

# Cinemática e Dinâmica de Engrenagens

## 5. Engrenagens de Para- fuso Sem-Fim

**Paulo Flores**  
**José Gomes**



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

Guimarães 2015



## ÍNDICE

<b>5. Engrenagens de Parafuso Sem-Fim.....</b>	<b>1</b>
5.1. Introdução.....	1
5.2. Geração do Dente .....	6
5.3. Perfis dos Filetes.....	9
5.4. Nomenclatura .....	12
5.5. Relação de Transmissão .....	14
5.6. Relações Geométricas .....	19
5.7. Parâmetros de Desempenho .....	24
5.8. Revisão de Conhecimentos .....	30
5.9. Referências Bibliográficas .....	32



## 5. ENGRENAGENS DE PARAFUSO SEM-FIM

### 5.1. INTRODUÇÃO

As engrenagens de parafuso sem-fim pertencem ao grupo das engrenagens torsas<sup>1</sup>, em que uma das rodas tem a forma de um parafuso (Branco *et al.*, 2009). As engrenagens de parafuso sem-fim podem também ser consideradas como um caso particular das engrenagens helicoidais cruzadas, sendo que a capacidade de carga é maior no caso do parafuso sem-fim (Flores e Gomes, 2014c). A figura 5.1 ilustra uma engrenagem de parafuso sem-fim com roda helicoidal. Na verdade, esta é uma das formas mais simples e mais frequentemente utilizada na prática corrente e que inclui um parafuso cilíndrico e uma roda cilíndrica de dentes helicoidais, daí a designação de parafuso sem-fim roda helicoidal (Niemann, 1971; Drago, 1988). Na grande maioria das aplicações de parafusos sem-fim o ângulo formado pelos eixos do parafuso e da roda é igual a 90°. As engrenagens de parafuso sem-fim não são, em geral, reversíveis, isto é, funcionam apenas quando o veio motor aciona o parafuso sem-fim, uma vez que quando o sistema é acionado pela roda, a engrenagem tende a bloquear<sup>2</sup> (Henriot, 1979; Shigley e Uicker, 1980).



*Figura 5.1 – Engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.*

Originalmente, as engrenagens de parafuso sem-fim eram utilizadas para transmissões mecânicas compactas em que se pretendia uma significativa redução de velocidades entre os órgãos motor e movido. Este tipo de engrenagem é mais suave, mais silencioso e amortece um maior nível de vibrações quando comparado com as restantes classes de engrenagens. Quando comparadas com as engrenagens cilíndri-

---

<sup>1</sup> Por definição, as engrenagens torsas são constituídas por pares de rodas em que os eixos não são coplanares (Flores e Gomes, 2014a).

<sup>2</sup> A tendência que as engrenagens de parafuso sem-fim têm para bloquear é tanto maior quanto maior for a relação de transmissão. É oportuno referir que um parafuso sem-fim roda helicoidal pode ser utilizado como redutor com uma relação de transmissão igual a 50:1, porém, a mesma engrenagem não pode ser usada como multiplicador (*i.e.*, revertida) com uma relação de 1:50.

cas de dentes retos, as engrenagens de parafuso sem-fim são bastante mais compactas, mais fáceis de produzir e são, em geral, mais económicas. Em relação às hipoides, os parafusos sem-fim apresentam maior capacidade de carga em virtude do maior contacto entre os dentes (Mabie e Reinholtz, 1987; Spotts e Shoup, 1998; Branco *et al.*, 2009; Budynas e Nisbett, 2011; Norton, 2013).

Tal como se referiu anteriormente, as engrenagens de parafuso sem-fim são dos sistemas de transmissão de potência e movimento mais frequentes em mecânica, especialmente quando se pretende uma elevada redução de velocidade. Uma das principais aplicações deste tipo de engrenagem é nos denominados redutores de velocidade, vulgo redutores, em que as relações de transmissão podem atingir valores da ordem dos 100:1 (Niemann, 1971). De um modo geral, relações de transmissão de 50:1 são o limite em termos económicos. Para valores superiores a este devem usar-se sistemas de engrenagens de dois andares (Henriot, 1979). A figura 5.2 mostra um exemplo de um redutor de velocidade do tipo parafuso sem-fim roda helicoidal (Juvinall e Marshek, 2006). Na verdade, para transmissões de um único andar, os redutores de parafuso sem-fim são das soluções mais compactas e eficientes.



Figura 5.2 – Exemplo de um redutor de velocidade.

As engrenagens de parafuso sem-fim podem apresentar diversas entradas (Shigley e Mischke, 1989; Hamrock *et al.*, 2005). Os parafusos sem-fim de múltiplas entradas são mais eficientes do que os parafusos com uma única entrada. Quando o fator primordial é a transmissão de potência devem usar-se parafusos de múltiplas entradas. Quando o principal fator é a redução de velocidade devem usar-se parafusos de uma única entrada, sobretudo quando se pretende que a transmissão seja autoblocante. Em geral, o número de entradas varia entre 1 e 5, podendo atingir uma dezena. A figura 5.3 diz respeito a um caso em que o parafuso tem quatro entradas. O número de entradas tem influência no funcionamento da transmissão, sendo o avanço igual à distância axial percorrida pelo sem-fim quando este descreve uma volta completa (Flores e Gomes, 2014a). Assim, quando um parafuso sem-fim de entrada única engrena numa roda helicoidal com 30 dentes, esta rodará um ângulo correspondente a um dente por cada rotação completa do parafuso. Com efeito, para este par cinemático são necessárias 30 rotações do parafuso para originar uma volta completa da roda. A velocidade de rotação da roda é, portanto, 30 vezes menor que a velocidade de rota-

ção do parafuso. Considerando agora que o parafuso sem-fim tem três entradas, então, por cada rotação completa daquele, a roda descreverá um ângulo correspondente a três dentes. Neste caso é necessário rodar 10 vezes o parafuso sem-fim para que a roda efetue uma volta completa.

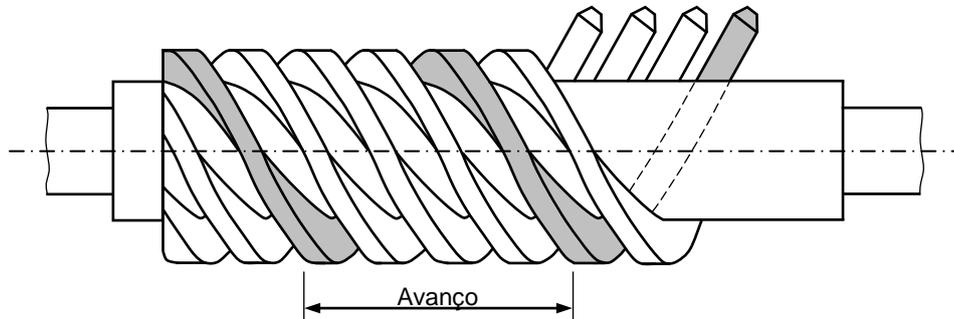


Figura 5.3 – Representação esquemática de um parafuso sem-fim de quatro entradas.

### Exercício 5.1

**Enunciado:** Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de 2 entradas. Sabendo que a velocidade de rotação do parafuso é igual a 400 rpm e que a roda tem 40 dentes, calcule a velocidade de rotação da roda.

**Padrão de resposta esperado:**

$$n_2 = 400 \times 2 / 40 = 20 \text{ rpm.}$$

Nas engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal o contacto entre os dentes dá-se segundo uma linha<sup>3</sup> apresentando, por isso, uma maior capacidade de carga (Radzevich, 2012). A capacidade de transmissão de potência pode ainda ser aumentada se o parafuso for modificado com o intuito de envolver a roda. Deste modo, o contacto entre os dentes ocorre segundo uma superfície e não segundo uma linha. Por conseguinte, a capacidade de carga aumenta significativamente com a modificação do parafuso e ou da roda. Contudo, a modificação do dentado requer um maior rigor<sup>4</sup> na montagem das engrenagens, principalmente quando as potências e velocidades em jogo são elevadas. A figura 5.4 ilustra duas engrenagens de parafuso sem-fim, uma de envolvimento simples e outra de envolvimento duplo ou composto (Branco *et al.*, 2009). No primeiro caso, a roda foi modificada no sentido de promover o envolvimento da engrenagem. Esta modificação refere-se ao desbaste no topo dos dentes de forma a resultar numa superfície côncava e, concomitantemente, um maior envolvimento ou abraçamento durante o engrenamento. Por seu lado, na engrenagem de envolvimento duplo, como o próprio nome sugere, tanto a roda como o parafuso são alterados de modo a tornar o contacto superficial e, deste modo, aumentar a capacidade de transmissão de potência (Wilson e Sadler, 1993). Pode, pois, inferir-se que nesta última situação a engrenagem funcionará de modo mais suave e com maior capacidade de carga em virtude de uma maior zona de contacto.

<sup>3</sup> Em teoria, o contacto numa engrenagem de parafuso sem-fim cilíndrico com roda helicoidal é do tipo pontual. Contudo, os dentes são fabricados de modo a que a parte exterior dos dentes seja côncava e, conseqüentemente, o contacto dá-se segundo uma linha (Wilson e Sadler, 1993).

<sup>4</sup> Em engrenagens de parafuso sem-fim, o posicionamento axial da roda é de capital importância para o bom funcionamento da engrenagem, requerendo, por isso, uma montagem muito rigorosa. Ao invés, o posicionamento axial do parafuso sem-fim não é tão exigente.

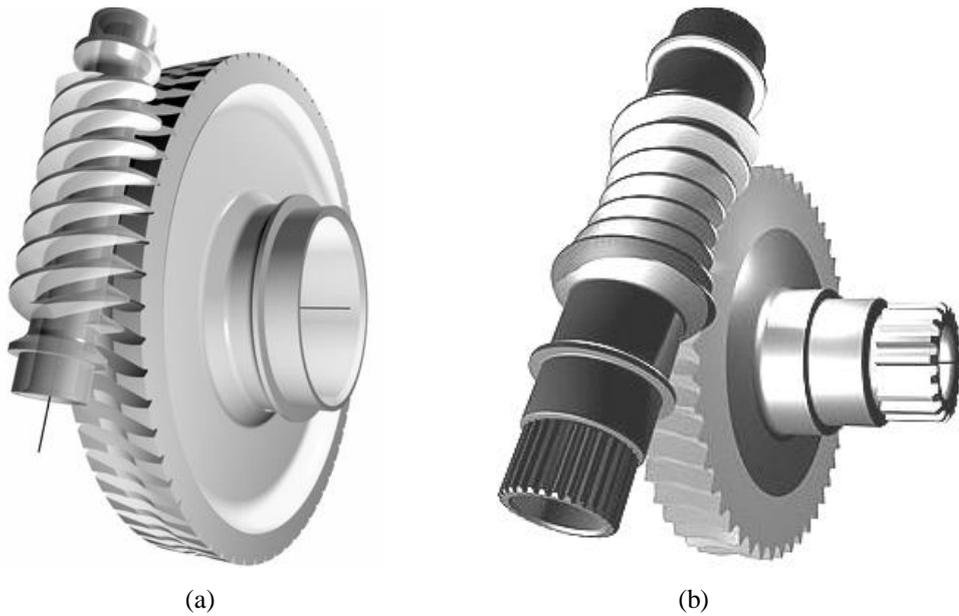


Figura 5.4 – (a) Engrenagem de parafuso sem-fim de envolvimento simples; (b) Engrenagem de parafuso sem-fim de envolvimento duplo.

De um modo geral, são três as diferentes associações que se podem estabelecer entre o parafuso sem-fim e a roda em sistemas redutores, a saber: (i) parafuso cilíndrico e roda globoide<sup>5</sup>; (ii) parafuso globoide e roda cilíndrica; (iii) parafuso globoide e roda globoide. A figura 5.5 ilustra estas diferentes combinações entre parafuso sem-fim e roda. É evidente que os parafusos globoides possibilitam maior transmissão de potência em virtude do maior número de dentes (filetes<sup>6</sup>) engrenados ao mesmo tempo. Porém, o atrito que se desenvolve é maior, o que penaliza o rendimento deste tipo de sistema de transmissão (Niemann, 1971).

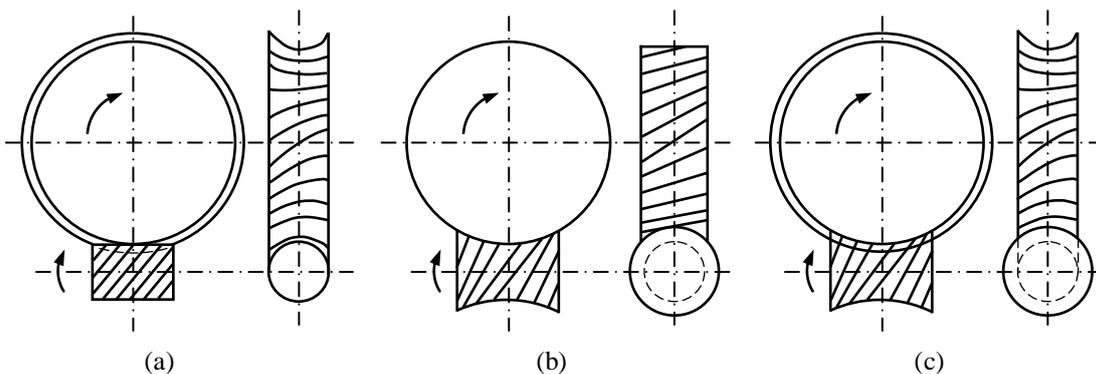


Figura 5.5 – (a) Parafuso cilíndrico e roda globoide; (b) Parafuso globoide e roda cilíndrica; (c) Parafuso globoide e roda globoide.

As engrenagens de parafuso sem-fim apresentam rendimentos relativamente baixos quando comparadas com as demais engrenagens, uma vez que os escorregamentos são bastante consideráveis. Na verdade, os parafusos sem-fim apresentam rendimentos que podem variar entre 45 e 70%. Em condições muito particulares, em ter-

<sup>5</sup> Globoide diz respeito a algo que tem forma ou aspeto de um globo.

<sup>6</sup> Na verdade, é mais adequado falar-se em filetes do parafuso sem-fim do que em dentes.

mos de funcionamento e geometria, as engrenagens deste tipo podem atingir rendimentos mais elevados e comparáveis aos das engrenagens cilíndricas de dentes retos (Henriot, 1979). Nos parafusos sem-fim, o rendimento diminui com o aumento da relação de transmissão e com o aumento da velocidade de escorregamento. As velocidades tangenciais de funcionamento nas engrenagens de parafuso sem-fim podem atingir os 70 m/s. Por seu lado, as velocidades de rotação do parafuso podem ir até às 40000 rpm (Niemann, 1971). Deve referir-se que o elevado escorregamento entre os flancos dos dentes nos parafusos sem-fim é, não só inevitável, como também inerente à suavidade de funcionamento que caracteriza estes sistemas de transmissão. Por isso, é de todo desejável que nestas engrenagens se dê particular cuidado ao acabamento superficial, ao enobrecimento das superfícies dos dentes, aos materiais envolvidos e às condições de lubrificação (Stolarski, 1990; Ferreira, 1998).

Os materiais frequentemente utilizados nas engrenagens de parafuso sem-fim são os metálicos e os poliméricos (Antunes, 2012). A escolha do tipo de material depende fundamentalmente das condições de funcionamento e do tipo de aplicação. Em construção mecânica, os materiais que constituem este tipo de engrenagem são os metálicos. Em geral, o parafuso sem-fim é construído em aço de liga com tratamentos térmicos e de superfície. Por seu lado, a roda é frequentemente feita em bronze. Este par de materiais é escolhido em virtude do baixo atrito que proporcionam, sendo o valor do coeficiente de atrito, na presença de lubrificante, da ordem de 0,07. O parafuso sem-fim é feito em material mais resistente que a roda devido às elevadas relações de transmissão utilizadas (Niemann, 1971; Henriot, 1979).

Tal como foi referido anteriormente, nas engrenagens de parafuso sem-fim existe um escorregamento significativo entre as superfícies dos órgãos motor e movido. Este escorregamento é tanto maior quanto maior for a relação de transmissão. Por conseguinte, neste tipo de engrenagem há geração de calor e perdas de rendimento consideráveis, pelo que se deve dar especial atenção ao modo de lubrificação. Assim, para baixos regimes de funcionamento, ou seja velocidades tangenciais até 1 m/s, podem ser utilizadas massas lubrificantes. O modo de lubrificação mais frequente em parafusos sem-fim de uso corrente é a chapinhagem de óleo (Ferreira, 1998). Neste tipo de lubrificação, as velocidades tangenciais não devem ser muito elevadas (15 m/s), para que o lubrificante não seja repellido pela ação da força centrífuga.

As transmissões mecânicas de parafuso sem-fim encontram aplicação em diversas áreas tais como em máquinas-ferramenta, sistemas elevatórios, sistemas de veículos, transportadores contínuos, pontes rolantes, pórticos, máquinas têxteis, bombas centrífugas (Niemann, 1971).

## 5.2. GERAÇÃO DO DENTE

O processo de geração dos perfis dos dentes para o caso das engrenagens torsas é semelhante ao que foi apresentado para as engrenagens cilíndricas de dentes inclinados. Todavia, a geração dos dentes das engrenagens torsas inclui detalhes que devem ser tidos em consideração no projeto e desenvolvimento deste tipo de engrenagem (Simon, 2007). Com o propósito único de descrever o procedimento genérico relativo à geração das superfícies dos dentes das engrenagens torsas considere-se a figura 5.6 onde  $C_1$  e  $C_2$  denotam as superfícies cilíndricas primitivas de uma engrenagem torsa que se pretende gerar. Os cilindros primitivos têm raios  $r_1$  e  $r_2$ , também representados na figura 5.6. Deve notar-se que os eixos dos cilindros primitivos são segmentos de reta enviesados, facto que decorre da própria definição de engrenagem torsa<sup>7</sup>. A figura 5.6 inclui ainda dois planos,  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , coincidentes e paralelos aos eixos dos cilindros primitivos. Estes planos são tangentes aos cilindros primitivos segundo os segmentos de reta  $g_1$  e  $g_2$ , denominados geratrizes de contacto. Da análise da figura 5.6 pode observar-se que as geratrizes de contacto se interseçam no ponto  $I$ , sendo o único ponto de contacto entre os cilindros primitivos (Henriot, 1979).

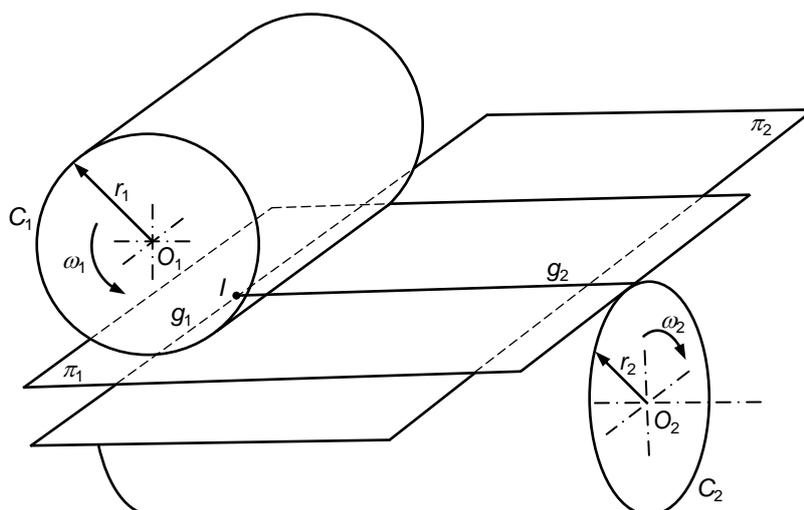


Figura 5.6 – Elementos básicos utilizados na geração de dentes de engrenagens torsas.

Considere-se agora o plano gerador  $\psi$  representado na figura 5.7, o qual faz um ângulo igual a  $90 - \alpha_n$  com os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . A reta  $MN$  representa a intersecção do plano gerador com os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , sendo  $\beta_1$  e  $\beta_2$  os ângulos formados pelo segmento de reta  $MN$  e pelas geratrizes  $g_1$  e  $g_2$ , respetivamente (Henriot, 1979). Da análise da figura 5.7 verifica-se que

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2 \quad (5.1)$$

Com efeito, quando o cilindro primitivo  $C_1$  roda no sentido indicado na figura 5.7, o plano  $\pi_1$  é deslocado no sentido representado pelo vetor  $\mathbf{u}_1$ . Por seu lado, o plano  $\psi$  atuará o plano primitivo  $\pi_2$  deslocando-se este último no sentido indicado pelo vetor  $\mathbf{u}_2$  e, conseqüentemente, o cilindro primitivo  $C_2$  rodará no sentido que se indica na figura 5.7 (Henriot, 1979).

<sup>7</sup> Relembre-se que nas engrenagens torsas os eixos das rodas não são complanares.

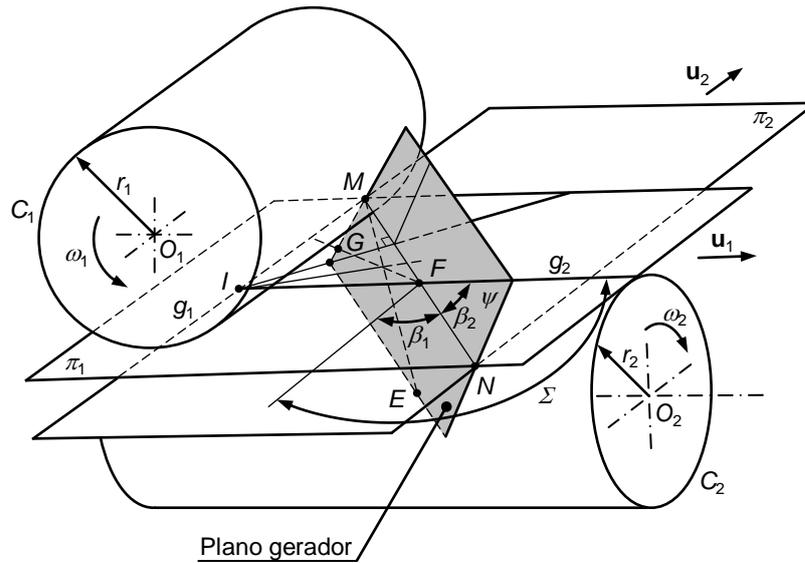


Figura 5.7 – Representação esquemática da geração dos perfis de dentes de engrenagens torsas.

As envolventes das sucessivas posições do plano gerador  $\psi$  são duas superfícies helicoidais denominadas por  $S_1$  e  $S_2$ , respetivamente, associadas aos planos primitivos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Pode verificar-se que estas duas superfícies helicoidais são conjugadas em virtude do modo como são obtidas e, por conseguinte, representam as superfícies dos dentes de uma engrenagem torsa (Henriot, 1979).

O contacto entre o plano gerador  $\psi$  e a superfície helicoidal  $S_1$  dá-se segundo a reta  $ME$ , interseção do plano  $\psi$  com o plano que passa pela geratriz  $g_1$  e lhe é normal. Do mesmo modo, o contacto do plano gerador  $\psi$  com a superfície helicoidal  $S_2$  dá-se segundo a reta  $FG$ , interseção do plano  $\psi$  com o plano que passa pela geratriz  $g_2$  e lhe é normal. Pode observar-se que  $g_1$  e  $g_2$  representam os eixos instantâneos de rotação entre os planos primitivos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e os respetivos cilindros primitivos  $C_1$  e  $C_2$  (Henriot, 1979).

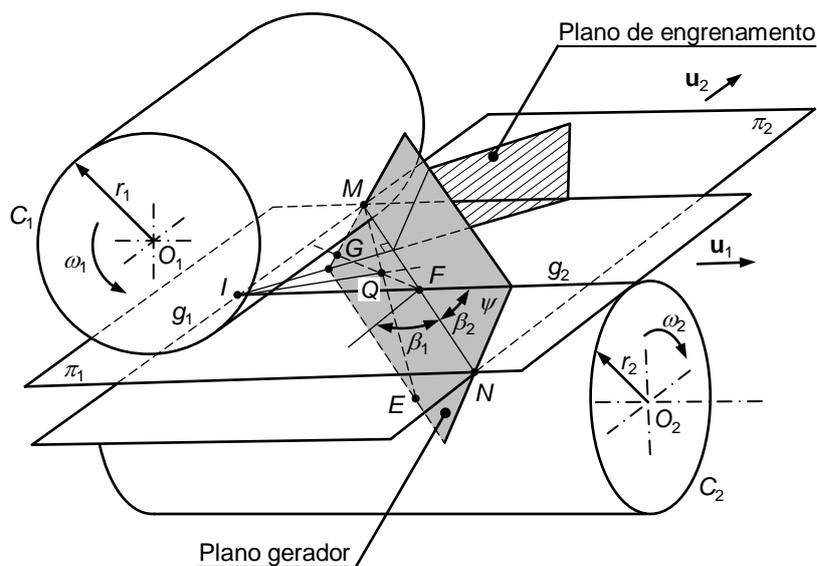


Figura 5.8 – Plano de engrenamento em engrenagens torsas.

Da observação da figura 5.8 verifica-se que as retas  $ME$  e  $FG$  se cruzam no ponto  $Q$ , que constitui o único ponto de contacto entre as superfícies helicoidais. Tal como se referiu anteriormente, em teoria o contacto entre os dentes das engrenagens torsas é do tipo pontual. Do ponto de vista geométrico o ponto de contacto  $Q$  não é mais do que o pé da perpendicular baixada do ponto  $I$  sobre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , tal como se representa na figura 5.8. Atendendo a que estes planos têm uma orientação invariável, o ponto de contacto  $Q$  situa-se na reta  $IQ$  que representa a linha de ação ou de engrenamento. Por seu lado, o plano de engrenamento passa pelo ponto  $I$  e é perpendicular à reta  $MN$ , tal como se evidencia na figura 5.8 (Henriot, 1979).

### 5.3. PERFIS DOS FILETES

Como é sabido, as engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal são um caso particular das engrenagens torsas em que uma das rodas, em geral a roda motora, tem a forma de um parafuso. Acresce ainda o facto de que os eixos do parafuso sem-fim e da roda helicoidal serem perpendiculares (Shigley e Mischke, 1989). Relembre-se que para o caso do parafuso é mais adequado falar-se em filetes do parafuso do que em dentes (Henriot, 1979).

A análise descritiva das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal pode ser simplificada sobremaneira quando se considera o sem-fim como sendo uma cremalheira<sup>8</sup>, tal como se esquematiza na figura 5.9 (Henriot, 1979). Deste modo, quando o parafuso sem-fim roda em torno do próprio eixo, qualquer secção<sup>9</sup> dos filetes do parafuso descreve um movimento de translação retilínea paralela ao eixo do parafuso sem-fim, ou seja, a cremalheira (Henriot, 1979).

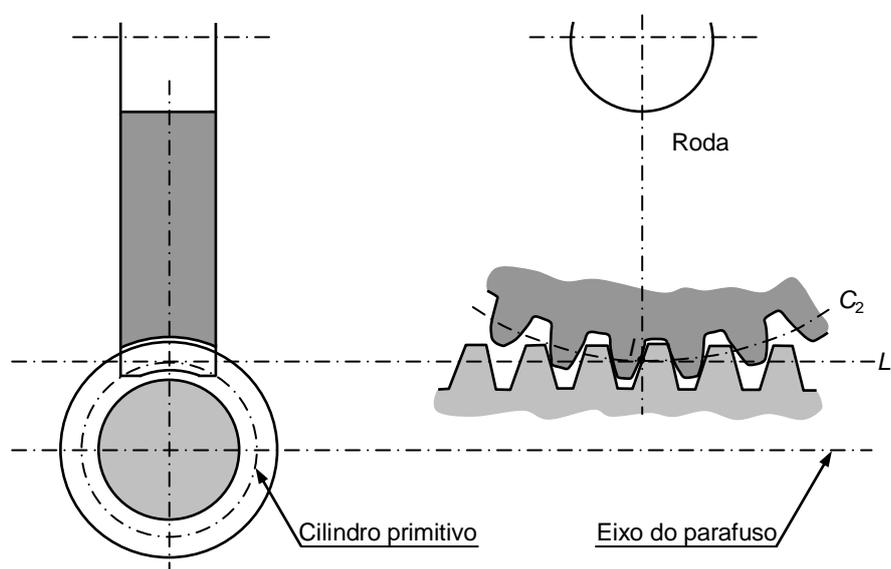


Figura 5.9 – Secção de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.

Representando o passo helicoidal do parafuso sem-fim por  $p_z$ , então, por definição, uma dada secção desloca-se uma distância  $p_z$  por cada rotação do parafuso sem-fim. Esta amplitude de movimento de translação axial chama-se avanço, tal como se evidencia na figura 5.3. Assim, em analogia com a cremalheira, pode afirmar-se que a roda helicoidal descreve a mesma amplitude de rotação quando a cremalheira se desloca em movimento puro de translação ao longo do eixo do parafuso sem-fim, ou seja é como que o parafuso sem-fim não rodasse.

A figura 5.9 diz respeito à secção de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal que resulta quando aquela é interseçada pelo plano médio. Deste modo, obtém-se uma cremalheira cujos perfis dos filetes são simétricos<sup>10</sup> entre si, pelo que

<sup>8</sup> Cremalheira diz respeito a uma roda cujo raio é infinito. Este tipo particular de roda descreve movimento de translação retilínea (Flores e Gomes, 2014a).

<sup>9</sup> Secções que resultam da intersecção do parafuso sem-fim com um plano paralelo ao eixo.

<sup>10</sup> Deve referir-se que quando se considera um plano distinto do plano médio, mas ainda paralelo à roda, a cremalheira que se obtém não apresenta filetes com perfis simétricos.

durante o engrenamento os perfis da cremalheira funcionam com os respectivos perfis conjugados da secção da roda helicoidal (Branco *et al.*, 2009). Os principais elementos que caracterizam este engrenamento são a circunferência primitiva  $C_2$  da roda helicoidal e a reta primitiva  $L_1$  da cremalheira. Observa-se que estes dois elementos são tangentes no ponto primitivo  $I$ .

Em geral, os perfis dos filetes dos parafusos sem-fim podem apresentar as seguintes formas geométricas (Henriot, 1979):

- Filete trapezoidal, este tipo de perfil é obtido pela interseção de um plano que atravessa o eixo do parafuso sem-fim com o próprio sem-fim, em que os perfis resultantes são retilíneos e simétricos, tal como se mostra na figura 5.10a,
- Filete gerado por um tronco de cone de revolução, este tipo de perfil pode ser obtido por talhagem ou retificação utilizando fresas ou mós de disco bicónicas, ou ainda através de fresas ou mós de ponta cónica, tal como se representa na figura 5.10b,
- Filete helicoidal, este tipo de perfil (helicoidal evolvente) é obtido por mós planos ou de disco, tal como se mostra na figura 5.10c.

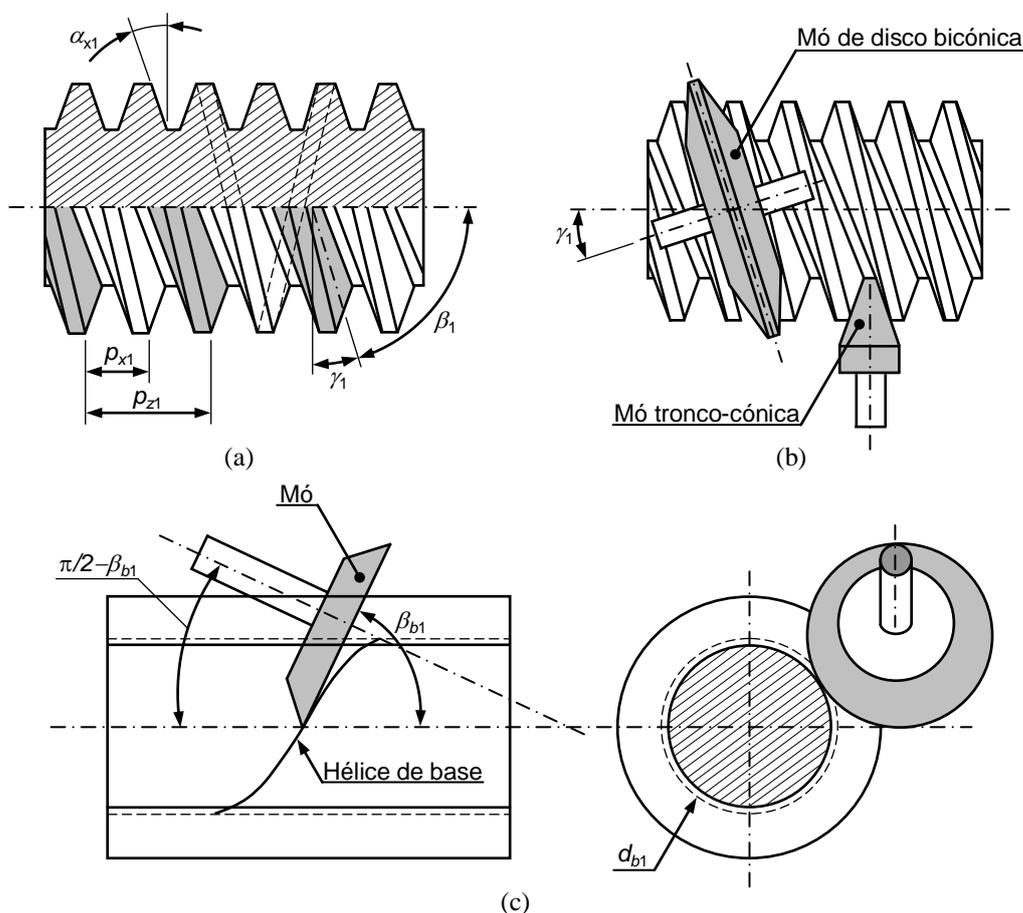


Figura 5.10 – Perfis de filetes de parafuso sem-fim: (a) Perfil trapezoidal; (b) Perfil gerado por tronco de cone de revolução; (c) Perfil helicoidal evolvente.

O perfil trapezoidal é, sem dúvida, dos perfis mais utilizados em transmissões mecânicas de parafuso sem-fim roda helicoidal. Quando as cargas em jogo são relativamente baixas podem utilizar-se filetes com perfil triangular, não obstante o seu rendimento ser relativamente baixo devido ao elevado atrito que se desenvolve. Exis-

tem ainda os parafusos sem-fim tóricos em que os filetes são gerados num segmento de toro (Henriot, 1979). Neste tipo de parafusos sem-fim existe um maior número de filetes engrenados ao mesmo tempo, pelo que apresentam uma maior capacidade de carga. Devido à quase inexistência de folgas, os parafusos sem-fim tóricos possibilitam transmissões mais suaves. Contudo, este tipo de engrenagem apresenta rendimentos relativamente baixos, uma vez que há uma maior área entre as superfícies de contacto. Por outro lado, o fabrico e a montagem de parafusos sem-fim tóricos requerem particulares cuidados.

## 5.4. NOMENCLATURA

Nesta secção apresenta-se a nomenclatura fundamental associada às engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal. A figura 5.11 ilustra alguns dos principais elementos geométricos que caracterizam uma engrenagem deste tipo.

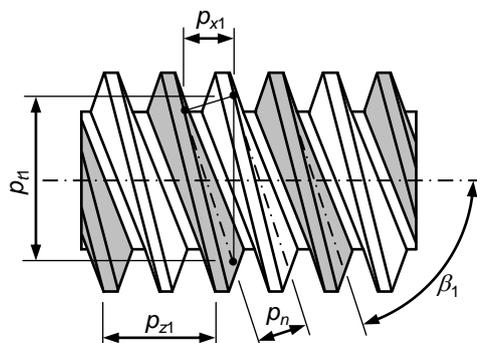


Figura 5.11 – Representação de um parafuso sem-fim.

A nomenclatura referente à roda helicoidal é em tudo semelhante à das engrenagens cilíndricas de dentes inclinados, pois é utilizado um grande número de termos iguais num e noutro caso (Flores e Gomes, 2014c). Há, todavia, um conjunto de parâmetros que merecem aqui ser realçados<sup>11</sup>, nomeadamente (Branco *et al.*, 2009):

$p_n$  – passo real ou normal, que é igual para o parafuso sem-fim e para a roda helicoidal,

$p_{t1}$  – passo aparente ou transverso do parafuso sem-fim, que diz respeito ao passo medido no plano frontal perpendicular ao eixo,

$p_{x1}$  – passo axial do parafuso sem-fim, que coincide com o passo aparente da roda helicoidal,

$p_{z1}$  – passo helicoidal do parafuso sem-fim, também denominado de avanço,

$m_n$  – módulo normal ou real, que é igual para o parafuso sem-fim e para a roda helicoidal,

$m_{t1}$  – módulo aparente ou transverso do parafuso sem-fim,

$m_{x1}$  – módulo axial do parafuso sem-fim, que é igual ao módulo aparente da roda helicoidal,

$\alpha_n$  – ângulo de pressão real ou normal, que é igual para o parafuso sem-fim e para a roda helicoidal,

$\alpha_{t1}$  – ângulo de pressão aparente ou transverso do parafuso sem-fim,

$\alpha_{x1}$  – ângulo de pressão axial do parafuso sem-fim, que coincide com o ângulo de pressão aparente da roda helicoidal,

$z_1$  – número de filetes ou entradas do parafuso sem-fim,

$z_2$  – número de dentes da roda helicoidal,

$\beta_1$  – ângulo de inclinação primitiva do filete do parafuso sem-fim em relação ao seu eixo, também denominado de ângulo de hélice,

$\gamma_1$  – ângulo ascendente ou ângulo de passo, que é complementar do ângulo de inclinação primitiva,

<sup>11</sup> Na presente análise considera-se que o elemento 1 é o parafuso sem-fim e que o elemento 2 diz respeito à roda helicoidal.

$a$  – distância entre eixos,  
 $\omega_1$  – velocidade angular do parafuso sem-fim,  
 $\omega_2$  – velocidade angular da roda helicoidal,  
 $i$  – relação de transmissão.

Para um parafuso sem-fim, o passo axial pode ser calculado do seguinte modo,

$$p_{x1} = \frac{P_{z1}}{z_1} \quad (5.2)$$

em que  $z_1$  representa o número de filetes ou de entradas do parafuso sem-fim.

## 5.5. RELAÇÃO DE TRANSMISSÃO

No caso das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal a relação de transmissão não é apenas expressa em função dos diâmetros primitivos, dada a existência de um ângulo de inclinação do parafuso sem-fim. Para melhor se entender o que acaba de ser exposto, considere-se a representação simplificada de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal, tal como ilustra a figura 5.12.

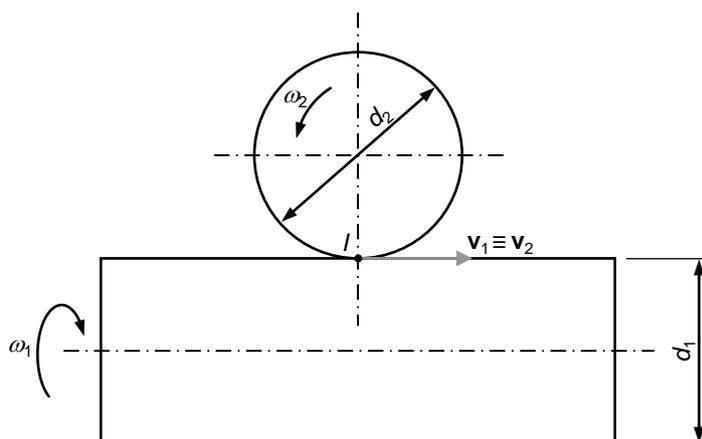


Figura 5.12 – Representação do engrenamento parafuso sem-fim roda helicoidal.

Da análise cinemática do referido engrenamento sabe-se que a velocidade linear do ponto primitivo é a mesma, quer se considere o ponto primitivo pertencente ao parafuso sem-fim, quer se considere o ponto primitivo pertencente à roda. Assim, neste último caso tem-se que

$$v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2} \quad (5.3)$$

em que  $\omega_2$  e  $d_2$  representam, respetivamente, a velocidade angular e o diâmetro primitivo da roda helicoidal. Para a determinação da velocidade linear do ponto primitivo quando este pertence ao parafuso sem-fim considere-se a representação da figura 5.13. Pela definição de passo pode verificar-se que por cada rotação do parafuso sem-fim há um deslocamento axial igual ao passo helicoidal, ou seja

$$1 \text{ rotação} \leftrightarrow p_{z1} \quad (5.4)$$

então, atendendo à definição de velocidade, a expressão (5.4) resulta em

$$\frac{\omega_1}{2\pi} \text{ rotações/s} \leftrightarrow v_1 \quad (5.5)$$

Combinando agora as expressões (5.4) e (5.5) pode obter-se a seguinte equação

$$v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} p_{z1} \quad (5.6)$$

Por outro lado, da observação da figura 5.13b pode escrever-se que

$$p_{z1} = \frac{\pi d_1}{\text{tg} \beta_1} \quad (5.7)$$

Finalmente, introduzindo a equação (5.7) na equação (5.6) obtém-se que

$$v_1 = \frac{\omega_1 d_1}{2 \operatorname{tg} \beta_1} \quad (5.8)$$

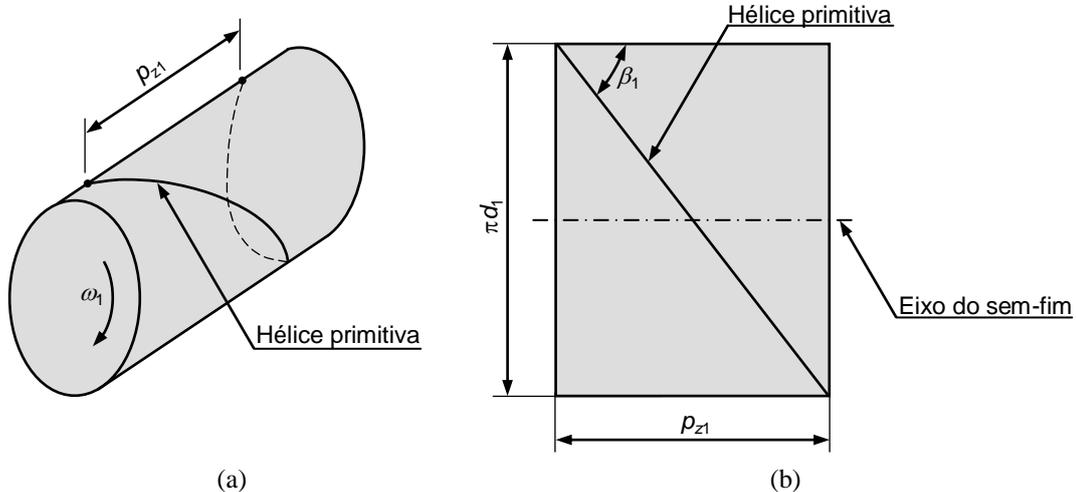


Figura 5.13 – (a) Representação do passo num parafuso sem-fim; (b) Planificação do passo.

Atendendo à definição de relação de transmissão e às expressões (5.3) e (5.8) pode verificar-se que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} \operatorname{tg} \beta_1 \quad (5.9)$$

Da análise da figura 5.13 observa-se que quanto maior for o ângulo de inclinação primitiva do parafuso, menor será o avanço do sem-fim. Pode verificar-se que a relação de transmissão é expressa em função dos diâmetros primitivos do parafuso sem-fim e da roda helicoidal, bem como do ângulo de inclinação dos filetes.

### Exercício 5.2

**Enunciado:** Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de 3 entradas. Sabendo que o ângulo de inclinação dos filetes é igual a  $75^\circ$ , o passo helicoidal é de 80 mm e que a roda tem 30 dentes, determine os diâmetros primitivos do parafuso sem-fim e da roda.

**Padrão de resposta esperado:**

$$\begin{aligned} d_1 &= 95,04 \text{ mm} \\ d_2 &= 254,65 \text{ mm.} \end{aligned}$$

De seguida apresenta-se o cálculo da relação de transmissão de uma engrenagem torsa genérica. A figura 5.14 diz respeito à planificação simplificada de uma engrenagem torsa, cujos ângulos de hélice não são complementares. Ambas as rodas apresentam hélice direita sendo o ângulo formado pelos eixos das rodas representado pelo símbolo  $\Sigma$ . O valor do ângulo definido pelos eixos das rodas é igual à soma dos ângulos das hélices, ou seja, (Shigley e Uicker, 1980)

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2 \quad (5.10)$$

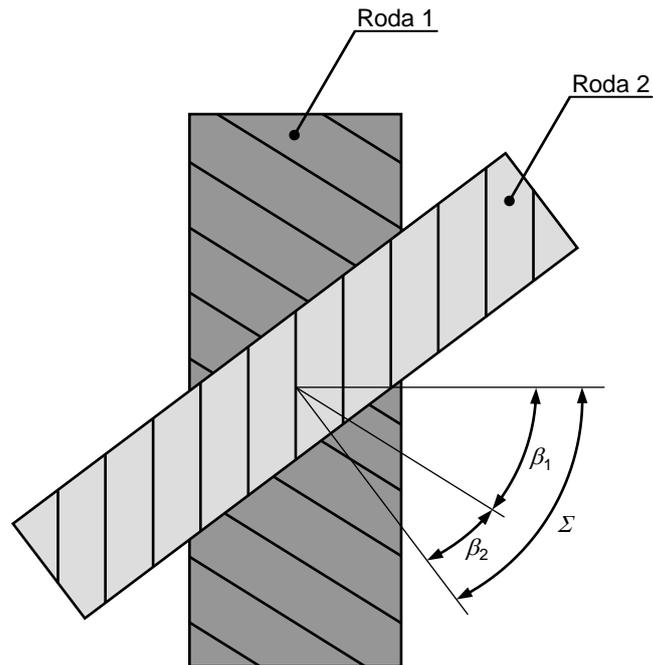


Figura 5.14 – Representação simplificada de uma engrenagem torsa.

Tal como no caso das engrenagens cilíndricas helicoidais de eixos paralelos, nas engrenagens torsas pode também escrever-se que (Mabie e Reinholtz, 1987)

$$d_1 = m_{n1} z_1 = \frac{m_{n1} z_1}{\cos \beta_1} \quad (5.11)$$

$$d_2 = m_{n2} z_2 = \frac{m_{n2} z_2}{\cos \beta_2} \quad (5.12)$$

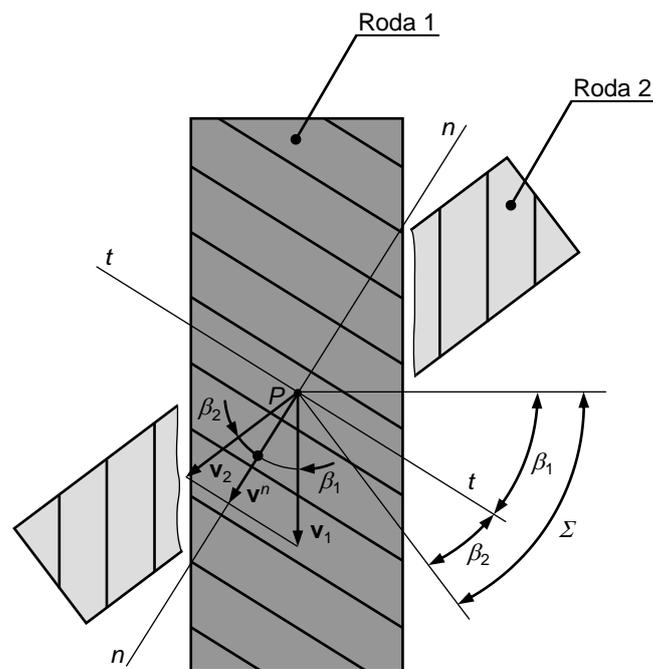


Figura 5.15 – Componentes das velocidades no contacto numa engrenagem torsa.

Deve referir-se que nas engrenagens torsas os passos (ou módulos) normais têm de ser iguais em ambas as rodas (Henriot, 1979). Considere-se agora a figura 5.15 onde se representam as componentes das velocidades existentes no engrenamento de uma engrenagem torsa em relação ao ponto primitivo. Da análise desta figura pode observar-se que são iguais as componentes na direção normal. O mesmo não acontece com as componentes tangenciais, pelo que se verifica a existência de escorregamento. Na verdade, nas engrenagens torsas existe escorregamento, inclusive no ponto primitivo (Wilson e Sadler, 1993). Atendendo ao que foi anteriormente dito, da análise da figura 5.15 podem escrever-se as seguintes relações

$$v_1^n = v_1 \cos \beta_1 \quad (5.13)$$

$$v_2^n = v_2 \cos \beta_2 \quad (5.14)$$

Combinando agora as equações (5.13) e (5.14) resulta que

$$v_1 = v_2 \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} \quad (5.15)$$

As velocidades angulares das rodas podem ser expressas do seguinte modo,

$$\omega_1 = \frac{v_1}{d_1/2} \quad (5.16)$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{d_2/2} \quad (5.17)$$

Assim, a relação de velocidades angulares, ou seja, a relação de transmissão em engrenagens torsas, pode ser calculada o seguinte modo

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1 d_2}{v_2 d_1} \quad (5.18)$$

Utilizando a equação (5.15) vem que

$$i = \frac{v_2 \cos \beta_2 d_2}{v_2 \cos \beta_1 d_1} = \frac{d_2 \cos \beta_2}{d_1 \cos \beta_1} \quad (5.19)$$

Considerando agora as equações (5.11) e (5.12), da equação (5.19) resulta que

$$i = \frac{m_n z_2 \cos \beta_2 \cos \beta_1}{\cos \beta_2 m_n z_1 \cos \beta_1} = \frac{m_n z_2}{m_n z_1} \quad (5.20)$$

Atendendo a que o módulo real é igual em ambas as rodas, então a equação (5.20) pode, finalmente, ser escrita da seguinte forma

$$i = \frac{z_2}{z_1} \quad (5.21)$$

Pode, pois, observar-se que a relação de transmissão é, de modo semelhante às engrenagens cilíndricas e cónicas, dada pelo quociente entre o número de dentes das rodas movida e motora. Refira-se que no caso das engrenagens torsas a relação de transmissão não é expressa em termos dos diâmetros primitivos como sucede nas engrenagens cilíndricas e cónicas.

Atente-se que no caso particular em que  $\Sigma=90^\circ$  verifica-se que

$$\operatorname{sen}\beta_1 = \cos\beta_2 \quad (5.22)$$

uma vez que estes ângulos são complementares. Por isso, a expressão (5.19) pode ser simplificada do seguinte modo

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} \operatorname{tg}\beta_1 \quad (5.23)$$

e que representa a relação de transmissão para uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal, tal como foi apresentado anteriormente (Henriot, 1979).

Em suma, nas engrenagens torsas, em geral, e nas engrenagens de parafuso sem-fim, em particular, a relação de transmissão não é expressa unicamente como função dos diâmetros primitivos, como acontece no caso das engrenagens cilíndricas, pois os ângulos de hélice das rodas motora e movida apresentam valores diferentes. Por isso, os módulos (ou passos) aparentes em engrenagens torsas são também distintos. Deve referir-se que é condição *sine qua non* para que haja engrenamento nas engrenagens torsas, que estas tenham o mesmo módulo (ou passo) real.

## 5.6. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesta secção são apresentadas algumas das principais relações geométricas e proporções dos dentes para o caso das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal. Para o efeito, considere-se a representação da figura 5.16 que diz respeito à planificação do cilindro primitivo de um parafuso sem-fim de dupla entrada (Henriot, 1979; Spotts e Shoup, 1998).

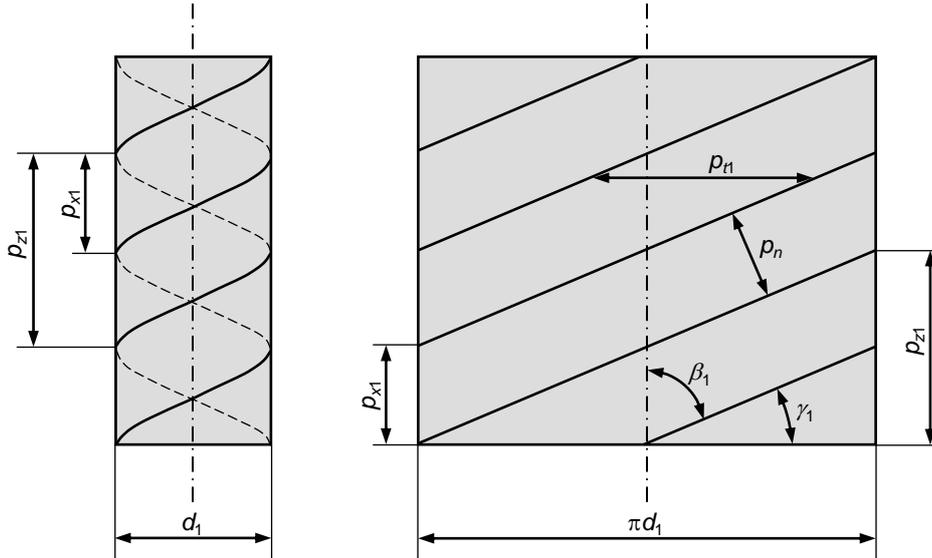


Figura 5.16 – Elementos geométricos de um parafuso sem-fim.

Com referência à figura 5.16 podem estabelecer-se as seguintes relações geométricas entre o passo normal ou real e os passos aparente e axial,

$$p_n = p_{t1} \cos \beta_1 \quad (5.24)$$

$$p_n = p_{x1} \sin \beta_1 \quad (5.25)$$

em que  $\beta_1$  representa o ângulo de inclinação primitiva ou ângulo de hélice primitiva.

Do mesmo modo pode escrever-se que

$$m_n = m_{t1} \cos \beta_1 \quad (5.26)$$

$$m_n = m_{x1} \sin \beta_1 \quad (5.27)$$

sendo  $m_{t1}$  e  $m_{x1}$  os passos aparente e axial do parafuso sem-fim.

Atendendo à definição de módulo tem-se que

$$m_n = \frac{p_n}{\pi} \quad (5.28)$$

$$m_{t1} = \frac{p_{t1}}{\pi} \quad (5.29)$$

$$m_{x1} = \frac{p_{x1}}{\pi} \quad (5.30)$$

Tal como já foi referido anteriormente, o engrenamento entre o parafuso sem-fim e a roda efetua-se quando ambos os elementos apresentam o mesmo ângulo de pressão normal ou real. Por conseguinte, os módulos e passos reais têm também o mesmo valor no parafuso sem-fim e na roda helicoidal. Assim, em analogia com o que foi descrito para o parafuso sem-fim são válidas as seguintes relações para a roda

$$m_n = m_{t2} \cos \beta_2 \quad (5.31)$$

$$m_n = m_{x2} \sin \beta_2 \quad (5.32)$$

$$p_n = p_{t2} \cos \beta_2 \quad (5.33)$$

$$p_n = p_{x2} \sin \beta_2 \quad (5.34)$$

em que  $\beta_2$  denota o ângulo de hélice da roda helicoidal (Henriot, 1979).

Das equações (5.24), (5.26), (5.31) e (5.33) resulta que

$$p_n = p_{t1} \cos \beta_1 = p_{t2} \cos \beta_2 \quad (5.35)$$

$$m_n = m_{t1} \cos \beta_1 = m_{t2} \cos \beta_2 \quad (5.36)$$

Pela definição de módulo sabe-se que

$$d_1 = m_{t1} z_1 \quad (5.37)$$

$$d_2 = m_{t2} z_2 \quad (5.38)$$

Atendendo a que nas engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal os ângulos de hélice são complementares, então das equações (5.36)-(5.38) pode escrever-se que

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2 m_{t1}}{m_{t2} d_1} = \frac{d_2 m_n \cos \beta_2}{d_1 m_n \cos \beta_1} = \frac{d_2}{d_1} \operatorname{tg} \beta_1 \quad (5.39)$$

dado que

$$\sin \beta_1 = \cos \beta_2 \quad (5.40)$$

Com efeito, a equação (5.39), conjuntamente com a equação (5.35), estabelece a relação fundamental que permite efetuar o cálculo dos dentes das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal (Henriot, 1979).

Combinando agora as equações (5.27) e (5.31) resulta que

$$m_n = m_{x1} \sin \beta_1 = m_{t2} \cos \beta_2 \quad (5.41)$$

Com efeito, da substituição da equação (5.40) na equação (5.41) obtém-se que

$$m_{x1} = m_{t2} \quad (5.42)$$

e, conseqüentemente,

$$p_{x1} = p_{t2} \quad (5.43)$$

Assim, pode dizer-se que para que haja engrenamento entre o parafuso sem-fim e a roda é necessário que as condições expressas pelas equações (5.42) e (5.43) se verifiquem para que ambos os elementos apresentem o mesmo módulo (ou passo) real (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009).

Relacionando as equações (5.24), (5.25) e (5.43) tem-se que

$$p_{t1} = p_{t2} \operatorname{tg} \beta_1 \quad (5.44)$$

De modo análogo pode verificar-se que

$$m_{t1} = m_{t2} \operatorname{tg} \beta_1 \quad (5.45)$$

Da análise da figura 5.16 observa-se que

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\pi d_1}{p_{z1}} \quad (5.46)$$

Como o ângulo de hélice  $\beta_1$  e o ângulo de passo  $\gamma_1$  são complementares (*vide* figura 5.11) verifica-se que

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{p_{z1}}{\pi d_1} \quad (5.47)$$

Representando  $\beta_{b1}$  e  $d_{b1}$  o ângulo de inclinação de base da rosca helicoidal do parafuso e o diâmetro de base do parafuso sem-fim, respetivamente, pode escrever-se que (Flores e Gomes, 2014c)

$$\operatorname{tg} \beta_{b1} = \frac{d_{b1}}{d_1} \operatorname{tg} \beta_1 \quad (5.48)$$

Por outro lado sabe-se que (Flores e Gomes, 2014a)

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha_{t1} = m_{t1} z_1 \cos \alpha_{t1} \quad (5.49)$$

Combinando agora as equações (5.48) e (5.49) resulta que

$$\operatorname{tg} \beta_{b1} = \operatorname{tg} \beta_1 \cos \alpha_{t1} \quad (5.50)$$

De modo análogo verifica-se que (Henriot, 1979)

$$\operatorname{sen} \beta_{b1} = \operatorname{sen} \beta_1 \cos \alpha_n \quad (5.51)$$

Combinado as equações (5.50) e (5.51) obtém-se que

$$\cos \beta_{b1} \cos \alpha_{t1} = \cos \beta_1 \cos \alpha_n \quad (5.52)$$

Finalmente, podem obter-se as seguintes expressões (Branco *et al.*, 2009)

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_{x1} \operatorname{sen} \beta_1 \quad (5.53)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_{t1} \cos \beta_1 \quad (5.54)$$

Atendendo a que o ângulo de pressão axial do parafuso sem-fim é igual ao ângulo de pressão aparente da roda vem que

$$\operatorname{tg} \alpha_{t1} = \operatorname{tg} \alpha_{x1} \operatorname{tg} \beta_1 \quad (5.55)$$

Várias são as possibilidades no estabelecimento das proporções dos dentes em engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal (Henriot, 1979; Branco *et al.*, 2009).

No presente texto considera-se apenas o sistema normal em que o ângulo de pressão normal ou real é igual a  $20^\circ$  e que é adotado pelo fabricante *David Brown and Sons*. Assim, tem-se que (Branco *et al.*, 2009)

$$h_{a1} = m_{x1} \quad (5.56)$$

$$h_{f1\min} = m_{x1}(2,2\text{sen}\beta_1 - 1) \quad (5.57)$$

$$h_{f1\max} = m_{x1}(2,5\text{sen}\beta_1 - 1) \quad (5.58)$$

$$h_{1\min} = 2,2m_n = 2,2m_{x1}\text{sen}\beta_1 \quad (5.59)$$

$$h_{1\max} = 2,25m_n = 2,25m_{x1}\text{sen}\beta_1 \quad (5.60)$$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_{a1} \quad (5.61)$$

$$d_{f1} = d_1 + 2h_{f1} \quad (5.62)$$

A espessura do filete é definida no cilindro médio do parafuso sem-fim, cujo raio é dado por

$$r = \frac{d_{a1} + d_{f1}}{4} \quad (5.63)$$

sendo a espessura igual ao intervalo axial

$$s_{x1} = e_{x1} = \frac{p_{x1}}{2} \quad (5.64)$$

O diâmetro de base do parafuso sem-fim deve ser menor que o diâmetro de raiz, donde resulta que

$$d_{b1} < d_{f1} \quad (5.65)$$

$$\cos\alpha_{t1} = \frac{d_{f1}}{d_1} \quad (5.66)$$

$$\text{tg}\alpha_n = \text{tg}\alpha_{t1} \cos\beta_1 \quad (5.67)$$

A determinação do comprimento do parafuso sem-fim é laboriosa e complexa em virtude da dificuldade no traçado da zona total de contacto (Henriot, 1979). Com efeito, é comum a utilização de relações geométricas simples e práticas, tais como (Branco *et al.*, 2009)

$$b_1 = 6p_{x1} \quad (5.68)$$

$$b_1 = \sqrt{8d_2h_{a1}} \quad (5.69)$$

$$b_1 = p_{x1} \left( 4,5 + \frac{z_2}{50} \right) \quad (5.70)$$

$$b_1 = 14m_{x1} \cos\gamma_1 \quad (5.71)$$

Para a roda helicoidal devem adotar-se as seguintes relações (Branco *et al.*, 2009)

$$h_{a2} = m_{x1}(2\text{sen}\beta_1 - 1) \quad (5.72)$$

$$h_{f2\text{min}} = m_{x1}(1 + 0,2\text{sen}\beta_1) \quad (5.73)$$

$$h_{f2\text{máx}} = m_{x1}(1 + 0,25\text{sen}\beta_1) \quad (5.74)$$

$$h_{2\text{min}} = 2,2m_{x1}\text{sen}\beta_1 \quad (5.75)$$

$$h_{2\text{máx}} = 2,25m_{x1}\text{sen}\beta_1 \quad (5.76)$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_{a2} \quad (5.77)$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_{f2} \quad (5.78)$$

$$e_{2\text{min}} = 0,2m_{x1} \quad (5.79)$$

$$b_2 = 2m_{x1}\sqrt{z_2 + 1} \quad (5.80)$$

A distância entre os eixos do parafuso sem-fim e da roda é igual a

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (5.81)$$

Para maximizar a capacidade de transmissão de potência, no projeto de engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal, deve garantir-se que o diâmetro primitivo do parafuso sem-fim esteja dentro do seguinte intervalo (Juvinal e Marshek, 2006)

$$\frac{a^{0,875}}{2} \leq d_1 \leq \frac{a^{0,875}}{1,7} \quad (5.82)$$

### Exercício 5.3

**Enunciado:** Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de 2 entradas. O parafuso sem-fim tem um diâmetro primitivo de 50,8 mm. A roda tem 30 dentes e um módulo aparente igual a 4,23 mm. Sabendo que se trata de uma engrenagem normalizada, determine: (i) o diâmetro primitivo da roda; (ii) a distância entre os eixos; (iii) o módulo axial do parafuso sem-fim; (iv) o passo axial do parafuso; (v) o passo helicoidal do parafuso sem-fim; (vi) o ângulo de inclinação dos filetes; (vii) o ângulo de inclinação primitiva da roda.

**Padrão de resposta esperado:**

$$d_2 = 126,90 \text{ mm}$$

$$a = 88,85 \text{ mm}$$

$$m_{x1} = 4,23 \text{ mm}$$

$$p_{x1} = 13,29 \text{ mm}$$

$$p_{z1} = 26,58 \text{ mm}$$

$$\beta_1 = 80,54^\circ$$

$$\beta_2 = 9,46^\circ$$

## 5.7. PARÂMETROS DE DESEMPENHO

Nos parágrafos seguintes são apresentados os principais parâmetros de desempenho associados às engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal, designadamente a relação de condução e o rendimento.

No caso mais geral das engrenagens torsas o estudo da continuidade do engrenamento é em tudo semelhante ao que se pode efetuar para as engrenagens cilíndricas de dentes helicoidais (Henriot, 1979; Flores e Gomes, 2014c). Com efeito, a relação de condução em engrenagens torsas pode ser calculada do seguinte modo

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - \frac{a - \frac{d_{b1} \cos \alpha_{t1}}{2} - \frac{d_{b2} \cos \alpha_{t2}}{2}}{\operatorname{sen} \alpha_n}{\pi m_n \cos \alpha_n} \quad (5.83)$$

Em alternativa, pode também considerar-se as expressões deduzidas para o caso das engrenagens cilíndricas, substituindo os valores aparentes pelos reais, ou seja (Henriot, 1979)

$$\varepsilon = \frac{a}{p_n} = \frac{l}{\pi m_n \cos \alpha_n} \quad (5.84)$$

em que  $l$  representa o comprimento de condução.

O estudo da continuidade do engrenamento em engrenagens de parafuso sem-fim requer uma análise gráfica cuidada das zonas de contacto entre os filetes do parafuso e os flancos dos dentes da roda. Esta análise é relativamente complexa e laboriosa pelos métodos tradicionais, uma vez que depende do tipo de perfil de filete utilizado. Recorrendo aos métodos computacionais, aquela análise pode tornar-se mais viável. Todavia, nos mais dos casos, não é necessário recorrer a uma análise tão detalhada da continuidade do engrenamento, pois nas engrenagens de parafuso sem-fim este parâmetro de desempenho é quase sempre amplamente assegurado (Henriot, 1979). Assim, para o caso particular das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal, a relação de condução pode obter-se recorrendo à seguinte expressão

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} - \frac{d_2 \operatorname{sen} \alpha_{x1}}{2} + \frac{h_{a1}}{\operatorname{sen} \alpha_{x1}}}{\pi m_{x1} \cos \alpha_{x1}} \quad (5.85)$$

em que o ângulo de pressão axial do parafuso sem-fim é dado por

$$\alpha_{x1} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\operatorname{sen} \beta_1} \right) \quad (5.86)$$

### Exercício 5.4

**Enunciado:** Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim de entrada dupla e com uma roda helicoidal de 30 dentes. O parafuso, que é o órgão motor, tem 44 mm de diâmetro primitivo, um módulo axial de 3 mm e um ângulo de pressão real igual a 20°. Assim, determine a relação de condução desta engrenagem.

**Padrão de resposta esperado:**

Para efetuar o cálculo da relação de condução da engrenagem supra mencionada é necessário determinar o valor dos seguintes parâmetros:

$$d_2 = 90 \text{ mm}$$

$$\beta_1 = 82,23^\circ$$

$$\alpha_{x1} = 20,17^\circ$$

$$h_{a1} = 3 \text{ mm}$$

$$h_{a2} = 2,94 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = 95,89 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = 84,48 \text{ mm}.$$

Finalmente, considerando a equação (5.85) obtém-se o valor relativo à relação de condução desta engrenagem

$$\varepsilon = 1,81.$$

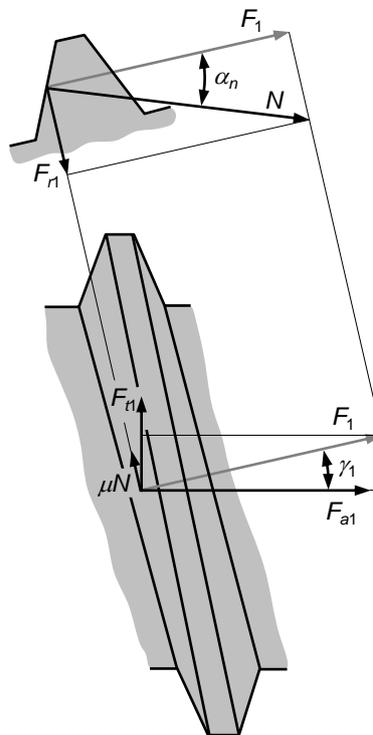


Figura 5.17 – Forças que atuam na hélice primitiva de um parafuso sem-fim quando este elemento é o órgão motor.

No atinente ao cálculo do rendimento em engrenagens de parafuso sem-fim duas situações distintas devem ser consideradas, uma em que o parafuso é o órgão motor e outra em que a roda é o elemento acionador. Assim, atente-se à primeira situação na qual o parafuso sem-fim é o órgão motor. A figura 5.17 diz respeito às diversas forças e suas componentes que atuam na hélice primitiva de um sem-fim. A força que atua perpendicularmente à superfície dos filetes do parafuso é representada pelo símbolo  $N$ , a qual pode ser dividida em duas componentes, ou seja

$$F_{r1} = N \sin \alpha_n \quad (5.87)$$

$$F_1 = N \cos \alpha_n \quad (5.88)$$

Em virtude do deslizamento que ocorre durante o engrenamento entre o parafuso sem-fim e a roda gera-se uma força de atrito, a qual é dada pela lei de atrito seco de Coulomb, isto é,  $\mu N$ . Da análise da figura 5.17 verifica-se que as componentes tangencial e axial das forças que atuam na hélice primitiva podem ser expressas do seguinte modo

$$F_{t1} = F_1 \text{sen} \gamma_1 + \mu N \text{cos} \gamma_1 \quad (5.89)$$

$$F_{a1} = F_1 \text{cos} \gamma_1 - \mu N \text{sen} \gamma_1 \quad (5.90)$$

Combinando as equações supramencionadas resulta que

$$F_{r1} = N \text{sen} \alpha_n \quad (5.91)$$

$$F_{t1} = N(\text{cos} \alpha_n \text{sen} \gamma_1 + \mu \text{cos} \gamma_1) \quad (5.92)$$

$$F_{a1} = N(\text{cos} \alpha_n \text{cos} \gamma_1 - \mu \text{sen} \gamma_1) \quad (5.93)$$

Na figura 5.18 estão representadas as componentes radiais, tangenciais e axiais que atuam numa engrenagem sem-fim em que o parafuso é o órgão motor com hélice direita e a roda é de hélice direita. Atendendo à terceira lei de Newton observa-se que

$$F_{r1} = F_{r2} \quad (5.94)$$

$$F_{t1} = F_{a2} \quad (5.95)$$

$$F_{a1} = F_{t2} \quad (5.96)$$

Na verdade, quando o ângulo entre os eixos do parafuso sem-fim e da roda é igual a  $90^\circ$  verifica-se que as componentes radiais da força que atua no engrenamento são iguais no parafuso e na roda. Observa-se ainda que a componente tangencial da força que atua no elemento motor é igual à componente axial que atua no elemento movido. Do mesmo modo, constata-se que a componente axial da força que atua no órgão motor é igual à componente tangencial que atua no órgão movido.

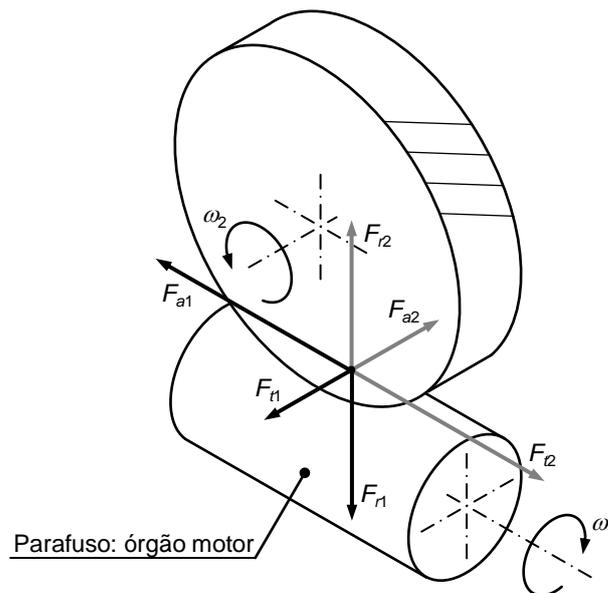


Figura 5.18 – Forças que atuam numa engrenagem de parafuso sem-fim.

Atendendo a que o rendimento de uma engrenagem pode ser definido como o quociente entre a potência útil e a potência disponível tem-se que

$$\eta_p = \frac{F_{t2} \frac{d_2}{2} \omega_2}{F_{t1} \frac{d_1}{2} \omega_1} = \frac{F_{t2} d_2 \omega_2}{F_{t1} d_1 \omega_1} \quad (5.97)$$

em que o índice  $p$  diz respeito ao órgão motor na presente análise, ou seja, o parafuso sem-fim.

Considerando agora a definição de relação de transmissão para uma engrenagem de parafuso sem-fim dada pela expressão (5.23) e também as equações acima apresentadas para as diferentes componentes das forças de engrenamento tem-se que

$$\eta_p = \frac{\cos\alpha_n \cos\gamma_1 - \mu \operatorname{sen}\gamma_1 \cot\beta_1}{\cos\alpha_n \operatorname{sen}\gamma_1 + \mu \cos\gamma_1} \quad (5.98)$$

Sabendo que os ângulos  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  são complementares, então o rendimento teórico de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal em que o órgão motor é o parafuso pode ser expressa do seguinte modo

$$\eta_p = \frac{\cos\alpha_n - \mu \operatorname{tg}\gamma_1}{\cos\alpha_n + \mu \cot\gamma_1} = \frac{\cos\alpha_n - \mu \cot\beta_1}{\cos\alpha_n + \mu \operatorname{tg}\beta_1} \quad (5.99)$$

em que  $\alpha_n$  é o ângulo de pressão real ou normal,  $\beta_1$  representa o ângulo de inclinação primitiva do filete do parafuso sem-fim e  $\mu$  é o coeficiente de atrito.

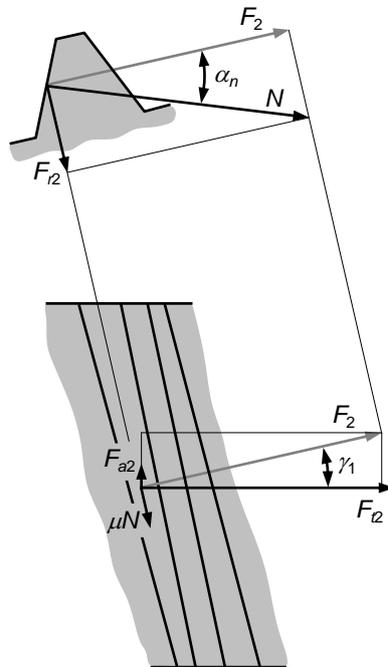


Figura 5.19 – Forças que atuam no dente da roda de um parafuso sem-fim quando a roda é o órgão motor.

Efetuada agora a mesma análise para o caso em que a engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal é multiplicadora, isto é, a roda é o órgão motor pode obter-se

uma expressão semelhante à (5.99) para o cálculo do rendimento. Com efeito, para esta situação deve ter-se em consideração a representação da figura 5.19, resultando a seguinte expressão (Henriot, 1979)

$$\eta_r = \frac{\cos\alpha_n - \mu \operatorname{tg}\beta_1}{\cos\alpha_n + \mu \cot\beta_1} \quad (5.100)$$

Deve referir-se que uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal é auto-blocante quando for nula a componente tangencial que atua na roda, isto é

$$F_{t2} = N(\cos\alpha_n \operatorname{sen}\gamma_1 - \mu \cos\gamma_1) = 0 \quad (5.101)$$

ou seja

$$\mu \geq \cos\alpha_n \operatorname{tg}\gamma_1 \quad (5.102)$$

Tal como já foi mencionado anteriormente, as engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal nem sempre são reversíveis, isto acontece quando apenas um dos órgãos (parafuso ou roda) pode ser o acionador. Com efeito, analisando as equações (5.99) e (5.100) e tendo em consideração que os numeradores devem ser sempre positivos para que haja transmissão de movimento, observa-se que

$$0 \leq \beta_1 \leq \phi \quad (\text{engrenagens irreversíveis}) \quad (5.103)$$

$$\phi < \beta_1 < \frac{\pi}{2} - \phi \quad (\text{engrenagens reversíveis}) \quad (5.104)$$

$$\frac{\pi}{2} - \phi \leq \beta_1 < \frac{\pi}{2} \quad (\text{engrenagens irreversíveis}) \quad (5.105)$$

em que  $\phi$  representa o ângulo de atrito, ou seja

$$\mu = \operatorname{tg}\phi \quad (5.106)$$

Deve referir-se que na situação relativa à equação (5.103) apenas a roda pode ser o órgão motor, ao passo que no caso da equação (5.105) apenas o parafuso sem-fim pode ser o órgão motor. Na situação caracterizada pela equação (5.104) ambos os órgãos podem ser o elemento acionador. Estes cenários estão ilustrados na figura 5.20.

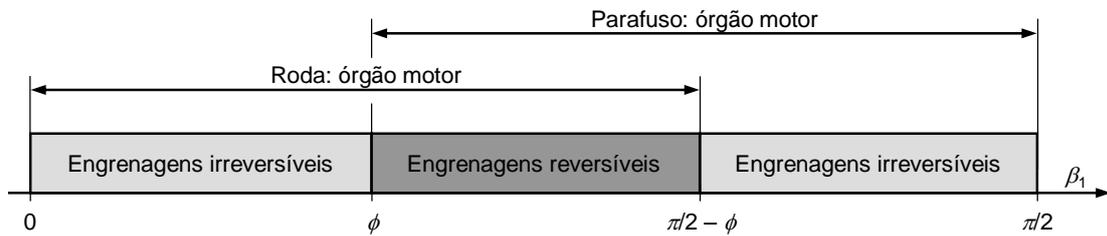


Figura 5.20 – Condições de reversibilidade em engrenagens de parafuso sem-fim.

A determinação do valor do coeficiente de atrito não é uma tarefa simples uma vez que aquele parâmetro depende de vários fatores tais como os materiais em contacto, a lubrificação, a velocidade de escorregamento, o acabamento superficial, a temperatura, etc. A título de exemplo, a figura 5.21 mostra a variação do coeficiente de atrito para engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal lubrificadas. Os pares de materiais considerados para o parafuso e para a roda são aço temperado – bronze fosforoso e ferro fundido – ferro fundido.

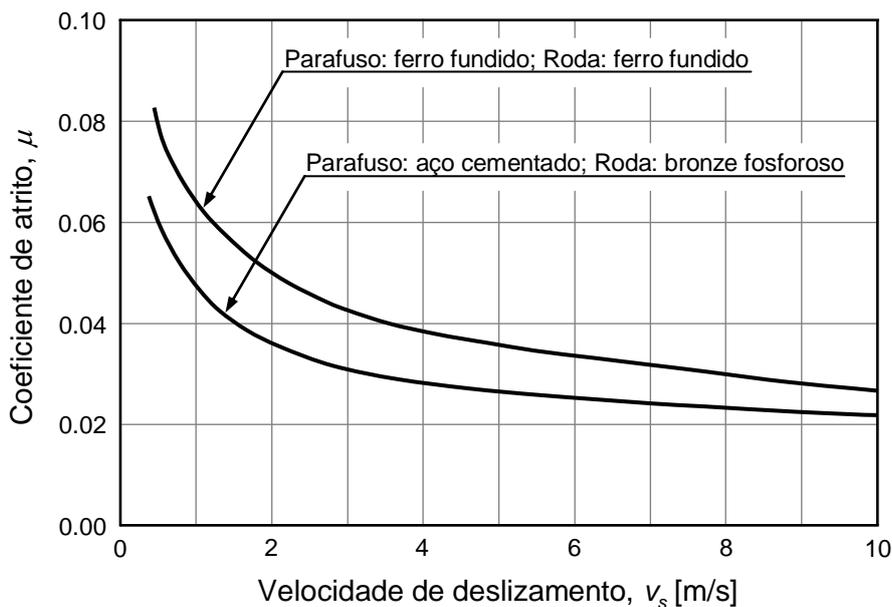


Figura 5.21 – Variação do coeficiente de atrito para engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal lubrificadas e para diferentes materiais.

O valor do coeficiente de atrito diminui com o aumento da velocidade de escorregamento, a qual é dada por (Juvinall e Marshek, 2006)

$$v_s = \frac{\pi d_1 n_1}{60 \operatorname{sen} \beta_1} \quad (5.107)$$

### Exercício 5.5

**Enunciado:** Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal redutora em que o órgão motor roda a 1200 rpm e transmite uma potência de 0,75 kW. O parafuso sem-fim apresenta hélice direita, duas entradas e um diâmetro primitivo de 50 mm. A roda tem 30 dentes e um passo aparente de 13 mm. Os materiais do parafuso e da roda são o aço cementado e bronze fosforoso, respectivamente. Determine o rendimento desta engrenagem admitindo que o ângulo de pressão real é de 20°.

#### **Padrão de resposta esperado:**

Para efetuar o cálculo do rendimento da engrenagem supra mencionada é necessário determinar o valor dos seguintes parâmetros:

$$\beta_1 = 80,60^\circ$$

$$v_s = 3,18 \text{ m/s}$$

$$\mu = 0,03.$$

Finalmente, considerando a equação (5.99) obtém-se o valor relativo ao rendimento desta engrenagem, ou seja

$$\eta = 83,39 \text{ \%}.$$

## 5.8. REVISÃO DE CONHECIMENTOS

Com o propósito de proporcionar uma revisão de conhecimentos sobre a temática das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal, apresenta-se, nesta secção, um conjunto diversificado de questões e exercícios de aplicação.

1. Apresente as principais características das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal.
2. Discuta o interesse do número de entradas no desempenho de engrenagens de parafuso sem-fim.
3. Numa engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de entrada quadrupla. O parafuso sem-fim roda a 200 rpm e a roda tem 80 dentes. Assim, determine a velocidade de rotação da roda helicoidal.
4. Qual é a utilidade da consideração de envolvimento nas engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal?
5. Comente a seguinte afirmação “as engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal não são, em geral, reversíveis”.
6. Discuta os limites para a relação de transmissão nas engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal.
7. Compare a capacidade de transmissão de potência das engrenagens de parafuso sem-fim relativamente às engrenagens cilíndricas.
8. Discuta a importância da lubrificação no funcionamento das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal.
9. Apresente o tipo de material que deve ser utilizado nos diversos órgãos de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.
10. Quais são os principais tipos de perfis dos filetes das engrenagens de parafuso sem-fim roda helicoidal?
11. Distinga passo axial de passo helicoidal num parafuso sem-fim.
12. Deduza a relação matemática entre o passo axial e o passo helicoidal.
13. Distinga ângulo de inclinação primitiva de ângulo ascendente.
14. Qual a relação entre os módulos reais de um parafuso sem-fim e de uma roda helicoidal para que haja engrenamento?
15. Deduza uma expressão para a relação de transmissão numa engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.

16. Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de entrada dupla. O ângulo de inclinação dos filetes de  $70^\circ$ , o passo helicoidal é igual a 70 mm e a relação de transmissão é igual a 10. Assim, determine os diâmetros primitivos do parafuso sem-fim e da roda helicoidal.
17. Apresente as relações entre os diversos passos de uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal.
18. Uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal redutora é acionada por um motor de 1,5 kW a 720 rpm. A velocidade de saída é de 40 rpm. O parafuso sem-fim tem uma única entrada e um ângulo de inclinação primitiva igual a  $75^\circ$ . O módulo real da engrenagem é igual a 4 mm. Assim, determine o número de dentes da roda e o diâmetro primitivo do parafuso sem-fim.
19. Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de 3 entradas. O parafuso sem-fim tem um diâmetro primitivo de 50,8 mm. A roda tem 30 dentes e um módulo aparente igual a 4,23 mm. Sabendo que se trata de uma engrenagem normalizada, determine: (i) o diâmetro primitivo da roda; (ii) a distância entre os eixos; (iii) o módulo axial do parafuso sem-fim; (iv) o passo axial do parafuso; (v) o passo helicoidal do parafuso sem-fim; (vi) o ângulo de inclinação dos filetes; (vii) o ângulo de inclinação primitiva da roda.
20. Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal de dupla entrada. O parafuso sem-fim tem um diâmetro primitivo igual a 50 mm e um módulo axial de 4 mm. A roda tem 32 dentes. Atendendo a que o dentado é normalizado, determine: (i) o passo axial do parafuso; (ii) o passo helicoidal do parafuso; (iii) o módulo aparente da roda; (iv) o diâmetro primitivo da roda; (v) a relação de transmissão; (vi) o ângulo de inclinação dos filetes; (vii) o ângulo de passo; (viii) o ângulo de pressão axial; (ix) a distância entre eixos; (x) a saliência do parafuso; (xi) a saliência da roda; (xii) o diâmetro de coroa da roda; (xiii) o diâmetro de base da roda.
21. Calcule a relação de condução de uma engrenagem de parafuso sem-fim de tripla entrada e com uma roda helicoidal de 45 dentes. O parafuso, que é o órgão motor, tem um módulo axial de 3 mm e um ângulo de pressão real de  $20^\circ$ .
22. Considere uma engrenagem de parafuso sem-fim roda helicoidal. O parafuso, em aço cementado, é de dupla entrada, tem um diâmetro primitivo igual a 50 mm e um módulo axial de 4 mm. A roda tem 32 dentes e é em bronze fosforoso. Atendendo a que o dentado é normalizado, determine o rendimento desta engrenagem.
23. Calcule o rendimento da engrenagem descrita no exercício 21.
24. Comente sobre reversibilidade da engrenagem descrita no exercício 21.
25. Comente sobre reversibilidade da engrenagem descrita no exercício 22.

## 5.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antunes, F. (2012) *Mecânica Aplicada - Uma abordagem prática*. Lidel.
- Branco, C.M., Ferreira, J.M., da Costa, J.D., Ribeiro, A.S. (2009) *Projecto de Órgãos de Máquinas*. 2ª Edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Budynas, R.G., Nisbett, J.K. (2011) *Elementos de Máquinas de Shigley*. 8ª edição McGraw-Hill, Brasil.
- Drago, R.J. (1988) *Fundamentals of Gear Design*. London, Butterworths.
- Ferreira, L.A. (1998) *Tribologia – Notas de Curso – Lubrificação e Lubrificantes*. Publindústria, Edições Técnicas, Porto, 1998
- Flores, P., Gomes, J. (2014a) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 1. Aspectos gerais sobre engrenagens*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 41p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014b) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 2. Engrenagens cilíndricas de dentes retos*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 44p.
- Flores, P., Gomes, J. (2014c) *Cinemática e Dinâmica de Engrenagens. 3. Engrenagens cilíndricas de dentes inclinados*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia, publicação interna, Guimarães, Portugal, 32p.
- Hamrock, B.J., Schmid, S.R., Jacobson, B. (2005) *Fundamentals of Machine Elements*. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- Henriot, G. (1979) *Traité Théorique et Pratique des Engrenages*. Editora Dunod.
- Juvinall, R.C., Marshek, K.M. (2006) *Fundamentals of Machine Component Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Mabie, H.H., Reinholtz, C.F. (1987) *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. Fourth Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Niemann, G. (1971) *Elementos de Máquinas*. Volume II, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Norton, R.L. (2013) *Machine Design*. Pearson Education, New York.
- Radzevich, S.P. (2012) *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. 2nd Edition CRC Press, New York.
- Shigley, J.E., Mischke, C.R. (1989) *Mechanical Engineering Design*. 5th Edition, McGraw-Hill, New York.
- Shigley, J.E., Uicker, J.J. (1980) *Theory of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York.
- Simon, V. (2007) The Influence of Gear Hobbing on Worm Gear Characteristics. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 129, 919-925.
- Spotts, M.F., Shoup, T.E. (1998) *Design of Machine Elements*. 7th Edition Prentice-Hall, New Jersey.
- Stolarski, T.A., (1990) *Tribology in Machine Design*. Butterworth Heinemann, Oxford, England.
- Wilson, C.E., Sadler, J.P. (1993) *Kinematics and Dynamics of Machinery*. 2nd Edition, Harper Collins College Publishers, New York.