

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Órgãos de Máquinas II

Elaborado e revisto por Paulo Flores, José Gomes, Nuno Dourado e Filipe Marques - 2017



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: jgomes@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: nunodourado@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: fmarques@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



T.07 – ENGRENAGENS CÔNICAS

1. Introdução
2. Geração do Dente
3. Nomenclatura
4. Traçado Aproximado de Tredgold
5. Relações Geométricas
6. Parâmetros de Desempenho
7. Hipoides
8. Revisão de Conhecimentos
9. Referências Bibliográficas

Tipos de Engrenagens Cónicas

As engrenagens cónicas são utilizadas nas situações em que os **eixos das rodas motora e movida são concorrentes**.

As engrenagens cónicas podem ter **dentes retos**, **inclinados** e espirais ou **curvos**, podendo ainda apresentar **eixos descentrados** (hipoides). A figura 1 ilustra estes tipos de engrenagens cónicas.

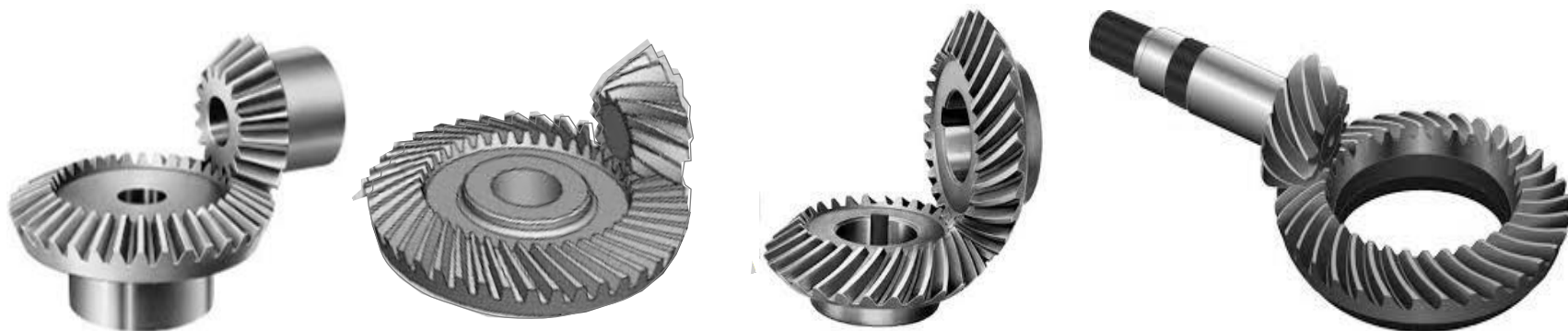


Fig. 1 Principais tipos de Engrenagens cónicas.

Deve referir-se que nas **hipoides**, os eixos das rodas estão descentrados. Este tipo de engrenagem é das mais silenciosas e apresenta uma **excelente capacidade de carga** devido à maior área de contacto entre os flancos dos dentes.

Contudo, as hipoides apresentam **rendimentos mais baixos**, geram maior quantidade de calor e requerem, por isso, **lubrificantes especiais**, vulgo, lubrificantes de elevada viscosidade.

Relação de Transmissão e Ângulo de Conicidade

Nas engrenagens cónicas as [relações de transmissão](#) são, em geral, mais baixas do que nas engrenagens cilíndricas, podendo atingir, no máximo valores da ordem de [6:1](#).

Na [maioria dos casos](#), as engrenagens cónicas funcionam em transmissões cujos eixos de rotação fazem entre si um [ângulo de 90°](#). Embora não seja tão frequente, há também situações práticas em que os eixos das rodas apresentam um ângulo inferior ou superior a 90°.

O [diferencial dos automóveis](#) é indubitavelmente o mais popular e conhecido exemplo de aplicação de engrenagens cónicas, tal como o que se ilustra na figura 2.



Fig. 2 Diferencial de um automóvel

Superfícies Primitivas, Cones Primitivos

Nas engrenagens cônicas as **superfícies primitivas têm a forma cônica** e rolam sem escorregar uma em relação à outra. As superfícies primitivas nas engrenagens cônicas são frequentemente denominadas de **cones primitivos**, tal como os que se mostram na figura 3.

Para que duas rodas cônicas funcionem corretamente, os seus **eixos devem cruzar-se no mesmo vértice**, o ponto **S** representado na figura 3.

Durante o movimento relativo de duas rodas cônicas, o qual é teoricamente do tipo esférico, cada ponto da engrenagem permanece à mesma distância do vértice **S**.

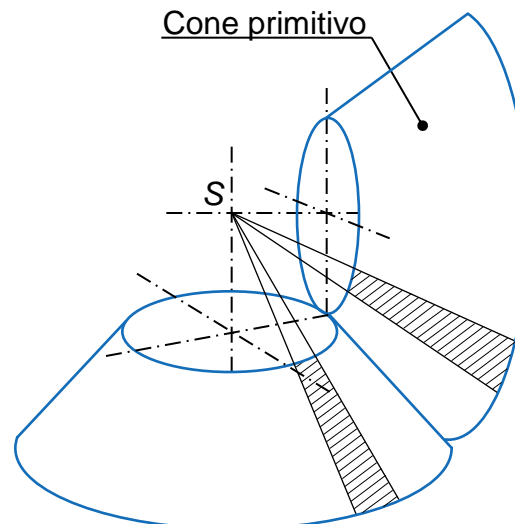


Fig. 3 Representação dos cones primitivos de uma engrenagem cônica.

Método da Evolvente

Tal como no caso das engrenagens cilíndricas, **também nas engrenagens cônicas** os perfis dos dentes podem ser definidos pelo **traçado em evolvente**. Nas primeiras considera-se uma circunferência de base, obtendo-se uma evolvente cilíndrica, enquanto nas segundas se utiliza um cone de base, resultando, deste modo, uma **evolvente esférica**.

A **evolvente esférica exata** pode obter-se pelo rolamento puro de um círculo gerador sobre o cone de base. O círculo gerador é concêntrico e tangente ao cone de base, como se ilustra na figura 4, em que o **arco PP'** representa parte da evolvente esférica exata que resulta da trajetória descrita pelo ponto P pertencente à linha geratriz do elemento gerador, quando este último rola sem escorregar sobre o cone de base.

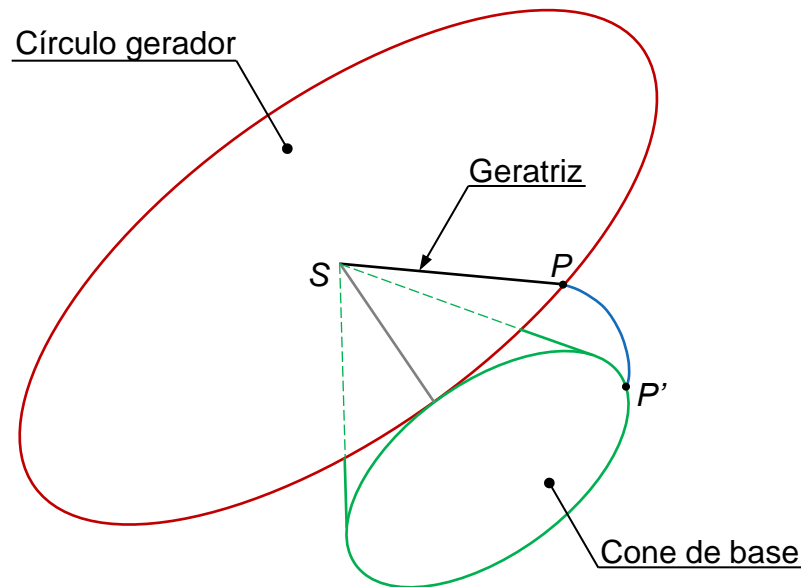


Fig. 4 Evolvente esférica exata em engrenagens cônicas

Perfil Exato e Perfil Aproximado

As engrenagens cónicas em **evolvente esférica têm relativamente pouco interesse prático** em virtude da dificuldade em obter rodas com o perfil exato.

Na verdade, os perfis dos dentes assim obtidos apresentam um **flanco curvo com um ponto de inflexão**, (ver figura 5a).

Por isso, na prática prefere-se o **perfil piramidal ou trapezoidal** para a forma dos dentes das engrenagens cónicas, em detrimento do perfil exato (ver figura 5b).

Na figura 6 representa-se uma **secção de uma engrenagem cónica** quando esta é **interseçada por uma superfície esférica** cujo centro é coincidente com o vértice virtual dos eixos das rodas.

Os perfis dos dentes que se obtêm deste modo correspondem aos **perfis exatos dos dentes**. Daqui pode inferir-se que o perfil dos dentes aumenta com o aumento da superfície esférica considerada.

Pode observar-se que nas rodas cónicas a **geometria de contacto** deve ser examinada numa **superfície esférica**.

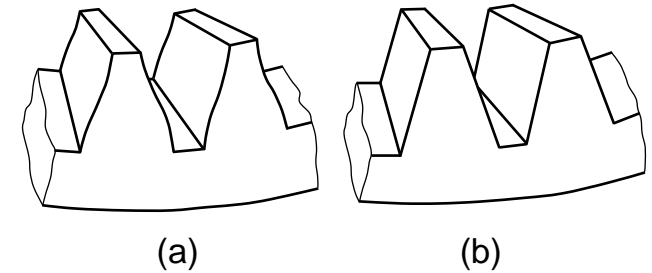


Fig. 5 Perfis de dentes de rodas cónicas

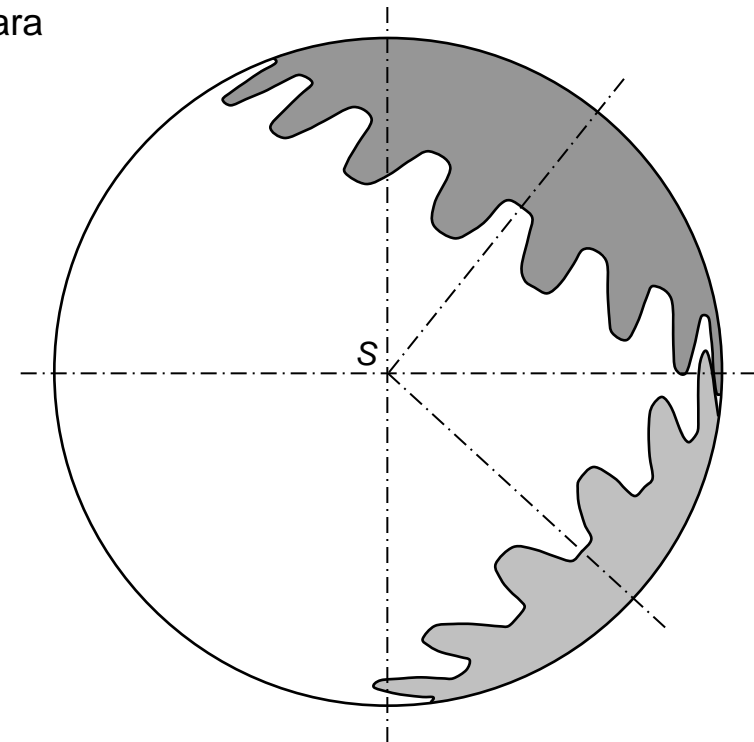


Fig. 6 Secção esférica de engrenagem cónica 7

Engrenamento Octoide

A figura 7 diz respeito ao engrenamento de duas rodas cónicas em que a **forma dos dentes não é gerada em evolvente esférica**. Na verdade, neste engrenamento existe um pequeno desvio em relação ao perfil exato, em virtude das superfícies dos dentes serem constituídas por faces planas.

Como consequência, a linha de ação ou de engrenamento apresenta a forma de *oito*, sendo, por isso, o perfil denominado de **octoide**.

Neste tipo de perfil de dente se considera uma **roda coroa**, a qual apresenta uma relação semelhante à cremalheira no caso das engrenagens cilíndricas. Neste tipo de engrenamento, roda coroa roda cónica, as faces dos dentes são planas que cruzam com o centro da esfera teórica, como se mostra na figura 7b.

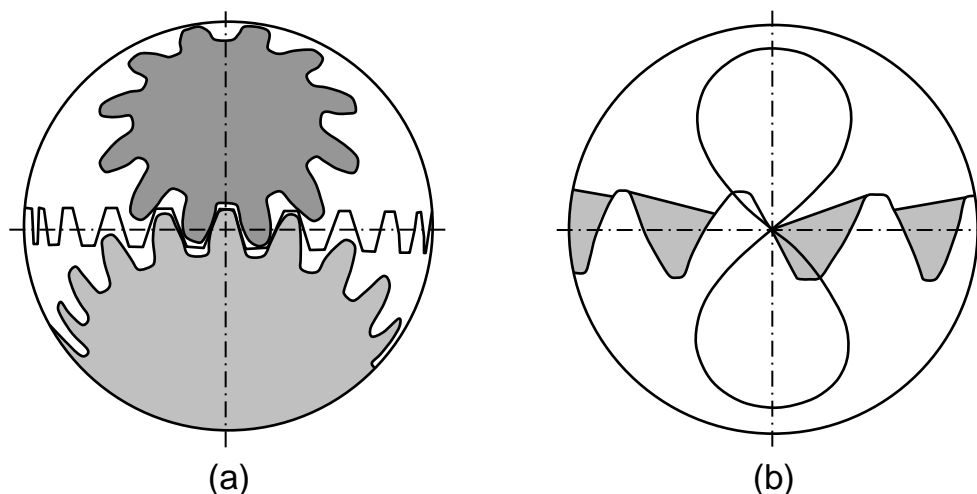


Fig. 7 Representação do engrenamento de duas rodas cónicas

Engrenagens Cónicas de Dentes Retos

A figura 8 diz respeito à representação simplificada de uma engrenagem cónica de **dentado reto**. Neste caso particular, observa-se que os dentes das rodas motora e movida concorrem no vértice S dos cones primitivos.

Na figura 9 ilustram-se as diferenças entre o dentado em evolvente esférica e dentado piramidal para o caso das engrenagens cónicas de dentes retos.

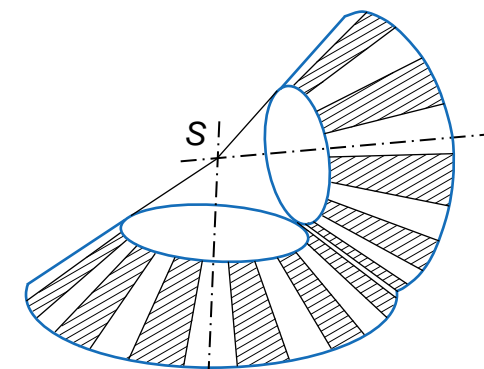


Fig. 8 Dentado reto

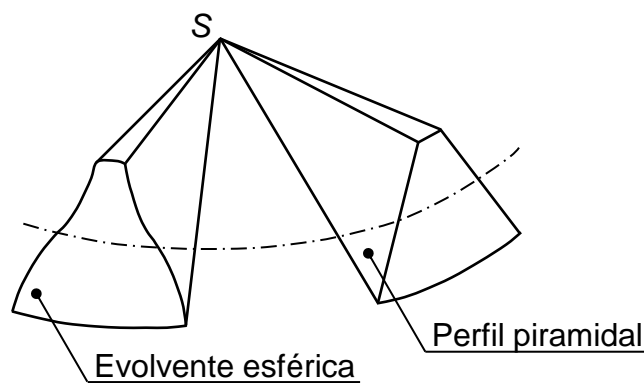


Fig. 9 Diferentes perfis de dentes

Na figura 10 representa-se, uma engrenagem cónica de **dentes inclinados**. Deve notar-se que neste caso as superfícies dos dentes não concorrem para o mesmo vértice virtual dos cones primitivos.

A figura 11 ilustra **perfis de dentes** em evolvente esférica e piramidal desenvolvidos para o caso de engrenagens cónicas de dentes inclinados ou helicoidais.

Engrenagens Cónicas de Dentes Inclínados e Curvos

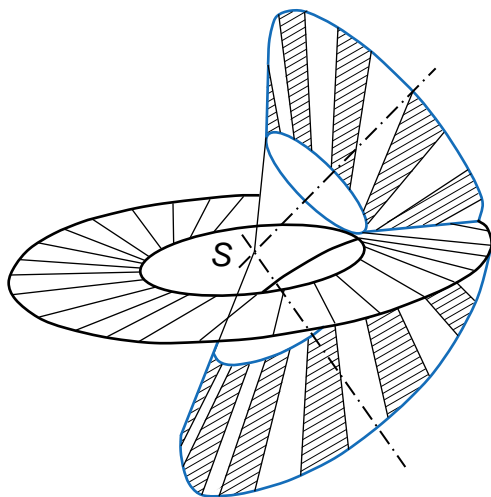


Fig. 10

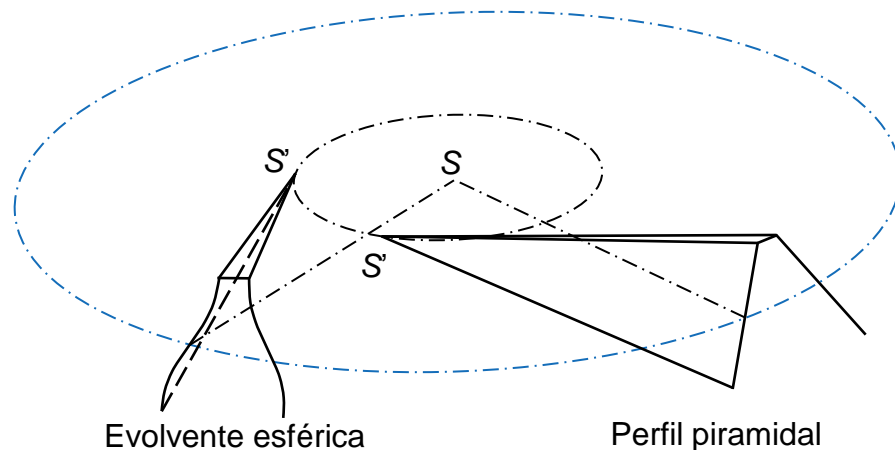


Fig. 11

A figura 12 mostra uma **engrenagem cónica de dentes espirais** ou curvos.

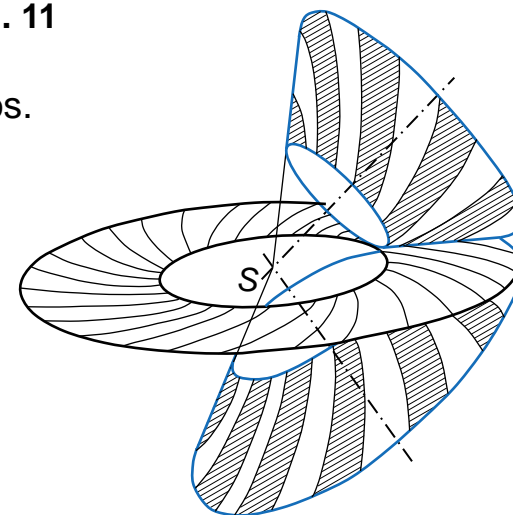


Fig. 12

Parâmetros Geométricos

Na figura 13 estão representados os **principais parâmetros geométricos** e termos utilizados na caracterização de uma engrenagem cônica.

Listam-se de seguida alguns parâmetros e termos associados às rodas cónicas:

Σ – ângulo de conicidade

δ – ângulo de cone primitivo

δ_a – ângulo de cone de coroa

δ_f – ângulo de cone de raiz

ν – ângulo de altura do dente

ν_a – ângulo de saliência

ν_f – ângulo de raiz

R – geratriz primitiva

R_m – geratriz média

b – largura do dentado

m – módulo exterior da engrenagem

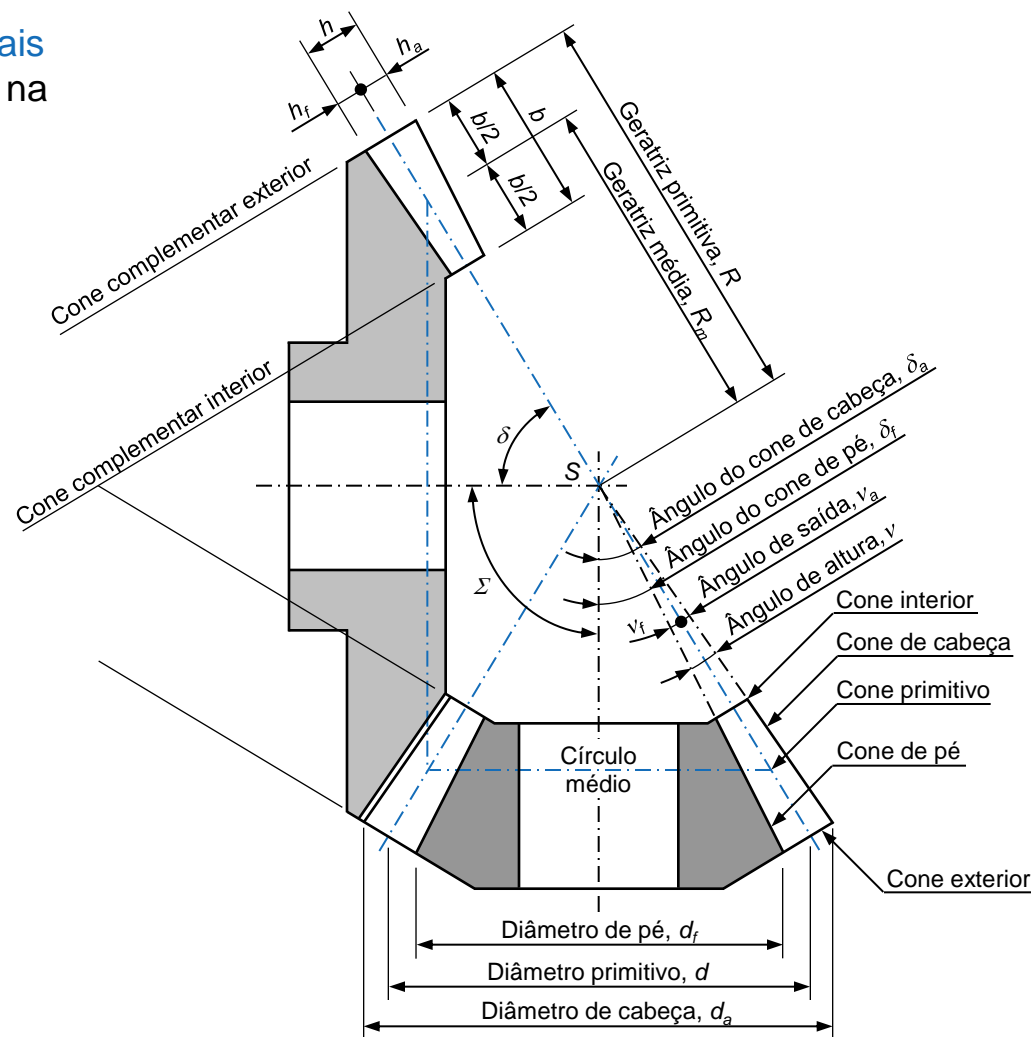


Fig. 13 Nomenclatura fundamental de uma engrenagem cônica₁₁



Parâmetros Geométricos e Proporções dos Dentes

Deve desde já referir-se que no caso das rodas cónicas, **o passo é definido na extremidade exterior do dentado sobre os cones primitivos**.

O estabelecimento das relações matemáticas entre o **módulo**, **o passo**, **o número de dentes** e os diâmetros primitivos são as mesmas que se consideram para as engrenagens cilíndricas, ou seja

$$d_1 = mz_1$$

$$d_2 = mz_2$$

$$p = m\pi$$

No atinente às **proporções dos dentes**, no caso das rodas cónicas consideram-se as mesmas que no caso das engrenagens cilíndricas, isto é

$$h_a = m$$

$$h_f = 1,25m$$

$$h = 2,25m$$

Roda Cilíndrica Equivalente

O traçado de Tredgold baseia-se no facto de um **cone tangente a uma esfera**, no ponto primitivo de uma engrenagem cônica, apresentar uma superfície muito próxima da de uma esfera, quando aquela está na vizinhança do ponto primitivo (ver figura 14a).

O cone referido é denominado de **cone complementar e pode ser planificado**.

O perfil dos dentes de rodas cônicas, quando definido na parte de trás do cone ou cone complementar, é idêntico ao que se obtém para uma roda cilíndrica com um diâmetro primitivo equivalente, tal como se representa na figura 14b.

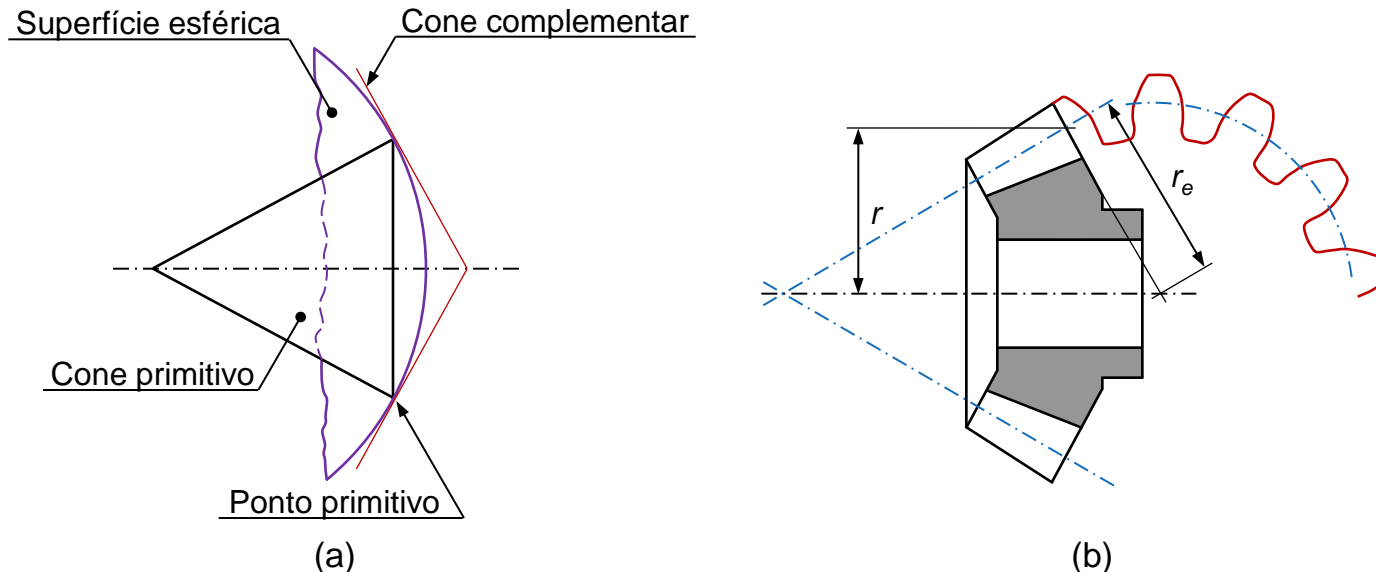


Fig. 14 (a) Representação do traçado aproximado de Tredgold; (b) Representação da roda cilíndrica equivalente

Roda Cilíndrica Equivalente

A figura 15 ilustra uma engrenagem cônica e a correspondente engrenagem cilíndrica equivalente formada a partir dos respectivos cones complementares. A engrenagem equivalente é construída a partir dos raios equivalentes representados na figura 15. Os raios equivalentes correspondem à geratriz dos cones complementares.

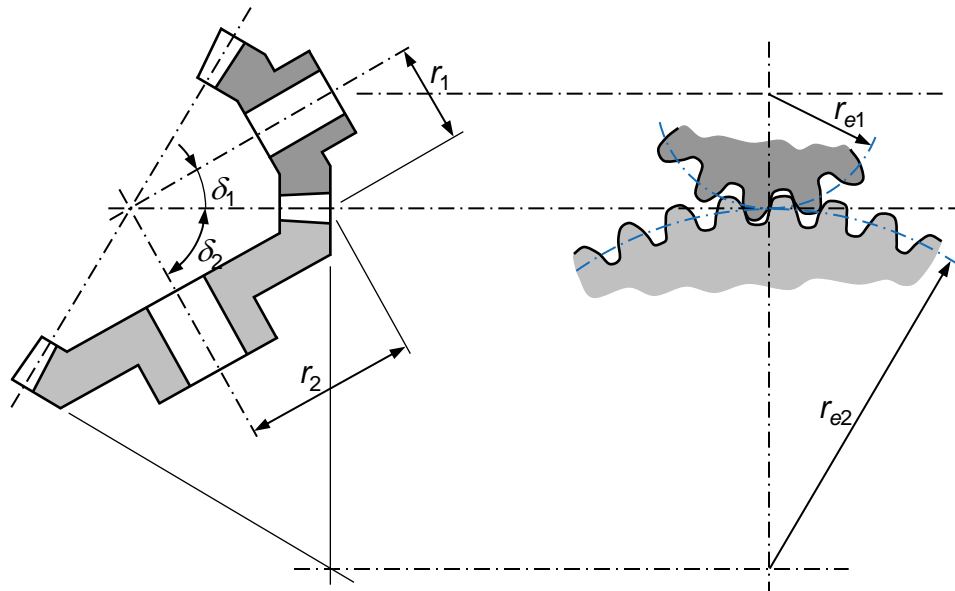


Fig. 15 Engrenagem cônica e engrenagem cilíndrica equivalente

Da análise da figura 15 observa-se que os raios equivalentes são dados por

$$r_{e1} = \frac{r_1}{\cos \delta_1} \quad r_{e2} = \frac{r_2}{\cos \delta_2}$$



Número de Dentes Equivalente

O número de dentes das rodas cilíndricas equivalentes pode ser determinado do seguinte modo

$$z_{e1} = \frac{z_1}{\cos \delta_1} \qquad z_{e2} = \frac{z_2}{\cos \delta_2}$$

Pode verificar-se que o número de dentes equivalente não é, necessariamente, um número inteiro. Uma vez que o número de dentes equivalente é sempre superior ao número de dentes real, uma **engrenagem cônica apresenta um funcionamento mais suave** do que uma engrenagem cilíndrica com o mesmo número de dentes. Tal facto, decorre da existência de maiores comprimentos de condução.

Deve ainda salientar-se que a engrenagem cônica e a engrenagem cilíndrica equivalente apresentam o **mesmo módulo**. Com efeito, o estudo dos parâmetros de desempenho de uma engrenagem cônica pode ser levada a cabo considerando a análise da engrenagem cilíndrica equivalente, virtual ou imaginária, em que o número de dentes é dado pelas expressões anteriores.

Considere uma engrenagem cônica exterior de dentado reto cujo ângulo primitivo do pinhão é igual a $18,43^\circ$. O ângulo de conicidade das rodas é igual 90° . Atendendo a que o pinhão e a roda têm, respetivamente, 16 e 48 dentes, **determine o número de dentes formativo** da engrenagem cilíndrica equivalente.

Resposta:

$$z_{e1} = 16,86$$

$$z_{e2} = 151,83$$

Relação de Transmissão

Considere-se a figura 16, relativa à representação esquemática de um engrenamento cónico, cujas velocidades de rotação são, respetivamente, ω_1 e ω_2 . Ainda nesta figura está representado o eixo instantâneo de rotação, SI , da engrenagem, em que I denota o ponto primitivo exterior

Por definição, a velocidade linear do ponto primitivo é dada por

$$v_1 = v_2 = \overline{IA}\omega_1 = \overline{IB}\omega_2$$

ou seja

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = \frac{z_2}{z_1}$$

Atendendo a que

$$\overline{IA} = \overline{SI}\text{sen}\delta_1 \quad \text{e} \quad \overline{IB} = \overline{SI}\text{sen}\delta_2$$

resulta que
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\text{sen}\delta_2}{\text{sen}\delta_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

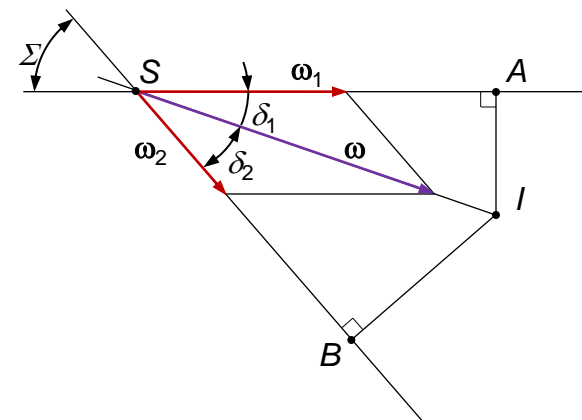


Fig. 16 Engrenamento cónico

Posições Relativas dos Cones Primitivos

Conforme se trate de engrenagens exteriores ou interiores, o estabelecimento do valor do ângulo formado entre os eixos das rodas permite distinguir cinco posições relativas dos cones primitivos de duas rodas cónicas. A figura 17 ilustra esquematicamente estas cinco situações distintas.

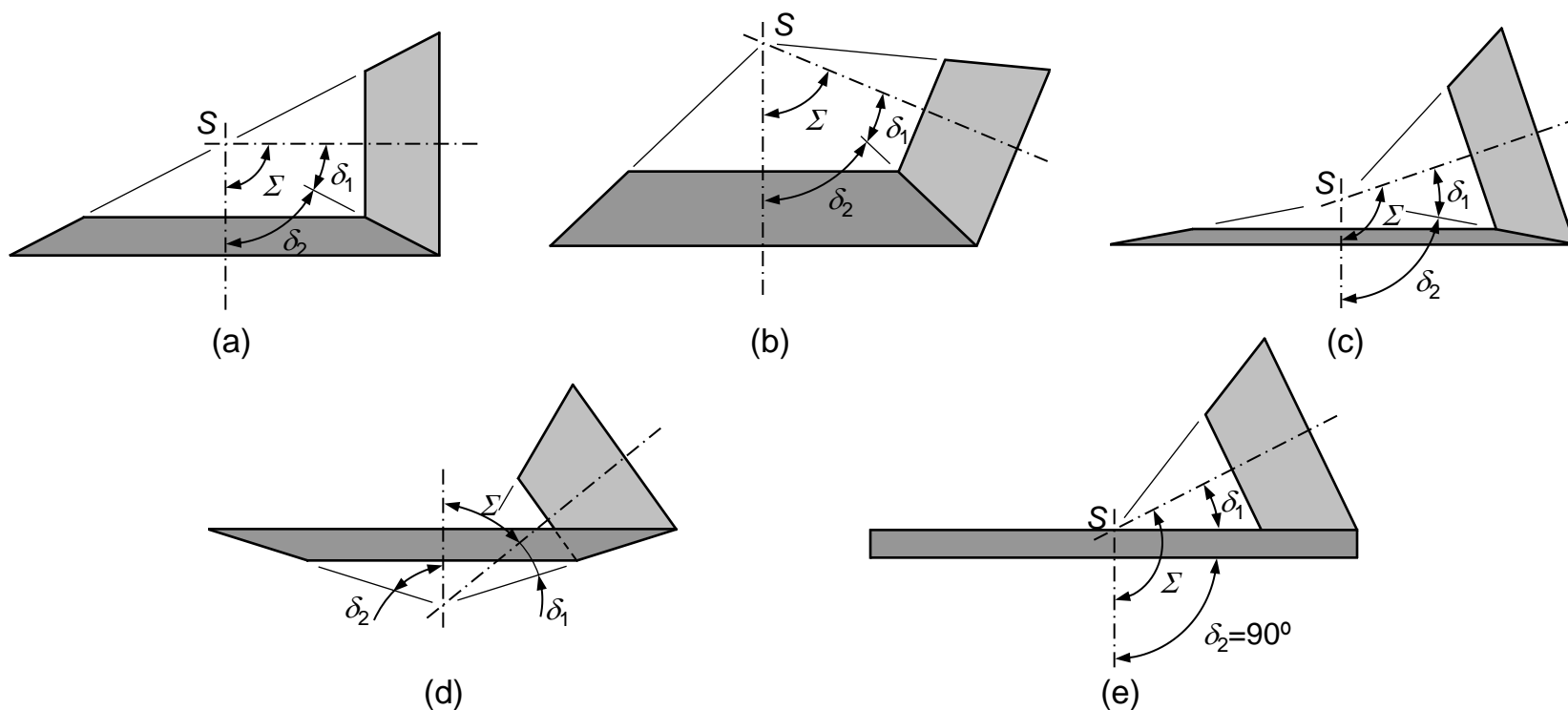


Fig. 17 Posições relativas dos cones primitivos em engrenagens cónicas: (a) Engrenagem exterior, $\Sigma=90^\circ$; (b) Engrenagem exterior, $\Sigma<90^\circ$; (c) Engrenagem exterior, $\Sigma>90^\circ$; (d) Engrenagem interior, $\Sigma<90^\circ$; (e) Engrenagem interior com roda plana, $\Sigma>90^\circ$

Posições Relativas dos Cones Primitivos

Para engrenagens exteriores em que $\Sigma=90^\circ$ tem-se que

$$\delta_1 + \delta_2 = \Sigma$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{z_2}{z_1}$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{sen} \delta_2}{\operatorname{sen} \delta_1} = \frac{\operatorname{sen}(90 - \delta_1)}{\operatorname{sen} \delta_1} = \operatorname{cotg} \delta_1$$

Para engrenagens exteriores em que $\Sigma < 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \operatorname{cos} \Sigma}$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$

Posições Relativas dos Cones Primitivos

Para engrenagens **exteriores** em que $\Sigma > 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen}(180 - \Sigma)}{\frac{z_1}{z_2} - \cos(180 - \Sigma)}$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$

Para engrenagens **interiores** em que $\Sigma < 90^\circ$ tem-se que

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} \Sigma}{\operatorname{sen} \Sigma - \frac{z_1}{z_2}}$$

$$\delta_1 = \delta_2 - \Sigma$$

Para engrenagens **interiores** em que $\Sigma > 90^\circ$, sendo a roda plana, tem-se que

$$\delta_2 = 90^\circ$$

$$\delta_1 = \Sigma - \delta_2$$

Proporções dos Dentes

Nas engrenagens cônicas as proporções dos dentes são estabelecidas na **extremidade exterior dos dentes sobre as circunferências primitivas**

$$h_a = m$$

$$h_f = 1,25m$$

$$\operatorname{tg} v_a = \frac{2\operatorname{sen}\delta}{z}$$

$$\operatorname{tg} v_f = \frac{2,5\operatorname{sen}\delta}{z}$$

$$d_a = d \frac{\operatorname{sen}(\delta + v_a)}{\operatorname{sen}\delta \cos v_a} = d + 2h_a \cos \delta$$

$$d_f = d \frac{\operatorname{sen}(\delta + v_f)}{\operatorname{sen}\delta \cos v_f} = d - 2h_f \cos \delta$$

$$R = \frac{d}{2\operatorname{sen}\delta} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

$$R_m = R - \frac{b}{2}$$

Relação de Condução

Para engrenagens cônicas de dentes retos, a [relação de condução](#) pode ser calculada do seguinte modo

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left(\sqrt{\frac{z_{e2}^2}{4} \sin^2 \alpha + z_{e2} + 1} + \sqrt{\frac{z_{e1}^2}{4} \sin^2 \alpha + z_{e1} + 1} - \frac{z_{e1} + z_{e2}}{2} \sin \alpha \right)$$

Para [engrenagens cônicas de dentes inclinados](#), a relação de condução é escrita da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{l}{\pi m_t \cos \alpha_t} + \frac{btg\beta}{\pi m_t}$$

onde o primeiro termo do segundo membro desta equação é dado por

$$\frac{1}{\pi \cos \alpha_t} \left(\sqrt{\frac{z_{e2}^2}{4} \sin^2 \alpha_t + z_{e2} \cos \beta + \cos^2 \beta} + \sqrt{\frac{z_{e1}^2}{4} \sin^2 \alpha_t + z_{e1} \cos \beta + \cos^2 \beta} - \frac{z_{e1} + z_{e2}}{2} \sin \alpha_t \right)$$

em que α_t denota o ângulo de pressão aparente, β representa o ângulo de inclinação primitivo, sendo z_{e1} e z_{e2} o número de dentes equivalente e b diz respeito à largura dos dentes.

Rendimento e Interferências

Relembre-se que o ângulo de pressão real (α_n), o ângulo de pressão aparente (α_t) e o ângulo de inclinação da hélice primitiva (β) podem relacionar-se do seguinte modo

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta$$

Por seu lado, o módulo real (m_n) e o módulo aparente (m_t) relacionam-se da seguinte forma

$$m_n = m_t \cos \beta$$

No cálculo do **rendimento** nas engrenagens cônicas podem ser consideradas as expressões apresentadas para os casos das engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais uma vez obtidas as engrenagens equivalentes correspondentes utilizando para o efeito o traçado aproximado de Tredgold.

Do mesmo modo, a temática das **interferências de funcionamento** pode ser analisada tendo em consideração as expressões relativas às engrenagens cilíndricas de dentado reto ou de dentado inclinado, desde que se substituam o valor de z_1 e z_2 pelos números de dentes equivalentes, resultando

$$z_1 \geq -z_2 \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} + \sqrt{\left(z_2 \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \right)^2 + \frac{4 \cos \delta_1 (z_2 + 1) \cos \delta_1}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \delta_2}}$$

Quando z_2 tende para infinito, esta equação pode ser simplificada do seguinte modo

$$z_1 \geq \frac{2 \cos \delta_1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Formas dos Dentes

Tal como no caso das engrenagens cilíndricas, nas engrenagens cónicas o dentado reto é bastante utilizado uma vez que o seu projeto e fabrico são relativamente simples de concretizar. A montagem das engrenagens cónicas de dentes retos deve ser bastante cuidada de modo a garantir o bom funcionamento.

Contudo, quando as velocidades de funcionamento são elevadas, as engrenagens cónicas de dentes retos são assaz ruidosas.

Com o intuito de obter engrenamentos mais suaves utilizam-se rodas cónicas com dentes curvos, tal como se ilustra na figura 18.

O ângulo de pressão neste tipo de dentado é, em geral, o mesmo que se considera para o dentado reto, ou seja, $\alpha=20^\circ$. Por seu lado, o ângulo de espiral é normalmente igual a 35° .

Quando o ângulo de espiral é nulo, o dentado denomina-se de dentado *zero*.

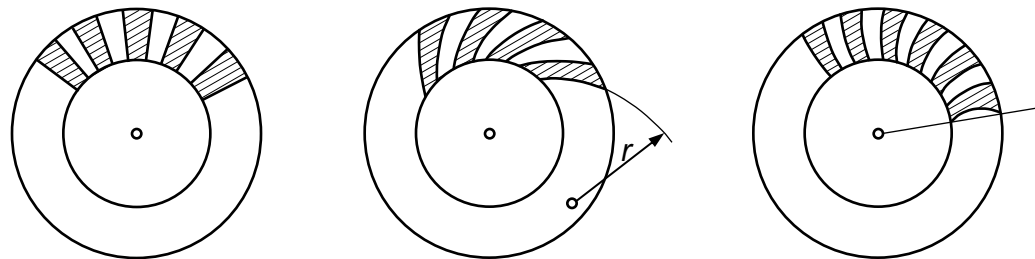


Fig. 18 Diferentes formas de dentes de rodas cónicas

Rodas Cónicas Descentradas

As hipoides são engrenagens **mais suaves que as engrenagens cônicas** de dentes curvos e proporcionam **maior capacidade** de transmissão de carga. Na verdade, nas hipoides proporcionam um maior número de dentes em contacto ao mesmo tempo, tornando o engrenamento mais silencioso.

Como inconvenientes, as hipoides têm um funcionamento que **combina rolamento com escorregamento**. Quanto maior for o descentramento dos eixos das rodas, maior será o escorregamento entre as superfícies dos dentes. Por isso, as hipoides apresentam **rendimentos mais baixos** devido ao escorregamento existente e requerem a utilização de lubrificantes adequados às cargas e temperaturas em jogo.



Fig. 19 Ilustração de uma engrenagem hipóide



Perguntas de Revisão

Apresenta-se, de seguida, um **conjunto diversificado de questões** relativas aos principais aspetos relacionados com a temática das engrenagens cônicas:

- Apresente quatro tipos de engrenagens cônicas.
- Descreva as principais aplicações das engrenagens cônicas.
- Descreva sucintamente o processo de traçado de perfis de dentes para engrenagens cônicas.
- Distinga perfil exato de perfil aproximado nas rodas cônicas.
- Defina ângulo de conicidade de uma engrenagem cônica.
- Defina ângulo primitivo de uma roda cônica.
- Para as engrenagens cônicas, diga em que zona das rodas se define o passo.
- Diga em que consiste o traçado aproximado de Tredgold.
- Diga como se pode obter o número de dentes formativo ou imaginário de uma roda cônica.
- Diga o que entende por roda cilíndrica equivalente.
- Represente graficamente uma roda cônica e a correspondente roda cilíndrica equivalente.
- Diga como podem ser definidos os ângulos de conicidade em engrenagens cônicas.
- Descreva as principais características das hipoides.
- Considere uma engrenagem cônica de dentes helicoidais cujo ângulo de conicidade é igual a 90° . Atendendo a que a relação de transmissão é igual a 4, o ângulo de inclinação primitiva é igual a 30° e que o pinhão tem 15 dentes, determine o número de dentes equivalentes. Considerando que a largura dos dentes é de 30 mm, calcule a relação de condução desta engrenagem.



Bibliografia Recomendada

Apresentam-se em seguida as [principais fontes bibliográficas](#) utilizadas na preparação deste documento:

- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspetos Gerais sobre Engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 2. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 44p.
- Flores, P., Gomes, J. (2015) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 4. Engrenagens Cônicas*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 27p.
- Flores, P., Gomes, J. (2015) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens: Teoria e Exercícios de Aplicação*. Publindústria, Porto.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.