen die door dit systeem gedefinieerd worden. Dit systeem leert ons ook iets over de semantiek van lijnen van prospectieve bewijzen en levert een verantwoording voor de invoering van het $+$ -symbool in de prospectieve bewijzen.

CL^- is reeds enige tijd ontdekt door D. Batens ([33] en [26]). De bijdrage van dit hoofdstuk bestaat erin dat (1) het systeem nu ook voor predikatenlogica gedefinieerd is, (2) een deterministische semantiek krijgt, (3) een paraconsistente implicatie definieert en (4) aangetoond wordt dat de logica voor bepaalde contexten veel beter dienst doet dan gebruikelijke paraconsistente logica's als alternatief voor klassieke logica. Mijns inziens is de belangrijkste verdienste van de aanpak in dit hoofdstuk echter dat (5) er een traditioneel regelsysteem kan gedefinieerd worden. Op deze manier wordt het onmiddellijk duidelijk dat CL^- een traditionele logica is. Bijgevolg is transitiviteit de enige opoffering die men moet maken om klassieke logica te genezen van zijn explosieve karakter. Blijkbaar hoeven noch de gevolgen van consistente theorieën, noch de monotonicititeit, noch de reflexiviteit, noch het beschikken over een positieve test opgegeven te worden om een explosievrije variant van klassieke logica te bekomen.

Ik begin met de presentatie van de taal en de semantiek van LA en CL^- . Vervolgens geef ik de axiomatisering van deze logica. In de daaropvolgende sectie doe ik het fitch-stijl regelsysteem uit de doeken. Ten slotte bespreek ik de mogelijkheid om met behulp van LA een nieuwe adaptieve logica te definiëren.

4.2 Taal van de logica's LA en CL^-

We onderscheiden 3 talen. $\rightarrow\mathcal{L}$, $+\mathcal{L}$ en \mathcal{L} . \mathcal{L} is de gebruikelijke predikatieve CL -taal, met conjunctie \wedge , disjunctie \vee , implicatie \supset , negatie \neg , existentiële kwantor \exists , universele kwantor \forall en identiteit $=$. $\rightarrow\mathcal{L}$ bevat naast de symbolen van \mathcal{L} ook de unaire operator $+$. In deze taal komt $+$ alleen en maximaal 1 maal voor aan de buitenkant van formules (alle formules zijn van de vorm A of $+A$, waarbij $A \in \mathcal{L}$). $\rightarrow\mathcal{L}$ bevat, naast de symbolen van $+\mathcal{L}$ ook de binaire operator \rightarrow . Het symbool \rightarrow

komt enkel voor aan de buitenkant van formules en staat voor de alternatieve, paraconsistente implicatie. Het symbool $+$ is cruciaal binnen deze logica, en heb ik in de vorige sectie reeds toegelicht. We hanteren de volgende conventie voor haakjes bij het gebruik van het $+$ -symbool: in de taal $\rightarrow\mathcal{L}$ schrijven we steeds haakjes rond de A in formules van de vorm $+A$ als er verwarring kan zijn en in de taal $+\mathcal{L}$ komen de $+$ -symbolen steeds voor aan de buitenkant van formules en dus kunnen we de haakjes steeds weglaten.

Natuurlijk verandert ook de logica zelf als de taal uitgebreid wordt. Vandaar dat we zullen spreken van LA en LA_f , afhankelijk van welke taal bedoeld wordt. De taal van LA is $\rightarrow\mathcal{L}$ en de taal van LA_f is $+\mathcal{L}$. LA_{fp} is hetzelfde systeem als LA_f , maar dan zonder $+$ -symbolen in de premissen. Voor LA zal ik een axiomatisering presenteren en voor LA_f en LA_{fp} definieer ik een regelsysteem voor fitch-stijl bewijzen en een proceduraal regelsysteem voor prospectieve bewijzen (zie volgend hoofdstuk). In de technische beschrijving en bewijzen hieronder zullen we niet meer spreken over CL^- . Deze logica heeft \mathcal{L} als taal en is gedefinieerd d.m.v.:

Definitie 14 *De logica CL^- .*

$$\Gamma \vdash_{CL^-} A \text{ alss } \Gamma \vdash_{LA} +A$$

De bewijstheorie en semantiek van CL^- worden onmiddellijk overgeërfd van LA_{fp} .

4.3 Afkortingen

- (i) $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele variabelen
- (iia) $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e, a_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele constanten
- (iib) $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele pseudoconstanten. Deze worden verondersteld niet voor te komen in premissen of conclusies. Ze komen niet voor in \mathcal{L} .
- (iii) $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, T, P_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor predikatieve constanten

\mathcal{F} zal staan voor de open en gesloten formules van \mathcal{L} . De gesloten formules van \mathcal{L} worden aangeduid met \mathcal{W} . \mathbb{P} staat voor de formules van \mathcal{L} waarin geen logische symbolen voorkomen (ook niet de identiteit). \mathbb{P}^\neg is de verzameling

van elementen van \mathbb{P} en hun negaties. $\mathbb{P}^=$ is de verzameling van alle primitieve formules van \mathcal{L} . ${}^o\mathcal{L}$ is de taal verrijkt met pseudoconstanten². Als andere verzamelingen formules worden voorafgegaan door een o , zijn dit ook de met pseudoconstanten verrijkte versies van de originele verzamelingen.

De notatie $*A$ staat voor B als A van de vorm $\neg B$ is en voor $\neg A$ als A van niet van deze vorm is.

a	a₁	a₂		b	b₁	b₂
$A \wedge B$	A	B		$\neg(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\neg(A \equiv B)$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(B \supset A)$
$\neg(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\neg(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$\neg\neg A$	A	A				

c	$A_c(\alpha)$		d	$A_d(\alpha)$
$\forall\xi B(\xi)$	$B(\alpha)$		$\exists\xi B(\xi)$	$B(\alpha)$
$\neg\exists\xi B(\xi)$	$*B(\alpha)$		$\neg\forall\xi B(\xi)$	$*B(\alpha)$

Tabel 4.1: a, b, c en d-formules in LA

4.4 Tweewaardige deterministische semantiek voor LA

In deze sectie geef ik de semantiek van LA, de semantiek voor LA_f is exact hetzelfde, behalve dat de taal van dat systeem niet over een \rightarrow -implicatie beschikt. De andere symbolen hebben dezelfde betekenis. De semantiek is een voorbeeld van een zogenaamde keurige semantiek (zie hoofdstuk 2). Ik volg volkomen het daar gedefinieerde formaat voor logica's die het RoI-schema volgen. Voor de betekenis van de gebruikte symbolen verwijs ik dan ook naar dat hoofdstuk.

Om de clausules die ik zal opsommen goed te begrijpen is het belangrijk in te zien dat lemma 2 moet gelden en dat de clausules een negatie-glut definiëren voor de primitieve formules. Voor alle andere symbolen (ook dubbele negaties) is er een gap, maar geen glut. Dit maakt het mogelijk om bijvoorbeeld uit $A \wedge B$ wel A en B af te leiden, maar niet toe te laten dat uit A en B $A \wedge B$ wordt afgeleid.

De toekenningsfunctie is gedefinieerd als volgt:

²In hoofdstuk 2 geef ik deze verrijking de naam ${}^+\mathcal{L}$, de betekenis is echter exact hetzelfde, maar ik wou de ${}^+$ -notatie vermijden om verwarring met het logische symbool $+$ te voorkomen.

- (i) $v: \mathcal{C} \cup \mathcal{O} \rightarrow D$ (met $D = \{v(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\}$)
(ii) $v: \mathcal{Z}^r \rightarrow \wp(D^{(r)})$ (voor iedere $r \in \mathbb{N}$)

Het is belangrijk hierbij te onthouden dat predikaten π^k gelijk gesteld worden aan de objecten in \mathcal{Z}^k : $\pi^k = \pi^k \cdot \dots$. Op deze manier worden de predikaten dus ook afgebeeld op hun extensie in punt (ii) van de definitie van de toekenningsfunctie.

$v_M: \mathcal{W} \mapsto \{0, 1\}$, waar $M = \langle D, v \rangle$, wordt als volgt gedefinieerd:

- S1 $v_M(\pi\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) = 1$ alss $\langle v(\alpha_1), v(\alpha_2), \dots, v(\alpha_n) \rangle \in v(\pi)$
S2 $v_M(\neg\pi\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n) = 1$ alss $\langle v(\alpha_1), v(\alpha_2), \dots, v(\alpha_n) \rangle \notin v(\pi)$ of $\langle v(\alpha_1), v(\alpha_2), \dots, v(\alpha_n) \rangle \in v(f(\neg\pi\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n))$
S3 $v_M(+A) = 1$ alss $v_M(A) = 1$, waar $A \in \mathbb{P}^-$
S4 $v_M(\mathbf{b}) = 1$ alss ($\langle v(g_1(\mathbf{b})), \dots, v(g_{h(\mathbf{b})}(\mathbf{b})) \rangle \in v(f(\mathbf{b}))$ en $(v_M(+ * \mathbf{b}_1) = 0$ of $v_M(\mathbf{b}_2) = 1)$ en $(v_M(+ * \mathbf{b}_2) = 0$ of $v_M(\mathbf{b}_1) = 1)$) of $(v_M(+ * \mathbf{b}_1) = 0$ of $v_M(+ * \mathbf{b}_2) = 0)$
S5 $v_M(+\mathbf{b}) = 1$ alss $v_M(+\mathbf{b}_1) = 1$ of $v_M(+\mathbf{b}_2) = 1$
S6 $v_M(\mathbf{a}) = 1$ alss ($\langle v(g_1(\mathbf{a})), \dots, v(g_{h(\mathbf{a})}(\mathbf{a})) \rangle \in v(f(\mathbf{a}))$ en $v_M(\mathbf{a}_1) = 1$ en $v_M(\mathbf{a}_2) = 1$) of $(v_M(+ * \mathbf{a}_1) = 0$ en $v_M(+ * \mathbf{a}_2) = 0)$
S7 $v_M(+\mathbf{a}) = 1$ alss $v_M(+\mathbf{a}_1) = 1$ en $v_M(+\mathbf{a}_2) = 1$
S8 $v_M(A \rightarrow B) = 1$ alss $v_M(A) = 0$ of $v_M(B) = 1$
S9 $T_M(b) =_{df}$ er is een n -air predikaat π en $a_1, \dots, a_{n-1} \in D$, waarvoor geldt dat $\langle a_1, \dots, a_i, b, a_{i+1}, \dots, a_{n-1} \rangle \in v(\pi) \cap v(\neg\pi)$
S10 $v_M(\alpha = \beta) = 1$ alss $v(\alpha) = v(\beta)$ en ($\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(=)$ of $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \notin v(+\neg =)$)
S11 $v_M(+\alpha = \beta) = 1$ alss $v(\alpha) = v(\beta)$
S12 $v_M(\neg(\alpha = \beta)) = 1$ alss ($\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(\neg =)$ en $(T_M(v(\alpha))$ of $v(\alpha) \neq v(\beta)$ of $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(+\neg =)$) of $v(\alpha) \neq v(\beta)$)
S13 $v_M(+\neg(\alpha = \beta)) = 1$ alss $v(\alpha) \neq v(\beta)$ of $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(+\neg =)$ of $T_M(v(\alpha))$
S14 $v_M(\mathfrak{d}) = 1$ alss (er bestaat een $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, zodat $v_M(A_{\mathfrak{d}}(\beta)) = 1$ en $\langle v(g_1(\mathfrak{d})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{d})}(\mathfrak{d})) \rangle \in v(f(\mathfrak{d}))$) of er bestaat een $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ zodat $v_M(+ * A_{\mathfrak{d}}(\beta)) = 0$
S15 $v_M(+\mathfrak{d}) = 1$ alss er bestaat een $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ waarvoor geldt dat $v_M(+A_{\mathfrak{d}}(\beta)) = 1$
S16 $v_M(\mathfrak{c}) = 1$ alss (voor alle $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, $v_M(A_{\mathfrak{c}}(\beta)) = 1$ en $\langle v(g_1(\mathfrak{c})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{c})}(\mathfrak{c})) \rangle \in v(f(\mathfrak{c}))$) of voor alle $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ geldt dat $v_M(+ * A_{\mathfrak{c}}(\beta)) = 0$
S17 $v_M(+\mathfrak{c}) = 1$ alss voor iedere $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ geldt dat $v_M(+A_{\mathfrak{c}}(\beta)) = 1$

Lemma 1 Voor elke formule $A(\alpha)$ waarin enkel α vrij voorkomt en elk model $M = \langle v, D \rangle$, zodat $M \models \{+A(\alpha), +\neg A(\alpha)\}$, geldt dat $T_M(v(\alpha))$.

Lemma 2 *Uitgesloten derde.* Voor alle formules A en alle modellen M geldt: als $v_M(+\neg A) = 0$, dan $v_M(A) = 1$ en als $v_M(+A) = 0$, dan $v_M(\neg A) = 1$.

Bewijs. Onmiddellijk gegeven de semantische clausules van LA en het feit dat als $*\alpha = \beta$ dan $*\alpha_1 = \beta_1$ en $*\alpha_2 = \beta_2$ en het feit dat als $*\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, dan $A_{\mathfrak{d}}(\alpha) = *A_{\mathfrak{c}}(\alpha)$.

■

Definitie 15 *Waarheid in een model.*

$M \models_{\text{LA}} A$ alss $v_M(A) = 1$.

Definitie 16 *Semantisch LA-en LA_f-gevolg.*

$\Gamma \models_{\text{LA}} A$ alss in alle modellen M waarvoor geldt dat $M \models_{\text{LA}} B$ voor alle $B \in \Gamma$, $M \models_{\text{LA}} A$.

Definitie 17 *Semantisch CL⁻-gevolg.*

$\Gamma \models_{\text{CL}^-} A$ alss $\Gamma \models_{\text{LA}} +A$

4.5 Axiomatisering van LA

Zoals reeds vermeld, zijn de voordelen van de paraconsistente logica CL⁻ maar mogelijk omdat wat deze logica betreft, logische analyse een belangrijke rol speelt. Dit werd duidelijk vanuit de procedurele aanpak van de prospectieve bewijzen. In deze bewijzen zagen we dat de synthetische fase strikt gescheiden was van de analytische. Eenmaal een complexere formule geconstrueerd is (synthese) kan deze niet meer opnieuw afgebroken worden (analyse). Dit betekent ook onmiddellijk dat de gevolgrelatie niet meer transitief kan zijn: als elk gevolg A opnieuw als premisse zou kunnen gebruikt worden, zou A (een formule die eventueel geconstrueerd is) weer kunnen geanalyseerd worden. In dat geval zou de regel kunnen overtreden worden dat een geconstrueerde formule niet meer geanalyseerd mag worden.

De logica LA, waarmee we CL⁻ definiëren, is wel transitief. Dit is mogelijk omwille van het feit dat de CL⁻-gevolgen in LA moeten voorafgegaan worden door een +-symbool ($A \vdash_{\text{LA}} +B$ en $B \vdash_{\text{LA}} +C$ impliceren niet dat $A \vdash_{\text{LA}} +C$, hoewel het volgende wel geldt: als $A \vdash_{\text{LA}} B$ en $B \vdash_{\text{LA}} +C$ dan $A \vdash_{\text{LA}} +C$).

Dit zal ik in deze sectie aantonen door een axiomatisering te geven.

4.5.1 Axioma's

De axioma's van LA zijn de volgende.

- AS1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- AS2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- AS3 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- AS4 $(*b_1 \rightarrow +b_2) \rightarrow +b$
- AS5 $(*b_2 \rightarrow +b_1) \rightarrow +b$
- AS6 $(+A \rightarrow *A) \rightarrow *A$
- AS7 $(+ * A \rightarrow A) \rightarrow A$
- AS9 $A \rightarrow +A$
- AS10 $+a_1 \rightarrow (+a_2 \rightarrow +a)$
- AS11 $b \rightarrow (+ * b_1 \rightarrow b_2)$
- AS12 $b \rightarrow (+ * b_2 \rightarrow b_1)$
- AS13 $a \rightarrow a_1$
- AS14 $a \rightarrow a_2$
- AS15 $+a \rightarrow +a_1$
- AS16 $+a \rightarrow +a_2$
- AS17 $+A \rightarrow A$ wanneer $A \in \mathbb{P}$
- AS18 $+ \neg A \rightarrow \neg A$ wanneer $A \in \mathbb{P}$
- AS19 $+b \rightarrow ((+b_1 \rightarrow +b_2) \rightarrow +b_2)$
- AS20 $+b \rightarrow ((+b_2 \rightarrow +b_1) \rightarrow +b_1)$
- AS21 $+a = \beta \rightarrow (A(a) \rightarrow A(\beta))$
- AS22 $+A(\alpha) \rightarrow (+ * A(\beta) \rightarrow + \neg \alpha = \beta)$
- AS23 $+(\alpha = \alpha)$
- AS24 $c \rightarrow A_c(\beta)$
- AS25 $+A_d(\beta) \rightarrow +d$
- AS26 als $\vdash A \rightarrow +A_c(\beta)$ en β komt niet voor in A , dan $\vdash A \rightarrow +c$
- AS27 $(+A_d(\beta) \rightarrow B) \rightarrow (+d \rightarrow B)$ als β niet voorkomt in $A_d(\alpha)$, B of in de premissen
- AS28 $+c \rightarrow +A_c(\beta)$
- AS29 $(A_d(\beta) \rightarrow B) \rightarrow (d \rightarrow B)$ als β niet voorkomt in $A_d(\alpha)$, B of in de

premissen

Het hierboven gedefinieerde systeem bevat twee implicaties. Men zou de implicatie \supset kunnen zien als de materiële implicatie. (Sub)formules van de vorm $A \supset B$ hebben immers identiek dezelfde betekenis als formules van de vorm $\neg A \vee B$ (indien alle subformules van de vorm $A \supset B$ in Γ en G vervangen worden door $\neg A \vee B$ resulterende in Γ' en G' , dan $\Gamma \vdash_{\text{LA}} G$ als $\Gamma' \vdash_{\text{LA}} G'$). Bovendien is het deze implicatie waarmee volledige CL^- kan gedefinieerd worden en dit betekent dat, althans voor consistente premisseverzamelingen, de implicatie \supset de klassiek-logische betekenis heeft.

De andere implicatie \rightarrow kan gezien worden als de zwakke paraconsistente implicatie waarvoor $\not\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ en ook $\not\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, maar ook $\not\vdash A \rightarrow (A \vee B)$. Met behulp van deze implicatie kan een interessantere implicatie \rightsquigarrow gedefinieerd worden ($A \rightsquigarrow B =_{df} A \rightarrow +B$).

4.5.2 Voorbeeld

Voorbeeld: $\forall x \exists y (Px \supset Qy) \vdash_{\text{LA}} +(\exists x Px \supset \exists y Qy)$.

1	$\forall x \exists y (Px \supset Qy)$	Prem
2	$\forall x \exists y (Px \supset Qy) \rightarrow \exists y (Pa \supset Qy)$	5; AS24
3	$\exists y (Pa \supset Qy)$	MP; 1,2
4	$(Pa \supset Qb) \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)$	AS11
4a	$Pa \rightarrow +Pa$	AS9
4b	$(+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb))$	AS1
4c	$(Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	AS2
4d	$(Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow$ $((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow$ $((Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))))$	AS1
4e	$(+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow$ $((Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)))$	MP; 4c,4d
4f	$((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow$ $((Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)))) \rightarrow$ $((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb))) \rightarrow$ $((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)))$	AS2
4g	$((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb))) \rightarrow$ $((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)))$	MP; 4e,4f
4h	$(+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	MP; 4b,4g
4i	$((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))) \rightarrow$ $((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +Pa)) \rightarrow$ $((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	AS2
4j	$((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +Pa)) \rightarrow$	

	$((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	MP; 4h, 4j
4k	$(Pa \rightarrow +Pa) \rightarrow ((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +Pa))$	AS1
4l	$(+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +Pa)$	MP; 4a,4k
4m	$(+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)$	MP; 4j,4l
4n	$((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow ((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)))$	AS1
4o	$(Pa \supset Qb) \rightarrow ((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	MP; 4m,4n
4p	$((Pa \supset Qb) \rightarrow ((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow ((+Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)))$	AS2
4q	$((Pa \supset Qb) \rightarrow (+Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	MP; 4o,4q
4r	$((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb))$	MP; 4,4q
5	$Qb \rightarrow +\exists yQy$	AS25
6	$(Qb \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow (Pa \rightarrow (Qb \rightarrow +\exists yQy))$	AS1
7	$Pa \rightarrow (Qb \rightarrow +\exists yQy)$	MP; 5,6
8	$(Pa \rightarrow (Qb \rightarrow +\exists yQy)) \rightarrow ((Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy))$	AS2
9	$(Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy)$	MP; 7,8
10	$(Pa \supset Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy))$	AS1
11	$((Pa \supset Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy))) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy))$	AS2
12	$((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)) \rightarrow ((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy))$	MP; 10,11
13	$(Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy)$	MP; 4r,12
14	$(Pa \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy)$	AS27
15	$((Pa \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy)) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy)))$	AS1
16	$(Pa \supset Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy))$	MP; 14,15
17	$((Pa \supset Qb) \rightarrow ((Pa \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy))) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy)) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy))$	AS2
18	$((Pa \supset Qb) \rightarrow (Pa \rightarrow +\exists yQy)) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy))$	MP; 16,17
19	$(Pa \supset Qb) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy)$	MP; 9,18
20	$(\exists xPx \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy)$	AS4
21	$((\exists xPx \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy)) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow ((\exists xPx \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy)))$	AS1
22	$(Pa \supset Qb) \rightarrow ((\exists xPx \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy))$	MP; 20,21
23	$((Pa \supset Qb) \rightarrow ((\exists xPx \rightarrow +\exists yQy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy))) \rightarrow$ $((Pa \supset Qb) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy)) \rightarrow ((Pa \supset Qb) \rightarrow$ $+(\exists xPx \supset \exists yQy))$	AS2
24	$((Pa \supset Qb) \rightarrow (\exists xPx \rightarrow +\exists yQy))$ $\rightarrow ((Pa \supset Qb) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy))$	MP; 23,24
25	$(Pa \supset Qb) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy)$	MP; 19,24
26	$((Pa \supset Qb) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy))$ $\rightarrow (\exists y(Pa \supset Qy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy))$	AS27

27	$\exists y(Pa \supset Qy) \rightarrow +(\exists xPx \supset \exists yQy)$	MP; 25,26
28	$+ (\exists xPx \supset \exists yQy)$	MP; 3,27

4.5.3 Correctheid

Als men beroep doet op lemma 2 is het bewijs voor de correctheid zeer eenvoudig, maar erg langdradig.

4.5.4 Volledigheid

Lemma 3 *Deductietheorema.*

Als $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\text{LA}} B$ dan $\Gamma \vdash_{\text{LA}} A \rightarrow B$

Bewijs. Het deductietheorema geldt voor het linguïstische fragment van klassieke logica waarin de implicatie het enige symbool is. AS1, AS2 en AS3 axiomatiseren dit fragment. ■

De complexiteit van A , $c(A)$, is gedefinieerd door: (i) $c(A) = 0$ als A is een primitieve formule of $A = B$ en $A = \neg B$, $A = +B$ of $A = +\neg B$, (ii) $c(\mathfrak{a}) = c(+\mathfrak{a}) = c(\mathfrak{a}_1) + c(\mathfrak{a}_2) + 1$, en (iii) $c(\mathfrak{b}) = c(+\mathfrak{b}) = c(\mathfrak{b}_1) + c(\mathfrak{b}_2) + 1$. (iv) $c(\mathfrak{c}) = c(+\mathfrak{c}) = c(A_{\mathfrak{c}}(\alpha)) + 1$, en (v) $c(\mathfrak{d}) = c(+\mathfrak{d}) = c(A_{\mathfrak{d}}(\alpha)) + 1$.

Theorema 2 *Als $\Gamma \vDash_{\text{LA}} G$ dan $\Gamma \vdash_{\text{LA}} G$. (Sterke volledigheid)*

Bewijs. Veronderstel dat $\Gamma \not\vdash_{\text{LA}} G$. Laat $\langle A_1, A_2, \dots \rangle$ een opsomming zijn van alle formules in de met pseudoconstanten verrijkte taal ${}^o\text{-}\mathcal{L}$ zodat (i) elke \mathfrak{d} -formule A_i gevolgd wordt door een formule $A_{i+1} = A_{\mathfrak{d}}(\alpha)$, waarbij $\alpha \in \mathcal{O}$ en α komt niet voor in $\{A_1, \dots, A_i\}$, en (ii) elke $+\mathfrak{d}$ -formule A_i gevolgd wordt door een formule $A_{i+1} = +A_{\mathfrak{d}}(\alpha)$, waarbij $\alpha \in \mathcal{O}$ en α komt niet voor in $\{A_1, \dots, A_i\}$. Definieer:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= Cn_{\text{LA}}(\Gamma) \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_{i+1} = Cn_{\text{LA}}(\Delta_i \cup \{A_{i+1}\}) & \text{als } G \notin Cn_{\text{LA}}(\Delta_i \cup \{A_{i+1}\}) \\ \Delta_{i+1} = \Delta_i & \text{anders} \end{array} \right. \\ \Delta &= \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \end{aligned}$$

We tonen aan dat Δ de volgende eigenschappen heeft:

1. $\Gamma \subseteq \Delta$. Onmiddellijk.
2. $G \notin \Delta$. Onmiddellijk.

3. Δ is deductief gesloten.
4. $G \rightarrow C \in \Delta$ voor alle $C \in \mathcal{W}$. Stel dat $G \rightarrow C \notin \Delta$ voor een formule C . Dan is er een Δ_i zodat $\Delta_i \cup \{G \rightarrow C\} \vdash_{\mathbf{LA}} G$ en $A_i = G \rightarrow C$. Wegens het deductietheorema geldt dan ook $\Delta_i \vdash_{\mathbf{LA}} (G \rightarrow C) \rightarrow G$ en dan ook, omwille van axioma AS3, $\Delta_i \vdash_{\mathbf{LA}} G$ en dus $\Delta \vdash_{\mathbf{LA}} G$, wat een contradictie oplevert met (2).
5. Als $A \notin \Delta$ dan $A \rightarrow C \in \Delta$ voor alle $C \in \Delta$.
6. Δ is maximaal niet-triviaal. Als $E \notin \Delta$ dan is er een Δ_i zodat $\Delta_i \cup \{E\} \vdash_{\mathbf{LA}} G$ en bijgevolg, met (4), $\Delta_i \cup \{E\} \vdash_{\mathbf{LA}} C$ en $C \in \Delta$, voor elke formule C . $\Delta \cup \{E\}$ is dus triviaal.
7. Δ is ω -volledig nl. als $\mathfrak{d} \in \Delta$ dan $A_{\mathfrak{d}}(\alpha) \in \Delta$ voor een $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$. Stel dat $\mathfrak{d} \in \Delta$, $A_i = \mathfrak{d}$ en er is geen $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ zodat $A_{\mathfrak{d}}(\alpha) \in \Delta$. Dan geldt, omwille van de constructie van Δ , ook $\Delta_i \cup \{A_{i+1}\} \vdash_{\mathbf{LA}} G$, met $A_{i+1} = A_{\mathfrak{d}}(\beta)$ en β komt niet voor in Δ_i . Omwille van het deductietheorema geldt ook $\Delta_i \vdash_{\mathbf{LA}} A_{i+1} \rightarrow G$. en dus ook (wegens axioma AS29 en $\mathfrak{d} \in \Delta_i$) $\Delta_i \vdash_{\mathbf{LA}} G$, wat in tegenspraak is met $A_i \in \Delta$.
8. Δ is $+\omega$ -volledig nl. als $+\mathfrak{d} \in \Delta$ dan $+A_{\mathfrak{d}}(\alpha) \in \Delta$ voor een $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$. Stel dat $+\mathfrak{d} \in \Delta$, $A_i = +\mathfrak{d}$ en er is geen $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ zodat $+A_{\mathfrak{d}}(\alpha) \in \Delta$. Dan geldt, omwille van de constructie van Δ , ook $\Delta_i \cup \{A_{i+1}\} \vdash_{\mathbf{LA}} G$, met $A_{i+1} = +A_{\mathfrak{d}}(\beta)$ en β komt niet voor in Δ_i . Omwille van het deductietheorema geldt ook $\Delta_i \vdash_{\mathbf{LA}} A_{i+1} \rightarrow G$. en dus ook (wegens axioma AS27 en $+\mathfrak{d} \in \Delta_i$) $\Delta_i \vdash_{\mathbf{LA}} G$, wat in tegenspraak is met $A_i \in \Delta$.
9. Voor elke formule A geldt dat als $+A \notin \Delta$, dan $\neg A \in \Delta$ en als $+\neg A \notin \Delta$, dan $A \in \Delta$. We bewijzen het eerste, het tweede is zeer gelijkaardig. Stel $+A \notin \Delta$ en $\neg A \notin \Delta$. $+A \rightarrow G \in \Delta$ en $\neg A \rightarrow G \in \Delta$, maar dan ook $G \in \Delta$ wegens³:

$(+A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	AS6
$ G \rightarrow \neg A$	Hyp
$ + A \rightarrow G$	Prem
$ + A \rightarrow \neg A$	Trans; 3,4

³Ik gebruik in het objectbewijsje niet exact de axiomatisering die ik gedefinieerd heb. Wegens het deductietheorema (lemma 3) kunnen we voor \mathbf{LA} voorwaardelijke bewijzen gebruiken. Alles bewijzen met axioma's is perfect mogelijk, maar zeer langdradig en onoverzichtelijk. Daarnaast gebruik ik ook een aantal regels die zeer eenvoudig te bewijzen zijn op de klassiek-logische wijze.

$\neg A$	MP; 1,5
$\neg A \rightarrow G$	Prem
G	MP; 6,7
$(G \rightarrow \neg A) \rightarrow G$	VB; 2,8
$((G \rightarrow \neg A) \rightarrow G) \rightarrow G$	AS3
G	MP; 9,10

Dit is in tegenspraak met $G \notin \Delta$.

10. Als $A \rightarrow B \notin \Delta$ dan $A \in \Delta$ en $B \notin \Delta$. Het eerste is een gevolg van de maximale niet-trivialiteit van Δ en axioma $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$. Het tweede van $B \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Laat $\llbracket \alpha \rrbracket = \{\beta \mid \alpha = \beta \in \Delta\}$.

Definieer het domein als $D = \{\llbracket \alpha \rrbracket \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\}$ en definieer de toekenningsfunctie $v : \mathcal{W} \mapsto \{0, 1\}$:

voor alle $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$: $v(\alpha) = \llbracket \alpha \rrbracket$

voor alle $A \in \mathcal{F}$: $v(A) = \{\llbracket g_1(B) \rrbracket, \dots, \llbracket g_{h(B)}(B) \rrbracket \mid f(B) = A \text{ en } B \in \Delta\}$

Voor het model $M = \langle D, v \rangle$, zullen we aantonen dat

$(TB) v_M(A) = 1$ alss $A \in \Delta$.

We doen dit met een mathematische inductie op de complexiteit van A .

Het **basisgeval** is het geval waarbij A een formule is van complexiteit 0 ($A = \alpha = \beta$, $A = \neg\alpha = \beta$, $A = +\alpha = \beta$, $A = +\neg\alpha = \beta$, $A \in \mathbb{P}$, $A = \neg B$, $A = +B$ of $A = +\neg B$ waarbij $B \in \mathbb{P}$).

Wanneer $A \in \mathbb{P}$, $A = \neg B$, $A = +B$ of $A = +\neg B$ (waar $B \in \mathbb{P}$), dan is (TB) een gevolg van de constructie van M , S1, S2, S3, het deductief gesloten zijn van Δ en AS17, AS18 en AS9.

We bewijzen (TB) voor $A = \alpha = \beta$. (links naar rechts) Veronderstel $\alpha = \beta \in \Delta$ en dus $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(f(\alpha = \beta))$ (omwille van de constructie van M). Dan ook $+\alpha = \beta \in \Delta$ (wegens AS9 en Δ deductief gesloten) en bijgevolg $v(\alpha) = v(\beta)$. Hieruit volgt met S10 $v_M(\alpha = \beta) = 1$. (rechts naar links) Veronderstel $v_M(\alpha = \beta) = 1$. Bijgevolg geldt, wegens S10, $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(\cdot = \cdot) \cup (v(+\cdot = \cdot))^C$ en $v(\alpha) = v(\beta)$. Hieruit volgt omwille van de constructie van v onmiddellijk dat $\alpha = \beta \in \Delta$ of $+\neg\alpha = \beta \notin \Delta$. Met behulp van (9) bekomen we $\alpha = \beta \in \Delta$.

(TB) voor $A = +\alpha = \beta$ volgt onmiddellijk uit de constructie van M .

We bewijzen (TB) voor $A = \neg\alpha = \beta$. (links naar rechts) Veronderstel $\neg\alpha = \beta \in \Delta$ en dus, omwille van AS9 en het deductief gesloten zijn van Δ , $+\neg\alpha = \beta \in \Delta$. Bijgevolg, omwille van de constructie van M , $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(\neg = \cdot)$ en $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(+\neg = \cdot)$. Hieruit volgt $v_M(\neg\alpha = \beta) = 1$ wegens S12. (rechts naar links) Veronderstel $v_M(\neg\alpha = \beta) = 1$. Bijgevolg (wegens S12) $v(\alpha) \neq v(\beta)$ of $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(\neg = \cdot)$. In het tweede geval geldt omwille van de constructie onmiddellijk $\neg\alpha = \beta \in \Delta$. In het eerste geval geldt omwille van de constructie $+\alpha = \beta \notin \Delta$ en hieruit met (9) onmiddellijk $\neg\alpha = \beta \in \Delta$.

We bewijzen (TB) voor $A = +\neg\alpha = \beta$. (links naar rechts) Veronderstel $+\neg\alpha = \beta \in \Delta$ en dus $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(+\neg = \cdot)$. Met behulp van S13 bekomen we $v_M(+\neg\alpha = \beta) = 1$. (rechts naar links) Veronderstel $v_M(+\neg\alpha = \beta) = 1$ en dus, omwille van S13, (i) $v(\alpha) \neq v(\beta)$, (ii) $\langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(+\neg = \cdot)$ of (iii) $T_M(v(\alpha))$. In het eerste geval (i) is, wegens de constructie van M , $+\alpha = \beta \notin \Delta$ en dus wegens (d) $\neg\alpha = \beta \in \Delta$. Omwille van de deductief geslotenheid van Δ en axioma AS9 geldt dan ook $+\neg\alpha = \beta \in \Delta$. Geval (ii) is onmiddellijk omwille van constructie. Voor geval (iii), nl. er is een n -air predikaat π en $a_1, \dots, a_{n-1} \in D$, zodat $\langle a_1, \dots, a_i, b, a_{i+1}, \dots, a_{n-1} \rangle \in v(\pi) \cap v(\neg\pi)$, is er omwille van de constructie van v een predikaat π zodat $\pi \dots \alpha \dots \in \Delta$ en $\neg\pi \dots \alpha \dots \in \Delta$. Wegens axioma AS9, AS22 en het deductief gesloten zijn van Δ dan ook $+\neg\alpha = \alpha \in \Delta$.

Voor de **inductiestap** tonen we aan dat

Als voor alle $B \in \mathcal{W}$, zodat $c(B) < c(A)$:

$B \in \Delta$ alss $v_M(B) = 1$ (inductiehypothese), dan

$A \in \Delta$ alss $v_M(A) = 1$.

Stel dat $A = \mathfrak{b}$. (links naar rechts) Veronderstel dat $\mathfrak{b} \in \Delta$. Hieruit volgt $\langle v(g_1(\mathfrak{b})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{b})}(\mathfrak{b})) \rangle \in v(f(\mathfrak{b}))$ omwille van de constructie van M (1). Wegens het deductief gesloten zijn van Δ , AS11 en AS12, $+ * \mathfrak{b}_1 \rightarrow \mathfrak{b}_2 \in \Delta$ en $+ * \mathfrak{b}_2 \rightarrow \mathfrak{b}_1 \in \Delta$. Als $v_M(+ * \mathfrak{b}_1) = 1$ dan (inductiehypothese) $+ * \mathfrak{b}_1 \in \Delta$, waaruit, met het deductief gesloten zijn van Δ , $\mathfrak{b}_2 \in \Delta$ en dus (inductiehypothese) $v_M(\mathfrak{b}_2) = 1$. Bijgevolg $v_M(+ * \mathfrak{b}_1) = 0$ of $v_M(\mathfrak{b}_2) = 1$ (2) en op zeer gelijkaardige wijze ook $v_M(+ * \mathfrak{b}_2) = 0$ of $v_M(\mathfrak{b}_1) = 1$ (3). Omwille van S4, (1), (2) en (3) hebben we ook $v_M(\mathfrak{b}) = 1$. (rechts naar links) Veronderstel dat $v_M(\mathfrak{b}) = 1$. In dat geval is wegens S4 ($\langle v(g_1(\mathfrak{b})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{b})}(\mathfrak{b})) \rangle \in v(f(\mathfrak{b}))$ en ($v_M(+ * \mathfrak{b}_1) = 0$ of $v_M(\mathfrak{b}_2) = 1$) en ($v_M(+ * \mathfrak{b}_2) = 0$ of $v_M(\mathfrak{b}_1) = 1$) of ($v_M(+ * \mathfrak{b}_1) = 0$ of $v_M(+ * \mathfrak{b}_2) = 0$). Als $\langle v(g_1(\mathfrak{b})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{b})}(\mathfrak{b})) \rangle \in v(f(\mathfrak{b}))$ dan $\mathfrak{b} \in \Delta$ wegens de constructie van M . We moeten nog bewijzen $\mathfrak{b} \in \Delta$ als $v_M(+ * \mathfrak{b}_1) = 0$ of $v_M(+ * \mathfrak{b}_2) = 0$. Dit is inderdaad het geval omdat, als het antecedent waar is, dan is $+ * \mathfrak{b}_1 \notin \Delta$ of $+ * \mathfrak{b}_2 \notin \Delta$ (inductiehypothese) en (met de deductieve geslotenheid van Δ , AS13 en AS14)

$+ * b \notin \Delta$, waaruit, met (9), dan onmiddellijk $b \in \Delta$ volgt.

De andere propositionele gevallen ($A = +b$, $A = a$, $A = +a$ en $A = B \rightarrow C$) zijn gelijkaardig en relatief eenvoudig, maar nogal langdradig.

Stel dat $A = \mathfrak{d}$. (links naar rechts) Veronderstel $\mathfrak{d} \in \Delta$. Hieruit volgt met de ω -volledigheid van Δ dat er een $\alpha \in \mathcal{O}$ is waarvoor $A_{\mathfrak{d}}(\alpha) \in \Delta$. Wegens de inductiehypothese $v_M(A_{\mathfrak{d}}(\alpha)) = 1$. Omwille van de constructie van M , $\langle v(g_1(\mathfrak{d})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{d})}(\mathfrak{d})) \rangle \in v(f(\mathfrak{d}))$. Bijgevolg is, wegens S14, $v_M(\mathfrak{d}) = 1$. (rechts naar links) Als $v_M(\mathfrak{d}) = 1$, dan, wegens S14, $\langle v(g_1(\mathfrak{d})), \dots, v(g_{h(\mathfrak{d})}(\mathfrak{d})) \rangle \in v(f(\mathfrak{d}))$ of er bestaat een $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ zodat $v_M(+ * A_{\mathfrak{d}}(\beta)) = 0$. In het eerste geval weten we uit de constructie van Δ dat $\mathfrak{d} \in \Delta$. Voor het tweede geval: stel dat er bestaat een $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ zodat $v_M(+ * A_{\mathfrak{d}}(\beta)) = 0$ en dus (inductiehypothese) $+ * A_{\mathfrak{d}}(\beta) \notin \Delta$. Met contrapositie van de uitdrukking ‘als $+ * \mathfrak{d} \in \Delta$ dan voor alle $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, $+ * A_{\mathfrak{d}}(\beta) \in \Delta$ ’ (gevolg van de deductief geslotenheid van Δ en AS28) bekomen we dat $+ * \mathfrak{d} \notin \Delta$ en dan ten slotte met (9) $\mathfrak{d} \in \Delta$.

De andere predikatieve gevallen ($A = +\mathfrak{d}$, $A = \mathfrak{d}$ en $A = +c$) zijn gelijkaardig en relatief eenvoudig, maar nogal langdradig. ■

4.6 Regelsysteem voor fitch-stijl bewijzen voor LA_f en LA_{fp}

Hoewel de axiomatisering uit vorige sectie een interessant inzicht geeft in de notie logische analyse, de operator $+$ en de betekenis van de paraconsistente objecttaal-implicatie \rightarrow , is het geen eenvoudige aanpassing van klassieke logica aan de eis dat de constructie van een formule niet mag gevolgd worden door zijn analyse. De taal is immers twee symbolen rijker dan klassieke logica. Het is echter ook mogelijk om een eenvoudige aanpassing van klassieke logica tot stand te brengen (zonder extra implicatie). Ik zal in deze sectie met behulp van een elegant fitch stijl bewijssysteem, tonen dat het volstaat om sommige in klassieke logica reeds geldige (en intuïtieve) regels aan te passen zodat de formules die erin voorkomen, voorafgegaan worden door een $+$. Er is geen behoefte aan de speciale \rightarrow -implicatie in dit systeem en het $+$ -symbool zal enkel voorkomen als eerste symbool van de formules in het bewijs. Het is onmogelijk om ook dat symbool uit de taal van LA te verwijderen, omdat dit symbool precies het verschil moet aanduiden tussen geconstrueerde en geanalyseerde formules. Dit is echter de enige functie en het symbool zou dus kunnen gezien worden als enkel onderdeel uitmakend van de bewijstheorie en niet van de taal. Ik breng hierbij in herinnering dat het $+$ -symbool niet voorkomt in de gevolgrelatie die CL^- definieert. Omwille van deze reden en omdat $+$ geen equivalent heeft in

onze natuurlijke taal, is het zeker verantwoord om het symbool enkel te zien als een onderdeel van de bewijzen.

Het regelsysteem dat ik zal geven, is correct en volledig ten opzichte van de semantiek van LA en CL^- .

Door dit systeem te formuleren wordt het nu duidelijk dat behalve het opgeven van transitiviteit, er geen fundamentele nadelen zijn verbonden aan CL^- t.o.v. CL . Het CL^- is even complex, en er bestaat een bewijssysteem voor dat even eenvoudig en elegant is als dat voor klassieke logica. Het kan dus dezelfde functie vervullen, ook in niet-procedure contexten.

4.6.1 Regels voor LA_f

Laat $A \dashv\vdash B$ de afkorting zijn van “ B is afgeleid in een voorwaardelijk bewijs met als hypothese A ”.

$$VB \quad \frac{*b_1 \dashv\vdash +b_2}{+b} \text{ en } \frac{*b_2 \dashv\vdash +b_1}{+b}$$

$$PRIM \quad \frac{+A}{A} \text{ als } A \in \mathbb{P}^-$$

$$EM \quad \frac{+A \dashv\vdash *A}{*A} \text{ en } \frac{+*A \dashv\vdash A}{A} \text{ en } \frac{+b}{+b_1} \text{ wanneer } b_1 = b_2$$

$$PLUS \quad \frac{A}{+A}$$

$$CONJ \quad \frac{\begin{array}{c} +a_1 \\ +a_2 \end{array}}{+a}$$

$$MP \quad \frac{\begin{array}{c} b \\ +*b_1 \end{array}}{b_2} \text{ en } \frac{\begin{array}{c} b \\ +*b_2 \end{array}}{b_1}$$

$$+bE \quad \frac{\begin{array}{c} +b \\ +b_1 \dashv\vdash +b_2 \end{array}}{+b_2} \text{ en } \frac{\begin{array}{c} +b \\ +b_2 \dashv\vdash +b_1 \end{array}}{+b_1}$$

$$SIM \quad \frac{a}{a_1} \text{ en } \frac{a}{a_2} \text{ en } \frac{+a}{+a_1} \text{ en } \frac{+a}{+a_2}$$

VBE	$\frac{\begin{array}{c} \vartheta \\ A_{\vartheta}(\beta) \dashrightarrow B \end{array}}{B} \text{ en } \frac{\begin{array}{c} +\vartheta \\ +A_{\vartheta}(\beta) \dashrightarrow B \end{array}}{B}$	als β niet voorkomt in de premissen, $A(\alpha)$ of B
UI	$\frac{c}{A_c(\beta)} \text{ en } \frac{+c}{+A_c(\beta)}$	
EG	$\frac{+A_{\vartheta}(\beta)}{+\vartheta}$	
UG	$\frac{+A_c(\beta)}{+c}$	als β niet voorkomt in de premissen of niet uitgeschakelde hypothesen.
IE	$\frac{\begin{array}{c} +\alpha = \beta \\ A(\alpha) \end{array}}{A(\beta)}$	
II1	$+\alpha = \alpha$	
II2	$\frac{\begin{array}{c} +A(\alpha) \\ +*A(\beta) \end{array}}{+\neg\alpha = \beta}$	

4.6.2 Regels voor LA_{fp}

Indien $+$ niet voorkomt in de premissen, volstaat een deelverzameling van de regels van LA_f . Dit is het interessantste fragment van LA_f omdat CL^- hiermee kan gedefinieerd worden. Ik som hier de fitch-stijl regels op voor dit fragment.

Laat $A \dashrightarrow B$ de afkorting zijn van “ B is afgeleid in een voorwaardelijk bewijs met als hypothese A ”.

VB	$\frac{*b_1 \dashrightarrow +b_2}{+b} \text{ en } \frac{*b_2 \dashrightarrow +b_1}{+b}$
EM	$\frac{+A \dashrightarrow *A}{*A} \text{ en } \frac{+*A \dashrightarrow A}{A}$
PLUS	$\frac{A}{+A}$
CONJ	$\frac{\begin{array}{c} +a_1 \\ +a_2 \end{array}}{+a}$

MP	$\frac{\frac{b}{+ * b_1}}{b_2} \text{ en } \frac{\frac{b}{+ * b_2}}{b_1}$
SIM	$\frac{a}{a_1} \text{ en } \frac{a}{a_2}$
VBE	$\frac{\frac{\partial}{A_\partial(\beta) \dashv\vdash B}}{B}$ als β niet voorkomt in de premissen, $A(\alpha)$ of B
UI	$\frac{c}{A_c(\beta)}$
EG	$\frac{+A_\partial(\beta)}{+\partial}$
UG	$\frac{+A_c(\beta)}{+c}$ als β niet voorkomt in de premissen of niet uitgeschakelde hypothesen.
IE	$\frac{\frac{+\alpha = \beta}{A(\alpha)}}{A(\beta)}$
II1	$+\alpha = \alpha$
II2	$\frac{\frac{+A(\alpha)}{+ * A(\beta)}}{+\neg\alpha = \beta}$

4.6.3 Voorbeelden

We geven enkele voorbeeldjes van dergelijke fitch stijl bewijsjes. Ik hoop dat deze voorbeelden voldoende duidelijk maken dat de bewijzen in LA_{fp} niet complexer zijn dan gewone CL -bewijsjes.

Voorbeeld 1: $\forall x\exists y\forall zPxyz \vdash_{LA} \exists x\forall z\exists yPxyz$.

1	$\forall x\exists y\forall zPxyz$	Prem
2	$\exists y\forall zPayz$	UI; 1
3	$\forall zPabz$	Hyp
4	$Pabc$	UI; 3
5	$+Pabc$	PLUS; 4
6	$+\exists yPayc$	EG; 5
7	$+\exists yPayc$	VBE; 2,3,6
8	$+\forall z\exists yPayz$	UG; 7
9	$+\exists x\forall z\exists yPxyz$	EG; 8

Voorbeeld 2: $\forall x(Px \supset Qx), \exists xPx \vdash_{LA} +\exists xQx$:

1	$\exists xPx$	Prem
2	Pa	Hyp
3	$\forall x(Px \supset Qx)$	Prem
4	$Pa \supset Qa$	UI; 3
5	Qa	MP; 2,4
6	$+\exists xPx$	EG; 5
7	$+\exists Px$	VBE; 1,2,6

Voorbeeld 3: $\forall z\forall x\forall yPxyz \vdash_{LA} +\forall x\forall y\exists zPxyz$.

1	$\forall z\forall x\forall yPxyz$	Prem
2	$\forall x\forall yPxya$	UI; 1
3	$\forall yPbya$	UI; 2
4	$Pbca$	UI; 3
5	$+\exists zPbcz$	EG; 4
6	$+\forall y\exists zPbyz$	UG; 5
7	$+\forall x\forall y\exists zPxyz$	UG; 6

Voorbeeld 4: $\forall x\exists y(Px \supset Qy), \exists xPx \vdash_{LA} +\exists yQy$

1	$\exists xPx$	Prem
2	Pa	Hyp
3	$\forall x\exists y(Px \supset Qy)$	Prem
4	$\exists y(Pa \supset Qy)$	UI; 3
5	$Pa \supset Qb$	Hyp
6	Qb	MP; 2,5
7	$+\exists yQy$	EG; 6
8	$+\exists yQy$	VBE; 4,5,7
9	$+\exists yQy$	VBE; 1,2,8

Voorbeeld 5: $\exists xPx, \forall x(Px \supset (Qx \wedge \forall y(Qy \supset y = x))), Qa \vdash_{LA} +Pa$

1	$\exists xPx$	Prem
2	Pb	Hyp
3	$\forall x(Px \supset (Qx \wedge \forall y(Qy \supset y = x)))$	Prem
4	$Pb \supset (Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b))$	UI; 3
5	$Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b)$	MP; 2,4
6	Qb	SIM; 5
7	$\forall y(Qy \supset y = b)$	SIM; 5
8	$Qa \supset a = b$	UI; 7
9	Qa	Prem
10	$a = b$	MP; 9,8
11	Pa	IE; 2,10
12	$+Pa$	VBE; 1,2,11

Voorbeeld 6: $\forall xPx \vdash_{\text{LA}} +\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$

1	$\forall xPx$	Prem
2	Pa	UI; 1
3	$\neg Qab$	Hyp
4	Pa	REIT
5	$+Pa$	PLUS
6	$+Pa \vee Qab$	VB; 3,5
7	$+\forall x(Px \vee Qxb)$	UG; 6
8	$+\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$	EG; 7

Voorbeeld 7: $Pd \supset (Pa \supset Pb), Pb \supset Pc \vdash_{\text{LA}} +(Pd \supset (Pa \supset Pc))$

1	$Pd \supset (Pa \supset Pb)$	Prem
2	$Pb \supset Pc$	Prem
3	Pd	Hyp
4	Pa	Hyp
5	$Pa \supset Pb$	MP; 1,3
6	Pb	MP; 4,5
7	Pc	MP; 2, 6
8	$+(Pa \supset Pc)$	VB; 4,7
9	$+(Pd \supset (Pa \supset Pc))$	VB; 3,8

Voorbeeld 8: $Pa \vee Pb \vdash_{LA} +Pa \vee Pc \vee (Pd \supset Pb)$

1	$Pa \vee Pb$	Prem				
2	$\neg(Pa \vee Pc)$	Hyp				
3	$\neg Pa$	SIM; 2				
4	Pb	MP; 1,3				
5	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; padding-right: 10px;">Pd</td> <td>Hyp</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; padding-right: 10px;">Pb</td> <td>REIT; 4</td> </tr> </table>	Pd	Hyp	Pb	REIT; 4	
Pd	Hyp					
Pb	REIT; 4					
6	$+Pd \supset Pb$	VB; 5,6				
7	$+Pa \vee Pc \vee (Pd \supset Pb)$	VB; 7				

4.6.4 Correctheid

Als men beroep doet op lemma 2 is het bewijs voor de correctheid is zeer eenvoudig, maar erg langdradig.

4.6.5 Volledigheid

Theorema 3 Als $\Gamma \models_{LA_f} G$ dan $\Gamma \vdash_{LA_f} G$. (Sterke volledigheid)

Ik heb nog geen bewijs voor dit theorema, maar gegeven het feit dat alle axioma's van LA onmiddellijk kunnen vertaald worden in een equivalente regel, lijkt de volledigheid van LA_f evident.

Theorema 4 Als $\Gamma \models_{LA_{fp}} G$ dan $\Gamma \vdash_{LA_{fp}} G$. (Sterke volledigheid)

Bewijs. In het volgende hoofdstuk zullen we bewijzen dat het prospectief bewijsstelsel dat daar gedefinieerd is voor LA_{fp} en CL^- volledig is. We zullen hier aantonen dat elke lijn in een prospectief bewijs kan omgezet worden in een fitch stijl bewijs zoals hierboven is gedefinieerd.

We bewijzen dat er voor iedere lijn $[B_1, B_2, \dots, B_n]A$ van een prospectief bewijs uit Γ een fitch-stijl bewijs van A uit $\Gamma \cup \{+B_1, +B_2, \dots, +B_n\}$ bestaat. We tonen het eerst aan voor de gevallen waarbij de lijn het resultaat is van een prospectieve regel zonder lokale premissen. Er zijn twee gevallen: ten eerste is er de premisseregels; $\{+B_1, +B_2, \dots, +B_n\} = \emptyset$ en $A \in \Gamma$. Dit geval is triviaal. Het tweede geval is de Doel-regel: $\{+B_2, \dots, +B_n\} = \emptyset$ en $A = +B_1$. Ook dit geval is evident.

Vervolgens moeten we aantonen dat als er een fitch-stijl bewijs bestaat dat overeenkomt met de lokale premisse-lijnen $[C_1, C_2, \dots, C_m]D$ en $[E_1, E_2, \dots, E_k]F$ van een prospectieve regel, dat er dan ook een fitch-stijl bewijs bestaat dat overeenkomt met de lokale conclusie $[B_1, B_2, \dots, B_n]A$ van de regel. We moeten dus voor iedere prospectieve regel bewijzen dat als $\Gamma \cup \{+C_1, +C_2, \dots, +C_m\} \vdash +D$ en $\Gamma \cup \{+E_1, +E_2, \dots, +E_k\} \vdash F$, dat dan ook $\Gamma \cup \{+B_1, +B_2, \dots, +B_n\} \vdash A$. Het bewijs is voor alle gevallen voor de hand liggend. Voor elke prospectieve regel vermeld ik welke fitch-stijl regel cruciaal is voor het bewijs.

Propectieve regel	Fitch stijl regel
aE	SIM
bE	MP
CaE	CONJ
CbE	VB
Trans	PREM
EM	EM
EM0	EM
cE	UI
dE	PREM
CcE	REIT
CdE	EG
cTrans	UG
dTrans	VBE
C=E1	IE
C=E2	II1
C¬=E	II2

■

4.7 LA vat het volledige consistente fragment van CL

Zoals al eerder aangekondigd, is LA zo interessant voor het onderzoek naar paraconsistentie omdat het CL^- definieert en CL^- een paraconsistente (niet-explosieve) logica is die precies alle CL-gevolgen valideert voor alle premisseverzamelingen waarvoor CL bedoeld is (consistente verzamelingen), zonder toegevingen te doen aan de complexiteit of monotonie op te geven. De volgende stelling is dan ook cruciaal.

Theorema 5 Als Γ CL-consistent is, dan $\Gamma \vdash_{LA} +A$ alss $\Gamma \vdash_{CL} A$.

Links naar rechts is evident gezien alle CL^- regels ook geldig zijn in CL . We bewijzen rechts naar links semantisch.

Het volledig uitgewerkte bewijs ervoor moet het onderwerp zijn van verder onderzoek. Een groot aantal uitgeteste voorbeelden ondersteunen echter deze stelling. Bovendien is bewezen in [41] dat het propositionele prospectieve bewijssysteem alle CL -gevolgen vat voor consistente premissen. Het is eenvoudig na te gaan dat deze prospectieve bewijzen te vertalen zijn naar LA -bewijzen (zie volgende sectie). Bijgevolg is de cruciale stelling te bewijzen voor het propositionele geval. Ik vermoed dat predikatief gaan hierin geen verandering brengt, gezien alle typisch predikatieve klassiek-logische axioma's/regels een variant in LA hebben. Hoewel ik dus nog geen volledig uitgewerkt bewijs heb, heb ik wel een schets van het bewijs (niet elke redeneerstap is onderbouwd). Wat hieronder staat gaat ook alleen op voor het identiteitsvrije fragment van de logica. Het bewijs voor het geval waarbij de identiteit wel inbegrepen, moet onderwerp zijn van verder onderzoek.

Lemma 4 *Als er een ω -volledige, $+\omega$ -volledige LA -deductief gesloten verzameling Δ bestaat waarin voor ieder formule $A \in \Delta$ of $+A \in \Delta$ maar niet beide, $\Gamma \subset \Delta$ en $+G \notin \Delta$, dan $\Gamma \not\vdash_{CL} G$.*

Bewijs. Eenvoudig gevolg van algemeen bekende feiten uit de metatheorie van CL en het feit dat de semantische clausules voor LA na weglating van het $+$ -symbool exact deze zijn van CL , als voor alle A geldt: niet ($v_M(+A) = 1$ en $v_M(+\neg A) = 1$). ■

Lemma 5 *Stel $\Gamma \not\vdash_{LA} A$ en er bestaat een LA -model M voor Γ zodat voor alle A niet ($v_M(+A) = 1$ en $v_M(+\neg A) = 1$). Dan is er een deductief-gesloten ω -volledige, $+\omega$ -volledige verzameling $\Lambda \subset {}^+\mathcal{W}$ zodat (1) $\{+\neg G\} \cup \Gamma \subset \Lambda$, (2) niet $+A \in \Lambda$ en $+\neg A \in \Lambda$, (3) als A een subformule (ook bijvoorbeeld $A(\alpha)$) wordt gezien als een subformule van $\exists \xi A(\xi)$ is van $+\neg G$ of een formule in Γ , dan $+A \in \Lambda$ of $+\neg A \in \Lambda$.*

Theorema 6 *Als $\Gamma \vDash_{CL} G$ en Γ consistent dan $\Gamma \vdash_{LA} +G$.*

Bewijs. Stel Γ is consistent en $\Gamma \not\vdash_{LA} +G$. Als Γ consistent is, dan is er een LA -model M zodat voor alle formules: niet ($v_M(+A) = 1$ en $v_M(+\neg A) = 1$).

Met lemma 5 weten we dan dat er een deductief-gesloten ω -volledige, $+\omega$ -volledige verzameling $\Lambda \subset {}^+\mathcal{W}$ is zodat (1) $\{+\neg G\} \cup \Gamma \subset \Lambda$, (2) niet $+A \in \Lambda$ en $+\neg A \in \Lambda$, (3) als A een subformule is van $+\neg G$ of een formule in Γ , dan $+A \in \Lambda$ of $+\neg A \in \Lambda$.

Laat $\Delta_0 = \Lambda$. Laat $\langle A_1, A_2, \dots \rangle$ een opsomming zijn van alle formules A waarvoor $+A \notin \Lambda$ en $+\neg A \notin \Lambda$, zodat elke ∂ -formule A_i gevolgd wordt door een formule $A_{i+1} = A_\partial(\alpha)$, waarbij $\alpha \in \mathcal{O}$ en α komt niet voor in $\{A_1, \dots, A_i\}$.

Definieer Δ als volgt:

$$\begin{cases} \Delta_{i+1} = Cn_{\mathbf{LA}}(\Delta_i \cup \{+A_{i+1}\}) & \text{als } +G \notin Cn_{\mathbf{LA}}(\Delta_i \cup \{+A_{i+1}\}) \\ \Delta_{i+1} = Cn_{\mathbf{LA}}(\Delta_i \cup \{+\neg A_{i+1}\}) & \text{anders} \end{cases}$$

$$\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots$$

Δ is een ω -volledige, $+\omega$ -volledige **LA**-deductief gesloten verzameling Δ waarin voor iedere formule A , $+A \in \Delta$ of $+\neg A \in \Delta$ maar niet beide, $\Gamma \subset \Delta$ en $+G \notin \Delta$.

Met lemma 4 bekomen we ten slotte dat $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{CL}} G$.

■

4.8 De vertaling van lijnen in prospectieve bewijzen naar LA

De prospectieve bewijzen voor propositionele klassieke logica die gedefinieerd zijn in hoofdstuk 2, zonder gebruik van de EFQ-regel, kunnen vertaald worden naar **LA**-bewijzen.

Theorema 7 *Elke lijn in een prospectief bewijs –zonder gebruik van de EFQ-regel– van G uit Γ kan vertaald worden in een formule van de hier beschreven taal, en wel als volgt:*

$$tr([A_1, A_2, \dots, A_n]B) = \begin{cases} +A_1 \rightarrow (+A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (+A_n \rightarrow +B) \dots) & B = G \\ +A_1 \rightarrow (+A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (+A_n \rightarrow B) \dots) & \text{anders} \end{cases}$$

Dit resultaat gaat ook op voor de predikatieve versie van het prospectieve bedrijfssysteem voor **LA** of consistente **CL**, dat ik in het volgende hoofdstuk zal voorstellen. Daar zal ik het theorema ook bewijzen. Vanzelfsprekend is de propositionele versie van het theorema een gevolg van de predikatieve versie. In het volgende hoofdstuk wordt dit systeem voorgesteld als een systeem voor **LA**, waardoor de $+$ -symbolen in de formule-elementen expliciet vermeld worden. Dit maakt dat de twee gevallen die hier onderscheiden worden in het theorema, in volgend hoofdstuk kunnen gereduceerd worden tot het eerste geval.

4.9 Adaptieve logica's met onderlimietlogica LA

CL[−] werkt uitstekend als niet-explosief alternatief voor klassieke logica. Toch zijn adaptieve logica's veel geschikter om om te gaan met inconsistente theorieën. In tegenstelling tot **CL**[−] lokaliseert een inconsistentie-adaptieve logica de

contradicties in een theorie en slaagt een dergelijke adaptieve logica erin om te voorkomen dat deze inconsistenties zich verspreiden, ten koste van de complexiteit. Op deze manier kunnen adaptieve logica's gebruikt worden om inconsistenties weg te werken uit een inconsistente theorie. De bekendste (en eerste) inconsistentie-adaptieve logica's ($CLuN^m$, $CLuN^r$, $CLuNs^m$ en $CLuNs^r$) laten voornamelijk regels als dysjunctief syllogisme (DS) en modus tollens (MT) slechts toe onder de voorwaarde dat de betrokken formules niet inconsistent zijn in het licht van de theorie. DS en MT kunnen echter op zichzelf niet tot trivialiteiten leiden. Om tot trivialiteiten te komen is sowieso ook een constructieve stap nodig (niet-constructieve regels als DS en MT kunnen uit p en $\neg p$ natuurlijk nooit een q afleiden die niets te maken heeft met p of $\neg p$). Een alternatieve manier om een inconsistentie-adaptieve logica op te bouwen is het steeds toelaten van alle niet-constructieve stappen (ook DS en MT), maar het slechts onder voorwaarden toelaten van constructieve stappen. Een bepaalde aanpak van deze keuze is reeds door J. Meheus uitgewerkt in [76]. Vanzelfsprekend is ook de hier gedefinieerde logica LA ook een uitstekende basis voor een dergelijk inconsistentie-adaptieve logica. Er zijn minstens vier concrete adaptieve logica's waarvoor $LLL=LA$.

Definitie 18 *Adaptieve logica ALA .*

- *Onderlimierlogica: LA*
- *Abnormaliteiten: $\Omega = \{\check{\exists}(+A\check{\wedge}\check{\neg}A)|A \in \mathcal{F}\}$ of $\Omega = \{\check{\exists}(A\check{\wedge}\check{\neg} + A)|A \in \mathcal{F}\}$. Zoals elders in deze thesis, staat $\check{\exists}$ voor de klassieke existentiële sluiting, staat $\check{\wedge}$ voor de klassieke conjunctie en staat $\check{\neg}$ voor de klassieke negatie. De semantiek voor formules die deze symbolen bevatten, is exact zoals bij klassieke logica: $v_M(A\check{\wedge}B) = 1$ als $v_M(A) = 1$ en $v_M(B) = 1$, $v_M(\check{\neg}A) = 1$ als $v_M(A) = 0$, en $v_M(\check{\exists}xA(x)) = 1$ als er minstens een $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ is zodat $v_M(A(\alpha)) = 1$.*
- *Strategie: Minimale Abnormaliteitenstrategie of Betrouwbaarheidsstrategie.*

Er moet nog onderzocht worden wat de precieze eigenschappen en voordelen zijn van deze familie van adaptieve logica's. Alleszins is het volgende theorema eenvoudig te bewijzen:

Theorema 8 *De in definitie 18 gedefinieerde adaptieve logica's hebben klassieke logica als bovenlimietlogica.*

Verder onderzoek moet uitwijzen hoe de adaptieve bewijzen precies moeten verlopen voor deze logica's.

4.10 Besluit

Ik begin met een waarschuwing. Wat logische analyse is en of het analytische fragment een logica op zich definieert, is natuurlijk afhankelijk van logica tot logica. Voor logica's die rijker of armer zijn dan **CL**, zouden de resultaten anders zijn. Het zou zeer interessant zijn om modale, vage en intuitionistische **LA**-varianten te construeren. Ik vermoed dat het mogelijk moet zijn om met behulp van gelijkaardige technieken voor bestaande modale, vage en intuitionistische logica's ook paraconsistente versies te ontwikkelen die maximaal zo complex zijn en voor consistente premisseverzamelingen dezelfde gevolgen valideren als de niet-paraconsistente versies.

We hebben reeds uitgelegd dat **LA** interessant is voor de definitie van **CL**⁻ en de prospectieve bewijzen, maar de logica is op zichzelf ook zinvol. Zo is **LA** zeer interessant vanuit een computationeel oogpunt. Het heeft geen zin dat automatische logische redeneeralgoritmes gebruik zouden maken van constructieve regels (tenzij de stap voorkomt uit de analyse van een doel). Constructieve stappen zijn immers willekeurig, indien ze niet op de achtergrond voortkomen uit de analyse van datgene waar de redeneerprocessen heen moeten gaan. Het blind toepassen van additie is bijvoorbeeld om evidente redenen zeer contraproductief. Om deze redenen, merkt men bij bekende redeneeralgoritmes uit de artificiële intelligentie (zoals de resolutiemethode of *natural deduction*-technieken) enkel niet-constructieve stappen. Het is zelfs zo dat enkele van deze systemen, mits enige aanpassingen, kunnen vertaald worden naar **LA**.

De logica **LA** toont, door de focus op analyse gecombineerd met een standaard tweewaardige deterministische semantiek en bewijstheorie, dat klassieke en meer computationele benaderingen van logica en redeneren zeer goed te verzoenen zijn. De logica lijkt een eerste stap te zijn in de richting van het rechtstreekse gebruik van standaard formeel-logische technieken voor computationele doeleinden, zonder omwegen via *theorem provers* en dergelijke.

In tegenstelling tot enkele bestaande logische systemen die opgesteld zijn met computationele doeleinden in het achterhoofd, is er bij dit systeem geen nood om te analyseren naar een of andere *normal form* vooraleer logische regels kunnen toegepast worden. De analyse is immers deel van het systeem.

Ik beweer echter niet dat **LA** de enige manier is om het concept logische analyse te formaliseren. Er zijn vermoedelijk vele manieren om analyse te preciseren. Zo kan men stellen dat de regel adjunctie ($A, B/A \wedge B$; ook wel introductie van de conjunctie genoemd) niet echt een constructieve regel is (zoals we hem hier behandelen). Men voegt immers niets toe aan de lokale premissen van deze regel, en construeert in die zin niets nieuws. Ik heb echter geopteerd om

hem toch uit te sluiten als analyserende regel, omdat er een complexere formule wordt geconstrueerd. Deze constructie is arbitrair en zinloos vanuit computationeel oogpunt, tenzij andere (analytische) stappen $A \wedge B$ al tot een zinvol doel hebben gebombardeerd. Men zou ook kunnen beargumenteren dat de afgeleide regel $A(\alpha), \alpha = \beta / A(\beta)$ in feite een constructieve regel is (omdat $A(\beta)$ geen subformule is van een lokale premisse van de regel). Dit is zeker niet verkeerd en zou waarschijnlijk evenzeer mogelijk geweest zijn. Toch heb ik geopteerd om voor de geldigheid van deze regel (i.p.v. het zwakkere $A(\alpha), +\alpha = \beta / +A(\beta)$) omdat ik de indentiteit en de equivalentie op dezelfde manier wou behandelen: de indentiteit $\alpha = \beta$ wordt gezien als een oneindige conjunctie van alle mogelijke formules van de vorm $A(\alpha) \equiv A(\beta)$. Gegeven de semantiek van de equivalentie is $A(\alpha), A(\alpha) \equiv A(\beta) \vDash_{\text{LA}} A(\beta)$ natuurlijk wel een geldige afgeleide regel in LA . Bovendien komen de elementen $A(\cdot)$ en β die nodig zijn om $A(\beta)$ te vormen wel voor in de lokale premissen van de afgeleide regel $A(\alpha), +\alpha = \beta / A(\beta)$.

Er blijken dus veel verschillende keuzes mogelijk te zijn bij de constructie van een logica voor logische analyse. Echter, alle goede logica's voor logische analyse zullen dezelfde relatie hebben tot CL , in die zin dat niet-triviale CL -gevolgen steeds moeten bekomen worden zonder geconstrueerde formules te analyseren, onafhankelijk van hoe de logica in kwestie de analyserende stappen scheidt van de constructieve stappen.

Ik wil ook niet verdedigen dat CL^- de enige manier is om een paraconsistente logica L te definiëren die een fragment van CL is, maximaal even complex is dan CL en waarvoor geldt dat $Cn_{\text{CL}}(\Gamma) = Cn_{\text{CL}^-}(\Gamma)$ voor iedere verzameling formules Γ , zodat er een formule A is waarvoor geldt dat $A \notin Cn_{\text{CL}}(\Gamma)$. Men kan, gebruik makend van dezelfde idee dat een geconstrueerde formule niet meer mag geanalyseerd worden, afhankelijk van hoe men formeel precies de noties constructie en analyse vastlegt, andere resulterende logica's krijgen. Die logica's kunnen dan eventueel voor inconsistente premisses tot een andere gevolgverzameling leiden. Daarnaast valt het ook niet uit te sluiten dat er andere trucs bestaan, om alle consistente CL -gevolgen te behouden en monotonie niet te verliezen. Toch ken ik geen enkel ander bestaand systeem met deze eigenschappen. Er is mij ook geen enkel formeel systeem bekend dat een even rijke⁴ of rijkere gevolgrelatie definieert, maar niet explosief is. Natuurlijk kan men makkelijk absurde gevolgrelaties bedenken die rijker zijn, maar die niet triviaal zijn voor het inconsistente geval. Ik geef een heel eenvoudig voorbeeld: de logica ABS . Definieer $Cn_{\text{ABS}}(\Gamma)$ als de verzameling $Cn_{\text{CL}}(\Gamma)$ als deze laatste niet triviaal is, en laat in het andere geval $Cn_{\text{ABS}}(\Gamma)$ gelijk zijn aan $Cn_{\text{LA}}(\{A \mid +A \in Cn_{\text{LA}}(\Gamma)\})$

⁴Een gevolgrelatie Cn_1 is rijker of even rijk als een gevolgrelatie Cn_2 alss voor alle verzamelingen formules Γ geldt dat $Cn_2(\Gamma) \subseteq Cn_1(\Gamma)$

of voor een willekeurige $C, A \vee C \in Cn_{\mathbf{LA}}(\Gamma)\}$). Dit systeem is rijker dan \mathbf{CL}^- , een fragment van \mathbf{CL} en toch niet-triviaal. Echter, dergelijke systemen zijn zeer moeilijk te verantwoorden. Dit draagt evidentie aan voor de hypothese dat \mathbf{CL}^- het rijkste zinnige paraconsistente fragment van \mathbf{CL} is.

Hoofdstuk 5

Prospectieve bewijzen voor de klassieke predikatenlogica

5.1 Inleiding

In hoofdstuk 2 vindt u de definitie van prospectieve bewijzen voor klassieke propositielogica. In dit hoofdstuk bespreek ik de uitbreiding naar het predikatieve geval. Er zijn twee versies voorhanden voor een predikatieve uitbreiding. De eerste elegante versie dateert uit 2005 en is opgesteld door D. Batens, D. Provijn en ikzelf. Deze was de opvolger van verschillende erg onoverzichtelijk of foutieve voorstellen (onder meer met behulp van skolemiseren). Deze versie maakt gebruik van pseudoconstanten. Dit is niet rampzalig maar heeft toch belangrijke nadelen. In 2007 vond ik een methode om de pseudoconstanten te vermijden op zo'n manier dat elke lijn van een prospectief bewijs (zoals in het propositioneel geval) kan vertaald worden naar een lijn in een **LA**-bewijs. Op deze manier kunnen we dus stellen dat ook het predikatieve prospectieve bewijssysteem in feite axiomatiseerbaar is.

Ik heb het systeem met de pseudoconstanten toegevoegd aan deze thesis in appendix A. In dit hoofdstuk bespreek ik het systeem dat vrij is van pseudoconstanten. Ik zal het voorstellen als een prospectief bewijssysteem voor **LA_{fp}** in de plaats van een prospectief bewijssysteem voor **CL**. Dit doe ik omdat het, als het een positieve test oplevert voor **LA_{fp}**, het dan ook een positieve test oplevert voor **CL⁻**. Wanneer Γ consistent is, dan $Cn_{CL^-}(\Gamma) = Cn_{CL}(\Gamma)$ en dus levert een prospectief bewijssysteem voor **LA** ook een positieve test op voor **CL** als

de premissen consistent zijn. Als de premissen niet consistent zijn, zal met de procedure die ik zal presenteren niets verkeerd worden afgeleid, maar zullen de zuiver triviale gevolgen niet afgeleid worden, hoewel ze wel **CL**-gevolgen zijn. Het is zeer de vraag of het zin heeft om een prospectief bewijssysteem te hantieren als men alle (ook de triviale) gevolgen wenst te kennen. In het propositionele systeem in hoofdstuk 2 zorgt de EFQ-regel voor de afleiding van de triviale gevolgen, maar als men deze regel toevoegt, moeten voor elk falend kandidaat-**CL**-gevolg alle mogelijke EFQ stappen doorlopen worden (vooraleer men zeker kan zijn dat het niet enkel een gevolg is omdat de premissen inconsequent zijn). Dit is een bijzonder contraproductief proces, dat met doelgerichtheid weinig uitstaans heeft. Er zijn betere technieken voor handen om na te gaan of een verzameling consistent is, dan voor elk kandidaat-gevolg de prospectieve bewijzen met een toegevoegde EFQ fase te doorlopen (inconsistentie-adaptieve prospectieve dynamiek, resolutiemethode, tableaux, enz.).

Daarom ben ik van mening dat het prospectieve bewijssysteem eigenlijk een bewijssysteem is voor \mathbf{CL}^- of \mathbf{LA}_{fp} . Ik presenteer het dus ook op die manier. Wie het toch nodig vindt om nog een EFQ-fase toe te voegen aan de procedure en aldus een procedure te bekomen voor volledige **CL**, kan dit zonder problemen doen op dezelfde wijze als bij het propositionele geval. Het definiëren van een prospectief bewijssysteem vanuit **LA** levert het extra voordeel op dat formules nu kunnen voorafgegaan worden door 2 extra symbolen \ddagger en $+$. Beide symbolen duiden aan dat de formules waaraan ze voorafgaan niet mogen geanalyseerd worden. \ddagger wordt gebruikt voor formules in de conditie-elementen en $+$ voor formules in de formule-elementen. Elke lijn van een prospectief bewijs heeft in het hier onder gepresenteerde systeem een **LA**-semantiek en ook de twee symbolen hebben een welbepaalde betekenis in deze semantiek.

5.2 Wat is de filosofische betekenis van prospectieve bewijzen?

In het kader van dit doctoraat ligt het nut van prospectieve bewijzen voor klassieke logica's (en gelijkaardige monotone logica's) in het verschaffen van een logische basis voor de explicatie van monotone aspecten¹ van de oplossingsprocessen van problemen. We beperken ons hier tot ja/nee-problemen. Deze kunnen

¹De term *monotoon* wordt in dit hoofdstuk in de traditionele zin gebruikt: monotone aspecten van redeneerprocessen zijn deze delen van een redeneerproces waarbij men ervan uitgaat dat als A uit een aantal zinnen Σ kan afgeleid worden, dat het dan ook kan afgeleid worden als er zinnen toegevoegd worden aan Σ .

in een groot aantal gevallen geformuleerd worden als de vraag of een bepaalde formule A een (monotoon) logisch gevolg is van een bepaalde premisseverzameling Γ . Veronderstel dat de probleemoplosser reeds in staat is geweest tot de formulering van zijn probleem op deze manier. Het redeneerproces dat we met de hier gepresenteerde bewijzen willen expliceren, is de zoektocht naar de oplossing van de vraag die op de hierboven beschreven wijze is geformuleerd. De bewijzen zijn opgebouwd vanuit twee cruciale fenomenen van menselijk probleemoplossing: (1) met behulp van analyse van de problemen en de achtergrondkennis kunnen problemen herleid worden tot eenvoudigere deelproblemen en (2) voorwaardelijk redeneren; veronderstel dat we een of andere formule A zouden vinden, dan zouden we dichterbij de oplossing kunnen komen.

De prospectieve bewijzen bieden een bijdrage tot de oplossing van twee cruciale problemen van het fps-onderzoeksprogramma.

P3 *Wat zijn rationele redeneerstappen gegeven de huidige context en de problemen die men wil oplossen?*

Een deel van de rationele redeneerstappen die moeten bijdragen tot het oplossen van de problemen in hun context zijn analytisch-logische stappen die moeten nagaan of de oplossing van het probleem een monotoon-logisch gevolg is van de achtergrondkennis. Prospectieve bewijzen vormen explicaties voor precies deze analytisch-monotoon logische redeneerprocessen.

Ik geef twee eenvoudige voorbeelden om te bewijzen dat deze relatief eenvoudige analytische en monotoon logische processen reeds een belangrijk onderdeel vormen van menselijke probleemoplossing. Een ingenieur die zich afvraagt of een bepaald ontwerp van een brug zou stand houden onder het gewicht van 100 auto's, lost zijn probleem op door na te gaan of 'de brug houdt stand' een logisch gevolg is van de beschrijving van het ontwerp en de wetten van de klassieke mechanica. Een politicus die zich afvraagt of de koopkracht is gestegen dan wel gedaald in het land dat hij bestuurt, zal nagaan of het stijgen van de koopkracht het logisch gevolg is van wat hij weet over de evolutie van de gemiddelde prijzen en lonen in zijn land, en wat economische theorieën zeggen over koopkracht. In beide voorbeelden komt het oplossen van het probleem van de probleemoplosser neer op het nagaan of een bepaalde zin een monotoon logisch gevolg is van een aantal zekerheden. Of de logica in beide gevallen inderdaad klassieke logica is, is voor discussie vatbaar is, maar dat de logica in dergelijke relatief eenvoudige kwesties best monotoon is, lijkt buiten kijf te staan. Zelfs als de onderliggende logica van beide the-

orieën beter niet monotoon zou zijn (bijvoorbeeld omdat de economische zekerheden inconsistent blijken omwille van het gebruik van ambigue termen) is het efficiëntst dat de probleemoplosser uitgaat van monotonie tot er argumenten zijn om het tegendeel te besluiten.

- P2 *Hoe komt men ertoe dat een bepaald probleem relevant is en een ander niet, gegeven de contextuele beperkingen? Hoe worden nieuwe problemen gegenereerd uit de oplossingsprocessen van oude problemen?*

Hoewel veel meer komt kijken bij het aan de orde stellen van zinvolle nieuwe problemen, worden in elke conditie-analyserende stap van een prospectief bewijs nieuwe problemen gegenereerd waarvan de oplossingen kunnen bijdragen aan het oplossen van het probleem. Voor elke formule A in de conditie van een niet-gemarkeerde lijn van een prospectief bewijs waarop het formule-element uit het hoofddoel of hoofdprobleem bestaat, kan de afleidbaarheid van A uit de achtergrondkennis gezien worden als een nieuw relevant probleem.

- P5 *Welke nieuwe kennis kan, afhankelijk van de context, op een veilige manier rationeel afgeleid worden uit de contextuele zekerheden zonder nieuwe waarnemingen te doen? Hoe kan deze kennis bijdragen tot het oplossen van het probleem?*

Deze vraagstelling wordt opgelost door te bepalen wat de onderliggende monotone logica is van de theorie die gevormd wordt door de contextuele zekerheden. Dit hangt natuurlijk af van context tot context. De oplossing van het vraagstuk bepaalt welke gevolgrelatie het prospectief bewijs moet definiëren. De oplossing van deze vraagstelling is dus eerder een eis waaraan de prospectieve bewijzen moeten voldoen, dan wel dat de prospectieve bewijzen een oplossing vormen voor de vraagstelling. Toch kan, wanneer bepaalde types prospectieve bewijzen inderdaad goede explicaties vormen van rationele redeneerprocessen voor bepaalde contexten, gesteld worden dat de gevolgrelatie die gedefinieerd wordt door deze bewijzen voor die contexten een goede onderliggende logica vormt. Zo is uit het natuurlijke verloop van de hier gedefinieerde prospectieve bewijzen zonder EFQ gebleken dat CL^- wel eens een betere kandidaat zou kunnen zijn dan CL , wat betreft de onderliggende logica van typisch klassieke contexten (bvb. de context waarin eenvoudige wiskundige of fysische problemen geformuleerd worden).

We kiezen voor de volledige klassieke predikatenlogica (voor consistente premissen) als basislogica voor de prospectieve bewijzen, om een aantal redenen. Ten eerste is de toepassing van klassieke logica steeds een goede eerste stap. De meeste alternatieve logica's zijn ontworpen vertrekkende vanuit beperkingen van klassieke logica. Dit heeft ervoor gezorgd dat klassieke regels in elk alternatief systeem een belangrijke rol spelen. Het is dus een goed begin om te starten vanuit klassieke logica als basismodel. Alternatieven kunnen later opgesteld worden vanuit het basismodel. Ten tweede vormt klassieke logica (of een sterke paraconsistente variant zoals \mathbf{CL}^-) in een belangrijk aantal contexten ook een goede kandidaat onderliggende logica voor de achtergrondtheorieën van die context (al was het maar omdat vele wetenschappelijke theorieën met klassieke logica in het achterhoofd zijn opgesteld).

5.3 Lijn

Laat \mathcal{L} gedefinieerd zijn zoals in het vorige hoofdstuk. Een lijn van een productief bewijs heeft de vorm

$$i \quad [A_1, A_2, \dots, A_n]B \quad j, k; \text{REGEL} \quad \checkmark$$

Voor deze lijn is i het lijnnummer, B is de formule die afgeleid is op de lijn, de formules A_1, A_2, \dots, A_n zijn de condities waarop B is afgeleid, REGEL is de regel waarvan de toepassing op lokale premisselijnen met nummers j en k resulteert in lijn i . \checkmark is de markering van de lijn. Als de lijn niet gemarkeerd is, staat de \checkmark er natuurlijk niet. B is een formule in $+\mathcal{L}$, d.w.z. B is van de vorm C of $+C$ waarbij $C \in \mathcal{L}$. B is een formule in $\ddagger\mathcal{L}$, d.w.z. B is van de vorm C of $\ddagger C$ waarbij $C \in \mathcal{L}$.

Een lijn van een prospectief bewijs waarop $[A_1, A_2, \dots, A_n]B$ is afgeleid, heeft dezelfde semantiek als zijn vertaling naar **LA**: de **LA**-formule $im(+A_1, +A_2, \dots, +A_n, B)$, wat een afkorting is voor de **LA**-formule $+A_1 \rightarrow (+A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (+A_n \rightarrow B) \dots)$, op voorwaarde dat de A_i niet van de vorm $\ddagger C$ zijn. Als A_j toch van de vorm $\ddagger C$ is, dan hoeft A_j niet voorafgegaan worden door een $+$ en mag de \ddagger gewoon weggelaten worden in de vertaling. Zo wordt bijvoorbeeld $[A_1, A_2, \dots, \ddagger C, \dots, A_n]B$ vertaald naar $im(+A_1, +A_2, \dots, C, \dots, +A_n, B)$.

5.4 Afkortingen

- (i) $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele variabelen
- (ii) $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e, a_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele constanten
- (iii) $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, T, P_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor predikatieve constanten

\mathfrak{a}	\mathfrak{a}_1	\mathfrak{a}_2		\mathfrak{b}	\mathfrak{b}_1	\mathfrak{b}_2
$A \wedge B$	A	B		$\neg(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\neg(A \equiv B)$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(B \supset A)$
$\neg(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\neg(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$\neg\neg A$	A	A				

\mathfrak{c}	$A_{\mathfrak{c}}(\alpha)$		\mathfrak{d}	$A_{\mathfrak{d}}(\alpha)$
$\forall \xi B(\xi)$	$B(\alpha)$		$\exists \xi B(\xi)$	$B(\alpha)$
$\neg \exists \xi B(\xi)$	$*B(\alpha)$		$\neg \forall \xi B(\xi)$	$*B(\alpha)$

Tabel 5.1: \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} en \mathfrak{d} -formules in **PCLc**

5.5 Regel voor de introductie van hypothesen in een prospectief bewijs

Het invoeren van het symbool \ddagger (waarvan de enige betekenis is dat de conditieformule waar \ddagger aan voorafgaat niet mag geanalyseerd worden) maakt het mogelijk de hypothese-regel toe te voegen aan de prospectieve bewijzen.

$$[\ddagger A]A \quad HYP$$

De betekenis van deze regel is eenvoudig uit te leggen aan de hand van zijn vertaling naar **LA**:

$$A \rightarrow A.$$

Het verschil met de doelregel is zeer belangrijk. Bij de doelregel staat er een $+$ voor de geïntroduceerde formule. We hebben in het vorige hoofdstuk gezien

dat de + in het formule-element eigenlijk te interpreteren is als “analyseer deze fomule niet”. \ddagger voor een formule in het conditie-element is ook te interpreteren is als “deze formule mag niet geanalyseerd worden”. Bij de hier ingevoerde alternatieve regel is het precies omgekeerd als bij de doelregel: het fomule-element mag geanalyseerd worden, maar de formule in het conditie-element mag enkel gebruik worden voor EM en Trans.

Er zijn vele voordelen verbonden aan de introductie van deze regel. Het belangrijkste voordeel is de mogelijkheid om de gebruikte premissen bij te houden op weg naar het doel. Om dit mogelijk te maken, vervangen we de PREM-regel door de HYP-regel. De verdere verwerking van de premissen verloopt volkomen op dezelfde wijze als bij vorige versies van prospectieve dynamiek. Het enige verschil is dat men met de HYP-regel verplicht is de nodige premissen verder mee te slepen in de conditie van de lijnen die gebruik maken van deze premissen. Het eindresultaat is dus dat je het doel niet op een lege conditie afleidt, maar op een conditie die alle nodige premissen bevat. Op die manier is elke lijn in het bewijs dus universeel correct, onafhankelijk van de premissen. Het gevolg is dat alle informatie die men bekomen heeft in vroegere bewijzen kan hergebruikt worden op elk verder moment. Indien men informatie wilt hergebruiken voor problemen met een gelijkaardige maar niet identieke premisseverzameling, moet men weten uit welke premissen welke informatie afkomstig is.

Hoewel dit betekent dat de lijnen wat langer worden (in de praktijk is dit nadeel zeer te relativieren, men zou immers elke premisse een nummer kunnen geven en enkel het nummer kunnen vermelden in de condities), is er geen enkel computationeel nadeel verbonden aan deze introductie. De \ddagger voor de formule in de conditie duidt er immers op dat deze conditie-formule mag genegeerd worden bij analytische stappen.

Een tweede voordeel van deze regel is het doelgericht gebruik van EM. Met behulp van HYP kan de negatie van het doel worden ingevoerd in het bewijs, wanneer een target daarvan een positief deel zou zijn. De negatie van het doel kan geanalyseerd en gebruikt worden als een gewone premisse. Natuurlijk moet ook hier weer de ingevoerde hypothese meegesleurd worden in de conditie van verdere lijnen. Echter, wanneer het bewijs ten einde is en in de conditie van het doel enkel nog de negatie van het doel te vinden is, mag die negatie gewoon verwijderd worden, omwille van de $\ddagger EM$ -regel.

$$\frac{[\ddagger\neg A, \Delta] + A}{[\Delta] + A}$$

Het normale gebruik van EM verloopt niet echt doelgericht. Het is niet de bedoeling dat er in het verloop van een traditioneel prospectief bewijs bewust

wordt geanalyseerd zodanig dat EM of EM0 zou kunnen toegepast worden. Deze regels worden eerder relatief willekeurig toegepast, telkens wanneer het mogelijk blijkt. Met de voorgestelde oplossing wordt er wel doelgericht gezocht naar toepassingen van EM. Telkens een target een positief deel is van de negatie van het doel, wordt die negatie geanalyseerd in functie van dat target, om zo (indien mogelijk) EM te kunnen toepassen. De regels HYP en \dagger EM zijn bovendien voldoende (er is dan geen nood meer aan EM of EM0). Dit resultaat is het gevolg van de diagrammatische aanpak uit [26].

Een derde voordeel is een interessante alternatieve methode om implicaties (en disjuncties) in het conditie-element te analyseren. De analyse maakt gebruik van volgende afgeleide regels.

$$\frac{[A \supset B, \Delta]C}{\begin{array}{l} [B, \Delta]C \\ [\dagger A]A \end{array}}$$

en

$$\frac{[A \supset B, \Delta]C}{\begin{array}{l} [\dagger A, \Delta']C \\ [\Delta \cup \Delta']C \end{array}}$$

Analyseer B in $[B, \Delta]C$ alsof de hypothese A een extra premisse is. Wanneer blijkt dat B inderdaad het gevolg is van de premissen en A , is de gezochte implicatie $A \supset B$ afgeleid. Deze aanpak werkt veel natuurlijker dan de gewone prospectieve aanpak. Zonder het invoeren van hypothesen moest er bij de meeste implicaties op een of andere wijze EM toegepast worden. Zoals we reeds gezien hebben, verloopt EM standaard op een niet-doelgerichte wijze. Dit was op zich al een nadeel, maar daarnaast is het ook niet heel elegant om het afleiden van implicaties te laten afhangen van een heel andere regel als EM oftewel Uitgesloten Derde. In vele belangrijke alternatieve logica's (intuitionistische, paracomplete en belangrijke logica's voor vaagheid) is Uitgesloten Derde afwezig. De hier voorgestelde werkwijze laat toe Uitgesloten Derde te isoleren.

Daarnaast is het met deze manier om implicaties af te leiden mogelijk om een niet-materiële implicatie \rightarrow te definiëren waarvoor enkele bekende paradoxen van de klassieke logica niet afleidbaar zijn, en die kan gezien worden als de objecttalgige versie van de CL^- -afleidingsrelatie (en als de \rightsquigarrow -implicatie van LA). Als de implicatie in een conditie-element voorkomt, kan deze enkel geanalyseerd worden met de afgeleide regel van hierboven.

$$\frac{[A \rightarrow B, \Delta]C}{\frac{[B, \Delta]C}{[\dagger A]A}}$$

De belangrijkste paradox die vermeden wordt met de implicatie, is de stelling-variant van Ex Falso Quodlibet.

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(\neg A \wedge A) \rightarrow B$$

en

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$$

De aldus gedefinieerde implicatie heeft dus eigenschappen gemeen met een relevante implicatie.

Een vierde (en het belangrijkste) voordeel is dat het de mogelijkheid verschaft tot de formulering van een predikatieve versie van de prospectieve dynamiek zonder pseudo-constanten. In de volgende secties licht ik dit in detail toe.

5.6 Regels

De positief-deel relatie voor het prospectieve bewijssysteem dat ik hier presenteer, heeft de volgende positief deel-relatie pd . Als $\text{pd}(A, B)$ zullen we zeggen dat A een positief deel is van B . De relatie pd is gedefinieerd met behulp van de volgende clausules.

1. $\text{pd}(A, A)$.
2. $\text{pd}(A, \mathfrak{a})$ als $\text{pd}(A, \mathfrak{a}_1)$ of $\text{pd}(A, \mathfrak{a}_2)$.
3. $\text{pd}(A, \mathfrak{b})$ als $\text{pd}(A, \mathfrak{b}_1)$ of $\text{pd}(A, \mathfrak{b}_2)$.
4. $\text{pd}(A, \mathfrak{c})$ als $\text{pd}(A, B_{\mathfrak{c}}(\alpha))$.
5. $\text{pd}(A, \mathfrak{d})$ als $\text{pd}(A, B_{\mathfrak{d}}(\alpha))$.
6. als $\text{pd}(A, B)$ en $\text{pd}(B, C)$, dan $\text{pd}(A, C)$.

5.6.1 Propositionele regels

Doel Een hoofddoel $+G$ mag geïntroduceerd worden op een lijn met $[G]+G$ als tweede element.

Prem Eender welke premisse A mag niet-conditioneel geïntroduceerd worden.²

–Doel De negatie van het hoofddoel $\neg G$ mag geïntroduceerd worden op de lijn $[\ddagger\neg G]\neg G$, als een target er een positief deel van is.

$$\text{aE, bE} \quad \frac{[\Delta]\mathbf{a}}{[\Delta]\mathbf{a}_1 \quad [\Delta]\mathbf{a}_2} \quad \frac{[\Delta]\mathbf{b}}{[\Delta \cup \{\ast\mathbf{b}_2\}]\mathbf{b}_1 \quad [\Delta \cup \{\ast\mathbf{b}_1\}]\mathbf{b}_2}$$

$$\text{c aE, C bE} \quad \frac{[\Delta \cup \{\mathbf{a}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}]A} \quad \frac{[\Delta \cup \{\mathbf{b}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathbf{b}_1\}]A \quad [\Delta \cup \{\mathbf{b}_2\}]A}$$

$$\text{Trans} \quad \frac{\begin{array}{c} [\Delta, B]A \\ [\Delta']B \end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\ddagger\text{Trans} \quad \frac{\begin{array}{c} [\Delta, \ddagger B]A \\ [\Delta']B \end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\text{EM} \quad \frac{\begin{array}{c} [\Delta \cup \{B\}]A \\ [\Delta' \cup \{\ast B\}]A \end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\text{EM0} \quad \frac{[\Delta \cup \{\ast A\}]A}{[\Delta]A}$$

$$\ddagger\text{EM} \quad \frac{\begin{array}{c} [\Delta \cup \{\ddagger B\}]A \\ [\Delta' \cup \{\ast B\}]A \end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\ddagger\text{EM0} \quad \frac{[\Delta \cup \{\ddagger \ast A\}] + A}{[\Delta] + A}$$

5.6.2 Formule-analiserende regels

$$\text{cE} \quad \frac{[\Delta](\forall\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]A(\beta)} \quad \text{voor om het even welke } \beta \in C$$

²Het niet-conditioneel afleiden van een formule A komt op hetzelfde neer als het afleiden van $[\emptyset]A$ in een bewijs. We schrijven dan ook kortweg A in het tweede element van een lijn indien A wordt afgeleid onder de lege conditie.

$$\text{\textcircled{d}E} \quad \frac{[\Delta_1](\exists\alpha)A(\alpha) \quad [\Delta_2, B(\beta)]C}{[\dagger A(\beta)]A(\beta)} \quad \text{als } pp(B(\beta), A(\beta)) \text{ en } \beta \text{ niet voorkomt in } C, \\ A(\alpha) \text{ of } \Delta_1$$

5.6.3 Conditie-analiserende regels

$$\text{C}\text{\textcircled{d}E} \quad \frac{[\Delta \cup \{\exists\alpha A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]A} \quad \text{voor om het even welke } \beta \in \mathcal{C}$$

$$\text{C}\text{\textcircled{v}E} \quad \frac{[\Delta \cup \{\forall\alpha A(\alpha)\}]A}{[A(\beta)] + A(\beta)} \quad \text{voor een } \beta \in \mathcal{C} \\ \text{die niet in } \Gamma \cup \{A\} \cup \Delta \text{ voorkomt}$$

5.6.4 Speciale Trans-regels

$$\text{Transc} \quad \frac{[\Delta]A_c(\alpha) \quad [\mathfrak{c}, \Delta']B}{[\Delta, \Delta']B} \quad \text{voor een } \alpha \in \mathcal{C} \text{ die niet in } \Gamma \cup \Delta \cup \Delta' \cup \{\mathfrak{c}, B\} \\ \text{voorkomt}$$

$$\text{Trans}\text{\textcircled{d}} \quad \frac{[\Delta]\text{\textcircled{d}} \quad [A_\text{\textcircled{d}}(\alpha), \Delta']B}{[\Delta, \Delta']B} \quad \text{voor een } \alpha \in \mathcal{C} \text{ die niet in } \Gamma \cup \Delta \cup \Delta' \cup \{\text{\textcircled{d}}, B\} \\ \text{voorkomt}$$

5.6.5 Regels voor =

$$\text{C=E1} \quad \frac{[\Delta \cup \{B(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{B(\beta), \beta = \alpha\}]A} \quad \text{en} \quad \frac{[\Delta \cup \{B(\beta)\}]A}{[\Delta \cup \{B(\alpha), \beta = \alpha\}]A}$$

als $\beta = \alpha$ een positief deel is van de premissen of van de negatie van het doel.

$$\text{C=E2} \quad \frac{[\Delta \cup \{\alpha = \alpha\}]A}{[\Delta]A}$$

$$\text{C}\neg\text{=E} \quad \frac{[\Delta \cup \{\neg\alpha = \beta\}]A}{[\Delta, A(\alpha), \neg A(\beta)]A} \quad \text{en} \quad \frac{[\Delta \cup \{\neg\beta = \alpha\}]A}{[\Delta, A(\alpha), \neg A(\beta)]A}$$

als $A(\alpha)$ of $\neg A(\beta)$ een positief deel is van de premissen of van de negatie van het doel.

5.7 Hoe moet een prospectief bewijs geconstrueerd worden?

Om op een efficiënte manier een prospectief bewijs te construeren hebben we markeringen nodig. Deze zijn als volgt gedefinieerd:

Definitie 19 Waar $[\Delta]A$ is afgeleid op lijn i , lijn i wordt gemarkeerd als een van de volgende condities is vervuld:

1. lijn i is geen toepassing van een regel die $[A] + A$ introduceert en $A \in \Delta$ of $(B \in \Delta$ en $A = +B)$,
2. voor een $\Delta' \subset \Delta$, komt $[\Delta']A$ voor in het bewijs,
3. er is een B zodat $B, \neg B \in \Delta$,
4. er is een $B \in \Delta$ zodat $\neg B$ onconditioneel voorkomt in het bewijs.

Een formule B is een *doelwit* als $B \in \Delta$ en $[\Delta]A$ komt voor op een ongemarkeerde lijn van het bewijs. Het pad van een lijn i is de kleinste verzameling lijnen waarvoor geldt dat ze de verantwoordende lijnen voor de lijn i of voor een ander lijn in deze verzameling bevat.

De prospectieve regels worden toegepast onder de volgende voorwaarden:

1. De bewijzen starten met het toepassen van de doelregel.
2. Premissen worden geïntroduceerd en formules geanalyseerd als een doelwit een positief deel is van de formule van de toegevoegde lijn.
3. Conditie analyserende regels worden enkel toegepast op doelwitten.
4. Een formule-analyserende regel wordt nooit toegepast op een formule die geen premisse in z'n pad heeft.
5. Eenmaal $[\Delta]A$ voorkomt in een bewijs, voegt men nooit een andere lijn toe met dezelfde formule en conditie (zelfs als de verantwoording van de lijnen verschillend is).

5.8 Voorbeelden

Ik geef enkele voorbeelden van predikatieve prospectieve bewijzen.

Voorbeeld 1: $\forall x \exists y \forall z Pxyz \vdash_{\text{LA}} + \exists x \forall z \exists y Pxyz$.

1	$[\exists x\forall z\exists yPxyz] + \exists x\forall z\exists yPxyz$	Doel
2	$[\forall z\exists yPayz] + \exists x\forall z\exists yPxyz$	1; C \exists E
3	$[\exists yPayb] + \exists yPayb$	2; C \forall E
4	$[Paab] + \exists yPayb$	3; C \exists E
5	$\forall x\exists y\forall zPxyz$	Prem
6	$\exists y\forall zPayz$	5; \forall E
7	$[Pacb] + \exists yPayb$	3; C \exists E
8	$[\dagger\forall zPacz]\forall zPacz$	6; \exists E
9	$[\dagger\forall zPacz]Pacb$	8; \forall E
10	$[\dagger\forall zPacz]\exists yPayb$	7,9; Trans
11	$\exists yPayb$	6,10; \exists Trans
12	$\exists x\forall z\exists yPxyz$	2,11; \forall Trans

Voorbeeld 2: $\forall x(Px \supset Qx), \exists xPx \vdash_{\text{LA}} + \exists xQx$.

1	$[\exists xQx] + \exists xQx$	Doel
2	$[Qa] + \exists xQx$	1; C \exists E
3	$\forall x(Px \supset Qx)$	Prem
4	$Pa \supset Qa$	3; \forall E
5	$[Pa]Qa$	4; \supset E
6	$[Pa] + \exists xQx$	2,5; Trans
7	$\exists xPx$	Prem
8	$+ \exists xQx$	6,7; \exists Trans

Voorbeeld 3: $\forall x\forall z\exists yPxyz \vdash_{\text{LA}} + \exists x\exists y\forall zPxyz$ moet mislukken.

1	$[\exists x\exists y\forall zPxyz] + \exists x\exists y\forall zPxyz$	Doel
2	$[\exists y\forall zPayz] + \exists x\exists y\forall zPxyz$	1; C \exists E
3	$[\forall zPabz] + \exists x\exists y\forall zPxyz$	2; C \exists E
4	$[Pabc] + Pabc$	3; C \forall E
5	$\forall x\forall z\exists yPxyz$	Prem
6	$\forall z\exists yPayz$	5; \forall E
7	$\exists yPayc$	6; \forall E

STOP

Voorbeeld 4: $\forall z\forall x\forall yPxyz \vdash_{\text{LA}} + \forall x\forall y\exists zPxyz$.

1	$[\forall x\forall y\exists zPxyz] + \forall x\forall y\exists zPxyz$	Doel
2	$[\forall y\exists zPayz] + \forall y\exists zPayz$	1; C \forall E
3	$[\exists zPabz] + \exists zPabz$	2; C \forall E

4	$[Pabc] + \exists zPabz$	3; C \exists E
5	$\forall z\forall x\forall yPxyz$	Prem
6	$\forall x\forall yPxyz$	5; \forall E
7	$\forall yPayc$	6; \forall E
8	$Pabc$	7; \forall E
9	$+ \exists zPabz$	4; Trans
10	$+ \forall y\exists zPayz$	2, 9; \forall Trans
11	$+ \forall x\forall y\exists zPxyz$	1, 10; \forall Trans

Voorbeeld 5: $\forall x\exists y(Px \supset Qy), \exists xPx \vdash_{\text{LA}} + \exists yQy$.

1	$[\exists yQy] + \exists yQy$	Doel
2	$[Qa] + \exists yQy$	1; C \exists E
3	$\forall x\exists y(Px \supset Qy)$	Prem
4	$\exists y(Pa \supset Qy)$	3; \forall E
5	$[\dagger(Pa \supset Qa)]Pa \supset Qa$	4; \exists E
6	$[\dagger(Pa \supset Qa), Pa]Qa$	5; \supset E
7	$[\dagger(Pa \supset Qa), Pa] + \exists yQy$	2,6; Trans
8	$\exists y(Pb \supset Qy)$	3; \forall E
9	$[\dagger(Pb \supset Qa)]Pb \supset Qa$	9; \exists E
10	$[\dagger(Pb \supset Qa), Pb]Qa$	10; \supset E
11	$[\dagger(Pb \supset Qa), Pb] + \exists yQy$	2,10; Trans
12	$[Pb] + \exists yQy$	8,11; \exists Trans
13	$\exists xPx$	Prem
14	$+ \exists yQy$	18;19 \exists Trans

Voorbeeld 6: $\forall x\exists y(Px \supset Qy) \vdash_{\text{LA}} + \exists xPx \supset \exists yQy$.

1	$[\exists xPx \supset \exists yQy] + \exists xPx \supset \exists yQy$	Doel
2	$[\neg\exists xPx] + \exists xPx \supset \exists yQy$	1; C \supset E
3	$[\forall x\neg Px] + \exists xPx \supset \exists yQy$	2; C $\neg\exists$ E
4	$[\neg Pa] + \neg Pa$	3; C \forall E
5	$\forall x\exists y(Px \supset Qy)$	Prem
6	$\exists y(Pa \supset Qy)$	5; \forall E
7	$[\dagger(Pa \supset Qb)]Pa \supset Qb$	6; \exists E
8	$[\dagger(Pa \supset Qb), \neg Qb]\neg Pa$	7; \supset E
9	$[\dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)]\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)$	\neg Doel
10	$[\dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)]\neg\exists yQy$	9; $\neg \supset$ E
11	$[\dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)]\forall y\neg Qy$	10; $\neg\exists$ E
12	$[\dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)]\neg Qb$	11; \forall E

13	$[\dagger(Pa \supset Qb), \dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)]\neg Pa$	8,12; Trans
14	$[\dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)]\neg Pa$	6,13; \exists Trans
15	$[\dagger\neg(\exists xPx \supset \exists yQy)] + \exists xPx \supset \exists yQy$	3,14; \forall Trans
16	$+ \exists xPx \supset \exists yQy$	15; EM

Voorbeeld 7: $\exists xPx, \forall x(Px \supset (Qx \wedge \forall y(Qy \supset y = x))), Qa \vdash_{\mathbf{LA}} +Pa$.

1	$[Pa] + Pa$	Doel
2	$\exists xPx$	Prem
3	$[Pb, a = b] + Pa$	2; C=E1
4	$\forall x(Px \supset (Qx \wedge \forall y(Qy \supset y = x)))$	Prem
5	$Pb \supset (Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b))$	$\forall E$
6	$[Pb]Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b)$	$\supset E$
7	$[Pb]\forall y(Qy \supset y = b)$	$\wedge E$
8	$[Pb]Qa \supset a = b$	$\forall E$
9	$[Pb, Qa]a = b$	$\supset E$
10	$[Pb, Qa] + Pa$	3,9; Trans
11	Qa	Prem
12	$[Pb] + Pa$	10,11; Trans
13	$+Pa$	2,12; \exists Trans

Voorbeeld 8: $\forall xPx \vdash_{\mathbf{LA}} + \exists y \forall x (Px \vee Qxy)$

1	$[\exists y \forall x (Px \vee Qxy)] + \exists y \forall x (Px \vee Qxy)$	Doel
2	$[\forall x (Px \vee Qxa)] + \exists y \forall x (Px \vee Qxy)$	1; C $\exists E$
3	$[Pb \vee Qba] + Pb \vee Qba$	2; C $\forall E$
4	$[Pb] + Pb \vee Qba$	3; C $\forall E$
5	$\forall xPx$	Prem
6	Pb	5; $\forall E$
7	$+Pb \vee Qba$	4,6; Trans
8	$+ \exists y \forall x (Px \vee Qxy)$	2,7; \exists Trans

5.9 Correctheid

Laat $im(\Delta, A) = im(B_1, B_2, \dots, B_n, A) = B_1 \rightarrow (B_2 \rightarrow \dots \rightarrow (B_n \rightarrow A) \dots)$, waar $\Delta = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.

Theorema 9 *Als een lijn $[\Delta]A$ voorkomt in een prospectief bewijs uit Γ , dan $\Gamma \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta', A)$, waarbij $\Delta' = \{+A \mid A \in \Delta \text{ en } A \text{ is niet van de vorm } \dagger B\} \cup \{A \mid \dagger A \in \Delta\}$.*

Bewijs. We tonen voor elke prospectieve regel aan dat er een overeenkomstig **LA**-gevolg is dat bewijst dat de vertaling van de lokale conclusielijn het gevolg is van de vertaling van de lokale premisselijnen. De lezer kan (bijvoorbeeld met behulp van de semantiek) nagaan dat het wel degelijk **LA**-gevolgen betreft.

Doel	$\vdash_{\mathbf{LA}} +G \rightarrow +G$
Prem	evident
aE, bE	$\text{im}(\Delta, \mathbf{a}) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta, \mathbf{a}_1), \text{im}(\Delta, \mathbf{a}) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta, \mathbf{a}_2), \text{im}(\Delta, \mathbf{b}) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \{+ * \mathbf{b}_1\}, \mathbf{b}_2)$ en ten slotte $\text{im}(\Delta, \mathbf{b}) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \{+ * \mathbf{b}_2\}, \mathbf{b}_1)$. Deze LA -gevolgen zijn respectievelijk af te leiden met behulp van $\vdash_{\mathbf{LA}} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}_1, \vdash_{\mathbf{LA}} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}_2, \vdash_{\mathbf{LA}} \mathbf{b} \rightarrow (+ * \mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{b}_2), \vdash_{\mathbf{LA}} \mathbf{b} \rightarrow (+ * \mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{b}_1)$.
CaE, CbE	$\text{im}(\Delta \cup \{+\mathbf{a}\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \{+\mathbf{a}_1, +\mathbf{a}_2\}, A), \text{im}(\Delta \cup \{+\mathbf{b}\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \{+\mathbf{b}_1\}, A)$ en $\text{im}(\Delta \cup \{+\mathbf{b}\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \{+\mathbf{b}_2\}, A)$. Deze LA -gevolgen zijn respectievelijk af te leiden met behulp van $\vdash_{\mathbf{LA}} +\mathbf{a}_1 \rightarrow (+\mathbf{a}_2 \rightarrow +\mathbf{a}), \vdash_{\mathbf{LA}} +\mathbf{b}_1 \rightarrow +\mathbf{b}$ en $\vdash_{\mathbf{LA}} +\mathbf{b}_2 \rightarrow +\mathbf{b}$.
Trans	$\text{im}(\Delta \cup \{+B\}, A), \text{im}(\Delta', B) \vdash \text{im}(\Delta \cup \Delta', A)$.
EM	$\text{im}(\Delta \cup \{+B\}, A), \text{im}(\Delta' \cup \{+ * B\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \Delta', A)$. Deze LA -afleiding is af te leiden uit $\vdash_{\mathbf{LA}} (+B \rightarrow + * B) \rightarrow + * B$.
\dagger EM	$\text{im}(\Delta \cup \{B\}, A), \text{im}(\Delta' \cup \{+ * B\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \Delta', A)$. Deze LA -afleiding is af te leiden uit $\vdash_{\mathbf{LA}} (B \rightarrow + * B) \rightarrow + * B$.
EM0	$\text{im}(\Delta \cup \{+ * A\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta, A)$. Deze LA -afleiding is af te leiden uit $\vdash_{\mathbf{LA}} (+ * A \rightarrow A) \rightarrow A$.
\dagger EM0	$\text{im}(\Delta \cup \{ * A\}, +A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta, +A)$. Deze LA -afleiding is af te leiden uit $\vdash_{\mathbf{LA}} (*A \rightarrow +A) \rightarrow +A$.
cE	$\text{im}(\Delta, \mathbf{c}) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta, A_c(\alpha))$. Deze LA -afleiding is af te leiden uit $\vdash_{\mathbf{LA}} \mathbf{c} \rightarrow A_c(\alpha)$.
∂ E	$\vdash_{\mathbf{LA}} A(\beta) \rightarrow A(\beta)$
C ∂ E	$\text{im}(\Delta \cup \{\partial\}, A) \vdash_{\mathbf{LA}} \text{im}(\Delta \cup \{A_\partial(\alpha)\}, A)$. Deze LA -afleiding is af te leiden uit $\vdash_{\mathbf{LA}} A_\partial(\alpha) \rightarrow \partial$.
C \vee E	$\vdash_{\mathbf{LA}} +A(\beta) \rightarrow +A(\beta)$
Transc	$\text{im}(\Delta \cup \{+A_c(\alpha)\}, A), \text{im}(\Delta', \mathbf{c}) \vdash \text{im}(\Delta \cup \Delta', A)$ als α niet voorkomt in

- $\Gamma \cup \Delta \cup \Delta' \cup \{c, B\}$. Deze **LA**-afleiding is af te leiden uit: als $\vdash_{\mathbf{LA}} A \rightarrow +A_c(\alpha)$ en α komt niet voor in A of c , dan $\vdash_{\mathbf{LA}} A \rightarrow +c$.
- Trans δ** $im(\Delta \cup \{+\delta\}, A), im(\Delta', A_\delta(\alpha)) \vdash im(\Delta \cup \Delta', A)$ als α niet voorkomt in $\Gamma \cup \Delta \cup \Delta' \cup \{c, B\}$. Deze **LA**-afleiding is af te leiden uit: als $\vdash_{\mathbf{LA}} (+A_\delta(\alpha) \rightarrow A) \rightarrow (+\delta \rightarrow A)$ als α komt niet voor in A of δ .
- C=E1** $im(\Delta \cup \{+B(\beta)\}, A) \vdash im(\Delta \cup \{+B(\alpha), +\alpha = \beta\}, A)$, wat een gevolg is van $\vdash_{\mathbf{LA}} +\alpha = \beta \rightarrow (+B(\alpha) \rightarrow +B(\beta))$, en $im(\Delta \cup \{+\alpha = \alpha\}, A) \vdash im(\Delta, A)$ wat een gevolg is van $\vdash_{\mathbf{LA}} +\alpha = \alpha$.
- C \neg =E** $im(\Delta \cup \{+\neg\alpha = \beta\}, A) \vdash im(\Delta \cup \{+B(\alpha), +\neg B(\beta)\}, A)$, wat een gevolg is van $\vdash_{\mathbf{LA}} +\neg B(\beta) \rightarrow (+B(\alpha) \rightarrow +\neg\alpha = \beta)$.

■

5.10 Volledigheid

Ik heb een sterk vermoeden dat het prospectief bewijssysteem dat ik hier voorgesteld heb, volledig is. Alle concrete afleidingen die met vroegere voorstellen problemen opleverden slagen met dit systeem wel. Ik heb zeer veel types concrete afleidingen uitgetest, en allen lukten ze met dit bewijssysteem. Ik heb nog geen volledig uitgewerkt volledigheidsbewijs (ik had er een maar het bleek verkeerd te zijn). Ik geef hier wel de grote lijnen van een bewijs, waarin niet alle lemma's bewezen worden.

Definitie 20 Een verzameling formules Λ is een **VER**-verzameling als:

- Als $A \in \Lambda$ dan $+A \in \Lambda$.
- Als $a \in \Lambda$ dan $a_1 \in \Lambda$ en $a_2 \in \Lambda$.
- Als $b \in \Lambda$ en $+\neg b_1 \in \Lambda$ dan $b_2 \in \Lambda$.
- Als $b \in \Lambda$ en $+\neg b_2 \in \Lambda$ dan $b_1 \in \Lambda$.
- Als $c \in \Lambda$ dan $A_c(\alpha) \in \Lambda$ voor alle constanten α die voorkomen in een formule $B \in \Lambda$.
- Als $\delta \in \Lambda$ dan $A_\delta(\alpha) \in \Lambda$ voor minstens 1 constante α .
- Als $+\alpha = \beta \in \Lambda$ en $+A(\alpha) \in \Lambda$ dan $+A(\beta) \in \Lambda$.
- Als $A(\alpha) \in \Lambda$ en $\neg A(\beta) \in \Lambda$, dan $+\neg\alpha = \beta$.

Definitie 21 Een verzameling formules Λ is een FALS-verzameling alss:

- Als $+a \in \Lambda$ dan $+a_1 \in \Lambda$ of $+a_2 \in \Lambda$.
- Als $+b \in \Lambda$ dan $+b_1 \in \Lambda$ en $+b_2 \in \Lambda$.
- Als $+d \in \Lambda$ dan $+A_d(\alpha) \in \Lambda$ voor alle constanten α die voorkomen in een formule $B \in \Lambda$.
- Als $+c \in \Lambda$ dan $+A_c(\alpha) \in \Lambda$ voor minstens 1 constante α .
- Als $+\neg\alpha = \beta \in \Lambda$ en $+A(\alpha) \in \Lambda$ dan $+A(\beta) \in \Lambda$.
- niet zowel $A \in \Lambda$ als $\neg A \in \Lambda$.

Definitie 22 Een koppel $\langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle$ van verzamelingen van formules is een VER-FALS-koppel alss:

- Λ_1 is een VER-verzameling
- Λ_2 is een FALS-verzameling
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$

Lemma 6 Voor ieder VER-FALS-koppel $\langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle$ is er een LA-model M , zodat voor iedere formule A geldt: als $A \in \Lambda_1$, dan $v_M(A) = 1$ en als $A \in \Lambda_2$, dan $v_M(A) = 0$

Lemma 7 Voor elk prospectief bewijs van G uit Γ dat gestopt is zonder dat het doel is afgeleid, bestaat er een VER-FALS-koppel $\langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle$, zodat $\Gamma \in \Lambda_1$ en $G \in \Lambda_2$.

We definiëren de notie \vee -pad:

Definitie 23 Een \vee -pad voor een prospectief bewijs van G uit Γ is een boom waarvan de knopen formules zijn en die gedefinieerd is met behulp van de volgende inductieve definitie. De wortel van de boom is de formule $+G$. Een formule $+K$ (kind) is een kind van een formule $+O$ (ouder), alss (a) (i) $[\Delta_1, \Delta_2, K]A$ is afgeleid uit $[\Delta_1, O]A$ ofwel (ii) in het bewijs is $[O, \Delta_2, \Delta_1]A$ afgeleid uit $[\Delta_2]K$ en $[O, \Delta_1]A$ met behulp van de regels \exists Trans of \forall Trans ofwel (iii) $[\Delta]O$ is afgeleid uit $[\Delta]K$ ofwel (iv) $[K, \Delta]O$ is afgeleid uit $[\Delta]b$, waar $K = *b_1$ en $O = b_2$, ofwel (v) $[A, \Delta]O$ is afgeleid uit $[\Delta]K$, waar $K = b$, $A = *b_1$ en $O = b_2$, en (b) a -formules en c -formules hebben hoogstens 1 kind.

Hoewel een \vee -pad een boomstructuur heeft, spreken we van een pad om dezelfde terminologie te gebruiken als [26]. Een \vee -pad kan gezien worden als een tak van de hele boom van mogelijke \vee -paden die een prospectief bewijs vormen.

Lemma 8 *Als het genereren van een prospectief bewijs stopt zonder succes (er kunnen geen regels meer toegepast worden), dan is er een \vee -pad voor dit bewijs, zodat alle bladeren van dit \vee -pad primitieve formules zijn, die geen positieve delen vormen van premissen.*

We zullen een dergelijk pad in wat volgt een *volledig gefaald \vee -pad* noemen

Lemma 9 *De elementen van een volledig gefaald \vee -pad vormen een FALS-verzameling.*

Vervolgens definiëren we de notie *premissepad* van een \vee -pad.

Definitie 24 *De gewone premissepad van een \vee -pad en een prospectief bewijs is de kleinste verzameling formules Σ , zodat voor elke lijn $[\Delta]A$ van het prospectief bewijs, waarbij A niet van de vorm $+C$ is, ofwel $A \in \Sigma$ als A niet voorkomt in het \vee -pad, ofwel $*B \in \Sigma$ als A wel voorkomt in het \vee -pad en als een formule B , waarvoor $*B \in \Delta$, ook voorkomt in het \vee -pad.*

Definitie 25 *De uitgebreide premissepad van de gewone premissepad Σ van een \vee -pad en een prospectief bewijs is de kleinste verzameling formules Σ' , zodat $(\Sigma \cup \Gamma) \subseteq \Sigma'$ en voor elke formule $A \in \Sigma'$: (1) als $A = \mathbf{a}$, dan ook $\mathbf{a}_1 \in \Sigma'$ en $\mathbf{a}_2 \in \Sigma'$ en (2) als $A = \mathbf{c}$, dan ook $A_c(\alpha) \in \Sigma'$ voor ieder $\alpha \in \mathcal{C}$.*

Lemma 10 *Elk uitgebreid premissepad van prospectief bewijs dat zonder succes gestopt is, vormt een VER-verzameling*

Lemma 11 *Voor ieder prospectief bewijs waarin het doel niet is afgeleid en ieder \vee -pad geldt dat het \vee -pad en het premissepad van dat \vee -pad geen elementen gemeenschappelijk hebben*

Lemma 12 *Als het genereren van een prospectief bewijs stopt zonder succes (er kunnen geen regels meer toegepast worden), dan hebben het volledig gefaald \vee -pad voor dit bewijs en het uitgebreide premissepad voor dit \vee -pad geen elementen gemeenschappelijk.*

5.11 Speciale regel voor de predikatieve klassieke prospectieve dynamiek

Tot slot voer ik nog een belangrijke overtollige regel in die niet strikt noodzakelijk is voor de volledigheid, maar soms wel kan voorkomen dat in prospectieve bewijzen steeds meer nieuwe constanten worden ingevoerd.

$$\text{C}\forall\text{E2} \frac{[\forall\alpha B(\alpha), \Delta]A}{[B(\beta), \forall\alpha B(\alpha), \Delta]A} \quad \text{waar } \beta \text{ een variabele is die reeds voorkomt in het bewijs.}$$

Op zich lijkt deze regel geheel overbodig. Eenmaal $B(\beta)$ aangetoond is, zullen we geen stap dichterbij het vinden van een bewijs voor $\forall\alpha B(\alpha)$. Toch kan het zin hebben om op deze manier naar $B(\beta)$ te zoeken voor reeds ingevoerde constanten. Het is namelijk zo dat de mogelijkheid ook steeds bestaat dat de formule die we wensen af te leiden niet afleidbaar is uit de premissen. In dat geval willen we ook een bewijs hebben voor deze niet afleidbaarheid. Met andere woorden: we willen op een bepaald moment weten dat we de poging om het bewijs te vervolledigen, mogen staken en finaal besluiten dat het gezochte doel niet onconditioneel afleidbaar is uit de premissen.

Als we door het toepassen van C \forall E2-regel zouden te weten komen dat $B(\beta)$ niet afleidbaar is, kunnen we met zekerheid zeggen dat $\forall\alpha B(\alpha)$ niet afleidbaar is en dit zoekpad van het bewijs stoppen. Een gelijkaardige techniek wordt toegepast in klassieke tableaux om te voorkomen dat ad infinitum nieuwe constanten ingevoerd worden.

5.12 Besluit

Ik denk dat ik kan concluderen dat de ontwikkeling van de logica LA in vorig hoofdstuk geleid heeft tot de formulering van een interessant en elegant prospectief bewijssysteem voor predicatieve propositionele logica. Het zou zeer interessant zijn om na te gaan of implementatie van de prospectieve regels en hun beperking in computerprogramma's zou resulteren in efficiënte bewijzen. Indien dit niet zo is, moeten er verdere restricties ingevoerd worden op de toepassing van de prospectieve regels. Indien dit wel zo is, is het formaat belangrijk voor de ontwikkeling van zogenaamde *automated reasoning*-instrumenten.

Hoofdstuk 6

Nuttige informatie extraheren uit prospectieve bewijzen

In dit hoofdstuk stel ik enkele eenvoudige technieken voor om informatie te extraheren uit prospectieve bewijzen, op zo'n manier dat deze informatie bruikbaar is voor andere, toekomstige prospectieve bewijzen. Ten eerste heb ik het over lokale heuristieken bij de constructie van prospectieve bewijzen. Ik bespreek hoe deze formeel kunnen uitgedrukt worden en kunnen veralgemeend worden naar prospectieve bewijzen voor andere problemen. Vervolgens geef ik een methode om zoveel mogelijk informatie van de vorm $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ of van de vorm $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} A$ te extraheren uit een prospectief bewijs. Deze technieken moeten een onderdeel vormen van de explicatie van leerprocessen die te maken hebben met het verwerven van kennis en vaardigheden vanuit de praktijk van het probleemoplossen.

Dit hoofdstuk is nogal abstract. Het is vooral van belang voor het sturen van verder onderzoek. Ik wil in de eerste plaats tonen dat dit een nuttig onderzoeks-terrein is en een aanzet geven tot een formele uitwerking in de toekomst.

6.1 Inleiding

Een probleemoplossingsproces verschaft ons veel informatie die verder reikt dan het probleem in kwestie. De mens slaagt erin de informatie die hij opdoet tijdens het oplossen van problemen aan te wenden voor andere problemen. Hij leert bij als probleemoplosser. In dit hoofdstuk geef ik de aanzet tot het formuleren

van enkele technieken om informatie te extraheren uit probleemoplossingsprocessen. De te extraheren informatie is zinvol voor het oplossen van analoge problemen. Deze technieken moeten bijdragen tot de oplossing van verschillende fundamentele vraagstukken van het fps-onderzoeksprogramma:

- P4 Wat zijn heuristieken bij de oplossing van problemen? Hoe komt een probleemoplosser tot heuristische kennis? Kan er een onderscheid gemaakt worden tussen efficiënte of economische probleemoplossing en rationele probleemoplossing?
- P8 Hoe leidt het oplossen van vroegere problemen tot contextuele zekerheden die kunnen gebruikt worden voor het oplossen van nieuwe problemen?
- P9 Hoe leidt het oplossen van vroegere problemen tot nieuwe oplossingsmethodes?
- P11 Wat is inzicht in (het oplossen van) een verzameling analoge problemen?

Zoals ik ook beklemtoond heb in de inleiding van dit doctoraat, is het essentieel voor de explicatie van wetenschappelijke probleemoplossingsprocessen dat men erin slaagt duidelijk te maken hoe wetenschappers hun methodologie wijzigen, naarmate ze ervaringen opdoen en andere problemen oplossen. Wetenschappers pakken nieuwe problemen aan volgens de methodes die ze hebben geleerd uit vroeger opgeloste problemen en problemen die men zonder succes heeft proberen oplossen.

Adaptieve logica's kunnen beschrijven hoe nieuwe feitelijke en theoretische kennis leidt tot andere methodologische eisen, m.a.w. ze kunnen beschrijven hoe de inhoud van het redeneren de redeneerprocessen kan leiden. Of toepassingen van adaptieve logica-inferentieregels toegelaten zijn, hangt af van wat we weten over hetgeen waarover we redeneren. In feite gaat het wat adaptieve logica's betreft over de theoretische beïnvloeding van de methodologie. In dit hoofdstuk zal ik het echter hebben over de praktische beïnvloeding van de methodologie, dit wil zeggen, ik zal een aantal belangrijke aspecten beschrijven van de manier waarop de praktijk van het probleemoplossen (1) de heuristieken bepaalt voor het oplossen van nieuwe problemen en (2) nieuwe contextuele zekerheden verschaft. In dit hoofdstuk zal met andere woorden een aanzet gegeven worden tot de explicatie van hoe het doorlopen van vroegere oplossingsprocessen het oplossen van nieuwe problemen kan beïnvloeden.

In feite gaat het hier dus over het leren uit probleemoplossing. Binnen de psychologie, de artificiële intelligentie en de cognitieve wetenschap vormt het onderzoek naar hoe menselijk 'leren' precies geschiedt bijna een discipline op

zich. Uit deze literatuur blijkt dat leerprocessen bijzonder complex zijn en dat veel ervan onbewust en niet altijd even systematisch of coherent gebeurt. Het is dus onbegonnen werk om alle aspecten van leerprocessen met behulp van formeel-logische technieken te willen vatten. Niettemin is het wel verhelderend om een aantal aspecten van typische leerprocessen binnen het fps-kader te behandelen.

De praktijk van het probleemoplossen beïnvloedt alle verschillende soorten oplossingsmethodes. Niet alleen lokale oplossingsheuristieken¹ en contextuele zekerheden worden aangeleerd vanuit de oplossingspraktijk. Ook (i) logische methodologieën, (ii) methodes die bepalen hoe de juiste achtergrondkennis moet geconsulteerd worden, (iii) methodes die aangeven wanneer nieuwe problemen relevant worden geacht, (iv) methodes die bepalen hoe nieuwe experimenten opgezet moeten worden en hoe waarnemingen moeten gedaan worden, (v) methodes die bepalen hoe nieuwe begrippen tot stand komen, en (vi) methodes die bepalen hoe en wanneer oude overtuigingen moeten verworpen worden, zijn het gevolg van leerprocessen uit vroegere oplossingsprocessen. Ook de formalisering van deze leerprocessen kan zeer interessant zijn. Het is bijvoorbeeld een heel fascinerend vraagstuk hoe oudere oplossingsprocessen bijdragen tot de keuze van een bepaalde logica bij het oplossen van nieuwe problemen. Ik zal me hier echter beperken tot lokale heuristieken en contextuele zekerheden omdat dit een goede eerste stap is en omdat deze stap het best aansluit bij de rest van de thesis: de technieken die ik hier voorstel kunnen beschreven worden zonder een beroep te doen op andere formele instrumenten dan de dynamische bewijzen waarover ik het in deze thesis heb.

Concreet wil ik nagaan hoe een concreet prospectief bewijs aanleiding geeft tot enerzijds bruikbare informatie van de vorm $\Delta \vdash_L A$ of $\Delta \not\vdash_L A$ en anderzijds informatie die stelt dat de keuze voor een bepaald zoekpad voorrang krijgt op de keuze voor een alternatief pad bij de constructie van een prospectief bewijs voor een analoog probleem (omdat dit vermoedelijk een efficiënter prospectief bewijs oplevert). Het eerste type zie ik als informatie over contextuele zekerheden en het tweede type als informatie over lokale heuristieken. De contextuele zekerheden worden voorgesteld als uitdrukkingen van de vorm $\Delta \vdash_L A$, in plaats van eenvoudigweg als een verzameling van formules, omdat op deze manier duidelijk is hoe ze kunnen verplaatst worden naar andere probleemcontexten, waar een andere logica kan gebruikt worden of waar een andere premisseverzameling wordt gebruikt. Daarnaast zie ik ook uitdrukkingen van de vorm $\Delta \not\vdash_{LA} A$ als

¹Ik herinner de lezer er aan dat ik met lokale oplossingsheuristieken deze heuristieken bedoel die bepalen voor welke oplossingspaden wordt gekozen bij het oplossen van bepaalde klassen van analoge problemen.

contextuele zekerheden. Dit vereist een wat langere uitleg.

In omstandigheden waarin de theorie (of de verzameling contextuele zekerheden) Γ waarbinnen men werkt onvolledig is (niet voor alle formules geldt $\Gamma \vdash A$ of $\Gamma \vdash \neg A$), is het zeer relevante informatie dat $\Gamma \not\vdash A$ voor bepaalde formules A . Het is juist dat deze informatie niet expliciet kan uitgedrukt worden in de natuurlijke taal, maar ze kan wel uitgedrukt worden als “niet- A is compatibel met wat we weten” of “niets weerlegt niet- A ” of eventueel als “ A is geen zekerheid in deze context”. Dergelijke informatie kan voorkomen dat een probleemoplosser meerdere keren vruchteloos nagaat of een bepaalde formule afleidbaar is.

Er zijn natuurlijk belangrijke verschillen tussen de twee types leerprocessen (het leren van lokale heuristieken en het leren van contextuele zekerheden - informatie van de vorm $\Gamma \vdash_L A$ of $\Gamma \not\vdash_L A$) die ik zal beschrijven. Aangeleerde informatie over lokale heuristieken is louter werkbaar voor bepaalde analoge problemen, terwijl nieuw verworven contextuele zekerheden, nuttig kunnen aangewend worden voor ruimere klassen van problemen. Bovendien mag heuristische informatie ook veel minder precies zijn en hoeft ze niet correct of zeker te zijn.

Toch vertonen de processen ook gelijkenissen. Dit zal blijken uit de technieken die ik in dit hoofdstuk voorstel.

Laten we even dieper ingaan op de notie lokale heuristiek. Een probleemoplossingsproces wordt door meer geleid dan enkel globale heuristieken. De mens leert uit concrete oplossingsmethodes heuristieken die opgaan voor klassen van problemen. Deze algemene heuristieken zijn vanuit epistemologisch oogpunt heel interessant. Lokale heuristieken veronderstellen een analogie tussen de problemen waarvoor de heuristieken bruikbaar zijn. De veronderstelde analogieën tussen problemen bezorgen ons structuur in ons kennissysteem, en het mislukken van lokale heuristieken en van de veronderstelde analogieën stuwt de ontwikkeling van nieuwe theorieën vooruit.

6.2 Een informele beschrijving van een formaat voor lokale heuristieken voor de constructie van prospectieve bewijzen

Lokale heuristieken voor prospectieve bewijzen bevatten gegevens die bepalen welke regel wanneer moet toegepast worden wanneer er keuze is tussen verschillende logische regels. De heuristiek bepaalt dus welk pad moet gekozen

worden in de zoekboom² als er keuze is tussen verschillende paden. Een heuristiek bevat een algemene omschrijving van de situatie waarin we voor een bepaalde tak kiezen.

De keuzemogelijkheden kunnen opgedeeld worden in een aantal klassen. Ik som de klassen op die mij het voornaamst lijken. Ten eerste is er de keuze tussen verschillende in te voeren premissen die allen in principe evenzeer zouden kunnen ingevoerd worden met de globale heuristiek. Vervolgens kan men vaak uit verschillende lijnen kiezen voor de analyse van een formule-element. Ten derde kan men kiezen om eerst nieuwe subdoelen te proberen bewijzen (diepte eerst heuristiek), of om eerst oudere subdoelen te proberen bewijzen (breedte eerst). Ten vierde kan men kiezen in welke volgorde men de formules uit een conditie-element wil analyseren. meer bepaald zal het vaak nuttig zijn bepaalde formules voorrang te geven boven andere en de analyse van andere formules zo lang mogelijk uit te stellen. Ten slotte kan het voorkomen dat het doel of een subdoel op meerdere verschillende voorwaarden voorkomt. We moeten dan beslissen in welke volgorde we deze verschillende voorwaarden gaan analyseren. Ook hier is het vooral belangrijk welke eerst en welke laatst aan de beurt zullen komen.

6.2.1 Analogieën

Men kan lokale heuristieken niet loskoppelen van de analogie tussen problemen. Om te weten welke heuristiek we op welk probleem in welke oplossingstoestand moeten aanwenden, moet een heuristiek ook gegevens bevatten over de verzameling situaties waarin ze toepasbaar is. We moeten met andere woorden analoge situaties en analoge problemen op een formele manier groeperen. Het cruciale probleem is dus te weten welke problemen analoog zijn. Hoewel dit een zeer complexe materie is, kunnen we twee eenvoudige vormen van analogie onderscheiden.

Ten eerste is er de eenvoudigste vorm: theoretische analogie. Elk wetenschappelijk probleem heeft zijn relevante achtergrondkennis. Deze achtergrondkennis bestaat uit de wetten of axioma's van de wetenschappelijke discipline die men beoefent. Omdat een theoretische analogie zeer algemeen is kunnen we enkel heuristieken van type 1 afleiden. We geven dus een volgorde aan de premissen die samen de theorie vormen. Deze volgorde zal bepalen in welke volgorde we de premissen invoeren in ons probleemoplossingsproces. Deze heuristiek kan ons veel tijd besparen, of zelfs voorkomen dat we nodeloos in oneindige tak-

²De zoekboom is de boom die de verschillende logisch mogelijke bewijsstadia als knopen heeft, het begin- of doelstadium als wortel, waarbij elk kind een lijn meer heeft dan zijn ouders en waarbij elk blad een doodlopend of geslaagd stadium is.

ken verzeild geraken. Een goed voorbeeld van dergelijke heuristieken vinden we terug bij rekenkundige problemen. Als we een klassieke axiomatisering van de peano-rekenkunde gebruiken, beschikken we over een inductie-axioma. Dit inductie-axioma blijkt steeds invoerbaar in onze bewijzen, maar zal slechts in een aantal gevallen nodig zijn. Daardoor kunnen we voor rekenkundige problemen de heuristische regel vooropstellen dat alle axioma's voorrang krijgen op het inductie-axioma.

Ten tweede kan men problemen analoog noemen doordat ze instanties zijn van dezelfde algemene problemen. Analoge formules in deze zin zijn formules die enkel hierin verschillen dat ze op dezelfde plaatsen een of meer andere constanten hebben staan. Zo zijn $Pa \wedge Qb$ en $Pc \wedge Qd$ analoge formules. Algemeen gesproken zijn $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ en $A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ analoge formules. Analoge problemen zijn problemen waarvoor de oplossingen bestaan uit analoge formules en waarvoor de premissen identiek zijn. De vraag of $Pa \wedge Qb$ een gevolg is van een premisseverzameling Γ waarin geen constanten voorkomen en de vraag of $Pc \wedge Qd$ een gevolg is van diezelfde Γ zijn voorbeelden van analoge problemen.

Andere vormen van analogie kunnen geformaliseerd worden als een lichte wijziging van de premisseverzameling. Ook wanneer het hoofddoel van het ene prospectieve bewijs een subdoel is van een tweede prospectief bewijs, kunnen deze bewijzen gezien worden als bewijzen voor analoge problemen.

Naast deze vormen van analogie bestaan er veel complexere vormen van analogie. De studie naar de aard van analogie bij het menselijke redeneren is zeer complex en waarschijnlijk niet eens in zijn geheel formaliseerbaar.

6.2.2 Formalisering van een lokale heuristiek in een prospectief bewijs

Ik beschrijf lokale heuristieken formeel als verzamelingen bestaande uit positieve heuristische eenheden, negatieve heuristische eenheden en een bepaalde rangschikking van de heuristische eenheden volgens hun opportuniteit bij de constructie van een prospectief bewijs. Daarnaast moet een heuristiek ook informatie bevatten over het type problemen waarop de heuristiek van toepassing is.

Definitie 26 *Een positieve heuristische eenheid \mathfrak{h} bestaat uit*

1. *Formule A*
2. *Premissen Γ*
3. *Conditie Δ*

De betekenis van een heuristische eenheid met als elementen A , Γ en Δ is de volgende: het is zinvol om in een prospectief bewijs \mathbb{P} de formules in Γ in te voeren (met de premisseregels als de formules van Γ premissen zijn van \mathbb{P} of met een formule-analyserende regel als het positieve delen zijn van formules in de formule-elementen van niet-gemarkeerde lijnen) en ze te analyseren met het oog op het afleiden van A , op voorwaarde dat de formules in de voorwaarde Δ af te leiden zijn uit de premissen van het bewijs \mathbb{P} . Afhankelijk van de concrete verzameling analoge problemen waarvoor de heuristiek bestemd is, zijn heuristische eenheden geordend volgens relevantie voor de verzameling problemen. De acties die voortkomen uit *relevantere* heuristische eenheden hebben meer kans om te leiden tot efficiëntere bewijzen. De heuristische eenheden die vooraan komen in de rangschikking moeten eerder in overweging genomen worden dan verder gerangschikte eenheden bij de constructie van prospectieve bewijzen voor de verzameling analoge problemen.

Een heuristische eenheid kan vele heuristische acties tot gevolg hebben. Ik som er enkele op.

1. Wanneer de formule van een relevante heuristische eenheid \mathfrak{H} een target is van een prospectief bewijs, maak deze formule tot het huidige subdoel.
2. Indien de formule van een heuristische eenheid \mathfrak{H} moet gezocht worden, tracht deze te vinden met behulp van de introductie van een premisse van \mathfrak{H} .
3. Indien de formule van een heuristische eenheid \mathfrak{H} moet gezocht worden en de premissen van \mathfrak{H} zijn geïntroduceerd, analyseer de premissen, op zo'n manier dat de elementen van de conditie van \mathfrak{H} nieuwe doelwitten worden van het bewijs.
4. Indien een formule in de conditie van een heuristische eenheid voorkomt en ook in het formule-element van een lijn van het bewijs, verhoog de relevantie van deze heuristische eenheid.

Definitie 27 *Een negatieve heuristische eenheid bestaat uit*

1. *een formule A*
2. *premissen Γ*

Een negatieve heuristische eenheid \mathfrak{H} zegt dat het geen zin heeft om de genoemde premissen te analyseren wanneer er gezocht wordt naar de formule in kwestie. Als de premissen van deze heuristische eenheid overeenkomen met de

premissen van het eigenlijke probleem, is een tak waarin een lijn met als conditie de formule van \mathfrak{H} voorkomt, een doodlopende tak.

Definitie 28 *Een correcte heuristische eenheid is een heuristische eenheid die overeenstemt met een logisch feit, nl.:*

- een positieve heuristische eenheid \mathfrak{H} is correct alss $\Gamma \cup \Delta \vdash A$, waarin Γ de verzameling premissen, Δ de conditie en A de formule van \mathfrak{H} is.
- een negatieve heuristische eenheid \mathfrak{H} is correct alss $\Gamma \not\vdash A$, waarin Γ de verzameling premissen, en A de formule van \mathfrak{H} is.

Correcte heuristische eenheden leveren veel meer informatie op dan incorrecte. Omdat het hier slechts om heuristieken gaat, hoeft de logische informatie niet correct te zijn, maar is het voldoende dat de heuristische informatie die volgt uit de eenheden rationeel is, gegeven de reeds geconstrueerde prospectieve bewijzen.

6.2.3 Extraheren van heuristische elementen uit prospectieve bewijsprocessen

Wanneer een bepaald zoekpad in de constructie van een prospectief bewijs gedeeltelijk succesvol is, d.w.z. het subdoel dat aan de bron ligt van het zoekpad is afgeleid onder een conditie, dan kan uit dat zoekpad een positieve heuristische eenheid geëxtraheerd worden. De positieve heuristische eenheid heeft dan als lokale premissen de ingevoerde premissen in het betreffende zoekpad, als formule de conditioneel afgeleide formule en als condities de nog af te leiden subdoelen in het zoekpad.

Wanneer een bepaald zoekpad in de constructie van een bewijs doodloopt (er zijn subdoelen die niet afgeleid zijn en ook geen aanleiding kunnen geven tot verdere bewijsstappen), kan een negatieve heuristische eenheid geëxtraheerd worden. De negatieve heuristische eenheid heeft dan als premissen de premissen van het hoofdprobleem en als formule het subdoel dat het vertrekpunt vormt voor het doodgelopen zoekpad.

Ook als het zoekpad niet doodloopt, kan het zinvol zijn negatieve heuristische eenheden te extraheren, bijvoorbeeld omdat bepaalde keuzes leiden tot nodeloze complicaties, tot cirkelredeneringen of tot nodeloos lange zoekpaden. Indien het zoekpad in deze gevallen niet zal doodlopen, is de heuristische eenheid niet correct, maar daarom nog niet onbruikbaar.

Ook de rangschikking van de heuristische eenheden moet geëxtraheerd worden uit concrete prospectieve bewijzen. Uit één prospectief bewijs kan men enkel besluiten dat de positieve heuristische elementen in de rangschikking voor de negatieve moeten komen. Bij meerdere bewijzen voor hetzelfde probleem kan het vergelijken van de lengte van zoekpaden (en dus de efficiëntie van het bewijs) leiden tot het lager rangschikken van heuristische eenheden die overeenstemmen met langere zoekpaden. Een dergelijke rangschikking kan ook verkregen worden uit de vergelijking van prospectieve bewijzen voor analoge problemen, al kan het dan zijn dat de rangschikking eerder voortkomt uit een gok. Ik geef een concreet (wat simplistisch) voorbeeld. Stel je zou te weten komen of 313 een priemgetal is en of 201 een priemgetal was. Voor 201 heb je voor elk getal kleiner dan 101, beginnende vanaf 100, geprobeerd of het een deler was van 201. Deze techniek slaagde, maar nam veel tijd in beslag. Voor 313 ben je begonnen met de veelvoud kleiner dan 313 op te schrijven van bepaalde getallen, beginnende vanaf 2, waarbij je telkens deze getallen overslaat die voorkomen in het lijstje veelvoud. Deze techniek bleek sneller te gaan dan de eerste techniek en hoewel de problemen niet gelijk waren, kan je toch de heuristische eenheid extraheren die zegt dat voor gelijkaardige problemen de tweede techniek meer opportuun is dan de eerste techniek.

6.3 Inductie van heuristieken

De creatie van lokale heuristieken is in feite een proces dat zeer gelijkaardig is aan inductie: de vaststelling dat de keuze voor een bepaald zoekpad efficiënter of succesvoller is dan de keuze voor een ander zoekpad wordt veralgemeend naar de mogelijks verkeerde stelling dat de keuze in kwestie efficiënter is voor alle analoge problemen. Het concreet zoeken naar een oplossing voor de analoge problemen kan deze stelling falsifiëren.

Er zijn natuurlijk ook grote verschillen tussen theoretische inductie en wat ik hier *inductie van heuristieken* noem. Ten eerste wordt er bij inductie van heuristieken veralgemeend over alle problemen van een bepaald type. Deze problemen zijn niet niet zomaar objecten die, zoals bij theoretische inductie, voor te stellen zijn met constanten of variabelen, waarop eerste orde predikaten kunnen inwerken. De veralgemening gaat over het oplossen van problemen en meer bepaald situaties bij het oplossen van problemen waar keuzes moeten gemaakt worden voor verschillende zoekpaden.

Concreet houdt de veralgemening in dat heuristische eenheden en hun rangschikking veralgemeend worden naar andere problemen die analoog zijn aan het probleem waaruit de heuristische eenheden zijn afgeleid. Indien de analogie

te maken heeft met het feit dat de twee problemen instanties zijn van eenzelfde algemeen probleem, dan lijkt de veralgemening zeer goed op theoretische inductie. Ik licht dit toe met een heel eenvoudig voorbeeldje: twee positieve heuristische eenheden worden afgeleid uit het oplossen van een probleem. De eerste positieve heuristische eenheid (\mathfrak{H}_1) bestaat uit de formule Pa , premissen $\forall x(Qx \supset Px)$ en $\forall x(Rx \supset Qx)$ en conditie Ra . De tweede (\mathfrak{H}_2) bestaat uit de formule Sa , de premisse $\forall Tx, \forall x(Tx \supset Sx)$ en geen condities. De rangschikking van de eenheden is zo dat \mathfrak{H}_2 voor \mathfrak{H}_1 komt. Deze heuristiek wordt veralgemeend tot: voor alle problemen met variabele x geldt dat \mathfrak{H}'_2 voorrang heeft op \mathfrak{H}'_1 , waarbij \mathfrak{H}'_1 en \mathfrak{H}'_2 respectievelijk de heuristische eenheden \mathfrak{H}_1 en \mathfrak{H}_2 zijn, waarin de constante a in de formules en de condities wordt vervangen door de variabele x .

Bij heuristische inductie wordt specifieke heuristische informatie dus veralgemeend naar meer algemene heuristische informatie. Net zoals bij theoretische inductie, wordt de aanwezige kennis voor het specifieke geval dat gaat over specifieke constanten veralgemeend naar algemene kennis voor een veralgemeend geval, waarbij de kennis universeel gekwantificeerd wordt en de specifieke constanten vervangen worden door variabelen. Anders dan bij theoretische inductie, resulteert de veralgemening niet in theoretische kennis en bovendien is de universele kwantor een metataal-kwantor. De formules waarover de heuristiek gaat, worden niet gekwantificeerd. Enkel de metatalige heuristiek wordt gekwantificeerd. Bij theoretische inductie worden de veralgemeningen weerlegd wanneer falsifiërende instanties gevonden worden. Bij heuristische inductie is dit niet onmiddellijk nodig. Een veralgemeende heuristiek zal pas weerlegd worden wanneer een goed alternatief wordt gevonden.

Voor eenvoudige analogieën zoals in het voorbeeldje hierboven is heuristische inductie niet zeer moeilijk. Echter, bepalen of 2 problemen analoog zijn, kan wel zeer moeilijk zijn. Het is namelijk zo dat analogie een voorwaarde is om heuristieken te kunnen veralgemenen, maar analogieën zijn op hun beurt ook vaak pas aan het licht gekomen door het falen of slagen van heuristische veralgemeningen. Problemen kunnen van tevoren analoog lijken, maar het oplossen van die problemen kan aangeven dat de analogie niet zinvol is voor het oplossen van de problemen en dat er dus ook beter niet kan veralgemeend worden over al de problemen van deze soort. Heuristische inductie en het zoeken van analogieën tussen problemen en hun oplossingsmethodes is dus een typisch dynamisch trial and error-redeneerproces, waarbij het nodig kan blijken voorheen opgedane kennis te herzien in het licht van nieuwe informatie. We kunnen stellen dat heuristisch inductie minder strikt is gebonden aan logische wetten, maar evenzeer een formele dynamiek vertoont.

Ten slotte is het belangrijk hierbij op te merken dat heuristische inductie

niet functioneert zoals theoretische inductie, in dat opzicht dat het niet oppor-
tuun/optimaal zijn van de heuristiek voor een bepaald concreet probleem niet
hoeft te leiden tot het laten vallen van de heuristiek voor de hele klasse analo-
ge problemen. Het is immers mogelijk dat de heuristiek wel nuttig is voor de
meerderheid van de analoge concrete problemen. Dit laatste kunnen we verdui-
delijken aan de hand van de klassieke sorteeralgoritmes. De meeste sorteeralgo-
ritmes kan men confronteren met concrete gevallen waarvoor deze algoritmes
allesbehalve efficiënt blijken. Voor deze concrete problemen is het algoritme
dus geen goede oplossingsheuristiek. Soms kunnen we achter deze uitzonde-
ringsproblemen zelf een analogie zoeken en dan kunnen we de toepasbaarheid
van het algoritme beperken. In andere gevallen vinden we geen samenhang tus-
sen uitzonderingsgevallen en dan zijn we geneigd om de algemene heuristiek te
blijven toepassen, bij gebrek aan beter.

6.4 Expliciet maken van contextuele zekerheden in prospectieve bewijzen

In deze sectie wil ik een methode geven om zoveel mogelijk informatie/zekerheden
van de vorm $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ of van de vorm $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} A$ af te leiden uit een prospectief bewijs.
Concreet zullen we hier propositionele \mathbf{LA}_f gebruiken om de zaken niet onnodig
te compliceren. In eerste instantie de negatieve informatie van het tweede type,
maar ook de positieve informatie van het tweede type, kan pas met zekerheid
bekomen worden wanneer een deel van het prospectieve bewijs al is afgerond
en bepaalde zoekpaden al zijn doodgelopen of geslaagd. Toch is het zinvol om
deze informatie al eerder conditioneel te extraheren en ze te verwerpen als ze
verkeerd zou blijken. Vereenvoudigd kan ik het proces als volgt uitdrukken: ne-
gatieve informatie van de vorm $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} A$ wordt verondersteld correct te zijn, tot
blijkt dan het tegendeel, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$, correct is.

Op deze manier stellen we vast dat het proces van het leren van zekerheden
uit prospectieve bewijzen naast verschillende andere factoren en dynamieken,
ook gedreven wordt door een typische adaptief-logische dynamiek, die belangrij-
ke aspecten gemeenschappelijk heeft met de adaptieve logica voor compatibili-
teit \mathbf{CO} van Batens en Meheus, zie [37]. Ik vertrek vanaf een concreet prospec-
tief bewijsje en laat zien hoe hieruit informatie kan geëxtraheerd worden met
behulp van een variant op de logica \mathbf{CO} .

Beschouw het probleem $p \vee s, r \vee s, r \supset q, q \supset t \vdash_{\mathbf{LA}} +s?$ en het volgende
prospectief bewijs voor dit probleem. Om zoveel mogelijk informatie expliciet te
maken heb ik de premises ingevoerd met de zogenaamde hypothese-regel (zie

vorig hoofdstuk voor meer toelichting over deze speciale regel).

1	$[s] + s$	Doel
2	$[\dagger p \vee s]p \vee s$	Prem
3	$[\dagger p \vee s, \neg p]s$	$\vee E$
4	$[\dagger r \vee s]r \vee s$	Prem
5	$[\dagger r \vee s, \neg r]s$	$\vee E$
6	$[\dagger r \supset q]r \supset q$	Prem
7	$[\dagger r \supset q, \neg q]\neg r$	$\supset E$
8	$[\dagger r \vee s, \dagger r \vee q, \neg q]s$	Trans
9	$[\dagger q \supset t]q \supset t$	Prem
10	$[\dagger r \supset q, \neg t]\neg q$	$\supset E$
11	$[\dagger r \vee s, \dagger r \vee q, \dagger r \supset q, \neg t]s$	Trans

Vervolgens voegen we in vet toe wanneer we welke informatie van de vorm $\Delta \vdash A$ of $\Delta \not\vdash A$ bekommen uit dit bewijs.

1	$[s] + s$	Doel
2	$[\dagger p \vee s]p \vee s$	Prem
3	$[\dagger p \vee s, \neg p]s$	$\vee E$
	$p \vee s, \neg p \vdash s$	
	$p \vee s, r \vee s, r \supset q, q \supset t \not\vdash \neg p$	
	$p \vee s \not\vdash s$	
4	$[\dagger r \vee s]r \vee s$	Prem
5	$[\dagger r \vee s, \neg r]s$	$\vee E$
	$r \vee s, \neg r \vdash s$	
6	$[\dagger r \supset q]r \supset q$	Prem
7	$[\dagger r \supset q, \neg q]\neg r$	$\supset E$
	$r \supset q, \neg q \vdash \neg r$	
8	$[\dagger r \vee s, \dagger r \vee q, \neg q]s$	Trans
	$r \vee s, r \supset q, \neg q \vdash s$	
9	$[\dagger q \supset t]q \supset t$	Prem
10	$[\dagger q \supset t, \neg t]\neg q$	$\supset E$
	$q \supset t, \neg t \vdash \neg q$	
11	$[\dagger r \vee s, \dagger r \vee q, \dagger q \supset t, \neg t]s$	Trans
	$r \vee s, r \supset q, q \supset t, \neg t \vdash s$	
	$p \vee s, r \vee s, r \supset q, q \supset t \not\vdash s$	
	$p \vee s, r \vee s, r \supset q, q \supset t \not\vdash \neg t$	
	$p \vee s, r \vee s, r \supset q, q \supset t \not\vdash \neg r$	

$$p \vee s, r \vee s, r \supset q, q \supset t \not\vdash \neg q$$

We kunnen dit nu efficiënter vatten met behulp van dynamische bewijzen die sterk gebaseerd zijn op de adaptieve logica voor compatibiliteit CO. Het grote verschil met deze logica is de aanwezigheid van een premisseverzameling per afzonderlijke lijn. Er is dus geen algemene premisseverzameling maar elke lijn heeft z'n eigen premisseverzameling. Deze premisseverzameling heeft echter identiek dezelfde functie als bij de gewone adaptieve CO-bewijzen.

Lijnen van de varianten op CO-bewijzen die we hier nodig hebben, bestaan dus uit de premisseverzameling, de conditioneel afgeleide formule en de condities van een lijn van een gewoon CO-bewijs. Voor het overige verlopen de bewijzen precies zoals CO-bewijzen.

De lijnen van de vorm $[\Delta]A$ in het prospectieve bewijs hierboven, worden vertaald naar de speciale CO-bewijzen als lijnen met een lege conditie, met als premisseverzameling de verzameling $\Delta' = \{\Box B \mid B \in \Delta\}$, een lege conditie en als formule $\Box A$. Lijnen van de vorm $\Delta \not\vdash A$ in het prospectieve bewijs hierboven, kunnen vertaald worden naar de speciale CO-bewijzen als lijnen bestaande uit de volgende elementen: als premisseverzameling de verzameling $\Delta' = \{\Box B \mid B \in \Delta\}$, als formule de formule $\neg\Box A$ en als conditie de verzameling $\{\Box A\}$.

6.4.1 Besluit

Het spreekt voor zich dat deze ideeën nog verder uitgewerkt moeten worden. Het was de bedoeling om enerzijds positieve zekerheden (van de vorm $\Delta \vdash A$, voor een zo klein mogelijke Δ) en anderzijds ook negatieve zekerheden (van de vorm $\Delta \not\vdash A$, voor een zo groot mogelijke Δ) af te leiden uit prospectieve bewijzen. Beide types zekerheden zijn zeer belangrijke elementen ten behoeve van toekomstige prospectieve bewijzen. Zo kan voorkomen worden dat verschillende malen dezelfde deelproblemen opgelost worden of dat verschillende malen dezelfde doodlopende paden worden gevolgd. Verder onderzoek moet prospectieve regels opleveren die het afleiden van negatieve informatie sturen, net zoals de huidige prospectieve regels het afleiden van positieve informatie sturen³.

³Merk op dat het formuleren van prospectieve regels voor het afleiden van negatieve informatie in een prospectief bewijs in feite op hetzelfde neer komt als het opstellen van een prospectieve dynamiek voor adaptieve logica's voor compatibiliteit, hoewel de motieven voor dit laatste project anders zijn (zie [37]).

Deel III

Adaptieve dynamiek bij probleemoplossing

Hoofdstuk 7

Prospectieve bewijzen voor adaptieve logica's

De artikels in appendices B en C maken deel uit van dit hoofdstuk. De Nederlandstalige tekst hieronder bouwt verder op deze hoofdstukken. De lectuur van de artikels is dan ook vereist voor het begrijpen van dit hoofdstuk.

7.1 Inleiding

Dit hoofdstuk is gewijd aan prospectieve bewijzen voor adaptieve logica's.

Voor de algemene resultaten verwijs ik naar het artikel [115] in appendix C. Daar stel ik een techniek voor om prospectieve bewijzen te genereren voor adaptieve logica's. Ik presenteer in dat artikel een algemene methode om, vanuit prospectieve bewijzen voor de onderlimietlogica van adaptieve logica's, prospectieve bewijzen te construeren voor de adaptieve logica's zelf. Ik gebruik daar dus eigenlijk een black box: nl. de prospectieve bewijzen voor de LLL. Eenmaal men deze heeft, kan men met de daar voorgestelde methode prospectieve bewijzen bekomen voor de adaptieve logica in kwestie. Voor de onderlimietlogica $CLuN$ van 2 concrete adaptieve logica's $CLuN^m$ en $CLuN^r$ geef ik (bij wijze van voorbeeld) ook een uitgewerkt prospectief bewijssysteem, zodat voor $CLuN^m$ en $CLuN^r$ in het betreffende artikel een volledige bewijsprocedure gegeven is.

In dit hoofdstuk zelf definieer ik enkel een eenvoudige techniek om de abstracte black box procedure van het artikel in appendix C te concretiseren voor

een ruime verzameling zogenaamde keurige adaptieve logica's. De adaptieve logica's in kwestie worden *keurig* genoemd omdat ze gebaseerd zijn op een onderlimietlogica met een keurige semantiek. Ik zal kort toelichten waar welke regels uit [115] moeten toegevoegd of veranderd worden ten opzichte van de prospectieve bewijzen voor $CLuN^m$ en $CLuN^r$ in appendix C.

Een kleine uitweiding omtrent het verschil tussen bewijsprocedures en prospectieve bewijzen is aan de orde. Binnen het fps-programma is het belangrijk dat een prospectief bewijssysteem geen deterministische procedure definieert. Immers: het is geenszins realistisch dat de probleemoplosser slechts één vooraf bepaald zoekpad kan volgen naar de oplossing van zijn probleem. Om die reden moet een prospectief bewijssysteem dat moet functioneren als onderdeel van een fsp, ruimte laten voor alternatieve, even rationele zoekpaden voor de probleemoplosser. Een procedure definieert per definitie slechts één voorafbepaald zoekpad. In [115] presenteer ik een deterministische bewijsprocedure gebaseerd op de prospectieve bewijzen, omdat dit buiten het fps-programma interessanter is in functie van geautomatiseerd redeneren (automated reasoning) en in functie van het definiëren van criteria voor de finale afleidbaarheid van formules met een adaptieve logica. De lezer zal echter ondervinden dat het zeer eenvoudig is om het determinisme van de procedures uit de procedures te verwijderen. Op deze manier bekomt men prospectieve bewijzen die dienst kunnen doen binnen fsp's.

In de inleiding en het hoofdstuk over prospectieve bewijzen voor klassieke logica (hoofdstukken 1 en 5) heb ik gemotiveerd waarom prospectieve bewijzen een essentieel onderdeel zijn van de fsp's. Ook heb ik in de inleiding besproken waarom adaptieve logica's onmisbaar zijn voor de formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing. Het licht dus voor de hand dat prospectieve bewijzen voor adaptieve logica's een onmisbaar onderdeel vormen van de fsp's in het kader van het fps-programma. Hiermee worden de volgende fundamentele vraagstukken van het fps-programma aangepakt.

- P6 Welke nieuwe kennis kan, afhankelijk van de context, op een weerlegbare rationale manier afgeleid worden uit de contextuele zekerheden. Hoe kan het systeem van zekerheden (de theorie) uitgebreid worden? Hoe kan de bijgewonnen kennis bijdragen tot het oplossen van de problemen?
- P7 Welke kennis kan er, afhankelijk van de context, nog worden overgehouden van een problematische verzameling van contextuele zekerheden? Hoe kan de kennis die men overhoudt bijdragen tot het oplossen van de problemen?

Een belangrijke aanzet tot de oplossing van deze vraagstukken is zoals gezegd reeds aanwezig in [115]. In dit hoofdstuk zal ik een techniek uitwerken om

volledig uitgewerkte prospectieve bewijzen voor een ruime verzameling adaptieve logica's te definiëren. Het betreft adaptieve logica's met een onderlimietlogica met een keurige semantiek (voor de definitie van een keurige semantiek, zie hoofdstuk 2) en abnormaliteiten die te maken hebben met het alternatieve gedrag van enkele logische symbolen.

7.2 Prospectieve bewijzen voor logica's met een keurige semantiek

In deze sectie zal ik prospectieve bewijzen definiëren voor logica's met een keurige semantiek aan de hand van hun vertaling naar klassieke logica (in appendix B en verder in dit hoofdstuk wordt de vertaling aangeduid met de functie tr). De vertaling is gedefinieerd in appendix B. In het artikel in appendix B wordt ook bewezen dat de vertaling correct is.

Laat \mathbf{K}' een logica zijn met een keurige semantiek en $\Psi = \{\circ_1, \circ_2, \dots\}$ een verzameling alternatieve symbolen in de taal \mathcal{L} van deze logica. De andere symbolen van de taal hebben exact de klassieke semantiek. Definieer de taal $\mathcal{L}_\#$ als de taal \mathcal{L} , verrijkt met de overige klassieke symbolen (deze die nog niet aanwezig zijn in \mathcal{L}) en met predikaten $P_{f(A)}^{h(A)}$ voor elke $A \in \mathcal{F}$, waar \mathcal{F} de verzameling is van de open en gesloten formules van \mathcal{L} , waar f en h de functies zijn die gedefinieerd zijn in sectie 2.3 van hoofdstuk 2. Laat \mathbf{K} de logica zijn met taal $\mathcal{L}_\#$ en zodat alle formules van \mathcal{L} exact dezelfde semantiek hebben als in \mathbf{K}' en de semantiek van de formules in $\mathcal{L}_\# - \mathcal{L}$ opgebouwd wordt met behulp van de semantische clausules van \mathbf{K}' en clausules C2.1 tot C2.9 in sectie 2.3 van hoofdstuk 2.

De prospectieve dynamiek die ik hier definieer is een prospectieve dynamiek voor de logica \mathbf{K}' , maar de prospectieve bewijzen zijn in de taal van de uitgebreide logica \mathbf{K} . Dit levert geen problemen op, omdat de premissen en het doel worden verondersteld deel uit te maken van de taal \mathcal{L} van de logica \mathbf{K}' en omdat voor alle doelen A en premissen Γ die geformuleerd zijn in de taal \mathcal{L} geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}'} A$ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} A$.

Ik pas dus de ideeën voor de keurige semantieken toe uit hoofdstuk 2 en appendix B. Toch is er een belangrijk verschil tussen de logica's met keurige semantieken die ik daar gedefinieerd heb en de logica's die ik hier gebruik. Bij de originele definitie van de keurige semantieken werd verondersteld dat de taal van de alternatieve logica dezelfde symbolen bevat als de taal van klassieke logica. Dit is niet handig voor de constructie van een prospectief bewijssysteem. Daarom veronderstel ik dus dat de klassieke symbolen sowieso aanwezig zijn in de taal van \mathbf{K} , met hun klassieke semantiek. De symbolen die een typische

keurige semantiek hebben (bijvoorbeeld met gluts of gaps voor verschillende symbolen), worden verondersteld andere symbolen te zijn dan de klassieke. Deze keuze maakt het mogelijk om de logica \mathbf{K} in te bedden in zichzelf, zodat er voor elke Γ en A respectievelijk een $\text{tr}(\Gamma)$ en een $\text{tr}(A)$ bestaat waarvoor geldt dat in $\text{tr}(\Gamma)$ en $\text{tr}(A)$ enkel klassiek-logische symbolen voorkomen en $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} A$ als $\text{tr}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{K}} \text{tr}(A)$.

Voor de analyse van primitieve formules of formules van de vorm $\circ A$ of $A \circ B$, waarbij \circ een klassiek symbool is, gelden de regels van de prospectieve bewijzen voor klassieke logica (zie hoofdstuk 5).

Daarnaast komen er nog conditie-analyserende en formule-analyserende regels bij voor formules van de vorm $\circ A$ of $A \circ B$, waarbij \circ een alternatief symbool is. Deze alternatieven worden geanalyseerd naar hun klassiek-logische vertaling tr . Voor de definitie en het correctheidsbewijs van deze vertaling, zie appendix B. Ik wijs erop dat in dat artikel in de appendix de vertaling gebeurd naar klassieke logica, maar omdat we veronderstellen dat \mathbf{K} een uitbreiding is van klassieke logica (we hebben afgesproken dat \mathbf{K} alle klassieke symbolen bevat met hun klassieke semantiek), kan in deze context de vertaling gewoon binnen de logica gebeuren. Dit maakt het mogelijk om de vertaling te gebruiken in de regels voor de prospectieve dynamiek.

Formule-analyserende regel voor $\circ \in \Psi$. Laat A een formule zijn van de vorm $\circ B$, van de vorm $B \circ C$ of van de vorm $\circ \xi A(\xi)$ (als \circ een kwantor is).

$$\circ\text{E} \quad \frac{[\Delta]A}{[\Delta]\text{tr}(A)}$$

Conditie-analyserende regel voor $\circ \in \Psi$. Laat A een formule zijn van de vorm $\circ B$, van de vorm $B \circ C$ of van de vorm $\circ \xi A(\xi)$.

$$\text{C}\circ\text{E} \quad \frac[\{\{A\} \cup \Delta\}D]{\{\{\text{tr}(A)\} \cup \Delta\}D}$$

7.3 Keurige adaptieve logica's

We zullen prospectieve bewijzen ontwikkelen voor adaptieve logica's met zowel als onderlimietlogica en als bovenlimietlogica een logica met een keurige semantiek, en waarbij het verschil hem zit in de betekenis van logische symbolen. Hierbij is een waarschuwing aan de orde: ik concentreer me NIET op het technisch goed geconstrueerd zijn van dergelijke adaptieve logica's. Zo is er geen enkele garantie dat men met de onderstaande definitie geen zogenaamde flipflop-adaptieve logica's creëert (adaptieve logica's waarbij de adaptieve gevolgzameling steeds gelijk is aan de onderlimiet-logische gevolgzameling). Mijn

bedoeling is eerder om voor zoveel mogelijk bestaande en toekomstige adaptieve logica's geschikte prospectieve bewijzen te genereren.

Vele adaptieve logica's waaronder de belangrijkste inconsistentie-adaptieve logica's vallen perfect binnen dit keurige formaat. Alle correctieve adaptieve logica's waarbij de onderlimietlogica een logica met gluts of gaps voor sommige symbolen is en de bovenlimietlogica **CL** is, zijn keurige adaptieve logica's.

De onderlimietlogica is een logica met een keurige semantiek waarvan de taal verrijkt is met de klassieke symbolen, met klassiek logisch gedrag, net zoals in vorige sectie. Laat Π de verzameling zijn van de onderlimietlogische symbolen die een andere betekenis hebben in de onderlimiet- dan in de bovenlimietlogica. Laat voor iedere $\circ \in \Pi$, \circ^u het overeenstemmende bovenlimiet-symbool zijn, d.w.z het symbool \circ^u van de onderlimietlogica dat dezelfde betekenis heeft als het symbool \circ van de bovenlimietlogica. Als de bovenlimietlogica klassieke logica is, is de verzameling $\{\circ^u \mid \circ \in \Pi\}$ een deelverzameling van de klassieke symbolen. Waar ik hieronder $A \circ B$ en $A \circ^u B$ schrijf kan dit ook staan voor $\circ A$ en $\circ^u A$ als \circ een unair connectief is of $\circ \xi A(\xi)$ en $\circ^u \xi A(\xi)$ als \circ een kwantor is.

Definitie 29 *Keurige adaptieve logica.*

Een keurige adaptieve logica is een adaptieve logica opgebouwd uit de volgende elementen:

- *Onderlimietlogica **LLL**: een logica met een keurige semantiek, verrijkt met alle klassiek-logische symbolen met klassiek gedrag.*
- *Abnormaliteiten: $\Omega = \{\exists((A \circ^u B) \wedge \neg(A \circ B)) \mid A, B \in \mathcal{F}, \circ \in \Pi\} \cup \{\exists((A \circ B) \wedge \neg(A \circ^u B)) \mid A, B \in \mathcal{F}, \circ \in \Pi\} - \{A \mid A \text{ of } \neg A \text{ zijn LLL-stellingen}\}$, waarbij \exists staat voor de existentiële sluiting en \mathcal{F} staat voor de verzameling van de open en gesloten formules van de taal \mathcal{L} . Π is een verzameling **LLL**-symbolen en voor elke $\circ \in \Pi$ is \circ^u ook een **LLL**-symbool. Een abnormaliteit wordt afgekort met behulp van respectievelijk de uitdrukkingen $!(\leftarrow, \circ, A, B)$ en $!(\rightarrow, \circ, A, B)$.*
- *Strategie: Betrouwbaarheid of Minimale Abnormaliteit*

Ik geef twee voorbeelden van adaptieve logica's die op deze manier kunnen opgebouwd worden. De adaptieve logica's **CLuN^m** en **CLuN^r** kunnen bekomen worden door als onderlimietlogica de logica **CLuN** te nemen (voor de keurige semantiek van **CLuN**, zie appendix B) —de taal van deze logica is deze van klassieke logica uitgebreid met een paraconsistente negatie \sim (alle klassieke symbolen vertonen klassiek-logisch gedrag). Laat Π gelijk zijn aan $\{\sim\}$ en $\sim^u = \neg$ (\neg is de klassieke negatie). De lezer kan nagaan dat de abnormaliteiten die met behulp

van de bovenstaande definitie worden bekomen equivalent zijn aan de originele abnormaliteiten van \mathbf{CLuN}^m en \mathbf{CLuN}^r . Ook de onvolledigheid-adaptieve logica's \mathbf{CLaN}^m en \mathbf{CLaN}^r (zie [42]) kunnen op exact dezelfde wijze gevat worden binnen bovenstaand formaat. Hetzelfde geldt voor adaptieve logica's voor de combinaties van onvolledigheid en inconsistentie: \mathbf{CLoN}^m en \mathbf{CLoN}^r .

De inductie-adaptieve logica's \mathbf{IL}^r en \mathbf{IL}^m uit [36] zijn een wat apart geval. Als je als onderlimietlogica klassieke logica neemt, en $\Pi = \{\forall\}$ en $\forall^u = \exists$, bekom je met bovenstaande definitie als abnormaliteiten $\Omega = \{\exists(\exists\xi A(\xi) \wedge \neg\forall\xi A(\xi)) \mid A(\xi) \in \mathcal{F}\}$. Deze abnormaliteiten zijn niet equivalent aan de originele abnormaliteiten van de inductielogica's: $\Omega = \{\exists A \wedge \exists\neg A \mid A \in \mathcal{F}^o\}$, waar \mathcal{F}^o staat voor de zuiver functionele formules in \mathcal{F} . Verder onderzoek moet duidelijk maken wat precies het verschil is en hoe definitie 29 kan aangepast worden zodat ook deze inductielogica's letterlijk binnen het gedefinieerde formaat zouden passen. Ik vermoed dat dit geen zware complicaties met zich mee zal brengen.

7.4 Prospectieve bewijzen voor conditionele afleidbaarheid van keurige adaptieve logica's

De prospectieve bewijzen voor conditionele afleidbaarheid van keurige adaptieve logica's zijn volledig opgesteld zoals de prospectieve bewijzen voor de conditionele afleidbaarheid van \mathbf{CLuN}^m en \mathbf{CLuN}^r in appendix C. Voor deze bewijzen gelden dezelfde regels als voor klassiek-logische prospectieve bewijzen, maar de lijnen hebben een tweede, *adaptieve* conditie, de procedures verlopen wat anders en er zijn een aantal extra alternatieve regels nodig. Hetzelfde geldt voor de conditionele afleidbaarheid van keurige adaptieve logica's, behalve dat het natuurlijk over andere symbolen kan gaan.

Voor het soort lijnen, en het verloop van de procedure, verwijs ik dan ook naar het betreffende artikel in appendix C. Ik licht enkel de verschillen met het systeem dat daar gedefinieerd is toe. Deze verschillen liggen in vier klassen regels.

De eerstvolgende 4 regels zijn de regels die verschillen met de regels voor de prospectieve bewijzen voor conditionele \mathbf{CLuN}^m -afleidbaarheid. Deze regels voegen altijd abnormaliteiten toe aan de conditie-elementen. Omwille van de toevoeging “ $\neg\{A \mid A \text{ of } \neg A \text{ zijn LLL-stellingen}\}$ ” in de definitie van de abnormaliteiten in definitie 29, zullen sommige van de abnormaliteiten die aan conditie-elementen moeten toegevoegd worden, voor bepaalde concrete adaptieve logica's niet bestaan. In dat geval vervalt de concrete prospectieve regel in kwestie.

$$\begin{array}{l} \circ\text{E} \quad \frac{[\Delta] A \circ B^\Theta}{[\Delta] A \circ^u B^{\Theta \cup \{!(\leftarrow, \circ, A, B)\}}} \\ \neg\circ\text{E} \quad \frac{[\Delta] \neg(A \circ B)^\Theta}{[\Delta] \neg(A \circ^u B)^{\Theta \cup \{!(\leftarrow, \circ, A, B)\}}} \\ \\ \text{C}\circ\text{E} \quad \frac{[\Delta, A \circ B] C^\Theta}{[\Delta, A \circ^u B] C^{\Theta \cup \{!(\leftarrow, \circ, A, B)\}}} \\ \\ \text{C}\neg\circ\text{E} \quad \frac{[\Delta, \neg(A \circ B)] C^\Theta}{[\Delta, \neg(A \circ^u B)] C^{\Theta \cup \{!(\leftarrow, \circ, A, B)\}}} \end{array}$$

De volgende regels blijven gewoon exact dezelfde als voor CLuN^m en CLuN^r .

$$\begin{array}{ll} \text{Trans} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}] A^\Theta}{[\Delta'] B^{\Theta'}} & \text{EM} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}] A^\Theta}{[\Delta' \cup \{\neg B\}] A^{\Theta'}} \\ \text{EM0} \quad \frac{[\Delta \cup \{\neg A\}] A^\Theta}{[\Delta] A^\Theta} & \text{IC} \quad \frac{[\Delta] Dab(\Lambda \cup \Lambda')^{\Theta \cup \Lambda'}}{[\Delta] Dab(\Lambda \cup \Lambda')^\Theta} \end{array}$$

7.5 Prospectieve bewijzen voor keurige adaptieve logica's

Om de eigenlijke prospectieve bewijzen voor keurige adaptieve logica's te construeren, moet men eenvoudigweg de prospectieve regels uit de vorige sectie en uit sectie 7.2 van dit hoofdstuk inpassen in de procedures die gedefinieerd zijn in [115] in appendix C. Omdat de procedures daar algemeen zijn, levert dit geen nieuwe problemen op.

7.6 Besluit

De belangrijkste bijdrage voor de constructie van prospectieve bewijzen voor adaptieve logica's is natuurlijk het artikel in appendix C waar dit hoofdstuk de hele tijd aan refereert. Hier heb ik enkel een methode gegeven om gebruik

makend van de keurige semantiek de prospectieve bewijzen van het artikel in appendix C te concretiseren naar een grote groep adaptieve logica's. Niettemin ben ik van mening dat het idee om keurige adaptieve logica's te definiëren in de toekomst zeer zinvol kan zijn bij het aanpakken van de procedurele aspecten van adaptieve logica's. Omdat al de zogenaamde keurige adaptieve logica in feite dezelfde structuur vertonen, kunnen middelen om efficiënt te zoeken naar wat afleidbaar is met dergelijke adaptieve logica's in het algemeen onderzocht worden, wat veel tijd bespaart en meer veralgemenende inzichten oplevert.

Ook voor dit hoofdstuk –in samenwerking met de resultaten van appendix C– zou het zeer interessant zijn om de voorgestelde technieken te implementeren in een computerprogramma. Vermoedelijk zal hieruit blijken waar welke verbeteringen moeten aangebracht worden.

Hoofdstuk 8

De complexiteit van adaptieve logica's

De artikels in appendices D en E maken deel uit van dit hoofdstuk.

8.1 Inleiding

Dit hoofdstuk betreft de complexiteit van adaptieve logica's. De complexiteit van probleemoplossend redeneren vormt een belangrijk onderdeel van het fps-programma. Onderzoek naar de complexiteit probeert volgende fundamentele vraagstukken uit hoofdstuk 1 te beantwoorden.

- P18 Wat is de complexiteit van relevante klassen van problemen? Welke deelklassen zijn minder complex?
- P19 Hoe gaat een probleemoplosser om met een heel hoge complexiteit (fundamentele onoplosbaarheid van problemen)?

Naar aanleiding van het verschijnen van een publicatie van Leon Horsten en Philip Welch (zie [66]) over de complexiteit van adaptieve logica's, heeft dit thema ook in Gent aan belang gewonnen. In hun artikel bewijzen Horsten en Welch enkele complexiteitsresultaten voor de logica's CLuN^m en CLuN^r en trekken er negatieve conclusies uit over het realisme en de bruikbaarheid van adaptieve logica's. Daarnaast vermelden ze ook een en ander over de (on)eindigheid van adaptieve bewijzen.

Het was onmiddellijk duidelijk dat een aantal van hun conclusies gestoeld waren op diepe misverstanden omtrent de aard van adaptieve logica's. Een meer gedetailleerd onderzoek naar de fouten in hun redeneringen heeft echter (althans wat mijzelf betreft) veel nieuwe inzichten opgeleverd in adaptieve logica's en adaptieve bewijzen. Al snel bleek dat er iets mis moest zijn met hun vaststelling dat adaptieve logica's met de Minimale Abnormaliteitenstrategie en adaptieve logica's met de Betrouwbaarheidsstrategie fundamenteel even complex waren. Al 20 jaar was bekend dat het onmogelijk was finale afleidbaarheid voor de Minimale Abnormaliteitenstrategie te definiëren zonder beroep te doen op oneindige uitbreidingen van bewijzen, wat wel mogelijk is voor de Betrouwbaarheidsstrategie. De oneindigheid van de uitbreidingen van bewijzen in deze definitie, zou normaal gezien een groot verschil moeten maken wat betreft de complexiteit van de finale afleidbaarheidsrelatie en dus van de adaptieve logica's. Na twee maanden zwoegen met grafentheorie en veel mislukte pogingen is het me gelukt aan te tonen dat de resultaten van Horsten en Welch wat betreft de complexiteit van adaptieve logica's met de Minimale Abnormaliteitenstrategie verkeerd waren. Horsten en Welch hadden "bewezen" dat beide strategieën Σ_3^0 -complex¹ waren. Ik heb bewezen dat de Minimale Abnormaliteitenstrategie Π_1^1 -complex is. Dit heb ik uitgewerkt in het artikel [114], zie appendix E, dat in druk is in Synthese.

De andere redeneerfouten van Horsten en Welch hebben we opgeschreven in een eerder programmatorisch artikel [35] (zie appendix D) waarin we uitleggen wat de precieze functie is van adaptieve logica's en waarom het, met die functie in het achterhoofd, geen bezwaar kan zijn dat adaptieve logica's zeer complex zijn.

8.2 Overzicht van een aantal bijkomende resultaten

Het is niet omdat de adaptieve gevolgrelaties voor bepaalde premisseverzamelingen zeer complex kunnen zijn, dat deze gevolgrelaties altijd zo complex zijn. Voor zeer veel realistische situaties kunnen veel minder drastische complexiteitsresultaten bekomen worden. Ik geef hier een kort overzicht van enkele resultaten. Ze komen hoofdzakelijk voort uit inzichten afkomstig uit de adaptief-logische prospectieve bewijzen (zie vorig hoofdstuk).

Definitie 30 *Een adaptief-logisch probleem is een vraag of $\Gamma \vdash_{\text{AL}} A$ voor een*

¹Voor de definitie van deze complexiteitsbegrippen verwijs ik naar [100].

premissesverzameling Γ , een formule A en een adaptieve logica \mathbf{AL} .

Definitie 31 Een adaptief-logisch probleem of $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ is stabiel-oplosbaar alss (i) er een positieve test voor \mathbf{LLL} -afleidbaarheid bestaat, (ii) $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ alss A is afleidbaar op een eindig stadium van een eindig bewijs op zo'n manier dat het niet kan gemarkeerd worden in een extensie van het bewijs, en (iii) $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{AL}} A$ alss A is afgeleid op lijn i van een eindig stadium van een eindig bewijs zodanig dat lijn i is gemarkeerd op een eindig stadium en zijn markering niet kan verliezen in om het even welke uitbreiding van het bewijs.

Definitie 32 Een procedure lost een ja/nee-probleem stabiel op alss het algoritme met het correcte antwoord stopt of nooit stopt maar een stabiel correct antwoord geeft vanaf een bepaald punt voor elke mogelijke invoer.

Theorema 10 Een probleem waarvoor er een procedure bestaat die het probleem stabiel oplost is maximaal Δ_2^0 -moeilijk.

Definitie 33 $\text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, A)$ is de verzameling van alle verzamelingen abnormaliteiten Δ zodat $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} A \check{\vee} \text{Dab}(\Delta)$ en als $\Delta \in \text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, A)$ dan is er geen Δ' zodat $\Delta \subset \Delta'$ en $\Delta' \in \text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, A)$.

Definitie 34 $\text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ is de verzameling van alle verzamelingen abnormaliteiten Δ zodat $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \text{Dab}(\Delta)$ en als $\Delta \in \text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ dan is er een Δ' zodat $\Delta \subset \Delta'$ en $\Delta' \in \text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$.

Theorema 11 Als er geen $\Delta \in \text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ is zodat $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{LLL}} A \check{\vee} \text{Dab}(\Delta')$ voor een $\Delta' \subseteq \Delta$, dan $\text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma) \subseteq \text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, A)$.

Theorema 12 Als \mathbf{LLL} beslisbaar is en $\text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, A)$ is eindig, dan is het probleem of $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ ook beslisbaar.

Theorema 13 Een adaptief-logisch probleem of $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ is stabiel oplosbaar als $\text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ eindig is of $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} A$.

Theorema 14 $\text{MinDab}_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ en $\text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, A)$ kunnen maximaal Δ_2^0 -volledige verzamelingen zijn.

Theorema 15 Als een adaptief-logisch probleem of $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ stabiel oplosbaar is, dan kan het maximaal Δ_2^0 -moeilijk zijn.

De bovenstaande resultaten zijn slechts een bescheiden eerste stap in een zeer belangrijk onderzoeksterrein. Zowel om filosofische redenen als omwille van de potentiële computertoepassingen is een computationele studie van adaptieve logica's onontbeerlijk. In dit doctoraat worden voornamelijk eerder abstracte computationele resultaten gepresenteerd, maar een meer toepassingsgerichte *ingenieursaanpak* is minstens even belangrijk.

Hoofdstuk 9

Dynamieken veroorzaakt door vaagheid

De artikels in appendices F en G maken deel uit van dit hoofdstuk.

9.1 Inleiding

Vaagheid is de oorzaak van een belangrijke dynamiek bij probleemoplossend redeneren. Met vaagheid bedoel ik hier (zoals gebruikelijk in de filosofische literatuur) de afwezigheid van scherpe grenzen aan de extensies van predikaten, m.a.w. het fenomeen waarbij de termen slecht gedefinieerd zijn en er dus gevallen bestaan waarvoor het onduidelijk is of het geval nu in de extensie van het predikaat valt of wel erbuiten. Het ligt voor de hand dat een dergelijk gebrek aan precisie leidt tot inconsistenties en het afleiden van nonsens. Dit wordt onder andere duidelijk gemaakt met behulp van de zogenaamde sorites paradoxen. Ik geef kort een voorbeeldje van een sorites paradox. Het voorbeeld komt van Graham Priest en hoewel het best wel absurd is, is het ook moeilijk om er een uitweg voor te bedenken. We veranderen u, hooggeachte lezer, langzamerhand in een roerbakei. Elk uur veranderen we 1 van uw moleculen in een molecule van een roerbakei. Op het eerste uur bent u natuurlijk nog steeds uzelf. Daarnaast geldt voor elk uur in de verdere serie dat het object dat we observeren van dezelfde soort is als het vorige uur. Immers: we verliezen als mens sowieso elk uur moleculen en we krijgen er elk uur terug bij en dus kan de verandering

van 1 molecule onmogelijk het verschil maken. Bijgevolg kunnen we dus voor het tweede uur afleiden dat u nog steeds uzelf bent. Vervolgens kunnen we afleiden dat u op het derde uur nog steeds uzelf bent, enzovoort. Na verloop van tijd zullen we echter afgeleid hebben dat het roerbakei u is, wat op z'n minst een problematische conclusie is. Op dat moment moeten we dus vaststellen dat we vage begrippen hebben gebruikt en dat dit ons met klassieke logica in de problemen heeft gebracht.

Er zijn veel oplossingen voor vaagheid voor handen. Deze laten toe toch onproblematisch verder te redeneren met begrippen zonder precieze grenzen. Echter, deze logica's zijn niet in staat het redeneerproces te beschrijven dat een subject doorloopt, wanneer hij in de problemen komt door het gebruik van vage termen. Voor het formuleren van een dergelijk proces heeft men dynamische logica's nodig. Als een eerste stap in deze richting, hebben Stephan van der Waart van Gulik en ik adaptieve logica's voor vaagheid ontwikkeld. Deze laten toe klassieke logica te gebruiken tot men hiermee in de problemen komt en dan verder te gaan met een zwakkere standaard vage logica. Natuurlijk is dit slechts een eerste poging om de complexe menselijke redeneermechanismes te vatten die te maken hebben met vaagheid. Een veel voorkomend mechanisme in wiskundige of wetenschappelijke context is het geval waarbij de typische vaagheidsproblemen leiden tot de verandering of de precisering van de definities van de vage termen. Dit type dynamieken zullen we in de toekomst formeel proberen vatten.

Ons onderzoek naar het gebruik van adaptieve logica's voor contexten waarin vage termen gebruikelijk zijn, heeft geresulteerd in twee publicaties. In de eerste publicatie (zie appendix F) geven we een algemeen kader voor het construeren van een dergelijke adaptieve logica. Voor een heel ruime verzameling standaard vage logica's definiëren we adaptieve logica's die deze vage logica's als onderlimietlogica en klassieke logica als bovenlimietlogica hebben. In de tweede publicatie (zie appendix G) passen we dit algemene formaat toe. We definiëren een specifieke adaptieve *fuzzy* logica (*fuzzy* logica's zijn logica's die vaagheid aanpakken met behulp van een oneindig aantal waarheidsgraden - dit is slechts een deel van de vele logica's uit de literatuur over vaagheid; vandaar dat ik *fuzzy* niet door *vaag* vertaal) en illustreren hoe men met behulp van deze logica redeneerprocessen voor het oplossen van typische sorites paradox-problemen kan expliceren.

Deel IV

Conclusie

Hoofdstuk 10

Besluit en verder onderzoek

Ik heb in deze thesis een aantal belangrijke formeel-logische technieken voorgesteld voor de formalisering van probleemoplossing. Ik ga hier niet alles herhalen bij wijze van samenvatting. In hoofdstuk 3 vindt men een degelijke gebalde samenvatting. Ik geef hier wel een overzicht van aspecten uit de thesis die aanleiding geven tot verder onderzoek.

Ten eerste beantwoordt dit werk slechts een klein deel van de algemene vragen die moeten opgelost worden om een volledige formalisering van wetenschappelijke probleemoplossing mogelijk te maken. Deze vragen worden geformuleerd in 1. De vragen die niet beantwoord zijn met de technieken van deze thesis zijn sowieso nog onderwerp van verder onderzoek. Ik som hoofdstuk per hoofdstuk de onderwerpen voor verder onderzoek op die dicht aansluiten bij de technieken uit deze thesis.

In hoofdstuk 4 worden de paraconsistente logica's LA en CL^- gepresenteerd. Hoewel ik hoop duidelijk gemaakt te hebben dat deze logica's goed geconstrueerd zijn en een aantal interessante eigenschappen vertonen, moet een belangrijk meta-bewijs nog verder uitgewerkt worden. Daarnaast moet verder onderzoek de toepassingen van de logica ook uitbreiden. LA , zoals ik hem in deze thesis definieer, is een zuiver analyserende versie van CL en enkel van CL . Het zou interessant zijn om na te gaan of en hoe de analyserende fragmenten van andere monotone logica's kunnen geaxiomatiseerd worden. Het is een fascinerende open vraag of een dergelijke axiomatisering dan op dezelfde manier kan gebruikt worden voor de formulering van sterke paraconsistente versies van de alternatieve logica's in kwestie. Zo ben ik van mening dat een intuïtionistische of een vage (fuzzy) versie van CL^- zeer waardevol kan zijn. Voor het grootste

deel van de genoemde alternatieve logica's (intuitionistische en vage logica's) zijn dezelfde explosie-paradoxen (in eerste instantie $A, \neg A \vdash B$) afleidbaar, net zoals in **CL**. Het zou goed zijn moest er een oplossing zijn voor deze paradoxen, zonder andere toegevingen te doen (betreffende de complexiteit of gevolgen van consistente premissen).

In hoofdstuk 5 presenteer ik een elegante predikatieve versie van de bestaande prospectieve bewijzen voor propositionele klassieke logica. Het volledigheidsbewijs moet verder uitgewerkt worden in de toekomst. Daarnaast zou het ook voor dit systeem interessant zijn om na te gaan of de prospectieve bewijzen voor andere propositionele logica's ook op gelijkaardige wijze predikatief kunnen gemaakt worden. Ook kan het heel nuttige resultaten opleveren om te onderzoeken of bestaande tableau- en andere beslissingsmethodes voor klassieke logica even efficiënte procedures opleveren. Indien deze methodes efficiëntere procedures opleveren in een aantal gevallen, kan het misschien mogelijk zijn om de technieken die leiden tot dit efficiëntie-voordeel ook in te bouwen in de prospectieve bewijzen. Indien deze methodes minder efficiënt blijken te zijn op bepaalde vlakken, bewijst dit dat prospectieve bewijzen niet alleen van filosofisch belang zijn, maar ook efficiënt kunnen aangewend worden ten behoeve van computertoepassingen.

In het bijzonder zou het een opmerkelijk resultaat zijn als zou blijken dat de efficiëntiewinst te maken heeft met het feit dat het prospectieve bewijssysteem eigenlijk bewijsprocedures definieert voor de paraconsistente logica \mathbf{CL}^- in de plaats van voor **CL**. Prospectieve bewijzen verlopen doelgericht en dit maakt het mogelijk dat vele zoektakken kunnen gesnoeid worden, omdat ze niet kunnen bijdragen tot het afleiden van het doel. Een procedure voor de hele klassieke logica kan niet doelgericht verlopen. Immers, als de premissen inconsistent zijn, zijn triviale gevolgen toegelaten. Deze hebben niets te maken met de premissen en dus kan de zoektocht ernaar ook niet doelgericht verlopen. De zoektocht zal een zoektocht worden naar inconsistenties in de premisseverzameling. Deze zoektocht kan interessant zijn voor andere doeleinden, maar niet als men gewoon op zoek wilt gaan naar **CL**-gevolgen (**CL** is niet bedoeld voor inconsistente premisseverzamelingen). Intuïtief lijkt \mathbf{CL}^- dus een minder complexe logica dan **CL** (omdat een beslissingsmethode voor \mathbf{CL}^- wel doelgericht kan werken), en toch even sterk voor de zinvolle gevallen. Dit vermoeden moet in de toekomst expliciet gemaakt en bewezen worden.

In hoofdstuk 6 geef ik enkele ideeën voor het opstellen van technieken voor de explicatie van redeneerprocessen voor het leren uit de praktijk van het probleemoplossen. Deze ideeën moeten in de toekomst ten eerste omgezet worden in concrete formele technieken. Ten tweede moeten ze uitgebreid getest wor-

den op hun werkzaamheid bij het oplossen van concrete problemen. Wiskundige problemen kunnen hierbij dienen als een goed onderzoeksobject. In databanken op het internet kan men grote hoeveelheden wiskundige problemen vinden die reeds geformaliseerd zijn als problemen van de predikatenlogica (van de vorm $\Gamma \vdash_{CL} A$). Het zou nuttig zijn om te proberen de heuristische leertechnieken in te bouwen in een computerprogramma dat deze geformaliseerde problemen moet oplossen. Als de geformaliseerde leertechnieken goed werken, moet de computer in staat zijn de problemen efficiënter op te lossen naarmate hij meer problemen oplost.

In hoofdstuk 7 stel ik prospectieve bewijzen voor voor bepaalde groepen (zogenaaemde keurige) adaptieve logica's aan de hand van de keurige semantiek van hun onderlimietlogica. De keurige semantieken (die gedefinieerd zijn in een artikel in de appendix over de inbedding van logica's met dit type semantiek in klassieke logica) vatten reeds zeer veel bruikbare logica's. Toch zou het zinvol zijn om deze uit te breiden naar modale logica's, wat moet resulteren in keurige modale semantieken. Als men ook een vertaling zou voorzien voor dergelijke logica's met een keurige modale semantiek naar de klassieke modale logica's, kunnen grote groepen logica's die gebruik maken van modaliteiten ingebed worden in de standaard modale logica's. Wanneer men dan voor deze standaard modale logica's prospectieve bewijzen zou ontwikkelen, bekomt men meteen prospectieve bewijzen voor een grote verzameling alternatieve logica's die gebruik maken van modaliteiten. Verschillende adaptieve logica's (bijvoorbeeld adaptieve logica's voor abductie, voor compatibiliteit en voor *belief change*) maken gebruik van modaliteiten en om die reden kan men voor deze logica's met behulp van de resultaten uit hoofdstuk 7 nog geen prospectieve bewijzen ontwikkelen. Verder onderzoek moet dus ook dit type prospectieve bewijzen mogelijk maken.

In hoofdstuk 8 geef ik verschillende resultaten wat betreft de complexiteit van adaptieve logica's. Daarnaast bespreek ik de filosofische consequenties van deze resultaten. Deze tak van mijn onderzoek is zeker nog niet voltooid. De discrepantie tussen de beslisbaarheid (en zelfs de eenvoud) van vele concrete adaptief-logische problemen en de hoge complexiteit van algemene adaptief-logische problemen blijft me fascineren. Verder onderzoek moet uitwijzen hoe we de beslisbare gevallen kunnen onderscheiden van de onbeslisbare gevallen. Ook ben ik zeer geboeid door de gevolgen van de algemene complexiteit voor de complexiteit van eindige beslisbare gevallen. Zo is het duidelijk dat adaptieve logica's ook voor eenvoudige eindige voorbeelden complexer zijn dan hun onderlimietlogica's, hoewel beide beslisbaar zijn. Verder onderzoek moet nagaan hoe we deze structuur –die ervoor zorgt dat de complexiteit (ook in geval van beslisbaarheid) toeneemt voor bepaalde adaptieve strategieën– expliciet kunnen

maken. Hiervoor kunnen technieken uit de speltheorie en de complexiteitsanalyse uit de computerwetenschap waarschijnlijk goed van pas komen.

Ten slotte heb ik in hoofdstuk 9 een formaat voor adaptieve logica's voor vaagheid voorgesteld. Deze expliceren de redeneerdynamieken die te maken hebben met de vaagheid van bepaalde termen en verklaren de dynamiek die zich voordoet in het denkproces van mensen die geconfronteerd worden met soritesreeksen (reeksen van object en uitspraken over deze objecten die leiden tot soritesparadoxen). Een belangrijk onderdeel van deze dynamiek kan niet gevat worden met behulp van de voorgestelde bewijzen. Het betreft dynamieken die te maken met het verschijnsel conceptvorming en het verschijnsel conceptverandering. Om vaagheid en de hiermee samenhangende paradoxen te vermijden zoeken mensen bij het oplossen van problemen die geformuleerd zijn in vage termen naar andere manieren om hun concepten te definiëren. De betekenis van de concepten zal hierdoor veranderen naarmate men nieuwe informatie verkrijgt. Het zou interessant zijn om ook dit proces te beschrijven met behulp van adaptieve bewijzen.

Ik kan besluiten dat ik met dit doctoraat verschillende zinvolle bijdragen heb geleverd aan het onderzoek naar de formalisering van wetenschappelijke problemen. Toch blijkt er nog zeer veel werk aan de winkel. Ik hoop dan ook om mijn onderzoek verder te zetten en op de proppen te komen met nieuwe creatieve ideeën. Zo zou ik in de toekomst zeer graag enkele behaalde resultaten aanwenden voor de filosofie van de wiskunde en toepassen op de wiskundige praktijk.

Deel V

Appendix

Prospectieve bewijzen voor klassieke logica (gebruikmakend van pseudoconstanten)

Hier wordt een alternatief en ouder prospectief systeem gedefinieerd voor de klassieke predikatenlogica. Dit systeem maakt in tegenstelling tot het systeem in hoofdstuk 5 gebruik van pseudoconstanten. Dit kan in sommige gevallen zeker een heuristische waarde hebben, maar naar mijn mening is het nieuwe systeem in hoofdstuk 5 theoretisch veel eleganter. Een ander minimaal voordeel van het systeem dat hier wordt gedefinieerd is de afwezigheid van de symbolen \ddagger en $+$ (die onder andere ingevoerd zijn om aan te duiden dat bepaalde formules niet mogen geanalyseerd worden) de ϵ Trans-regel en de δ Trans-regel. Aan dit hoofdstuk hebben D. Batens en D. Provijn meegewerkt, maar zij hebben geen verantwoordelijkheid over de versie die hieronder staat. Ik heb het volledigheidsbewijs weggelaten (te vinden in mijn postgraduaatsthesis [113]), omdat dit in hoge mate steunde op het gebruik van EFQ-regels. Het systeem zou weinig voordelen bieden op een tableau-methode als het voor consistente verzamelingen niet ook volledig was zonder de EFQ-regel. Een volledigheidsbewijs zonder te steunen op

het gebruik van EFQ-regels, is nog niet beschikbaar¹.

A.1 Afkortingen

- (i) $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele variabelen
- (ii) $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e, a_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele constanten
- (iii) $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, T, P_1, \dots\}$: verzameling van schematische letters voor predikatieve constanten
- (iv) $\mathcal{A} = \{o, o', o'', \dots\}$: verzameling van schematische letters voor de nieuwe ('arbitraire') constanten ($\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \emptyset$)

Voor de definiëring van de regels voor ik tevens de volgende lijst van afkortingen in:

- (i) \mathcal{C}_p : leden van \mathcal{C} die voorkomen in de premissen of in het doel
- (ii) \mathcal{C}_s : leden van \mathcal{C} die voorkomen in het bewijs in stadium s
- (iii) \mathcal{A}_s : leden van \mathcal{A} die voorkomen in het bewijs in stadium s
- (iv) $C(A)$: de verzameling constanten (van om het even welke soort) die voorkomen in A
- (v) $C(\Delta) = \bigcup \{C(A) \mid A \in \Delta\}$

\mathbf{a}	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2		\mathbf{b}	\mathbf{b}_1	\mathbf{b}_2
$A \wedge B$	A	B		$\neg(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\neg(A \equiv B)$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(B \supset A)$
$\neg(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\neg(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$\neg\neg A$	A	A				

Tabel A.1: \mathbf{a} - en \mathbf{b} -formules in PCLc

¹Omdat het systeem volgens mij voornamelijk een heuristische waarde heeft, en het goed werkt voor de gevallen waarin het deze waarde heeft (dit blijkt uit de voorbeelden), is het misschien überhaupt niet zo opportuun om er een onafhankelijk volledigheidsbewijs voor uit te werken.

A.2 Regels

A.2.1 Propositionele regels

Doel Een hoofddoel G mag geïntroduceerd worden op een lijn met $[G]G$ als tweede element.

Prem Eender welke premisse A mag niet-conditioneel geïntroduceerd worden.²

$$\text{aE, bE} \quad \frac{[\Delta]\mathbf{a}}{[\Delta]\mathbf{a}_1 \quad [\Delta]\mathbf{a}_2} \quad \frac{[\Delta]\mathbf{b}}{[\Delta \cup \{*\mathbf{b}_2\}]\mathbf{b}_1 \quad [\Delta \cup \{*\mathbf{b}_1\}]\mathbf{b}_2}$$

$$\text{CaE, CbE} \quad \frac{[\Delta \cup \{\mathbf{a}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}]A} \quad \frac{[\Delta \cup \{\mathbf{b}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathbf{b}_1\}]A \quad [\Delta \cup \{\mathbf{b}_2\}]A}$$

$$\text{EM} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}]A}{[\Delta' \cup \{\neg B\}]A} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}]A}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\text{EM0} \quad \frac{[\Delta \cup \{*A\}]A}{[\Delta]A}$$

EFQ Als $A \in \Gamma$, dan mag het hoofddoel G geïntroduceerd worden op een lijn met $[\neg A]G$ als tweede element.

A.2.2 Formule-analiserende regels

$$\forall\text{E} \quad \frac{[\Delta](\forall\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]A(\beta)} \quad \text{voor om het even welke } \beta \in \mathcal{C}_s \cup \mathcal{A}_s \text{ en voor één } \beta \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_s$$

$$\exists\text{E} \quad \frac{[\Delta](\exists\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]A(\beta)} \quad \text{voor één } \beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$$

$$\neg\exists\text{E} \quad \frac{[\Delta]\neg(\exists\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]*A(\beta)} \quad \text{voor om het even welke } \beta \in \mathcal{C}_s \cup \mathcal{A}_s \text{ en voor één } \beta \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_s$$

$$\neg\forall\text{E} \quad \frac{[\Delta]\neg(\forall\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]*A(\beta)} \quad \text{voor één } \beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$$

²Het niet-conditioneel afleiden van een formule A komt op hetzelfde neer als het afleiden van $[\emptyset]A$ in een bewijs. We schrijven dan ook kortweg A in het tweede element van een lijn indien A wordt afgeleid onder de lege conditie.

A.2.3 Conditie-analiserende regels

$C\forall E$	$\frac{[\Delta \cup \{(\forall\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]A}$	voor één $\beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$
$C\exists E$	$\frac{[\Delta \cup \{(\exists\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]A}$	voor om het even welke $\beta \in \mathcal{C}_s \cup \mathcal{A}_s$ en voor één $\beta \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_s$
$C\neg\exists E$	$\frac{[\Delta \cup \{\neg(\exists\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{*A(\beta)\}]A}$	voor één $\beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$
$C\neg\forall E$	$\frac{[\Delta \cup \{\neg(\forall\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{*A(\beta)\}]A}$	voor om het even welke $\beta \in \mathcal{C}_s \cup \mathcal{A}_s$ en voor één $\beta \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_s$

A.2.4 Regels voor =

$C=E1$	$\frac{[\Delta \cup \{B(\beta)\}]A}{[\Delta' \cup \{\gamma = \beta\}]A}$	en	$\frac{[\Delta \cup \{B(\beta)\}]A}{[\Delta' \cup \{\beta = \gamma\}]A}$
$C=E2$	$\frac{[\Delta \cup \{\alpha = \alpha\}]A}{[\Delta]A}$		
$C\neg=E1$	$\frac{[\Delta \cup \{\neg\alpha = \beta\}]A}{[\Delta' \cup \{B(\alpha)\}]A}$	en	$\frac{[\Delta \cup \{\neg\alpha = \beta\}]A}{[\Delta' \cup \{B(\beta)\}]A}$
$C\neg=E2$	$\frac{[\Delta \cup \{\neg\alpha = \beta\}]A}{[\Delta' \cup \{B(\alpha)\}]A}$	en	$\frac{[\Delta \cup \{\neg\alpha = \beta\}]A}{[\Delta' \cup \{B(\beta)\}]A}$

A.3 De 'Positief Deel'-relatie voor CLc

1. $\text{pd}(A, A)$.
2. $\text{pd}(A, a)$ als $\text{pd}(A, a_1)$ of $\text{pd}(A, a_2)$.
3. $\text{pd}(A, b)$ als $\text{pd}(A, b_1)$ of $\text{pd}(A, b_2)$.
4. $\text{pd}(A, \forall\alpha B(\alpha))$ als $\text{pd}(A, B(\beta))$; als en alleen als $\beta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$.
5. $\text{pd}(A, \exists\alpha B(\alpha))$ als $\text{pd}(A, B(\beta))$; als en alleen als $\beta \in \mathcal{A}$.
6. $\text{pd}(A, B(\alpha))$ als $\text{pd}(A, B(\beta))$; als en alleen als $\alpha \in \mathcal{A}$ en $\beta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$.

A.4 Correctheid

A.4.1 Voorbereidingen

Zij $im(\{B_1, \dots, B_n\}, C)$ een formule van de vorm $B_1 \supset (\dots (B_n \supset C) \dots)$ —de laatste \dots bevat alleen rechter haakjes; welke formule van die vorm wordt gekozen heeft geen belang, aangezien ze allemaal equivalent zijn. C_s^a en C_s^e staan voor constanten in stadium s ingevoerd met behulp van respectievelijk $\text{C}\forall\text{E}$ en $\text{E}\exists$.

Als $\beta \in C_s^a$, dan is het op s of eerder ingevoerd door een toepassing van $\text{C}\forall\text{E}$ die resulteert in $[\Delta \cup \{A(\beta)\}]B$. We zullen $im(\Delta \cup \{A(\beta)\}, B)$ de *karacteristieke formule* van β noemen.

Als $\beta \in C_s^e$, dan is het op s of eerder ingevoerd door een toepassing van $\text{E}\exists$ die resulteert in $[\Delta]A(\beta)$. We zullen $im(\Delta, A(\beta))$ de *karacteristieke formule* van β noemen.

Zij $kar(\beta)$ de karakteristieke formule van β . Zij $\Sigma(A)$ ³ de kleinste verzameling waarvoor geldt: (i) als β voorkomt in A en $\beta \in C_s^a \cup C_s^e$, dan $kar(\beta) \in \Sigma(A)$, en (ii) als β voorkomt in een lid van $\Sigma(A)$ en $\beta \in C_s^a \cup C_s^e$, dan $kar(\beta) \in \Sigma(A)$.

Merk op dat uit de definitie van Σ onmiddellijk volgt dat voor elke formule A die enkel bestaat uit een aantal subformules $B_1 \dots B_n$ en logische symbolen $\Sigma(A) = \Sigma(B_1) \cup \dots \cup \Sigma(B_n)$ geldt. Bovendien is de verzameling $\Sigma(A)$ voor elke formule A welbepaald en kan $\Sigma(A) \cup \{A\}$ voor elke formule gestructureerd worden met behulp van een boomstructuur⁴, met A als wortel en als kind(C)-ouder(P) relatie: “Er bestaat een $\alpha \in C_{s'}^a \cup C_{s'}^e$ zodat $C = kar(\alpha)$ en α komt voor in P ”. Doordat elk element van $C_s^a \cup C_s^e$ een welbepaalde karakteristieke functie heeft en bovendien nog niet in het bewijs mag voorkomen wanneer hij ingevoerd wordt, komt elke formule in $\Sigma(A) \cup \{A\}$ overeen met precies 1 knoop van de boom.

Lemma 13 *Als voor elke lijn $[\Delta]A$ van een prospectief bewijs in stadium s het volgende geldt:*

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta', A)), im(\Delta', A))), \quad (\text{A.1})$$

en we hieruit $\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B) \cup \Sigma(C)), B)$ kunnen afleiden, dan kunnen we er ook $\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), B))$ uit besluiten.

³Strikt genomen zouden we $\Sigma_s(A)$ moeten schrijven, omdat de bepaling van $\Sigma(A)$ verwijst naar $C_s^a \cup C_s^e$. We kunnen de verwijzing naar s echter als impliciet opvatten, namelijk als het stadium waarop (vanaf waar) alle subformules van A voorkomen in het bewijs (als formules of als subformules). Wanneer alle subformules van A voorkomen in het bewijs in stadium s en $\beta \notin C_s^a \cup C_s^e$ komt voor in A , dan kan β ook in een ander (later) stadium s' niet tot $C_{s'}^a \cup C_{s'}^e$ behoren.

⁴We identificeren in wat volgt de knopen van de boom steeds met de formules in de verzameling waarmee ze overeenstemmen

Bewijs. Veronderstel dat het antecedent waar is, zodat

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B) \cup \Sigma(C)), B) \quad (\text{A.2})$$

afleidbaar is uit de transformatie van lijnen 1 tot s van het bewijs. De formules die voorkomen in $\Sigma(B) \cup \Sigma(C)$ en niet in $\Sigma(B)$ zijn de leden van $\Sigma(C) - \Sigma(B)$, wat een (echte of onechte) deelverzameling is van $\Sigma(C)$. Bijgevolg is (A.2) gelijkwaardig aan

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), im(\Sigma(C) - \Sigma(B), B))), \quad (\text{A.3})$$

wat een uitdrukking is van de vorm

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), D_1 \supset (\dots \supset (D_n \supset B) \dots))), \quad (\text{A.4})$$

waarin de laatste \dots alleen rechter haakjes afkort en $\{D_1, \dots, D_n\} = \Sigma(C) - \Sigma(B)$. Elke D_i is bijgevolg de karakteristieke formule van een term die niet voorkomt in B .

De D_i komen dus overeen met de knopen van de hierboven (bij de defitie van Σ) vermelde boomstructuur voor $\Sigma(C) \cup \{C\}$, zij het dat sommige deelbomen (deze die ook voorkomen in de $\Sigma(B)$ -boom) gesnoeid zijn. We veronderstellen dat de D_i zijn geordend in dalende volgorde van diepte in de boom. Het resultaat is dat de karakteristieke formule van alle $\xi \in \mathcal{C}_s^a \cup \mathcal{C}_s^e$ die voorkomen in een D_j deze formule steeds voorafgaat in (A.4). Met andere woorden:

† Als D_n de karakteristieke formule van β is en $\xi \neq \beta$ komt voor in D_n in (A.4), dan $kar(\xi) \in \Sigma(B) \cup \{D_1, \dots, D_{n-1}\}$.

Zij D_n de karakteristieke formule van β , zodat D_n kan geschreven worden als $E(\beta)$. We kunnen (A.4) dan schrijven als:

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), D_1 \supset (\dots \supset (D_{n-1} \supset (E(\beta) \supset (B))) \dots))) \quad (\text{A.5})$$

en kunnen de drie volgende feiten aantonen.

Feit 1 De term β komt niet voor in D_1, \dots, D_{n-1} . Dit volgt uit de ordening van de D_i .

Feit 2 De term β komt niet voor in B of in $\Sigma(B)$. Dit volgt uit het feit dat $E(\beta) \in \Sigma(kar(\beta)) - \Sigma(B)$.

Feit 3 Uit een lijn van het stadium s is afleidbaar dat

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), D_1 \supset (\dots \supset (D_{n-1} \supset \exists \alpha E(\alpha)) \dots))) \quad (\text{A.6})$$

waarin de laatste \dots alleen rechter haakjes afkort. Dit vergt een wat langer argument.

Geval 1. $E(\beta)$, de karakteristieke formule van β , werd ingevoerd door toepassing van $\exists E$. Deze karakteristieke formule is dus het resultaat van een element $[\Delta]E'(\beta)$, waarbij β niet voorkomt in Δ . De lokale premisse van de toepassing van die $E(\beta)$ -regel is dan de formule $[\Delta]\exists \alpha E'(\alpha)$ (voor een of andere α). Voor deze lokale premisse geldt wegens (A.1):

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta, \exists \alpha E'(\alpha))), im(\Delta, \exists \alpha E'(\alpha)))) . \quad (\text{A.7})$$

Aangezien $\Sigma(im(\Delta, \exists \alpha E'(\alpha))) = \Sigma(im(\Delta, E'(\beta))) - \{im(\Delta, E'(\beta))\}$ volgt, wegens \dagger , dat $\Sigma(im(\Delta, \exists \alpha E'(\alpha))) \subseteq \Sigma(B) \cup \{D_1, \dots, D_{n-1}\}$. Maar dan volgt (A.6) uit (A.7).

Geval 2. $E(\beta)$, de karakteristieke formule van β , werd ingevoerd door toepassing van $C\forall E$. De lokale premisse van die toepassing heeft de vorm $[\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}]F'$. De lokale conclusie is dan $[\Delta \cup \{F(\beta)\}]F'$, en $E(\beta)$, de karakteristieke formule van β , is dan $im(\Delta \cup \{F(\beta)\}, F')$.

Voor deze lokale premisse geldt wegens (A.1):

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}, F')), im(\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}, F'))),$$

wat gelijkwaardig is aan

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}, F')), \exists \alpha (im(\Delta \cup \{F(\alpha)\}, F')))),$$

of aan een herlettering hiervan met een α die alleen voorkomt in $F(\alpha)$. Aangezien $\exists \alpha (im(\Delta \cup \{F(\alpha)\}, F'))$ hetzelfde is als $\exists \alpha E(\alpha)$, hebben we dus:

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}, F')), \exists \alpha E(\alpha))) . \quad (\text{A.8})$$

Uit $\Sigma(im(\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}, F')) = \Sigma(im(\Delta \cup \{F(\beta)\}, F')) - \{im(\Delta \cup \{F(\beta)\}, F')\} = \Sigma(E(\beta)) - \{E(\beta)\}$ volgt, wegens \dagger , dat $\Sigma(im(\Delta \cup \{\forall \alpha F(\alpha)\}, F')) \subseteq \Sigma(B) \cup \{D_1, \dots, D_{n-1}\}$. Maar dan volgt (A.6) uit (A.8).

Dit beëindigt het bewijs van Feit 3.

Uit (A.4) samen met Feiten 1–3, volgt

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), D_1 \supset (\dots \supset (D_{n-1} \supset B) \dots))) .$$

Op dezelfde manier kunnen we elke D_i stap voor stap elimineren, wat ons oplevert:

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(B), B)) .$$

■

A.4.2 Bewijs

Theorema 16 *Voor elke lijn in een prospectief bewijs waarvan $[\Delta]A$ het tweede element is, geldt het volgende:*

$$\Gamma \vdash \forall \forall(im(\Sigma(im(\Delta, A)), im(\Delta, A))). \quad (\text{A.9})$$

Bewijs. We bewijzen het theorema met behulp van inductie op de lengte van het bewijs (maw op het stadiumnummer s). Het basis geval is $s = 1$. Het bewijs bestaat dus slechts uit de doelregel, waarvoor het te bewijzende triviaal is.

De inductiehypothese (verder IH) stelt dat (A.9) geldt voor alle lijnen van s . We bewijzen door de verschillende mogelijke gevallen (alle mogelijkerwijs toegepaste regels) te bespreken, dat (A.9) ook voor lijn $s + 1$ geldt.

$\boxed{\forall E}$

De lokale premisse, $[\Delta]\forall\alpha A(\alpha)$, werd op stadium $s - 1$ getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \forall \forall(im(\Sigma(im(\Delta, \forall\alpha A(\alpha))), im(\Delta, \forall\alpha A(\alpha)))). \quad (\text{A.10})$$

De lokale conclusie, $[\Delta]A(\beta)$, wordt getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \forall \forall(im(\Sigma(im(\Delta, A(\beta))), im(\Delta, A(\beta)))). \quad (\text{A.11})$$

Aangezien $\Sigma(im(\Delta, \forall\alpha A(\alpha))) \subseteq \Sigma(im(\Delta, A(\beta)))$ en $im(\Delta, \forall\alpha A(\alpha)) \vdash im(\Delta, A(\beta))$ volgt (A.11) uit (A.10).

$\boxed{\exists E}$

De lokale premisse, $[\Delta]\exists\alpha A(\alpha)$, werd getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \forall \forall(im(\Sigma(im(\Delta, \exists\alpha A(\alpha))), im(\Delta, \exists\alpha A(\alpha)))).$$

De lokale conclusie, $[\Delta]A(\beta)$, wordt getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \forall \forall(im(\Sigma(im(\Delta, A(\beta))), im(\Delta, A(\beta)))).$$

De karakteristieke formule van β is $im(\Delta, A(\beta))$ en is lid van $\Sigma(im(\Delta, A(\beta)))$. Bijgevolg is

$$\forall \forall(im(\Sigma(im(\Delta, A(\beta))), im(\Delta, A(\beta))))$$

een stelling. De regel $\exists E$ is bijgevolg correct.

$\boxed{C\forall E}$

Bijna volledig als $\exists E$.

$\boxed{C\exists E}$

Bijna volledig als $\forall E$.

 $\boxed{\text{Trans}}$

De lokale premisse, $[\Delta \cup \{A\}]B$, werd getransformeerd tot⁵

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Delta \cup \{A\}, B)), \text{im}(\Delta \cup \{A\}, B)).$$

en de tweede lokale premisse, $[\Delta']A$, tot

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Delta', A)), \text{im}(\Delta', A)).$$

De lokale conclusie, $[\Delta \cup \Delta']B$, wordt getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Delta \cup \Delta', B)), \text{im}(\Delta \cup \Delta', B)). \quad (\text{A.12})$$

We moeten tonen dat (A.12) volgt uit de transformaties van de lokale premissen. Wat er in elk geval uit volgt is:

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Sigma(\Delta \cup \{A\}, B)) \cup \Sigma(\text{im}(\Delta', A)), \text{im}(\Delta \cup \Delta', B)),$$

wat gelijkwaardig is aan

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Delta \cup \Delta', B)) \cup \Sigma(A), \text{im}(\Delta \cup \Delta', B)), \quad (\text{A.13})$$

want $\Sigma(\text{im}(\Delta \cup \{A\}, B)) \cup \Sigma(\text{im}(\Delta', A)) = \Sigma(\Delta) \cup \Sigma(\Delta') \cup \Sigma(A) \cup \Sigma(B) = \Sigma(\text{im}(\Delta \cup \Delta', B)) \cup \Sigma(A)$.

Wegens Lemma 13 geldt dan ook A.12, waaruit we kunnen concluderen de regel Trans correct is.

 $\boxed{\text{EM}}$

De lokale premissen zijn $[\Delta \cup \{B\}]A$ en $[\Delta' \cup \{\neg B\}]A$. Ze worden respectievelijk getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Delta \cup \{B\}, A)), \text{im}(\Delta \cup \{B\}, A)),$$

en

$$\Gamma \vdash \text{im}(\Sigma(\text{im}(\Delta \cup \{\neg B\}, A)), \text{im}(\Delta \cup \{\neg B\}, A)).$$

⁵Na het afleidbaarheidssteken staat geen " $\forall\forall$ " omdat Trans niet mag worden toegepast op lokale premissen waarin vrije variabelen voorkomen. Analoog voor EM en EM0 hierna. Dat er wel vrije variabelen zouden voorkomen, zodat " $\forall\forall$ " zou voorkomen na het afleidbaarheidssteken, zou het bewijs overigens niet bemoeilijken.

De lokale conclusie is $[\Delta \cup \Delta']A$ en die wordt getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash im(\Sigma(im(\Delta \cup \Delta', A)), im(\Delta \cup \Delta', A)). \quad (\text{A.14})$$

We moeten bewijzen dat deze laatste bewering uit de transformaties van de lokale premissen afleidbaar is. Wat daaruit evident volgt is

$$\Gamma \vdash im(\Sigma(im(\Delta \cup \{B\}, A)) \cup \Sigma(im(\Delta \cup \{\neg B\}, A)), im(\Delta \cup \Delta', A)),$$

waaruit volgt:

$$\Gamma \vdash im(\Sigma(im(\Delta \cup \Delta', A)) \cup \Sigma(B), im(\Delta \cup \Delta', A)), \quad (\text{A.15})$$

vermits $\Sigma(im(\Delta \cup \{B\}, A)) \cup \Sigma(im(\Delta \cup \{\neg B\}, A)) = \Sigma(\Delta) \cup \Sigma(B) \cup \Sigma(A)$ een deelverzameling is van $\Sigma(im(\Delta \cup \Delta', A)) \cup \Sigma(B) = \Sigma(\Delta') \cup \Sigma(\Delta) \cup \Sigma(B) \cup \Sigma(A)$. Wegens Lemma 13 geldt dan ook (A.14), waaruit we kunnen concluderen dat de regel EM correct is.

EM0

De lokale premisse, $[\Delta \cup \{\neg A\}]A$, wordt getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash im(\Sigma(im(\Delta \cup \{\neg A\}, A)), im(\Delta \cup \{\neg A\}, A)), \quad (\text{A.16})$$

de lokale conclusie, $[\Delta]A$, tot

$$\Gamma \vdash im(\Sigma(im(\Delta, A)), im(\Delta, A)). \quad (\text{A.17})$$

Aangezien $\Sigma(im(\Delta, A)) = \Sigma(im(\Delta \cup \{\neg A\}, A))$ en $B \supset (\neg A \supset A) \vdash B \supset A$, volgt (A.17) uit (A.16). Bijgevolg is EM0 correct.

Propositionele

Tonen dat de regels aE, bE, CaE en CbE correct zijn is eenvoudig genoeg. In de meest complexe gevallen moeten een aantal karakteristieke formules worden geëlimineerd zoals in Trans en EM.

We beschouwen een enkel voorbeeld, nl. $\wedge E$. De lokale premisse wordt getransformeerd tot

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta, A \wedge B)), im(\Delta, A \wedge B))) \quad (\text{A.18})$$

en de lokale conclusie tot (bijvoorbeeld)

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta, A)), im(\Delta, A))). \quad (\text{A.19})$$

Uit (A.18) volgt

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta, A \wedge B)), im(\Delta, A)))$$

en dit kan geschreven worden als

$$\Gamma \vdash \forall \forall (im(\Sigma(im(\Delta, A)) \cup \Sigma(B), im(\Delta, A))).$$

Hieruit volgt (A.19) wegens Lemma 13.

■

A.5 Voorbeelden

Voorbeeld 9: $\forall x \exists y \forall z Pxyz \vdash \exists x \forall z \exists y Pxyz$.

1	$[\exists x \forall z \exists y Pxyz] \exists x \forall z \exists y Pxyz$	Doel
2	$[\forall z \exists y Poyz] \exists x \forall z \exists y Pxyz$	1; C \exists E
3	$[\exists y Poya] \exists x \forall z \exists y Pxyz$	2; C \forall E
4	$[Poo'a] \exists x \forall z \exists y Pxyz$	3; C \exists E
5	$\forall x \exists y \forall z Pxyz$	Prem
6	$\exists y \forall z Poyz$	5; \forall E
7	$\forall z Pobz$	6; \exists E
8	$Poba$	7; \forall E
9	$[Poba] \exists x \forall z \exists y Pxyz$	3; C \exists E
10	$\exists x \forall z \exists y Pxyz$	8, 9; Trans

Voorbeeld 10: $\forall x (Px \supset Qx), \exists x Px \vdash \exists x Qx$:

1	$[\exists x Qx] \exists x Qx$	Doel
2	$[Qo] \exists x Qx$	1; C \exists E
3	$\forall x (Px \supset Qx)$	Prem
4	$Po \supset Qo$	3; \forall E
5	$[Po] Qo$	4; \supset E
6	$\exists x Px$	Prem
7	Pa	6; \exists E
8	$Pa \supset Qa$	3; \forall E
9	$[Pa] Qa$	8; \supset E
10	Qa	7, 9; Trans
11	$[Qa] \exists x Qx$	1; C \exists E
12	$\exists x Qx$	10, 11; Trans

Voorbeeld 11: $\forall x \forall z \exists y Pxyz \vdash \exists x \exists y \forall z Pxyz$ moet mislukken.

1	$[\exists x \exists y \forall z Pxyz] \exists x \exists y \forall z Pxyz$	Doel
2	$[\exists y \forall z Poyz] \exists x \exists y \forall z Pxyz$	1; C \exists E
3	$[\forall z Poo'z] \exists x \exists y \forall z Pxyz$	2; C \exists E
4	$[Poo'a] \exists x \exists y \forall z Pxyz$	3; C \forall E
5	$\forall x \forall z \exists y Pxyz$	Prem
6	$\forall z \exists y Poyz$	5; \forall E
7	$\exists y Poya$	6; \forall E
8	$Poba$	7; \exists E
9	$[\forall z Pobz] \exists x \exists y \forall z Pxyz$	2; C \exists E
10	$[Pobc] \exists x \exists y \forall z Pxyz$	9; C \forall E

STOP

Voorbeeld 12: $\forall z \forall x \forall y Pxyz \vdash \forall x \forall y \exists z Pxyz$.

1	$[\forall x \forall y \exists z Pxyz] \forall x \forall y \exists z Pxyz$	Doel
2	$[\forall y \exists z Payz] \forall x \forall y \exists z Pxyz$	1; C \forall E
3	$[\exists z Pabz] \forall x \forall y \exists z Pxyz$	2; C \forall E
4	$[Pabo] \forall x \forall y \exists z Pxyz$	3; C \exists E
5	$\forall z \forall x \forall y Pxyz$	Prem
6	$\forall x \forall y Pxyo$	5; \forall E
7	$\forall y Payo$	6; \forall E
8	$Pabo$	7; \forall E
9	$\forall x \forall y \exists z Pxyz$	8, 4; Trans

Voorbeeld 13: $\forall x \exists y (Px \supset Qy), \exists x Px \vdash \exists y Qy$

1	$[\exists y Qy] \exists y Qy$	Doel
2	$[Qo] \exists y Qy$	1; C \exists E
3	$\forall x \exists y (Px \supset Qy)$	Prem
4	$\exists y (Po' \supset Qy)$	3; \forall E
5	$Po' \supset Qa$	4; \exists E
6	$[Po'] Qa$	5; \supset E
7	$\exists x Px$	Prem
8	Pb	7; \exists E
9	$\exists y (Pb \supset Qy)$	3; \forall E
10	$Pb \supset Qc$	9; \exists E
11	$[Pb] Qc$	10; \supset E
12	Qc	8, 11; Trans
13	$[Qc] \exists y Qy$	1; C \exists E
14	$\exists y Qy$	12, 13; Trans

Voorbeeld 14: $\forall x \exists y (Px \supset Qy) \vdash \exists x Px \supset \exists y Qy$.

1	$[\exists xPx \supset \exists yQy]\exists xPx \supset \exists yQy$	Doel
2	$[\neg\exists xPx]\exists xPx \supset \exists yQy$	1; C \supset E
3	$[\forall x\neg Px]\exists xPx \supset \exists yQy$	2; C \neg EE
4	$[\neg Pa]\exists xPx \supset \exists yQy$	3; C \forall E
5	$\forall x\exists y(Px \supset Qx)$	Prem
6	$\exists y(Pa \supset Qy)$	5; \forall E
7	$Pa \supset Qb$	6; \exists E
8	$[\neg Qb]\neg Pa$	7; \supset E
9	$[\exists yQy]\exists xPx \supset \exists yQy$	1; C \supset E
10	$[Qo]\exists xPx \supset \exists yQy$	9; C \exists E
11	$[Pa]Qb$	7; \supset E
12	$[Qb]\exists xPx \supset \exists yQy$	9; C \exists E
13	$[Pa]\exists xPx \supset \exists yQy$	11, 12; Trans
14	$\exists xPx \supset \exists yQy$	4, 13; EM

Voorbeeld 15: $\exists xPx, \forall x(Px \supset (Qx \wedge \forall y(Qy \supset y = x))), Qa \vdash Pa$

1	$[Pa]Pa$	Doel
2	$\forall x(Px \supset (Qx \wedge \forall y(Qy \supset y = x)))$	Prem
3	$Po \supset (Qo \wedge \forall y(Qy \supset y = o))$	2 \forall E
4	$[Po]Qo \wedge \forall y(Qy \supset y = o)$	3 \supset E
5	$\exists xPx$	Prem
6	Pb	5 \exists E
7	$Pb \supset (Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b))$	2 \forall E
8	$[Pb]Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b)$	7 \supset E
9	$Qb \wedge \forall y(Qy \supset y = b)$	6, 8 Trans
10	$\forall y(Qy \supset y = b)$	9 \wedge E
11	$Qa \supset a = b$	10 \forall E
12	$[Qa]a = b$	11 \supset E
13	Qa	Prem
14	$a = b$	12,13 Trans
15	$[Pb]Pa$	1,14 C=1
16	Pa	6,15 Trans

Voorbeeld 16: $\forall xPx \vdash_{\text{CL}} \exists y\forall x(Px \vee Qxy)$

1	$[\exists y\forall x(Px \vee Qxy)]\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$	Doel
2	$[\forall x(Px \vee Qxo)]\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$	1 C \exists E
3	$[Pa \vee Qao]\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$	2 C \forall E
4	$[Pa]\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$	3 C \forall E

5 $\forall xPx$ 6 Pa 7 $\exists y\forall x(Px \vee Qxy)$

Prem

5 $\forall E$

4,6 Trans

Appendix **B**

Artikel ‘Embedding Gluts and Gaps in Classical Logic’

Authors

Diderik Batens, Peter Verdée en Kristof De Clercq

Abstract

It is shown in this paper that a set of fragments of **CL** (Classical Logic) can be embedded within **CL**. The set includes many logics presented in the literature. The embedding turns finite premise sets into finite premise sets. As an effect, (partial) decision methods for **CL** can be applied to the fragments.

Journal

This paper will be submitted to the Journal of Symbolic Logic.

Note

The paper is not completely finished, but the basic ideas should be clear and the theorems and their proofs are in a presentable state. The paper needs some

more explanation, some extra examples of logics with a nice semantics and a decent conclusion.

B.1 Aim and Preliminaries

In [34] it was shown that a set of propositional logics that are paraconsistent (A and $\sim A$ can be jointly true) and/or paracomplete (A and $\sim A$ can be jointly false) can be faithfully embedded within **CL** (Classical Logic). In the present paper we generalize this result not only to the predicative version of those logics, but also to a large set of fragments of **CL** that allow for gluts and/or gaps with respect to other logical symbols than negation—that both A and $\sim A$ are true is a negation glut; that $A \wedge B$ is false while A and B are true is a conjunction gap. We moreover show that, where **L** is such a fragment of **CL**, A is a formula, and Γ is a finite set of formulas, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ iff $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CL}} A'$ for a finite Γ' . One of the effects is that (partial) decision methods can be borrowed from **CL**. We shall present an assignment that can serve as a common basis for the two-valued semantics of all such fragments.

The embedding result essentially depends on the existence of a specific semantics—we shall call it a ‘nice semantics’—for the fragment. This semantics will be two-valued and the semantic metalanguage will always be classical. Before getting there, we need a few technicalities.

B.2 Preliminaries

Let \mathcal{L} be the language of **CL** with the logical symbols $\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv, \forall, \exists$, and $=$ (but without function symbols). For future reference we shall say that \mathcal{L} is *defined* (in the usual way) from $\langle \mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \dots \rangle$, in which \mathcal{C} is the set of (letters for) individual constants, \mathcal{V} the set of individual variables, and \mathcal{P}^r the set of predicates of rank $r \geq 0$ —predicates of rank 0 will function as sentential letters. Officially, the members of \mathcal{P}^r will be $P^r, Q^r, R^r, P_1^r, \dots$, but we shall often write the superscripts invisibly, relying on the usual convention that we write only well-formed strings. Let \mathcal{F} and \mathcal{W} denote respectively the set of formulas and the set of closed formulas of \mathcal{L} .

The easiest way to present the embedding is to consider a language $\mathcal{L}_{\#}$, which extends \mathcal{L} . We first introduce some functions that have \mathcal{F} as their domain. Let $f(A)$ be the string obtained by replacing in A every occurrence of an individual constant and every free occurrence of an individual variable by a centred dot. Thus $f(\exists y(Pay \supset Qbx)) = f(\exists y(Pxy \supset Qxx)) = \exists y(P \cdot y \supset Q \cdot \cdot)$. Let $h(A)$ be the

number of centred dots that occur in $f(A)$ —for example $h(\exists y(Pay \supset Qbx)) = 3$. Let $g(A)$ be the (possibly empty) string obtained by deleting from A all symbols except for occurrences of individual constants and free occurrences of individual variables. Thus $g(\exists y(Pay \supset Qbx)) = abx$, and $g(\exists y(Pxy \supset Qxx)) = xxx$. Finally, let the functions $g_i(A)$ denote the i th item in $g(A)$, $g_i(A)$ being undefined for $i < 1$ and $i > h(A)$. For example, $g_2(\exists y(Pay \supset Qbx)) = b$ and $g_4(\exists y(Pay \supset Qbx))$ is undefined.

The language $\mathcal{L}_\#$ is obtained from \mathcal{L} by adding a set of new predicates containing, for every $A \in \mathcal{F}$, a predicate $P_{f(A)}^{h(A)}$. Thus P_P^0 and $P_{\forall x(Px \supset Qx)}^0$ are new predicates of rank 0, P_P^1 and $P_{\forall x(P \supset Qx)}^1$ are new predicates of rank 1, etc. Let, for every $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_\#^r$ be the set of new predicates of rank r and let $\mathcal{P}_\# = \mathcal{P}_\#^1 \cup \mathcal{P}_\#^2 \cup \dots$. Let $\mathcal{F}_\#$ and $\mathcal{W}_\#$ denote respectively the set of formulas and the set of closed formulas of $\mathcal{L}_\#$.

In order to simplify the characterization of the semantic systems, we introduce two pseudo-languages. Let \mathcal{O} be a set of *pseudo-constants*; \mathcal{O} should have at least the cardinality of your largest set—the domain of a model is a set and \mathcal{O} should contain a name for every member of the domain. The pseudo-language ${}^+\mathcal{L}$ is defined from $\langle \mathcal{C} \cup \mathcal{O}, \mathcal{V}, \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \dots \rangle$. Let ${}^+\mathcal{F}$ and ${}^+\mathcal{W}$ denote respectively the set of formulas and the set of closed formulas of ${}^+\mathcal{L}$. In a similar way one defines the pseudo-language ${}^+\mathcal{L}_\#$ from $\mathcal{L}_\#$. Its set of formulas is ${}^+\mathcal{F}_\#$ and its set of closed formulas ${}^+\mathcal{W}_\#$.

Extend the functions f , g , and h to the pseudo-languages ${}^+\mathcal{L}$ and ${}^+\mathcal{L}_\#$ by letting them refer to $\mathcal{C} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{V}$ instead of to $\mathcal{C} \cup \mathcal{V}$. Let $\mathcal{Z}^0 = \{f(A) \mid A \in {}^+\mathcal{W}; h(A) = 0\} \cup {}^+\mathcal{W}$ and, for all $r > 0$, $\mathcal{Z}^r = \{f(A) \mid A \in {}^+\mathcal{W}; h(A) = r\}$. $\mathcal{Z}_\#^0$ and $\mathcal{Z}_\#^r$ ($r > 0$) are defined similarly, replacing ${}^+\mathcal{W}$ by ${}^+\mathcal{W}_\#$. Also extend f , h , and the g_i to the metalanguage in the standard way.

In the semantic systems, the assignment function v will assign to every $f(A)$ of the language a set of $h(A)$ -tuples of members of the domain. So $v(f(P^2ab)) = v(P^2 \cdot \cdot)$ is a set of couples. If v were to assign a value to P^2 , one would obviously require that $v(P^2) = v(P^2 \cdot \cdot)$. For this reason we shall identify, for every $\pi^r \in \mathcal{P}^r$, $v(\pi^r)$ with $v(\pi^r \cdot \dots \cdot)$ (in which $\cdot \dots \cdot$ denotes r centred dots). As an effect, $\mathcal{P}^r \subset \mathcal{Z}^r$. Moreover, a 0-tuple will be identified with \emptyset —see, for example, clause C2.1 in Section B.3. So, if $h(\sim A) = 0$, $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_{h(\sim A)}(\sim A)) \rangle$ is a 0-tuple, and hence is identified with \emptyset —see, for example, clause C2.3^{o=} in Section B.3.

Let, for every $r > 0$, $D^{(r)}$ denote the r -th Cartesian product of D and let $D^{(0)} = \{\emptyset\}$.

Let $\mathbb{P} \subset \mathcal{F}$ be the set of formulas that do not contain any logical symbols (not even identity), and let $\mathbb{P}^= = \mathbb{P} \cup \{\alpha = \beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}\}$. Let ${}^+\mathbb{P}$ and ${}^+\mathbb{P}^=$ be defined analogously in terms of ${}^+\mathcal{F}$ and $\mathcal{C} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{V}$. Finally, let ${}^m\mathbb{P}$ be the set of

metalinguistic formulas that do not contain any logical symbols and ${}^m\mathbb{P}^=$ the set of metalinguistic formulas that do not contain any logical symbols different from identity.

The further use of symbols will be self-explanatory, except (perhaps) for the following. ${}^m\mathcal{W}$ will denote the set of well-formed metalinguistic formulas (which contain only metavariables and logical symbols of the object language). We shall use the following metametalinguistic variables: A and B as variables for metalinguistic formulas, P^r as a variable for metavariables for predicates of rank r , a , b , c and d as variables for metavariables for individual constants and individual pseudo-constants, and x as a variable for metavariables for individual variables.

B.3 Classical Logic and Its Basic Fragments

We begin with a semantics for **CL**. In order to simplify subsequent sections, the models have an assignment that suits the fragments.

A model M (for the language \mathcal{L}) is a couple $\langle D, v \rangle$ in which D is a non-empty set and the assignment v is as follows:

$$\text{C1.1} \quad v: \mathcal{C} \cup \mathcal{O} \rightarrow D \quad (\text{where } D = \{v(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\})$$

$$\text{C1.2} \quad v: \mathcal{Z}^r \rightarrow \wp(D^{(r)}) \quad (\text{for every } r \in \mathbb{N})$$

For **CL**, the valuation function $v_M: {}^+\mathcal{W} \rightarrow \{0, 1\}$ determined by M is defined by:

$$\text{C2.1} \quad v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r) \quad (r \geq 0)^1$$

$$\text{C2.2} \quad v_M(\alpha = \beta) = 1 \text{ iff } v(\alpha) = v(\beta)$$

$$\text{C2.3} \quad v_M(\sim A) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 0$$

$$\text{C2.4} \quad v_M(A \supset B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 0 \text{ or } v_M(B) = 1$$

$$\text{C2.5} \quad v_M(A \wedge B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 1 \text{ and } v_M(B) = 1$$

$$\text{C2.6} \quad v_M(A \vee B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = 1 \text{ or } v_M(B) = 1$$

$$\text{C2.7} \quad v_M(A \equiv B) = 1 \text{ iff } v_M(A) = v_M(B)$$

$$\text{C2.8} \quad v_M(\forall \xi A(\xi)) = 1 \text{ iff } v_M(A(\alpha)) = 1 \text{ for all } \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$$

$$\text{C2.9} \quad v_M(\exists \xi A(\xi)) = 1 \text{ iff } v_M(A(\alpha)) = 1 \text{ for at least one } \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$$

For this and for all subsequent semantic systems, truth in a model, semantic consequence, and validity are defined as usual—we shall sometimes write $M \models A$ to express that M verifies A . As usual, “model” is used in this paragraph (and in similar passages later on) as comprising a model $M = \langle D, v \rangle$ in the strict sense

¹As stipulated in Section B.2, $\langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle = \emptyset$ if $r = 0$. So $v_M(\pi^0) = 1$ iff $v(\pi^0) = \{\emptyset\}$.

plus the definition of the valuation function for the specific logic, which is here **CL**.

In order to extend the semantics to $\mathcal{L}_\#$, replace \mathcal{Z}^r by $\mathcal{Z}_\#^r$ and ${}^+\mathcal{W}$ by ${}^+\mathcal{W}_\#$.

Each of C2.1–9 specifies the valuation values of all formulas of a logical form A. Let us call these nine logical forms the *simple logical forms*.

The basic fragments are obtained by removing one or both directions of the equivalences in the clauses C2.1–9. Thus, by removing “if $v_M(\sim A) = 1$, then $v_M(A) = 0$ ” some models will display negation gluts, by removing “ $v_M(\sim A) = 1$ if $v_M(A) = 0$ ” some models will display negation gaps, and by removing both, some models will display both negation gluts and negation gaps.² Similarly, by removing “If $v_M(A \wedge B) = 1$, then $v_M(A) = 1$ and $v_M(B) = 1$ ” some models will display conjunction gluts and by removing “ $v_M(\exists \xi A(\xi)) = 1$ if $v_M(A(\alpha)) = 1$ for at least one $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” some models will display existential gaps. A semantics that allows for predicative gluts or gaps is obtained by removing one or both directions of C2.1.

The resulting semantic systems are obviously indeterministic because the valuation values of formulas are not functions of the assignment values of their components. We shall devise equivalent deterministic semantic systems after pointing to another peculiarity first.

If some models of a logic **L** display gluts or gaps, Replacement of Identicals (RoI) does not hold in **L**.³ In view of C2.1 and C2.2, $v_M(a = b) = 1$ warrants that $v_M(Pa) = v_M(Pb)$. But if there is, for example, a negation glut or gap, $v_M(a = b) = 1$ does not warrant that $v_M(\sim Pa) = v_M(\sim Pb)$. For some purposes, however, one will want to combine gluts or gaps with RoI. It is indeed possible to do so, as we now shall show.

An obvious example concerns gluts and gaps for negation. The six basic fragments handle negation gluts, negation gaps, or both negation gluts and gaps respectively. RoI does not hold in the first three logics, but holds in the last three (that have identity in the superscript). The semantics of the six logics is obtained from the above **CL**-semantics by replacing C2.3 according to the following table:

CL	CLoN	CLuN	CLaN	CLoN⁼	CLuN⁼	CLaN⁼
C2.3	C2.3 ^o	C2.3 ^u	C2.3 ^a	C2.3 ^{o=}	C2.3 ^{u=}	C2.3 ^{a=}

The replacing clauses are:

²The resulting logics are called **CLuN** (for example in [12]), **CLaN** and **CLoN** respectively—they are like **CL** except in that they allow for gluts, gaps, or both gluts and gaps with respect to negation.

³The only exception is that identity gaps by themselves do not invalidate RoI—see below in the text.

- C2.3^o $v_M(\sim A) = 1$ iff $v(\sim A) = \{\emptyset\}$
 C2.3^u $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ or $v(\sim A) = \{\emptyset\}$
 C2.3^a $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ and $v(\sim A) = \{\emptyset\}$
 C2.3^{o=} $v_M(\sim A) = 1$ iff $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_h(\sim A)(\sim A)) \rangle \in v(f(\sim A))$
 C2.3^{u=} $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ or $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_h(\sim A)(\sim A)) \rangle \in v(f(\sim A))$
 C2.3^{a=} $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ and $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_h(\sim A)(\sim A)) \rangle \in v(f(\sim A))$

Other gluts and gaps are handled similarly. Suppose that one wants to allow for gluts or gaps with respect to some logical symbol. In the above **CL**-semantics, the symbol is characterized by a simple form A and the clause for it reads “ $v_M(A) = 1$ iff Z ” for some Z . In this clause, one replaces the expression “ Z ” by “ Z or Y ” to allow for for gluts, by “ Z and Y ” to allow for for gaps, and by “ Y ” to allow for for both. In these expressions, Y is either $v(A) = \{\emptyset\}$, in which case RoI is invalidated, or $\langle v(g_1(A)), \dots, v(g_h(A)(A)) \rangle \in v(f(A))$ in which case RoI is validated. Consider the clause for the universal quantifier as an example. Gluts only are allowed by the clause

$$v_M(\forall \xi A(\xi)) = 1 \text{ iff } v_M(A(\alpha)) = 1 \text{ for all } \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O} \text{ or } v(\forall \xi A(\xi)) = \{\emptyset\},$$

which invalidates RoI. Both gluts and gaps are allowed by the clause

$$v_M(\forall \xi A(\xi)) = 1 \text{ iff } \langle v(g_1(\forall \xi A(\xi))), \dots, v(g_h(\forall \xi A(\xi))(\forall \xi A(\xi))) \rangle \in v(f(\forall \xi A(\xi))),$$

which makes sure that RoI is validated.

We shall consider combinations of gluts and gaps for different simple forms, provided all of them are RoI variants—we shall then say that the logic *follows the RoI schema*—or all of them are non-RoI variants—we shall then say that the logic *follows the non-RoI schema*. We have studied mixed combinations. They are complicated and seem uninteresting in that we were unable to see any sensible application contexts for them.

Some special cases deserve a comment. The first case concerns predicative gluts or gaps. Consider the RoI variant for the clause for predicative gluts:

$$v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r) \text{ or } \langle v(g_1(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r)), \dots, v(g_h(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r)(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r)) \rangle \in v(f(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r))$$

which is equivalent to

$$v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r) \text{ or } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(f(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r))$$

In Section B.2 we have identified $v(\pi^r)$ with $v(f(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r))$, but suppose we did not do so. Where $M = \langle D, v \rangle$, there obviously is a model $M' = \langle D, v' \rangle$ that is exactly as M except that $v'(\pi^r) = v(\pi^r) \cup v(f(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r))$ and in which there are no predicative gluts in that the corresponding clause there reads:

$$v_{M'}(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } \langle v'(\alpha_1), \dots, v'(\alpha_r) \rangle \in v'(\pi^r).$$

It is easily seen that $v_{M'}(A) = v_M(A)$ for all $A \in {}^+\mathcal{W}$.

So the semantics is equivalent to (defines the same consequence relation as) a simpler semantics. As this simpler semantics does not introduce predicative gluts, it follows at once that the original semantics does not introduce any identity gluts that show at the level of the consequence relation. By the same reasoning, one immediately sees that predicative gaps, either by themselves or combined with predicative gluts, are a useless complication if the semantics follows the RoI schema. So there is no harm in identifying $v(\pi^r)$ with $v(f(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r))$ as we did.

If the logic does not follow the RoI schema, predicative gluts and gaps do have effect. Consider a semantics that is exactly like that for CL except in that clause C2.1 is modified in order to allow for gluts and/or gaps. It is easily seen that RoI is not valid on this semantics.

The second special case is identity. As we are not interested here in the study of the basic logics themselves, two comments are sufficient. First, the RoI variant of the clause for identity gluts, which reads

$$v_M(\alpha = \beta) = 1 \text{ iff } v(\alpha) = v(\beta) \text{ or } \langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(\cdot = \cdot),$$

obviously does not warrant the validity of RoI. Indeed, it allows for models in which $v(a) \neq v(b)$, $v(a = b) = \{\emptyset\}$, $v(a) \in v(P)$, $v(b) \notin v(P)$, and hence $v_M(a = b) = v_M(Pa) = 1$ and $v_M(Pb) = 0$. Similarly for RoI variant of the clause that allows for both identity gluts and gaps. We shall show that the resulting logics have a semantics that follows the non-RoI schema. The RoI variant of the clause for identity gaps, which reads

$$v_M(\alpha = \beta) = 1 \text{ iff } v(\alpha) = v(\beta) \text{ and } \langle v(\alpha), v(\beta) \rangle \in v(\cdot = \cdot),$$

warrants the validity of RoI. We shall show that the resulting logic has a semantics that follows the RoI schema and does not allow for identity gaps. In view of both results, we shall disregard logics that follow that RoI scheme and allow for identity gluts and identity gaps.

We shall show that all basic fragments of CL can be embedded in CL. The same holds for certain extensions and fragments of them, which we discuss in the next section.

B.4 Extensions and Fragments of the Basic Fragments

B.4.1 Extending a Basic Fragment

An extension of a logic \mathbf{L} may be defined in terms of axiom schemas. If one adds to the semantics of \mathbf{L} a clause $v_M(A) = 1$ for every new axiom schema A , the result will not be sensible because the new clauses may (and for some models will) contradict one of the original clauses for \mathbf{L} . This, however may sometimes be repaired by first considering the original clause as a default (which is overruled by the new clauses) and next turning the semantics into a consistent and recursive one.

As a simple example, consider the extension of \mathbf{CLoN} with the axiom schema $\sim\sim A \supset A$. The new semantic clause is $v_M(\sim\sim A \supset A) = 1$, which is contextually equivalent to “ $v_M(\sim\sim A) = 0$ if $v_M(A) = 0$.” It readily turns out that C2.3^o should be replaced by C2.3' and C2.3'':

C2.3' if A is not of the form $\sim B$, then $v_M(\sim A) = 1$ iff $v(\sim A) = \{\emptyset\}$

C2.3'' $v_M(\sim\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 1$ and $v(\sim\sim A) = \{\emptyset\}$

We now generalize this result.

Let \bar{A} be the set of non-logical symbols that occur in A . Let m be an *instantiation function* iff m maps every symbol that occurs in metalinguistic formulas on a symbol or formula from the object language in such a way that every logical symbol is mapped on itself and every non-logical symbol is mapped on a symbol or formula for which it is a variable. Let $i(A)$ be the set of all formulas $A \in {}^+\mathcal{L}$ such that there is an instantiation function m and $m(A) = A$. A has the form of B and B has the *corresponding form* of A iff there is an instantiation function m such that $m(A) = B$ and $m(B) = A$. We will use *complexity function* to denote a function c with $c : {}^+\mathcal{F} \cup {}^m\mathcal{F} \mapsto \mathbb{N}$. A restriction con_A on a logical form $A \in {}^\mathbb{D}\mathcal{W}$ is a metalinguistic condition (in which A is the only (meta)variable) that restricts A . An instantiation m maps con_A on $con_{m(A)}$, where $A = m(A)$. Let $i(con_A)$ be the set of all formulas $A \in {}^+\mathcal{L}$ such that there is an instantiation function m , con_A holds and $m(A) = A$.

Definition 35 A finite set Ψ of couples $\langle A, con_A \rangle$ consisting of a member of ${}^m\mathcal{W}$ and a restriction on it is a complete set of restricted logical forms for ${}^+\mathcal{L}$ iff $\bigcup \{i(con_B) \mid \langle B, con_B \rangle \in \Psi\} = {}^+\mathcal{L}$ and for every $\langle A, con_A \rangle, \langle B, con_B \rangle \in \Psi$, $i(con_A) \cap i(con_B) = \emptyset$.

Definition 36 A complexity function c is regular with respect to a complete set of restricted logical forms Ψ iff (1) $c(B(\xi)) = c(B(\psi)) = c(B(\alpha)) = c(B(\beta))$ for every $B(\alpha) \in {}^+\mathcal{W}$, and (2) $c(B) < c(A)$ whenever $c(B) < c(A)$, $\langle A \text{ con}_A \rangle \in \Psi$, $\langle B \text{ con}_B \rangle \in \Psi$, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, A has the form of An con_A holds true, and con_B holds true, and B has the corresponding form of B .

Definition 37 A semantics for a logic \mathbf{L} with language \mathcal{L} is nice iff (1) it has the same assignment as the \mathbf{CL} -semantics from Section B.3 and (2) there is (i) a complete set of restricted logical forms Ψ for ${}^+\mathcal{L}$ and (ii) a complexity function that is regular with respect to Ψ , such that:

for every $\langle A, \text{con}_A \rangle \in \Psi$, there is a clause that has the form

$$[\text{if } \text{con}_A, \text{ then}] v_M(A) = 1 \text{ iff def} \quad (\text{B.1})$$

in which *def* is a statement made up by parentheses, occurrences of “or” and “and”, and one or more well-formed semantic expressions of the following forms—the expressions are indicated by quotation marks:

- (i) “ $v_M(B) = \dagger$ ” with $\dagger \in \{0, 1\}$, $c(B) < c(A)$, and $\overline{B} \subseteq \overline{A}$
- (ii) “ $v_M(B(b)) = \dagger$ for all $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” with $\dagger \in \{0, 1\}$, $c(B(x)) < c(A)$, and $\overline{B(x)} \subseteq \overline{A}$
- (iii) “ $v_M(B(b)) = \dagger$ for at least one $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” with $\dagger \in \{0, 1\}$, $c(B(x)) < c(A)$, and $\overline{B(x)} \subseteq \overline{A}$
- (iv) “ $\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \dagger v(P^r)$ ” with $\dagger \in \{\in, \notin\}$ and $a_1, \dots, a_r, P^r \in \overline{A}$
- (v) “ $v(a) \dagger v(b)$ ” with $\dagger \in \{=, \neq\}$ and $a, b \in \overline{A}$,
- (vi,a) if \mathbf{L} follows the RoI scheme: “ $\langle v(g_1(B)), \dots, v(g_h(B)(B)) \rangle \dagger v(f(B))$ ” with $\dagger \in \{\in, \notin\}$, B is not of the form $a = b$, and $\overline{B} \subseteq \overline{A}$,
- (vi,b) if \mathbf{L} does not follow the RoI scheme: “ $v(B) = \dagger$ ” with $\dagger \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, B is not of the form $a = b$, and $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.
- (vii) “ $0 \dagger 0$ ” with $\dagger \in \{=, \neq\}$

Expressions of the forms (i)–(vii) will be called *semantic elements*. Those of forms (iv)–(vii) will more particularly be called *semantic base elements* because they refer directly to the assignment function.

A *transparent semantic statement* is compounded from semantic base elements by the connectives “(... and ...)” and “(... or ...)” and by restricted quantifiers of the form “for all $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” and “for at least one $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ”. An *instantiated transparent semantic element* is a transparent semantic statement, in which every metaformula is instantiated by the same instantiation function.

Lemma 14 If \mathbf{L} has a nice semantics, then, for every \mathbf{L} -formula A , if the semantic clause for $v_M(A) = 1$ refers to expressions of the form $v_M(B) = \dagger$, where $\dagger \in \{0, 1\}$, A is of the form A , and B is of the form B , then $c(B) < c(A)$.

Proof. Evident in view of the definition of the semantic elements and the regularity of the complexity function in the definition of a nice semantics. ■

Lemma 15 *If \mathbf{L} has a nice semantics, then, for every formula A , $v_M(A) = 1$ is equivalent to an instantiated transparent semantic statement.*

Proof. We prove the lemma by an induction on $c(A)$, where $c(A) = c'(A) - \min\{c'(B) \mid B \in {}^+\mathcal{W}\}$ and c' is a regular complexity function underlying a nice semantics of \mathbf{L} .

For the basis, let $c(A) = 0$. The clause for $v_M(A) = 1$ where A has the form of A is a transparent semantic statement, because it cannot consist of semantic non-base elements as they would refer to at least one formula with complexity lower than $\min\{c'(B) \mid B \in {}^+\mathcal{W}\}$ (see lemma 14), which is impossible. Hence, $v_M(A) = 1$ is equivalent to an instantiated transparent semantic statement.

For the induction step, suppose that $v_M(B) = 1$, where B is of the form B , is equivalent to a transparent semantic statement, for all $c(B) < n$. Consider a formula or pseudo-formula A for which $c(A) = n$. The instantiation of the semantic clause for $v_M(A) = 1$ can only be compounded from expressions of the form $v_M(C) = \dagger$, with $\dagger \in \{0, 1\}$ and $c(C) < n$, and semantic base elements by the connectives “... and ...” and “... or ...” and by restricted quantifiers of the form “for all $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ” and “for at least one $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ”. The expressions of the form “ $v_M(C) = \dagger$ ” with $\dagger \in \{0, 1\}$ are themselves equivalent to instantiated transparent semantic statements in view of the induction hypothesis and hence $v_M(A) = 1$ is equivalent to an instantiated transparent semantic statement. ■

Corollary 1 *A nice semantics is recursive.*

A set of logics that have a nice semantics are the well-known \mathbf{C}_i -systems ($i \in \mathbb{N}$) from [50], further studied in [51] and many other papers. Subsections B.4.2 to B.4.4 contain more examples.

\mathbf{C}_i -semantiek hier of in appendix.

B.4.2 Some Maximal Fragments of CL

Two sets of logics between those listed in the table in Section B.3 and \mathbf{CL} will be considered.⁴

The first six will be called Schütte logics because their propositional fragments were first presented in [102]—their names are formed by appending a “s” to the systems they extend. The nice semantics for these systems is obtained

⁴All logics considered in this section have a characteristic three-valued semantics and their propositional fragments are maximally paraconsistent—see [4].

from the **CL**-semantics of Section B.3 by adding $C2.3^{\sim\sim}-C2.3^{\sim\exists}$ and by replacing **C2.3** according to the following table:

CL	CLoNs	CLuNs	CLaNs	CLoNs⁼	CLuNs⁼	CLaNs⁼
C2.3	$C2.3^{op}$	$C2.3^{up}$	$C2.3^{ap}$	$C2.3^{o=p}$	$C2.3^{u=p}$	$C2.3^{a=p}$

Here are the clauses:

$C2.3^{op}$	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $v(\sim A) = \{\emptyset\}$
$C2.3^{up}$	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ or $v(\sim A) = \{\emptyset\}$
$C2.3^{ap}$	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ and $v(\sim A) = \{\emptyset\}$
$C2.3^{o=p}$	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_h(\sim A)(\sim A)) \rangle \in v(f(\sim A))$
$C2.3^{u=p}$	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ or $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_h(\sim A)(\sim A)) \rangle \in v(f(\sim A))$
$C2.3^{a=p}$	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$ and $\langle v(g_1(\sim A)), \dots, v(g_h(\sim A)(\sim A)) \rangle \in v(f(\sim A))$
$C2.3^{\sim\sim}$	$v_M(\sim\sim A) = v_M(A)$
$C2.3^{\sim\supset}$	$v_M(\sim(A \supset B)) = v_M(A \wedge \sim B)$
$C2.3^{\sim\vee}$	$v_M(\sim(A \vee B)) = v_M(\sim A \wedge \sim B)$
$C2.3^{\sim\wedge}$	$v_M(\sim(A \wedge B)) = v_M(\sim A \vee \sim B)$
$C2.3^{\sim\equiv}$	$v_M(\sim(A \equiv B)) = v_M((A \vee B) \wedge (\sim A \vee \sim B))$
$C2.3^{\sim\forall}$	$v_M(\sim\forall\xi A(\xi)) = v_M(\exists\xi\sim A(\xi))$
$C2.3^{\sim\exists}$	$v_M(\sim\exists\xi A(\xi)) = v_M(\forall\xi\sim A(\xi))$

To see that the semantic systems are nice, remark that, for example, $C2.3^{\sim\equiv}$ is equivalent to “if A has the form $B \equiv C$, then $v_M(\sim A) = 1$ iff ($v_M(B) = 1$ or $v_M(C) = 1$) and ($v_M(\sim B) = 1$ or $v_M(\sim C) = 1$)” and that $C2.3^{\sim\exists}$ is equivalent to “if A has the form $\exists\xi B(\xi)$, then $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(\sim B(\alpha)) = 1$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ”. So a suitable regular complexity function is the one that identifies $c(A)$ with the number of occurrences in A of logical symbols different from identity.

While these six systems ‘drive’ negations of complex formulas ‘inwards,’ we now consider six systems in which negations behave classically in front of complex formulas. The logics are called **CLoNv**, **CLuNv**, **CLaNv**, **CLoNv⁼**, **CLuNv⁼**, and **CLaNv⁼**—the “v” refers to Arruda’s so-called Vasil’ev system from [3], which is the propositional fragment of **CLuNv** and **CLuNv⁼**.

The semantics of these logics is the same as that of the corresponding Schütte logic, except that $C2.3^v$ is added instead of $C2.3^{\sim\sim}-C2.3^{\sim\exists}$:

$C2.3^v$ where $A \in {}^+\mathcal{W} - {}^+\mathbb{P}^=$, $v_M(\sim A) = 1$ iff $v_M(A) = 0$,

B.4.3 Linguistic Extensions and Fragments

Several logics are fragments of the aforementioned ones, obtained by removing some logical symbols from the language. Their semantics is obtained by selecting the relevant valuation clauses from the logics of which they are fragments. Examples are **LP** from [92] (obtained from **CLuNs**⁼ by removing \supset from the language), the predicative version of **SK**₃ from [69], etc.

Other logics are obtained from aforementioned fragments of **CL** by adding logical symbols that are definable in **CL**. Typical examples are logics extended with the missing classical connectives. Thus, if a logic handles negation gluts or gaps, the language may be extended with classical negation, say \neg . If it handles conjunction gaps or gluts, the language may be extended with classical conjunction, say \sqcap . The advantage of this linguistic extension is that it often greatly simplifies the metatheory.

The easiest way to handle linguistic extensions is to extend the languages \mathcal{L} and the pseudo-language ${}^+\mathcal{L}$ with the new symbol, and to extend the **CL**-semantics with an appropriate clause for the new symbol. In the case of added classical symbols, this clause will duplicate that for the original symbol (except for the single occurrence of the new symbol itself).

B.4.4 Other Roads to Gluts and Gaps

Many more logics than the ones described in this paper have a nice semantics and can be embedded in **CL** by the method described below. Let us just present one further example.

Consider the result of replacing, in the **CL**-semantics from Section B.3, C2.1 and C2.2 by

$$\text{C2.1}^o \quad v_M(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } v(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \quad (r \geq 0)$$

$$\text{C2.2}^o \quad v_M(\alpha = \beta) = 1 \text{ iff } v(\alpha = \beta) = 1$$

and C2.3 by C2.3[~]–C2.3[~] \exists together with

$$\text{C2.3}^{\sim p} \quad v_M(\sim \pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = 1 \text{ iff } \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \notin v(\pi^r) \quad (r \geq 0)$$

$$\text{C2.3}^{\sim =} \quad v_M(\sim \alpha = \beta) = 1 \text{ iff } v(\alpha) \neq v(\beta)$$

Suppose moreover that classical negation, \neg , is added to the language and correctly defined within the semantics—see the previous subsection.

The resulting logic allows for predicative gluts and gaps, for identity gluts and gaps, but also for negation gluts and gaps. The logic is not equivalent to any of the logics considered before, even if these are extended with classical negation.

Indeed, unlike all previously considered logics, the present logic validates “If $\Gamma \vdash \neg \sim a = b$, then $\Gamma \vdash \sim A(a) \equiv \sim A(b)$.”

We did not study such logics. By all means it is dubious whether they have any sensible application context. Nevertheless, it is worth mentioning that some of them (for example the above one) have a nice semantics.

B.5 The Embedding

Let \mathbf{L} be a fragment of \mathbf{CL} that has an adequate nice semantics. In order to show that \mathbf{L} can be embedded in \mathbf{CL} , we shall first turn the \mathbf{L} -semantics into a translation function tr which maps formulas (and sets of formulas) from \mathcal{W} to formulas (and sets of formulas) from $\mathcal{W}_\#$, thus taking care of the embedding. We shall distinguish between two cases according as \mathbf{L} follows the RoI scheme or not. The second case is slightly more complicated.

B.5.1 Logics Following the RoI Scheme

Let \mathbf{L} be a logic that follows the RoI scheme and has a nice semantics with complete set of logical forms Ψ —so without gluts or gaps for either predicates or identity. We shall prove that, where $\Gamma \subset \mathcal{W}$ and $A \in \mathcal{W}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ iff $\text{tr}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{CL}} \text{tr}(A)$, in which $\text{tr}(\Gamma)$ is a finite set whenever Γ is finite.

Definition of the translation function The translation function $\text{tr}: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_\#$ for \mathbf{L} is characterized by a set of clauses that are obtained as follows from the semantic clauses. For each $A \in \Psi$, there is a clause of the form (B.1). Each tr -clause will have the corresponding form

$$\text{tr}(A) = C$$

in which C is a metalinguistic formula, in which “ tr ” and members of $\mathcal{W}_\#$ may occur, which is obtained by replacing the elements of def (from the semantic clause) according to Table B.1—the elements occur in the order in which they are mentioned in Definition 37.

The translation function is extended to sets by $\text{tr}(\Gamma) = \{\text{tr}(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Together with Definition 37, the definition of the translation function warrants that tr is a total function.

Let us at once consider a complex example, viz. the translation function for $\mathbf{CLuNs}^=$. In the semantics for $\mathbf{CLuNs}^=$ each of C2.1–9 handles a basic form

element of semantic clause for $v(A) = 1$	element of clause for $\text{tr}(A)$
((
))
and	\wedge
or	\vee
(i) where $B \in A^c$:	
$v_M(B) = 1$	$\text{tr}(B)$
$v_M(B) = 0$	$\sim \text{tr}(B)$
(ii) where $B(x) \in A^c$:	
$v_M(B(b)) = 1$ for all $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$	$\forall x \text{tr}(B(x))$
$v_M(B(b)) = 0$ for all $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$	$\forall x \sim \text{tr}(B(x))$
(iii) where $B(x) \in A^c$:	
$v_M(B(b)) = 1$ for at least one $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$	$\exists x \text{tr}(B(x))$
$v_M(B(b)) = 0$ for at least one $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$	$\exists x \sim \text{tr}(B(x))$
(iv) where $P^r a_1 \dots a_r \in A^c \cup \{A\}$:	
$\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \in v(P^r)$	$P^r a_1 \dots a_r$
$\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \notin v(P^r)$	$\sim P^r a_1 \dots a_r$
(v) where $a = b \in A^c \cup \{A\}$:	
$v(a) = v(b)$	$a = b$
$v(a) \neq v(b)$	$\sim a = b$
(vi) where $B \in A^c \cup \{A\} - {}^m\mathbb{P}^=$:	
$\langle v(g_1(B)), \dots, v(g_{h(B)}(B)) \rangle \in v(f(B))$	$P_{f(B)}^{h(B)} g(B)$
$\langle v(g_1(B)), \dots, v(g_{h(B)}(B)) \rangle \notin v(f(B))$	$\sim P_{f(B)}^{h(B)} g(B)$
(vii)	
$0 = 0$	$P^0 \vee \neg P^0$
$0 \neq 0$	$P^0 \wedge \neg P^0$

Table B.1: RoI scheme: from the semantics to tr

whereas the set comprising C2.3^{u=p} and C2.3^{~ ~ - C2.3^{~ ~}} handles the basic form $\sim A$. So the translation function is defined by:

T1	$\text{tr}(\pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r) = \pi^r \alpha_1 \dots \alpha_r \quad (r \geq 0)$
T2	$\text{tr}(\alpha = \beta) = \alpha = \beta$
T3	$\text{tr}(A \supset B) = \text{tr}(A) \supset \text{tr}(B)$
T4	$\text{tr}(A \wedge B) = \text{tr}(A) \wedge \text{tr}(B)$
T5	$\text{tr}(A \vee B) = \text{tr}(A) \vee \text{tr}(B)$
T6	$\text{tr}(A \equiv B) = \text{tr}(A) \equiv \text{tr}(B)$
T7	$\text{tr}(\forall \xi A) = \forall \xi \text{tr}(A)$
T8	$\text{tr}(\exists \xi A) = \exists \xi \text{tr}(A)$
T9 ^{u=p}	If $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $\text{tr}(\sim A) = \sim \text{tr}(A) \vee P_{f(\sim A)}^{h(\sim A)} g(\sim A)$
T9 ^{s~ ~}	$\text{tr}(\sim \sim A) = \text{tr}(A)$
T9 ^{s~ \supset}	$\text{tr}(\sim(A \supset B)) = \text{tr}(A) \wedge \text{tr}(\sim B)$
T9 ^{s~ \wedge}	$\text{tr}(\sim(A \wedge B)) = \text{tr}(\sim A) \vee \text{tr}(\sim B)$
T9 ^{s~ \vee}	$\text{tr}(\sim(A \vee B)) = \text{tr}(\sim A) \wedge \text{tr}(\sim B)$
T9 ^{s~ \equiv}	$\text{tr}(\sim(A \equiv B)) = (\text{tr}(A) \vee \text{tr}(B)) \wedge (\text{tr}(\sim A) \vee \text{tr}(\sim B))$
T9 ^{s~ \forall}	$\text{tr}(\sim \forall \xi A) = \exists \xi \text{tr}(\sim A)$
T9 ^{s~ \exists}	$\text{tr}(\sim \exists \xi A) = \forall \xi \text{tr}(\sim A)$

Clauses T1 and T2 can be combined into “where $A \in {}^+\mathbb{P}^=$, $\text{tr}(A) = A$ ”. The literal version of T3 is the equivalent “ $\text{tr}(A \supset B) = \sim \text{tr}(A) \vee \text{tr}(B)$ ”. Clause C2.7 has to be transformed to an equivalent clause before Table B.1 can be applied to it, but the result of the application is equivalent to T6. Similarly for T9^{s~ ~ - T9^{s~ \exists}}.⁵

Definition 38 Where $M = \langle D, v \rangle$ is a **L-model** for ${}^+\mathcal{L}$ and $M' = \langle D, v' \rangle$ a **CL-model** for ${}^+\mathcal{L}_\#$, let RMM' iff the following conditions are fulfilled:

- R1 If $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, then $v'(\alpha) = v(\alpha)$.
- R2 If $A \in \mathbb{P}$, then $v'(f(A)) = v(f(A))$.
- R3 $v'(P_{f(A)}^{h(A)}) = v(f(A))$.

Lemma 16 (i) For every **L-model** $M = \langle D, v \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}$ there is a **CL-model** $M' = \langle D, v' \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}_\#$ such that RMM' and (ii) for every **CL-model** $M' = \langle D, v' \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}_\#$ there is a **L-model** $M = \langle D, v \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}$ such that RMM' .

Proof. Immediate in view of Definition 38. ■

⁵For example, the literal version of T9^{s~ ~} reads: “if A is $\sim B$, then $\text{tr}(\sim A) = \text{tr}(B)$ ”.

Lemma 17 *If $M = \langle D, v \rangle$ is a \mathbf{L} -model for ${}^+\mathcal{L}$, $M' = \langle D, v' \rangle$ a \mathbf{CL} -model for ${}^+\mathcal{L}_\#$, and RMM' , X is a semantic base element of a clause for $v_M(A) = 1$, and Y is the corresponding element of the clause for $\text{tr}(A)$, then X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$.*

Proof.

There are six cases.

Case 1. X has the form $\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \in v(P^r)$, whence Y has the form $P^r a_1 \dots a_r$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of R1, R2, and C2.1.

Case 2. X has the form $\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \notin v(P^r)$, whence Y has the form $\sim P^r a_1 \dots a_r$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of R1, R2, C2.1, and C2.3.

Case 3. X has the form $v(a) = v(b)$, whence Y has the form $a = b$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of R1 and C2.2.

Case 4. X has the form $v(a) \neq v(b)$, whence Y has the form $\sim a = b$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of R1, C2.2, and C2.3.

Case 5. X has the form $\langle v(g_1(B)), \dots, v(g_{h(B)}(B)) \rangle \in v(f(B))$ and $B \notin {}^m\mathbb{P}^=$, whence Y has the form $P_{f(B)}^{h(B)} g(B)$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of R1, R3, and C2.1.

Case 6. X has the form $\langle v(g_1(B)), \dots, v(g_{h(B)}(B)) \rangle \notin v(f(B))$ and $B \notin {}^m\mathbb{P}^=$, whence Y has the form $\sim P_{f(B)}^{h(B)} g(B)$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of R1, R3, C2.1, and C2.3.

Case 7. X has the form $1 = 1$, whence Y has the form $P^0 \vee \sim P^0$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of C2.6 and C2.3.

Case 8. X has the form $1 \neq 1$, whence Y has the form $P^0 \wedge \sim P^0$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of C2.5 and C2.3. ■

Lemma 18 *If tr is the translation function for \mathbf{L} , $M = \langle D, v \rangle$ is a \mathbf{L} -model for ${}^+\mathcal{L}$, $M' = \langle D, v' \rangle$ a \mathbf{CL} -model for ${}^+\mathcal{L}_\#$, and RMM' , then $v_{M'}(\text{tr}(A)) = v_M(A)$.*

Proof. Suppose that the antecedent is true. We prove the lemma by an induction on $c(A)$, where $c(A) = c'(A) - \min\{c'(B) \mid B \in {}^+\mathcal{W}\}$ and c' is the regular complexity function underlying the nice semantics of \mathbf{L} .

For the basis, let $c(A) = 0$. Let

$$v_M(A) = 1 \text{ iff } \text{def} \tag{B.2}$$

be the semantic clause for the form of A . The phrase *def* is a truth-function of semantic elements of the forms (iv)–(vi) listed in Table B.1 (no element of the forms (i)–(iii) can occur because they would refer to at least one formula with

complexity lower than $\min\{c'(B)|B \in {}^+\mathcal{W}\}$ (see lemma 14)). Let the application of (B.2) result in

$$v_M(A) = 1 \text{ iff } DEF \quad (B.3)$$

Let X be a semantic element of def , X' the corresponding element of DEF , and Y and Y' the corresponding elements of the tr -clause and of its application to A respectively. X has the form (iv), (v), or (vi) respectively. X' holds true in M iff $v_{M'}(Y') = 1$ in view of Lemma 17 and Definition 36. In view of the CL-semantics and the definition of the translation function, it follows that DEF holds true in M iff $v_{M'}(\text{tr}(A)) = 1$, and hence that $v_{M'}(\text{tr}(A)) = v_M(A)$.

For the induction step, suppose that $v_{M'}(\text{tr}(B)) = v_M(B)$ for $c(B) \leq n$. Consider a formula or pseudo-formula A for which $c(A) = n + 1$.⁶ Let

$$[\text{if } con, \text{ then}] v_M(A) = 1 \text{ iff } def \quad (B.4)$$

be the semantic clause for the form of A . The phrase def is a truth-function of semantic elements of the forms (i)–(vi) listed in Table B.1. Let the application of (B.4) result in

$$v_M(A) = 1 \text{ iff } DEF \quad (B.5)$$

Let X be a semantic element of def , X' the corresponding element of DEF , and Y and Y' the corresponding elements of the tr -clause and of its application to A respectively.

We first show that X' holds true in M iff $v_{M'}(Y') = 1$. There are six cases.

Case 1: X has the form (i). Sub-case 1.1: X' is $v_M(B) = 1$. So Y' is $\text{tr}(B)$. By Definition 36, $B \in A^c$, and hence $v_{M'}(\text{tr}(B)) = v_M(B) = 1$ by the induction hypothesis. Sub-case 1.2: X' is $v_M(B) = 0$. $v_{M'}(\text{tr}(B)) = v_M(B) = 0$ follows by the reasoning of sub-case 1.1.

Case 2: X has the form (ii). Sub-case 2.1: X' is " $v_M(B(\alpha)) = 1$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ". So Y' is $\forall \xi \text{tr}(B(\xi))$. By Definition 36, $B(\xi) \in A^c$, and hence $v_{M'}(\text{tr}(B(\alpha))) = v_M(B(\alpha)) = 1$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ by the induction hypothesis. But then $v_{M'}(\forall \xi \text{tr}(B(\xi))) = 1$ by C2.8. Sub-case 2.2: X' is " $v_M(B(\alpha)) = 0$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ". So Y' is $\forall \xi \sim \text{tr}(B(\xi))$. $v_{M'}(\forall \xi \sim \text{tr}(B(\xi))) = 1$ by the reasoning of sub-case 2.1.

Case 3: X has the form (iii): wholly analogous to case 2.

Cases 4–6: X has the form (iv), (v), or (vi) respectively. Immediate in view of Lemma 17 and Definition 36.

In view of the CL-semantics and the definition of the translation function, it follows that DEF holds true in M iff $v_{M'}(\text{tr}(A)) = 1$, and hence that $v_{M'}(\text{tr}(A)) = v_M(A)$. ■

⁶If there is no such A , then $v_{M'}(\text{tr}(B)) = v_M(B)$ for $c(B) \leq n + 1$.

Theorem 17 *If \mathbf{L} has a nice semantics that follows the RoI scheme and tr is the translation function for \mathbf{L} , then $\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} A$ iff $\text{tr}(\Gamma) \vDash_{\mathbf{CL}} \text{tr}(A)$.*

Proof. By Lemmas 16 and 18, if a \mathbf{L} -model M verifies Γ and falsifies A , then there is a \mathbf{CL} -model M' that verifies $\text{tr}(\Gamma)$ and falsifies $\text{tr}(A)$, and vice versa. ■

If Γ is a finite set, then so is $\text{tr}(\Gamma)$.

B.5.2 Logics Following the Non-RoI Scheme

Let $\Delta^= = \{\forall x P_{=}^2 xx, \forall x \forall y \forall z (P_{=}^2 xy \supset (P_{=}^2 xz \equiv P_{=}^2 yz))\} \cup \{\forall x \forall y (P_{=}^2 xy \supset (A(x) \equiv A(y))) \mid A(x) \in \mathbb{P}\}$.⁷ The main general difference with the previous subsection is that, whenever \mathbf{L} has a nice semantics, the translation function tr will be such that where $\Gamma \subset \mathcal{W}$ and $A \in \mathcal{W}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ iff $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta^= \vdash_{\mathbf{CL}} \text{tr}(A)$. $\Delta^=$ is an infinite set, but we shall also be able to show that, under the above conditions, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ iff $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^= \vdash_{\mathbf{CL}} \text{tr}(A)$, in which $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^=$ is a finite set whenever Γ is finite.

The translation function tr is obtained by applying Table B.2, which is like Table B.1 except in that $v(\alpha) = v(\beta)$ and $v(\alpha) \neq v(\beta)$ correspond to a different formula, and that the form of simple semantic expressions is different if $\mathbf{B} \notin \mathbb{P}^=$.

Definition 39 *Where $M = \langle D, v \rangle$ is a \mathbf{L} -model for ${}^+\mathcal{L}$ and $M' = \langle D, v' \rangle$ a \mathbf{CL} -model for ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$, let SMM' iff the following conditions are fulfilled:*

S1 *If $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, then $v'(\alpha) = \alpha$.*

S2 *If $\pi^r \in \mathcal{P}^r$, then $v'(\pi^r) = \{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \mid \langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\pi^r)\}$.*

S3 *$v'(P_{=}^2 _) = \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid v(\alpha) = v(\beta)\}$.*

S4 *For all $A \in {}^+\mathcal{W}$, if $f(A) \neq P_{=}^2 _$, then $v'(P_{f(A)}^{h(A)}) = \{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \mid \text{for some } B \in {}^+\mathcal{W}, f(B) = f(A), v(B) = \{\emptyset\} \text{ and } g(B) = \alpha_1 \dots \alpha_r\}$.*

===

Two models (for the same language) are *equivalent* iff they verify the same set of formulas. Where $M = \langle D, v \rangle$ is a \mathbf{CL} -model for ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$, a predicate $\pi^2 \in \mathcal{P}_{\sharp}^2$ will be called an *identity relation over ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$ in M* iff $v(\pi^2)$ is reflexive, symmetric and transitive and, for all $\xi^r \in \mathcal{P}^r$, if $\langle v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_i), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\xi^r)$ and $\langle v(\alpha_i), v(\beta) \rangle \in v(\pi^2)$, then $\langle v(\alpha_1), \dots, v(\beta), \dots, v(\alpha_r) \rangle \in v(\xi^r)$. Let \mathcal{L}' be the identity-free fragment of the language ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$.

⁷ $\Delta^=$ \mathbf{CL} -entails $\forall x \forall y (P_{=}^2 xy \supset P_{=}^2 yx)$ as well as $\forall x \forall y \forall z (P_{=}^2 xy \supset (P_{=}^2 yz \supset P_{=}^2 xz))$.

element of semantic clause for $v(A) = 1$		element of clause for $\text{tr}(A)$
((
))
and		\wedge
or		\vee
(i) where $B \in A^c$:		
$v_M(B) = 1$		$\text{tr}(B)$
$v_M(B) = 0$		$\sim \text{tr}(B)$
(ii) where $B(x) \in A^c$:		
$v_M(B(b)) = 1$ for all $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$		$\forall x \text{tr}(B(x))$
$v_M(B(b)) = 0$ for all $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$		$\forall x \sim \text{tr}(B(x))$
(iii) where $B(x) \in A^c$:		
$v_M(B(b)) = 1$ for at least one $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$		$\exists x \text{tr}(B(x))$
$v_M(B(b)) = 0$ for at least one $b \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$		$\exists x \sim \text{tr}(B(x))$
(iv) where $P^r a_1 \dots a_r \in A^c \cup \{A\}$:		
$\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \in v(P^r)$		$P^r a_1 \dots a_r$
$\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \notin v(P^r)$		$\sim P^r a_1 \dots a_r$
(v) where $a = b \in A^c \cup \{A\}$:		
$v(a) = v(b)$		$P^2_{=} ab$
$v(a) \neq v(b)$		$\sim P^2_{=} ab$
(vi) where $B \in A^c \cup \{A\} - {}^m\mathbb{P}$:		
$v(B) = \{\emptyset\}$		$P^h_{f(B)} g(B)$
$v(B) = \emptyset$		$\sim P^h_{f(B)} g(B)$
(vii)		
$0 = 0$		$P^0 \vee \neg P^0$
$0 \neq 0$		$P^0 \wedge \neg P^0$

Table B.2: Without RoI: from the semantics to tr

Lemma 19 (i) For every **L**-model $M = \langle D, v \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}$ there is a **CL**-model $M' = \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{O}, v' \rangle$ for \mathcal{L}' such that SMM' , and (ii) for every **CL**-model $M'' = \langle D'', v'' \rangle$ for \mathcal{L}' in which $P_{\underline{=}}^2$ is an identity relation over \mathcal{L}' , there is an equivalent model $M' = \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{O}, v' \rangle$ for \mathcal{L}' and there is a **L**-model $M = \langle D, v \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}$ such that SMM' .

Proof. The proof of (i) is immediate in view of the definition of SMM' . For the proof of (ii), consider a **CL**-model $M'' = \langle D'', v'' \rangle$ for \mathcal{L}' in which $P_{\underline{=}}^2$ is an identity relation over \mathcal{L}' . Let $M' = \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{O}, v' \rangle$ be a **CL**-model for \mathcal{L}' in which v' fulfills the following conditions:

- (i) Where $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, $v'(\alpha) = \alpha$.
- (ii) Where $\pi^r \in \mathcal{P}_{\sharp}^r$, $v'(\pi^r) = \{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \mid \langle v''(\alpha_1), \dots, v''(\alpha_r) \rangle \in v''(\pi^r)\}$.

We leave it to the reader to prove that M' is equivalent with M'' and that $P_{\underline{=}}^2$ is an identity relation over \mathcal{L}' in M' .

Let, for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, $\llbracket \alpha \rrbracket = \{\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O} \mid \langle \alpha, \beta \rangle \in v'(P_{\underline{=}}^2)\}$. Define a **L**-model $M = \langle D, v \rangle$ in which $D = \{\llbracket \alpha \rrbracket \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\}$ and v fulfills the following conditions:

- v1 Where $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$, $v(\alpha) = \llbracket \alpha \rrbracket$.
- v2 Where $\pi^r \in \mathcal{P}^r$, $v(\pi^r) = \{\langle \llbracket \alpha_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \alpha_r \rrbracket \rangle \mid \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \in v'(\pi^r)\}$.
- v3 Where $A \in {}^+\mathcal{W}$ and $g(A) = \alpha_1 \dots \alpha_{h(A)}$, $v(\sim A) = \{\emptyset\}$ iff $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{h(A)} \rangle \in v'(P_{f(\sim A)}^{h(\sim A)})$.

SMM' holds because M and M' are models of the right sorts, (i) warrants S1, S2 is warranted by v1 together with v2 and the fact that $P_{\underline{=}}^2$ is an identity relation over \mathcal{L}' in M' , v3 warrants S4, and, given the way in which D is defined, v1 warrants S3. ■

Lemma 20 If SMM' , then $M' \models_{\text{CL}} \Delta^=$.

Proof. Suppose that SMM' . S1, S3 and C2.1 jointly warrant that $v_{M'}(\forall x P_{\underline{=}}^2 xx) = v_{M'}(\forall x \forall y \forall z (P_{\underline{=}}^2 xy \supset (P_{\underline{=}}^2 xz \equiv P_{\underline{=}}^2 yz))) = 1$.

Suppose moreover that $v_{M'}(\forall x \forall y (P_{\underline{=}}^2 xy \supset (A(x) \equiv A(y)))) = 0$ for some $A(x) \in \mathbb{P}$, whence $v_{M'}(\forall x \forall y (P_{\underline{=}}^2 xy \supset (A(x) \supset A(y)))) = 0$ or $v_{M'}(\forall x \forall y (P_{\underline{=}}^2 xy \supset (A(y) \supset A(x)))) = 0$. We only consider the first possibility. It follows that there are $\alpha, \beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ such that $v_{M'}(P_{\underline{=}}^2 \alpha \beta) = v_{M'}(A(\alpha)) = 1$ and $v_{M'}(A(\beta)) = 0$. We shall show that this is impossible.

As $v_{M'}(P_{\underline{=}}^2 \alpha \beta) = 1$ (for those α and β), $v(\alpha) = v(\beta)$ by S1, S3 and C2.1. As $A(x) \in \mathbb{P}$, and hence $A(\alpha) \in {}^+\mathbb{P}$, it follows that $A(\alpha)$ has the form $\pi^r \gamma_1 \dots \gamma_r$ and that α is one of the γ_i ($1 \leq i \leq r$). Let us represent this by $\pi^r \gamma_1 \dots \alpha \dots \gamma_r$. The

following equivalences obtain:

	$v_{M'}(\pi^r \gamma_1 \dots \alpha \dots \gamma_r) = 1$
iff (by C2.1)	$\langle v'(\gamma_1), \dots, v'(\alpha), \dots, v'(\gamma_r) \rangle \in v'(\pi^r)$
iff (by S1)	$\langle \gamma_1, \dots, \alpha, \dots, \gamma_r \rangle \in v'(\pi^r)$
iff (by S2)	$\langle v(\gamma_1), \dots, v(\alpha), \dots, v(\gamma_r) \rangle \in v(\pi^r)$
iff (as $v(\alpha) = v(\beta)$)	$\langle v(\gamma_1), \dots, v(\beta), \dots, v(\gamma_r) \rangle \in v(\pi^r)$
iff (by S1 and S2)	$\langle v'(\gamma_1), \dots, v'(\beta), \dots, v'(\gamma_r) \rangle \in v'(\pi^r)$
iff (by C2.1)	$v_{M'}(\pi^r \gamma_1 \dots \beta \dots \gamma_r) = 1.$

As $\pi^r \gamma_1 \dots \beta \dots \gamma_r$ is $A(\beta)$, this contradicts $v_{M'}(A(\beta)) = 0$. ■

Lemma 21 *If $M = \langle D, v \rangle$ is a **L**-model for ${}^+\mathcal{L}$, $M' = \langle D, v' \rangle$ a **CL**-model for ${}^+\mathcal{L}_\sharp$, and SMM' , X is a semantic base element of a clause for $v_M(A) = 1$, and Y is the corresponding element of the clause for $\text{tr}(A)$, then X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$.*

Proof. There are six cases.

Case 1. X has the form $\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \in v(P^r)$, whence Y has the form $P^r a_1 \dots a_r$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of S1, S2, and C2.1.

Case 2. X has the form $\langle v(a_1), \dots, v(a_r) \rangle \notin v(P^r)$, whence Y has the form $\sim P^r a_1 \dots a_r$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of S1, S2, C2.1, and C2.3.

Case 3. X has the form $v(a) = v(b)$, whence Y has the form $P^2_{=} ab$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of S1, S3 and C2.2.

Case 4. X has the form $v(a) \neq v(b)$, whence Y has the form $\sim P^2_{=} ab$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of S1, S3, C2.2, and C2.3.

Case 5. X has the form $v(B) = \{\emptyset\}$ and $B \notin {}^m\mathbb{P}^=$, whence Y has the form $P^h_{f(B)} g(B)$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of S1, S4, and C2.1.

Case 6. X has the form $v(B) = \emptyset$ and $B \notin {}^m\mathbb{P}^=$, whence Y has the form $\sim P^h_{f(B)} g(B)$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of S1, S4, C2.1, and C2.3.

Case 7. X has the form $1 = 1$, whence Y has the form $P^0 \vee \sim P^0$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of C2.6 and C2.3.

Case 8. X has the form $1 \neq 1$, whence Y has the form $P^0 \wedge \sim P^0$. X holds true in M iff $v_{M'}(Y) = 1$ in view of C2.5 and C2.3.

■

Lemma 22 *If tr is the translation function for **L**, $M = \langle D, v \rangle$ is a **L**-model for ${}^+\mathcal{L}$, $M' = \langle D, v' \rangle$ a **CL**-model for ${}^+\mathcal{L}_\sharp$, and SMM' , then $v_{M'}(\text{tr}(A)) = v_M(A)$.*

Proof. Suppose that the antecedent is true. We prove the lemma by an induction on $c(A)$, where $c(A) = c'(A) - \min\{c'(B) \mid B \in {}^+\mathcal{W}\}$ and c' is the regular complexity function underlying the nice semantics of **L**.

For the basis, let $c(A) = 0$. Let

$$v_M(A) = 1 \text{ iff } \mathit{def} \tag{B.6}$$

be the semantic clause for the form of A . The phrase def is a truth-function of semantic elements of the forms (iv)–(vi) listed in Table B.2 (no element of the forms (i)–(iii) can occur because they would refer to at least one formula with complexity lower than $\min\{c'(B) \mid B \in {}^+\mathcal{W}\}$ (see lemma 14)). Let the application of (B.6) result in

$$v_M(A) = 1 \text{ iff } \mathit{DEF} \tag{B.7}$$

Let X be a semantic element of def , X' the corresponding element of DEF , and Y and Y' the corresponding elements of the tr -clause and of its application to A respectively. X has the form (iv), (v), or (vi) respectively. X' holds true in M iff $v_{M'}(Y') = 1$ in view of Lemma 21 and Definition 36. In view of the CL-semantics and the definition of the translation function, it follows that DEF holds true in M iff $v_{M'}(\mathit{tr}(A)) = 1$, and hence that $v_{M'}(\mathit{tr}(A)) = v_M(A)$.

For the induction step, suppose that $v_{M'}(\mathit{tr}(B)) = v_M(B)$ for $c(B) \leq n$. Consider a formula or pseudo-formula A for which $c(A) = n + 1$.⁸ Let

$$[\text{if } \mathit{con}, \text{ then}] v_M(A) = 1 \text{ iff } \mathit{def} \tag{B.8}$$

be the semantic clause for the form of A . The phrase def is a truth-function of semantic elements of the forms (i)–(vi) listed in Table B.1. Let the application of (B.8) result in

$$v_M(A) = 1 \text{ iff } \mathit{DEF} \tag{B.9}$$

Let X be a semantic element of def , X' the corresponding element of DEF , and Y and Y' the corresponding elements of the tr -clause and of its application to A respectively.

We first show that X' holds true in M iff $v_{M'}(Y') = 1$. There are six cases.

Case 1: X has the form (i). Sub-case 1.1: X' is $v_M(B) = 1$. So Y' is $\mathit{tr}(B)$. By Definition 36, $B \in A^c$, and hence $v_{M'}(\mathit{tr}(B)) = v_M(B) = 1$ by the induction hypothesis. Sub-case 1.2: X' is $v_M(B) = 0$. $v_{M'}(\mathit{tr}(B)) = v_M(B) = 0$ follows by the reasoning of sub-case 1.1.

Case 2: X has the form (ii). Sub-case 2.1: X' is " $v_M(B(\alpha)) = 1$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ". So Y' is $\forall \xi \mathit{tr}(B(\xi))$. By Definition 36, $B(\xi) \in A^c$, and hence $v_{M'}(\mathit{tr}(B(\alpha))) = v_M(B(\alpha)) = 1$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ by the induction hypothesis. But then $v_{M'}(\forall \xi \mathit{tr}(B(\xi))) = 1$ by C2.8. Sub-case 2.2: X' is " $v_M(B(\alpha)) = 0$ for all $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ ". So Y' is $\forall \xi \sim \mathit{tr}(B(\xi))$. $v_{M'}(\forall \xi \sim \mathit{tr}(B(\xi))) = 1$ by the reasoning of sub-case 2.1.

⁸If there is no such A , then $v_{M'}(\mathit{tr}(B)) = v_M(B)$ for $c(B) \leq n + 1$.

Case 3: X has the form (iii): wholly analogous to case 2.

Cases 4–6: X has the form (iv), (v), or (vi) respectively. Immediate in view of Lemma 21 and Definition 36.

In view of the CL-semantics and the definition of the translation function, it follows that DEF holds true in M iff $v_{M'}(\text{tr}(A)) = 1$, and hence that $v_{M'}(\text{tr}(A)) = v_M(A)$. ■

Theorem 18 *If \mathbf{L} has a nice semantics that follows the non-RoI scheme and tr is the translation function for \mathbf{L} : $\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} A$ iff $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta^= \vDash_{\text{CL}} \text{tr}(A)$.*

Proof. For the first direction, suppose that there is a CL-model $M'' = \langle D'', v'' \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$ such that $M'' \vDash_{\text{CL}} \Delta^=$, $M'' \vDash_{\text{CL}} \text{tr}(\Gamma)$ and $M'' \not\vDash_{\text{CL}} \text{tr}(A)$. As $M'' \vDash_{\text{CL}} \Delta^=$, $P_{=}^2$ is an identity relation over ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$ in M'' . Hence, by Lemma 19, there is an equivalent CL-model $M' = \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{O}, v' \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$ and there is a L-model M for ${}^+\mathcal{L}$ such that SMM' . In view of Lemma 22, $M \vDash_{\mathbf{L}} \Gamma$ and $M \not\vDash_{\mathbf{L}} A$.

For the second direction, suppose that there is a L-model M such that $M \vDash_{\mathbf{L}} \Gamma$ and $M \not\vDash_{\mathbf{L}} A$. By Lemma 19, there is a CL-model M' such that SMM' . $M' \vDash_{\text{CL}} \Delta^=$ in view of Lemma 20; $M' \vDash_{\text{CL}} \text{tr}(\Gamma)$ and $M' \not\vDash_{\text{CL}} \text{tr}(A)$ in view of Lemma 22. ■

Even if Γ is a finite set, $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta^=$ is an infinite set, which is inconvenient from a computational point of view. Let $\mathcal{P}_{\Gamma \cup \{A\}}$ be the set of members of \mathcal{P} that occur in Γ or in A , let $\text{Pr}(\Gamma \cup \{A\}) = \{\pi^r x_1 \dots x_r \mid \pi^r \in \mathcal{P}_{\Gamma \cup \{A\}}\}$, and let $\forall \forall A$ be the universal closure of A (A preceded by a universal quantifier over every variable free in A). Let $\Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^= = \{\forall x P_{=}^2 xx, \forall x \forall y \forall z (P_{=}^2 xy \supset (P_{=}^2 xz \equiv P_{=}^2 yz))\} \cup \{\forall \forall (P_{=}^2 x_i y \supset (B(x_i) \equiv B(y))) \mid B(x_i) \in \text{Pr}(\Gamma \cup \{A\})\}$. Obviously $\Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^=$ is a finite set whenever Γ is finite.

Theorem 19 $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta^= \vDash_{\text{CL}} \text{tr}(A)$ iff $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^= \vDash_{\text{CL}} \text{tr}(A)$.

Proof. As $\Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^= \subseteq \Delta^=$, the right-left direction is obvious. For the left-right direction, suppose that $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^= \not\vDash_{\text{CL}} \text{tr}(A)$. It follows that there is a CL-model $M = \langle D, v \rangle$ for ${}^+\mathcal{L}_{\sharp}$ that verifies $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta_{\Gamma \cup \{A\}}^=$ and falsifies $\text{tr}(A)$. Let $M' = \langle D, v' \rangle$ be exactly as M , except that $v'(\pi^r) = \emptyset$ for all $\pi^r \in \mathcal{P} - \mathcal{P}_{\Gamma \cup \{A\}}$. It follows that M' verifies $\text{tr}(\Gamma) \cup \Delta^=$ and falsifies $\text{tr}(A)$. ■

Artikel 'A Proof Procedure for Adaptive Logics'

Author

Peter Verdée

Abstract

In this paper I present a procedure that generates adaptive proofs for finally derivable adaptive logic consequences. The proof procedure for the inconsistency adaptive logic CLuN^f is already presented in [25]. In this paper the procedure for CLuN^m is presented and the results for both logics are generalized to all adaptive logics, on the presupposition that there exists a total proof procedure for lower limit logic derivability of the adaptive logic and a finite set of problem relevant abnormalities.

Journal

This paper is submitted to the Logic Journal of the IGPL.

C.1 Introduction

In this paper I present a procedure that generates adaptive logic proofs for finally derivable adaptive logic consequences. Let a proof procedure for an adaptive logic be a procedure that, if it terminates, returns an adaptive logic proof for some formula G from a premise set Γ whenever G is a finally derivable consequence of Γ , and returns a negative answer whenever G is not a finally derivable consequence of Γ . A proof procedure is partial iff it does not always terminate and total iff it does.

Adaptive logics are logics that formalize defeasible reasoning forms. The first adaptive logics were inconsistency adaptive logics (see [12]). These logics can cope with inconsistent theories by localizing the inconsistencies in the theories. They interpret these theories as consistently as possible. Nowadays, adaptive logic forms a wide research area, in which logical solutions are developed for different common sense and scientific reasoning notions: induction (see [24], [27], and [36]), abduction (see [84] and [85]), compatibility (see [37] and [80]), causality (see [54] and [106]), prioritized reasoning (see [117], [111], [110] and [118]), relevance ([16]), ambiguity (see [112], [108], and [109]), vagueness (see [107], [116], and [105]), and diagnosis (see [39]). They all share the same metatheoretical structure and hence they can be examined in general.

There are logical solutions for defeasible reasoning forms outside of the adaptive logic framework, but it has been shown for a number of these logics and logical mechanisms that they can be characterized by an adaptive logic. Moreover, this characterization led for several systems to an interesting strengthening or variant. Among the finished results are [15], [22], [43] and [118] for the consequence relations from [99], [44] and [45]; [78] and [74] for [120]; [85] for [1]; [81] for the notion of empirical progress from [71]; [79] for [86] and [52]; [53] and [8] for default reasoning and circumscription respectively (see [2], [47] and [72]).

Adaptive logics have a typical dynamic proof theory. Lines of adaptive proofs are conditional. As the proof continues, some lines may get marked, denoting that the formula of this line is not derived at that stage of the proof. Markings may come and go. These dynamic proofs explicate the actual defeasible reasoning processes humans use in the dynamic reasoning contexts for which adaptive logics are developed.

For most interesting adaptive logics, there is also a stable derivability notion. From some (possibly infinite¹) stage of the proof on, some lines are unmarked

¹There is an alternative but equivalent notion, that eliminates the fact that some formulas are only finally derived at infinite stages (see next section).

and will not be marked in any possible extension of the proof. Adaptive logicians call the formulas that are derived on these stably unmarked lines the finally derived consequences. They constitute a consequence relation called final derivability. This stable consequence relation is the actual adaptive logic consequence relation.

The final derivability consequence set is equivalent to the following semantic notion: the set of all formulas that are true in all models of the premises that are as normal as possible. How the ambiguous expression “as normal as possible” is to be specified depends on the abnormalities and the strategy of the specific logic. An inconsistency adaptive logic with Minimal Abnormality strategy for example selects the models of premises that verify as little (in the set theoretic sense) inconsistencies as possible (the abnormalities are in this case the inconsistencies). The consequence set is the set of all formulas that are true in all the selected models.

There is no positive test for adaptive logics in general². Hence, there cannot be a generally applicable algorithm that constructs adaptive proofs in a finite time in such a way that some formula is derived if and only if it is finally derivable. This does not exclude the decidability of a very wide range of concrete adaptive logic problems³. So, even in these complex problem solving contexts, creating proof procedures is possible and useful. Evidently, it is sensible to try to solve a decidable problem, but it makes also sense to try to solve undecidable problems. The reasoner may not be aware of the undecidability when he starts the process or he may prefer an uncertain but defendable solution above a purely random guess.

Moreover, it is important to develop procedural approaches to adaptive logic because adaptive logics are devised as useful tools to understand creative human reasoning processes and not as abstract standards of deduction. Adaptive logic proofs form explications of actual reasoning processes rather than demonstrations of the correctness of statements. The explicated reasoning processes are often parts of concrete problem solving processes. Procedures show how an agent is able to solve his problem in some adaptive logic context and which heuristics he can apply when he is solving the problem. The procedure I present

²In [114] it is shown that *usual* Minimal Abnormality predicative adaptive logics are Π_1^1 -complex and in [66] that *usual* Reliability predicative adaptive logics are Σ_3^0 -complex. *Usual* propositional adaptive logics turn out to be as complex if one considers infinite premise sets. Usual adaptive logics are adaptive logics in standard format with a lower limit logic that falls within the same complexity class as classical logic, and that has the ability to express abnormalities and classical disjunctions in the object language.

³An adaptive logic problem is a question whether some G is a finally derivable consequence of some Γ . Solving a problem is answering that question.

in this paper, shows how the agent can be rationally critical towards his own de-feasible derivations, and hence, how he is able to gain certainty about the final derivability of interesting statements.

The procedure I will present uses an existing system for goal directed reasoning (elsewhere also called prospective dynamics with prospective proofs). It is described in [95] and [41] and is already developed for several different logics. It can be seen as a mix of a tableaux method (it forms a decision method for the consequence relation) and a proof theory (it defines a special type of proofs). It is defined by the so called goal directed proof format and a goal directed heuristics. A line of a goal directed proof contains, apart from a normal formula, a condition element. This is a set of formulas such that the formula of the line is a consequence of this set plus the set of premises. The heuristics guides the reasoner to the derivation of the goal formula on an empty condition by starting with a line that contains this goal (with the goal itself as condition), allowing only for the analysis of formulas, and only introducing premises and analyzing formulas when this is possibly useful.

It is important to stress that the procedure I will give, does not only generate a yes/no answer to a problem of the form $\Gamma \vdash_{\text{AL}} A$, but also gives a proof for this result and this proof can be seen as the formalization of a reasoning process towards the goal. In such a way the human reasoner can reconstruct the process towards the solution of mechanically solved problems and obtain insight in the problem and its solution. People get to know *why* the answer is yes or no, rather than only finding out *that* the answer is yes or no. When the answer is negative obviously no successful proof can be returned. Still, also in this case all the failed reasoning steps and reasoning steps towards the observation of their failure may turn out to be very useful. The human reasoner is able to obtain insight in the negative conclusion.

The paper is conceived in a modular way. Although I only present a full-blown proof procedure for two actual logics, the propositional fragments of CLuN^m and CLuN^r , my aim is more general. There is a standard format for adaptive logics, which serves as a generic means to build adaptive logics on lower limit logics. For many important lower limit logics, it is not difficult to construct a proof procedure. In what follows, I will assume that one already has such a procedure. This enables me to describe the proof procedure in a general way. In order to achieve this, the proof procedure is divided into 3 modules: the proof procedure for the lower limit logic, the one for conditional derivability, and finally the one for the final derivability relation of the adaptive logic. Once one has a proof procedure for lower limit logic derivability and one for conditional derivability of a concrete adaptive logic, the procedure for final derivability can

be obtained using the general procedure in section C.5. Next, for most of the existing adaptive logics, the conditional derivability procedure is also easily obtainable from the lower limit logic procedure, based on the same ideas as the procedure for CLuN^m or CLuN^r in section C.4, or by means of a brute force procedure when a finite set of relevant abnormalities is isolatable.

The goal directed proofs that result from the procedures are in another proof format than the regular adaptive logic proofs. Nevertheless, they are easily transformable into adaptive logic proofs.

In section C.2, I give the proof theoretical and semantical characterization of adaptive logic in standard form, and apply this to obtain the inconsistency adaptive logics CLuN^m and CLuN^r . In section C.3 a proof procedure for CLuN is presented. In section C.4 and section C.5 respectively a proof procedure for conditional derivability and one for final derivability (both for Minimal Abnormality and for Reliability) are presented. Finally, in section C.6 the correctness of the procedures is demonstrated.

C.2 Adaptive logics: standard format, CLuN^m and CLuN^r

C.2.1 The standard format of AL

In this section adaptive logics are very briefly presented (see [29] for an overview and [23] for the philosophical basis). An adaptive logic in standard format is defined as a triple consisting of:

- a **LLL**: a monotonic, reflexive, transitive and compact extension of classical logic (**CL**) which has a characteristic semantics,
- a set of abnormalities: a set of **LLL**-contingent formulas Ω , characterized by a (possibly restricted) logical form, and
- a strategy (the most important strategies in **AL** are ‘Reliability’ and ‘Minimal Abnormality’).

The standard format demands that the **LLL**-language, next to its own standard logical symbols, also encompasses formulas with the standard logical symbols of **CL**. They must behave classically, i.e. they should function in a **CL**-standard manner (e.g. $M \models \neg A$ iff $M \not\models A$) and do not need to occur in the conclusion or the premises. In this paper, I will denote the **CL**-symbols by means of \neg (negation) and $\check{\vee}$ (disjunction).

C.2.2 The proof theory of AL

The proof theory of an **AL** consists of a set of inference rules (determined by the **LLL** and Ω) and a marking definition (determined by Ω and the chosen strategy). A line of an annotated **AL**-proof consists of four elements: (1) a line number i , (2) a formula A , (3) the name of a rule and the line number of the rule premises, (4) a condition consisting of a set of abnormalities $\Theta \subset \Omega$. A stage s of a proof is the subproof that is completed up to line number s . The inference rules govern the addition of lines. There are 3 types of rules.

PREM	If $A \in \Gamma$	$\frac{\dots \quad \dots}{A \quad \emptyset}$
RU	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B$	$\frac{\begin{array}{cc} A_1 & \Delta_1 \\ \dots & \dots \\ A_n & \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n}$
RC	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B \check{\vee} Dab(\Theta)$	$\frac{\begin{array}{cc} A_1 & \Delta_1 \\ \dots & \dots \\ A_n & \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n \cup \Theta}$

The classical disjunction of the members of a finite $\Delta \subset \Omega$, $Dab(\Delta)$, is called a *Dab-formula*. $Dab(\Delta)$ is a *minimal Dab-formula* of stage s iff $Dab(\Delta)$ is derived at stage s on the condition \emptyset and no $Dab(\Delta')$ with $\Delta' \subset \Delta$ is derived on the condition \emptyset . The most important strategies are Reliability and Minimal Abnormality.

Definition 40 *Marking definition for Reliability.*

Where $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ are the minimal *Dab*-formulas derived on the condition \emptyset at stage s , $U_s(\Gamma) = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$, and Δ is the condition of line i , line i is marked at stage s iff $\Delta \cap U_s(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definition 41 *Marking definition for Minimal Abnormality.*

Where $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ are the minimal *Dab*-formulas derived on the condition \emptyset at stage s , $\Phi_s^\circ(\Gamma)$ is the set of all sets that contain one member of each Δ_i , $\Phi_s(\Gamma)$ are the $\varphi \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$ that are not proper supersets of a $\varphi' \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$, A is the formula and Δ is the condition of line i , line i is marked at stage s iff

- (i) there is no $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ such that $\varphi \cap \Delta = \emptyset$, or

- (ii) for some $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is no line on which A is derived on a condition Θ for which $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.

Two types of derivability are defined in **AL**. A formula A is *derived at a stage* iff A is derived on an unmarked line at the stage. A formula A is *finally derived* at stage s iff A is derived on an unmarked line i at stage s and line i will not be marked in any extension of the stage. Or alternatively, a formula is finally derived iff it is derived on an unmarked line and any extension of the proof in which the line is marked, can be further extended to a proof in which the line is unmarked. This latter definition is equivalent to the former, but has the advantage that any finally derivable formula is finally derived at some finite stage of a proof. The finally derivable consequences of a premise set are independent of the stage and constitute the consequence sets for **AL^r** and **AL^m**: $Cn_{\mathbf{AL}^r}(\Gamma)$, respectively $Cn_{\mathbf{AL}^m}(\Gamma)$ and their consequence relations $\vdash_{\mathbf{AL}^r}$, respectively $\vdash_{\mathbf{AL}^m}$.

C.2.3 The semantics of AL

$Dab(\Delta)$ is a *minimal Dab-consequence* of Γ iff $\Gamma \vDash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta)$ and, for all $\Delta' \subset \Delta$, $\Gamma \not\vDash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta')$. Where $Dab(\Delta_1)$, $Dab(\Delta_2)$, \dots are the minimal *Dab-consequences* of Γ , let $U(\Gamma) =_{df} \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots$. Finally, where M is a **LLL**-model, $Ab(M) =_{df} \{A \in \Omega \mid M \models A\}$.

Definition 42 *Reliable model and the corresponding semantical consequence relation $\vDash_{\mathbf{AL}^r}$.*

A **LLL**-model M of Γ is *reliable* iff $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$. $\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}^r} A$ iff all reliable models of Γ verify A .

Definition 43 *Minimally abnormal model and the corresponding semantical consequence relation $\vDash_{\mathbf{AL}^m}$.*

A **LLL**-model M of Γ is *minimally abnormal* iff there is no **LLL**-model M' of Γ for which $Ab(M') \subset Ab(M)$. $\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}^m} A$ iff all minimally abnormal models of Γ verify A .

C.2.4 CLuN^m and CLuN^r

Let us consider the inconsistency-adaptive logics **CLuN^m** and **CLuN^r** (elsewhere these names denote predicative logics, but here I only use their propositional fragments). The lower limit logic is the propositional fragment of the paraconsistent logic **CLuN**. **CLuN** is the full positive fragment of **CL** with simple gluts for the negation connective. For any formula A , both A and $\neg A$ may

be true in **CLuN** (yet they cannot be both false). The set of abnormalities is $\Omega = \{A \wedge \sim A \mid A \in \mathcal{W}\}$, with \mathcal{W} the set of well formed formulas. The strategies are respectively Minimal Abnormality (resulting in the adaptive logic **CLuN^m**) and Reliability (resulting in the adaptive logic **CLuN^r**). If the strategy of the logic does not matter, I will refer to it as **ACLuN**. In what follows $!A$ will abbreviate $A \wedge \neg A$. Because the negation is the only non-classical symbol in **CLuN**, there is no need to add formulas with symbols $\check{\vee}$ and $\check{\wedge}$ to the language, as they would be equivalent to respectively \vee and \wedge .

C.2.5 Generic notation

In this paper I give a generally applicable procedure. In order to realize this I use a minimal amount of properties of the adaptive logics under consideration. Let **LLL** denote some **LLL**-ready logic (cf. the properties of the standard format) with a disjunction \vee and a conjunction \wedge with standard behaviour ($M \vDash_{\text{LLL}} A \vee B$ iff $M \vDash_{\text{LLL}} A$ or $M \vDash_{\text{LLL}} B$ and $M \vDash_{\text{LLL}} A \wedge B$ iff $M \vDash_{\text{LLL}} A$ and $M \vDash_{\text{LLL}} B$). Let **AL^m** and **AL^r** denote adaptive logics that use the Minimal Abnormality strategy respectively the Reliability strategy and have some **LLL** with the mentioned connectives. If the strategy does not matter I will simply refer to it as **AL**.

C.3 A (partial) proof procedure for the lower limit logic **CLuN**

In this section, a proof procedure for **CLuN** is presented. The procedure generates a special kind of proofs: goal directed proofs. Prospective proofs for **CLuN** have lines that contain, apart from the derived formula, a set of formulas called the *D-condition*:

$$i \quad [\Delta]A \quad \dots \quad \dots$$

A is the formula of the line and Δ the D-condition. I also add an adaptive condition Θ called the *A-condition*. For **CLuN** this element can remain empty and is thus obviously useless. It is added in behalf of the procedures for conditional and final derivability presented in the following sections. These procedures use the lower limit logic rules as well. I add the useless condition already here, to avoid having to list the **CLuN**-rules again, where the extra condition is necessary. With this adjustment, the lines contain *two* conditions:

$$i \quad [\Delta]A \quad \dots \quad \dots \quad \Theta$$

Referring to this line, I will say that A^\ominus is derived on line i on D-condition Δ or that $[\Delta]A^\ominus$ is derived on line i . If Δ is empty, $[\emptyset]$ is omitted.

It is not of my concern to give an efficient procedure (a really efficient procedure requires heuristic information with a non formal character). The mere existence of a procedure suffices. The procedure is defined by a set of ordered rules, a few restrictions on the application of the rules, and the command “apply to the first line of the proof to which some rule may be applied, the first permitted rule”. Although the logics under consideration are decidable, I speak of a partial proof procedure to include the case of infinite premises. In this case one will need a procedure that produces for each possible target A a list of all premises of which A is a positive part⁴. This is always possible when the premise set is recursive.

There are several types of rules. The formula analyzing rules and the condition analyzing rules for CLuN may be summarized by distinguishing \mathfrak{a} -formulas from \mathfrak{b} -formulas (varying on a theme from [104]). To each formula two other formulas are assigned according to the following table:

\mathfrak{a}	\mathfrak{a}_1	\mathfrak{a}_2		\mathfrak{b}	\mathfrak{b}_1	\mathfrak{b}_2
$A \wedge B$	A	B		$\neg(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\neg(A \equiv B)$	$\neg(A \supset B)$	$\neg(B \supset A)$
$\neg(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\neg(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$\neg\neg A$	A	A				

The formula analyzing rules for \mathfrak{a} -formulas and \mathfrak{b} -formulas are respectively (the \ddagger in the name of the rule stands for the logical symbols in the \mathfrak{a} - or \mathfrak{b} -formula that are analyzed, for example when \mathfrak{a} is $\neg(A \vee B)$, \ddagger is $\neg\vee$):⁵

$$\begin{aligned} \ddagger E & \frac{[\Delta] \mathfrak{a}^\ominus}{[\Delta] \mathfrak{a}_1^\ominus \quad [\Delta] \mathfrak{a}_2^\ominus} & \ddagger E & \frac{[\Delta] \mathfrak{b}^\ominus}{[\Delta \cup \{*\mathfrak{b}_2\}] \mathfrak{b}_1^\ominus \quad [\Delta \cup \{*\mathfrak{b}_1\}] \mathfrak{b}_2^\ominus} \\ & & \neg\neg E & \frac{[\Delta] \neg\neg A^\ominus}{[\Delta] A^\ominus} \end{aligned}$$

The condition analysing rules for \mathfrak{a} -formulas and \mathfrak{b} -formulas are respectively:

$$C\ddagger E \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}\}] A^\ominus}{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}] A^\ominus} \quad C\ddagger E \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}\}] A^\ominus}{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1\}] A^\ominus \quad [\Delta \cup \{\mathfrak{b}_2\}] A^\ominus}$$

⁴for the definition of the terms positive part and target, see below

⁵The rule to the left actually summarizes two rules: both $[\Delta] \mathfrak{a}_1^\ominus$ and $[\Delta] \mathfrak{a}_2^\ominus$ may be derived from $[\Delta] \mathfrak{a}^\ominus$; similarly for the rule to the right and for the condition analyzing rule to the right below.

$$\text{C}\neg\text{E} \quad \frac{[\Delta \cup \{\neg B\}] A^\ominus}{[\Delta \cup \{*B\}] A^\ominus}$$

The other rules are as follows:

Prem	If $A \in \Gamma$, introduce A^\emptyset .
Goal	Introduce $[G] G^\emptyset$.
EFQ	If $A \in \Gamma$, introduce $[*A] G^\emptyset$.

$$\text{Trans} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}] A^\ominus \quad [\Delta'] B^{\ominus'}}{[\Delta \cup \Delta'] A^{\ominus \cup \ominus'}}$$

$$\text{EM} \quad \frac{[\Delta \cup \{B\}] A^\ominus \quad [\Delta' \cup \{\neg B\}] A^{\ominus'}}{[\Delta \cup \Delta'] A^{\ominus \cup \ominus'}}$$

$$\text{EMO} \quad \frac{[\Delta \cup \{\neg A\}] A^\ominus}{[\Delta] A^\ominus}$$

$$\text{IC} \quad \frac{[\Delta] \text{Dab}(\Lambda \cup \Lambda')^{\ominus \cup \Lambda'}}{[\Delta] \text{Dab}(\Lambda \cup \Lambda')^\ominus}$$

For the restrictions on applications of the rules, the positive part relation is needed. That A is a *positive part* of another formula is recursively defined by the following clauses:⁶

1. $\text{pp}(A, A)$.
2. $\text{pp}(A, \neg\neg A)$.
3. $\text{pp}(*A, \neg A)$.
4. If $\text{pp}(A, \mathfrak{a}_1)$ or $\text{pp}(A, \mathfrak{a}_2)$, then $\text{pp}(A, \mathfrak{a})$.
5. If $\text{pp}(A, \mathfrak{b}_1)$ or $\text{pp}(A, \mathfrak{b}_2)$, then $\text{pp}(A, \mathfrak{b})$.
6. If $\text{pp}(A, B)$ and $\text{pp}(B, C)$, then $\text{pp}(A, C)$.

Next, some line marking is needed. A-marking is the adaptive logic marking. For the current procedure no A-marks are needed yet. D-marking (marking in view of D-conditions) is governed by the following definition.

Definition 44 *Where $[\Delta] A^\ominus$ is derived at line i , line i is D-marked iff one of the following conditions is fulfilled:*

1. *line i is not an application of a goal rule and $A \in \Delta$,*

⁶Unlike what is done in [102] and [41], I do not introduce negative parts because this complicates the predicative case. Clause 6 is only required in view of clauses 2 and 3.

2. for some $\Delta' \subset \Delta$ and $\Theta' \subseteq \Theta$, $[\Delta'] A^{\Theta'}$ occurs in the proof,
3. no application of EFQ occurs at a line preceding i and $B, \neg B \in \Delta$ for some B ,
4. no application of EFQ occurs at a line preceding i and, for some $B \in \Delta$, $\neg B^{\emptyset}$ occurs in the proof.

The members of the D-conditions of *unmarked* lines of the proof are called the *targets* of the proof.

The procedure $GP_{CLuN}(\Gamma, G)$. The above rules are applied with premise set Γ and goal G under the conditions below (just apply the first permitted rule to the first line to which this rule is applicable), until the line G^{\emptyset} is added to the proof (the procedure concludes that $\Gamma \vdash_{CLuN} G$) or no more lines can be added. In the last case the procedure concludes that $\Gamma \not\vdash_{CLuN} G$.

1. The proofs start by applying the goal rule.
2. Premises are introduced and formulas analyzed iff a target is a positive part of the formula of the added line.
3. Condition analyzing rules are only applied to targets.
4. A formula analyzing rule is never applied to a formula that does not have a premise in its path.
5. Once $[\Delta] A^{\Theta}$ occurs in the proof, one never adds another line with that same formula, D-condition and A-condition (even if the justification of the line is different).
6. Finally, EFQ is only applied if no other rules are applicable.⁷

Example⁸. Consider the problem $\Gamma_1 \vdash_{CLuN} s$ with $\Gamma_1 = \{\neg p \vee r, p \wedge (\neg q \supset (r \wedge t)), \neg q \vee r, \neg r \vee s\}$.

1	[s]s	Goal \emptyset
---	------	------------------

⁷It can be shown that, if \neg does not occur in the premises then the premises cannot be \neg -inconsistent and hence the rule EFQ is useless. I nevertheless include it here for the sake of completeness.

⁸In the examples I follow a more efficient heuristics than simply applying the first permitted rule to the first line. This only done to save space.

To start with, the only target is the goal s itself. s is a positive part of premise $\check{\neg}r \vee s$. So, this premise is introduced and analyzed in such a way that s becomes the formula element.

2	$\check{\neg}r \vee s$		Prem	\emptyset
3	$[r]s$	2	$\vee E$	\emptyset

r is added to the targets and r is a positive part of $\neg p \vee r$. This premise is introduced and analyzed. This makes $\check{\neg}\neg p$ a new target. This target is not a positive part of any formula and can't be analyzed either. This is a dead end. But, r is also a positive part of $\check{\neg}q \vee r$. Analyzing this premise results in the new target q .

4	$\neg p \vee r$		Prem	\emptyset
5	$[\check{\neg}\neg p]r$	4	$\vee E$	\emptyset
6	$\check{\neg}q \vee r$		Prem	\emptyset
7	$[q]r$	6	$\vee E$	\emptyset

q is a positive part of $p \wedge (\neg q \supset (r \wedge t))$ (this may be clarifying: $pp(\neg q \supset (r \wedge t)), p \wedge (\neg q \supset (r \wedge t))$), $pp(\check{\neg}\neg q, \neg q \supset (r \wedge t))$, and finally $pp(q, \check{\neg}\neg q)$. Therefore the premise $p \wedge (\neg q \supset (r \wedge t))$ is introduced and analyzed (lines 8 to 12). The target q is now the formula element of a line. This enables the application of the transitivity rule. Now the negation of r is in the condition for r and so $\check{\neg}r$ can be omitted, resulting in line 14. The target r is now in the formula element of an unconditional line. Hence, the goal s is derived after one more application of Trans.

8	$p \wedge (\neg q \supset (r \wedge t))$		Prem	\emptyset
9	$\neg q \supset (r \wedge t)$	2	$\wedge E$	\emptyset
10	$[\check{\neg}(r \wedge t)]\check{\neg}\neg q$	9	$\supset E$	\emptyset
11	$[\check{\neg}r]\check{\neg}\neg q$	10	$C\check{\neg}\wedge E$	\emptyset
12	$[\check{\neg}r]q$	11	$\check{\neg}\neg E$	\emptyset
13	$[\check{\neg}r]r$	12, 7	Trans	\emptyset
14	r	13	EM0	\emptyset
15	s	14, 3	Trans	\emptyset

In this example proof, no marks were necessary.

C.4 Two (partial) proof procedures for conditional derivability

A proof procedure for conditional derivability is a procedure that, given a premise set Γ , a candidate conclusion G and a set Υ of finite sets of abnormalities, returns (if possible) a proof from Γ with G^Δ derived on the last line such that for every $\Delta' \subseteq \Delta$, $\Delta' \notin \Upsilon$.

Definition 45 $\text{MinCon}_{\text{AL}}(\Gamma, A)$ is the set of all sets of abnormalities Δ such that $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} A \check{\vee} \text{Dab}(\Delta)$ and if $\Delta \in \text{MinCon}_{\text{AL}}(\Gamma, A)$ then there is no Δ' such that $\Delta \subset \Delta'$ and $\Delta' \in \text{MinCon}_{\text{AL}}(\Gamma, A)$.

If one runs a procedure like this again after every positive answer, starting of with an empty Υ and adding the resulting Δ at the end of every procedure to Υ until the procedure stops with a positive answer, one will obtain a superset of $\text{MinCon}_{\text{AL}}(\Gamma, A)$ (if this set is finite).

C.4.1 A brute force proof procedure

There is an evident way to generate proofs for conditional derivability if one has a proof procedure for the lower limit logic and a method to select a finite set Ω' of abnormalities relevant to the problem. Abnormalities are called *relevant* to a problem $\Gamma \vdash_{\text{AL}} G$ iff they occur in $\text{MinCon}_{\text{AL}}(\Gamma, G)$. If this set is finite, the set $\Theta = \mathcal{P}(\Omega')$ is finite as well. The set $\text{MinCon}_{\text{AL}}(\Gamma, A)$ is a subset of this set Θ . Suppose this Ω' can be determined before starting the procedure. Note that this supposition is often true. Relevant abnormalities are in a lot of cases only constructed with primitive formulas that do occur in the premises or the candidate conclusion. If there are only finitely many premises, there are only finitely many subformulas of premises and candidate conclusions. Hence, there are only finitely many relevant abnormalities.

The procedure $\text{EPC}_{\text{AL}}(\Gamma, G, \Upsilon)$. Let $\Omega' = R(\Gamma, G)$ denote the finite set of all relevant abnormalities for $\Gamma \vdash_{\text{AL}} G$ and let Θ be the finite set $\mathcal{P}(\Omega')$. For every $\Delta \in \Theta - \{\Delta' \mid \text{there is a } \Delta'' \in \Upsilon, \text{ such that } \Delta'' \subset \Delta'\}$, run the proof procedure for $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}} G \vee \text{Dab}(\Delta)$, until a proof is found. If a proof is found for a certain Δ , add the line G^Δ to the proof and stop the procedure. If all $\Delta \in \Theta$ are finished and no proof is found, the procedure returns no proof and a negative answer.

C.4.2 A goal directed proof procedure for ACLuN

A finite set Ω' is not always findable in any logic, for any Γ and any G . For propositional CLuN, for example, a set Θ is easily constructible whenever Γ is finite, but when Γ is infinite, it is possible that there is no such finite Θ . Moreover, the above procedure is a brute force method and is therefore terribly inefficient. In this subsection I present a more efficient procedure for the ACLuN, that does not presuppose a set of relevant abnormalities (or in other words: it constructs such a set within the process in an intelligent way).

The procedure for conditional derivability for ACLuN generates goal directed proofs and is defined from a set of rules and a recursive positive part function. All the rules from GP_{CLuN} are valid here, but two more rules are necessary. A formula analyzing rule and a condition analyzing rule:

$$\neg\text{-E} \quad \frac{[\Delta] \neg A^\Theta}{[\Delta] * A^{\Theta \cup \{A \wedge \sim A\}}}$$

$$C^{\sim}\neg\text{-E} \quad \frac{[\Delta \cup \{\sim \neg B\}] A^\Theta}{[\Delta \cup \{B\}] A^{\Theta \cup \{B \wedge \sim B\}}}$$

A-marking (marking in view of the A-conditions) is not yet relevant for conditional derivability. D-marking (marking in view of D-conditions) is governed by the following definition.

Definition 46 *Where $[\Delta] A^\Theta$ is derived at line i , line i is D-marked iff one of the following conditions is fulfilled:*

1. *line i is not an application of a goal rule and $A \in \Delta$,*
2. *for some $\Delta' \subset \Delta$ and $\Theta' \subseteq \Theta$, $[\Delta'] A^{\Theta'}$ occurs in the proof,*
3. *no application of EFQ occurs at a line preceding i and $B, \sim B \in \Delta$ for some B ,*
4. *no application of EFQ occurs at a line preceding i and, for some $B \in \Delta$, $\sim B^0$ occurs in the proof.*

The members of the D-conditions of *unmarked* lines of the proof are called the *targets* of the proof.

The procedure $GPC_{ACLuN}(\Gamma, G, \Upsilon)$. The rules from the procedure GP_{CLuN} together with the new rules $\neg\text{-E}$ and $C^{\sim}\neg\text{-E}$ are applied under the following conditions:

1. The proofs start by applying the goal rule.
2. No rules are applied that result in a line that has a formula element G and an A-condition Δ , such that it is a superset of some element in Υ .
3. Premises are introduced and formulas analyzed iff a target is a positive part of the formula of the added line.
4. Condition analyzing rules are only applied to targets.
5. A formula analyzing rule is never applied to a formula that does not have a premise in its path.
6. Once $[\Delta] A^\ominus$ occurs in the proof, one never adds another line with that same formula, D-condition and A-condition (even if the justification of the line is different).
7. Finally, EFQ is only applied if no other rules are possible anymore.⁹

Example. For an example, see the example for the proof procedure for final derivability. This procedure makes extensively use of the conditional derivability procedure.

C.5 (Partial) proof procedures for final derivability

The two proof procedures for final derivability (one for the Minimal Abnormality logics and one for the Reliability logics) make use of the proof procedure for the lower limit logic and the one for conditional derivability. They do not generate new proofs, but rather combine the proofs that result from different applications of the other two proof procedures, add markings, and (in the case of Minimal Abnormality) add some lines. These lines are mere combinations of a number of lines that were the conclusions of applications of the other procedures. The proof format is obviously the same as in the aforementioned procedures. For adaptive logics that only differ with respect to the strategy, the same lower limit logic- and conditional derivability proof procedure is used. The procedure I will give

⁹It can be shown that, if \neg does not occur in the premises, then the premises cannot be \neg -inconsistent and hence phase 1B is useless. I nevertheless include it here for the sake of completeness.

is universal; it works for all adaptive logics in standard format with a classically behaving conjunction and disjunction.

In contrast to the aforementioned procedures, this procedure will A-mark lines. Remark that these A-marks are not the same as the marks generated by the adaptive logics marking definition. Nevertheless, they are very similar to the adaptive logic marks, and they have the same function. To generate adaptive proofs from the goal directed proofs generated by this procedure, replace every line

$$i \quad [\Delta]A \quad j, k \quad R \quad \Theta$$

by a line

$$i \quad \neg \bigwedge \Delta \vee A \quad j, k \quad R' \quad \Theta$$

where $R' = R$ if $R = Prem$ and $R' = RC$ if $R = C\overset{\sim}{\neg}E$ or $R = \neg E$ (in case of proofs for **ACLuN**) or if R is a similar rule for other logics, otherwise $R' = RU$. The classical negation ($\overset{\sim}{\neg}$) is added to a logic to become a possible lower limit logic for an adaptive logic, but does not need to occur in the premises or the conclusion (see subsection 2.1). Remove all A-marks and D-marks and apply the adaptive logic's marking definition to add the right adaptive logic marks.

C.5.1 Minimal Abnormality

Phase 1.

(1.1) *Subphase 1A.* To start, let $\Upsilon = \emptyset$.

(1.2) Run the conditional derivability procedure with premise set Γ , candidate conclusion G and set of conditions Υ . Let Θ be the A-condition of the last line of the resulting proof (if there is any). Let i be the line number of this line. There are three possibilities:

- If $\Theta = \emptyset$, then G^\emptyset is derived. The procedure stops and $\Gamma \vdash_{AL^m} G$.
- If $\Theta \neq \emptyset$, add Θ to Υ . Add the line

$$j \quad G \vee \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\} \quad i \quad RU \quad \emptyset$$

to the proof. the procedure moves to phase 2 (go to (2.1)) and later returns to phase 1. There are two possibilities:

- line j is not A-marked. The procedure stops and $\Gamma \vdash_{AL^m} G$.

- line j is A-marked. Go on, back to (1.2).
 - The conditional derivability procedure did not return a result: the procedure terminates and G^Θ is not derived at an unmarked line for any Θ : move to subphase 1B (go to (1.3)).
- (1.3) *Subphase 1B.* Aim: to derive G^\emptyset by applications of EFQ as well as well of the other CLuN-rules.

Phase 2.

- (2.1) $G \vee \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}$ was derived in phase 1, say at line j . To start, let $\Upsilon' = \emptyset$.
- (2.2) Run the conditional derivability procedure with premise set Γ , candidate conclusion $\bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}$ and set of conditions Υ' . Let Λ be the A-condition of the last line of the resulting proof, if there is any. Let i be the line number of this line. There are three possibilities:
- If $\Lambda = \emptyset$, then $\bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}^\emptyset$ is derived. Line j is A-marked, the procedure returns to phase 1.
 - If $\Lambda \neq \emptyset$, then $\bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}^\Lambda$ is derived, say at line k . Add Λ to Υ' . The procedure moves to phase 3 and later returns to phase 2. There are two possibilities:
 - line k is not A-marked: line j is A-marked. The procedure returns to phase 1.
 - line k is A-marked: go on, back to (2.2).
 - The conditional derivability procedure did not return a result: phase 2 terminates and $\bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}^\Lambda$ is not derived at an unmarked line for any Λ : line j is not A-marked and the procedure returns to phase 1.

Phase 3.

- (3.1) $G \vee \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}$ was derived in phase 1, say at line j , and $\bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}^\Lambda$ was derived in phase 2 for some Λ , say at line k . Phase 3 starts by applying the LLL-proof procedure with premise set Γ and candidate conclusion $Dab(\Lambda)$. Either the procedure returns a proof for $Dab(\Lambda)$ or it returns nothing:
- $Dab(\Lambda)$ is derived. Line k is A-marked, the procedure returns to phase 2.
 - $Dab(\Lambda)^\emptyset$ is not derived: line k is not A-marked. The procedure returns to phase 2.

Example¹⁰. Consider the problem $\Gamma_2 \vdash_{\text{CLuN}^m} s$ with $\Gamma_2 = \{!r, s \vee !p \vee !q, s \vee !p \vee !r, s \vee !q \vee !r\}$.

1.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and the following proof:

1	$[s]s$		Goal	\emptyset
2	$s \vee (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$		Prem	\emptyset
3	$[\neg((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q))]s$	2	$\vee E$	\emptyset
4	$[\neg(p \wedge \neg p), \neg(q \wedge \neg q)]s$	3	$C\vee E$	\emptyset
5	$[\neg p, \neg q]s$	4	$C\neg\wedge E$	\emptyset
6	$[\neg p, \neg\neg q]s$	4	$C\neg\wedge E$	\emptyset
7	$[\neg\neg p, \neg q]s$	4	$C\neg\wedge E$	\emptyset
8	$[\neg\neg p, \neg\neg q]s$	4	$C\neg\wedge E$	\emptyset
9	$[p, \neg q]s$	7	$C\neg\neg E$	$\{!p\}$
10	$[\neg q]s$	5,9	EM	$\{!p\}$
11	$[\neg p, q]s$	6	$C\neg\neg E$	$\{!q\}$
12	$[\neg p]s$	10,11	EM	$\{!p, !q\}$
13	$[p, q]s$	8	$C\neg\wedge E$	$\{!p, !q\}$
14	$[q]s$	11,13	EM	$\{!p, !q\}$
15	s	10,14	EM	$\{!p, !q\}$

The following line is added:

16	$s \vee !p \vee !q$			\emptyset
----	---------------------	--	--	-------------

1.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = !p \vee !q$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and the following proof:

17	$[!p \vee !q]!p \vee !q$		Goal	\emptyset
18	$!p \vee !q \vee (r \wedge \neg r)$		Prem	\emptyset
19	$[\neg(r \wedge \neg r)]!p \vee !q$	18	$\vee E$	\emptyset
20	$[\neg r]!p \vee !q$	19	$C\neg\wedge E$	\emptyset
21	$[\neg\neg r]!p \vee !q$	19	$C\neg\wedge E$	\emptyset
22	$[r]!p \vee !q$	21	$C\neg\neg E$	$\{!r\}$

¹⁰In the examples in this section, evident lines of the proofs generated by the procedures are omitted. The line after the omitted block gets no justification and line number $n + 1$, where n is the line number of the line before the block.

23 $!p \vee !q$ 20,22 EM $\{!r\}$

1.3 Phase 3. The procedure for **CLuN**-derivability $GP_{\text{CLuN}}(\Gamma_2, G)$ is started with goal $G = !r$. This results in a negative answer. Line 16 is A-marked.

2.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \{\{!p, !q\}\}$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

24 s EM $\{!p, !r\}$

The following line is added:

25 $s \vee ((!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r))$ \emptyset

2.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = (!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r)$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with following last line:

26 $(!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r)$ 2 $\vee E$ $\{!q, !r\}$

2.3 Phase 3. The procedure for **CLuN**-derivability $GP_{\text{CLuN}}(\Gamma_2, G)$ is started with goal $G = !q \vee !r$. This results in a negative answer. Line 25 is A-marked.

3.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \{\{!p, !q\}, \{!p, !r\}\}$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

27 s $\{!q, !r\}$

The following line is added:

28 $s \vee ((!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r) \wedge (!q \vee !r))$ \emptyset

3.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = (!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r) \wedge (!q \vee !r)$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with following last line:

29 $(!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r) \wedge (!q \vee !r)$ $\{!p, !q, !r\}$

3.3 Phase 3. The procedure for CLuN -derivability $\text{GP}_{\text{CLuN}}(\Gamma_2, G)$ is started with goal $G = !p \vee !q \vee !r$. This results in a positive answer and a proof with following last line:

30 $!p \vee !q \vee !r$ \emptyset

Line 29 is A-marked.

3.2b Phase 2. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_2, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = (!p \vee !q) \wedge (!p \vee !r) \wedge (!q \vee !r)$ and $\Upsilon = \{\{!p, !q, !r\}\}$. This results in a negative answer. Phase 2 terminates and line 28 is not A-marked. $\Gamma_2 \vdash_{\text{CLuN}^m} s$.

C.5.2 Reliability

Phase 1.

(1.1) *Subphase 1A.* To start, let $\Upsilon = \emptyset$.

(1.2) Run the conditional derivability procedure with premise set Γ , candidate conclusion G and set of conditions Υ . Let Θ be the A-condition of the last line of the resulting proof (if there is any). Let i be the line number of this line. There are three possibilities:

- If $\Theta = \emptyset$, then G^\emptyset is derived. The procedure stops and $\Gamma \vdash_{\text{AL}^r} G$.
- If $\Theta \neq \emptyset$, add Θ to Υ . The procedure moves to phase 2 (go to (2.1)) and later returns to phase 1. There are two possibilities:
 - line j is not A-marked. The procedure stops and $\Gamma \vdash_{\text{AL}^r} G$.
 - line j is A-marked. Go on, back to (1.2).
- The conditional derivability procedure did not return a result: the procedure terminates and G^Θ is not derived at an unmarked line for any Θ : move to subphase 1B (go to (1.3)).

(1.3) *Subphase 1B.* Aim: to derive G^\emptyset by applications of EFQ as well as well of the other LLL-rules.

Phase 2.

(2.1) G^Θ was derived in phase 1, say at line j . To start, let $\Upsilon' = \emptyset$. Repeat the following instructions.

- (2.2) Run the conditional derivability procedure with premise set Γ , candidate conclusion $Dab(\Theta)$ and set of conditions Υ' . Let Λ be the A-condition of the last line of the resulting proof, if there is any. Let i be the line number of this line. There are three possibilities:
- If $\Lambda = \emptyset$, then $Dab(\Theta)^\emptyset$ is derived. Line j is A-marked, the procedure returns to phase 1.
 - If $\Lambda \neq \emptyset$, then $Dab(\Theta)^\Lambda$ is derived, say at line k . Add Λ to Υ' . The procedure moves to phase 3 and later returns to phase 2. There are two possibilities:
 - line k is not A-marked: line j is A-marked. The procedure returns to phase 1.
 - line k is A-marked: go on, back to (2.2).
 - The conditional derivability procedure did not return a result: phase 2 terminates and $Dab(\Theta)^\Lambda$ is not derived at an unmarked line for any Λ : line j is not A-marked and the procedure returns to phase 1.

Phase 3.

- (3.1) G^Θ was derived in phase 1, say at line j , and $Dab(\Theta)^\Lambda$ was derived in phase 2 for some Λ , say at line k . Phase 3 starts by applying the **LLL**-proof procedure with premise set Γ and candidate conclusion $Dab(\Lambda)$. Either the procedure returns a proof for $Dab(\Lambda)$ or it returns nothing:
- $Dab(\Lambda)$ is derived. Line k is A-marked, the procedure returns to phase 2.
 - $Dab(\Lambda)^\emptyset$ is not derived: line k is not A-marked. The procedure returns to phase 2.

Example. Consider the problem $\Gamma_3 \vdash_{\text{CLuN}^r} s$ with $\{\Gamma_3 = !p\vee!q\vee!r, s\vee!p\vee!q, s\vee!p\vee!r, s\vee!q\vee!r, t, s \vee \neg t\}$.

- 1.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

1	s	{!p, !q}
---	---	----------

- 1.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = !p\vee!q$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

$$2 \quad !p \vee !q \quad \{!r\}$$

- 1.3 Phase 3. The procedure for **CLuN**-derivability $GP_{\text{CLuN}}(\Gamma_3, G)$ is started with goal $G = !r$. This results in a negative answer. Line 1 is A-marked.
- 2.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \{\{!p, !q\}\}$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

$$3 \quad s \quad \{!p, !r\}$$

- 2.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = !p \vee !r$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with following last line:

$$4 \quad !p \vee !r \quad \{!q\}$$

- 2.3 Phase 3. The procedure for **CLuN**-derivability $GP_{\text{CLuN}}(\Gamma_3, G)$ is started with goal $G = !q$. This results in a negative answer. Line 3 is A-marked.
- 3.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \{\{\{!p, !q\}, \{!p, !r\}\}\}$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

$$5 \quad s \quad \{!q, !r\}$$

- 3.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = !q \vee !r$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with following last line:

$$6 \quad !q \vee !r \quad \{!p\}$$

- 3.3 Phase 3. The procedure for **CLuN**-derivability $GP_{\text{CLuN}}(\Gamma_3, G)$ is started with goal $G = !p$. This results in a negative answer. Line 6 is A-marked.
- 4.1 Phase 1. The procedure for conditional derivability $GPC_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = s$ and $\Upsilon = \{\{\{!p, !q\}, \{!p, !r\}, \{!q, !r\}\}\}$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

$$7 \quad s \quad \{!t\}$$

- 3.2 Phase 2. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = !t$ and $\Upsilon = \emptyset$. This results in a positive answer and a proof with following last line:

$$8 \quad !t \qquad \qquad \qquad \{!p, !q, !r\}$$

- 3.3 Phase 3. The procedure for CLuN derivability $\text{GP}_{\text{CLuN}}(\Gamma_3, G)$ is started with goal $G = !p \vee !q \vee !r$. This results in a positive answer and a proof with the following last line:

$$9 \quad !p \vee !q \vee !r \qquad \qquad \qquad \emptyset$$

Line 8 is A-marked.

- 3.2b Phase 2. The procedure for conditional derivability $\text{GPC}_{\text{ACLuN}}(\Gamma_3, G, \Upsilon)$ is started with goal $G = !t$ and $\Upsilon = \{\{!p, !q, !r\}\}$. This results in a negative answer. Phase 2 terminates and line 7 is not marked. $\Gamma_3 \vdash_{\text{CLuN}^r} s$

C.6 Metatheory

In this section I prove that the procedures in this paper return the expected output.

Theorem 20 *If Γ is finite, the procedure $\text{GP}_{\text{CLuN}}(\Gamma, G)$ terminates. If this procedure terminates, G^\emptyset is derived on the last line of the generated proof iff $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}} G$.*

Proof. The procedure is exactly the same as the procedure in [25], without the conditional rules $\text{C}\neg\text{-E}$ and $\neg\text{-E}$. One can easily check that the (outlined) proofs for the two following theorems in that paper do not depend on these two rules.

Theorem 2 from [25]. If Γ is finite, every prospective proof for $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}} A$ terminates.

Theorem 3 from [25]. If a prospective proof for $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}} G$ stops with G being derived, then $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}} G$. If a prospective proof for $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}} G$ stops without G being derived, then $\Gamma \not\vdash_{\text{CLuN}} G$.

This proves the theorem. ■

Theorem 21 *If a finite Ω' of $\Gamma \vdash_{\text{AL}}$ G -relevant abnormalities is available, then the procedure $\text{EPC}_{\text{AL}}(\Gamma, G, \Upsilon)$ that uses a total **LLL**-procedure terminates. If this procedure terminates, G^\ominus is derived on the last line of the generated proof iff $\Delta \notin \Upsilon$, where $\Delta \subseteq \Theta$, and $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} G \vee \bigvee \Theta$*

Proof. Immediate in view of theorem 20 and the Derivability Adjustment Theorem on adaptive logic (see [29])

■

Theorem 22 *If Γ is finite, the procedure $\text{GPC}_{\text{ACLUuN}}(\Gamma, G, \Upsilon)$ terminates. If this procedure terminates, G^\ominus is derived on the last line of the generated proof iff $\Delta \notin \Upsilon$, for any $\Delta \subseteq \Theta$, and $\Gamma \vdash_{\text{CLUuN}} G \vee \bigvee \Theta$*

Proof.

The procedure for conditional derivability in this paper is equivalent to the application of the rules in [25]. I use a set Υ of already derived conditions. This is not present in [25]. Batens did not care for the construction of a conditional derivability procedure and in his paper all necessary conditions are derived within one final derivability proof. The D-marking of lines with a condition that is a superset of the condition of a line with the same formula has the same function as my set Υ . In view of this remark, the following theorem for Batens' final derivability procedure is equivalent to my theorem 22.

Theorem 7 from [25]. If $\Gamma \vdash_{\text{CLUuN}} G \vee (A_1 \wedge \sim A_1) \vee \dots \vee (A_n \wedge \sim A_n)$ and $\Gamma \not\vdash_{\text{CLUuN}} \Delta$ for every $\Delta \subset \{G, A_1 \wedge \sim A_1, \dots, A_n \wedge \sim A_n\}$, then, $G^{\{A_1 \wedge \sim A_1, \dots, A_n \wedge \sim A_n\}}$ is derivable in every prospective proof for $\Gamma \vdash_{\text{ACLUuN1}} G$.

■

The proof that the final derivability procedure is correct requires more meta-theory. I introduce some new definitions and lemmas on choice sets (the crucial mathematical object involved in the marking definition for Minimal Abnormality). Let $\Pi(\Upsilon)$ denote the set of choice sets of a set of sets of formulas Υ and $\Pi_m(\Upsilon) = \{\pi \mid \pi \in \Pi(\Upsilon); \text{there is no } \pi' \in \Pi(\Upsilon) \text{ such that } \pi' \subset \pi\}$. Let $C_\Gamma(A)$ denote the set of sets of abnormalities, such that $\Delta \in C_\Gamma(A)$ iff $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} A \vee \text{Dab}(\Delta)$

Lemma 23 $\bigwedge \{ \bigvee A \mid A \in \Upsilon \} \dashv\vdash_{\text{LLL}} \bigvee \{ \bigwedge A \mid A \in \Pi(\Upsilon) \} \dashv\vdash_{\text{LLL}} \bigvee \{ \bigwedge A \mid A \in \Pi_m(\Upsilon) \}$
and

$\bigvee \{ \bigwedge A \mid A \in \Upsilon \} \dashv\vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee A \mid A \in \Pi(\Upsilon) \} \dashv\vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee A \mid A \in \Pi_m(\Upsilon) \}$.

Proof. The proofs (using the truth tables for \vee and \wedge) are easy but a little bit long winding. ■

I first show that whenever the procedure for final derivability stops with a positive answer, the candidate conclusion is indeed a correct conclusion from the premises. The basic idea behind the procedure is that a consequence G is Minimal Abnormality finally derivable iff the disjunction of G and some conjunction of Dab -formulas A is **LLL**-derivable, and the disjunction of A and a Dab -formula B is only **LLL**-derivable if B is **LLL**-derivable. Remark that this fact does not always hold when the conclusion is **LLL**-derivable on infinitely many conditions, because infinite conjunctions are not allowed in **LLL**.

Lemma 24 *When the final derivability procedure for Minimal Abnormality ends phase 2 without A-marking G , $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}^m} G$*

Proof. I will derive an inconsistency from the hypothesis that the procedure ends phase 2 without A-marking G in phase 2 and $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{AL}^m} G$. Remark that the set of minimal conditions on which G is derivable is finite, otherwise phase 2 would not have terminated. Formally this comes down to:

$$\begin{aligned} &\text{There is a } \Theta \subseteq C_\Gamma(G) \text{ such that for all } \Delta \subset \Omega: \\ &\text{if } \Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \bigwedge \{\vee \theta \mid \theta \in \Theta\} \vee Dab(\Delta), \text{ then } \Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

AND (this is obtained by combining definition 41 and the first definition of final derivability)

$$\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma), \text{ there is no } \theta \in C_\Gamma(G) \text{ for which } \phi \cap \theta = \emptyset. \quad (\text{C.2})$$

C.2 entails:

$$\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma), \text{ for all } \theta \in C_\Gamma(G): \phi \cap \theta \neq \emptyset. \quad (\text{C.3})$$

From C.3 we know that at least one ϕ must be a superset of at least one choice set of $C_\Gamma(G)$, or:

$$\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma) \text{ and some } \pi \in \Pi(C_\Gamma(G)): \pi \subseteq \phi. \quad (\text{C.4})$$

Because of the fact that in view of lemma 23 $\bigvee \{\bigwedge \phi' \mid \phi' \in \Phi(\Gamma)\}$ is **LLL**-equivalent to $\bigwedge \{Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)\}$, where $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ are all the minimal Dab -formulas derivable from Γ , $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \bigwedge \phi \vee \bigvee \{\bigwedge \phi' \mid \phi' \in \Phi(\Gamma) - \phi\}$. And hence, because, in view of C.4, $\bigwedge \pi$ is a consequence of $\bigwedge \phi$, the following holds¹¹:

¹¹If the set of all minimal Dab -formulas derivable from Γ is infinite, the conjunction of the members of this set is of course also infinite and thus not a well formed formula. However, the case that is investigated here, is the case that the procedure has terminated. One can easily prove that the procedure would not have terminated if the mentioned set would have been infinite.

$$\begin{aligned} &\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma) \text{ and some } \pi \in \Pi(C_\Gamma(G)): \\ &\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \pi \vee \bigvee \{ \bigwedge \phi' \mid \phi' \in \Phi(\Gamma) - \phi \}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Hence:

$$\begin{aligned} &\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma): \\ &\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigvee \{ \bigwedge \pi \mid \pi \in \Pi(C_\Gamma(G)) \} \vee \bigvee \{ \bigwedge \phi' \mid \phi' \in \Phi(\Gamma) - \phi \} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

and with lemma 23:

$$\begin{aligned} &\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma): \\ &\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee \theta \mid \theta \in C_\Gamma(G) \} \vee \bigwedge \{ \bigvee \phi' \mid \phi' \in \Pi(\Phi(\Gamma) - \phi) \}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Since ϕ is a minimal choice set of $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ and $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ are minimal Dab-consequences of Γ , there is a choice set Δ of $\Phi(\Gamma) - \phi$, such that $\Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} \text{Dab}(\Delta)$, C.7 leads to:

$$\begin{aligned} &\text{For some } \phi \in \Phi(\Gamma), \text{ and some } \Delta \in \Pi(\Phi(\Gamma) - \phi): \\ &\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee \theta \mid \theta \in C_\Gamma(G) \} \vee \text{Dab}(\Delta) \text{ and } \Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} \text{Dab}(\Delta). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

But then,

$$\begin{aligned} &\text{For some finite } \Delta \subset \Omega: \\ &\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee \theta \mid \theta \in C_\Gamma(G) \} \vee \text{Dab}(\Delta) \text{ and } \Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} \text{Dab}(\Delta). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

If, for some formula A , $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee \theta \mid \theta \in C_\Gamma(G) \} \vee A$ and $\Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} A$ then also for all $\Theta \subseteq C_\Gamma(G)$ $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee \theta \mid \theta \in \Theta \} \vee A$ and $\Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} A$

$$\begin{aligned} &\text{For all } \Theta \subseteq C_\Gamma(G), \text{ there is a } \Delta \subset \Omega: \\ &\Gamma \vdash_{\text{LLL}} \bigwedge \{ \bigvee \theta \mid \theta \in \Theta \} \vee \text{Dab}(\Delta) \text{ and } \Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} \text{Dab}(\Delta). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

This is clearly in contradiction with hypothesis C.1.

■

The negative part of theorem 23 still needs to be proven: if the final derivability procedure stops with a negative answer, the candidate conclusion is not a conclusion of the premises.

Lemma 25 *When G is A -marked after phase 1 in the final derivability procedure for Minimal Abnormality, $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{AL}^m} G$*

Proof. Let $\Upsilon = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ be the finite set of all minimal conditions on which G is derived. $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} G \vee \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}$ and $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}$ or $(\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\} \vee Dab(\Lambda)$ and $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Lambda)$ for some $\Lambda \subset \Omega$).

In the first case ($\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} \bigwedge \{Dab(\Delta) \mid \Delta \in \Upsilon\}$), every conditional derivation of Γ , say on condition Θ , can be marked in view of the derivable formula $Dab(\Theta)$, because Θ must be a superset of a set in Υ and $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Delta)$ for any $\Delta \in \Upsilon$. In the second case, there is a series of minimal Dab -formulas \mathbf{LLL} -derivable from Γ : $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_n \rangle$ with $\Delta'_i \subseteq \Delta_i \cup \Lambda$ and $\Delta'_i \not\subseteq \Lambda$ (otherwise $\Gamma \vdash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Lambda)$, which was not the case) for all $i \leq n$. So there is a $\phi \in \Phi(\Gamma)$ such that $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \phi$ and $A_i \in \Delta_i$ for all $i \leq n$. This set ϕ will have an element in common with every condition in Υ . All lines on which G can be derived, will be marked. ■

Theorem 23 *If the procedure $\text{PAm}(\Gamma, G)$ procedure terminates, for some $\Theta_1 \subset \Omega, \Theta_2 \subset \Omega, \dots$, and $\Theta_n \subset \Omega$, $G \vee \bigwedge (\bigvee \Theta_1, \bigvee \Theta_2, \dots \bigvee \Theta_n)$ is derived on a line in the generated proof that is not A -marked iff $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}^m} G$.*

Proof. Immediate in view of the two preceding lemmas. ■

Theorem 24 *If the procedure $\text{PAr}(\Gamma, G)$ terminates, for some $\Theta \subset \Omega$, G^Θ is derived on a line in the generated proof that is not A -marked iff $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}^r} G$.*

Proof. The procedure results essentially in the same proof as the one in [25]. So theorem 26 is correct in view of the following theorems from [25].

Theorem 4 from [25]. If Γ is finite, every prospective proof for $\Gamma \vdash_{\mathbf{ACLuN1}} G$ terminates.

Theorem 8 from [25]. For all finite Γ and for all G , the procedure forms a decision method for $\Gamma \vdash_{\mathbf{ACLuN1}} G$.

■

Theorem 25 *If total procedures are available for respectively lower limit logic and conditional derivability of an adaptive logic \mathbf{AL} , and $\text{MinCon}_{\mathbf{AL}}(\Gamma, G)$ is finite, then the procedures $\text{PAr}(\Gamma, G)$ and $\text{PAm}(\Gamma, G)$ that use these procedures are total.*

Theorem 26 *If Γ is finite, then the procedures $\text{PAr}(\Gamma, G)$ and $\text{PAm}(\Gamma, G)$ for the positive fragments of respectively \mathbf{CLuN}^r and \mathbf{CLuN}^m are total.*

C.7 Conclusion

In this paper I have presented a proof procedure for the actual adaptive consequence relation: final derivability. I have done this for CLuN^m and CLuN^r , and thanks to a modular approach, these results are immediately generalizable to all adaptive logics with a lower limit logic with a classically behaving disjunction and conjunction and for which a proof procedure for conditional derivability is devisable.

The procedure for Minimal Abnormality puts the Minimal Abnormality strategy in a different light. The strategy was often seen as much more complicated than the Reliability strategy. To people who are not very familiar with adaptive logics, the marking definition seemed rather abstract. The procedure I have presented shows that there is not such a big difference between the two strategies, and that the resulting Minimal Abnormality proofs are not more complicated or unrealistic than the Reliability proofs. The Minimal Abnormality strategy is an elegant formal tool, that gives in some contexts more accurate results than the marking definition for Reliability.

The proofs generated by the procedures have a realistic character. Especially in two aspects. First, the goal directed proof method defines a realistic problem solving method (already for classical logic). The combination of logical analysis and conditional assumptions typical for the goal directed proofs is often observed in human deductive argumentation, and is a natural way to solve logical problems. A logical and philosophical elaboration of the concept *logical analysis* in this connection is forthcoming.

Secondly, also the actual proof procedures for final derivability in section C.5 have a realistic character. In both the Reliability procedure and the Minimal Abnormality procedure, one can observe an interesting manner to cope with the typical adaptive dynamics. In the first permissive or careless phase of the procedure one tries to derive the goal on the assumption that everything (that is needed for this derivation) is normal, i.e. on the assumption that some conjunction of disjunctions of abnormalities is not derivable from the premises. For example, in the case of inconsistency adaptive logics, this means trying to obtain the goal by applying classical logic rules on the condition that the relevant subformulas are not inconsistent in view of the premises.

In the next, sceptic phase, the procedure tries to refute these careless reasoning steps, by deriving the conjunction of disjunctions of abnormalities that was taken to be not derivable in the first phase. When a refutation is derived in a careful sense, one should look for other ways to derive the goal. Hence, one returns to the permissive phase. If no careful refutation is found within the

sceptic phase, one still has the possibility that the refutation can be derived in a conditional (careless) way. The critical attitude is also allowed to be careless. This implies of course that the criticism itself can be refuted as well. So, one needs to go through a last phase.

The last phase consists of the attempt to criticize the criticism in a careful way. If this succeeds, the criticism is useless and the sceptic phase has to look for another attempt to criticize the careless derivations from the first phase. The goal is derived if no sensible criticism can be found to the careless derivation of the goal. Or: the goal is derived if every criticism to its derivation can be carefully criticized. This does not sound weird at all from a dialectical point of view.

I have shown that the procedure is decisive for the propositional fragment of the logics CLuN^m or CLuN^r with finite premise sets. Moreover, adaptive logics that have a decidable lower limit logic (such as predicative CLuN^m with maximally unary predicates and finite premise sets), and a finite list of problem relevant abnormalities are decidable as well. So, for an important proportion of the realistic problem solving contexts there is an algorithm that will, within finite time, give an answer.

But a lot of adaptive logic problems are undecidable. Also in these cases the procedure is quite important. It enables the reasoner to obtain a provisional solution to the problem as well as more insights in the premises. These insights are immediately relevant to the solution of the problem. This contrasts sharply with non goal directed, random reasoning from premises: the reasoner gains information, but has no guarantee at all that this is of any use. Relevant information is crucial in view of the creation of alternative interesting statements and in view of other reasoning methods towards the solution (intuitive guessing, doing new empirical research, considering conceptual and/or (methodo)logical changes).

Standard adaptive proofs do not serve as a demonstration for the final derivability of formulas from the premise set. The reasoner can only obtain finality of conviction about the final derivability of formulas derived in the proof, by a reasoning at the metalevel. So, it is important to have a generally applicable procedure that (if it returns an answer) can serve as a means to decide whether lines of a proof are stably marked or unmarked. If the procedures in this paper terminate, they do provide the reasoner with finality of conviction about the final derivability of formulas from premises, because of the general reasoning at the metalevel that proves the correctness of the presented procedures for all premises and conclusions.

Moreover, thanks to the typical proof format, the interesting information that is gained during the problem solving process is also explicitly available in the

actual output of the procedure. Both if the answer of the procedure is positive and if it is negative, a proof is obtained in which, in most cases, the goal is the formula element of some (possibly marked) lines of the proof. So, on these lines the goal is derived on two types of conditions: sets of usual formulas and sets of abnormalities. Those conditions are very useful. If the procedure has terminated and failed to derive the conclusion, the failed proof can serve as the basis for further research that can change the premise set. For example, some parts of inconsistent theories can be dropped in order to remove some inconsistencies. Also, if the procedure was not decisive (it did not terminate) after a reasonable time, one can still affirm the goal provisionally. Several lines on which this goal is derived tell us how this affirmation can be falsified.

The presented procedure narrows the gap between the abstract logical rules of dynamic proofs and the actual ability of the reasoner to solve problems by means of it. It is a rational method to cope with defeasible inferences in every day and scientific contexts.¹²

¹²Research for this paper was supported by subventions from Ghent University and from the Fund for Scientific Research – Flanders. I am indebted to Diderik Batens for comments on a former draft.

Artikel ‘Yes Fellows, Most Human Reasoning is Complex’

Authors

Diderik Batens, Kristof De Clercq, Peter Verdée en Joke Meheus

Abstract

This paper answers the philosophical contentions defended in [66]. It contains a description of the standard format of adaptive logics, analyses the notion of dynamic proof required by those logics, discusses the means to turn such proofs into demonstrations, and argues that, notwithstanding their formal complexity, adaptive logics are important because they explicate an abundance of reasoning forms that occur frequently, both in scientific contexts and in common sense contexts.

Journal

In print in Synthese.

D.1 Aim of This Paper

A recent issue of *Synthese* contains a paper by Horsten and Welch [66] on adaptive logics. The paper comprises results on the complexity of two adaptive logics, states that Batens made two mistaken claims, and attaches some philosophical comments to the complexity results. Meanwhile, one of the complexity results was shown mistaken [114], but the others may be generalized to most adaptive logics in standard format—the standard format is described in Section D.2. Horsten and Welch are right on one of Batens’ claims, not on the other. Their philosophical comments, however, are severely misguided. The comments illustrate a deep misunderstanding about the nature and function of logics for *defeasible* reasoning forms, in other words for most human reasoning. As the misunderstanding is by no means peculiar for Horsten and Welch, it seems worthwhile to consider the matter in a systematic way.

The central claim we want to dispute is that adaptive logics are too complex to serve as an explication for actual human reasoning. Horsten and Welch presuppose that derivability is a simple relation, much simpler than, for example, truth. According to their results, the complexity of adaptive consequence relations, or rather of the consequence sets, is Σ_3^0 (for some infinite propositional premise sets). This brings them to their central claim. We find this claim baffling. Apparently they live in a place that only remotely resembles planet earth, where decisions are based on provisional judgements and where the formal explication of most reasoning is complex.

We also have several minor complaints about [66]. We shall present these where they seem most appropriate. Two minor complaints are best mentioned from the outset. The first concerns the title: “The undecidability of propositional adaptive logic”. It is usually said that propositional **CL** (Classical Logic) is decidable, by which one means that $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{CL}} B$ is decidable for all A_1, \dots, A_n and B . Propositional adaptive logics in standard format are decidable in precisely the same sense.¹ The consequence relations of these logics are *undecidable* if the premise set is infinite. But so is the consequence relation of propositional **CL**. So the title comes to blaming Kripke for being single brained.

The second minor complaint concerns the presentation of adaptive logics. Twenty five years ago, there was a single adaptive logic. Today there is a multitude of extremely diverse logics that share the same formal structure. On the road, adaptive logicians had to adjust their terminology to new insights and had

¹This is not fully precise. All propositional adaptive logics studied so far are decidable in this sense, including the logics referred to by Horsten and Welch. However if the lower limit logic (see Section D.2) is undecidable, then so will be the propositional adaptive logic.

to find ways to systematize the growing domain. Horsten and Welch mix terminology from the last twenty five years and intersperse it with terminology of their own. They present things in a weird and idiosyncratic way, for example defining inference rules in terms of truth tables. This forces us to describe adaptive logics from scratch according to present standards.

As the adaptive logic program is application driven, it would have been nice to start with a section describing some of the reasoning forms that are explicated by adaptive logics. This would have provided philosophical motivation. Adaptive logics are intended to describe, in a strictly formal way, reasoning forms that frequently occur both in everyday contexts and in scientific reasoning. Limitations of space forced us to postpone the examples of such reasoning forms to Section D.5. In Section D.2, we shall present the standard format for adaptive logics and we introduce the two specific logics that Horsten and Welch criticize. The standard format is the common structure of nearly all adaptive logics. We cannot refer to Horsten and Welch's paper for this purpose, because their description is idiosyncratic and concerns two logics only. The contentions of Horsten and Welch will be presented in Section D.3. In Section D.4, the dynamic proofs of adaptive logics will be considered and Horsten and Welch's misunderstandings in this connection will be spelled out. This section is essential for understanding the relation between reasoning (the *explicandum*) and adaptive logics (the *explicatum*). In the central Section D.5, (i) we shall discuss the need for defeasible reasoning forms, their complexity, and the implications for their explication in terms of logics, and (ii) we shall show that Horsten and Welch's objections are misguided.

D.2 Adaptive Logics in Standard Format

Adaptive logics adapt themselves to the premise set they are applied to. *The logic* adapts itself: it depends on the premise set whether a specific application of an inference rule is or is not correct with respect to the premise set. The present most attractive description of adaptive logics is called the standard format, appearing from [17] on and most extensively studied in [29], to which we refer for details and metatheoretic proofs. Nearly all known adaptive logics have been phrased in standard format, which has major advantages as will become clear below. The two logics mentioned in [66] are in standard format.

An adaptive logic **AL** is defined by a triple:

1. A *lower limit logic* **LLL**: a reflexive, transitive, monotonic, and compact

logic that has a characteristic semantics and contains **CL** (Classical Logic).²

2. A *set of abnormalities* Ω : a set of **LLL**-contingent formulas, characterized by a (possibly restricted) logical form F which contains at least one logical symbol.
3. An *adaptive strategy*: Reliability or Minimal Abnormality.

The lower limit logic is the stable part of the adaptive logic; anything that follows from the premises by **LLL** will never be revoked. The abnormalities are formulas that are presupposed to be false, ‘unless and until proven otherwise’. Strategies are ways to cope with derivable disjunctions of abnormalities: an adaptive strategy picks one specific way to interpret the premises as normally as possible.³

The predicative version of the logics considered in [66] is defined as follows. The lower limit logic is **CLuN** (Classical Logic allowing for gluts with respect to Negation), viz. full positive **CL** with $(A \supset \sim A) \supset \sim A$ added as the only axiom for the standard negation, and extended⁴ with classical negation \sim —see note 2. While $A \vee \sim A$ is a **CLuN**-theorem, $A \wedge \sim A$ is **CLuN**-contingent. The set of abnormalities Ω comprises all formulas of the form $\exists(A \wedge \sim A)$ (the existential closure of $A \wedge \sim A$).⁵ The strategies are respectively Reliability and Minimal Abnormality—see below. The resulting adaptive logics will be called **CLuN^r** and **CLuN^m**.

Incidentally, if the lower limit logic is extended with an axiom that declares all abnormalities logically false, one obtains the *upper limit logic* **ULL**. If a premise set Γ does not require that any abnormalities are true, the **AL**-consequences of Γ are identical to its **ULL**-consequences. The upper limit logic of **CLuN^r** and of **CLuN^m** is **CL**.

In the expression $Dab(\Delta)$, Δ will always be a finite subset of Ω and $Dab(\Delta)$ will denote the *classical disjunction* (see note 2) of the members of Δ . $Dab(\Delta)$ is called a *Dab-formula*. $Dab(\Delta)$ is a *minimal Dab-consequence* of Γ iff $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} Dab(\Delta)$ whereas $\Gamma \not\vdash_{\text{LLL}} Dab(\Delta')$ for any $\Delta' \subset \Delta$. Where $Dab(\Delta_1)$, $Dab(\Delta_2)$, ... are the minimal *Dab*-consequences of Γ , $U(\Gamma) = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots$; $U(\Gamma)$ is the set of

²This is realized by adding classical logical symbols (those having the same meaning as in **CL**) to the language. These will be written as \sim , \forall , \exists , etc. The classical symbols have mainly a technical use and are not meant to occur in the premises or conclusions of standard applications.

³Apart from Reliability and Minimal Abnormality, several strategies were developed mainly in order to characterize consequence relations from the literature in terms of an adaptive logic. All those strategies can be reduced to Reliability or Minimal Abnormality under a translation.

⁴Suitable axioms are $(A \supset \sim A) \supset \sim A$ and $A \supset (\sim A \supset B)$.

⁵So, for the propositional fragment, Ω comprises all formulas of the form $A \wedge \sim A$.

abnormalities that are *unreliable* with respect to Γ . Where M is a **LLL**-model, $Ab(M)$ is the set of abnormalities verified by M .

Definition 47 A **LLL**-model M of Γ is *reliable* iff $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.

Definition 48 $\Gamma \models_{\mathbf{AL}^r} A$ iff A is verified by all reliable models of Γ .

So a **LLL**-model of Γ is reliable iff it verifies only abnormalities that are unreliable with respect to Γ anyway. According to an adaptive logic that has Reliability as its strategy, the semantic consequences of Γ are the formulas verified by all reliable models of Γ .

Definition 49 A **LLL**-model M of Γ is *minimally abnormal* iff there is no **LLL**-model M' of Γ such that $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Definition 50 $\Gamma \models_{\mathbf{AL}^m} A$ iff A is verified by all minimally abnormal models of Γ .

So a **LLL**-model M of Γ is minimally abnormal iff no other **LLL**-model of Γ verifies (set theoretically) less abnormalities than M . According to an adaptive logic that has Minimal Abnormality as its strategy, the semantic consequences of Γ are the formulas verified by all minimally abnormal models of Γ .

An annotated **AL** proof consists of lines that have four elements: a line number, a formula, a justification and a condition. Where

$$A \quad \Delta$$

abbreviates that A occurs in the proof on the condition Δ , the (generic) inference rules are:

PREM	If $A \in \Gamma$:	$\frac{\dots \quad \dots}{A \quad \emptyset}$
RU	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathbf{LLL}} B$:	$\frac{\begin{array}{c} A_1 \quad \Delta_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n}$
RC	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathbf{LLL}} B \check{\vee} Dab(\Theta)$	$\frac{\begin{array}{c} A_1 \quad \Delta_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n \cup \Theta}$

We shall need to consider *stages* of proofs, which are lists of lines obtained by applications of the three above rules, with the usual understanding that the

justification of a line should only refer to lines preceding it in the list. The empty list will be considered as stage 0 of every proof. Where s is a stage, s' is an *extension* of s iff all lines that occur in s occur in the same order in s' . A (dynamic) proof is a chain of stages. Here comes a peculiarity required by the Minimal Abnormality strategy. Normally, the extension of a stage is obtained by appending lines. This is not required here. The added lines may be inserted, provided that the justification of every line refers only to preceding lines. A line inserted between lines 4 and 5 may, for example, be numbered 4.1.⁶

That A is derivable on the condition Δ may be interpreted as follows: it follows from the premise set that A or one of the members of Δ is true. As the members of Δ , which are abnormalities, are supposed to be false, A is considered as derived, unless and until it shows that the supposition cannot be upheld. The precise meaning of “cannot be upheld” depends on the strategy, which determines the marking definition (see below) and hence determines which lines are marked at a stage. If a line is marked at a stage, its formula is considered as not derived at that stage.

We now set out to present the marking definitions. $Dab(\Delta)$ is a *minimal Dab-formula* at stage s of an **AL**-proof iff $Dab(\Delta)$ has been derived at that stage on the condition \emptyset whereas there is no $\Delta' \subset \Delta$ for which $Dab(\Delta')$ has been derived on the condition \emptyset .⁷ A *choice set* of $\Sigma = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots\}$ is a set that contains an element out of each member of Σ . A *minimal choice set* of Σ is a choice set of Σ of which no proper subset is a choice set of Σ . Consider a proof from Γ at stage s and let $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ be the minimal *Dab*-formulas at that stage. $U_s(\Gamma) = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ ⁸ and $\Phi_s(\Gamma)$ is the set of minimal choice sets of $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$.⁹

Definition 51 *Marking for Reliability: Line l is marked at stage s iff, where Δ is its condition, $\Delta \cap U_s(\Gamma) \neq \emptyset$.*

Note that at least one line on which A is derived is unmarked iff, on the present estimation of $U(\Gamma)$ (see note 8), A is verified by all reliable models of Γ .

⁶An alternative, which we shall not consider in this paper, is to renumber all lines after the insertion and to adjust the old line numbers in the justifications.

⁷Note the similarity with the definition of a minimal *Dab*-consequence of Γ . The minimal *Dab*-formulas at a stage represent an estimation of the minimal *Dab*-consequences of Γ ; the estimation depends on the insights provided by the stage of the proof.

⁸ $U_s(\Gamma)$ may be seen as the estimation of $U(\Gamma)$ that is provided by stage s of the proof.

⁹Let $\Phi(\Gamma)$ be defined similarly from the minimal *Dab*-consequences of Γ . It can be shown that $\varphi \in \Phi(\Gamma)$ iff there is a minimally abnormal model M of Γ for which $\varphi = Ab(M)$. $\Phi_s(\Gamma)$ may be seen as the estimation of $\Phi(\Gamma)$ that is provided by stage s of the proof.

Definition 52 *Marking for Minimal Abnormality: Line l is marked at stage s iff, where A is derived on the condition Δ on line l , (i) there is no $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ such that $\varphi \cap \Delta = \emptyset$, or (ii) for some $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is no line on which A is derived on a condition Θ for which $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.*

This reads more easily: where A is derived on the condition Δ on line l , line l is *unmarked* at stage s iff (i) there is a $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ for which $\varphi \cap \Delta = \emptyset$ and (ii) for every $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is a line at which A is derived on a condition Θ for which $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.

Note that all lines on which A is derived are marked unless, on the present estimation of $\Phi(\Gamma)$ (see note 9), A is verified by all minimally abnormal models of Γ .¹⁰

A formula A is *derived at stage s* of a proof from Γ iff it is the formula of a line that is unmarked at that stage. Marks may come and go as the proof proceeds. So one also wants to define a stable notion of derivability, which is called *final derivability*.

Definition 53 *A is finally derived from Γ on line l of a stage s iff (i) A is the second element of line l , (ii) line l is not marked at stage s , and (iii) every extension of the stage in which line l is marked may be further extended in such a way that line l is unmarked.*

In Definition 53, s may be taken to be a *finite stage* for both strategies. For the Reliability strategy, the definition may moreover be taken to refer to *finite extensions* only. For Minimal Abnormality the definition should be required to refer to finite as well as to infinite extensions, as was shown in [12, p. 479].

The intuitive notion behind final derivability is the existence of a proof that is *stable with respect to an unmarked line l* : A is derived on line l and line l is unmarked in the proof and in all its extensions. However, for some **AL**, Γ , and A , only an infinite proof from Γ in which A is the formula of a line l is stable with respect to line l . A simple example is the **CLuN^r**-proof of p from $\{p \vee q, \sim q, (q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i), (q \wedge \sim q) \supset (r_i \wedge \sim r_i)\}_{i \in \{0,1,\dots\}}$. Every finite stage can be extended with a formula $(q \wedge \sim q) \supset (r_i \wedge \sim r_i)$ for an i that does not yet

¹⁰The person who devises the proof has nothing to decide or even to do in connection with marking. It is governed by a definition, not by a rule. The mistaken name “rule” occurred in older papers on adaptive logics, but was corrected at least from [38] on. So it is a pity that Horsten and Welch continue the confusion. Their way of proceeding moreover brings them to proofs in which certain steps are repeated an infinite number of times, as appears from the example in Section D.3 below. This is not very elegant. As the proof goes on, one changes one’s mind on derivability in view of the minimal *Dab*-formulas. This is best expressed by lines being marked or unmarked at a stage. Horsten and Welch’s way of proceeding moreover cannot be upheld for the Minimal Abnormality strategy.

occur in the stage. In the extension, $q \wedge \sim q$ is unreliable and hence line l is marked. The proof becomes stable only after $r_i \wedge \sim r_i$ is derived for all $i \in \mathbb{N}$. Needless to say, the existence of an infinite proof is not established by producing the proof but by reasoning in the metalanguage. This is why, from the very first paper on, Definition 53 was introduced—see also Section D.4. There is an easy demonstration that A is finally derived at a *finite* stage of a proof from Γ according to Definition 53 iff A is derived on an unmarked line l of a (possibly infinite) proof from Γ that is stable with respect to line l .

Definition 53 has an attractive game-theoretic interpretation. The proponent has shown that A is finally derived on line l iff, whenever the opponent extends the proof in such a way that line l is marked, the proponent is able to extend the extension further in such a way that line l is unmarked. Note that the preceding sentence refers to all possible extensions. So it can only be established by a reasoning in the metalanguage.

The standard format provides an attractive systematization of adaptive logics. Apart from CLuN^r and CLuN^m , many other *corrective* adaptive logics have been studied. The upper limit logic of all of them is CL or an extension of CL , for example a modal logic. The lower limit logics may be paraconsistent, but may also be weaker than CL because some other logical symbol is ‘defective’, because several symbols are, or because some non-logical symbols are ambiguous or vague. Many other adaptive logics are *ampliative* in that their lower limit logic is CL or an extension of it. These include logics for inductive generalization, for abduction, for handling background knowledge, for generating questions, etc. Other adaptive logics are corrective as well as ampliative. Adaptive logics can very easily be combined in several ways.

If an adaptive logic is in standard format, the syntactic characterization (proof theory) as well as the semantic characterization of the logic are provided by the format. The standard format also provides lots of metatheoretic results, including the soundness and completeness proofs and the proofs of all the interesting properties—see [29]. It also provides *criteria* for final derivability, viz. procedures (some pertaining to proofs, others pertaining to tableaux) that enable one to decide, for specific A and Γ , that A is finally derivable from Γ —see also Section D.5.

D.3 Horsten and Welch’s Contentions

There is no point in summarizing Horsten and Welch’s idiosyncratic formulation of propositional CLuN^r and CLuN^m . However, there are a few things we need to mention in order to make their definitions understandable.

First of all Horsten and Welch require that, once marked, a line remains marked forever. They allow that the formula of the marked line is derived on a new line (if this is unmarked), and require that this line is appended to (the stage of) the proof. Next, they present an alternative definition of final derivability. Disregarding some unimportant idiosyncracies,¹¹ *their Definition 2* comes to:

A formula A is finally CLuN^r -derivable from a set of premises Γ if and only if there is a proof \mathcal{P} of A from Γ on a certain line l , and this proof cannot be extended to a proof \mathcal{Q} in which line l is marked.

By “a proof \mathcal{P} of A from Γ on a certain line l ” they mean that A is the formula of line l of a certain proof.

These changes, which they say to introduce “for diagnostic purposes”, lead to proofs that are not lists in the usual sense—see, for example, [46]—because their length may be $\omega + 1$, etc. Also, we do not see any diagnostic use of the changes.

In order to bring their approach to CLuN^r closer to the approach of adaptive logicians, they present *their Definition 5*, which roughly is our Definition 53, except that they allow the stage mentioned in that definition as well as all extensions mentioned in it to have length ω . They purport to show that the restriction to a finite stage and finite extensions is mistaken (beginning of their section 3.3). They do so by means of the following example. Let $\Gamma_3 = \{p \vee q, \sim q, (q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i), ((q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i)) \supset (r_i \wedge \sim r_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ and consider the following CLuN^r -proof from Γ_3 . We shall not write any marks, but explain the matter immediately after the proof.

1	$p \vee q$	Prem	\emptyset
2	$\sim q$	Prem	\emptyset
3	p	1, 2; RC	$\{q \wedge \sim q\}$
4	$(q \wedge \sim q) \vee (r_1 \wedge \sim r_1)$	Prem	\emptyset
5	$((q \wedge \sim q) \vee (r_1 \wedge \sim r_1)) \supset (r_1 \wedge \sim r_1)$	Prem	\emptyset
6	$r_1 \wedge \sim r_1$	Prem	\emptyset
...			
k	p	1, 2; RC	$\{q \wedge \sim q\}$
$k + 1$	$(q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i)$	Prem	\emptyset
$k + 2$	$((q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i)) \supset (r_i \wedge \sim r_i)$	Prem	\emptyset
$k + 3$	$r_i \wedge \sim r_i$	Prem	\emptyset
...			
ω	p	1, 2; RC	$\{q \wedge \sim q\}$

¹¹They consider the set of marks, which is a set of line numbers that cause the mark, as an element of a line of a proof.

Line 3 is marked when line 4 is added, and (in Horsten and Welch’s setup) the mark is not removed when line 6 is added. However, after line 6, p may be derived again on a new line. This may be done infinitely many times as lines k to $k + 3$ illustrate. Line k is marked when line $k + 1$ is added, but p may be derived on a new line after line $k + 3$ was added. Only after all minimal *Dab*-formulas, viz. all formulas $r_i \wedge \sim r_i$ have been derived, p can be derived on a line that is and remains unmarked. Note that, in our setup, line 3 is unmarked at stage 6 of the proof and there is no need to introduce line k ; line 3 will be marked at stage $k + 1$ of the proof, unmarked again at stage $k + 3$, and so on.

For \mathbf{CLuN}^m Horsten and Welch do not go into the details of proofs and do not present a marking definition, but define final derivability with respect to formulas that can be categorically derived from the premise set.¹²

As a next step, Horsten and Welch set out to study the complexity of final derivability. For \mathbf{CLuN}^r the outcome is Σ_3^0 . Π_1^1 is an upper bound for \mathbf{CLuN}^m , but the precise outcome turns out to be Σ_3^0 .¹³

We now come to the philosophical reflections that Horsten and Welch attach to these results.

Propositional adaptive logics are decidable in the usual sense that $A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathbf{CL}} B$ is decidable. Horsten and Welch correctly point out that Batens made a mistake when he stated the guess that decidability survives if the propositional premise set is infinite. Batens has an excuse. All interesting applications of adaptive logics to the philosophy of science concern the predicative case. There the consequence relation is not only undecidable, there even is no positive test for it (in general) as is noted in many published papers—the technicalities are clarified in subsequent sections. So Batens did not really care for infinite propositional premise sets. Still, the mistake was careless and had to be corrected.

Horsten and Welch object to the fact that some premise sets and conclusions require infinite proofs. They quote Church who, in a reaction to Zermelo, remarks that logics are explications of the concept of proof and proofs should carry finality of conviction to anyone who admits the assumptions of the proof. This requires a finitary syntactical test for the validity of proof candidates, which is impossible in infinite cases. According to Horsten and Welch, the *transfinite* character of some adaptive proofs is to be blamed for the fact that the “final proofs [of adaptive logics] do not carry finality of conviction”.

Moreover, Horsten and Welch argue that the complexity of adaptive logics is even more problematic than the transfinite character of the proofs. Because truth itself is a complex notion, derivability should be comparatively simpler.

¹²As we have seen in Section D.2, the only difference with \mathbf{CLuN}^r is the marking definition.

¹³[114] has shown that this is mistaken: the complexity of final \mathbf{CLuN}^m -derivability is Π_1^1 .

Horsten and Welch refer to the moment at which the propositional relevant logic \mathbf{R} was proven undecidable. At the time, this result was seen as a big problem for relevance logic, precisely because the logic \mathbf{R} was supposed to explicate a common sense notion. Adaptive logicians have made a similar claim: the adaptive proofs should explicate actual reasoning processes. Therefore the adaptive proofs should be simple. Relevant logics have the excuse of a complex implication connective. The inconsistency-adaptive logics under discussion, however, have only simple classical and paraconsistent connectives, which have a straightforward two-valued semantics.

So adaptive logics are undecidable. Horsten and Welch point out that the situation is even worse. Adaptive logic is not only undecidable but even Σ_3^0 -complex. Formal learning theory has taught us that an algorithm that converges to a correct answer (yes or no) for the question whether x is an element of a set of natural numbers is only available if the set is maximally Δ_2^0 -complex. Adaptive logicians have always admitted that adaptive logics are conceived for contexts where there is no positive test, but because adaptive logic consequence sets can apparently exceed the Δ_2^0 -bounds, there cannot even be a machine that generates adaptive proofs that stabilize to the right answer (if there is any). In view of this result, Horsten and Welch attack a claim by Batens that, as a dynamic proof proceeds, insights in the premises may increase and may never decrease. They argue that derivability at a stage does provably not provide a good estimate of final derivability.

D.4 Adaptive Proofs

Consider an example of a simple CLuN^m -proof. Let $\Gamma = \{\sim p, \sim q, p \vee r, p \vee q, q \vee r\}$. We obviously move on to our way of presenting proofs from here on.

1	$\sim p$	Prem	\emptyset
2	$\sim q$	Prem	\emptyset
3	$p \vee r$	Prem	\emptyset
4	r	1, 3; RC	$\{p \wedge \sim p\}$
5	$p \vee q$	Prem	\emptyset
6	$(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$	1, 2, 5; RU	\emptyset
7	$q \vee r$	Prem	\emptyset
8	r	2, 7; RC	$\{q \wedge \sim q\}$

Up to stage 5 of the proof, viz. before line 6 is added, no line is marked because no Dab -formula has been derived. At stage 6, line 4 is marked. Indeed

$\Phi_6(\Gamma) = \{\{p \wedge \sim p\}, \{q \wedge \sim q\}\}$ and r has not been derived on a condition Θ for which $\{p \wedge \sim p\} \cap \Theta = \emptyset$. At stage 8, all lines are unmarked again.

Does 1–8 form a demonstration that $\Gamma \vdash_{\text{CLuN}^m} r$? Obviously not. It is a proof in the sense that it is written according to the rules of CLuN^m (in view of the specific premise set), not in the sense that it is a demonstration. One knows that r is a final CLuN^m -consequence of Γ because one sees (and can demonstrate) that 6 is the only minimal *Dab*-consequence of Γ . This information is not displayed in the proof and cannot be displayed there. Adaptive proofs in themselves are not demonstrations of the final derivability of a formula from the premises.¹⁴ To turn an adaptive proof into such a demonstration, one needs a *reasoning at the metalevel*.

This has nothing to do with the infinite or transfinite character of some adaptive proofs, which Horsten and Welch blamed for the fact that the “final proofs [of adaptive logics] do not carry finality of conviction”. This is a misunderstanding: even finite adaptive proofs from finite premise sets do not in themselves carry finality of conviction with respect to *final* derivability—they obviously do with respect to derivability at a stage.

The depth of Horsten and Welch’s misunderstanding may be illustrated as follows. Consider again the proof in Section D.3. This proof, notwithstanding its length, ω or rather $\omega + 1$, does not demonstrate that p is a consequence of Γ_3 on *their Definition 2* for final CLuN^r -derivability. Indeed, it cannot be seen from the proof that it has no extensions in which the line labelled ω is marked. Has this anything to do with the proof being *infinite*? By no means so. Replace i by 1 in Γ_3 (and remove the now pointless condition $i \in \mathbb{N}$) and consider the subproof 1–6, or rather add a line 7 that is identical to line 3 (to make Horsten and Welch happy). On *their Definition 2* p is finally CLuN^r -derived in this proof. And they are quite right: the matter is even decidable. But the proof does not demonstrate that p is finally derived because the proof does not contain and cannot contain the information that p is not marked in any of its extensions. So according to their Definition 2, just as much as according to our Definition 53, a reasoning at the metalevel is required to turn a proof into a demonstration.

We shall argue that such proofs form nevertheless a useful explication of certain (frequently occurring) reasoning forms. However, let us first have a closer look at the proofs.

The usual definition identifies $\Gamma \vdash_{\text{CL}} A$ with the existence of a list of formulas that is obtained by applying **CL**-rules (depending on the specific formulation),

¹⁴There is an exception. That A is derivable on the condition \emptyset warrants that it is derivable from the premises by the lower limit logic and hence is finally derivable from the premises by the adaptive logic. This special case is similar to the general case for **CL**, which is discussed below in the text.

that ends with A , and in which all formulas introduced by the premise rule belong to Γ . This definition is only adequate because **CL** is compact and monotonic. In view of this, some will argue that the proofs of **CL**, as those of every logic, are only demonstrations in view of a reasoning at the metalevel. The situation of adaptive logics is special, however. For usual logics, such as **CL**, the required metalevel reasoning concerns properties of the logic. This may be provided independently of a specific premise set or conclusion. For adaptive logics one moreover needs a reasoning about specific **LLL**-consequences of the premises.

That one needs this specific information is typical for *dynamic* proofs, that is proofs in which formerly drawn conclusions may be revoked. This dynamics occurs for non-monotonic logics, but also for some monotonic consequence relations. Consider the Weak consequence relation from [99]: $\Gamma \vdash_W A$ iff there is a consistent $\Gamma' \subseteq \Gamma$ for which $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CL}} A$. Clearly \vdash_W is a monotonic consequence relation: every consistent subset of Γ is a consistent subset of $\Gamma \cup \Delta$ for every Δ . But as there is no positive test (see the next paragraph) for consistency, the proofs of a logic characterizing \vdash_W are necessarily dynamic: that A is derived from some members B_1, \dots, B_n of Γ provides only a reason to consider A as a Weak consequence of Γ if $\{B_1, \dots, B_n\}$ is a consistent set—this holds even if $A \in \Gamma$. Incidentally, the Weak consequence relation is characterized by an adaptive logic—see [15] and [117].

Where **L** is a logic, $\vdash_{\mathbf{L}}$ is decidable iff there is an algorithm for it: a mechanical procedure that, for any Γ and A , leads after finitely many steps to the answer YES if $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ and to the answer NO if $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{L}} A$. $\vdash_{\mathbf{CL}}$ is not decidable, but there is a positive test for it (it is semi-decidable): there is a mechanical procedure that, for every Γ and A , leads after finitely many steps to the answer YES iff $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$ (but may not provide an answer at any finite point if $\Gamma \not\vdash_{\mathbf{CL}} A$). Adaptive logics are typically meant as explications for consequence relations for which there is no positive test, as was noted in most papers on adaptive logics published after 2000. A positive test for derivability is absent because of the condition involved in the consequence relation: A is **AL**-derivable if certain other formulas are *not* derivable by the lower limit logic **LLL**. If there is no positive test for **LLL**-non-derivability, there is no positive test for **AL**-derivability. Adaptive logics explicate this in terms of conditions and marks, but the phenomenon is typical for all forms of defeasible reasoning, for example default reasoning. Quite a few forms of defeasible reasoning have been characterized by adaptive logics in standard format, usually under a translation, and it is a long term aim of adaptive logicians to do so for all such reasoning forms.

The comment following Definition 53 states that the *extensions* mentioned in the definition may be taken to be *finite* for the Reliability strategy, but that

infinite extensions have to be taken into account for the Minimal Abnormality strategy. In this sense, and only in this sense, did adaptive logicians ever introduce infinite proofs. Obviously the existence of an infinite extension in which line l is unmarked cannot be established by writing it down, but only by a reasoning at the metalevel. Actually, it would not make much of a difference that one could write it down, because the definition requires a statement on extensions of all possible extensions of the stage s . Recall that this holds even for finite adaptive proofs from finite premise sets.

The proof 1–8, displayed at the outset of this section, is stable with respect to line 4 in the sense explained in Section D.2. However, according to Definition 53, r is *finally derived* at stage 4 of that proof. The only extensions of 1–4 in which line 4 is marked are those in which the present line 6 occurs. They can all be extended in such a way that the present line 8 occurs in them, resulting in line 4 being unmarked. The important lesson to be drawn is that r is finally derived in 1–4 as well as in 1–8 according to Definition 53, but that only 1–8 is *stable with respect to line 4*.

This highlights the advantage of Definition 53 over a definition of final derivability in terms of stability with respect to line l . Indeed, every formula A that is finally **AL**-derivable from Γ (for every adaptive logic **AL** in standard format) is finally derived at a finite stage of a proof from Γ , whereas, for some A and Γ , no finite proof from Γ is stable with respect to a line on which A is derived. Finite proofs may be written down. Infinite proofs and infinite extensions of proofs cannot be written down, but one may come to conclusions about them by a metalevel reasoning (which can be written down).¹⁵

Allow us a short digression at this point. It is simple enough to restrict adaptive logics to decidable cases, like finite propositional premise sets, or premise sets and conclusions that belong to decidable fragments of the (predicative) lower limit logic. As becomes clear in Section D.5, to do so eliminates the most interesting applications of adaptive logics. Alternatively one could define a full-blown semantics for adaptive logics and restrict the proofs to decidable fragments. In doing so, however, the derivability relation $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ cannot possibly be complete with respect to the semantic consequence relation $\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}} A$. In [12] the soundness and completeness of **CLuN^r** and **CLuN^m** are proved; in [29] the proofs are generalized to all adaptive logics in standard format.

Let us turn to Horsten and Welch's contention that Batens is mistaken in claiming that Reliability requires only a reference to finite stages and finite

¹⁵That the metalevel considerations require considering infinitely many extensions of a stage, or even infinite extensions, cannot possibly count as an objection. The entities reasoned about are certainly simpler than models.

extensions—they repeat this extensively in Section 5. They are badly wrong. *Their* Definition 2 requires infinite proofs in order to conclude (from the proof and metalevel considerations about its extensions) to final derivability. *Batens’* Definition 53 requires only finite stages and finite extensions for Reliability. *Their* Definition 5 can be safely restricted to finite proofs and finite extensions for Reliability, in which case it is identical to Batens’ Definition 53. That Batens’ Definition 53 is correct as it stands follows, first, from the proofs in [12] as well as from the generalized proofs in [29]. It is also proven directly in [32]. We shall not repeat these proofs here, but let us show that Horsten and Welch’s alleged counterexample is not a counterexample at all. The premise set is Γ_3 , defined in Section D.3, and the logic is CLuN^r . Consider lines 1–3 of the proof:

1	$p \vee q$	Prem	\emptyset
2	$\sim q$	Prem	\emptyset
3	p	1, 2; RC	$\{q \wedge \sim q\}$

Every *finite* extension E of 1–3 in which line 3 is marked contains one or finitely many premises from $\{(q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i)\}_{i \in \{0,1,\dots\}}$. An extension of E in which 3 is unmarked is obtained by adding, for each $(q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i)$ in E,

j	$((q \wedge \sim q) \vee (r_i \wedge \sim r_i)) \supset (r_i \wedge \sim r_i)$	Prem	\emptyset
$j + 1$	$r_i \wedge \sim r_i$	j, \dots ; RU	\emptyset

which obviously results in a finite extension of E. This is true even if, as Horsten and Welch require, p is derived on a new line in the extension of E. So, returning to our way of presenting proofs, every finite extension of 1–3 has a further finite extension in which line 3 is unmarked. This warrants, by Definition 53, that p is finally derived from Γ_3 in the proof 1–3. So, contrary to what Horsten and Welch claim, their example does not show the need to refer to infinite proofs (or infinite extensions) in the definition of final CLuN^r -derivability. They must have been so blinded by their own definition that they could not apply Definition 53.

D.5 The Complexity of Reasoning

Adaptive logics are not candidates for the label “standard of deduction” (if there is such a thing). They are means to characterize, in a strictly formal way, forms of reasoning that were traditionally not recognized as formal, but frequently occur in scientific contexts as well as in everyday reasoning. This should be stressed. Those reasoning forms are being applied; adaptive logics are a means to describe them in a formally decent way. Among the criteria for judging adaptive

logics, adequacy with respect to the explicandum is central. The logics cannot be blamed for the complexity of the explicandum.

Adaptive logicians have analysed many concepts themselves and have argued for this analysis, for example [5] and [18] on forms of handling inconsistency or [39] on prioritized premise sets and diagnosis. To avoid any quarrels, we shall refer to concepts introduced by people at a time they never had heard of adaptive logics.

Nicholas Rescher, partly in cooperation with Ruth Manor, developed consequence relations that handle inconsistencies in a way suitable for specific applications, including the analysis of counterfactuals—see [97, 98, 99] and [44, 45] for a survey and study of those consequence relations, including prioritized ones. All of them are defined in terms of **CL**-derivability from maximal consistent subsets of the premises. There is no positive test for consistency.

A recent version of the theory of the process of explanation is presented by Ilpo Halonen and Jaakko Hintikka [65]. In their Section 6, they discuss the conditions on (nonstatistical) explanations (with a number of restrictions). The conditions concern an explanandum Pb , a background theory T (in which the predicate P occurs) and an initial condition (antecedent condition) I (in which b occurs). Among the six conditions are the following:

- (iii) I is not inconsistent ($\not\vdash_{\text{CL}} \sim I$).
- (iv) The explanandum is not implied by T alone ($T \not\vdash_{\text{CL}} Pb$).
- (vi) I is compatible with T , i.e. the initial condition does not falsify the background theory ($T \not\vdash_{\text{CL}} \sim I$).

There is no positive test for any of the three conditions.

In Andrzej Wiśniewski's erotetic logic, for example [121] and [120], erotetic evocation is defined as follows: a question Q is *evoked* by a set of declarative statements Γ iff the (prospective) presupposition¹⁶ of Q is derivable from Γ but no direct answer of Q is derivable from Γ . Note that there is no positive test for **CL**-non-derivability.¹⁷

This short list of predicative examples can be extended *ad nauseam*. The sources are unsuspect. There is no positive test for these concepts and their complexity is greater than that of **CL**-derivability. The reasoning leading to applications of the concepts is necessarily dynamic. The same holds for all forms of defeasible reasoning, unless it is artificially restricted to decidable or semi-decidable cases.

¹⁶The prospective presupposition of, for example, a whether-question is the disjunction of its direct answers. Thus the prospective presupposition of "Did Mary or John or Joan come?" is "Mary came or John came or Joan came." Our slight simplification does not harm the force of the example.

¹⁷See [78] for the adaptive logic that explicates the dynamic reasoning.

Apart from matters already discussed, Horsten and Welch launch a number of complaints or statements that look like complaints in their Section 5. They state that “it is not an exaggeration to say that there exist no complete proof procedures for propositional adaptive logic, at least not if “proof” is understood in the usual (finitary) sense of the word.” We thought that was clear from the very first paper on adaptive logics, albeit for very different reasons than the ones adduced by Horsten and Welch.

They think that “it seems improbable that our common sense notion of propositional implication is so complicated [as relevant consequence relations and a *fortiori* as adaptive consequence relations]”—by “implication” they mean the consequence relation, not the implication symbol. We return later to the complexity argument in general, but let us point out here that adaptive logics do not explicate the common sense notion of ‘propositional implication’, but explicate methodological concepts and common sense concepts.

A similar confusion underlies their argument from formal learning theory. Every book or paper on formal learning theory states that there are many unsolvable problems. A problem is solvable if some method, when applied to the problem, warrants that the correct answer is obtained from a certain finite point on, even if it is unknown whether the point was reached or not. That a problem is unsolvable means that there is no such method. Now consider a *kind* of problems that comprises unsolvable problems—for example a specific kind of abduction problems or a specific kind of inductive generalization problems. When confronted with a problem of such a kind, it cannot always be determined beforehand whether the problem is solvable or not. Let the problem be to determine whether all P are Q on the basis of a strict total order over a denumerable set of instances.¹⁸ Even if not all P are Q , no P that is not Q need occur at any finite point in the order. So whether the problem is solvable depends on the list, not on the type of problems.

Many kinds of problems comprise unsolvable items. This holds for empirical as well as for mathematical kinds of problems. Only a fool would consider this a reason for giving up on all problems of the kinds, or on all problems not demonstrated solvable. Adaptive logics enable one to formulate problems in a precise and unified way and within a specific framework. The framework is different from that of formal learning theory, it presents a different approach, and it provides one with different heuristic means. But there is more. Every adaptive logic characterizes a *kind* of problems and many such kinds comprise unsolvable problems. Incidentally, this means that the kind of problems cannot

¹⁸A strict total order over the natural numbers, need not define a list; for example: 0 2 4 . . . 1 3 5

be formulated by means of, for example, CL because its consequence relation is not sufficiently complex. An important task is to find a method *that solves all solvable problems of a certain type*. That is the best a method can do and such a method “has claims to the title ‘rational’ ” [73, p. 153]. This is precisely what adaptive logicians realized in terms of proof theoretic procedures (see below). So what is the point of the long paragraph that Horsten and Welch devote to formal learning theory?

They complain that Batens considers derivability at a stage as an estimate for final derivability. But there is nothing wrong with the relevant quotation from [9]. That, as the proof proceeds, “the insights in the premises provided by the proof never decrease and may increase” is correct. The quotation concerns the LLL-derivability of *Dab*-formulas, not the final AL-derivability of a formula. The insights increase whenever a new minimal *Dab*-formula is derived (either a new one or one which makes a previously derived *Dab*-formula non-minimal). Batens never said that one can derive all minimal *Dab*-formulas at any finite point. If that could be done, there would be a positive test for $\Gamma \vdash_{\text{AL}} A$. Obviously the estimate cannot be brought arbitrary close to the truth. It is just the best estimate available in view of the insights provided by the present stage of the proof.

Maybe Horsten and Welch want to say that so complex consequence relations (and concepts) should not be approached in terms of proofs, but only in terms of definitions or by semantic means. If they think so, they are wrong. If $\Gamma \vdash_{\text{AL}} A$ can be decided by a reasoning about the definition or by a reasoning about models, then this reasoning can be transformed to a reasoning about proofs and *vice versa*. What is the relevance of arguments from complexity for the distinction? None obviously. The complexity is a property of the consequence relation, not of the means by which one characterizes it. Nor are proofs useless in view of the semantics: proofs offer a different perspective, which is heuristically important.

Two more points deserve attention: the complexity attainable by humans and the question how consequence relations of this complexity should be handled.

If common sense inference were simple from a formal logic point of view, one wonders why logicians have been quarrelling about it ever since the 1930s. And why is a decent theory of natural languages not since long available?

Most of human inference, both in everyday situations and in the sciences, consists of explanations, abductions, inductive generalizations, raising questions, and the like. Apparently such reasoning forms are applied, with some mistakes, by systems not more complex than human brains. This does not exclude, however, that the best normative *explications* of the reasoning forms require complex

formal systems, as the above examples show.¹⁹ A human brain does not work like anything resembling a formal system (and certainly not like a semantics).

Next, consider humans applying formal systems. Which formal systems are too complex for them? Consider **CL**. If, confronted with the simple question whether a certain formula is a **CL**-theorem, someone applies the best possible procedure, he or she may never obtain an answer (in case the answer is negative). If the answer to the question is positive, it may still, say at one operation per minute, eight hours of every working day, take 10 billion years to obtain the answer. That's too complex for us. So where is the border here? Why is **CL** simple enough while adaptive logics are too complex? What about second order logic? What about Peano Arithmetic? What about arithmetic (the standard model)? Remember that there is no positive test for "is true in the standard model". What about Analysis?

Many problems of such 'disciplines' are unsolvable while others are unsolvable by human standards. But what should we conclude from this? Do we have to stop doing mathematics because most of its theories are 'too complex'? Should we stop generating explanations, abductions, predictions, generalizations and scientific theories because there is no positive test for the underlying consequence relations? Or should we declare scientific methodology a matter of taste and luck, inapt for logical systematization? The answer to all these questions is negative. This raises a less trivial question: how should we proceed with consequence relations of such complexity?

First and foremost, we should study such consequence relations in a formally decent way. That's what adaptive logicians are trying to do. So let us return to adaptive logics. Consider an adaptive logic **AL** that explicates a given reasoning form, whether from scientific methodology or from an everyday situation. **AL** has a semantics and a proof theory. We may be mistaken here, but we do not believe that ordinary people or ordinary scientists reason semantically, that is about models. Try it on a bus driver and a chemist, and they will stare at you.²⁰ Our conjecture is that people make inferences, and intersperse them occasionally with metalevel considerations (*this* follows unless *that* would follow, but I don't believe *that* follows). Hence the attention adaptive logicians paid to dynamic proofs. As we said, we may be wrong, but we are open to learn about alternatives.

As we see it, (finite) adaptive proofs explicate quite well how people handle such consequence relations. They reason for a while, occasionally review a for-

¹⁹Incidentally, derivability at a stage, which corresponds to common sense reasoning without metalevel considerations, is not more complex than the derivability relation of the lower limit logic.

²⁰Also, were the presumably consistent set theories devised by thinking about the *models* of Frege's set theory?

merly drawn conclusion (but sometimes erroneously forget to do so), and get to a provisional conclusion. This corresponds to derivability at a stage, which may be supplemented with metalevel considerations. If these are not conclusive, there is a choice: act on present insights or continue the reasoning. The decision may largely depend on time and money (and boredom).

The partial insights offered by derivability at a stage may be very useful, even if they are not conclusive. Consider Frege's set theory. Insights in this inconsistent theory (and possibly in Cantor's inconsistent set theory) led to the contemporary theories (ZF, NF, type theories, and several others), which one hopes to be consistent. We tend to believe that those insights can be explicated by adaptive logics (a short study is forthcoming), but this should not be settled here. The insights were clearly partial (corresponding to a proof at a stage only). Indeed, the Curry paradox was only discovered after ZF, NF and other major contemporary set theories were formulated.

Do adaptive logics enable one to arrive at better justifications, viz. at final derivability? They do in some cases. First, there are the decidable cases: the propositional case (for finite premise sets) and other fragments of the predicative logics (provided the finitely many premises as well as the conclusion belong to the fragment). Even beyond those fragments establishing final derivability is possible. A proof-theoretic *procedure* was devised, first for propositional **CL** by [41], and next for propositional **CLuN^r** by [25]. Results on the predicative versions and on **CLuN^m** are forthcoming, as are the generalizations to all adaptive logics in standard format. Even for undecidable fragments, the procedure forms a criterion: for certain Γ and A , it leads after finitely many steps to a positive or negative answer to the question whether $\Gamma \vdash_{\text{AL}} A$.²¹ In order for the procedures to lead to a positive answer, A must be derived from Γ on a line l of a proof that is stable with respect to l . So, if all such proofs are only infinite, the procedures themselves are inconclusive. In some such cases one can recur to a metalevel reasoning about the procedures.

In general, however, there is no positive test for final derivability. The logician should try to delineate the decidable cases as sharply as possible and warn that, in a specific case, a final judgement about final derivability is beyond reach. If this is the case in real life applications, the logician and layman alike are thrown back to deciding in uncertainty. That's life.

Even the most classical realm is not much better off. If mathematical theories are inconsistent, the literal understanding of most mathematical work, viz. in terms of **CL**, is pointless. No absolute warrant for the consistency of even Peano

²¹So a proof obtained by the procedure does not require a further *specific* metalevel reasoning to establish final derivability, whence it is useful to apply the procedure even in decidable cases.

arithmetic is available. So here too one has to rely on a provisional judgement and, unlike what is the case for adaptive logics, the whole theory would break down if the judgement turned out to be mistaken. And yet one should not fear provisional judgements. They led to the contemporary sciences.²²

²²Unpublished papers in the reference section are available from the internet address <http://logica.Ugent.be/centrum/writings/>.

Artikel ‘Adaptive Logics using the Minimal Abnormality strategy are Π_1^1 -complex’

Author

Peter Verdée

Abstract

In this paper complexity results for adaptive logics using the Minimal Abnormality strategy are presented. It is proven here that the consequence set of some recursive premise sets is Π_1^1 -complete. So, the complexity results in [66] are mistaken for adaptive logics using the Minimal Abnormality strategy.

Journal

In print in Synthese.

E.1 Introduction

In their [66] Horsten and Welch prove that the CLuN^r -consequence set of a recursive premise set is maximally Σ_3^0 -complete.¹ They present a concrete recursive premise set with a Σ_3^0 -complete consequence set. These results are very useful, especially because they are easily generalizable to all adaptive logics in standard format. However, Horsten and Welch's results for CLuN^m are mistaken. A simple analysis of the definition leads them to decide that Π_1^1 is an upper bound to the complexity. In the following lemmas they reduce this upper bound to Σ_3^0 , concluding that the same complexity results hold for both related logics. The proof for this reduction is very hard to follow; their proposition 13 is dubious and some definitions are sloppy.

In this paper I will show that the reduction is indeed mistaken. I will construct a premise set with a Π_1^1 -complete consequence set. This makes Π_1^1 the lowest upper bound for the complexity of CLuN^m . I will also argue that Horsten and Welch are mistaken in viewing the logic's complexity as an objection. The logic is able to express certain problems that can't possibly be expressed by less complex logics.

I will proceed by showing that the CLuN^m -consequence set of a particular infinite but recursive premise set Γ_R is (at least) as complex as a set that is the solution of a graph theoretic problem that is known to be Π_1^1 -hard. The graph problem is whether some statement holds for all paths in a recursive but infinite graph. There may be uncountably many paths in such a graph. In the adaptive logic problem, every path will correspond to a set of minimally abnormal models of the premise set. The property that has to hold for all paths in the graph will correspond to a property that has to hold for all models that are a member of the sets of minimally abnormal models corresponding to these paths. Hence, every such set of models has to be checked in order to know which conclusions can be drawn from the premise set. So, to express the consequence set, one needs a statement that is universally quantified over an uncountable amount of objects, which is to say that it is at least Π_1^1 -complete.

First the graph problem is presented. Next, adaptive logics are semantically and proof theoretically defined. In section 4 the actual proof of the crucial theorem is given. Section 5 discusses the possibility to define, in a first order language, a finite premise set with similar properties. Finally, some philosophical

¹For an introduction to these complexity classes, see [100]. A set of natural numbers is Π_1^1 -complete if it can be represented in second order arithmetic by a formula of the form $\forall \pi A(\pi)$, where $A(\pi)$ is a first order arithmetical formula, and it cannot be represented in first order arithmetic. A yes/no-problem is Π_1^1 -hard if it is equivalent to the question whether a natural number is in some Π_1^1 -complete set.

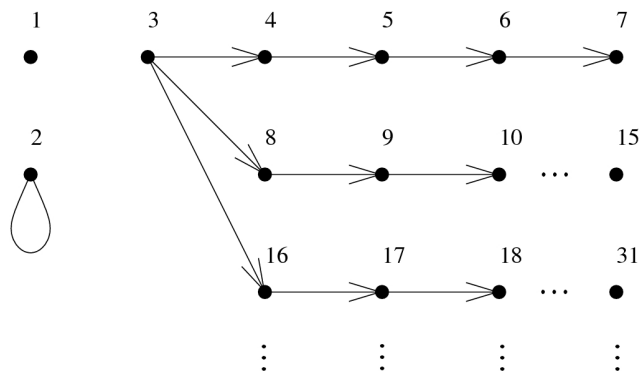


Figure E.1: The example graph (\mathbb{N}, R_1)

conclusions are formulated.

E.2 A Π_1^1 -complete problem expressed in graph theory

I will represent a typical Π_1^1 -problem in adaptive logic by means of a recursive premise set. The problem concerns recursive directed graphs defined over the natural numbers. Π_1^1 -complete sets are by definition only definable with a statement that universally quantifies over a set of objects of the same cardinality as the set of all reals. The set of all paths in a directed graph may indeed have this cardinality. Consider for example the fully edged and hence trivially recursive graph (every node is connected to every other node in both directions). The set of all paths of this graph has a cardinality equal to the cardinality of the set of all reals because there is a bijection between the set of all (finite and infinite) lists of natural numbers and the set of paths in this graph.

Evidently, universal quantification over the possibly uncountable paths of the graph is necessary to express some properties of the graph. An easy example of such a property, is the statement that in some specific node of the graph only finite paths start. In this case, in order to check whether the property holds for a specific graph and a specific node, one has to go through all the paths that start in this node and check whether they end somewhere.

Let us start with an example graph (see also figure E.1). (i, j) are the begin and end node of an edge iff $(i, j) = (2, 2)$ or $(j = i + 1, i > 3, \text{ and } j \neq 2^k \text{ for some } k)$

$k \in \mathbb{N}$) or ($i = 3$ and $j = 2^k$ for some $k > 1$). Only in node 2 infinite paths start (the path with nodes $2, 2, 2, \dots$). In node 1 only the path with only node 1 starts. The paths that start in node 3 are arbitrarily long but finite (the paths with nodes $3, 2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1$, where $k \geq 2$, and all their subpaths). Hence, in all nodes except node 2 only finite paths start.

I now formalize the notions graph and path and the particular Π_1^1 -complete set. Let \mathbb{N} denote the natural numbers without 0 and let $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Let $\mathcal{P}(X)$ denote the power set of X . Consider all recursive directed graphs $G = (\mathbb{N}, R)$ with nodes \mathbb{N} and edges $R \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ — the graphs only differ in R .

The paths of the graph defined by a relation R are represented by infinite lists of natural numbers, the elements of the set $\mathcal{P}(R)$ (e.g. the path with nodes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ is represented by the infinite list $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 0, 0, \dots \rangle$). For every graph relation R , the function $P: \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0)$ gives the set of infinite lists (of natural numbers) that describe the paths of the graph (defined by R). It is formally defined as follows:

Definition 54 $\pi \in \mathcal{P}(R)$ iff (there is some $m \in \mathbb{N}_0$ such that for all $n \leq m$, $(\pi(n), \pi(n+1)) \in R$ and, for all $n > m$, $\pi(n) = 0$) or (for all $n \in \mathbb{N}$, $(\pi(n), \pi(n+1)) \in R$).

For every graph relation R and every natural number i , the function $Q: \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0)$ gives the set of infinite lists (of natural numbers) that describe the paths of the graph (defined by R) that start in node i . It is formally defined as follows:

Definition 55 $\pi \in Q(R, i)$ iff $\pi \in \mathcal{P}(R)$ and $\pi(1) = i$.

The function $WF: \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ maps the graph relation onto the set of nodes from which only finite paths start. It is formally defined as follows:

Definition 56 $n \in WF(R)$ iff, for all $\pi \in Q(R, n)$, there is a $m \in \mathbb{N}$, such that $\pi(m) = 0$.

I shall use $\langle i_1, i_2, i_3, \dots \rangle$ as a shorthand for the path described by list π with $\pi(1) = i_1$, $\pi(2) = i_2$, $\pi(3) = i_3$, etc. The path described by π is infinite iff, for all $i \in \mathbb{N}$, $\pi(i) \neq 0$. The function $lth(\pi)$ denotes the length of a path described by π ($lth(\pi) = \omega$ iff π describes an infinite path and $lth(\pi) = \max\{i \mid i \in \mathbb{N}; \pi(i) \neq 0\}$ otherwise) and $lst(\pi)$ denotes the last item of a path π ($lst(\pi) = \pi(lth(\pi))$), which is obviously undefined for infinite paths.

It is a well known fact that the set $WF(R)$ is Π_1^1 -complete for some recursive sets R (see [70] (p. 6) and [100]).

Let us return to the example graph defined by the relation R_1 from figure E.1. In node 2 the paths described by $\langle 2, 0, 0 \dots \rangle$, $\langle 2, 2, 0, 0 \dots \rangle$, \dots , and $\langle 2, 2, 2, \dots \rangle$ start, in node 1 only the path described by $\langle 1, 0, 0, \dots \rangle$ starts, and the paths that start in node 3 are described by the lists $\langle 3, 2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1, 0, 0, \dots \rangle$, where $k \geq 2$, and the lists that describe subpaths of these paths. $WF(R_1) = \mathbb{N} - \{2\}$.

E.3 Adaptive logics

E.3.1 The standard format of AL

In this section adaptive logics are very briefly presented (I refer to [29] for an overview and [23] for the philosophical basis). An adaptive logic in standard format is defined as a triple consisting of:

- a lower limit logic **LLL**: a monotonic, reflexive, transitive and compact extension of classical logic (**CL**) which has a characteristic semantics,
- a set of abnormalities: a set of **LLL**-contingent formulas Ω , characterized by a (possibly restricted) logical form, and
- a strategy (the most important strategies in **AL** are ‘Reliability’ and ‘Minimal Abnormality’).

The standard format demands that the **LLL**-language, next to its own standard logical symbols, also encompasses formulas with the standard logical symbols of **CL**. In this paper, I will denote the required **CL**-symbols by means of \neg (negation) and $\check{\vee}$ (disjunction). These symbols behave classically, i.e. function in a **CL**-standard manner (e.g. $M \models \neg A$ iff $M \not\models A$).

E.3.2 The proof theory of AL

The proof theory of an **AL** consists of a set of inference rules (determined by the **LLL** and Ω) and a marking definition (determined by Ω and the chosen strategy). A line of an annotated **AL**-proof consists of four elements: (1) a line number i , (2) a formula A , (3) the name of a rule and the line numbers of the rule premises, (4) a condition consisting of a set of abnormalities $\Theta \subset \Omega$. A stage s of a proof is a list of lines. A proof is defined as a chain of stages, such that, for every two subsequent stages, the second is an extension of the first. The inference rules govern the addition of lines. There are 3 types of rules. The classical disjunction of the members of a finite $\Delta \subset \Omega$, $Dab(\Delta)$, is called a *Dab-formula*.

PREM	If $A \in \Gamma$	$\frac{\dots \quad \dots}{A \quad \emptyset}$
RU	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B$	$\frac{\begin{array}{c} A_1 \quad \Delta_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n}$
RC	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B \check{\vee} Dab(\Theta)$	$\frac{\begin{array}{c} A_1 \quad \Delta_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Delta_n \end{array}}{B \quad \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n \cup \Theta}$

$Dab(\Delta)$ is a *minimal Dab-formula* of stage s iff $Dab(\Delta)$ is derived at stage s on the condition \emptyset and no $Dab(\Delta')$ with $\Delta' \subset \Delta$ is derived on the condition \emptyset . The most important strategies are Reliability and Minimal Abnormality.

Definition 57 *Marking definition for Reliability.*

Where $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ are the minimal *Dab-formulas* derived on the condition \emptyset at stage s , $U_s(\Gamma) = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$, and Δ is the condition of line i , line i is marked at stage s iff $\Delta \cap U_s(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definition 58 *Marking definition for Minimal Abnormality.*

Where $Dab(\Delta_1), \dots, Dab(\Delta_n)$ are the minimal *Dab-formulas* derived on the condition \emptyset at stage s , $\Phi_s^\circ(\Gamma)$ is the set of all sets that contain one member of each Δ_i , $\Phi_s(\Gamma)$ are the $\varphi \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$ that are not proper supersets of a $\varphi' \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$, A is the formula and Δ is the condition of line i , line i is marked at stage s iff

- (i) there is no $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ such that $\varphi \cap \Delta = \emptyset$, or
- (ii) for some $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is no line on which A is derived on a condition Θ for which $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.

Two types of derivability are defined. A formula A is *derived at a stage* iff A is derived on an unmarked line at the stage. A formula A is *finally derived* at stage s iff A is derived on an unmarked line i at stage s and line i will not be marked in any extension of the stage. The finally derivable consequences of a premise set are independent of the stage and constitute the consequence sets for \mathbf{AL}^r and \mathbf{AL}^m : $Cn_{\mathbf{AL}^r}(\Gamma)$, respectively $Cn_{\mathbf{AL}^m}(\Gamma)$, and their consequence relations: $\vdash_{\mathbf{AL}^r}$, respectively $\vdash_{\mathbf{AL}^m}$.

E.3.3 The semantics of AL

$Dab(\Delta)$ is a *minimal Dab-consequence* of Γ iff $\Gamma \vDash_{\text{LLL}} Dab(\Delta)$ and, for all $\Delta' \subset \Delta$, $\Gamma \not\vDash_{\text{LLL}} Dab(\Delta')$. Where $Dab(\Delta_1), Dab(\Delta_2), \dots$ are the minimal *Dab-consequences* of Γ , let $U(\Gamma) =_{df} \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots$. Finally, where M is a **LLL**-model, $Ab(M) =_{df} \{A \in \Omega \mid M \vDash_{\text{LLL}} A\}$.

Definition 59 *Reliable model and the corresponding semantical consequence relation \vDash_{AL^r} .*

A **LLL**-model M of Γ is *reliable* iff $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$. $\Gamma \vDash_{\text{AL}^r} A$ iff all reliable **LLL**-models of Γ verify A .

Definition 60 *Minimally abnormal model and the corresponding semantical consequence relation \vDash_{AL^m} .*

A **LLL**-model M of Γ is *minimally abnormal* iff there is no **LLL**-model M' of Γ for which $Ab(M') \subset Ab(M)$. $\Gamma \vDash_{\text{AL}^m} A$ iff all minimally abnormal models of Γ verify A .

E.3.4 CLuN^m and CLuN^r

Let us consider the inconsistency-adaptive logics **CLuN^m** and **CLuN^r**. The lower limit logic is the paraconsistent logic **CLuN**. **CLuN** is the full positive fragment of **CL** extended with $A \vee \neg A$ for the negation connective. For any formula A , both A and $\neg A$ may be true in **CLuN**.² The set of abnormalities is $\Omega = \{\exists(A \wedge \sim A) \mid A \in \mathcal{F}\}$, with \mathcal{F} the set of open or closed formulas and \exists the existential closure. The strategies are respectively Minimal Abnormality and Reliability. The resulting adaptive logics are respectively **CLuN^m** and **CLuN^r**. Where the name of the logic is not mentioned, **CLuN** is meant. For example, the expression “models of Γ ” will refer to the **CLuN**-models of Γ .

E.4 Expressing the graph problem in propositional CLuN^m

Let $!A$ abbreviate $A \wedge \neg A$ and let R be a recursive relation in $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. The premise set Γ_R is defined as follows:

²So, in **CLuN** \neg is semantically defined by: if $v(\neg A) = 0$, then $v(A) = 1$ –and not vice versa– for every formula A . The other symbols behave perfectly classically (e.g. $v(A \vee B) = 1$ iff $v(A) = 1$ or $v(B) = 1$). In the semantical proof of my crucial theorem, I will also use the classical negation \sim , defined by: $v(\sim A) = 1$ iff $v(A) = 0$.

$$\begin{aligned}\Gamma_R &= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5 \\ \Delta_1 &= \{!p_i^n \vee !p_j^n \mid i, j, n \in \mathbb{N}; i \neq j\} \\ \Delta_2 &= \{!p_i^n \vee !p_j^{n+1} \mid i, j, n \in \mathbb{N}; (i, j) \notin R\} \\ \Delta_3 &= \{!r_n \vee !p_i^n \mid i, n \in \mathbb{N}\} \\ \Delta_4 &= \{u_i \vee !r_n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \Delta_5 &= \{u_i \vee !p_j^1 \mid i, j \in \mathbb{N}; i \neq j\}\end{aligned}$$

I shall translate paths into sets of formulas of the forms $!p_n^m$ and $\neg!p_n^m$. The set of **CLuN**-models for Γ_R that make all these formulas true will correspond to a path in the graph defined by the graph relation R .

Definition 61 Let $SerNor(I, g)$, where I is an interval and g is a function in $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, be a set of formulas $\{\neg!p_{g(n)}^n \mid n \in I\} \cup \{!p_l^n \mid l \in \mathbb{N}; (n \in I \text{ and } l \neq g(n)) \text{ or } n = \max(I) + 1\}$.³ I will sometimes refer to $SerNor(I, g)$ as the series of normalities for interval I and function g .

Let me start by outlining the general idea behind the proof. I will prove that each minimally abnormal model for Γ_R corresponds to a unique path of the graph defined by R and that each path corresponds to a unique set of minimally abnormal models. A path described by the list $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots \rangle$ corresponds to the set of minimally abnormal models that falsify all the abnormalities in $\{!p_{a_1}^1, !p_{a_2}^2, \dots, !p_{a_n}^n\}$. In these minimally abnormal models all members of the set $\{!r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ will come out true if and only if the model corresponds to an infinite path. The sentential letter u_i is **CLuN^m**-derivable from Γ_R if and only if in each minimally abnormal model of Γ_R at least one member of the set $\{!r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is false or an abnormality $!p_j^1$, where $j \neq i$, is true. So, u_i is verified by a minimally abnormal model M for Γ_R iff the path of the graph that corresponds to M either starts in a node $j \neq i$ or is finite. Hence, u_i is a **CLuN^m**-consequence of Γ_R iff only finite paths start in node i of the graph defined by R .

The function $Mp: \mathcal{P}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M})$, expressing the set of **CLuN**-models of a set of formulas that verify the same series of normalities with an interval that is empty or that contains the number 1, is defined by:

³The interval I may also be empty. In this case $\max(I)$ is taken to be 0. If the interval is infinite, $\max(I)$ is not defined and the “or $n = \max(I) + 1$ ”-part of the definition should be dropped.

$k \setminus l$	1	n	n'	$n' + 1$	$n' + 2$
	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
$i - 1$	1	\dots	1	\dots	1
i	1		0	1	1
$i + 1$	1	1	1	1	1
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$i' - 1$	1	1	1	1	1
i'	0	\dots	1	\dots	1
$i' + 1$	1	1	1	1	1
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$i'' - 1$	1	1	1	1	1
i''	1	1	0	1	1
$i'' + 1$	1	\dots	1	\dots	1
	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots

Table E.1: A (part of a) CLuN-model for Γ_R , where the graph $G = (\mathbb{N}, R)$ has a path described by the list π , with $\pi(1) = i'$, $\pi(n) = i$, $\pi(n') = i''$, and $lth(\pi) = n'$. The truth values for the $!p_k^l$ are given in the table. Remark that lemma 26 holds for this model.

Definition 62 $\Upsilon \in Mp(\Gamma_R)$ iff, for some interval $I \subseteq \mathbb{N}$ and some function $g: I \rightarrow \mathbb{N}$, where $1 \in I$ or $I = \emptyset$, $\Upsilon = \{M \mid M \models_{\text{CLuN}} \Gamma_R \cup \text{SerNor}(I, g)\}$.

Lemma 26 $M \models_{\text{CLuN}} \Delta_1$ iff, for every $n \in \mathbb{N}$, M verifies at least all but one of the members of $\{!p_k^n \mid k \in \mathbb{N}\}$.

In the next 3 lemmas I will show that there is a bijection between the set of sets of CLuN-models for $\Delta_1 \cup \Delta_2$ that verify the same series of normalities and the set of all paths π of the graph.

Lemma 27 For every CLuN-model M for $\Delta_1 \cup \Delta_2$ there is some $\pi \in P(R)$, such that $M \models \text{SerNor}([1, \text{lt}(\pi)], \pi)$.⁴

Proof. Suppose there is a CLuN-model M for $\Delta_1 \cup \Delta_2$ that does not verify $\text{SerNor}(I', g)$ for any function g and any interval $I' = \emptyset$, $I' = [1, k]$, or $I' = [1, \omega[$. This is impossible because of lemma 26. Now suppose that there is a model M for $\Delta_1 \cup \Delta_2$ that verifies $\text{SerNor}(I, f)$ for some function f and some interval I , but $\pi \notin P(R)$ and π is defined from f by the following: $\pi(j) = f(j)$ for all $j \in I$ and $\pi(j) = 0$ for all $j \notin I$. This would mean that for some $j \in \mathbb{N}$, $M \models \neg !p_k^j$ and $M \models \neg !p_l^{j+1}$ whereas $(k, l) \notin R$. This contradicts $M \models !p_k^j \vee !p_l^{j+1}$ ($M \models \Delta_2$). ■

Lemma 28 For every $\pi \in P(R)$ there is a CLuN-model for $\Delta_1 \cup \Delta_2$, such that $M \models \text{SerNor}([1, \text{lt}(\pi)], \pi)$.

Proof. Let π be a path in $P(R)$. If π is a finite path, let M_π be a CLuN-model that verifies $\text{SerNor}([1, \text{lt}(\pi)], \pi) \cup \{!p_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}; k > \text{lt}(\pi)\}$. If π is an infinite path, let M_π be a model that verifies $\text{SerNor}([1, \omega[, \pi)$. The constructed model M_π is a model for Δ_1 because of the fact that for any $n \in \mathbb{N}$, it verifies at least all but one of the members of the set $\{!p_k^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ and because of lemma 26. It is a model for Δ_2 as well since from the construction of M_π it follows that for no $j \in \mathbb{N}$, $M_\pi \models \neg !p_k^j$ and $M_\pi \models \neg !p_l^{j+1}$ with $(k, l) \notin R$. Therefore none of the members of Δ_2 will be falsified by M_π . So M_π is a model for $\Delta_1 \cup \Delta_2$. ■

Lemma 29 The function $f: P(R) \rightarrow Mp(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, where $f(\pi) = \{M \mid M \models \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \text{SerNor}([1, \text{lt}(\pi)], \pi)\}$, and its inverse are both total functions. In other words, f defines a bijection between $P(R)$ and $Mp(\Delta_1 \cup \Delta_2)$.

Proof. This is a consequence of lemmas 27 and 28 and the definition of the functions f and SerNor . ■

⁴Where $a = \omega$, the interval notation $[1, a]$ refers to $[1, \omega[$ and where $a = 0$, let $[1, a]$ be the empty interval.

Lemma 30 “For all CLuN-models M of $\Delta_1 \cup \Delta_2$ there is an $n \in \mathbb{N}$, such that for all $k \in \mathbb{N}$, $M \models !p_k^n$ ” (1) iff “for all minimally abnormal CLuN-models M of $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, there is an $n \in \mathbb{N}$ such that $M \not\models !r_n$ ” (2).

Proof. I will first prove the left to right direction of the lemma and then the right to left direction.

(\Rightarrow) Suppose (1) is true, but (2) is not. If (2) is false then there is a minimally abnormal model M for $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, such that for all $n \in \mathbb{N}$, $M \models !r_n$. Because M is minimally abnormal, there is no $m \in \mathbb{N}$, such that there is a CLuN-model M' for $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ that verifies the same abnormalities as M in $\{!p_k^l | k, l \in \mathbb{N}\} \cup \{!r_k | k \in \mathbb{N} - \{m\}\}$ but $M' \not\models !r_m$. But there is such a natural number m . (1) warrants that for every model for $\Delta_1 \cup \Delta_2$, and hence also every model for $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, there is an $n \in \mathbb{N}$, such that for all $k \in \mathbb{N}$, $M \models !p_k^n$. Let n be the m we are looking for. Therefore, the only relevant premises $\{!p_k^m \vee !r_m | k \in \mathbb{N}\}$, can be made true without $!r_m$ having to be true. Since $!r_m$ does not occur in any other formula in $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, changing only the truth value for $!r_m$ in M , results in a model M' for $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$. We have derived a contradiction.

(\Leftarrow) Suppose (2) is true, but (1) is not. If (1) is false then there is a CLuN-model M' for $\Delta_1 \cup \Delta_2$, such that for all $n \in \mathbb{N}$, there is a $k \in \mathbb{N}$, $M' \models \neg !p_k^n$. Let M be the model that is exactly as M' , but with $M \models !r_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Hence, M is also a CLuN-model for $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ (the fact that $M \models !r_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ makes all the members of Δ_3 true). If (2) is true, then M is not minimally abnormal. Hence there is a model that makes a proper subset of the abnormalities verified by M true. This model verifies only a proper subset of the members of $\{!p_k^l | k, l \in \mathbb{N}\}$ that are verified by M or it falsifies at least one of the members of $\{!r_n | n \in \mathbb{N}\}$. The first is impossible because this would mean that for some n , more than one abnormality is falsified (cf. lemma 26). The second part is impossible because, knowing that for every $n \in \mathbb{N}$ one $!p_{g(n)}^n$ is false in M , if $!r_m$ would be false in M for some $m \in \mathbb{N}$, then $!p_{g(m)}^m \vee !r_m \in \Delta_3$ would not be verified by M .

■

Let a model $M \in \mathcal{M}_\Gamma$ iff $M \models_{\text{CLuN}} \Gamma$ and $M \in \mathcal{M}_\Gamma^m$ iff $M \in \mathcal{M}_\Gamma$ and M is minimally abnormal.

Lemma 31 If C and D are different sentential letters, C does not occur in $\Gamma \cup \{A, B\}$, and D does not occur in A , then:

- (a) (If $M \in \mathcal{M}_\Gamma^m$ then $M \not\models A$ or $M \not\models B$) iff
 $\Gamma \cup \{A \vee C, B \vee C\} \models_{\text{CLuN}^m} C$

(b) $\Gamma \cup \{A \vee C\} \vDash_{\text{CLuN}^m} D$ iff $\Gamma \vDash_{\text{CLuN}^m} D$

Corollary 2 $i \in WF(R)$ iff $\Gamma_R \vDash_{\text{CLuN}^m} u_i$.

Proof.

$$i \in WF(R)$$

iff

for all $\pi \in Q(R, i)$, there is a $j \in \mathbb{N}$ such that $\pi(j) = 0$

iff (in view of lemma 29)

for all $\Upsilon \in Mp(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, if $(f^{-1}(\Upsilon))(1) = i$,
then there is a $j \in \mathbb{N}$ such that $(f^{-1}(\Upsilon))(j) = 0$

iff (in view of the definition of f in lemma 29)

for all $M \in \mathcal{M}_{\Delta_1 \cup \Delta_2}$, if $(M \not\models! p_i^1$ and for all $k \neq i, M \vDash! p_k^1)$,
then there is a $j \in \mathbb{N}$ such that for all $n, M \vDash! p_n^j$

iff (with lemma 30)

for all $M \in \mathcal{M}_{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3}^m$, if $(M \not\models! p_i^1$ and for all $k \neq i, M \vDash! p_k^1)$,
then there is a $n \in \mathbb{N}$, such that $M \not\models! r_n$

iff (in view of lemma 26)

for all $M \in \mathcal{M}_{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3}^m$,
there is a $n \in \mathbb{N}$ and a $j \neq i$, such that $M \not\models! r_n$ or $M \not\models! p_j^1$

iff (in view of lemma 31)

for all $M \in \mathcal{M}_{\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5}^m: M \vDash u_i$

iff (in view of the definition of semantic consequence for CLuN^m)

$$\Gamma_R \vDash_{\text{CLuN}^m} u_i$$

■

Theorem 27 *The propositional CLuN^m -consequence sets of some infinite but recursive sets of propositional formulas are Π_1^1 -complete.*

E.5 Expressing the graph problem in predicative CLuN^m

In a predicative language, a finite premise set is sufficient to express the problem. Let Q be the weak system for first order arithmetic defined in [46] and $T_R(x, y)$ a formula that represents the recursive relation R (which defines the edges of the aforementioned graphs) in Q (there is such a formula in view of theorem 16.16a in [46]). The language has binary predicates P , S and U , variables x , y and z , a constant 0 , and a successor function $'$. It is provable in a way very similar to the proof in the previous section that (if Q is consistent) the problem $\Gamma'_R \vdash_{\text{CLuN}^m} Ux$, where x is some natural number, is Π_1^1 -hard, for some recursive graph relation R .

$$\begin{aligned}\Gamma'_R &= Q \cup \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\} \\ D_1 &= \forall x \forall y \forall z (x = y \vee !Pxz \vee !Pyz) \\ D_2 &= \forall x \forall y \forall z (T_R(x, y) \vee !Pxz \vee !Pyz') \\ D_3 &= \forall x \forall y (!Sy \vee !Pxy) \\ D_4 &= \forall x \forall y (Ux \vee !Sy) \\ D_5 &= \forall x \forall y (x = y \vee (Ux \vee !Py0'))\end{aligned}$$

E.6 Conclusion and philosophical comments

I have proved that the set $WF(R)$ of nodes in which only finite paths start is reducible to the CLuN^m -consequence set of a propositional infinite but recursive premise set as well as to the CLuN^m -consequence set of a finite set of predicative formulas. So, Horsten and Welch's 'proof' that propositional CLuN^m with infinite premise sets is maximally Σ_3^0 -complex is mistaken.

The results in this paper can immediately be generalized to all adaptive logics that have an object language in which classical disjunction is present or definable and in which the logic's abnormalities can be expressed.

Adaptive logics that use the Minimal Abnormality strategy turn out to be even more complex than Horsten and Welch thought. Although they would probably see this result as an even bigger problem for adaptive logics, I insist that a very complex consequence set is not problematic for this type of logics. In [35] Horsten and Welch's negative reflections on their complexity results are criticized. However, there is more. The great complexity of the set of finally

derivable consequences can be seen as a positive property, as long as constructing and checking the correctness of the proofs themselves is not complex—see below.

The type of logics under consideration are not candidates for the standard of deduction, but determine the formally correct reasoning steps within a certain problem solving context. Given that perspective, a logic can cope with a problem if there exists a function that translates the relation between problem and solution into the logic's actual stable consequence relation between the premises, which correspond to the problem, and a specific conclusion, which corresponds to the solution. If the complexity of such a logic is defined as the maximal complexity of its stable consequence set (as Horsten and Welch do), it is clear that a less complex logic must fail to handle some complex problems.

I have showed that interpreting inconsistent premises as minimally inconsistent as possible (and in general: as minimally abnormal as possible) is a very complex (Π_1^1 -hard) problem. This is not the place to argue for the intuitive adequacy of the semantical notion behind adaptive logics that use the minimal abnormality strategy. Adaptive logicians have often argued that it is a very sensible notion in a wide spectrum of contexts (coping with inconsistent information, induction, abduction, resolving ambiguity, etc.). Adaptive logics have relatively simple proofs with finitary rules⁵, and these proofs form a good explication of the human reasoning processes behind the formalized notions. The complexity of the semantic consequence relation (and thus also of final derivability) makes it hard for the designer of a logic to design a proof theory with proofs that form nice explications of human reasoning. Still, adaptive logicians have definitely succeeded in doing so.

It is neither difficult nor interesting to devise terribly complex consequence relations. Of course it is better to avoid complexity as much as possible. But, once one has found out that some complex consequence relation is useful to formalize and understand concepts used in human reasoning, it is important to develop proofs that explicate how the actual user of the concepts (e.g. the scientist that applies abduction) copes with this complex notion and how he gains insights in the problem he tries to solve. Therefore, these proofs should not be hard to construct or to verify. In adaptive logics these proofs are constructed and verified using the definition of derivability at a stage, which is essentially not more complex than the monotonic lower limit logic. Final derivability defines the stable goal of the reasoning, even if this goal is not reachable in finite time. One does not need to reach this goal or to know whether this goal is reached in order to obtain the next line in the proof or to check whether a concrete proof is

⁵A rule is finitary iff it has a finite set of local premises.

correct.

Apparently, dynamic⁶ proofs enable reasoning towards the solutions of far more complex problems than usual logics. It is remarkable that logics with a first order language and with finitary rules define a consequence set that may be Π_1^1 -complete. Such a consequence relation is not even representable in first order arithmetic.

I have explained that the complexity of the stable derivability notion cannot be used as an argument against adaptive logics. Furthermore, it is proven that exactly its Π_1^1 -complexity allows the adaptive logic to express problems that are, if one uses classical logic, only expressible in second order languages. Yes, adaptive logics are complex, they are even more complex than Horsten and Welch think, but it is not hard to see that this is an advantage rather than a disadvantage.

⁶For a nice introduction to the distinction between dynamic and static proofs, see [32].

Artikel ‘A Generic Framework for Adaptive Vague Logics’

Authors

Peter Verdée en Stephan van der Waart van Gulik

Abstract

In this paper, we present a generic format for adaptive vague logics. Logics based on this format are able to (1) identify sentences as vague or non-vague in light of a given set of premises, and to (2) dynamically adjust the possible set of inferences in accordance with these identifications, i.e. sentences that are identified as vague allow only for the application of vague inference rules and sentences that are identified as non-vague also allow the application of some extra set of classical logic rules. The generic format consists of a set of minimal criteria that must be satisfied by the vague logic in casu in order to be usable as a basis for an adaptive vague logic. The criteria focus on the way the logic deals with a special \square -operator. Depending on the kind of logic for vagueness that is used as a basis for the adaptive vague logic, this operator can be interpreted as *completely true*, *definitely true*, *clearly true*, etc. It is proven that a wide range of famous logics for vagueness satisfies these criteria when extended with a specific \square -operator, e.g. fuzzy basic logic and its well known extensions, cf. [59], super-

and subvaluationist logics, cf. [58], [67], and clarity logic, cf. [119]. Also a fuzzy logic is presented that can be used for an adaptive vague logic that can deal with higher-order vagueness. To illustrate the theory, some toy-examples of adaptive vague proofs are provided.

Journal

Accepted for publication in *Studia Logica* after minor revisions.

F.1 Introduction

There are many contexts in which it is not clear whether the meaning of the words we need to interpret is vague or not. Note that we use the term *vague* in a generic manner, i.e. independent of the specific philosophical stance on how to formalize vagueness. As an example of such a context, imagine a conversation in which an interpreter encounters the phrase ‘*Thomas is an adult*’. The interpreter can interpret *adult* as being well-defined and thus non-vague, e.g. ‘*Thomas is at least x years old*’, where x is the age at which a person legally becomes an adult. However, it is also possible to interpret *adult* in a vague way, e.g. ‘*Thomas is an adult*’ meaning ‘*Thomas is an adult with respect to his psychology and everyday behavior*’. This interpretation may well be true up to some non-absolute degree.

We argue that it is rational for an interpreter in this context to use classical logic (CL) by default as it captures a large set of intuitive derivation rules, i.e. it characterizes a relatively strong consequence relation. Yet, whenever this default leads the interpreter into trouble, e.g. inconsistencies, the most rational thing to do for the interpreter is to retract all earlier derivations that are based upon this default and to use a more suitable logic for vagueness with respect to the sentences that have generated the problems.

In this paper we introduce a generic format for *adaptive vague logic* (AVL). The concrete adaptive vague logics based on this format can (1) identify sentences as vague or non-vague in light of the premises, and (2) dynamically adjust the possible set of inferences accordingly, i.e. sentences identified as non-vague allow CL-rule applications and sentences identified as vague (only) allow applications of derivation rules from a suitable *vague logic*. We deliberately opt for an abstract, pluralistic approach with respect to the type of vague logic that may be used as the basis for a concrete AVL.¹ We thereby allow the reader to choose

¹We also use the term *vague logic* in a generic way. It refers to those logics that can deal with vagueness.

the specific vague logic that fits his or her philosophical motivations. The generic format consists of a set of minimal criteria that must be satisfied by the vague logic of choice. If this vague logic satisfies these criteria, it can be used as a basis for **AVL**. The criteria mainly focus on the way in which the vague logic should deal with a special operator denoted by \Box which, depending on the type of vague logic that is used, is given the meaning *completely true*, *definitely true*, *clearly true*, etc. When we do not want to specify the meaning of \Box , we interpret the operator as *absolutely true*. We prove that a wide range of famous logics for vagueness satisfies these criteria. To illustrate this generic theory, we provide some concrete toy-examples of adaptive vague proofs and their dynamics.

The paper is structured as follows. In section F.2, we introduce adaptive logic (**AL**). Section F.3 deals with the minimal criteria a vague logic needs to have in order to be used as a basis for an adaptive vague logic. We first prove that a large class of fuzzy logics based on the so-called *fuzzy basic logic* extended with Baaz's delta operator (developed by Petr Hájek in [59]) satisfies the set of criteria. Next, we prove the same result for logics based on fuzzy basic logic extended with Baaz's delta-operator and an acceptability threshold lower than 1. Then, we show that also other vague logics like those based on *super- and subvaluationism* as well as *clarity logic* satisfy the vital criteria. Finally, we present a fuzzy logic for *higher order vagueness* and show that this logic also satisfies the set of criteria. In section F.4, we present the generic **AVL**, prove that its so-called *upper limit logic* is **CL**, and discuss how it can be transformed into a first-order system. Finally, in section F.5, we present two toy-examples in order to illustrate the dynamic proof theory of **AVL**.

F.2 Adaptive logics

F.2.1 The standard format of AL

AL oscillates between two logics, respectively called the *lower limit logic* (**LLL**) and the *upper limit logic* (**ULL**), cf., for instance, [30, 14].² **ULL** extends **LLL** by validating an extra set of rules. Formally, **ULL** is defined as the logic that is exactly like **LLL** but invalidates a specific type of **LLL**-contingent formulas. The formulas belonging to this type are called *abnormalities* and are used to determine an extra set of rules that become valid when moving from **LLL** to **ULL**. Given a set of premises, **AL** dynamically extends the **LLL** as much as possible by validating *some specific applications* of the set of rules exclusively valid in

²Note that the abbreviations **AL**, **LLL**, **ULL**, etc. are in fact variables for concrete logics.

the **ULL**. More specifically, **AL** interprets abnormalities as false, thereby allowing applications of the **ULL**-exclusive rules until and unless these conditions for valid application are violated, i.e. when the abnormalities turn out to be true. In order to determine how to deal with conditional derivations in light of a set of derived disjunctions of abnormalities different strategies can be used.

A standard format has been developed in [29] that defines a general proof theory and semantics for **AL**. In [29], it is also proven that every **AL** that is definable within the constraints of the standard format immediately has a large set of important meta-theoretical properties (among which soundness and completeness). For this reason, we will mainly focus on the plurality of possible vague logics that can serve as **LLL** and the **ULL** this generates. The characteristics of the resulting **AVL**'s are immediately known as we proceed within the constraints of the standard format. The format consists of 3 elements.

Definition 63 *AL in standard format is a triple consisting of the following elements.*

1. **LLL**: a monotonic, reflexive, transitive and compact extension of classical logic (**CL**) that has a characteristic semantics (with no trivial models).
2. A set of abnormalities: a set of **LLL**-contingent formulas Ω , characterized by a (possibly restricted) logical form.
3. A strategy: the strategy determines how to cope with conditionalized derivations given a set of derived disjunctions of abnormalities. The most important strategies in **AL** are Reliability and Minimal Abnormality.

Definition 64 *Upper limit logic*³

$$\Gamma \vdash_{\text{ULL}} A \text{ iff } \Gamma \cup \{\neg B \mid B \in \Omega\} \vdash_{\text{LLL}} A.$$

Note that the format in definition 63 demands that the **LLL**-language, next to its own standard logical symbols, also encompasses the standard logical symbols of **CL**.⁴ These must behave perfectly classical, i.e. they should function in a **CL**-standard manner (e.g. $M \models \neg A$ iff $M \not\models A$). In this paper, we will denote the **CL**-symbols by means of \neg (negation), \supset (implication), \wedge (conjunction), and \vee (disjunction). This addition is always possible without affecting the characteristic properties of the logic in casu, when the **CL**-symbols are to be used only at the outside of formulas, i.e. a **CL**-symbol cannot be a part of a subformula of a (sub)formula in which a standard logical symbol occurs at the highest level of complexity (see also subsection F.3.1, C2).

³The definition for $\Gamma \vdash_{\text{ULL}} A$ is evident.

⁴This is needed for the general completeness-proofs of **AL**, cf. [29].

F.2.2 The proof theory of AL

The proof theory of **AL** consists of a set of inference rules (determined by **LLL** and Ω) and a marking definition (determined by Ω and the chosen strategy). An **AL**-proof is a chain of stages. A stage is a list of lines. A chain of stages is a list of stages in which for each two subsequent stages holds that the second is an extension of the first. A line of an annotated **AL**-proof consists of five elements: (1) a line number i , (2) a formula A , (3) a justification rule, (4) a condition consisting of a set of abnormalities $\Theta \subset \Omega$, and (5) a \checkmark or nothing when the line is marked respectively unmarked. This line can occur in an **AL**-proof from Γ iff $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} A \checkmark \checkmark \Theta$. The classical disjunction of the members of a finite $\Upsilon \subset \Omega$, $Dab(\Upsilon)$, is called a *Dab-formula*. The inference rules govern the addition of lines. There are 3 rules. They are presented in the following table. In the first column the name of the rule is found, the second column specifies on which condition a line can be added to the proof, and in the third column one finds the second and the fourth element of the line that can be added and of the lines that function as local premises for the added line.

PREM	If $A \in \Gamma$	$\frac{\dots \quad \dots}{A \quad \emptyset}$
RU	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B$	$\frac{\begin{array}{l} A_1 \quad \Upsilon_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Upsilon_n \end{array}}{B \quad \Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_n}$
RC	If $A_1, \dots, A_n \vdash_{\text{LLL}} B \checkmark Dab(\Theta)$	$\frac{\begin{array}{l} A_1 \quad \Upsilon_1 \\ \dots \quad \dots \\ A_n \quad \Upsilon_n \end{array}}{B \quad \Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_n \cup \Theta}$

A marking definition is used to determine for every line i at every stage s of a proof whether line i is (un)marked in view of the condition of i and the *minimal Dab-formulas* that are derived at the stage of the proof. $Dab(\Upsilon)$ is a minimal *Dab-formula* at stage s iff $Dab(\Upsilon)$ is derived at s on the condition \emptyset and no $Dab(\Upsilon')$ with $\Upsilon' \subset \Upsilon$ is derived on the condition \emptyset . The most important strategies are Reliability and Minimal Abnormality. Their marking definitions go as follows.

Definition 65 Marking definition for Reliability

Where $Dab(\Upsilon_1), \dots, Dab(\Upsilon_n)$ are the minimal *Dab-formulas* derived on the condition \emptyset at stage s , $U_s(\Gamma) = \Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_n$, and Υ is the condition of line i , line i is

marked at stage s iff $\Upsilon \cap U_s(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definition 66 Marking definition for Minimal Abnormality

Where $Dab(\Upsilon_1), \dots, Dab(\Upsilon_n)$ are the minimal *Dab*-formulas derived on the condition \emptyset at stage s , $\Phi_s^\circ(\Gamma)$ is the set of all sets that contain one member of each Υ_i , $\Phi_s(\Gamma)$ are the $\varphi \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$ that are not proper supersets of a $\varphi' \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$, A is the formula and Υ is the condition of line i , line i is marked at stage s iff

- (i) there is no $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ such that $\varphi \cap \Upsilon = \emptyset$, or
- (ii) for some $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is no line at which A is derived on a condition Θ for which $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.

Note that, in general, the marking definition of the Reliability-strategy can be interpreted as a good approximation of the Minimal Abnormality-strategy (which has a far more complex marking definition). **AL**'s using Minimal Abnormality are semantically closer to what one intuitively expects from a logic 'interpreting premises as normal as possible'. In a concrete **AL** however, the strategies often coincide.

Finally, two types of derivability are defined in **AL**: *derivability at a stage* and *final derivability*. A formula A is derived at a stage iff A is derived on an unmarked line at the stage. A formula A is finally derived iff A is derived on an unmarked line i and the proof is 'stable with respect to i ', i.e. even if line i is marked in some extension of the proof, it can be unmarked in some further extension. Note that it is the notion *final derivability* that defines the actual consequence relation $\vdash_{\mathbf{AL}}$.

F.2.3 The semantics of AL

Semantically, **AL** selects specific **LLL**-models of the premises. The selection depends on Ω and the chosen strategy. Some preliminary definitions are necessary before we proceed. $Dab(\Upsilon)$ is a *minimal Dab-consequence* of Γ iff $\Gamma \vDash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Upsilon)$ and, for all $\Upsilon' \subset \Upsilon$, $\Gamma \not\vDash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Upsilon')$. Where $Dab(\Upsilon_1), Dab(\Upsilon_2), \dots$ are the minimal *Dab*-consequences of Γ , let $U(\Gamma) =_{df} \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup \dots$. Finally, where M is a **LLL**-model, $Ab(M) =_{df} \{A \in \Omega \mid M \vDash_{\mathbf{LLL}} A\}$.

Definition 67 A **LLL**-model M of Γ is a reliable model if $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.

Definition 68 A is a reliable semantic consequence of Γ , in symbols $\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}^r} A$, if all reliable models of Γ verify A .

Definition 69 A LLL-model M of Γ is a minimally abnormal model if there is no LLL-model M' of Γ for which $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Definition 70 A is a minimal abnormal semantic consequence of Γ , in symbols $\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}^m} A$, if all minimally abnormal models of Γ verify A .

F.2.4 A concrete example: \mathbf{ACLuN}^m

We provide a small **AL**-proof in the *inconsistency-adaptive logic* \mathbf{ACLuN}^m . The oldest **AL** is in fact an inconsistency-adaptive logic, cf. [14]. The logic \mathbf{ACLuN}^m tries to interpret a premise set Γ as consistently as possible. The logic makes use of the fact that the weakness of standard paraconsistent logics is not required for every formula A for which $A \& \neg A$ is not a consequence of Γ . \mathbf{ACLuN}^m is defined as follows. The **LLL** is the paraconsistent logic **CLuN**. **CLuN** is the full positive fragment of **CL** with simple gluts for the negation connective. For every formula A in **CLuN**, both A and $\neg A$ can be true, yet, they cannot be both false. The set of abnormalities is $\Omega = \{A \wedge \sim A \mid A \in \mathcal{F}\}$, with \mathcal{F} being the set of formulas. The strategy is Minimal Abnormality (this is indicated by the superscript m). Given these choices, the **ULL** is **CL** as **CL** equals **CLuN** plus $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$. Now consider the following proof.

1	$(p \& q) \& t$	PREM	\emptyset
2	$\neg p \vee r$	PREM	\emptyset
3	$\neg q \vee s$	PREM	\emptyset
4	$\neg p \vee \neg q$	PREM	\emptyset
5	$t \rightarrow \neg p$	PREM	\emptyset
6	r	1, 2; RC	$\{p \wedge \sim p\} \quad \checkmark$
7	s	1, 3; RC	$\{q \wedge \sim q\}$
8	$(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$	1, 4; RU	\emptyset
9	$p \wedge \sim p$	1, 5; RU	\emptyset

As can be seen at line 6 and 7, r and s can only be derived from the premises on the condition that p respectively q are not inconsistent. On line 8 it turns out that p or q are inconsistent (a formula and its negation are both true). This derivation leads to the marking of line 6 and 7. On line 9 however, it turns out that p is inconsistent. Consequentially, the *Dab*-formula on line 8 becomes non-minimal and line 7 becomes unmarked. Line 6 stays marked however, because of the minimal *Dab*-formula on line 9.

F.3 The generic vague lower limit logic VL

F.3.1 The minimal criteria for vague lower limit logic

In order to construct an interesting AVL, we first need a LLL that defines what vague models are like. The way in which one formally defines vague models depends on one's philosophical theory of vagueness. Today, there are many different candidate theories of vagueness. Therefore, we choose to stay as general as possible, allowing others to choose the specific type of LLL they see fit.

We will first provide a number of minimal requirements for the LLL and show that a large set of well-known and well-studied vague logics satisfy these criteria. The requirements are related to a presupposed \Box -operator. Depending on how this operator is formalized as a connective in the LLL, $\Box A$ can be interpreted as *completely true*, *definitely true*, *clearly true*, etc. In the rest of the paper, we will refer to the generic logic fulfilling these criteria as VL. The requirements for the LLL will help to assure that the AVL built on it is sensible and has some sought-after properties. The minimal criteria for VL are the following.

- C1 VL must be monotonic, transitive, reflexive and substitution-invariant. The definition of the notion *semantic consequence* in VL must be translatable into the following statement: $\Gamma \models_{\text{VL}} A$ iff $M \models_{\text{VL}} A$, for every M in which $M \models_{\text{VL}} B$ holds for every $B \in \Gamma$. The language of VL contains the connectives \Box , \rightarrow , \neg , $\&$ and \vee .
- C2 VL must contain CL. The language of VL should also contain the classical disjunction ($\check{\vee}$) and negation ($\check{\neg}$) with their respective classical semantics, that is, $M \models_{\text{VL}} A \check{\vee} B$ iff $M \models_{\text{VL}} A$ or $M \models_{\text{VL}} B$ and $M \models_{\text{VL}} \check{\neg} A$ iff $M \not\models_{\text{VL}} A$. The other (definable) classical symbols are denoted $\check{\wedge}$ and $\check{\rightarrow}$. The semantics of the logical symbols standardly belonging to VL remains the same (classical behavior is not required at all). The CL-symbols should only occur at the outside of a formula (see also subsection F.2.1).

In what follows, let $\Box^n A$ denote $\overbrace{\Box \Box \dots \Box}^{n \text{ times}} A$, where $n > 0$.

- C3 $\not\models_{\text{VL}} \check{\neg} \Box^n A \check{\wedge} \check{\neg} \Box^n \neg A$ and $\not\models_{\text{VL}} \check{\neg} (\check{\neg} \Box^n A \check{\wedge} \check{\neg} \Box^n \neg A)$, i.e. not every formula is non-vague and not every formula is vague.
- C4 $\Box^n A, \Box^n B \models_{\text{VL}} \Box^n (A \& B)$ and $\Box^n \neg A \check{\vee} \Box^n \neg B \models_{\text{VL}} \Box^n \neg (A \& B)$.
- C5 $\Box^n A \check{\vee} \Box^n B \models_{\text{VL}} \Box^n (A \vee B)$ and $\Box^n \neg A, \Box^n \neg B \models_{\text{VL}} \Box^n \neg (A \vee B)$.

C6 $\Box^n \neg A \check{\vee} \Box^n B \vDash_{\mathbf{VL}} \Box^n (A \rightarrow B)$ and $\Box^n A, \Box^n \neg B \vDash_{\mathbf{VL}} \Box^n \neg (A \rightarrow B)$.

C7 $\Box^n A \vDash_{\mathbf{VL}} \Box^n \neg \neg A$.

C4 to C7 express that the logical symbols show Boolean behavior for the non-vague cases.

C8 It does not hold that $M \vDash_{\mathbf{VL}} \Box A$ and $M \vDash_{\mathbf{VL}} \neg A$, i.e. a sentence cannot be false and absolutely true at the same time, and it does not hold that $M \vDash_{\mathbf{VL}} \Box \neg A$ and $M \vDash_{\mathbf{VL}} A$, i.e. a sentence cannot be true and absolutely false at the same time.

C9 $\Box A \vDash_{\mathbf{VL}} A$. If a sentence is absolutely true, it is true as well.

C10 $\Box^{n+1} \neg A \vDash_{\mathbf{VL}} \Box^n \neg \Box A$. If a formula is absolutely false, it is not absolutely true.

Some VL's will turn out to have some extra criteria, which will make simpler abnormalities possible.

Vag If $M \not\vDash_{\mathbf{VL}} \Box^n A$ and $M \not\vDash_{\mathbf{VL}} \Box^n \neg A$, then $M \vDash_{\mathbf{VL}} \neg \Box^n A \& \neg \Box^n \neg A$.

We will use this criterium to define a connective that indicates that a sentence is vague. Note that no CL-symbols are used in this definition. This fact will turn out helpful in specific LLL's, see subsection F.3.2.

FoV $\Box A \vDash_{\mathbf{VL}} \Box \Box A$. VL does not allow models with higher-order vagueness, i.e. VL is first-order vague.

Several important hedges are definable in the logics that satisfy the criteria.

1. $\forall A =_{df} (\neg \Box \neg A) \check{\wedge} (\neg \Box A)$
2. $\forall A =_{df} (\neg \Box \neg A) \& (\neg \Box A)$
3. $\forall_n A =_{df} (\neg \Box^n \neg A) \check{\wedge} (\neg \Box^n A)$
4. $\forall_n A =_{df} (\neg \Box^n \neg A) \& (\neg \Box^n A)$

We call these hedges *vagueness hedges* as they express that the sentence A is vague in the object language, i.e. A is neither absolutely true, nor absolutely false.

F.3.2 \mathcal{K} -extensions of the fuzzy logic \mathbf{BL}_Δ

The logic \mathbf{BL}_Δ , i.e. the *fuzzy basic logic* \mathbf{BL} extended with the Baaz's delta-operator Δ , is developed by Petr Hájek in [59]. In \mathbf{BL}_Δ , a formula ΔA can be interpreted as saying that A is *completely true*. The logic can easily be extended into well-studied fuzzy logics like Łukasiewicz logic (Δ), Gödel logic (\mathbf{G}_Δ) and Product logic ($\mathbf{\Pi}_\Delta$). We first present the proof theory of \mathbf{BL}_Δ .

- (A1) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (A2) $(A \& B) \rightarrow A$
- (A3) $(A \& B) \rightarrow (B \& A)$
- (A4) $(A \& (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \& (B \rightarrow A))$
- (A5a) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \& B) \rightarrow C)$
- (A5b) $((A \& B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- (A6) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C)$
- (A7) $\perp \rightarrow A$

The operator Δ is axiomatized by another five axioms.

- (A Δ 1) $\Delta A \vee \neg \Delta A$
- (A Δ 2) $\Delta(A \vee B) \rightarrow (\Delta A \vee \Delta B)$
- (A Δ 3) $\Delta A \rightarrow A$
- (A Δ 4) $\Delta A \rightarrow \Delta \Delta A$
- (A Δ 5) $\Delta(A \rightarrow B) \rightarrow (\Delta A \rightarrow \Delta B)$

The rules are the following.

- (MP) From A and $A \rightarrow B$, derive B
- (NEC) From A , derive ΔA

The other logical symbols can be defined by means of \rightarrow , $\&$ and \perp .

- (D1) $A \wedge B =_{df} A \& (A \rightarrow B)$
- (D2) $A \vee B =_{df} ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \& ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
- (D3) $\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$
- (D4) $A \equiv B =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$

The standard continuous semantics of the logic \mathbf{BL}_Δ uses the interval $[0, 1]$, i.e. $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } 0 \leq x \leq 1\}$, to represent degrees of truth and is based upon a *continuous t-norm* $*$. A *continuous t-norm* $*$ is a binary operator that satisfies the following properties ($x, y, x', y' \in [0, 1]$): (1) a continuous mapping $*$: $[0, 1]^2 \mapsto$

$[0, 1]$, (2) $x * y = y * x$, (3) $x * (y * z) = (x * y) * z$, (4) if $x' \leq x$ then $x' * y \leq x * y$, and (4) $1 * x = x$.

A model M is a couple $\langle *, v_* \rangle$ where $*$ is a t-norm and v_* a valuation function v_* defined by the following clauses (let \mathcal{W} be the set of well-formed formulas).

- (S1) $v_* : \mathcal{W} \mapsto [0, 1]$
- (S2) $v_*(A \& B) = v_*(A) * v_*(B)$
- (S3) $v_*(A \rightarrow B) = \max\{z \mid v_*(A) * z \leq v_*(B)\}$
- (S4) $v_*(\perp) = 0$
- (S5) $v_*(\Delta A) = 1$ iff $v_*(A) = 1$, and $v_*(\Delta A) = 0$ otherwise.

Definition 71 \mathbf{BL}_Δ -satisfiability

$M \models_{\mathbf{BL}_\Delta} A$ iff $M = \langle *, v_* \rangle$ and $v_*(A) = 1$.

Definition 72 \mathbf{BL}_Δ -validity

$\models_{\mathbf{BL}_\Delta} A$ iff $M \models_{\mathbf{BL}_\Delta} A$ for every \mathbf{BL}_Δ -model M

Definition 73 \mathbf{BL}_Δ -semantic consequence

$\Gamma \models_{\mathbf{BL}_\Delta} A$ iff $M \models_{\mathbf{BL}_\Delta} A$ for every \mathbf{BL}_Δ -model M for which holds that $M \models_{\mathbf{BL}_\Delta} B$ for every $B \in \Gamma$

For the defined symbols \wedge and \vee it semantically holds that $v_*(A \wedge B) = \min(v_*(A), v_*(B))$ and $v_*(A \vee B) = \max(v_*(A), v_*(B))$.

Fact 1 Each continuous t-norm and its derived connectives have **CL-truth functionality** with respect to the extrema 0 and 1, cf. also [59].

Fact 2 Given the semantics of Δ in (S5) and fact 1, it evidently holds that a formula with no non-logical symbols outside the scope of a Δ operates on the couple $\{0, 1\}$ with **CL-truth functionality**.

In what follows we discuss the so-called \mathcal{K} -extensions of \mathbf{BL}_Δ , cf. [62]. Let \mathcal{K} be a non-empty set of continuous t-norms, e.g. the set of all continuous t-norms, a singleton containing your favorite t-norm, etc. A \mathcal{K} -extension of \mathbf{BL}_Δ is a logic $\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}$ based on a specific \mathcal{K} -set. The respective definitions of the notions *satisfiability*, *validity* (or *tautology*) and *semantic consequence* are specified in line with the selection of continuous t-norms in the \mathcal{K} -set of choice. We may speak in terms of $\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}$ -satisfiability (the definitions of $\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}$ -validity and $\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}$ -semantic consequence are obvious).

Definition 74 $\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}$ -satisfiability

$M \models_{\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}} A$ iff $M = \langle *, v_* \rangle$ and $v_*(A) \geq \epsilon$ for every $* \in \mathcal{K}$.

The most famous \mathcal{K} -extensions of \mathbf{BL}_Δ are defined as follows.

- If $\mathcal{K} = \{*\}$, we obtain Łukasiewicz logic (Δ):
 $x * y = \max(0, x + y - 1)$
 $\mathbf{BL} + (\mathbf{A8a}) \neg\neg A \rightarrow A$
 In this logic $v_*(A \rightarrow B) = 1 - v_*(A) + v_*(B)$ if $v_*(A) > v_*(B)$, and $v_*(A \rightarrow B) = 1$ otherwise. This results in $v_*(\neg A) = 1 - v_*(A)$.
- If $\mathcal{K} = \{*_G\}$, we obtain Gödel logic (\mathbf{G}_Δ):
 $x *_G y = \min(x, y)$
 $\mathbf{BL} + (\mathbf{A8b}) A \rightarrow A \& A$
 In this logic $v_{*_G}(A \rightarrow B) = v_{*_G}(B)$ if $v_{*_G}(A) > v_{*_G}(B)$, and $v_{*_G}(A \rightarrow B) = 1$ otherwise. This results in $v_{*_G}(\neg A) = 0$ if $v_{*_G}(A) = 1$, and $v_{*_G}(\neg A) = 0$ otherwise.
- If $\mathcal{K} = \{*_\Pi\}$, we obtain Product logic ($\mathbf{\Pi}_\Delta$):
 $x *_\Pi y = x \cdot y$
 $\mathbf{BL} + (\mathbf{A8c}) \neg\neg C \rightarrow ((A \& C \rightarrow B \& C) \rightarrow (A \rightarrow B)) + (\mathbf{A8d}) A \& \neg A \rightarrow \perp$
 In this logic $v_{*_\Pi}(A \rightarrow B) = 1$ if $v_{*_\Pi}(A) \leq v_{*_\Pi}(B)$, and $\frac{v_{*_\Pi}(B)}{v_{*_\Pi}(A)}$ otherwise. This results in $v_{*_\Pi}(\neg A) = 0$ if $v_{*_\Pi}(A) = 1$, and $v_{*_\Pi}(\neg A) = 0$ otherwise.

For the examples in section F.5, we will use the fragment of the \mathcal{K} -extension Δ that does not contain the strong conjunction $\&$ as the \mathbf{LLL} . This choice is only made for reasons of simplicity.

Theorem 28 *For every set of continuous t -norms \mathcal{K} , $\mathbf{BL}_\Delta^\mathcal{K}$ with Δ as its \square -operator and enriched with the classic connectives \neg and \checkmark satisfies (C1)–(C10) as well as (FoV) and (Vag).*

Proof.

- C1 + C2: the proofs are straightforward.
- Note + (FoV): since $v_*(\Delta\Delta A) = v_*(\Delta A)$ in \mathbf{BL}_Δ , it suffices to prove all the criteria with only one Δ (replacing every $\Delta^n A$ by ΔA). This immediately shows (FoV).
- C3: for the first formula, simply take $v_*(A) = 1$, for the second formula simply take $v_*(A) \in]0, 1[$.
- C4 – C8: from the definition of \neg and (S5), it is derivable that $v_*(\Delta A) \in \{0, 1\}$, $v_*(\Delta A) = 1$ iff $v_*(A) = 1$, and $v_*(\Delta\neg A) = 1$ iff $v_*(\neg A) = 1$ iff $v_*(A) = 0$. Criteria C4 – C8 follow evidently from this observation and fact 1.

- C9: this criterium is a direct consequence of the fact that $v_*(\Delta A) = 1$ implies $v_*(A) = 1$.
- C10: if $v_*(\Delta \neg A) = 1$ then $v_*(A) = 0$ and hence $v_*(\Delta A) = 0$ and $v_*(\neg \Delta A) = 1$. This leads to $v_*(\Delta \neg \Delta A) = 1$, which proves C10.
- (Vag): using the Boolean behavior for $\{0, 1\}$, it is provable that whenever a model verifies neither ΔA nor $\Delta \neg A$, $v_*(\Delta A) = 0$ and $v_*(\Delta \neg A) = 0$, and thus $v_*(\neg \Delta A \& \neg \Delta \neg A) = 1$ as well.

■

F.3.3 Fuzzy logics with an acceptability threshold ϵ lower than 1

A $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}}$ -model M verifies a formula A iff A has truth-degree 1 in M . However, one may argue that this is a too severe requirement and introduce a context-dependent acceptability threshold in the semantics of $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}$ (fixed for all models). A truth-degree ϵ from $]0, 1]$ is used as the acceptability threshold, i.e. $M \models_{\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}} A$ iff $v_*(A) \geq \epsilon$.

Definition 75 $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}$ -satisfiability

$M \models_{\mathbf{BL}_\Delta} A$ iff $M = \langle *, v_* \rangle$ and $v_*(A) \geq \epsilon$, for every $* \in \mathcal{K}$.

The definitions of $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}$ -validity and $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}$ -semantic consequence are defined in a similar way as definitions 72 and 73.

Of course, this modification invalidates the axiomatizations presented in subsection F.3.2. However, lowered threshold versions of some fuzzy logics can be axiomatized using a set of truth-constants $\{\bar{a} \mid a \text{ is a real number in } [0, 1]\}$ for which $v_*(\bar{a}) = a$ holds. The use of truth-constants $\{\bar{a} \mid a \text{ is a rational number in } [0, 1]\}$ in Δ can be axiomatized using the so-called *bookkeeping axioms* ($\bar{a} \rightarrow \bar{b} \equiv \bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ and $(\bar{a} \& \bar{b}) \equiv \bar{a} * \bar{b}$). A similar approach is possible for \mathbf{G}_Δ and $\mathbf{\Pi}_\Delta$. These strategies are discussed in [55, 56].

Definition 76 $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}$ -derivability

$\Gamma \vdash_{\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}} A$ iff $\Gamma \vdash_{\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}}} \bar{\epsilon} \rightarrow A$

Theorem 29 For every set of continuous t -norms \mathcal{K} and every $\epsilon \in]0, 1]$, $\mathbf{BL}_\Delta^{\mathcal{K}, \epsilon}$ with Δ as \square -operator and enriched with classic connectives $\dot{\neg}$ and $\dot{\vee}$ satisfies (C1)–(C10) as well as (FoV) and (Vag).

Proof.

- C1 + C2: these proofs are straightforward.
- C3–C7, C9, C10, (Vag), (FoV): as $M \models_{\mathbf{BL}_{\Delta}^{\mathcal{K},\epsilon}} \Delta A$ iff $M \models_{\mathbf{BL}_{\Delta}} \Delta A$, for each of these criteria the same set of models is used as in \mathbf{BL}_{Δ} (namely those in which $v_*(A) = 1$). Therefore, C3–C7, C9, C10, (Vag), and (FoV) are easily derivable from the corresponding properties of \mathbf{BL}_{Δ} , cf. theorem 28.
- C8: observe that when $v_*(\Delta A) \geq \epsilon$, $v_*(\Delta A) = 1$, and hence $v_*(A) = 1$ and $v_*(\neg A) = 0$. C8 is warranted because $0 < \epsilon$ for every ϵ .

■

One may also replace Δ by \blacktriangle as the \square -operator in $\mathbf{BL}_{\Delta}^{\mathcal{K},\epsilon}$, thereby obtaining $\mathbf{BL}_{\blacktriangle}^{\mathcal{K},\epsilon}$, with $\blacktriangle A =_{df} \Delta(\bar{\epsilon} \rightarrow A)$ ($v_*(\blacktriangle A) = 1$ if $v_*(A) \geq \epsilon$ and else $v_*(\blacktriangle A) = 0$). The operator has the meaning *true enough*. The \mathcal{V} that is defined by means of \blacktriangle can be interpreted as *neither true enough, nor false enough*. The VL-criteria are not valid for every $\mathbf{BL}_{\blacktriangle}^{\mathcal{K},\epsilon}$. However, some logics do satisfy all VL-criteria. The following theorems are provable.

Theorem 30 *The logic $\mathbf{G}_{\blacktriangle}^{\epsilon}$ (Gödel logic with a lowered acceptability threshold ϵ and \blacktriangle as its \square -operator), enriched with the classic connectives \neg and \vee satisfies (C1)–(C10) as well as (FoV) and (Vag).*

Let \twoheadrightarrow be defined in Łukasiewicz logic by $A \twoheadrightarrow B =_{df} \neg A \vee B \vee \Delta(A \rightarrow B)$ ($v_*(A \twoheadrightarrow B) = 1$ if $v_*(A) \leq v_*(B)$ and $v_*(A \twoheadrightarrow B) = \max(1 - v_*(A), v_*(B))$ otherwise).

Theorem 31 *The logic $\mathcal{L}_{\blacktriangle, \twoheadrightarrow}^{\epsilon}$ (Łukasiewicz logic with an acceptability threshold $\epsilon > 0.5$, \blacktriangle as its \square -operator, the min-conjunction \wedge — taking the role of $\&$ — and the implication \twoheadrightarrow) enriched with the classic connectives \neg and \vee , satisfies (C1)–(C10) as well as (FoV) and (Vag).*

F.3.4 Other vague logics based on modal operators

In contrast to fuzzy logic, super- and subvaluationist logics (respectively SVL and SubVL) and clarity logic (LC) explain vagueness without using an infinite number of truth-values. Let us discuss these alternatives one by one.

There exist many different SVL's. We only discuss the general idea behind these logics. The basic idea can be easily understood from a semantic perspective. SVL-semantics is based on so-called *partial models*. In these models, predicates can have indeterminate cases. Every partial model allows for the construction of a specific set of *supermodels*. In these supermodels, it is clear for

every predicate what belongs to its extension and what does not. The supermodels are used to define the *valuation function* of the semantics. Generally speaking, a sentence A is defined to be *definitely true* when A is true in all supermodels (and definitely false when the supermodels agree on its falsity). Truth in SVL-semantics is generally identified as *definite truth*. As can be expected, SVL validates all CL-tautologies. It is standard to define an operator *definitely true* in SVL. Many concrete SVL's can be translated into modal logic. In these cases, a modal world corresponds to a specific supermodel and the modal accessibility relation corresponds to the *allowability relation*. The latter relation specifies the set of supermodels that can be generated from every given partial model. The operator meaning *definitely true* corresponds to the modal necessity operator \Box . In what follows, we use classic modal logic with $\Box A = \Box A$ to represent SVL-vagueness.

While SVL identifies truth with definite truth, SubVL identifies truth with the absence of *definite falsity*. This results in very similar but paraconsistent logics. The logics based on this principle can be translated into modal logic as well. For example, Dominic Hyde's SubVL is based on a modal logic for pure paraconsistency created by Jaśkowski, cf. [67]. Note that Joke Meheus has already created an adaptive version of Jaśkowski's logic, cf. [82].

Finally, there is LC, developed by Timothy Williamson, cf. [119]. The logic is based on the idea that the vagueness of predicates is not a result of the absence of crisp borders of their extensions, but originates from our lack of knowledge about where these borders are. The borderlines simply remain out of our cognitive scope. The logic LC uses a modal connective meaning *clearly true*. When using this connective as a \Box -operator, LC immediately satisfies the VL-criteria (apart from (FoV)) because it is the same as the modal logic KTB.

Theorem 32 *Modal logic S5 with \Box as \Box -operator satisfies (C1)–(C10) as well as (FoV) and (Vag).*

Theorem 33 *Modal logic KTB with \Box as \Box -operator satisfies (C1)–(C10) and (Vag).*

Proof. The proofs of the theorems are easily obtainable from generally known facts about modal logic. ■

F.3.5 Higher-order vagueness

The first-order vagueness criterium (FoV) does not hold for the logic KTB. Logics that lack this property, i.e. $\not\vdash \Box A \equiv \Box \Box A$, are called *higher-order vague*.

In these logics there is no crisp division between the vague cases and the non-vague cases in the extensions of predicates. In a sense, vagueness is a vague property itself. The minimal criteria for **VL** are not rejected because of higher-order vagueness. Only property (FoV) becomes problematic.

We now present an example of a fuzzy logic (partly inspired by Libor Bechounek's lecture *A model of higher-order vagueness in higher-order fuzzy logic* in Prague, 2006) that can deal with higher-order vagueness. We call this logic $\epsilon_{\Lambda, \rightarrow}$. Although we believe that there are good arguments to use fuzzy logics that take higher-order vagueness into account, we do not claim that $\epsilon_{\Lambda, \rightarrow}$ is philosophically interesting or useful. Our only goal is to show that our criteria are also suited for these types of logics. The logic $\epsilon_{\Lambda, \rightarrow}$ is like the logic $\epsilon_{\blacktriangle, \rightarrow}$ but with a \square -operator Λ , defined as $\Lambda A =_{df} A \& A$ ($v_*(\Lambda A) = \max(0, 2v_*(A) - 1$), and hence $v_*(\Lambda^n A) = \max(0, 2^n v_*(A) - 2^n + 1)$. The more this operator is applied to a sentence, the more it approximates Baaz's delta-operator Δ .

The following theorem is provable.

Theorem 34 *The logic $\epsilon_{\Lambda, \rightarrow}$ (Łukasiewicz logic with an acceptability threshold $\epsilon > \frac{1}{3}$, Λ as its \square -operator, the min-conjunction \wedge — taking the role of $\&$ — and the implication \rightarrow) enriched with the classic connectives \neg and $\check{\vee}$, satisfies (C1)–(C10).*

F.4 Adaptive vague logic: AVL

We require that the **LLL** of an adaptive vague logic satisfies at least properties (C1)–(C10). This suffices to make the adaptive logic in accordance with the requirements of the **AL**-standard format and to prove that the **ULL** of every possible adaptive vague logic is exactly classical logic. So, **AVL** will add precisely the **CL**-consequences to the **LLL**, whenever this is allowed by the premises.

1. **LLL**: A logic that satisfies the **VL**-criteria (C1)–(C10).
2. There are four possible types of abnormalities. Type 1: $\Omega = \{\forall_n A \mid A \in \mathbb{P}\}$, can be used for each possible **LLL**. When the **LLL** satisfies (FoV), also type 2: $\Omega = \{\forall A \mid A \in \mathbb{P}\}$, can be used. When the **LLL** satisfies (Vag), also type 3: $\Omega = \{\forall_n A \mid A \in \mathbb{P}\}$ can be used. Finally, when the **LLL** satisfies both (FoV) and (Vag), also type 4: $\Omega = \{\forall A \mid A \in \mathbb{P}\}$ can be used. The alternative types 2–4 may result in more efficient proofs.

Ω	(FoV)	
	(1) $\{\forall_n A \mid A \in \mathbb{P}\}$	(2) $\{\forall A \mid A \in \mathbb{P}\}$
(Vag)	(3) $\{\mathcal{V}_n A \mid A \in \mathbb{P}\}$	(4) $\{\mathcal{V} A \mid A \in \mathbb{P}\}$

3. A strategy: Reliability (r) or Minimal Abnormality (m).

Let AVL_a^k , where $k \in \{m, r\}$ and $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, be the adaptive logic defined by the **LLL VL**, the set of abnormalities of type a (see table above), and strategy m .

F.4.1 Upper Limit Logic

Let BVL_a , where $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, be the **ULL** of the adaptive logics AVL_a^m and AVL_a^r . We will prove that BVL_a is equal to CL_{\square} , i.e. **CL** with a redundant \square symbol ($v_{\text{CL}_{\square}}(\square A) = v_{\text{CL}_{\square}}(A)$), for every $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. It follows that the logics in $\{\text{BVL}_a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ are identical. It is therefore safe to drop the subscript and to speak of **BVL**. In the proofs below we suppose that the abnormalities are of type 1. Proving the lemmas and the theorem for the other types of abnormalities does not produce extra difficulties.

Lemma 32 *U1* For every formula A , $M \models_{\text{BVL}} \square A$ or $M \models_{\text{BVL}} \square \neg A$.

Proof.

We prove the lemma for an arbitrary formula B . Let $s_{\square}(C)$ be the \square -nesting level of the deepest nested \square in a formula C . We have to show that $M \models_{\text{BVL}} \square B$ or $M \models_{\text{BVL}} \square \neg B$ for every model M . This is an immediate consequence of the following statement: for every formula A there is a $k \geq s_{\square}(B) - s_{\square}(A) + 1$ such that $M \models_{\text{BVL}} \square^k A$ or $M \models_{\text{BVL}} \square^k \neg A$ for every model M . We prove this with an induction over the complexity n of A .

The basic case of the induction is that for all primitive formulas A and every model M either $M \models_{\text{BVL}} \square^{s_{\square}(B)+1} A$ or $M \models_{\text{BVL}} \square^{s_{\square}(B)+1} \neg A$. This is a consequence of the fact that for all primitive formulas A and every model M , $M \not\models_{\text{BVL}} \simeq \square^{s_{\square}(B)+1} A \check{\simeq} \square^{s_{\square}(B)+1} \neg A$ (in view of $M \not\models_{\text{BVL}} D$ for every $D \in \Omega$) together with the classical behavior of \simeq and $\check{\simeq}$.

Now, for the induction step, suppose that for all formulas C of complexity smaller than some j , there is a $k \geq s_{\square}(B) - s_{\square}(C) + 1$ such that $M \models_{\text{BVL}} \square^k C$ or $M \models_{\text{BVL}} \square^k \neg C$ for every model M . We will show that this holds for every formula A of complexity j as well. Properties C5, C4, and C7 prove the cases where A is respectively of the forms $E \vee F$, $E \& F$, and $\neg E$. Only the case $A = \square E$ remains to be shown. We know that there is a $k \geq s_{\square}(B) - s_{\square}(A) + 2$ such that

$M \models_{\text{BVL}} \Box^k E$ or $M \models_{\text{BVL}} \Box^k \neg E$ for every model M . With property C10, this leads to $M \models_{\text{BVL}} \Box^{k-1} \Box E$ or $M \models_{\text{BVL}} \Box^{k-1} \Box \neg E$. This is exactly what we look for, because $s_{\Box}(A) = s_{\Box}(\Box E) = s_{\Box}(E) + 1$. ■

Lemma 33 U2 For every formula A , $M \models_{\text{BVL}} A$ iff $M \models_{\text{BVL}} \Box A$.

Proof. This fact is obtainable from C9 and $A \models_{\text{BVL}} \Box A$. We prove the latter. Suppose $M \models_{\text{BVL}} A$, then $M \not\models_{\text{BVL}} \Box \neg A$ in view of C8. But then U1 warrants $M \models_{\text{BVL}} \Box A$. ■

Lemma 34 U3 For every formula A , $M \models_{\text{BVL}} \neg A$ iff $M \not\models_{\text{BVL}} A$.

Proof. In this case two directions have to be proven. To obtain the (\Rightarrow) direction, suppose $M \models_{\text{BVL}} \neg A$. With C8 this leads to $M \not\models_{\text{BVL}} \Box A$ and then $M \not\models_{\text{BVL}} A$ is a consequence using U2. For the (\Leftarrow) direction, suppose $M \not\models_{\text{BVL}} A$. With U2 $M \not\models_{\text{BVL}} \Box A$ is obtained. Using U1, we can derive $M \models_{\text{BVL}} \Box \neg A$ from this and hence also $M \models_{\text{BVL}} \neg A$, with C9. ■

Lemma 35 U4 For every formula A and B , $M \models_{\text{BVL}} A \& B$ iff $M \models_{\text{BVL}} A \check{\wedge} B$.

Proof. We consider two directions. To obtain the (\Rightarrow) direction, suppose $M \models_{\text{BVL}} A \& B$. With C8 this leads to $M \not\models_{\text{BVL}} \Box \neg(A \& B)$ and then $M \not\models_{\text{BVL}} \Box \neg A$ and $M \not\models_{\text{BVL}} \Box \neg B$ is a consequence using C4. U1 and U2 finally allow us to derive $M \models_{\text{BVL}} A \check{\wedge} B$ from this. For the (\Leftarrow) direction, suppose $M \models_{\text{BVL}} A \check{\wedge} B$. With U2, $M \models_{\text{BVL}} \Box A \check{\wedge} \Box B$ is obtained. Using C4, we can derive $M \models_{\text{BVL}} \Box(A \& B)$ from this and hence also $M \models_{\text{BVL}} A \& B$, with C9. ■

The proof for the following lemma is similar to the proof of U4.

Lemma 36 U5 For every every formula A and B , $M \models_{\text{BVL}} A \vee B$ iff $M \models_{\text{BVL}} A \check{\vee} B$, and

U6 For every formula A and B , $M \models_{\text{BVL}} A \rightarrow B$ iff $M \models_{\text{BVL}} A \check{\rightarrow} B$.

Theorem 35 U7 BVL is equivalent to CL_{\Box} .

Proof. Remark that U2, U3, U4, U5, and U6 are exactly the semantical clauses for CL_{\Box} . Hence, the logics are equivalent. ■

This theorem is extremely important because it says that all CL -rules can be applied conditionally in the proofs of every AVL within our framework.

F.4.2 The predicative case

Generalizing the generic format to the predicative level is straightforward. However, we need to make one vital remark. In the predicative case, one can choose from three options with respect to the set of abnormalities. These options are independent of the type of vagueness hedge that is used in the abnormalities, i.e. \mathcal{V} , \mathcal{V}_n , \mathbb{V} , or \mathbb{V}_n . We illustrate the choices by means of \mathcal{V} . In option 1, primitive formulas can be individually abnormal: $\Omega =_{df} \{\mathcal{V}A \mid A \text{ is a closed primitive formula}\}$. This is the most straightforward generalization of the propositional case. Option 2 is to only interpret predicates to be abnormal or normal as a whole: $\Omega =_{df} \{\exists x_1 \dots \exists x_n \mathcal{V}Px_1 \dots x_n \mid P \text{ is an } n\text{-ary predicate}\}$. Option 3 is a combination of the previous approaches: $\Omega =_{df} \{\exists \mathcal{V}A \mid A \text{ is an open or closed primitive formula}\}$, with \exists denoting the existential closure. The choice one makes depends on the type of problems one wants to simulate and/or which type of philosophical framework one adheres to.

F.5 Some examples of AVL-proofs

We give two toy-examples in the logics $A_{\Delta,4}^r$ and $A_{\Delta,4}^m$ in order to illustrate the dynamical character of AVL and the differences between the possible strategies. Our vagueness hedge of choice for the definition of the abnormalities is \mathcal{V} (abnormalities of type 4). We first consider a theory in which Minimal Abnormality and Reliability result in the same proof.

1	$p \rightarrow q$	PREM	\emptyset	
2	$\neg p \rightarrow q$	PREM	\emptyset	
3	$r \rightarrow s$	PREM	\emptyset	
4	$\neg r \rightarrow s$	PREM	\emptyset	
5	$s \rightarrow \neg q$	PREM	\emptyset	
6	$t \rightarrow u$	PREM	\emptyset	
7	$\neg t \rightarrow u$	PREM	\emptyset	
8	q	1, 2; RC	$\{\mathcal{V}p\}$	✓
9	s	3, 4; RC	$\{\mathcal{V}r\}$	✓
10	$\neg q$	5, 9; RC	$\{\mathcal{V}r\}$	✓
11	u	6, 7; RC	$\{\mathcal{V}t\}$	
12	$q \wedge \neg q$	8, 10; RU	$\{\mathcal{V}p, \mathcal{V}r\}$	✓
13	$\mathcal{V}r \vee \mathcal{V}p$	1–7; RU	\emptyset	

Lines 8 and 9 are derived on the condition that respectively p and r are not fuzzy. On line 11 we derive u on the condition that t is not fuzzy. On line 12 we derive

the contradiction $q \& \neg q$ on the condition that p and r are both not fuzzy. Because the **LLL**, i.e. Δ , is not paraconsistent, the premises imply that at least one of the propositions r and p is fuzzy, as can be seen on line 13. This line is a minimal *Dab*-formula (at stage 13). Hence, lines 8 to 10 are marked indifferent of the strategy we use, cf. the marking definitions 65 and 66. Obviously, line 11 is not marked, as its condition does not contain r or p . Hence, u is an $\mathbf{A}_{\Delta,4}^m$ -consequence, while formulas like q , $\neg q$ and s are not. The same holds for $\mathbf{A}_{\Delta,4}^r$.

Semantically, these adaptive consequences are the result of a selection of a set of **LLL**-models, i.e. a set of Δ -models. We illustrate this selection by means of the following two models of the premises.

	p	q	r	s	t	u
M_1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
M_2	0.5	0.5	0.5	0.5	0	1

The model M_1 is a **LLL**-model of the premises. This model verifies the abnormalities $\mathcal{V}p$, $\mathcal{V}q$, $\mathcal{V}r$, $\mathcal{V}s$, $\mathcal{V}t$ and $\mathcal{V}u$. The model M_2 is also a **LLL**-model of the premises, but verifies fewer abnormalities, namely $\mathcal{V}p$, $\mathcal{V}q$, $\mathcal{V}r$ and $\mathcal{V}s$. $\mathbf{A}_{\Delta,4}^m$ selects the least abnormal **LLL**-models. Hence, M_2 is an \mathbf{A}_{Δ}^m -model and M_1 is not. For $\mathbf{A}_{\Delta,4}^r$ the same result is obtained.

Next we consider an example in which the strategies generate a different outcome.

1	$\mathcal{V}p \vee \mathcal{V}q$	PREM	\emptyset	
2	$\Delta(p) \rightarrow r$	PREM	\emptyset	
3	$\Delta(\neg p) \rightarrow r$	PREM	\emptyset	
4	$\Delta(q) \rightarrow r$	PREM	\emptyset	
5	$\Delta(\neg q) \rightarrow r$	PREM	\emptyset	
6	$\Delta(q) \rightarrow s$	PREM	\emptyset	
7	$\Delta(\neg q) \rightarrow s$	PREM	\emptyset	
8	r	2, 3; RC	$\mathcal{V}p$	
9	r	4, 5; RC	$\mathcal{V}q$	
10	s	6, 7; RC	$\mathcal{V}q$	\checkmark

Proposition r is derived on the condition that p is not fuzzy as well as on the condition that q is not fuzzy, cf. respectively lines 8 and 9. On line 10, s is derived on the condition that q is not fuzzy. Line 1 tells us that p or q is fuzzy. When using Reliability, this fact leads to the marking of line 8 to 10 by means of marking definition 65. Minimal Abnormality, however, behaves less brute: it holds that $\Phi = \{\{\mathcal{V}p\}, \{\mathcal{V}q\}\}$, and thus, in view of marking definition 66, only line

10 should be marked (at stage 10). Line 8 and 9 remain unmarked when using this strategy.

On the semantic level, we illustrate the corresponding selections of **LLL**-models by means of the following three models of the premises.

	p	q	r	s
M_1	0.5	1	1	1
M_2	1	0.5	1	0
M_3	0.5	0.5	0	0

Both M_1 , M_2 and M_3 are reliable models, because $U(\Gamma) = \{\mathcal{V}p, \mathcal{V}q\}$. Neither r , nor s are true in all of these models. The models M_1 and M_2 are also minimally abnormal models, but M_3 is not. The set of abnormalities verified by M_3 is a proper superset of the set of abnormalities verified by M_1 . The proposition r is true in all of these minimally abnormal models, but s is not.

F.6 Conclusion

We have presented a generic format for **AVL**. Every concrete **AVL** based on this format is able to extend its basic set of **VL**-inference rules up to **CL** for a theory Γ on the condition that Γ allows for a non-vague interpretation. Hence, in contrast to the monotonic **VL**'s known from the literature, an adaptive vague logic can derive more from a given set of premises when this set allows it. The format consists of a set of minimal criteria that must be satisfied by **VL** when used as a basis for **AVL**. These criteria mainly focus on the way in which **VL** incorporates the \square -operator. This operator is used to express what it means for a formula to be vague. The abnormalities are formulas that express the vagueness of sentential letters. They characterize **AVL** in combination with **VL** and a strategy. A wide variety of different vague logics satisfies the **VL**-criteria. The elegant dynamic proof theory of **AVL** is illustrated by means of two concrete examples. To end, we note that we have also used this format to develop an **AVL** that can deal with sorites series and their famous paradoxes. The **VL** in question is a variant of Łukasiewicz fuzzy logic, extended with Δ as the \square -operator, and a lowered threshold for truth-acceptability, cf. [105].

Artikel ‘Modeling sorites reasoning with adaptive fuzzy logic’

Authors

Stephan van der Waart van Gulik en Peter Verdée

Abstract

We present and discuss a new solution for reasoning with sorites series and their related paradoxes. We argue that a suitable logic for sorites series should be able to apply specific classical logic rules like modus ponens until and unless it becomes apparent that these applications generate unacceptable results. When this happens, the logic should be able to retract those applications of classical logic rules that are problematic. The formal core of our solution consists of several adaptive logics based on a Łukasiewicz fuzzy logic extended with the Baaz’ Δ -operator and a non-singleton interval of designated values. The natural dynamics characteristic of adaptive logics allows these logics to perform necessary retractions in an intuitive and elegant manner.

Journal

In print in Fuzzy Sets and Systems.

G.1 Introduction

The sorites paradox is a very old¹ and tricky argument and a lot of solutions have been formulated throughout the centuries. In this paper, we present a new solution, quite distinct from other recent replies to the paradox. The formal core of our solution is based on the *adaptive fuzzy logics* \mathbb{L}_n^{ml} , \mathbb{L}_n^{mg} , \mathbb{L}_n^{rl} and \mathbb{L}_n^{rg} .² The paper is structured as follows. In section G.2, we first present the sorites paradox and its different representations. Next, we discuss several contemporary solutions. Finally, we outline our own solution by contrasting it with the existing replies. In section G.3, we introduce the basics of adaptive logic (**AL**). First, we present the *standard format* of **AL** and give a general characterization of the basic components. Next, the proof theory of **AL** is presented, followed by a presentation of its semantics. Finally, we illustrate the proof-theoretical dynamics of **AL** by means of a simple dynamic proof in the inconsistency-adaptive logics CLuN^{m} and CLuN^{r} . In section G.4, we present and discuss the adaptive fuzzy logics. First, we present the fuzzy logic \mathbb{L} , i.e. Łukasiewicz fuzzy logic with designated value 1 and extended with the Baaz' Δ operator. Next, we introduce \mathbb{L}_n , i.e. \mathbb{L} with a non-singleton interval of designated values. This logic forms the so-called *lower limit logic* (**LLL**) that is used as a basis for the adaptive fuzzy logics. Finally, we present and discuss the actual set-up of the adaptive fuzzy logics. In section G.5, we show how these adaptive fuzzy logics deal with the sorites paradox by means of concrete dynamic proofs simulating reasoning with a sorites argument. In section G.6, we synthesize our main results.

G.2 The sorites paradox

G.2.1 Contemporary representations

In contemporary literature, the argument is presented in many different ways. One insightful way is based upon mathematical induction (let P be a unary pred-

¹The name *sorites* stems from the Greek word *soros* meaning *heap*. The argument is one of the puzzles attributed to the Megarian logician Eubulides of Miletus, ca. 400 B.C.

²In [107], a *vagueness adaptive logic* is presented. This adaptive logic formalizes a solution to the sorites series that differs strongly from the one proposed here. The logic formalizes a similar dynamics, but reduces vagueness to ambiguity and do not consider truth degrees.

icate, let t be a unary function and let quantifiers operate over \mathbb{N}).

Premise 1: $Pt(0)$

Premise 2: $(\forall x)(Pt(x) \rightarrow Pt(x + 1))$

Conclusion: $(\forall x)Pt(x)$

For example, let P stand for ‘is bald’ and let the subject expression $t(n)$ denote the expression ‘a man with n hair(s) on his head’ (with regard to which P is ‘soritical’). In this case, Premise 1 states that a man with 0 hairs is bald. This statement is obviously true. Premise 2, i.e. the *inductive premise*, simply expresses that, for any pair of adjacent members $t(n)$ and $t(n + 1)$ in a series, the difference between n and $n + 1$ is not enough to make a difference between $t(n)$ and $t(n + 1)$ with respect to the application of P . In other words, if a man with n hair(s) is bald, then so is a man with $n + 1$ hair(s). This statement is acceptable because the application radius of P is indeterminate, i.e. P is vague (see also Crispin Wright’s notion of tolerance in [122]). If P ’s radius of applicability would be defined precisely by means of some clear cut-off point n , the inductive premise would not be acceptable. However, at this point the paradoxical trouble starts, as large differences do make a difference. Using classical logic (CL), we can derive conclusions that are absolutely false as n can be arbitrary large, e.g. ‘a man with 1.10^9 hairs on his head is bald.’ Note that, being in a CL-context, the inductive premise is the motor of the argument as it brings on false conclusions by allowing repeated applications of modus ponens.

Apart from the inductive form above, also the so-called *conditional* form and *line-drawn* forms are often used. These forms do not use an inductive premise. In the conditional form, each possible conditional step is represented explicitly (let n be some large number).

Premise 1: $Pt(0)$

Premise 2: $Pt(0) \rightarrow Pt(1)$

Premise 3: $Pt(1) \rightarrow Pt(2)$

...

Premise $n+1$: $Pt(n - 1) \rightarrow Pt(n)$

Conclusion: $Pt(n)$

In the line-drawn form below, Premise 2 states that it is not true that a man is bald indifferent of the amount of hair on his head.

Premise 1: $Pt(0)$

Premise 2: $\neg(\forall x)Pt(x)$

Conclusion: $(\exists x)(x > 0 \wedge Pt(x) \wedge \neg Pt(x + 1))$

Premise 2 seems to be uncontroversial. However, as we can easily see, it follows by means of the least number principle that there exists an exact number of hairs n that draws the line between bald and non-bald.³

Note that any serious logical solution for the paradoxical nature of the argument should be able to deal with all three possible representations. If this is not the case, one can hardly argue to have solved the paradox *in se*.⁴

G.2.2 Contemporary solutions

Many possible solutions have been formulated with respect to the paradoxical nature of the argument. Depending on how the vagueness of predicates is conceived and formalized, different replies emerge. We briefly present the most well-known contemporary ones.⁵

According to philosophers like Gottlob Frege, Bertrand Russell and, more recently, William V. O. Quine, cf. [96], valid reasoning is done by means of **CL** and a **CL**-language must be a precise, well-defined language, i.e. a language without vague predicates. Since the sorites paradox is intrinsically based upon the vagueness of the involved predicate, its (non-logical) vocabulary is not (yet) well-defined. Hence, from this perspective, the argument cannot be presented as a challenge to **CL**.

A more contemporary group of scholars defends the idea that vague predicates should not inhibit us from reasoning classically as we should take into account all possible ways in which vague predicates can be made precise. The logical framework of this approach is called *supervaluationism* (**SV**), cf. [58]. In **SV**-semantics, the valuation procedure does not use valuation functions operating over vague models. Instead, *supervaluation* functions are used which are based on *supermodels*. Each supermodel represents a possible way in which an

³The least number principle states that if a number n has a certain property and a larger number m does not, then there is a least number among the set of numbers between n and m that does not have the property.

⁴If one argues for example that the problem is localized exclusively within the functionality of the quantifier \forall , it is very likely that the logic developed in order to solve this problem will not be able to deal with some representations of the paradox.

⁵For the sake of completeness, we mention [68] by Rosanna Keefe and Peter Smith. This reader contains a critical discussion of recent philosophical approaches to the sorites argument, followed by a series of papers containing seminal contributions to these approaches.

initially vague set-up can be made precise. In other words, in every final supermodel, it is clear for every predicate what belongs to its extension and what does not. As the notion of *supertruth* is based on these **CL**-like supermodels, **SV** validates all **CL**-tautologies. When applying this approach to, for instance, the inductive form of the sorites paradox, it immediately becomes clear that the inductive premise cannot be supertrue. In every possible supermodel, a natural cut-off point emerges, making the inductive premise superfalse. Consequentially, **SV** does not accept the inductive premise. An important, recent **SV**-inspired approach can be found in Stewart Shapiro's [103]. Shapiro's approach is characterized by a focus on the context-sensitivity of vague predicates. In any given context, competent speakers can place borderline cases of vague predicates in or outside the related extensions in order to obtain a more specified semantics. Every considered specification corresponds to a specific context(-shift).

Another approach is defended by Timothy Williamson in [119]. Williamson argues that vagueness does not result from the actual absence of crisp extensions, but from our ignorance of these extensions. The identification of the actual crisp extensions seems to remain out of our cognitive scope. People tend to accept the sorites argument because they do not realize that they are not able to identify the right crisp extensions. In order to formalize this philosophical stance, Williamson developed the logic **LC**, i.e. **CL** extended with a modal connective meaning 'clearly', cf. the appendix of [119].

A fourth approach is that of fuzzy logic (**FL**). This approach focuses on the gradual applicability of fuzzy predicates. Formally, **FL**-semantics allows elements to reside in the extensions of predicates up to some degree (of infinitely many possible degrees). In order to represent this possibility in a maximally general way, **FL** often uses the interval $[0, 1]$ of real values as truth degrees. Hence, one can use the single designated value 1 or use some non-singleton interval of designated values, i.e. an interval $[x, 1]$, where $0 < x < 1$. In fact, a typical but rather simple **FL**-response to the paradox is that modus ponens must fail as a result of using a non-singleton interval of designated values, cf., for example, [93] for a clear discussion of this response. Two other important and more constructive **FL**-based solutions are presented in [63] by Petr Hájek and Vilém Novák. In the first solution, they implement a fuzzy hedge operator *Almost true* (*At*) in an extension of the basic first-order fuzzy logic **BL** \forall with function symbols, cf. [60] and [61], and an extended language for Peano arithmetic, cf. [64]. This logic makes it possible to consistently express a formal sorites argument that states that (1) 0 is feasible, (2) if it is true that a number x is feasible, then it is also almost true that $x + 1$ is feasible, i.e. the truth degree of the latter statement is only a little bit smaller than the first one, and (3) some number x exists that is

not feasible. The second solution uses **FLn**, a first-order fuzzy logic with evaluated syntax, cf. also [90].⁶ **FLn** works with evaluated formulas, i.e. couples of the form a/A , where A is a formula and a is its syntactic evaluation. The evaluation a represents the initial information about the degree of truth of A . This approach makes it possible to express the consistent fuzzy theory $\{1/Feasible(0), 1/(\exists x)\neg Feasible(x), 1 - \epsilon/(\forall x)(Feasible(x) \rightarrow Feasible(x+1))\}$, where $\epsilon \in]0, 1]$. The non-absolute evaluation $1 - \epsilon$ of $(\forall x)(Feasible(x) \rightarrow Feasible(x+1))$ represents the natural doubt one has (or should have) with respect to the induction step in the sorites argument. Remark that expressing a certain degree of doubt with respect to the induction step is not the same as refusing to accept it, as is done in **SV**. Each evaluated formula derived from this theory by a series of applications of modus ponens will have a slightly lower evaluation than its predecessor. Hence, the evaluations of the derivations converge to 0.

G.2.3 An adaptive fuzzy logic solution

In this paper, we present another possible solution, formally incarnated in the adaptive fuzzy logics \mathcal{L}_n^{ml} , \mathcal{L}_n^{mg} , \mathcal{L}_n^{rl} and \mathcal{L}_n^{rg} . These logics have a natural dynamics that allows **CL**-rules like modus ponens to be applied to the conditional(s) in the sorites argument until and unless it becomes apparent that these applications generate unacceptable results. When such results occur, the involved applications are elegantly retracted and a fuzzy logic is used instead.

Before getting into the formal set-up of these logics, we present the philosophical assumptions behind our solution and point out the differences with the assumptions of the existing solutions discussed above.

Our solution is based on the following philosophical assumptions.

- It is rational to accept the premises of a sorites argument, including the inductive hypothesis.
- **CL** is the default reasoning tool, also when one is confronted with a sorites argument.
- The paradoxical character of a sorites argument only becomes explicit when one naively generates chains of modus ponens applications by means of **CL**.

⁶A related, fuzzy type-theory approach that is richer with respect to natural language semantics can be found in [89].

- Only when the paradox is explicitly met during **CL**-reasoning, it becomes clear that **CL** does not generate sound results and that a different, more suitable logic is necessary for the involved predicate, i.e. fuzzy logic.

It is evident that we only partly agree with the ‘**CL**-exclusive stance’ of Frege, Russel etc. Although one can argue that well-defined predicates are a must, there are many everyday reasoning contexts in which it turns out to be very hard, maybe even impossible, to use well-defined predicates. To exclude these contexts from normative research on correct reasoning is utterly impractical. From the pragmatic stance we adopt here, everyday reasoning contexts cannot be ignored. Given that common sense reasoning is often forced by a given context to use vague predicates, also a normative framework with respect to vague reasoning is desirable. We opt for fuzzy logics to formalize this vague reasoning as these logics model well the type of vagueness involved in sorites series, i.e. the gradual applicability of predicates. Moreover, mixed contexts frequently occur in which some, yet not all predicates are well-defined. This makes it unclear which reasoning tool is desirable for reasoning with a specific predicate. Given these facts, we choose to use a dynamic reasoning tool that allows the logic **CL** to remain the default reasoning tool and yet, when necessary, to locally use fuzzy logic. More specifically, with respect to a sorites argument, the natural dynamics characteristic of our adaptive fuzzy logics allows **CL**-rules like modus ponens to be applied to the conditional(s). However, when it becomes apparent that these applications generate unacceptable results, the involved applications are retracted and a fuzzy logic is used instead.

The standard **SV**-solution is based on the idea that ultimately the inductive hypothesis of the sorites argument, i.e. the inductive premise in the inductive form or the explicit conditional steps in the conditional form, cannot be accepted. In contrast, we argue that it is rational to accept the inductive hypothesis of the sorites argument. We stress the fact that the argument is designed in such a way that the difference between each n and $n + 1$ is not enough to make a difference with respect to the application of the predicate in question. Remark however, that, despite the fact that we base our logic partly on **FL**, we do have the **CL**-bias in common with **SV**. With respect to Shapiro’s approach, there are several philosophical similarities and differences. Similar to our approach, Shapiro acknowledges the existence of a dynamics with respect to sorites reasoning, cf. his account of context shifts. However, his approach also presupposes that, when a reasoner is confronted with the sorites argument, he or she is aware of the vagueness of the predicate in the argument. In our approach, by contrast, the reasoner does not know in advance that the sorites argument involves a vague predicate (and, hence, **CL** is the default reasoning tool for the involved predicate

until this logic turns out to generate unsound results).

In Williamson's approach, it is argued that people accept the sorites argument because they do not realize that they are not able to identify the actual, real crisp extensions of the involved predicate. In our approach, however, it is argued that it is *rational* for people to accept the sorites argument, and no unknowable crisp extensions are presupposed. Moreover, we do not share the **CL**-preference of Williamson, as we also argue that it is rational for people to start reasoning by means of **CL**, thereby presupposing crisp extensions, and to switch to a more adapted fuzzy reasoning in those cases where this type of reasoning turns out to generate problems.

In contrast to the typical **FL**-approach in which valid repeated applications of modus ponens are limited, our approach allows for the local failing of modus ponens applications for predicates that turn out to be fuzzy and unrestricted modus ponens applications for those predicates which turn out to be interpretable as non-fuzzy. With respect to the **FL**-solutions proposed by Hájek and Novák, there are both some similarities and differences. Similar to Hájek and Novák, we acknowledge that it is rational to accept some kind of inductive hypothesis.⁷ However, in contrast to Hájek and Novák, we argue that the paradoxical character of the argument only becomes explicit when the reasoner naively uses modus ponens and other **CL**-rules. Only then it becomes clear that a suitable fuzzy logic is necessary. Hence, specifically in contrast to the second solution using **FLn**, we do not use any explicit a-priori fuzzy representation of doubt with respect to the induction hypothesis. Furthermore, **CL** remains our logic of choice until it generates fuzziness-related problems. In this way, we do not only describe a fuzzy logic solution for reasoning with sorites series like Hájek and Novák, but also try to describe the dynamic way in which people may find this solution after being explicitly confronted with the paradoxical nature of the argument during naive **CL**-reasoning.

G.3 Adaptive logic

AL is an attempt to explicate actual reasoning processes, both in every day and in scientific reasoning contexts. **AL** does not define an absolute standard for deduction, but should be understood as a useful instrument to model defeasible reasoning forms observed in human problem solving processes. The **AL**-proofs do not deliver demonstrations of, or justifications for **AL**-consequences. They

⁷Recall that the expression of a certain degree of doubt with respect to the induction premise in the second solution is not a refusal to accept it.

are formalizations of dynamic reasoning processes in which derivations may be retracted in view of new insights. Next to these dynamics, **AL** defines a static consequence relation. One can interpret this relation as determining the final core of stabilized results of the dynamic reasoning process, i.e. the final consequences known from the idealized, omniscient point of view.

G.3.1 The standard format of adaptive logic

A standard format for **AL** is developed by Diderik Batens in [29]. It determines a generic set-up for both the proof theory and the semantics of **AL**. It is also proven in [29] that any concrete **AL** definable within the constraints of this standard format immediately has a large set of important meta-theoretical properties, among which soundness and completeness. We now define the standard format and sketch the general idea behind the proof theory and semantics of **AL**. In the next two subsections, we present the formal details.

Definition 77 *An AL in standard format is a triple consisting of the following elements.*

1. A lower limit logic (**LLL**): a monotonic, reflexive, transitive and compact logic which has a characteristic semantics (with no trivial models) and a language that contains the connectives \sim and \vee with a **CL**-meaning, i.e. $M \vDash_{\text{LLL}} \sim A$ iff $M \not\vDash_{\text{LLL}} A$, and $M \vDash_{\text{LLL}} A \vee B$ iff $M \vDash_{\text{LLL}} A$ or $M \vDash_{\text{LLL}} B$.
2. A set of abnormalities: a set of formulas Ω characterized by a (possibly restricted) logical form that is **LLL**-contingent and contains at least one logical symbol.
3. A strategy: the strategy determines how to cope with conditional derivations given a set of derived abnormalities. The most important strategies are Reliability and Minimal Abnormality.

Proof-theoretically, **AL** adapts itself to a specific premise set by oscillating between the **LLL** and an upper limit logic (**ULL**). The **ULL** validates an extra set of inference rules next to the standard rules of the **LLL** by means of the set of abnormalities. The extra set of rules trivializes abnormalities in such a way that, where $\Upsilon^{\sim} = \{\sim A \mid A \in \Upsilon\}$, $\Gamma \vdash_{\text{ULL}} A$ iff $\Gamma \cup \Omega^{\sim} \vdash_{\text{LLL}} A$. In **AL**, the **ULL**-exclusive rules are only applicable on a condition and are therefore called *conditional rules*. More specifically, a conditional rule may be applied until and unless it turns out that some related (disjunction of) abnormalities cannot be interpreted as false in view of the premise set. When the latter happens, those

derivations that are (in)directly based on the conditional rule become marked by means of a special *marking definition*. A marked formula is no longer considered a derived formula. There are several marking definitions. Which marking definition is chosen depends on the type of strategy that is used with respect to (disjunctions of) abnormalities. The proof theory is called a *dynamic proof theory* because of the possibility of formulas being marked and unmarked throughout the progression of a proof. Nevertheless, the actual consequence relation $\vdash_{\mathbf{AL}}$ is static. Given a theory Γ , this relation defines the set of formulas that are derived from Γ on unmarked lines and stay unmarked in any extension.

Semantically, **AL** selects the **LLL**-models of the premises that are as normal as possible. This is an ambiguous expression. The strategy determines how it is disambiguated. For example, in case of the Minimal Abnormality strategy, this expression is disambiguated as: the models are selected that verify as little abnormalities as possible, where ‘as little as possible’ is to be interpreted in the set theoretic sense. A formula A is a semantic **AL**-consequence of a premise set iff A is true in all selected models. In contrast to the proofs, this selection and the semantic consequence relation based upon it are static.

G.3.2 The proof theory of **AL**

The proof theory of **AL** consists of a set of inference rules (determined by **LLL** and Ω) and a marking definition (determined by Ω and the chosen strategy). An **AL**-proof is a chain of stages. A stage is a list of lines. A chain of stages is a list of stages in which for each two subsequent stages holds that the first is an extension of the second. A line of an annotated **AL**-proof consists of five elements: (1) a line number i , (2) a formula A , (3) a justification rule, (4) a condition consisting of a set of abnormalities $\Theta \subset \Omega$, and (5) a \checkmark or nothing when the line is marked respectively unmarked. The disjunction of the members of a finite $\Upsilon \subset \Omega$, $Dab(\Upsilon)$, is called a *Dab-formula*. The inference rules govern the addition of lines. There are 3 types of rules.

PREM	If $A \in \Gamma$	\dots	\dots
		A	\emptyset
RU	If $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{\text{LLL}} B$	A_1	Υ_1
		\dots	\dots
		A_n	Υ_n
		B	$\Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_n$
RC	If $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{\text{LLL}} B \vee Dab(\Theta)$	A_1	Υ_1
		\dots	\dots
		A_n	Υ_n
		B	$\Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_n \cup \Theta$

PREM inserts a premise. RU enables unconditional derivations. RC allows for conditional derivations, i.e. B is derived from A_1, \dots, A_n on the condition Θ . Every **AL**-proof can be transformed into a **LLL**-proof in view of the following crucial theorem, cf. [29].

Theorem 36 *There is an **AL**-proof from Γ that contains a line on which A is derived on the condition Υ iff $\Gamma \vdash_{\text{LLL}} A \vee Dab(\Upsilon)$.*

A is derived in stage s iff s contains an unmarked line that has A as its second element. A marking definition determines for every line i in every stage s of a proof whether line i is (un)marked in view of the condition of i and the *minimal Dab-formulas* that are derived in s . $Dab(\Upsilon)$ is a minimal *Dab*-formula in stage s iff $Dab(\Upsilon)$ is derived in s on the condition \emptyset and no $Dab(\Upsilon')$ with $\Upsilon' \subset \Upsilon$ is derived on the condition \emptyset . Which marking definition is chosen depends on the type of strategy that is used with respect to (disjunctions of) abnormalities. The most important strategies are Reliability and Minimal Abnormality.⁸ Before presenting their definitions, we need to specify three special meta-theoretic sets. Where $Dab(\Upsilon_1), \dots, Dab(\Upsilon_n)$ are the minimal *Dab*-formulas derived on the condition \emptyset in stage s , $U_s(\Gamma) = \Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_n$ and $\Phi_s^\circ(\Gamma)$ is the set of all sets that contain one member of each Υ_i . $\Phi_s(\Gamma)$ consists of the $\varphi \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$ that are not proper supersets of a $\varphi' \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$.

Definition 78 *Marking definition for Reliability.*

Where Υ is the condition of line i , line i is marked at stage s if $\Upsilon \cap U_s(\Gamma) \neq \emptyset$.

Definition 79 *Marking definition for Minimal Abnormality.*

Where A is the formula and Υ is the condition of line i , line i is marked in stage s if

⁸In general, the marking definition of the Reliability strategy can be interpreted as a good approximation of the Minimal Abnormality strategy (which has a more complex marking definition). In concrete **AL**'s, the strategies often coincide. Still, **AL**'s using Minimal Abnormality are semantically closer to what we intuitively expect from a logic 'interpreting premises as normal as possible.'

1. there is no $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ such that $\varphi \cap \Upsilon = \emptyset$, or
2. for some $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is no line at which A is derived on a condition Θ for which $\varphi \cap \Theta = \emptyset$.

Finally, two types of derivability are defined in **AL**. A formula A is *derived in a stage* iff A is derived on an unmarked line in the stage. A formula may be marked and unmarked again throughout the successive stages of a proof, thereby being derived and non-derived throughout these stages. This is what makes the proof-theory dynamic.

Definition 80 A formula A is finally derived from Γ , in symbols $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$, if A is derived on an unmarked line i and the proof is ‘stable with respect to i ’, i.e. even if line i is marked in some extension of the proof, it can be unmarked in some further extension.

It is the notion of final derivability that defines the actual consequence relation $\vdash_{\mathbf{AL}}$. Remind that $\vdash_{\mathbf{AL}}$ is static.

G.3.3 The semantics of AL

Semantically, **AL** selects specific **LLL**-models of the premises. The selection depends on Ω and the chosen strategy. Some preliminary definitions are necessary before we proceed. $Dab(\Upsilon)$ is a *minimal Dab-consequence* of Γ iff $\Gamma \vDash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Upsilon)$ and, for all $\Upsilon' \subset \Upsilon$, $\Gamma \not\vDash_{\mathbf{LLL}} Dab(\Upsilon')$. Where $Dab(\Upsilon_1)$, $Dab(\Upsilon_2)$, ... are the minimal *Dab*-consequences of Γ , let $U(\Gamma) =_{df} \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup \dots$. Finally, where M is a **LLL**-model, $Ab(M) =_{df} \{A \in \Omega \mid M \models A\}$.

Definition 81 A **LLL**-model M of Γ is a reliable model if $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.

Definition 82 A is a reliable semantic consequence of Γ , in symbols $A \vDash_{\mathbf{AL}^r} A$, if all reliable models of Γ verify A .

Definition 83 A **LLL**-model M of Γ is a minimally abnormal model if there is no **LLL**-model M' of Γ for which $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Definition 84 A is a minimal abnormal semantic consequence of Γ , in symbols $\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}^m} A$, if all minimally abnormal models of Γ verify A .

Finally, we note that, although this type of semantics is static, intuitive dynamic variants are presented in [9] and [10].

G.3.4 A concrete example: CLuN^m

To illustrate the formal theory above, we present and discuss two concrete stages of **AL**-proofs in the inconsistency-**AL**'s CLuN^m and CLuN^r . Note that the first **AL**'s were in fact inconsistency-**AL**'s, cf. [14]. CLuN^m and CLuN^r interpret a given premise set Γ as consistently as possible. The logics make use of the fact that the weakness of standard paraconsistent logics is not required in perfectly consistent subsets of the language, i.e. the set of formulas A for which $A \& \neg A$ is not a consequence of Γ . CLuN^m and CLuN^r are defined as follows. Both logics use the same **LLL** and set of abnormalities. The **LLL** is the paraconsistent logic **CLuN**. **CLuN** is the full positive fragment of **CL** with simple gluts for the negation connective. For any formula A in **CLuN**, both A and $\neg A$ can be true (but they cannot be both false). The set of abnormalities is $\Omega = \{A \wedge \sim A \mid A \in \mathcal{F}\}$, where \mathcal{F} is the set of formulas. The respective strategies for CLuN^m and CLuN^r are Minimal Abnormality (indicated by the superscript m) and Reliability (indicated by the superscript r). Given these choices, the **ULL** is **CL** as this logic equals **CLuN** plus $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$. Now consider the following stage of a proof from $\Gamma = \{(p \& q) \& t, \neg p \vee r, \neg q \vee s, \neg p \vee \neg q, t \rightarrow \neg p\}$.

1	$(p \& q) \& t$	PREM	\emptyset	
2	$\neg p \vee r$	PREM	\emptyset	
3	$\neg q \vee s$	PREM	\emptyset	
4	$\neg p \vee \neg q$	PREM	\emptyset	
5	$t \rightarrow \neg p$	PREM	\emptyset	
6	r	1, 2; RC	$\{p \wedge \sim p\}$	✓
7	s	1, 3; RC	$\{q \wedge \sim q\}$	
8	$(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$	1, 4; RU	\emptyset	
9	$p \wedge \sim p$	1, 5; RU	\emptyset	

As can be seen at lines 6 and 7, r and s can only be derived from the premises on the condition that p respectively q are not inconsistent. On line 8 it turns out that p or q are inconsistent (a formula and its negation are both true). This derivation leads to the marking of line 6 and 7 with both marking definitions. On line 9 however, it turns out that p is inconsistent. Consequentially, the *Dab*-formula on line 8 becomes non-minimal and line 7 becomes unmarked with both marking definitions. Line 6 however, stays marked with both marking definitions because of the minimal *Dab*-formula on line 9. At this stage, the derived consequences cannot become marked at a further stage. The consequences are finally derived using both strategies.

Of course there are cases for which the two different strategies result in a different set of finally derivable consequences. Consider the following stage of a

proof from $\Gamma = \{(p \& q) \& r, \neg p \vee \neg q \vee s, \neg p \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim r)\}$.

1	$(p \& q) \& r$	PREM	\emptyset
2	$\neg p \vee \neg q \vee s$	PREM	\emptyset
3	$\neg p \vee \neg r \vee s$	PREM	\emptyset
4	$\neg q \vee \neg r \vee s$	PREM	\emptyset
5	$(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim r)$	PREM	\emptyset
6	s	1, 2; RC	$\{p \wedge \sim p, q \wedge \sim q\}$ ✓
7	s	1, 3; RC	$\{p \wedge \sim p, r \wedge \sim r\}$ ✓
8	s	1, 4; RC	$\{q \wedge \sim q, r \wedge \sim r\}$ ✓

Now, should line 6, 7 and 8 be marked? First, consider the marking definition for Reliability. In this case, $U_s(\Gamma) = \{p \wedge \sim p, q \wedge \sim q, r \wedge \sim r\}$, because the only minimal *Dab*-consequence is the formula of line 5. The conditions of lines 6 to 8 all three have abnormalities in common with $U_s(\Gamma)$, so these lines should be marked. Next, consider the marking definition for Minimal Abnormality. $\Phi_s(\Gamma) = \Phi_s^\circ(\Gamma) = \{\{p \wedge \sim p\}, \{q \wedge \sim q\}, \{r \wedge \sim r\}\}$, because the only minimal *Dab*-consequence is the formula of line 5. For every $\phi \in \Phi_s(\Gamma)$ there is a line on which s is derived on a condition Δ such that $\Delta \cap \phi = \emptyset$ ($\{p \wedge \sim p\} \cap \{q \wedge \sim q, r \wedge \sim r\} = \emptyset$, $\{q \wedge \sim q\} \cap \{p \wedge \sim p, r \wedge \sim r\} = \emptyset$, and $\{r \wedge \sim r\} \cap \{p \wedge \sim p, q \wedge \sim q\} = \emptyset$). Hence, lines 6, 7 and 8 should not be marked when the Minimal Abnormality strategy is used.

G.4 The adaptive fuzzy logics \mathbf{L}_n^{mg} , \mathbf{L}_n^{rg} , \mathbf{L}_n^{ml} and \mathbf{L}_n^{rl}

G.4.1 The fuzzy logic \mathbf{L} with only one designated value

We now characterize the first-order Łukasiewicz fuzzy logic \mathbf{L} extended with the Baaz' Δ -operator and designated value 1, cf. [60]. In the next subsection, we lower its threshold of acceptance, thereby obtaining the logic \mathbf{L}_n (which can be embedded in \mathbf{L}). This lowering makes it possible to simulate the intuitive acceptability of the sorites conditional(s), which we argued for in subsection G.2.3. More specifically, it enables the conditional(s) to remain acceptable, despite the fact that consequent(s) are generally a little less true than the antecedent(s), see section G.5 for an example.

We start of with defining the language schema. Let the set of unary predicate symbols $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$, the finite set of constant symbols $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots\}$, and the set of variable symbols $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$. The language \mathcal{F} of open en closed formulas consists of atomic formulas $\pi\alpha$, where $\pi \in \mathcal{P}$ and $\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}$, and is closed under the the unary connectives and operators \neg , Δ , and \mathbb{F} , \sim_i ($i \in \mathbb{N}$), the binary

connectives $\&$, \wedge , \vee , \rightarrow , and \vee and the quantifiers \forall and \exists in the standard first-order way. The set of closed formulas \mathcal{W} is also defined in the usual way.

The logic \mathfrak{L} is not complete with respect to the standard $[0, 1]$ -semantics. However, we only use a finitary version of this logic (finite premise sets, a finite set of constants, only ω -complete models). This is a straight forward extension of propositional Łukasiewicz logic. The propositional version with finite premise sets is complete with respect to the standard $[0, 1]$ -semantics. For most of the interesting sorites series, this finitary logic suffices.

With respect to the proof theory, we use the Rose-Rosser axioms. This axiomatization is first presented in [101].⁹

- (A1) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (A2) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (A3) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
- (A4) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

An extra set of axioms is added to fix the meaning of the Δ operator, which can be read as ‘it is completely true that’ and is generally known as Baaz’ Δ , cf. [60].

- (A Δ 1) $\Delta A \vee \neg \Delta A$
- (A Δ 2) $\Delta(A \vee B) \rightarrow (\Delta A \vee \Delta B)$
- (A Δ 3) $\Delta A \rightarrow A$
- (A Δ 4) $\Delta A \rightarrow \Delta \Delta A$
- (A Δ 5) $\Delta(A \rightarrow B) \rightarrow (\Delta A \rightarrow \Delta B)$

The rules are the following.

- (MP) From A and $A \rightarrow B$ derive B
- (NEC) From A derive ΔA

The defined symbols are the following. Let A^i abbreviate $\overbrace{A \& A \& \dots \& A}^{i \text{ times}}$, where $i \in \mathbb{N}$ and $i \geq 1$.

- (D1) $A \vee B =_{df} \neg A \rightarrow B$
- (D2) $A \& B =_{df} \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (D3) $A \wedge B =_{df} A \& (A \rightarrow B)$
- (D4) $A \vee B =_{df} ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \& ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
- (D5) $\sim_i A =_{df} \neg \Delta(A \vee A^i)$, where $i \in \mathbb{N}$
- (D6) $\mathbb{F}A =_{df} \neg \Delta \neg A \wedge \neg \Delta A$.
- (D7) $\forall \alpha A(\alpha) =_{df} \bigwedge \{A(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C}\}$
- (D8) $\exists \alpha A =_{df} \neg \forall \alpha \neg A$

⁹The original axiomatization consisted of five axioms. One of these was proven to be redundant in [49].

The semantics of the logic is characterized as follows. $M = \langle D, v \rangle$ is a \mathbb{L} -model whenever D is a finite set of the same cardinality as \mathcal{C} and v maps the constants to the elements of D and the predicates to fuzzy subsets of D .

- (i) $v: \mathcal{C} \rightarrow D$ is a one-to-one mapping
- (ii) $v: \mathcal{P} \rightarrow (D \rightarrow [0, 1])$

The valuation function $v_M: \mathcal{W} \rightarrow [0, 1]$, determined by M , complies with following conditions.

- (S1) $v_M(\pi\alpha) = v(\pi)(v(\alpha))$
- (S2) $v_M(A \rightarrow B) = \min(1, 1 - v_M(A) + v_M(B))$
- (S3) $v_M(\neg A) = 1 - v_M(A)$
- (S4) $v_M(\Delta A) = 1$ if $v_M(A) = 1$ and $v_M(\Delta A) = 0$ if $v_M(A) \neq 1$

Semantic consequence is defined as follows.

Definition 85 A formula A is a semantic consequence of Γ in \mathbb{L} , in symbols $\Gamma \vDash_{\mathbb{L}} A$, if $v_M(A) = 1$ in every model M in which $v_M(B) = 1$ for every $B \in \Gamma$.

Given the definitions (D1)-(D8), the following equivalences are evident:

$v_M(A \& B) = \max(0, v_M(A) + v_M(B) - 1)$, $v_M(A \wedge B) = \min(v_M(A), v_M(B))$, $v_M(A \vee B) = \max(v_M(A), v_M(B))$, $v_M(A \vee\vee B) = 1 - \max(0, 1 - v_M(A) - v_M(B))$, $v_M(A^i) = \max(0, i v_M(A) - i + 1)$, $v_M(\mathbb{F}A) = 1$ if $v_M(A) \in]0, 1[$ and $v_M(A) = 0$ otherwise, $v_M(\sim_i A) = 1$ if $v_M(A) \in [0, \frac{i}{i+1}[$ and $v_M(\sim_i A) = 0$ otherwise, $v_M(\forall\alpha A(\alpha)) = \min\{v_M(A(\beta/\alpha)) \mid \beta \in \mathcal{C}\}$ and $v_M(\exists\alpha A(\alpha)) = \max\{v_M(A(\beta/\alpha)) \mid \beta \in \mathcal{C}\}$.

G.4.2 The lower limit logic \mathbb{L}_n with a non-singleton interval of designated values

In \mathbb{L} the only designated value is 1. However, it is more realistic to use an interval of designated values $[\frac{n}{n+1}, 1]$, for some natural number $n > 1$.¹⁰ We call $\frac{n}{n+1}$ the *acceptability threshold* as it is the threshold for determining whether a formula is true enough, i.e. acceptable, or not. Let n be such a number. The logic has the same language, the same models and the same truth-functionality for the connectives as \mathbb{L} . Obviously, \mathbb{L}_n defines another semantic consequence relation.

Definition 86 A formula A is a semantic consequence of Γ in \mathbb{L}_n , in symbols $\Gamma \vDash_{\mathbb{L}_n} A$, if $v_M(A) \in [\frac{n}{n+1}, 1]$ for every model M in which $v_M(B) \in [\frac{n}{n+1}, 1]$ for every $B \in \Gamma$.

¹⁰If $n = 1$ is allowed, then the fuzzy logics become paraconsistent, which would deliver unwanted results in the adaptive fuzzy logics.

Note that the resulting systems are not axiomatizable in the strict sense (they invalidate (MP)). However, we can use a special translation tr_n to \mathbb{L} .

Definition 87 $\text{tr}_n(\Gamma \vDash_{\mathbb{L}_n} A) =_{df} \{B \vee B^n \mid B \in \Gamma\} \vDash_{\mathbb{L}} A \vee A^n$

The translation is useful to define a proof theory for \mathbb{L}_n in view of the following easily provable theorem.¹¹

Theorem 37 $\Gamma \vDash_{\mathbb{L}_n} A$ iff $\text{tr}_n(\Gamma \vDash_{\mathbb{L}_n} A)$

Because the translation results in quite hermetic proofs, we use some straight forward rules in the proofs instead. One can check that they are semantically correct and hence replaceable by a sequence of applications of \mathbb{L}_n -rules.

Theorem 38 *The logic \mathbb{L}_n is a suitable LLL: it is monotone, reflexive, transitive as well as compact, and the connectives \sim_n and \vee have a CL-meaning (in the sense of definition 77).*

G.4.3 Adaptive logics for fuzziness: \mathbb{L}_n^{mg} , \mathbb{L}_n^{rg} , \mathbb{L}_n^{ml} and \mathbb{L}_n^{rl}

An adaptive fuzzy logic can be constructed upon a wide range of fuzzy logics. We use \mathbb{L}_n as LLL. Let $\exists(A)$ denote the existential closure of A (every variable in A is existentially closed). Depending on the strategy and the set of abnormalities, four different adaptive fuzzy logics can be defined. What follows are their characterizations. Note that the logics are fully characterized as all elements presented in definition 77 are properly specified.

LLL	Strategy	Set of abnormalities Ω
\mathbb{L}_n^{mg}	Min. Ab.	$\{(\exists\alpha)\mathbb{F}\pi\alpha \mid \pi \in \mathcal{P}; \alpha \in \mathcal{V}\}$ (1)
\mathbb{L}_n^{ml}	Min. Ab.	$\{\exists(\mathbb{F}\pi\alpha) \mid \pi \in \mathcal{P}; \alpha \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C}\}$ (2)
\mathbb{L}_n^{rg}	Reliability	$\{(\exists\alpha)\mathbb{F}\pi\alpha \mid \pi \in \mathcal{P}; \alpha \in \mathcal{V}\}$ (1)
\mathbb{L}_n^{rl}	Reliability	$\{\exists(\mathbb{F}\pi\alpha) \mid \pi \in \mathcal{P}; \alpha \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C}\}$ (2)

One can choose from two options with respect to the set of abnormalities. In general, the abnormalities refer to the fuzziness of predicates. More specifically, there are two options. In option (1), a *predicate* π should be interpreted as abnormal when there is at least one application of π that turns out to be fuzzy. When π may be considered as normal, i.e. bivalent, CL remains the way to go.

¹¹One can use the translation to define a proper rule system for \mathbb{L}_n by allowing \mathbb{L} -derivations in proofs only when the resulting formulas are preceded by a Δ . We briefly list a trivial set of rules. (Prem \mathbb{L}) Introduce $\Delta(A \vee A^n)$ if $A \in \Gamma$ and Γ is the premise set. (\mathbb{L} -rule) If A is provable from B (and C) by a \mathbb{L} -rule, derive ΔA from ΔB (and ΔC). (Concl) From $\Delta(A \vee A^n)$, derive A .

In option (2), *individual applications of a predicate* π may be (ab)normal. This results in a more fine-grained solution. It is possible to have situations in which it turns out that some instance of a predicate π should be interpreted as fuzzy and another should not. CL-reasoning is still suitable in the latter case.

Theorem 39 *The logics L_n^{mg} , L_n^{rg} , L_n^{ml} and L_n^{rl} have CL with a redundant Δ as their upper limit logic*

The proof of this theorem can be found in [116], theorem 8.

G.5 Dealing with the sorites paradox

G.5.1 A first example

We start of with a formalization of the generic set-up of the paradox in its conditional form and present the way in which the introduced adaptive fuzzy logics deal with this type of argument. Next, we give a simple concrete example to illustrate some proof theoretical subtleties.

Consider a predicate P denoting, for example, ‘is red.’ Presuppose that a reasoner is confronted with a large series of k color patches a_i , where $i \in [1, k]$. The first patch is completely red. The last one is completely non-red. The patches change gradually from red to non-red. For each two subsequent patches a_i and a_{i+1} the difference in color is so small, that the reasoner accepts that it is impossible for a_{i+1} not to be red, when a_i is. This set-up is represented by the following premises.

1	ΔPa_1	PREM	\emptyset
2	$\Delta \neg Pa_k$	PREM	\emptyset
3.1	$Pa_1 \rightarrow Pa_2$	PREM	\emptyset
3.2	$Pa_2 \rightarrow Pa_3$	PREM	\emptyset
...			
3.k-1	$Pa_{k-1} \rightarrow Pa_k$	PREM	\emptyset
4.1	$\Delta(Pa_2 \rightarrow Pa_1)$	PREM	\emptyset
4.2	$\Delta(Pa_3 \rightarrow Pa_2)$	PREM	\emptyset
...			
4.k-1	$\Delta(Pa_k \rightarrow Pa_{k-1})$	PREM	\emptyset

Premise 1 says that the predicate is absolutely true for the first object, i.e. that the first patch is red. Premises 3.1 to 3.k-1 are the conditional steps. Premise 2 states that the last patch is absolutely non-red. Premises 4.1 to 4.k-1 say that for all $i \leq k$, $v_M(Pa_{i+1}) \leq v_M(Pa_i)$, i.e. the redness of the patches is

decreasing. We argue that the dynamics in stages of the proof presented below forms a good explication of the actual reasoning process of an agent when confronted with the sorites series, i.e. the proofs and the actual processes have a similar dynamic nature. We start with the logic \mathbb{L}_n^{ml} .¹²

5.1	Pa_2	1, 3.1; RU	\emptyset	
5.2	Pa_3	5.1, 3.2; RC	$\{\mathbb{F}Pa_2\}$	✓
5.3	Pa_4	5.2, 3.3; RC	$\{\mathbb{F}Pa_2, \mathbb{F}Pa_3\}$	✓
...				
5.k-1	Pa_k	5.k-2, 3.k-1; RC	$\{\mathbb{F}Pa_i \mid i \in [2, k-1]\}$	✓
6	$Pa_k \wedge \neg Pa_k$	5.k-1, 2; RU	$\{\mathbb{F}Pa_i \mid i \in [2, k-1]\}$	✓
6'	$(Pa_k \wedge \neg Pa_k) \vee$ $\vee \{\mathbb{F}Pa_i \mid i \in [2, k-1]\}$	1-4.k-1; RU	\emptyset	
7	$\vee \{\mathbb{F}Pa_i \mid i \in [2, k-1]\}$	6'; RU	\emptyset	

On line 5.1 the unconditional rule $\Delta A, A \rightarrow B \vdash_{\mathbb{L}_n} B$ is applied. Lines 5.2 to 5.k-1 are applications of the **CL**-rule $A, A \rightarrow B \vdash_{\text{CL}} B$, applicable on the condition that no fuzzy primitive formulas occur in A . On line 6 the sorites contradiction is derived on a condition. According to theorem 36, a line with a formula A and a condition Θ may occur in an **AL**-proof iff $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}_n} A \vee \bigvee \Theta$. Therefore, we know in light of line 6 that we can also derive the unconditional line 6' by applying RU to the premise set. Because the left disjunct of line 6' is not satisfiable in \mathbb{L}_n , it is derivable at line 7 that at least one Pa_i , where $i \in [2, k-1]$, has a truth degree in $]0, 1[$. We will apply the mechanism used in lines 6–7 a few more times. We refer to it as the *Dab intro-shortcut*: if a contradiction A is derived on a condition Θ on some line i , then $\bigvee \Theta$ may be unconditionally derived from the premise set on line $i+1$. Given marking definition 2, all conditional lines at this stage of the proof are marked. Consequentially, at this stage, **CL** cannot be applied to any formula A that contains subformula(s) of the form Pa_i , where $i \in [2, k-1]$.

Nevertheless, using the Minimal Abnormality strategy, there are still some sensible non-fuzzy derivations possible. For now, we use semantical observations to obtain these derivations. In the following subsection the (somewhat complicated) proof-theoretical way of obtaining these derivations is explained.

The amount of values in the interval of designated values of \mathbb{L}_n determines the 'tolerance' of the implication. Normally, one should only accept an implication $A \rightarrow B$ when A is less or equally true than B . Still, when the difference between A and B is small enough, $A \rightarrow B$ may be acceptable as well. For example, if $v_M(A) = 0.89$ and $v_M(B) = 0.88$, and the acceptability threshold $\frac{n}{n+1}$ is set to 0.99,

¹²Up to line 7 of the proof, one could also use \mathbb{L}_n^{l} , \mathbb{L}_n^{rg} or \mathbb{L}_n^{mg} .

then $A \rightarrow B$ will still be true enough, although $v_M(B) < v_M(A)$. This mechanism enables the truth to go down to zero from Pa_1 to Pa_k , while $Pa_i \rightarrow Pa_{i+1}$ is true enough for all $i \leq k$. So, to make the premises true, some series of Pa_i 's between Pa_1 and Pa_k must have fuzzy truth values. However, the premises do not necessitate the fuzziness of all Pa_i .

Suppose $n = 99$ and there are $k = 1000$ instances. Now we can conceive a model M of the premises in which the following facts hold: $v_M(Pa_i) = 1$ for all $i \leq 300$, $v_M(Pa_{301}) = 0.99$, $v_M(Pa_{302}) = 0.98$, \dots , $v_M(Pa_{399}) = 0.01$, and $v_M(Pa_i) = 0$ for all $i \geq 400$. This model verifies only 99 abnormalities, i.e. primitive formulas with a fuzzy truth value. Using the Minimal Abnormality strategy, only the models of the premises that verify the fewest abnormalities get selected. Model M is minimally abnormal as well as all other models that verify exactly 99 abnormalities. If fewer abnormalities are true in a model, this model does not verify all premises. If more abnormalities are true in a model, this model is not minimally abnormal. Generally speaking, the minimally abnormal models verify n abnormalities. Therefore, the following lines should be finally derivable.

8.1	$\mathbb{F}Pa_1 \rightarrow \neg\mathbb{F}Pa_{1+n}$	1-4.k-1; RC	$\{\mathbb{F}Pa_l l \in [1+n, k]\}$
8.2	$\mathbb{F}Pa_2 \rightarrow \neg\mathbb{F}Pa_{2+n}$	1-4.k-1; RC	$\{\mathbb{F}Pa_l l \in [1, 1] \cup [2+n, k]\}$
...			
8.i	$\mathbb{F}Pa_i \rightarrow \neg\mathbb{F}Pa_{i+n}$	1-4.k-1; RC	$\{\mathbb{F}Pa_l l \in [1, i-1] \cup [i+n, k]\}$
...			
8.k-n	$\mathbb{F}Pa_{k-n} \rightarrow \neg\mathbb{F}Pa_k$	1-4.k-1; RC	$\{\mathbb{F}Pa_l l \in [1, k-n-1] \cup [k, k]\}$

Throughout the reasoning process, we have specified the predicate P as much as possible (the predicate is maximally precise in all models). At this moment one could decide to add $\mathbb{F}Pa_{\frac{k}{2}}$ to the premises, thereby making a central instance in the series fuzzy¹³. This is an arbitrary but rational decision, since it is already derived from the premises that the predicate behaves fuzzy for at least one object, cf. line 7. Using this addition and the earlier selection of minimally abnormal models, we can derive more useful information. We now know that $Pa_{\frac{k}{2}}$ is in the series of n fuzzy instances. So, all instances with a number outside the interval $]\frac{k}{2} - n, \frac{k}{2} + n[$, are not fuzzy. Hence, their truth degree can be determined. Lines 5.2 to $5.\frac{k}{2} - n$ become unmarked. We can now extend the previous stage as follows.

9	$\mathbb{F}Pa_{\frac{k}{2}}$	PREM	
10.1	$\neg Pa_{k-2}$	RC	$\{\mathbb{F}Pa_{k-1}\}$
10.2	$\neg Pa_{k-3}$	RC	$\{\mathbb{F}Pa_{k-1}, \mathbb{F}Pa_{k-2}\}$

¹³If k is odd, simply use $\frac{k+1}{2}$ instead of $\frac{k}{2}$.

...
 10. $\frac{k}{2}-n-1 \neg Pa_{\frac{k}{2}+n}$ RC $\{\mathbb{F}Pa_i | i \in]\frac{k}{2} + n, k - 1]\}$

Lines 10.1 to 10. $\frac{k}{2} - n - 1$ are the result of the conditionally applicable modus tollens variant $\neg B, A \rightarrow B \vdash_{\text{CL}} \neg A$ on the condition that all primitive formulas in B are not fuzzy. These lines cannot become marked at any further stage of the proof. Hence, they are finally derived.

If we use the logic \mathbb{L}_n^{mg} , we can continue differently.

5.1	Pa_2	1,3.1 RU	\emptyset	
5.2	Pa_3	5; RC	$\{\exists x(\mathbb{F}Px)\}$	✓
...				
5.k - 1	Pa_k	5.k-2; RC	$\{\exists x(\mathbb{F}Px)\}$	✓
6	$Pa_k \wedge \neg Pa_k$	2,5.k-1; RU	$\{\exists x(\mathbb{F}Px)\}$	✓
7	$\exists x(\mathbb{F}Px)$	1-4.k-1; RU	\emptyset	

When the contradiction is derived conditionally at line 6, we know that the predicate P cannot be a crisp predicate. This is formally expressed in the formula on line 7, which is derived using the Dab intro-shortcut. Hence, for formulas using this predicate only fuzzy logic can be applied, and thus the \mathbb{L}_n^{mg} -consequences are exactly the same as the \mathbb{L}_n -consequences. All conditional lines become marked. Yet, note that if premises are introduced in which other predicates occur, CL-reasoning is still possible until and unless CL-reasoning with these new predicates also generates contradictions.

G.5.2 Simplified concrete version

To show how the adaptive proofs actually proceed and how the strategies differ, we give a simple concrete version of the paradox. We work with the logics \mathbb{L}_2^{ml} and \mathbb{L}_2^{rl} (this brings the acceptability threshold to $\frac{2}{3}$) and use only 10 instances Pa_1, \dots, Pa_{10} , i.e. $k = 10$. This set-up is represented by the following premises.

1	ΔPa_1	PREM	\emptyset
2	$\Delta \neg Pa_{10}$	PREM	\emptyset
3.1	$Pa_1 \rightarrow Pa_2$	PREM	\emptyset
3.2	$Pa_2 \rightarrow Pa_3$	PREM	\emptyset
⋮			
3.9	$Pa_9 \rightarrow Pa_{10}$	PREM	\emptyset
4.1	$\Delta(Pa_2 \rightarrow Pa_1)$	PREM	\emptyset
4.2	$\Delta(Pa_3 \rightarrow Pa_2)$	PREM	\emptyset
⋮			
4.9	$\Delta(Pa_{10} \rightarrow Pa_9)$	PREM	\emptyset

The actual sorites series can be formalized as follows.

5.1	Pa_1	1; RU	\emptyset	
5.2	Pa_2	1, 3.1; RU	\emptyset	
5.3	Pa_3	5.2, 3.2; RC	$\{\mathbb{F}Pa_2\}$	✓
⋮				
5.10	Pa_{10}	5.9, 3.9; RC	$\{\mathbb{F}Pa_i i \in [2, 9]\}$	✓
6	$Pa_{10} \wedge \neg Pa_{10}$	5.10, 2; RC	$\{\mathbb{F}Pa_i i \in [2, 9]\}$	✓
7	$\bigvee \{\mathbb{F}Pa_i i \in [2, 9]\}$	1–4.9; RU	\emptyset	

The inference rule (MP) is not generally valid in \mathfrak{n} and can only be applied if the first premise of the rule is not fuzzy (see also the previous subsection). So, in $\mathfrak{L}_2^{\text{ml}}$ and $\mathfrak{L}_2^{\text{rl}}$, (MP) is only conditionally applicable. By accumulating conditions, Pa_{10} is derived on line 5.10. This is in contradiction with line 2, as we can see on line 6. Using the derived Dab intro-shortcut, $\bigvee \{\mathbb{F}Pa_i | i \in [2, 9]\}$ is unconditionally derived from the premise set on line 7. This formula states that at least one Pa_i , where $i \in [2, 9]$, should be fuzzy.

This observation must obviously lead to the marking of several lines. Not every conditional derivation turns out to be unproblematic. The marking depends on the strategy and the derivation of minimal Dab -formulas. First, we derive the minimal Dab -formules.

Because of the premises 4.1–4.9, the truth degree of the formulas cannot increase as their subscript increases. Hence, in combination with the premises 1 and 2, in all possible models of these premises the formulas are divided into 3 intervals (where $k, l \in \mathbb{N}$ and $k < l$): (1) an interval $[1, k]$ of subscripts of formulas that are fully true, (2) an interval $]k, l[$ of subscripts of formulas with a truth degree in $]0, 1[$ and finally (3) an interval $]l, 10]$ that corresponds to full falsity.

This grouping can be expressed by the following formula, which is derivable from premises 1, 2 and 4.1–4.9.

$$8 \quad \bigvee \{ \bigwedge \{ \Delta Pa_i | i \in [1, k] \} \wedge \bigwedge \{ \mathbb{F} Pa_i | i \in]k, l[\} \wedge \bigwedge \{ \Delta \neg Pa_i | i \in]l, 10] \} | k, l \in \mathbb{N}; k < l \} \quad 1, 2, 4.1-4.9; \text{RU } \emptyset$$

Because of premises 3.1–3.9, the truth degrees of two subsequent formulas may differ maximally $\frac{1}{3}$. For all models M and all $i < 10$, $v_M(Pa_i) - v_M(Pa_{i+1}) \leq \frac{1}{3}$ and so also $v_M(Pa_i) - v_M(Pa_{i+2}) \leq \frac{2}{3}$ and hence it is completely false that $v_M(Pa_i) = 1$ and $v_M(Pa_{i+2}) = 0$.

$$9.1 \quad \Delta \neg (\Delta Pa_1 \wedge \Delta \neg Pa_3) \quad 3.1, 3.2; \text{RU } \emptyset$$

$$9.2 \quad \Delta \neg (\Delta Pa_2 \wedge \Delta \neg Pa_4) \quad 3.2, 3.3; \text{RU } \emptyset$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ 9.8 \quad \Delta \neg(\Delta Pa_8 \wedge \Delta \neg Pa_{10}) \qquad \qquad \qquad 3.8, 3.10; \text{RU} \quad \emptyset \end{array}$$

Next, after applying several times a special version of disjunctive syllogism, $\Delta \neg A, (A \wedge B) \vee C \vdash_{\mathbf{L}_2} C$ and weakening the conjunctions, we obtain the following.

$$\begin{array}{l} 10 \quad \bigvee \{ \bigwedge \{ \mathbb{F}Pa_i \mid i \in [2, 9] \}, \\ \quad \bigwedge \{ \mathbb{F}Pa_i \mid i \in [2, 8] \}, \bigwedge \{ \mathbb{F}Pa_i \mid i \in [3, 9] \}, \\ \quad \vdots \\ \quad \mathbb{F}Pa_2 \wedge \mathbb{F}Pa_3, \mathbb{F}Pa_3 \wedge \mathbb{F}Pa_4, \mathbb{F}Pa_4 \wedge \mathbb{F}Pa_5, \\ \quad \mathbb{F}Pa_5 \wedge \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_6 \wedge \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_7 \wedge \mathbb{F}Pa_8, \\ \quad \mathbb{F}Pa_8 \wedge \mathbb{F}Pa_9 \} \qquad \qquad \qquad 9.1-9.8, 8; \text{RU} \quad \emptyset \end{array}$$

Using the distributivity property of \wedge and \vee , we obtain the following.

$$\begin{array}{l} 11.1 \quad \bigvee \{ \mathbb{F}Pa_2, \mathbb{F}Pa_4, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_8 \} \qquad \qquad \qquad 10; \text{RU} \quad \emptyset \\ 11.2 \quad \bigvee \{ \mathbb{F}Pa_3, \mathbb{F}Pa_4, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_8 \} \qquad \qquad \qquad 10; \text{RU} \quad \emptyset \\ 11.3 \quad \bigvee \{ \mathbb{F}Pa_3, \mathbb{F}Pa_5, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_8 \} \qquad \qquad \qquad 10; \text{RU} \quad \emptyset \\ 11.4 \quad \bigvee \{ \mathbb{F}Pa_3, \mathbb{F}Pa_5, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_9 \} \qquad \qquad \qquad 10; \text{RU} \quad \emptyset \\ 11.5 \quad \bigvee \{ \mathbb{F}Pa_3, \mathbb{F}Pa_5, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_8 \} \qquad \qquad \qquad 10; \text{RU} \quad \emptyset \end{array}$$

11.1-11.5 are the minimal *Dab*-formulas for the premise set.

Minimal Abnormality

Suppose that we use the logic \mathbf{L}_2^{ml} with Minimal Abnormality as a strategy. By means of the minimal *Dab*-formulas derived at the present stage, we obtain $\Phi_s(\Gamma) = \{ \{ \mathbb{F}Pa_2, \mathbb{F}Pa_3 \}, \{ \mathbb{F}Pa_3, \mathbb{F}Pa_4 \}, \{ \mathbb{F}Pa_4, \mathbb{F}Pa_5 \}, \{ \mathbb{F}Pa_5, \mathbb{F}Pa_6 \}, \{ \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_7 \}, \{ \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_8 \}, \{ \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_9 \} \}$. This set determines which conditional consequences have to be marked. Below we give some examples of such conditional consequences. Obviously, conditional consequences that do not involve the formulas Pa_1, \dots, Pa_{10} can never become marked. So, for example, all applications of theorems of CL that do not involve any of these formulas are perfectly finally derivable.

$$\begin{array}{l} 12.1 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_7 \vee \mathbb{F}Pa_5 \qquad \text{RU} \\ 12.2 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_7 \qquad \qquad \qquad 12.1; \text{RC} \quad \{ \mathbb{F}Pa_5 \} \\ 13.1 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_7 \vee \mathbb{F}Pa_7 \qquad \text{RU} \\ 13.2 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_7 \qquad \qquad \qquad 13.1; \text{RC} \quad \{ \mathbb{F}Pa_7 \} \\ 14.1 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_6 \vee \mathbb{F}Pa_5 \qquad \text{RU} \\ 14.2 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_6 \qquad \qquad \qquad 14.1; \text{RC} \quad \{ \mathbb{F}Pa_5 \} \quad \checkmark \\ 15.1 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_6 \vee \mathbb{F}Pa_6 \qquad \text{RU} \\ 15.2 \quad \neg \mathbb{F}Pa_5 \vee \neg \mathbb{F}Pa_6 \qquad \qquad \qquad 15.1; \text{RC} \quad \{ \mathbb{F}Pa_6 \} \quad \checkmark \end{array}$$

Lines 12.1, 13.1, 14.1, and 15.1 are the result of the theoremhood of $\mathbb{F}A \vee \neg\mathbb{F}A \vee B$ in \mathbb{L}_n . This type of formula is a combination of excluded middle (all **CL**-theorems A are theorems of n , if all non-logical symbols in A are in the scope of a Δ) and addition. Lines 12.2, 13.2, 14.2, and 15.2 can be obtained from these lines in view of theorem 36. In view of marking definition 83, a line i must be marked unless for every $\phi \in \Phi_s(\Gamma)$, there is a line on which the formula of line i is derived on a condition Δ , such that $\phi \cap \Delta = \emptyset$. There is no line on which $\neg\mathbb{F}Pa_5 \vee \neg\mathbb{F}Pa_6$ is derived such that its condition Δ has nothing in common with $\{\mathbb{F}Pa_5, \mathbb{F}Pa_6\}$. Hence, lines 14.2 and 15.2 are marked. The lines 12.2 and 12.3 however, are not. These markings will not change in subsequent stages because $\Phi_s(\Gamma)$ cannot change anymore and the formulas are not derivable on other conditions.

16	$\neg Pa_9$	2,3.9; RU	\emptyset	
17	$\neg Pa_8$	16,3.8; RC	$\{\mathbb{F}Pa_9\}$	✓
18	$\neg Pa_7$	17,3.7; RC	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8\}$	✓
19	$\neg Pa_6$	18,3.6; RC	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7\}$	✓
20	$\neg Pa_5$	19,3.5; RC	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6\}$	✓
21	$\neg Pa_4$	20,3.4; RC	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_5\}$	✓
22	$\neg Pa_3$	21,3.3; RC	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_5, \mathbb{F}Pa_4\}$	✓
23	$Pa_3 \wedge Pa_4$	5.3,5.4; RU	$\{\mathbb{F}Pa_2, \mathbb{F}Pa_3\}$	✓
24	$Pa_3 \wedge \neg Pa_4$	5.3,21; RU	$\{\mathbb{F}Pa_2, \mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_5\}$	✓
25	$\neg Pa_3 \wedge \neg Pa_4$	21,22; RU	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_5, Pa_4\}$	✓
26	$(Pa_4 \vee \neg Pa_4) \wedge (Pa_3 \vee \neg Pa_3)$	23; RU	$\{\mathbb{F}Pa_2, \mathbb{F}Pa_3\}$	
27	$(Pa_4 \vee \neg Pa_4) \wedge (Pa_3 \vee \neg Pa_3)$	24; RU	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_5, Pa_2\}$	
28	$(Pa_4 \vee \neg Pa_4) \wedge (Pa_3 \vee \neg Pa_3)$	25; RU	$\{\mathbb{F}Pa_9, \mathbb{F}Pa_8, \mathbb{F}Pa_7, \mathbb{F}Pa_6, \mathbb{F}Pa_5, Pa_4\}$	

For lines 16–22 the same reasoning is used as for lines 10.1 to 10. $\frac{k}{2}$ - n -1 from the previous subsection. Line 23–25 are simple introductions of the conjunction. Because of the distributivity property of \vee and \wedge , $(Pa_4 \vee \neg Pa_4) \wedge (Pa_3 \vee \neg Pa_3)$ is equivalent to $(Pa_3 \wedge Pa_4) \vee (Pa_3 \wedge \neg Pa_4) \vee (\neg Pa_3 \wedge Pa_4) \vee (\neg Pa_3 \wedge \neg Pa_4)$. As a consequence, lines 26–28 come down to applying addition on lines 23 to 25. These lines cannot become marked in subsequent stages. So, $(Pa_4 \vee \neg Pa_4) \wedge (Pa_3 \vee \neg Pa_3)$ is finally derived from the premises. A very similar (but long-winded) reasoning shows that also $\forall x(Px \vee \neg Px)$ is finally derivable from the premises (for every instance, P fixes a truth degree from $[\frac{2}{3}, 1] \cup [0, \frac{1}{3}]$ in all minimally abnormal models of the premises). This result would obviously not have been obtained if we would have used a **LLL** with a less tolerant interval of designated values than \mathbb{L}_2 .

Reliability

When we use the logic \mathbb{L}_2^{r1} with reliability as a strategy, the solution is simple but rather useless. All conditional lines will be marked and the consequences will be exactly those of the **LLL** because $U_s(\Gamma) = \{\mathbb{F}Pa_i | i \in [2, 9]\}$. Every conditional line will have a condition that is a subset of $U_s(\Gamma)$ and thus will be marked.

G.6 Conclusion

We argued that it is rational to accept the premises of a sorites argument. The paradoxical character of a sorites argument only becomes explicit when chains of modus ponens applications are generated by means of **CL**, which remains the default reasoning tool. However, when the paradox is explicitly met during **CL**-reasoning, it is also rational to conclude that **CL** does not generate sound results and that a different, more suitable logic is necessary for the involved predicate, i.e. fuzzy logic.

We formalized this philosophical idea in the adaptive fuzzy logics \mathbb{L}_n^{ml} , \mathbb{L}_n^{mg} , \mathbb{L}_n^{r1} and \mathbb{L}_n^{rg} . **AL** is the ideal tool for implementing the type of dynamics described above. All our logics are based on the same **LLL**, i.e. a finite version of first-order Łukasiewicz logic extended with the Δ -operator and an acceptability threshold $\frac{n}{n+1}$, where $n > 1$ and $n \in \mathbb{N}$. We have defined both a global and a local option with respect to the abnormalities. In the global option predicates can only be abnormal or fuzzy as a whole. In the second option, primitive formulas can be individually abnormal. The last solution is more fine-grained as it allows the reasoner to switch to fuzzy logic for those instances of a predicate that turn out to be fuzzy and to stick to **CL**-reasoning for those that can be interpreted as non-fuzzy without any problems.

To end, we stress that the adaptive fuzzy logics presented in this article are genuine fuzzy logics. Although they allow for **CL**-reasoning with formulas that can be interpreted non-fuzzy, they are still perfectly capable of performing fuzzy reasoning with formulas that are unmistakably fuzzy. From this perspective, they can even be considered to form a stronger kind of fuzzy logics than known standard fuzzy logics like \mathbb{L}_n as they determine richer consequence relations.

Opmerking bij de bibliografie

De (nog) niet gepubliceerde artikels zijn te vinden op <http://logica.ugent.be/centrum/writings/pubs.php>

Bibliography

- [1] Atocha Aliseda. *Seeking Explanations: Abduction in Logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence*. Phd thesis, Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam, The Netherlands, 1997.
- [2] Grigoris Antoniou. *Nonmonotonic Reasoning*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
- [3] Ayda I. Arruda. On the imaginary logic of N.A. Vasil'ev. In Ayda I. Arruda, Newton C.A. da Costa, and R. Chuaqui, editors, *Non-classical Logics, Model Theory and Computability*, pages 3–24. North-Holland, Amsterdam, 1977.

- [4] Diderik Batens. Paraconsistent extensional propositional logics. *Logique et Analyse*, 90–91:195–234, 1980.
- [5] Diderik Batens. Dynamic dialectical logics. In Graham Priest, Richard Routley, and Jean Norman, editors, *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, pages 187–217. Philosophia Verlag, München, 1989.
- [6] Diderik Batens. *Menselijke kennis. Pleidooi voor een bruikbare rationaliteit*. Garant, Antwerpen/Apeldoorn, 1992. 2: 2004.
- [7] Diderik Batens. Adaptieve logica's: een aanzet om elkaar te begrijpen. In J.P. Van Bendegem and G. Kornelis, editors, *Iedereen die niet denkt zoals ik, volg mij. Acta 16de Nederlands-Vlaamse Filosofiedag*, pages 13–19. VUB-Pers, Brussel, 1994.
- [8] Diderik Batens. Inconsistency-adaptive logics and the foundation of non-monotonic logics. *Logique et Analyse*, 145:57–94, 1994. Appeared 1996.
- [9] Diderik Batens. Blocks. The clue to dynamic aspects of logic. *Logique et Analyse*, 150–152:285–328, 1995. Appeared 1997.
- [10] Diderik Batens. A dynamic semantics for inconsistency-adaptive logics. *Bulletin of the Section of Logic*, 27:15–18, 1998.
- [11] Diderik Batens. Contextual problem solving and adaptive logics in creative processes. *Philosophica*, 64:7–31, 1999. Appeared 2001.
- [12] Diderik Batens. Inconsistency-adaptive logics. In Orłowska [91], pages 445–472.
- [13] Diderik Batens. A survey of inconsistency-adaptive logics. In Batens et al. [40], pages 49–73.
- [14] Diderik Batens. A survey of inconsistency-adaptive logics. In Batens et al. [40], pages 49–73.
- [15] Diderik Batens. Towards the unification of inconsistency handling mechanisms. *Logic and Logical Philosophy*, 8:5–31, 2000. Appeared 2002.
- [16] Diderik Batens. A dynamic characterization of the pure logic of relevant implication. *Journal of Philosophical Logic*, 30:267–280, 2001.
- [17] Diderik Batens. A general characterization of adaptive logics. *Logique et Analyse*, 173–175:45–68, 2001. Appeared 2003.

- [18] Diderik Batens. In defence of a programme for handling inconsistencies. In Joke Meheus, editor, *Inconsistency in Science*, pages 129–150. Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [19] Diderik Batens. Adaptieve logica's. Een precieze benadering van vertrouwde maar door logici verwaarloosde redeneervormen. *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 95:174–189, 2003.
- [20] Diderik Batens. A formal approach to problem solving. In Claudio Delrieux and Javier Legris, editors, *Computer Modeling of Scientific Reasoning*, pages 15–26. Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 2003.
- [21] Diderik Batens. Notes on problem solving. Technical report, 2003.
- [22] Diderik Batens. A strengthening of the Rescher–Manor consequence relations. *Logique et Analyse*, 183–184:289–313, 2003. Appeared 2005.
- [23] Diderik Batens. The need for adaptive logics in epistemology. In Dov M. Gabbay, Shahid Rahman, John Symons, and Jean Paul Van Bendegem, editors, *Logic, Epistemology and the Unity of Science*, pages 459–485. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [24] Diderik Batens. On a logic of induction. In Festa et al. [57], pages 221–242. (Contains uncorrected proofs; see [27] for correct version.).
- [25] Diderik Batens. A procedural criterion for final derivability in inconsistency-adaptive logics. *Journal of Applied Logic*, 3:221–250, 2005.
- [26] Diderik Batens. A diagrammatic proof search procedure as part of a formal approach to problem solving. In Lorenzo Magnani, editor, *Model Based Reasoning in Science and Engineering. Cognitive Science, Epistemology, Logic*, volume 2 of *Studies in Logic*, pages 265–284. King's College Publications, London, 2006.
- [27] Diderik Batens. On a logic of induction. *L&PS – Logic & Philosophy of Science*, IV(1):3–32, 2006. (Corrected version of [24].).
- [28] Diderik Batens. Content guidance in formal problem solving processes. In Olga Pombo and Alexander Gerner, editors, *Abduction and the Process of Scientific Discovery*, pages 121–156. Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

- [29] Diderik Batens. A universal logic approach to adaptive logics. *Logica Universalis*, 1:221–242, 2007.
- [30] Diderik Batens. A universal logic approach to adaptive logics. *Logica Universalis*, 1:221–242, 2007.
- [31] Diderik Batens. *Adaptive Logics and Dynamic Proofs. A Study in the Dynamics of Reasoning*. 200x. Forthcoming.
- [32] Diderik Batens. Towards a dialogic interpretation of dynamic proofs. To appear in a Festschrift for Shahid Rahman, 200x.
- [33] Diderik Batens. It might have been Classical Logic. To appear.
- [34] Diderik Batens, Kristof De Clercq, and Natasha Kurtonina. Embedding and interpolation for some paralogics. The propositional case. *Reports on Mathematical Logic*, 33:29–44, 1999.
- [35] Diderik Batens, Kristof De Clercq, Peter Verdée, and Joke Meheus. Yes fellows, most human reasoning is complex. in print.
- [36] Diderik Batens and Lieven Haesaert. On classical adaptive logics of induction. *Logique et Analyse*, 173–175:255–290, 2001. Appeared 2003.
- [37] Diderik Batens and Joke Meheus. The adaptive logic of compatibility. *Studia Logica*, 66:327–348, 2000.
- [38] Diderik Batens and Joke Meheus. A tableau method for inconsistency-adaptive logics. In Roy Dyckhoff, editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, volume 1847 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 127–142. Springer, 2000.
- [39] Diderik Batens, Joke Meheus, Dagmar Provijn, and Liza Verhoeven. Some adaptive logics for diagnosis. *Logic and Logical Philosophy*, 11/12:39–65, 2003.
- [40] Diderik Batens, Chris Mortensen, Graham Priest, and Jean Paul Van Bendegeem, editors. *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Research Studies Press, Baldock, UK, 2000.
- [41] Diderik Batens and Dagmar Provijn. Pushing the search paths in the proofs. A study in proof heuristics. *Logique et Analyse*, 173–175:113–134, 2001. Appeared 2003.

- [42] Diderik Batens and Guido Vanackere. Incompleteness-adaptive logics. to appear.
- [43] Diderik Batens and Timothy Vermeir. Direct dynamic proofs for the Rescher–Manor consequence relations: The flat case. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 12:63–84, 2002.
- [44] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. Some syntactic approaches to the handling of inconsistent knowledge bases: A comparative study. Part 1: The flat case. *Studia Logica*, 58:17–45, 1997.
- [45] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. Some syntactic approaches to the handling of inconsistent knowledge bases: A comparative study. Part 2: The prioritized case. In Orłowska [91], pages 473–511.
- [46] George S. Boolos, John P. Burgess, and Richard J. Jeffrey. *Computability and Logic*. Cambridge University Press, 2002. (Fourth edition).
- [47] Gerhard Brewka. *Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense*. Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 1991.
- [48] Rudolf Carnap. *Logical Foundations of Probability*. University of Chicago Press, Chicago, 1950.
- [49] Cheng C. Chang. Proof of an axiom of lukasiewicz. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(1):55–56, jan 1958.
- [50] Newton C.A. da Costa. Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants. *Comptes rendus de l’Académie des sciences de Paris*, 259:3790–3792, 1963.
- [51] Newton C.A. da Costa. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15:497–510, 1974.
- [52] Newton C.A. da Costa, Otávio Bueno, and Steven French. The logic of pragmatic truth. *Journal of Philosophical Logic*, 27:603–620, 1998.
- [53] Kristof De Clercq. Two new strategies for inconsistency-adaptive logics. *Logic and Logical Philosophy*, 8:65–80, 2000. Appeared 2002.
- [54] Leen De Vreese and Erik Weber. Applications of the adaptive logic for causal discovery. *Logique et Analyse*, 185–188:33–51, 2004. Appeared 2005.

- [55] Francesc Esteva, Joan Gispert, Lluís Godo, and Carles Noguera. Adding truth-constants to continuous t-norm based logics: Axiomatization and completeness results. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:597–618, 2007.
- [56] Francesc Esteva, Lluís Godo, Petr Hájek, and Mirko Navara. Residuated fuzzy logics with an involutive negation. *Archive for Mathematical Logic*, 39(2):103–124, 2000.
- [57] Roberto Festa, Atocha Aliseda, and Jeanne Peijnenburg, editors. *Confirmation, Empirical Progress, and Truth Approximation. Essays in Debate with Theo Kuipers. Vol. 1*, volume 83 of *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*. Rodopi, Amsterdam/New York, 2005.
- [58] Kit Fine. Vagueness, truth and logic. *Synthese*, 30:265–300, 1975.
- [59] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, volume 4 of *Trends in Logic*. Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [60] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [61] Petr Hájek. Function symbols in fuzzy logic. In *Proceedings of the East-West Fuzzy Colloquium*, pages 2–8, Zittau/Görlitz, 2000. IPM.
- [62] Petr Hájek. What is mathematical fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(5):597–603, 2006.
- [63] Petr Hájek and Vilém Novák. The sorites paradox and fuzzy logic. *International Journal of General Systems*, 32:373–383, 2003.
- [64] Petr Hájek and Pavel Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic. Perspectives in Mathematical Logic*. Springer-Verlag, 1993.
- [65] Ilpo Halonen and Jaakko Hintikka. Toward a theory of the process of explanation. *Synthese*, 143:5–61, 2005.
- [66] Leon Horsten and Philip Welch. The undecidability of propositional adaptive logic. *Synthese*, 158:41–60, 2007.
- [67] Dominic Hyde. From heaps and gaps to heaps of gluts. *Mind*, 106(424):641–660, 1997.
- [68] Rosanna Keefe and Peter Smith. *Vagueness: A reader*. The MIT Press, Cambridge, MA, 2001.

- [69] Stephen C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Van Nostrand, Amsterdam, 1952.
- [70] Dexter Kozen. On the complexity of reasoning in kleene algebra. *Information and Computation*, 179:152–162, 2002.
- [71] Theo A. F. Kuipers. *From Instrumentalism to Constructive Realism. On some Relations Between Confirmation, Empirical Progress, and Truth Approximation*, volume 287 of *Synthese Library*. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [72] Witold Łukasiewicz. *Non-Monotonic Reasoning. Formalization of Commonsense Reasoning*. Ellis Horwood, New York, 1990.
- [73] Eric Martin and Daniel N. Osherson. *Elements of Scientific Inquiry*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1998.
- [74] Joke Meheus. Erotetic arguments from inconsistent premises. *Logique et Analyse*, 165–166:49–80, 1999. Appeared 2002.
- [75] Joke Meheus. Analogical reasoning in creative problem solving processes: Logico-philosophical perspectives. In Fernand Hallyn, editor, *Metaphor and Analogy in the Sciences*, pages 17–34. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [76] Joke Meheus. An extremely rich paraconsistent logic and the adaptive logic based on it. In Batens et al. [40], pages 189–201.
- [77] Joke Meheus. On the acceptance of problem solutions derived from inconsistent constraints. *Logic and Logical Philosophy*, 8:33–46, 2000. Appeared 2002.
- [78] Joke Meheus. Adaptive logics for question evocation. *Logique et Analyse*, 173–175:135–164, 2001. Appeared 2003.
- [79] Joke Meheus. An adaptive logic for pragmatic truth. In Walter A. Carnielli, Marcelo E. Coniglio, and Itala M. Loffredo D’Ottaviano, editors, *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, pages 167–185. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [80] Joke Meheus. Paraconsistent compatibility. *Logique et Analyse*, 183–184:251–287, 2003. Appeared 2005.
- [81] Joke Meheus. Empirical progress and ampliative adaptive logics. In Festa et al. [57], pages 193–217.

- [82] Joke Meheus. An adaptive logic based on Jaśkowski's approach to para-consistency. *Journal of Philosophical Logic*, 35:539–567, 2006.
- [83] Joke Meheus and Diderik Batens. Steering problem solving between cliff incoherence and cliff solitude. *Philosophica*, 58:153–187, 1996. Appeared 1998.
- [84] Joke Meheus and Diderik Batens. A formal logic for abductive reasoning. *Logic Journal of the IGPL*, 14:221–236, 2006.
- [85] Joke Meheus, Liza Verhoeven, Maarten Van Dyck, and Dagmar Provijn. Ampliative adaptive logics and the foundation of logic-based approaches to abduction. In Lorenzo Magnani, Nancy J. Nersessian, and Claudio Pizzi, editors, *Logical and Computational Aspects of Model-Based Reasoning*, pages 39–71. Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [86] Irene Mikenberg, Newton C. A. da Costa, and Rolando Chuaqui. Pragmatic truth and approximation to truth. *Journal of Symbolic Logic*, 51:201–221, 1986.
- [87] Allen Newell and Herbert A. Simon. *Human Problem Solving*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.
- [88] Thomas Nickles. What is a problem that we may solve it? *Synthese*, 47:85–118, 1981.
- [89] Vilém Novák. A comprehensive theory of trichotomous evaluative linguistic expressions. *Submitted to Fuzzy Sets and Systems*.
- [90] Vilém Novák, Irina Perfilieva, and Jiří Močkoř. *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [91] Ewa Orłowska, editor. *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*. Physica Verlag (Springer), Heidelberg, New York, 1999.
- [92] Graham Priest. *In Contradiction. A Study of the Transconsistent*. Nijhoff, Dordrecht, 1987.
- [93] Graham Priest. *An Introduction to Non-classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [94] Dagmar Provijn. How to obtain elegant Fitch-style proofs from goal directed ones. In H. Blockeel and M. Denecker, editors, *Proceedings of the Fourteenth Belgium-Netherlands Conference on Artificial Intelligence*, pages 243–250, Leuven, Belgium, 2002.

- [95] Dagmar Provijn. *Prospectieve dynamiek. Filosofische en technische onderbouwing van doelgerichte bewijzen en bewijsheuristieken*. PhD thesis, Universiteit Gent (Belgium), 2005. Unpublished PhD thesis.
- [96] Willard Van Orman Quine. What price bivalence? *Journal of Philosophy*, 77:90–95, 1981.
- [97] Nicholas Rescher. *Hypothetical Reasoning*. North-Holland, Amsterdam, 1964.
- [98] Nicholas Rescher. *The Coherence Theory of Truth*. Clarendon, Oxford, 1973.
- [99] Nicholas Rescher and Ruth Manor. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, 1:179–217, 1970.
- [100] Hartley Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [101] Rose, Alan and Rosser, J. Barkley. Fragments of many-valued statement calculi. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(1):1–53, jan 1958.
- [102] Kurt Schütte. *Beweistheorie*. Springer, Berlin, 1960.
- [103] Stewart Shapiro. *Vagueness in Context*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [104] Raymond M. Smullyan. *First Order Logic*. Dover, New York, 1995. Original edition: Springer, 1968.
- [105] Stephan van der Waart van Gulik and Peter Verdée. A generic framework for adaptive vague logics. *Fuzzy Sets and Systems*. (to appear).
- [106] Maarten Van Dyck. Causal discovery using adaptive logics. Towards a more realistic heuristics for human causal learning. *Logique et Analyse*, 185–188:5–32, 2004. Appeared 2005.
- [107] Bart Van Kerckhove and Guido Vanackere. Vagueness-adaptive logic: A pragmatist approach to sorites paradoxes. *Studia Logica*, 75:383–411, 2003.
- [108] Guido Vanackere. Ambiguity-adaptive logic. *Logique et Analyse*, 159:261–280, 1997. Appeared 1999.

- [109] Guido Vanackere. Minimizing ambiguity and paraconsistency. *Logique et Analyse*, 165–166:139–160, 1999. Appeared 2002.
- [110] Guido Vanackere. Preferences as inconsistency-resolvers: the inconsistency-adaptive logic **PRL**. *Logic and Logical Philosophy*, 8:47–63, 2000. Appeared 2002.
- [111] Guido Vanackere. **HL2**. An inconsistency-adaptive and inconsistency-resolving logic for general statements that might have exceptions. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 10:317–338, 2000.
- [112] Guido Vanackere. The role of ambiguities in the construction of collective theories. *Logique et Analyse*, 173–174–175:189–214, 2001. Appeared 2003.
- [113] Peter Verdée. Formalisering van oplossingsprocessen voor goed gedefinieerde, realistische problemen: constructie van een formeel kader. Master’s thesis, Ghent University, Postgraduate studies in Logic, History and Philosophy of Science, Ghent, 2005.
- [114] Peter Verdée. Adaptive logics using the minimal abnormality strategy are Π_1^1 -complex. *Synthese*, 200x. Forthcoming.
- [115] Peter Verdée. A proof procedure for adaptive logics. Forthcoming, 200x.
- [116] Peter Verdée and Stephan van der Waart van Gulik. Modeling sorites reasoning with adaptive fuzzy logic. *Studia Logica*. (submitted).
- [117] Liza Verhoeven. All premisses are equal, but some are more equal than others. *Logique et Analyse*, 173–174–175:165–188, 2001. Appeared 2003.
- [118] Liza Verhoeven. Proof theories for some prioritized consequence relations. *Logique et Analyse*, 183–184:325–344, 2003. appeared 2005.
- [119] Timothy Williamson. *Vagueness*. Routledge, London, 1994.
- [120] Andrzej Wiśniewski. *The Posing of Questions. Logical Foundations of Erotetic Inferences*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [121] Andrzej Wiśniewski. The logic of questions as a theory of erotetic arguments. *Synthese*, 109:1–25, 1996.
- [122] Crispin Wright. On the coherence of vague predicates. *Synthese*, 30:325–365, 1975.