

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Órgãos de Máquinas II

Elaborado e revisto por Paulo Flores, José Gomes, Nuno Dourado e Filipe Marques - 2017



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: pflores@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: jgomes@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: nunodourado@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



Universidade do Minho
Departamento de Engenharia Mecânica
Campus de Azurém
4804-533 Guimarães - PT

Tel: +351 253 510 220
Fax: +351 253 516 007
E-mail: fmarques@dem.uminho.pt
URL: www.dem.uminho.pt



T.06 – ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES INCLINADOS

1. Introdução
2. Geração do Dente
3. Nomenclatura
4. Relações Geométricas
5. Parâmetros de Desempenho
6. Traçado Aproximado de Tredgold
7. Rodas Cruzadas
8. Revisão de Conhecimentos
9. Referências Bibliográficas

1. Introdução

Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos e Inclínados

Nas engrenagens cilíndricas de **dentes inclinados ou helicoidais**, tal como a própria designação sugere, os dentes apresentam uma inclinação relativamente ao eixo das rodas.

A figura 1 evidencia as diferenças entre uma engrenagem cilíndrica de dentes retos e uma engrenagem cilíndrica de dentes inclinados.

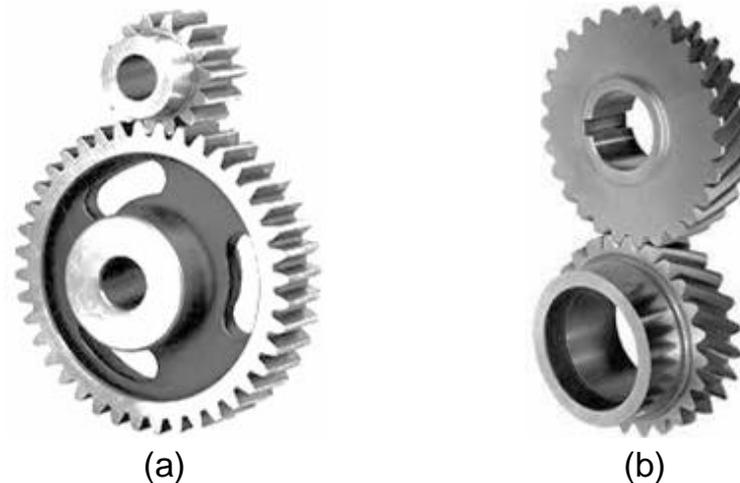


Fig. 1 Engrenagens cilíndricas exteriores: (a) Dentes retos; (b) Dentes inclinados.

O **ângulo de inclinação dos dentes** é frequentemente denominado de **ângulo de hélice**. Em geral, o ângulo de inclinação dos dentes varia entre **15 e 30°**.

Quando o ângulo de inclinação é pequeno, os benefícios associados a uma engrenagem de dentes inclinados é também pequeno. Por seu lado, valores elevados para o ângulo de inclinação tendem a bloquear o engrenamento das rodas.

1. Introdução

Engrenagens Cilíndricas de Dentes Inclínados de Primeira Geração

As engrenagens cilíndricas de dentes inclinados de **primeira geração** eram feitas pela associação em paralelo de diversas rodas de dentes retos, em que entre estas existia um ligeiro desfasamento, tal como se pode observar na figura 2.

Com esta associação de rodas cilíndricas de dentes retos conseguiam-se transmissões **mais suaves** e com **maior capacidade de transmissão de potência**. No caso limite em que a largura do dente tende para zero e o número de dentes tende para infinito, então a associação, inicialmente de dentado reto, transforma-se numa roda de dentes inclinados.



Fig. 2 Roda cilíndrica exterior de dentes inclinados de primeira geração

1. Introdução

Engrenagens Cilíndricas de Dentes Inclínados de Eixos Paralelos e Cruzados

As engrenagens cilíndricas de dentes inclinados podem ter **eixos paralelos** ou **eixos cruzados** não complanares, tal como se mostra na figura 3.

As engrenagens cilíndricas em que os eixos das rodas não são complanares, como no caso da representação da figura 3b, denominam-se de **engrenagens torsas**.

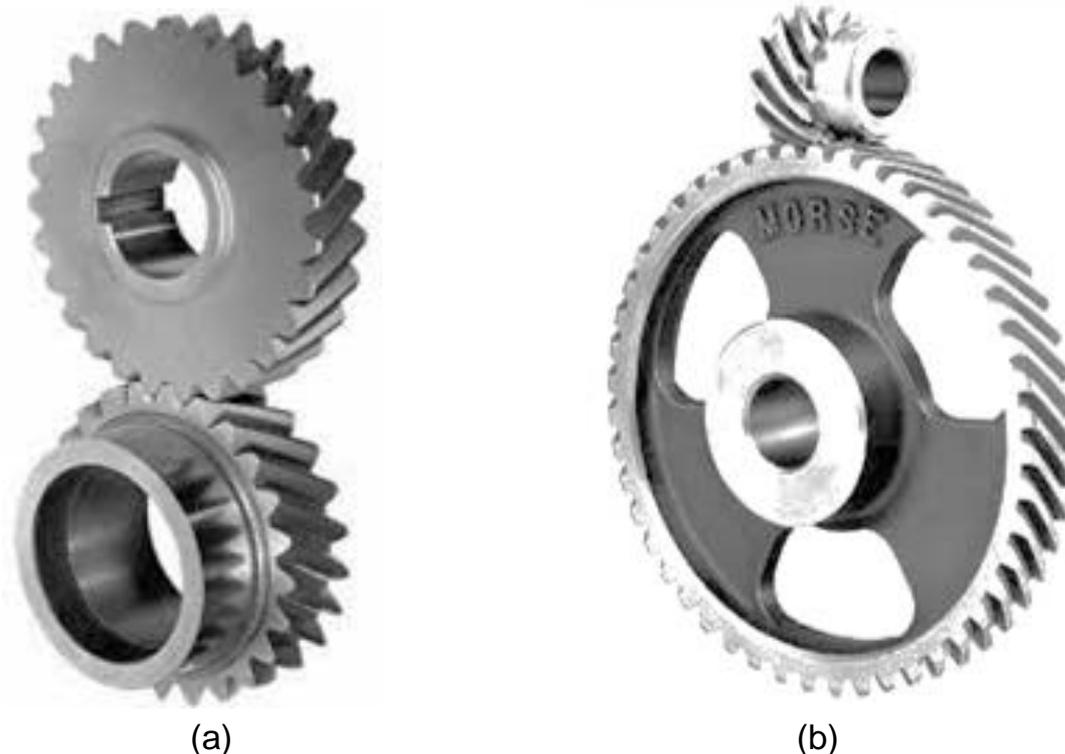


Fig. 3 Engrenagens cilíndricas de dentes inclinados: (a) Eixos paralelos; (b) Eixos cruzados

1. Introdução

Hélice Esquerda e Direita

As rodas dentadas helicoidais podem ser **direitas ou esquerdas**, conforme a inclinação dos dentes. É também frequente a denominação de rodas com hélice direita e rodas com hélice esquerda.

A direção das hélices das rodas é definida pela regra da mão direita. A figura 4 ilustra rodas com hélice direita e com hélice esquerda.

Numa engrenagem cilíndrica de dentes inclinados, **o ângulo de inclinação dos dentes das duas rodas tem de ser o mesmo**, porém, uma roda apresenta hélice direita e a outra hélice esquerda, tal como se pode observar na figura 3a.

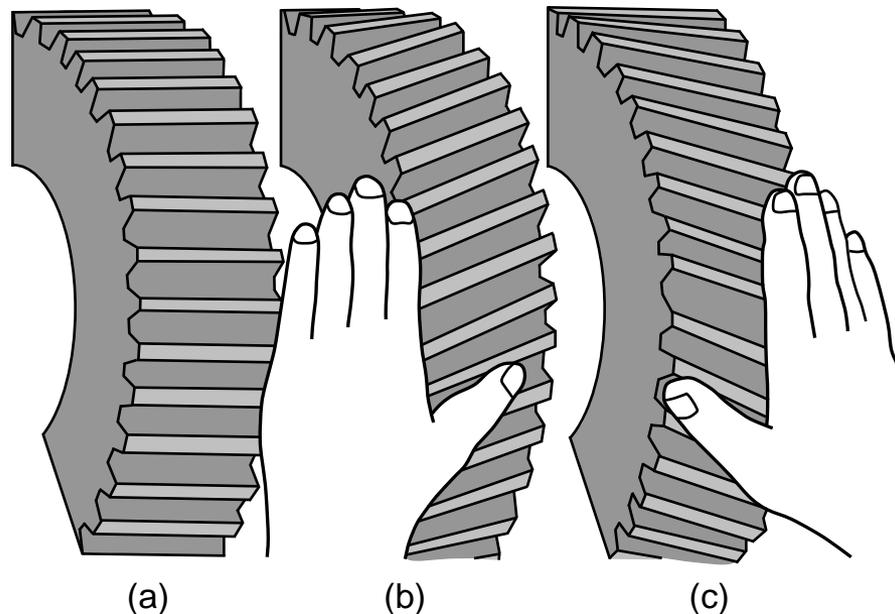


Fig. 4 (a) Dentado reto; (b) Hélice esquerda; (c) Hélice direita

1. Introdução

Engrenamento em Rodas de Dentado Reto e Inclinado

Nas **engrenagens de dentes retos**, o engrenamento entre um par de dentes é materializado por um **segmento de reta** paralelo aos eixos das rodas, que se estende a toda a largura do dente (figura 5a).

Nas **engrenagens de dentes inclinados**, o engrenamento entre os dentes das rodas ocorre de **forma progressiva**, isto é, inicia-se com um contacto pontual, o qual se vai desenvolvendo ao longo de uma linha à medida que o engrenamento vai progredindo (figura 5b).

A linha de contacto é, nestes casos, oblíqua em relação aos eixos das rodas. Na verdade, é esta característica associada ao engrenamento progressivo que faz com que as **forças de contacto entre os dentes sejam transmitidas de forma gradual**.

Por isso, as engrenagens cilíndricas de dentes inclinados são bastante **mais suaves** e **mais silenciosas** que as engrenagens cilíndricas de dentado reto.

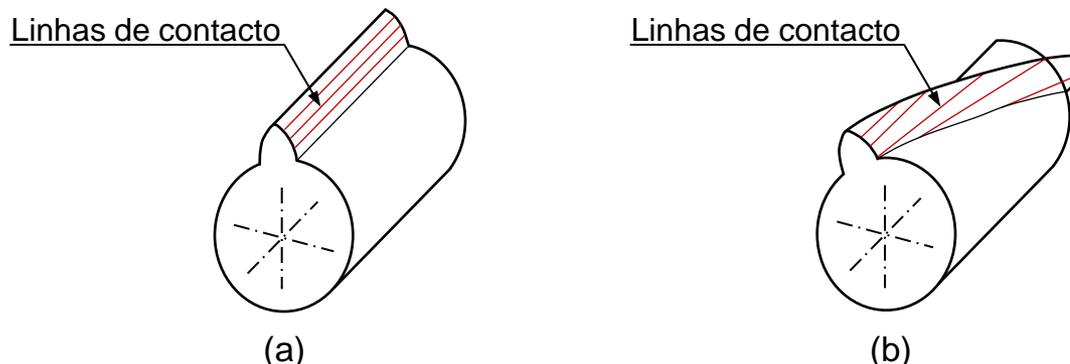


Fig. 5 Engrenagens cilíndricas: (a) Dente reto; (b) Dente inclinado

Forças em Rodas de Dentado Reto e Inclinado

As engrenagens cilíndricas de **dentes inclinados desenvolvem esforços axiais**, o que não acontece nas engrenagens de dentado reto. Estes esforços axiais são transmitidos aos apoios das rodas.

A figura 6 mostra as **componentes da força** que atua numa engrenagem cilíndrica de dentes retos e numa engrenagem de dentes inclinados. Por simplicidade de representação, nesta figura apenas se inclui uma roda e não toda a engrenagem.

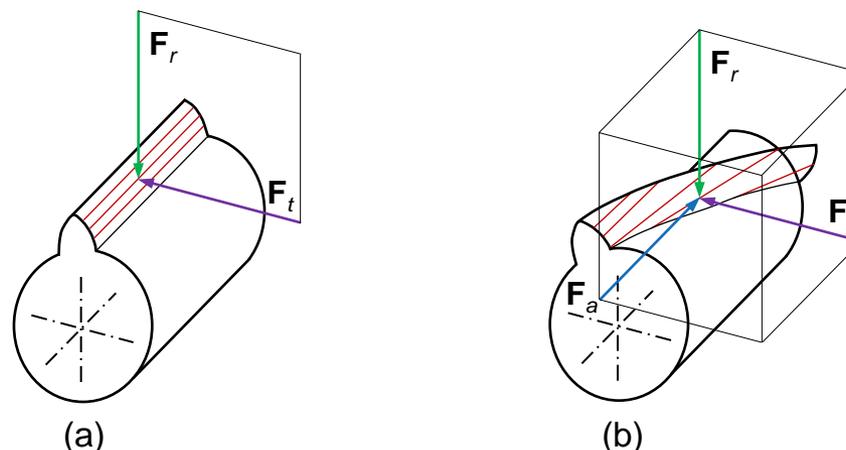


Fig. 6 Engrenagens cilíndricas: (a) Dente reto; (b) Dente inclinado

Da figura 6a pode verificar-se que no caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos, as componentes da força atuante nos dentes estão contidas num só plano, o qual é perpendicular ao eixo da roda.

Da análise da figura 6b observa-se que existem três componentes da força que atua no engrenamento de rodas cilíndricas de dentes inclinados, adquirindo, deste modo, um caráter tridimensional.

Rodas de Dupla Hélice ou Dentado em Espinha

O inconveniente associado à existência de esforços axiais originados nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados pode ser ultrapassado se se utilizarem **rodas de dupla hélice**, também denominadas de rodas com **dentado em espinha**, tal como se mostra na figura 7.



Fig. 7 Engrenagem cilíndrica de dupla hélice ou dentado em espinha

Numa engrenagem de dentado de dupla hélice são também desenvolvidos esforços axiais durante o engrenamento, contudo, como estes atuam em sentidos opostos, numa e noutra hélice, o esforço resultante é nulo, ou pelo menos reduzido de forma bastante significativa.

Este tipo de engrenagem **requer cuidados especiais**, tanto no fabrico, como na montagem, sendo, por isso, relativamente mais caras do que as engrenagens cilíndricas de dentado helicoidal simples.

Geração de Evolvente Helicoidal

Quando um plano roda sem escorregar sobre um cilindro, então um qualquer segmento de reta que está contido no plano gerador, e é paralelo ao eixo do cilindro, gera uma superfície em evolvente de um dente reto.

Quando a linha geratriz é oblíqua em relação ao eixo do cilindro, então o rolamento puro do plano gerador dá origem à superfície de um dente inclinado ou helicoidal. Esta última evolvente é denominada de evolvente helicoidal.

A figura 8 diz respeito às situações anteriormente descritas no que diz respeito à geração de perfis de dentes retos e de dentes inclinados

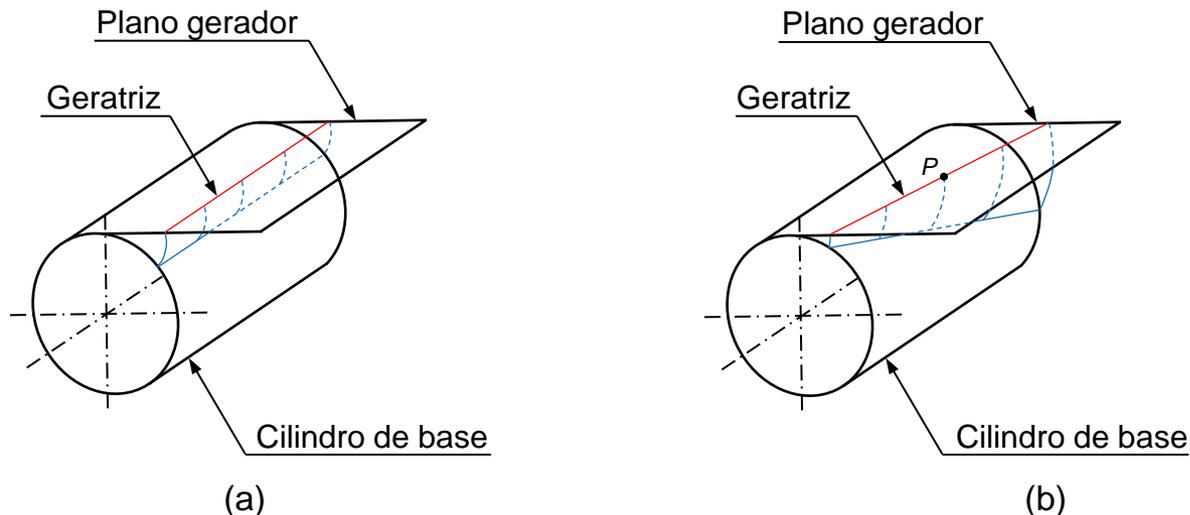


Fig. 8 Geração de uma superfície em evolvente: (a) Dente reto; (b) Dente Inclinado

Geração de Evolvente Helicoidal

Considera-se um [pedaço de papel em forma de paralelogramo](#), o qual é enrolado à volta de um cilindro, denominado cilindro de base, como mostra a figura 9.

O papel é enrolado de tal modo que um dos lados coincide com a hélice do dentado helicoidal.

Mantendo o pedaço de [papel esticado e desenrolando-o em torno do cilindro](#), então cada ponto situado no lado do paralelogramo que representa a hélice gera uma curva evolvente.

A superfície obtida pelas evolventes assim gerada forma a chamada [envolvente helicoidal](#), tal como se representa na figura 9.

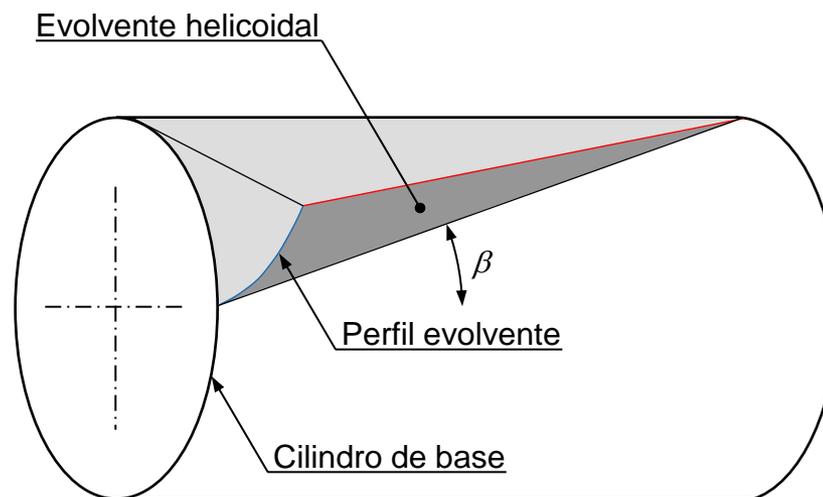


Fig. 9 Geração de uma evolvente helicoidal

Geração dos Perfis de Dentes Inclinados

Tome-se em consideração a figura 10 onde se representam dois cilindros primitivos cujos eixos contêm os pontos O_1 e O_2 , os quais são tangentes segundo o segmento de reta IJ . A interseção dos cilindros primitivos com o plano perpendicular ao segmento de reta IJ dá origem às circunferências primitivas C_1 e C_2 .

A interseção do mesmo plano com os cilindros de base, resulta nas correspondentes circunferências de base C_{b1} e C_{b2} . Por isso, o plano que é simultaneamente tangente aos cilindros de base representa o plano gerador.

Este plano é tangente aos cilindros de base segundo os segmentos de reta EP e FQ . O segmento de reta EF é o resultado da interseção do plano gerador com o plano perpendicular ao segmento de reta IJ .

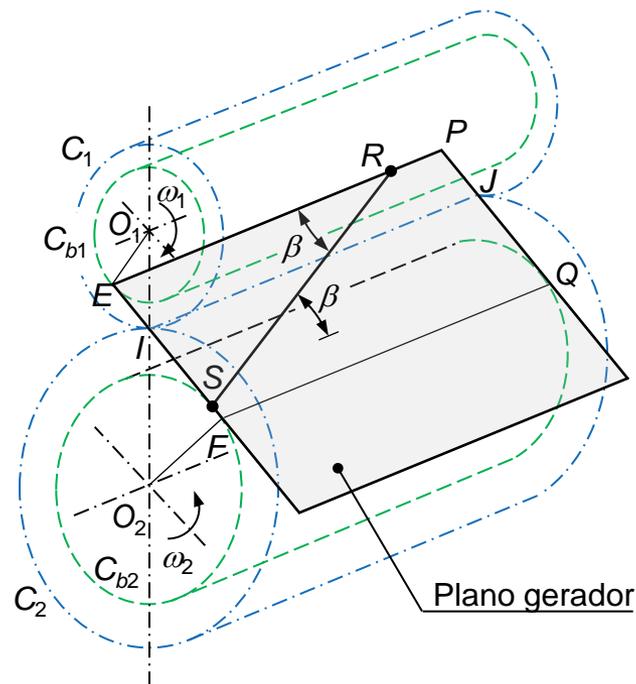


Fig. 10 Geração de perfis de dentes inclinados

Considere-se agora o segmento de reta RS do plano gerador e que faz um ângulo β com os segmentos de reta EP e FQ . O plano gerador ao rolar sem escorregar sobre os cilindros de base dá origem a duas superfícies conjugadas evolventes helicoidais do segmento RS . Estas superfícies são sempre tangentes segundo o segmento de reta RS .

O plano gerador que contém, em cada instante do engrenamento, o segmento de reta do contacto entre as superfícies conjugadas é vulgarmente denominado de plano de ação ou plano de engrenamento.

Hélices Primitiva e de Base, Ângulos de Pressão Normal e Transverso

A figura 11 mostra um dente helicoidal onde estão representados os seguintes elementos:

- Hélice primitiva, que é o resultado da interseção da superfície do dente com o cilindro primitivo
- Hélice de base, que é o resultado da interseção da superfície do dente com o cilindro de base
- Ângulo de pressão real ou normal, α_n , que é medido no plano perpendicular ao eixo do dente
- Ângulo de pressão aparente, α_t , que é medido no plano de rotação da roda

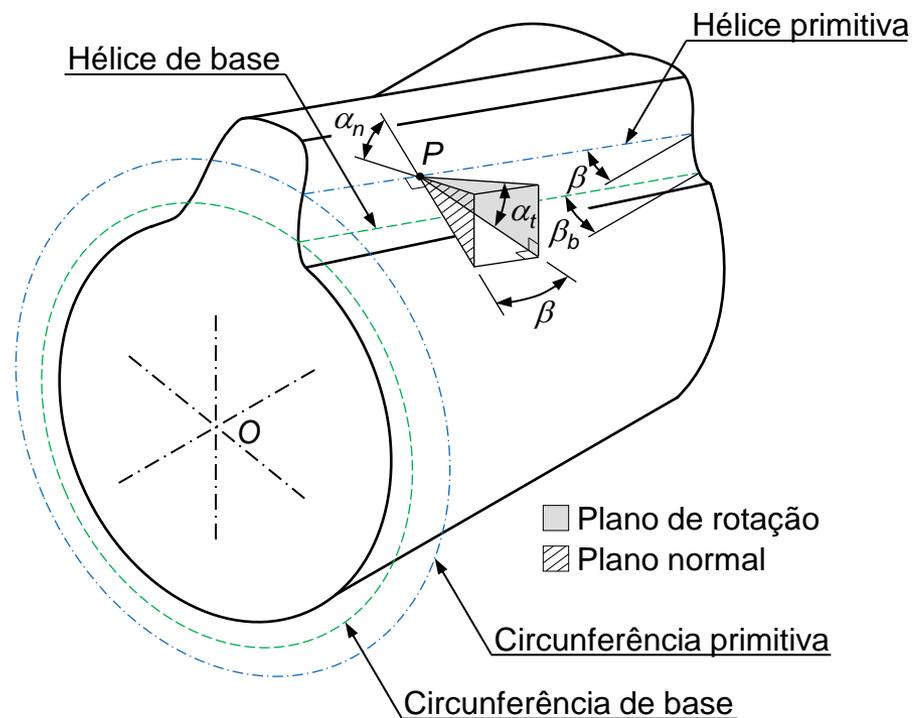


Fig. 11 Representação de um dente inclinado



Passos Real, Transverso e Axial

O **ângulo de hélice** é variável ao longo da superfície do dente, assim, por definição, tem-se que o ângulo de inclinação primitiva é o ângulo formado pela tangente à superfície do dente na hélice primitiva com a direção axial do cilindro primitivo.

Por outras palavras, o **ângulo de inclinação primitiva**, ou simplesmente inclinação primitiva, é o ângulo que a hélice primitiva faz com as geratrizes do cilindro primitivo.

De modo semelhante, o **ângulo de inclinação de base**, ou simplesmente inclinação de base, é o ângulo definido entre a hélice de base e as geratrizes do cilindro de base.

O facto de no dentado helicoidal existir inclinação dos dentes implica que o plano de rotação das rodas e o plano perpendicular ao eixo dos dentes sejam concorrentes, tal como se pode observar na figura 11.

Numa roda dentada de dentes helicoidais devem distinguir-se os seguintes passos:

- **Passo real ou normal (primitivo)**, p_n , que diz respeito ao comprimento do arco compreendido entre duas hélices primitivas homólogas consecutivas. Este passo é medido num plano perpendicular ao eixo dos dentes
- **Passo aparente ou transverso**, p_t , que é o comprimento do arco de circunferência primitiva compreendido entre dois perfis homólogos consecutivos. Este passo é medido no plano de rotação
- **Passo axial**, p_x , que é a distância medida na direção do eixo da roda entre duas hélices primitivas homólogas consecutivas. Este passo corresponde a um segmento de reta.

Passos Real, Transverso e Axial

A figura 12 representa a planificação simplificada de uma roda cilíndrica de dentes inclinados. Nesta figura evidenciam-se os seguintes elementos:

- Ângulo de inclinação primitiva (β)
- Passo real ou normal (p_n),
- Passo aparente ou transverso (p_t)
- Passo axial (p_x).

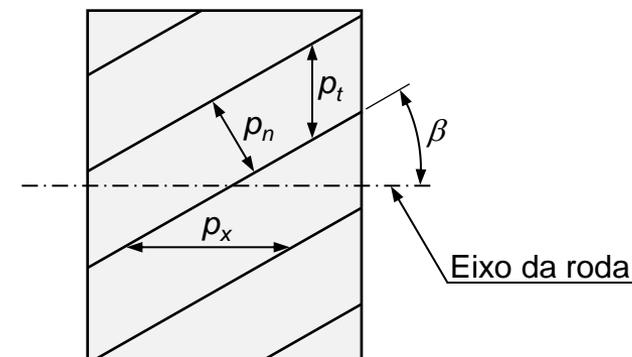


Fig. 12 Representação dos diferentes passos

É evidente que em correspondência com os passos real e aparente existem os **módulos real e aparente**. Assim, atendendo à definição de módulo tem-se que

$$m_n = \frac{p_n}{\pi} \quad m_t = \frac{p_t}{\pi}$$

em que m_n e m_t são ao módulo normal ou real e ao módulo aparente ou transverso, respetivamente.

Para que **haja engrenamento** entre duas rodas cilíndricas de dentes inclinados é necessário que ambas apresentem o **mesmo passo real**, (o mesmo módulo real e o mesmo ângulo de pressão real).

Ângulos de Inclinação Primitiva e de Inclinação de Base

Com o intuito de estabelecer uma **relação matemática entre os ângulos de inclinação primitiva e de inclinação de base** considere-se a planificação do cilindro primitivo e do cilindro de base na extensão do correspondente avanço, tal como se ilustra na figura 13.

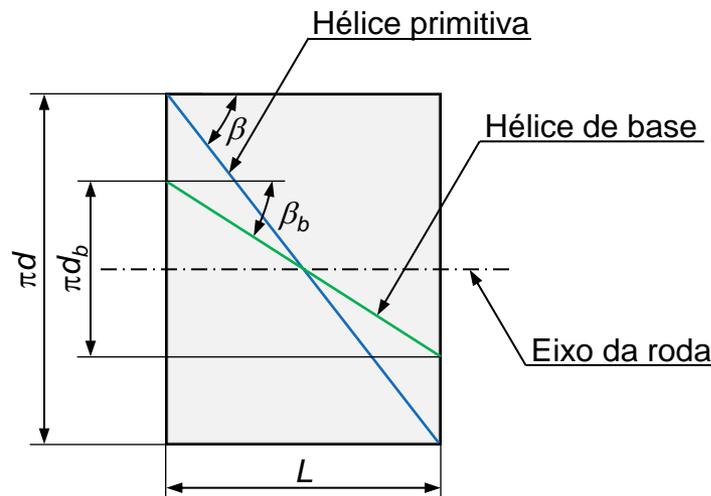


Fig. 13 Planificação de cilindro primitivo e do cilindro de base

Da análise da figura 13 pode escrever-se a seguinte expressão

$$L = \frac{\pi d_b}{\operatorname{tg} \beta_b} = \frac{\pi d}{\operatorname{tg} \beta}$$

em que L é o **passo de hélice ou avanço**, ou seja, a progressão da roda ao fim da uma rotação completa.

Ângulos de Inclinação Primitiva e de Inclinação de Base

O avanço é o mesmo, quer se considere a hélice primitiva ou a hélice de base, donde resulta que

$$\operatorname{tg} \beta_b = \frac{d_b}{d} \operatorname{tg} \beta$$

Considerando agora a figura 11, no plano de rotação da roda verifica-se que

$$d_b = d \cos \alpha_t$$

onde α_t é o ângulo de pressão aparente, o qual é medido no plano de rotação da roda.

Assim, combinando as duas equações anteriores resulta que

$$\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \beta \cos \alpha_t$$

A análise geométrica das engrenagens cilíndricas de dentes inclinados quando é feita no plano de rotação é em tudo semelhante ao caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos.

Com efeito, no plano de rotação da roda pode estabelecer-se a seguinte relação

$$d = m_t z$$

em que d é o diâmetro primitivo, m_t representa o módulo aparente e z é o número de dentes da roda

Passos Normal, Aparente e Axial

Com referência à figura 12, podem obter-se as **relações entre o passo real, passo aparente e passo axial**

$$p_n = p_t \cos \beta \quad p_x = p_t \cotg \beta = \frac{p_n}{\operatorname{sen} \beta}$$

Para se obter uma **relação entre estes dois tipos de elementos**, considere-se a figura 14, onde se evidenciam o ângulo de pressão real (α_n), o ângulo de pressão aparente (α_t) e o ângulo de hélice (β).

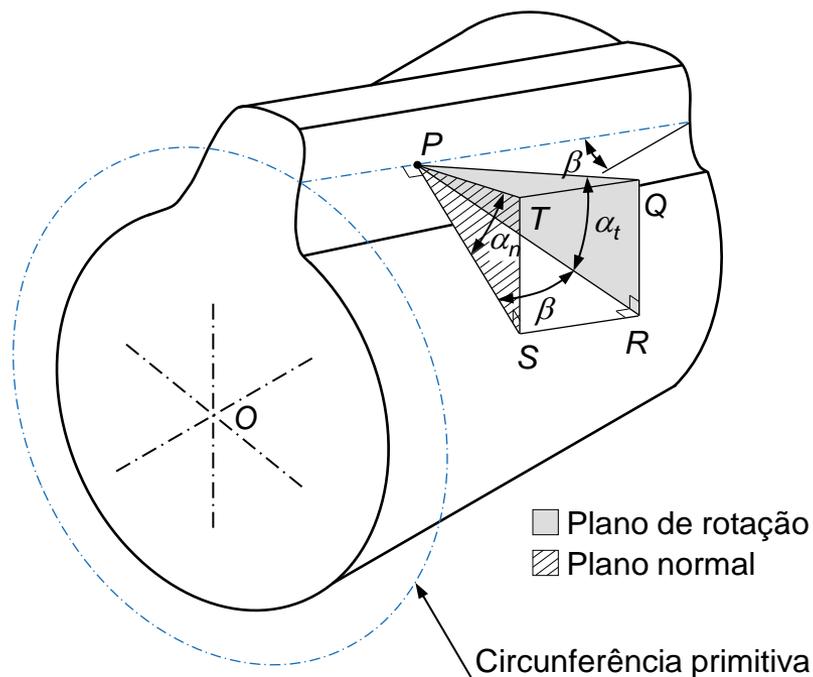


Fig. 14 Representação de um dente inclinado ou helicoidal

Relação entre Elementos Reais e Aparentes

Da observação atenta da figura 14 verifica-se que o plano de rotação e o plano perpendicular ao eixo do dente são definidos, respetivamente, pelos pontos PQR e PTS .

Ainda da análise desta figura podem escrever-se as seguintes relações geométricas.

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{\overline{TS}}{\overline{PS}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$$

$$\overline{PR} = \overline{PS} \cos \beta$$

$$\overline{TS} = \overline{QR}$$

Combinando estas equações resulta que

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_t \cos \beta$$

Esta equação pode ser generalizada para estabelecer a relação entre dois quaisquer elementos reais e aparentes, ou seja

$$(\textit{Elemento real})_n = (\textit{Elemento aparente})_t \cos \beta$$

Relações Geométricas e Proporções dos Dentes

Deste modo tem-se que $p_n = p_t \cos \beta$ $m_n = m_t \cos \beta$ $s_n = s_t \cos \beta$ $e_n = e_t \cos \beta$

A tabela 1 inclui as principais [relações geométricas e proporções dos dentes](#) para engrenagens cilíndricas de dentes inclinados.

Tab. 1 Principais [relações geométricas e proporções dos dentes](#) para engrenagens cilíndricas exteriores de dentado helicoidal

Parâmetro	Expressão
Ângulo de pressão aparente	$\alpha_t = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} \right)$
Diâmetro primitivo	$d = m_t z = \frac{m_n z}{\cos \beta}$
Saliência	$h_a = m_n$
Reentrância	$h_f = 1,25 m_n$
Altura do dente	$h = 2,25 m_n$
Diâmetro de coroa	$d_a = m_t (z + 2 \cos \beta)$
Diâmetro de raiz	$d_f = m_t (z - 2,5 \cos \beta)$
Entre-eixo	$a = m_n \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta}$
Relação de transmissão	$i = \frac{z_2}{z_1}$



Exercício de Aplicação

Observa-se que para parâmetros normalizados relativos ao plano normal, a distância entre eixos resultante não é normalizada como acontece no caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos. Deve referir-se que o ângulo de hélice primitiva pode ser ajustado de modo a permitir uma vasta gama de valores para a distância entre eixos. O [ajustamento do valor do ângulo de hélice](#) permite:

- Compensar variações na distância entre eixos sem alterar a relação de transmissão
- Alterar a relação de transmissão sem modificar a distância entre eixos

Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado inclinado normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 12 e 60 dentes. Atendendo a que o módulo real tem um valor igual a 3 mm e que o ângulo de inclinação da hélice primitiva é de 30° . Calcule, para o pinhão, os seguintes parâmetros geométricos: (i) ângulo de pressão aparente, (ii) saliência, (iii) reentrância, (iv) altura do dente, (v) diâmetro primitivo, (vi) diâmetro de coroa e (vii) diâmetro de raiz.

Resposta:

$$\alpha_t = 22,80^\circ$$

$$h_a = 3 \text{ mm}$$

$$h_f = 3,75 \text{ mm}$$

$$h = 6,75 \text{ mm}$$

$$d = 41,57 \text{ mm}$$

$$d_a = 47,57 \text{ mm}$$

$$d_f = 34,07 \text{ mm.}$$

Relação de Condução

Na figura 15 está representado o **engrenamento entre duas rodas de dentado inclinado**.

O engrenamento de um par de dentes conjugados **inicia-se no ponto A**, que é o ponto em que o perfil da roda motora entra em contacto com o perfil conjugado da roda movida.

O engrenamento **termina no ponto B'**, que corresponde ao fim do contacto do par de perfis conjugados já no outro lado das rodas.

Da figura 15 observa-se que os perfis conjugados acima descritos se encontram **desfasados angularmente de um valor igual a ϕ_b** , ou seja

$$\phi_b = IO_1I_1$$

em que o arco IO_1I_1 é frequentemente denominado de **recobrimento do dente**.

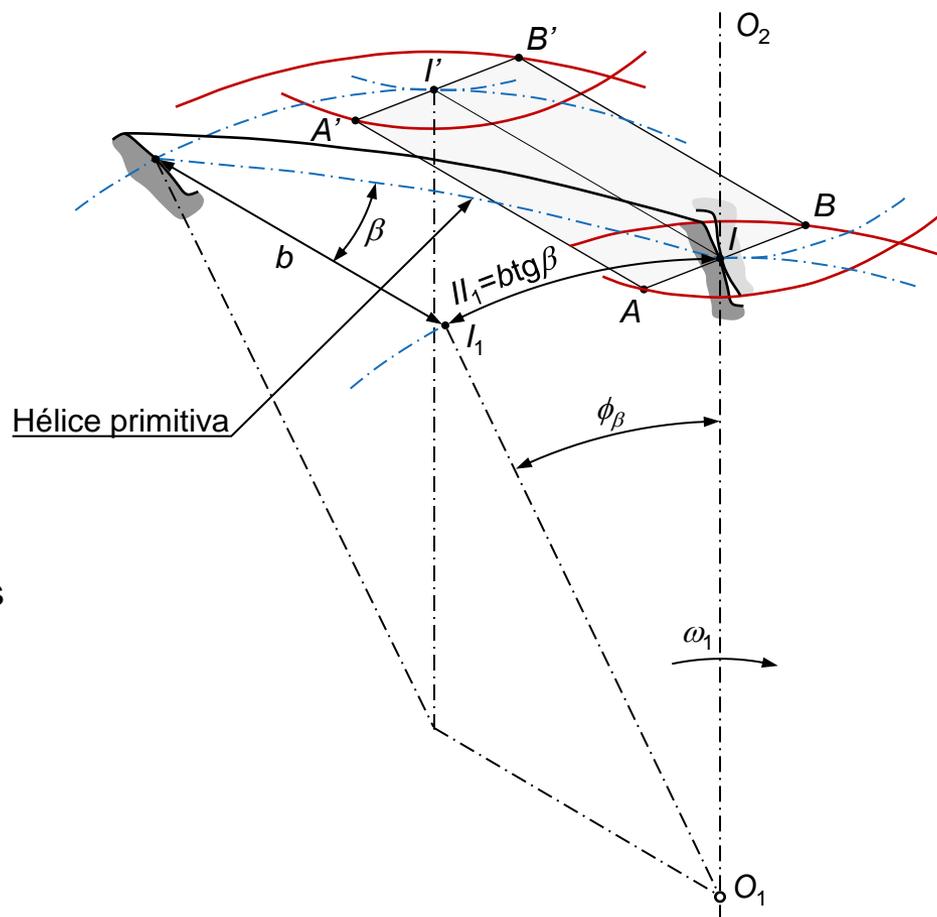


Fig. 15 Engrenamento entre duas rodas de dentado inclinado.

Relação de Condução

O **recobrimento do dente**, também chamado comprimento de recobrimento, pode ser expresso em função da largura do dente, isto é

$$II_1 = b \operatorname{tg} \beta$$

onde b é a largura das rodas e β representa o ângulo de inclinação primitiva.

O **arco de condução num engrenamento de duas rodas inclinadas** é igual ao valor para o caso das engrenagens de dentes retos, ao qual se acrescenta uma parcela relativa ao comprimento de recobrimento.

Com efeito, atendendo ao conceito de **relação de condução total**, que relaciona o arco de condução total com o passo da engrenagem, tem-se que

$$\varepsilon = \frac{a}{p_t} + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{p_t}$$

em que o primeiro termo do segundo membro desta equação corresponde à relação de condução de um par de rodas cilíndricas de dentes retos e o segundo termo diz respeito ao fator de recobrimento.

Assim, a **relação de condução para engrenagens cilíndricas de dentes inclinados** é dado por

$$\varepsilon = \frac{l}{\pi m_t \cos \alpha_t} + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{\pi m_t}$$

Exercício de Aplicação

O **primeiro termo** do segundo membro da equação anterior pode ser calculado utilizando a expressão correspondente ao engrenamento de duas rodas cilíndricas de dentado reto, ou seja

$$\frac{1}{\pi \cos \alpha_i} \left(\sqrt{\frac{z_2^2}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha_i + z_2 \cos \beta + \cos^2 \beta} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha_i + z_1 \cos \beta + \cos^2 \beta} - \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{sen} \alpha_i \right)$$

Nas engrenagens cilíndricas de dentes inclinados o problema da continuidade do engrenamento não é tão premente devido ao fator de recobrimento.

Na verdade, este tipo de engrenagens possibilita, que os dentes tenham menor saliência o que é vantajoso do ponto de vista das interferências dos dentes.

Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado inclinado normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, **12 e 60 dentes**. O pinhão é uma roda esquerda, ao passo que a coroa é uma roda direita. Assim, atendendo a que o módulo real tem um valor igual a **3 mm** e que o ângulo de inclinação da hélice primitiva é de **30°**, calcule a relação de condução da engrenagem.

Resposta:

$$\varepsilon = 1,32 + 0,53 = 1,85$$

Rendimento

O rendimento de engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais podem considerar-se as expressões apresentadas para o caso das engrenagens cilíndricas de dentes retos, sem que, por isso, sejam cometidos erros significativos, ou seja

$$\eta = 1 - \frac{\mu(l_a^2 + l_f^2)(i \pm 1)}{\pi \varepsilon z_2 m_n^2 \cos^2 \alpha_n}$$

em que l_a e l_f representam, respetivamente, os comprimentos de aproximação e de afastamento, os quais podem ser calculados da seguinte forma

$$l_a = \sqrt{(r_2 + h_{a2})^2 - r_2^2 \cos^2 \alpha_t} - r_2 \operatorname{sen} \alpha_t$$

$$l_f = \sqrt{(r_1 + h_{a1})^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha_t} - r_1 \operatorname{sen} \alpha_t$$

Considere uma engrenagem cilíndrica exterior de dentado inclinado normalizado, em que o pinhão e a coroa têm, respetivamente, 12 e 60 dentes. O pinhão é uma roda esquerda, ao passo que a coroa é uma roda direita. O coeficiente de atrito é de 0,05. Atendendo a que o módulo real tem um valor igual a 3 mm e que o ângulo de inclinação da hélice primitiva é de 30°, calcule o rendimento da engrenagem.

Resposta:

$$l_a = 7,21 \text{ mm}$$

$$l_f = 6,04 \text{ mm}$$

$$i = 5$$

$$\varepsilon = 1,85$$

$$\eta = 99,04 \%$$

Interferências

O estudo das [interferências de funcionamento em engrenagens cilíndricas de dentado inclinado](#) segue a mesma metodologia apresentada para as engrenagens cilíndricas de dentes retos.

Para tal, deve considerar-se o [plano de rotação](#), isto é o plano perpendicular aos eixos das rodas, donde o esquema a analisar representa um corte feito por aquele plano. Nos procedimentos a adoptar devem ainda considerar-se as seguintes relações fundamentais

$$h_{a_2} = m_n$$

$$m_n = m_t \cos \beta$$

Assim, da aplicação dos mesmos procedimentos considerados para o caso das engrenagens cilíndricas exteriores de dentes retos, a definição do [número mínimo de dentes](#) que uma roda cilíndrica de dentes helicoidais deve ter, para que não haja interferências de funcionamento, é expressa por

$$z_1 \geq -z_2 + \sqrt{z_2^2 + \frac{4 \cos \beta (z_2 + \cos \beta)}{\sin^2 \alpha_t}}$$

No caso em que [uma das rodas é do tipo cremalheira](#) tem-se que

$$z_1 \geq \frac{2 \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t}$$

Número de Dentes Equivalente

A figura 16 ilustra a [planificação de uma roda dentada de dentes inclinados](#), em que o ângulo de inclinação da hélice primitiva é representado por β .

Considerando que a roda é interseçada por um [plano \(AA\) perpendicular ao eixo](#), então pode obter-se uma circunferência primitiva de raio r . O raio de curvatura é igual ao raio transverso da circunferência primitiva. O perfil do dente neste plano seria o mesmo que o perfil do dente de uma roda dentada de dentes retos com um raio primitivo r .

Se se considerar um [plano de corte \(BB\) perpendicular à hélice primitiva](#) de um dente obtém-se uma elipse. O raio de curvatura da elipse corresponde ao raio primitivo de uma roda cilíndrica de dentes retos equivalente, isto é, com características aproximadas às da roda de dentes helicoidais.

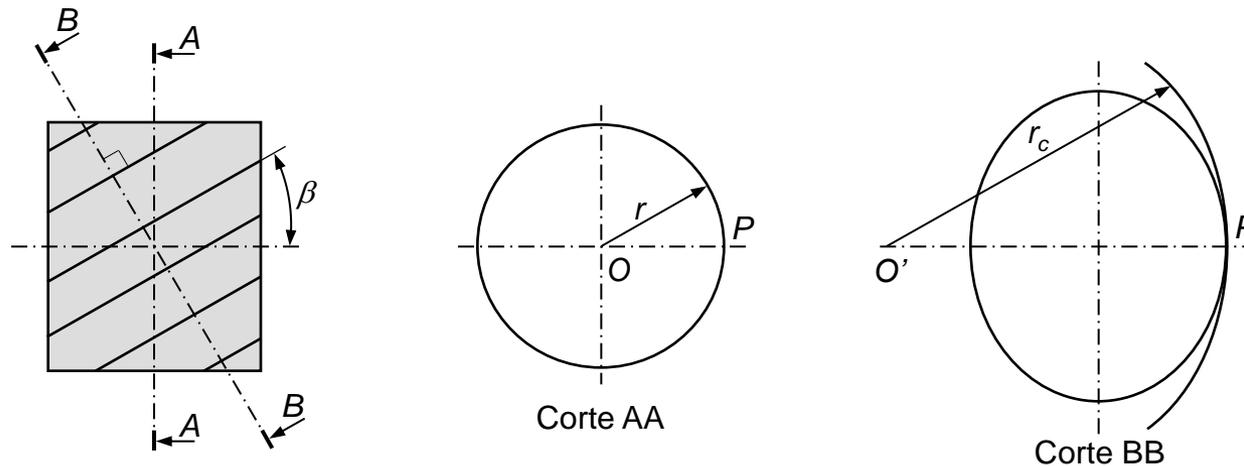


Fig. 16 Representação de uma roda cilíndrica de dentes inclinados cortada por um plano perpendicular ao eixo e por um plano perpendicular à hélice primitiva.

Número de Dentes Equivalente

O **raio de curvatura** da elipse da figura 16 pode ser calculado do seguinte modo.

$$r_c = \frac{r}{\cos^2 \beta}$$

em que r representa o raio primitivo. O perfil do dente no plano perpendicular à hélice do dente é o mesmo que o perfil para uma roda de dentes retos com um raio primitivo r_c .

O **número de dentes equivalentes** que uma roda de dentes retos deve ter para apresentar propriedades idênticas às de uma roda de dentes helicoidais é dada por

$$z_c = \frac{d_c}{m_n}$$

em que d_c é o diâmetro primitivo equivalente e m_n representa o módulo normal.

Combinando as duas equações anteriores resulta que

$$z_c = \frac{2r}{\cos^2 \beta m_n} = \frac{d}{\cos^2 \beta m_n}$$

Finalmente, atendendo à relação entre os módulos real e aparente e à relação fundamental do engrenamento, vem que

$$z_c = \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

Generalidades

A figura 17 ilustra o caso particular de **duas rodas helicoidais cruzadas** em que o ângulo entre os eixos das rodas é igual a 90° .

No caso das rodas cruzadas, os **ângulos de hélice** das rodas motora e movida não necessitam de apresentar o mesmo valor.

Nas rodas cruzadas, as rodas apresentam o **mesmo tipo de hélice**.

As rodas cruzadas devem apenas ser utilizadas quando as **cargas** em jogo são relativamente **pequenas**.



Fig.17 Rodas Cruzadas

A figura 18 diz respeito à **planificação simplificada de duas rodas cruzadas**, as quais têm ângulos de hélice distintos, isto é, β_1 e β_2 .

O valor do ângulo definido pelos eixos das rodas é igual à soma dos ângulos das hélices, ou seja

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2$$

Quando as rodas cruzadas apresentam hélices distintas, então o ângulo definido entre os seus eixos é igual à diferença entre os ângulos de hélice.

Relações Geométricas

Tal como nas engrenagens cilíndricas helicoidais de eixos paralelos, nas rodas cruzadas pode também escrever-se que

$$d_1 = m_{n1} z_1 = \frac{m_{n1} z_1}{\cos \beta_1}$$

$$d_2 = m_{n2} z_2 = \frac{m_{n2} z_2}{\cos \beta_2}$$

Deve referir-se que nas engrenagens de rodas cruzadas **os passos (ou módulos) normais são iguais** em ambas as rodas.

Assim, a **distância entre os eixos** nas rodas cruzadas é dada por

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Considerando as equações anteriores, vem que

$$a = \frac{m_n}{2} \left(\frac{z_1}{\cos \beta_1} + \frac{z_2}{\cos \beta_2} \right)$$

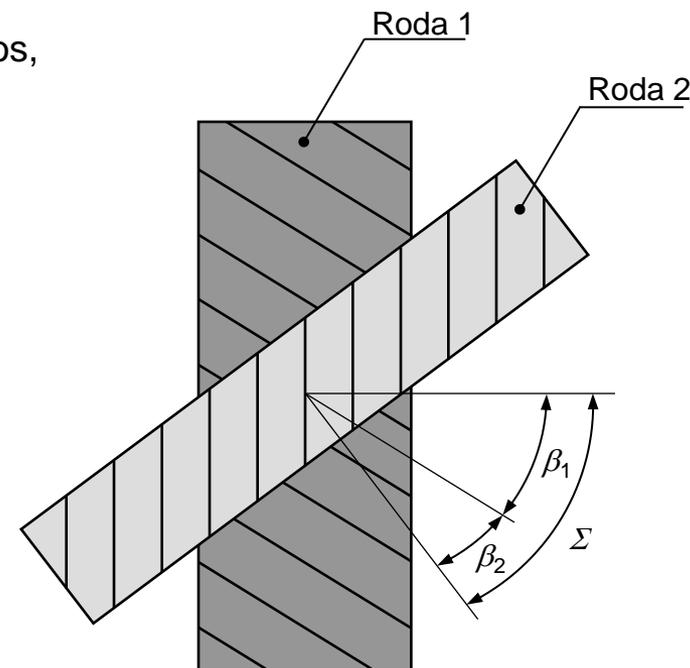


Fig. 18 Planificação de rodas cruzadas

Relações de Velocidades

A figura 19 mostra as **componentes das velocidades** existentes no engrenamento de duas rodas cruzadas relativas ao ponto primitivo.

Da análise desta figura pode observar-se que **são iguais as componentes na direção normal**.

O mesmo não acontece com as componentes tangenciais, pelo que se verifica a existência de escorregamento. Na verdade, **nas rodas cruzadas existe escorregamento, inclusive no ponto primitivo**.

Atendendo ao que foi anteriormente dito e da análise da figura 19 podem escrever-se as seguintes relações

$$v_1^n = v_1 \cos \beta_1$$

$$v_2^n = v_2 \cos \beta_2$$

Combinando agora as equações vem que a **relação de velocidades** é dada por

$$v_1 = v_2 \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1}$$

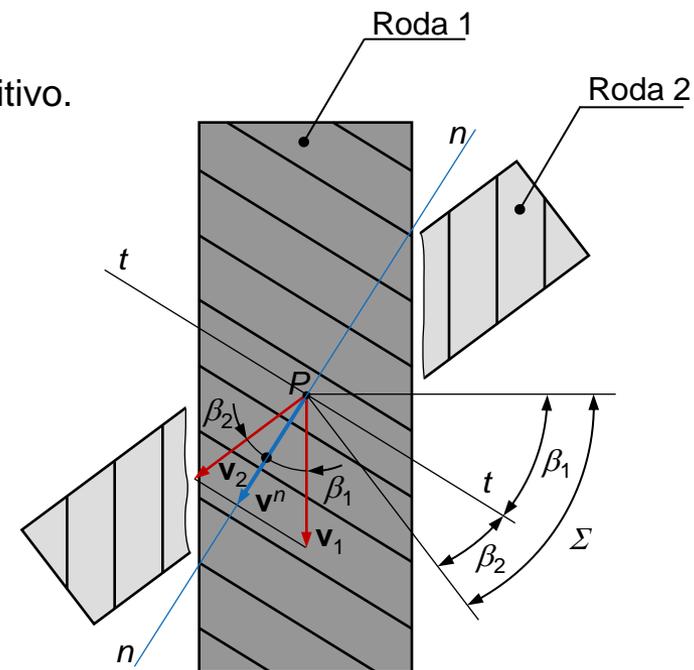


Fig. 19 Velocidades no ponto de contacto

Relação de Transmissão

As **velocidades angulares das rodas** podem ser obtidas do seguinte modo

$$\omega_1 = \frac{v_1}{d_1/2} \quad \omega_2 = \frac{v_2}{d_2/2}$$

A relação de velocidades angulares, *i.e.*, a **relação de transmissão** em rodas cruzadas, é dada por

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1 d_2}{v_2 d_1}$$

Considerando agora a **relação de velocidades** apresentada no *slide* anterior resulta que

$$i = \frac{v_2 \cos \beta_2 d_2}{v_2 \cos \beta_1 d_1} = \frac{d_2 \cos \beta_2}{d_1 \cos \beta_1}$$

Combinando agora as equações anteriores obtém-se que

$$i = \frac{m_n z_2 \cos \beta_2 \cos \beta_1}{\cos \beta_2 m_n z_1 \cos \beta_1} = \frac{m_n z_2}{m_n z_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Observar-se que a relação de transmissão é, de modo semelhante às engrenagens cilíndricas helicoidais de eixos paralelos, dada pelo **quociente entre o número de dentes** das rodas movida e motora.

Refira-se que no caso das rodas cruzadas a **relação de transmissão não é expressa** em termos dos **diâmetros primitivos** como sucede nas engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais de eixos paralelos.

8. Revisão de Conhecimentos

Perguntas de Revisão

Apresenta-se, de seguida, um **conjunto diversificado de questões** relativas aos principais aspetos relacionados com a temática das engrenagens cilíndricas de dentes inclinados:

- Discuta as principais diferenças entre as engrenagens cilíndricas de dentado reto e as engrenagens cilíndricas de dentes inclinados.
- Apresente duas desvantagens das engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais quando comparadas com as engrenagens de dentes retos.
- Descreva o tipo de contacto existente entre duas rodas dentadas de dentes helicoidais.
- Descreva, sucintamente, o processo de geração de um dente helicoidal com perfil em evolvente.
- Faça um esboço, em perspetiva, de um dente inclinado onde se possa identificar o passo normal e o passo aparente.
- Deduza uma expressão que permita relacionar o ângulo de inclinação primitiva com o ângulo de inclinação de base.
- Deduza uma expressão que permita relacionar dois quaisquer elementos real e aparente.
- Defina ângulo de inclinação primitiva para uma engrenagem cilíndrica de dentado inclinado.
- Exponha o que entende por relação de recobrimento em engrenagens cilíndricas de dentes inclinados.
- Demonstre como pode determinar a relação de condução de uma engrenagem cilíndrica de dentes helicoidais.
- Diga como pode calcular o rendimento em engrenagens cilíndricas exteriores de dentado inclinado.
- Discuta as principais características das rodas helicoidais cruzadas.

9. Referências Bibliográficas

Bibliografia Recomendada

Apresentam-se em seguida as [principais fontes bibliográficas](#) utilizadas na preparação deste documento:

- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspetos Gerais sobre Engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 2. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 44p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 3. Engrenagens Cilíndricas de Dentes Inclínados*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 32p.
- Flores, P., Gomes, J. (2015) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens: Teoria e Exercícios de Aplicação*. Publindústria, Porto.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.