

ENGENHEIROS PORTUGUESES NO SÉCULO XVIII: AS SUAS 'GEOMETRIAS ESPECULATIVAS'

Catarina Mota⁽¹⁾, Maria Elfrida Ralha⁽²⁾, Maria Fernanda Estrada⁽³⁾

(1) Didáxis, Cooperativa de Ensino & CMAT, Braga, Portugal, catlexmota@gmail.com

(2) CMAT, Centro de Matemática da Universidade do Minho, Braga, Portugal, eralha@math.uminho.pt

(3) CMAT, Centro de Matemática da Universidade do Minho, Braga, Portugal, festrada@math.uminho.pt

Resumen

O século XVIII Português foi, à semelhança do resto da Europa, fértil em alterações académicas, científicas e ideológicas. O desenvolvimento da ciência e da técnica, o surgimento das primeiras máquinas, impulsionou a área do saber que atualmente chamamos de engenharia. Em Portugal (à época ainda um império do qual fazia parte, entre outros, o Brasil), as escolas técnicas e militares consolidam-se e surgem alguns engenheiros e militares de renome cujas obras se difundem pelo reino.

Manuel de Azevedo Fortes (1660-1749), engenheiro-mor do reino Português, publicou, em 1728 e 1729, os dois tomos de uma das suas obras maiores, *O Engenheiro Português*, obra dedicada à formação dos engenheiros na Academia Militar de Lisboa. A primeira parte deste tratado aborda os conhecimentos matemáticos que Azevedo Fortes considera essenciais na formação dos engenheiros. Na sua *Geometria Especulativa*, um manuscrito datado de 1724, aborda os elementos de geometria e trigonometria, sem esquecer as suas aplicações. O Brigadeiro José Fernandes Pinto Alpoim (1700-1765), engenheiro que se destacou na arquitetura e fortificação do Brasil no século XVIII, publicou o *Exame de Artilheiros* em 1744 e o *Exame de Bombeiros* em 1748, obras contendo os princípios da geometria e da trigonometria e as suas aplicações à engenharia militar que se destinavam ao ensino dos militares na Academia Militar do Rio de Janeiro, onde era professor.

Nesta comunicação analisaremos a matemática, em particular a geometria, presente nestas obras, salientando não só os conteúdos abordados mas a ênfase dada às aplicações desses conteúdos nos contextos militares da época.

Palabras Clave: Engenharia, Geometria, Azevedo Fortes, Brigadeiro Alpoim, sec. XVIII.

PORTUGUESE ENGINEERS IN THE 18TH CENTURY: THEIR 'SPECULATIVE GEOMETRIES'

Abstract

The Portuguese 18th century was, similar to what happen in the rest of Europe, prolific in academic, scientific and ideological changes. The development of science and technique, the emergence of the first machines, stimulated the knowledge area nowadays called engineering. In Portugal (at that time an empire to which belonged, among others, Brazil) the technical and military schools developed emerge some re-nowned engineers and military, whose Works were spread throughout the kingdom.

Manuel de Azevedo Fortes (1660-1749), responsible engineer of the Portuguese kingdom, published, in 1728 and 1729, the two volumes of one of his major Works, *O Engenheiro Português*, work dedicated to the formation of the engineers in the Military Academy of Lisbon. The first part of that work is about the mathematical contents that Azevedo Fortes considers essential to the engineers' education. In his *Geometria Especulativa*, a manuscript dated of 1724, he covers the elements of geometry and trigonometry, without forgetting its applications. Brigadeiro José Fernandes Pinto Alpoim (1700-1765), was an engineer that stressed out in the architecture and fortification of Brasil in the 18th century. He published *Exame de Artilheiros* in 1744 and *Exame de Bombeiros* in 1748, works containing the principles of geometry and trigonometry and its applications to the military engineering, and those were meant to be used in the teaching of the those attending the Military Academy of Rio de Janeiro, were he was a teacher.

In this work we will analyze the mathematics, in particular the geometry, presented in these works, emphasizing not only the contents but it's applications in the military context of that time.

Keywords: Engineering, Geometry, Azevedo Fortes, Brigadeiro Alpoim, 18th century.

1. INTRODUÇÃO

O século XVIII foi um século marcado por profundas mudanças sociais, académicas e ideológicas. Num século marcado por diferentes guerras, que levaram a um crescente interesse nas aplicações da matemática e da física à engenharia militar, e pelo surgimento das máquinas, o ensino das ciências, nomeadamente o ensino da matemática, deixou de ser apenas teórico sendo dada cada vez mais importância às aplicações. A Guerra da Sucessão do trono Espanhol, que decorreu entre 1702 e 1713, originou diversos conflitos sobre a soberania dos territórios imperiais espalhados pelo mundo. A assinatura de diversos tratados de paz entre os diferentes impérios envolvidos no conflito, conhecidos como Tratados de Utrecht, além de estabelecer a paz entre os intervenientes do conflito pretendeu fixar os limites fronteiriços de cada um dos reinos e das suas colónias. No caso particular dos reinos Português e Espanhol, foram definidas de forma mais clara as fronteiras na América do Sul. Entre Portugal e Espanha viveu-se então uma paz temporária, utilizada em parte pelos dois lados do conflito para encontrar uma solução mais definitiva para a questão das fronteiras na América do Sul. Atente-se que a divisão das colónias entre Portugal e Espanha tinha em conta o Tratado de Tordesilhas, ainda em vigor à época, e, segundo Cortesão [1950, p. 42] assentava em alterações cartográficas, de parte a parte, em virtude da não resolução completa do problema das longitudes em terra. No sentido de alterar esta situação, o rei português, D. João V, ordenou um estudo profundo deste problema:

A história do Tratado de Madrid prende-se estreitamente à do problema das longitudes. (...)este mereceu pessoalmente, de D. João V, a maior atenção; (...) Ele se rodeou dos melhores mapas do seu tempo; ele mandou vir astrónomos do estrangeiro; encomendou de Paris óculos astronómicos e relógios, «instrumentos matemáticos», como então se dizia; fundou um observatório onde ele próprio fez observações dos satélites de Júpiter; e mandou estabelecer em novas bases a cartografia do reino. [CORTESÃO, 1950, p. 42]

Portugal preparou-se assim de duas formas para um possível conflito com Espanha: indicou responsáveis pelo estudo da cartografia do reino, nomeadamente da cartografia do Brasil; preparou engenheiros e militares para um possível conflito militar, dando-lhes formação científica e técnica nas Academias Militares espalhadas pelo reino.

2. O PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO

Desde a antiguidade clássica que a utilização de triângulos para a determinação de distâncias inacessíveis é uma ferramenta muitas vezes utilizada em matemática, pelo que a resolução de um triângulo (determinação dos comprimentos dos lados e da amplitude dos ângulos internos de um triângulo) é um problema bastante estudado. Em 1553, Gema Frisius publicou na sua *Cosmographia de Petri Apiano* um apêndice intitulado *Libellos de Locurum* onde utiliza a resolução de triângulos e o processo de triangulação para a determinação da distância entre as cidades de Antuérpia e Bruxelas [Figura 1]. O método apresentado por Gema Frisius, que consiste na utilização sucessiva de triângulos para a obtenção de distâncias inacessíveis, estará na base da cartografia dos séculos seguintes, existindo relatos da utilização deste processo por Gauss para a uma completa triangulação do estado de Hannover.

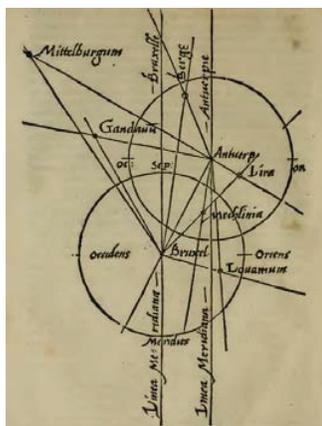


Figura 1. Triangulação apresentada por Gema Frisius na sua *Cosmographia*. (FRISIUS, 1553, Fo. 60v)

Em Portugal, Manuel de Azevedo Fortes (1660-1749), engenheiro-mor do Reino Português, foi um dos responsáveis pela elaboração de mapas cientificamente mais corretos do reino. Não é pois de estranhar que nas suas obras para engenheiros e militares o estudo do problema da triangulação, em particular a resolução de triângulos, se encontre presente. O Brigadeiro José Alpoim (1700-1765) também se preocupou com este problema, embora o utilizasse numa vertente mais militar, em particular a utilização da resolução de triângulos para preparar bombardeamentos. O estudo do problema da triangulação por estes dois matemáticos encontra-se presente nas suas obras mais emblemáticas.

“Geometrias Especulativas” portuguesas do século XVIII. Manuel de Azevedo Fortes notabilizou-se como matemático e como engenheiro, sendo um dos divulgadores da geometria cartesiana em Portugal. Professor na Academia Militar de Lisboa (assim denominada a partir de 1707 e anteriormente chamada de Aula de Fortificação e Arquitetura Militar) escreveu, para o ensino nesta academia *O Engenheiro Português*, obra publicada em dois volumes, datados de 1728 e 1729 [Figura 2], e onde resume os principais conteúdos matemáticos, físicos e arquitetónicos necessários na engenharia militar. De 1724 data o manuscrito *Geometria Especulativa, Trigonometria Espherica, Modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares*¹ (doravante designado *Geometria Especulativa*)

¹ Deste manuscrito conhecemos apenas um exemplar, pertence ao Fundo Documental Manizola da Biblioteca Municipal de Évora e que se encontra disponível no Repositório Institucional da Universidade de Évora.

[Figura 2], uma obra que, pelos seus conteúdos sugere e pela forma como se encontra escrita, nos parece também ser uma obra vocacionada para o ensino.

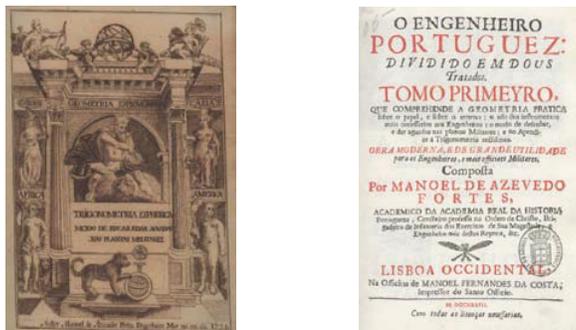


Figura 2. Folha de rosto das obras *Geometria Especulativa* e *O Engenheiro Português*.
(FORTES, 1724, folha de rosto e FORTES, 1728, folha de rosto)

As obras de Azevedo Fortes embora com um propósito semelhante, apresentam estruturas muito distintas, como é possível verificar na tabela 1.

<i>Geometria Especulativa</i> , 1724	<i>O Engenheiro Português</i> , 1728 e 1729
<ul style="list-style-type: none"> ▪ 252 fólhos contendo as seguintes obras: <ul style="list-style-type: none"> ○ Elementos de Euclides (livros 1 a 6, 11 e 12); ○ Tratado de trigonometria e geometria prática; ○ Tratado do modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Volume 1 <ul style="list-style-type: none"> ○ Prólogo; ○ Geometria Prática; <ul style="list-style-type: none"> ▪ Longimetria; ▪ Planimetria; ▪ Estereometria. ○ Apêndice sobre trigonometria retilinea. ▪ Volume 2 <ul style="list-style-type: none"> ○ Tratado de Fortificação; ○ Apêndice sobre armas de guerra.

Tabela 1. Estrutura das obras *Geometria Especulativa* e *O Engenheiro Português* de Azevedo Fortes.

Efetuando uma comparação entre estas duas obras é notória a semelhança entre o *Tratado de trigonometria e geometria prática* e o *Apêndice sobre trigonometria retilinea*, parte que contém as aplicações da trigonometria e geometria à engenharia militar assim como um estudo dos logaritmos.

O Brigadeiro José Fernandes Pinto Alpoim foi aluno de Azevedo Fortes na Academia Militar de Lisboa. Durante a sua vida de militar dedicou-se ao ensino, em particular na Academia Militar do Rio de Janeiro, criada em 1736, publicando duas obras, para o ensino nesta Academia: *Exame de Artilheiros*, em 1744, e *Exame de Bombeiros*, em 1748 [Figura 3]. Da autoria do Brigadeiro Alpoim é também um manuscrito², datado de 1745, sem título e formado por diversos tratados, sendo o primeiro intitulado *Tratado da Geometria dos Bombeiros*³ [Figura 3], que corresponde, na sua quase

² A identificação do Brigadeiro Alpoim como autor deste manuscrito deve-se, além das semelhanças entre este manuscrito e a obra publicada pelo Brigadeiro em 1748, à dedicatória no primeiro fôlho do manuscrito que identifica como patrono um fidalgo de nome Gomes, sendo Gomes Freire o patrono das publicações do Brigadeiro, assim como às referências a Azevedo Fortes como mestre neste manuscrito.

³ O único exemplar que conhecemos deste manuscrito encontra-se na Sociedade Martins Sarmento, à qual agradecemos o acesso ao manuscrito para consulta.

totalidade ao *Exame de Bombeiros* [Tabela 3] e que poderá ter sido um primeiro rascunho da obra publicada em 1748.

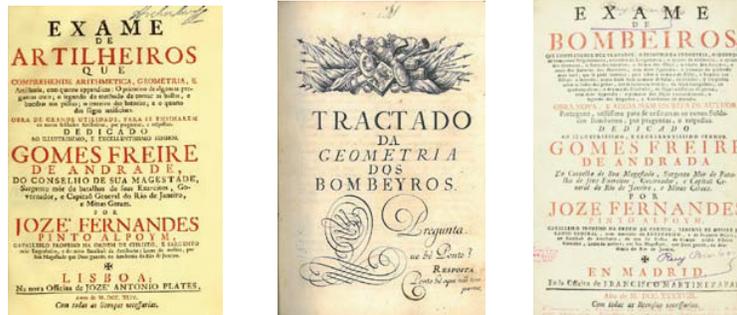


Figura 3. Folha de rosto das obras do Brigadeiro Alpoim [1744, 1745, 1748].

Dada a especificidade das tarefas dos bombeiros e dos artilheiros, apenas nas obras dedicadas aos bombeiros se encontra um verdadeiro estudo da geometria aplicada aos militares, pelo que nos debruçaremos apenas sobre essas duas obras. A semelhança entre estas duas obras é visível em termos de índice, parecendo-nos que o *Exame de Bombeiros* será uma versão corrigida e publicada da versão manuscrita que o Brigadeiro Alpoim terá dado a ler a algumas das pessoas que lhe eram mais próximas⁴.

<i>Tratado da Geometria dos Bombeiros, 1745</i>	<i>Exame de Bombeiros, 1748</i>
<ul style="list-style-type: none"> ▪ 202 fólhos contendo: <ul style="list-style-type: none"> ○ Tratado da geometria dos Bombeiros; ○ Tratado da trigonometria dos Bombeiros ○ Tratado de medir distâncias a que chamam longimetria e altimetria; ○ Tratado da exata arte de deitar bombas; ○ Tratado dos pedreiros; ○ Tratados dos obuz; ○ Tratado dos petardos; ○ Tratado das baterias dos morteiros; ○ Apêndice 1º: Do método mais fácil para se contarem as bombas e balas nas pilhas triangulares, quadrangulares e retangulares; ○ Apêndice 2º: Método de achar o lado para formar as pilhas triangulares, quadrangulares e retangulares; ○ Apêndice 3º: Dos candeeiros e fogareiros. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 444 páginas contendo <ul style="list-style-type: none"> ○ Tratado da geometria dos Bombeiros; ○ Tratado da trigonometria dos Bombeiros ○ Tratado da longimetria; ○ Tratado da altimetria; ○ Tratado dos morteiros ou exata arte de deitar bombas; ○ Tratado dos pedreiros; ○ Tratados dos obuz; ○ Tratado dos petardos; ○ Tratado das baterias dos morteiros; ○ Apêndice 1º: Do método mais fácil de contar as bombas e balas nas pilhas; ○ Apêndice 2º: Do método de achar o lado para formar as pilhas triangulares, ou quadrangulares, dado o número de balas; ○ Tratado da pirololia militar, ou fogos artificiais da guerra; ○ Apêndice 1: Dos fogos extraordinários ○ Apêndice 2: Dos fogareiros e candeeiros.

Tabela 2. Estrutura das obras do Brigadeiro Alpoim

⁴ Note-se que no *Exame de Bombeiros*, existem várias cartas ao autor onde se refere que este terá dado o *Exame de Bombeiros* a ler antes de sair a público. Veja-se ALPOIM [1748].

O problema da triangulação, em particular a resolução de triângulos, é estudada pelos dois autores nas quatro obras aqui referidas, sendo de notar que o tratamento efetuado por Azevedo Fortes é o mesmo nas suas duas obras, verificando-se o mesmo no trabalho do Brigadeiro Alpoim.

O problema da triangulação na obra de Manuel de Azevedo Fortes. Manuel de Azevedo Fortes dedica-se à resolução de triângulos no *Tratado de trigonometria e geometria prática*, o segundo tratado da sua *Geometria Especulativa*, e no *Apêndice sobre trigonometria retilinea* contido no *Engenheiro Português*. Uma análise cuidada a estes dois capítulos mostra-nos uma enorme semelhança entre eles, pelo que nos parece que o apêndice publicado no *Engenheiro Português* se trata de uma versão revista do tratado escrito anteriormente na *Geometria Especulativa*⁵.

Sobre a resolução de triângulos Azevedo Fortes apresenta cinco teoremas e quatro problemas dos quais salientamos os primeiro e terceiro teoremas e o segundo problema, dado serem aqueles que, em termos práticos têm uma aplicação mais direta na utilização de triângulos para a determinação de distâncias inacessíveis.

Teorema 1: Se a hipotenusa de um triângulo retângulo se tomar como raio, os lados serão senos dos ângulos opostos⁶. [FORTES, 1728, p. 519]

Teorema 3: Em todo o triângulo, os lados têm entre si a mesma razão que os senos dos ângulos seus opostos. [FORTES, 1728, p. 523]

Em notação moderna, tem-se que dado o triângulo $[EFG]$ se tem $\frac{\overline{EF}}{\overline{EG}} = \frac{\text{sen}\hat{G}}{\text{sen}\hat{F}}$.

Azevedo Fortes, além da demonstração do teorema, apresenta um exemplo da sua aplicação, o que revela a importância dada às aplicações da matemática nesta obra. O exemplo apresentado por Azevedo Fortes é o seguinte⁷:

Em qualquer triângulo obliquângulo, como $[EFG]$ [Figura 4], conhecido o ângulo F de 43° oposto ao lado EG de 12 braças, se conhecerá, por meio do ângulo G de 54° o lado EF , que lhe é oposto, fazendo esta analogia:

$$\frac{\text{sen}\hat{F}}{\overline{EG}} = \frac{\text{sen}\hat{G}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{68199}{12} = \frac{80902}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{8092 \times 12}{68199} \approx 14,25.$$

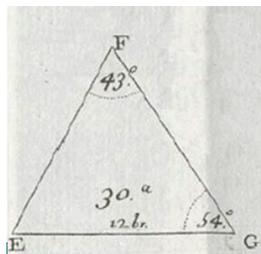


Figura 4. Ilustração do teorema 3 na obra de Azevedo Fortes [1728, estampa 5ª)].

⁵ Dada a semelhança entre as duas obras na resolução do problema da triangulação apresentaremos apenas o estudo efetuado no *Engenheiro Português*.

⁶ Note-se que, na obra de Azevedo Fortes, o seno de um arco, ou de um ângulo, é o segmento de reta traçado por um dos extremos do arco perpendicular ao diâmetro traçado pelo outro extremo do arco.

⁷ Veja-se FORTES [1728, p. 524].

No problema 2, Azevedo Fortes apresenta um método distinto para a resolução do triângulo apresentado neste teorema, vejamos:

Problema 2: Conhecendo-se os ângulos de um triângulo obliquângulo [Figura 4], e um dos lados, achar qualquer dos outros dois lados.

Tem-se que: $\log(\text{sen}\hat{F}) = 9,8337833$, $\log(\overline{EG}) = 1,0791812$ e $\log(\text{sen}\hat{G}) = 9,9079579$.

Daqui resulta que:

$$\log(\overline{EF}) = \log(\overline{EG}) + \log(\text{sen}\hat{G}) - \log(\text{sen}\hat{F})$$

$$\Leftrightarrow \log(\overline{EF}) = 1,1533555 \Leftrightarrow \overline{EF} \approx 14,3$$

A utilização dos logaritmos neste problema pretende transformar as multiplicações e divisões em somas e subtrações, talvez para evitar cálculos morosos e mais passíveis de erro. Contudo, a equivalência entre os dois métodos utilizados, facilmente deduzida por aplicação dos logaritmos aos dois lados da equação que traduz o teorema 3 e por aplicação das propriedades dos logaritmos, não é demonstrada na obra de Azevedo Fortes.

Este método bastante simples permite a resolução de qualquer triângulo conhecidos apenas dois ângulos, que seriam facilmente determinados com recursos aos objetos de medição, e um lado do triângulo, escolhido de modo a poder ser determinado. Assim, ao ficar-se a conhecer os outros dois lados, distâncias inacessíveis fisicamente ficavam determinadas com rigor.

O problema da triangulação na obra do Brigadeiro José Alpoim. O Brigadeiro José Alpoim trata da resolução de triângulos nas suas obras para bombeiros, sendo o tratamento nas duas obras muito semelhante em termos de conteúdos, havendo apenas ligeiras diferenças em termos de organização desses conteúdos⁸. As obras do Brigadeiro Alpoim têm a particularidade de serem escritas no formato “Pergunta-Resposta” como se de um exame efetivamente se tratasse. O tratado da trigonometria de Alpoim inicia com uma definição de trigonometria que coincide com a resolução de triângulos seguida das regras necessárias para essa resolução, a saber:

P. Que é trigonometria retilinea?

R. É uma parte da geometria que ensina o método de achar o valor dos lados e ângulos incógnitos de um triângulo retilineo.

P. Como se conhecem os tais lados e ângulos?

R. Facilmente se conhecem estas quantidades sabendo os princípios e analogias gerais.

P. Que analogias e princípios são esses?

R. Analogia é o mesmo que regra de três e os princípios são os seguintes: (...)

II. Em todo o triângulo, os lados têm entre si a mesma razão que os senos dos ângulos opostos.[ALPOIM, 1748, pp. 25-26]

Alpoim apresenta de seguida todos os casos de triângulos para serem resolvidos assim como as regras necessárias a essa resolução. São também dados vários exemplos de aplicações destas regras para a resolução d triângulos, embora neste capítulo todos os exemplos apresentados sejam teóricos e sem qualquer contextualização. Contudo, no capítulo seguinte, o *Tratado da Longimetria*, Alpoim volta a esta temática apresentando agora exemplos concretos de âmbito militar. A título de exemplo veja-se⁹ a resolução de um triângulo análoga à apresentada por Azevedo Fortes.

Medir uma distância determinada e acessível por uma só parte.

⁸ Dada a semelhança entre as duas obras utilizaremos como referência o *Exame de Bombeiros*.

⁹ Veja-se ALPOIM [1748, p. 63].

Suponhamos o alvo em B , além de um rio, e o queremos bombardear do ponto A acessível [Figura 5]; porém não sabemos se está dentro do alcance do morteiro.

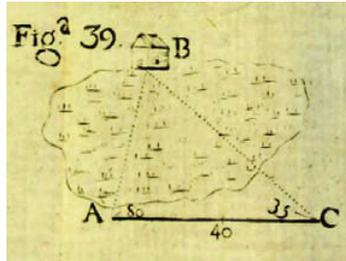


Figura 5. Ilustração do problema da medição de uma distância determinada e acessível por uma só parte.
(ALPOIM, 1748)

Tomemos a base AC de 40 braças, observe-se com o semicírculo o ângulo BAC que supomos de 80° e o ângulo ACB que será de 35° . Então o ângulo ABC será de 65° e teremos: $\log(\text{sen}\hat{B}) = 9,95727$, $\log(\overline{AC}) = 1,60206$ e $\log(\text{sen}\hat{C}) = 9,75859$. Então:

$$\begin{aligned}\log(\overline{AB}) &= \log(\overline{AC}) + \log(\text{sen}\hat{C}) - \log(\text{sen}\hat{B}) \\ \Leftrightarrow \log(\overline{AB}) &= 1,40338 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 25,5\end{aligned}$$

Este exemplo é ilustrativo da importância atribuída ao conhecimento efetivo não só das regras de resolução de problemas mas da sua efetiva aplicação em contexto militar.

Considerações finais. No século XVIII Português, o conhecimento das ferramentas matemáticas pelos engenheiros responsáveis pela elaboração científica da cartografia do reino, terá ajudado a que, em 1750, Portugal tenha conseguido satisfazer, no Tratado de Madrid, algumas das suas maiores pretensões no que respeita à redefinição das fronteiras na América do Sul.

Ao mesmo tempo, uma preparação dos militares portugueses, que não descurou a importância dos conhecimentos de matemática e as suas aplicações à arte da guerra, ajudou o império Português a defender as suas colónias dos ataques do império Espanhol.

Assim, o problema da triangulação é um exemplo concreto da importância da matemática para a engenharia militar. Seja em tempos de guerra ou de paz apenas uma preparação cuidada ao nível científico dos militares e engenheiros poderá conduzir à vitória.

BIBLIOGRAFIA

- ALPOIM, J. F. (1744) *Exame de Artilheiros*. Lisboa, Oficina de José António Plates.
- ALPOIM, J. F. (1745) *Tratado de Geometria dos Bombeiros*. MS.
- ALPOIM, J. F. (1748) *Exame de Bombeiros*. Madrid, Oficina de Francisco Martinezabad.
- CORTESÃO, J. (1950) *Alexandre de Gusmão e o Tratado de Madrid, Parte I-Tomo 1*. Rio de Janeiro. Ministério das Relações Exteriores, 9 vols.
- FORTES, M. A. (1728/1729) *O Engenheiro Português*. Lisboa, Oficina de Manuel Fernandes da Costa, 2 vols.
- FORTES, M. A. (1724) *Geometria Especulativa, Trigonometria Espherica, Modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares*. MS.