

# Cinemática de Mecanismos

## B. Centros Instantâneos de Rotação

**Paulo Flores**  
**J.C. Pimenta Claro**



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

Guimarães 2007

## ÍNDICE

<b>B. Centros Instantâneos de Rotação.....</b>	<b>1</b>
B.1. Definição.....	1
B.2. Propriedades dos Centros Instantâneos de Rotação.....	2
B.3. Movimento Puro de Rotação .....	5
B.4. Rolamento Puro .....	7
B.5. Tipos de Centros Instantâneos de Rotação .....	8
B.6. Cálculo do Número de Centros Instantâneos de Rotação.....	9
B.7. Localização dos Centros Instantâneos de Rotação .....	10
B.7.1. Simples Inspeção .....	10
B.7.2. Teorema dos Três Centros ou de Aronhold-Kennedy.....	10
B.7.3. Teorema de Normal Comum.....	11
B.7.4. Métodos Expeditos.....	11
B.8. Centros Instantâneos de Aceleração .....	14

*I really hate this damned machine; I wish that they would sell it.  
It never does quite what I want but only what I tell it.*

*In Fortune Database, Berkeley Unix*

## B. CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

### B.1. DEFINIÇÃO

Quando um corpo roda no espaço tridimensional em relação a outro corpo pode considerar-se a existência de um eixo comum de rotação, cuja posição relativamente aos dois corpos pode ou não variar de instante para instante. A estes eixos dá-se o nome de eixos instantâneos de rotação. Em movimentos planos, os eixos instantâneos de rotação são sempre perpendiculares ao plano do movimento e intersectam os corpos num ponto que se denomina centro instantâneo de rotação<sup>1</sup> (CIR).

Com efeito, centro instantâneo de rotação pode ser definido como sendo *o local instantâneo de um par de pontos coincidentes e pertencentes a corpos diferentes, para os quais a velocidade absoluta é igual*. De outro modo, o conceito de centro instantâneo de rotação pode ser enunciado como sendo *o local de um par de pontos coincidentes de dois corpos diferentes, para os quais a velocidade aparente de um dos pontos é nula quando o observador se situa no outro corpo, ou seja, é nula a velocidade relativa dos dois pontos*. Como consequência, no instante considerado, existe apenas movimento puro de rotação entre os dois corpos em torno do centro instantâneo de rotação.

Em suma, um centro instantâneo de rotação é um ponto comum a dois corpos, é um ponto para o qual não existe velocidade relativa, e é um ponto de um corpo em relação ao qual o corpo roda relativamente a outro corpo. Assim, por exemplo, dois corpos constrangidos por uma junta cinemática de rotação têm um centro instantâneo de rotação que coincide com o centro geométrico da junta, como se ilustra na figura B.1. O centro instantâneo de rotação  $O_{23}$  (leia-se centro *ó-dois-três*) é o ponto comum aos corpos 2 e 3, e é, no instante considerado, o ponto do corpo 2 em relação ao qual o corpo 3 roda. As designações  $O_{23}$  e  $O_{32}$  são equivalentes, isto é, referem-se ao mesmo centro instantâneo de rotação.

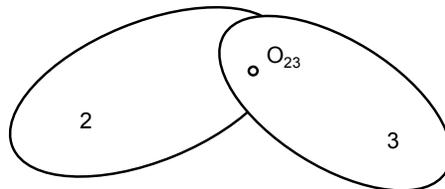


Figura B.1 – Exemplo de um centro instantâneo de rotação: junta de rotação.

<sup>1</sup> Durley chama aos centros instantâneos de rotação centros virtuais ou centroides. Outros autores usam ainda as designações centros instantâneos de velocidade, pólos ou simplesmente centros.

## B.2. PROPRIEDADES DOS CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

Sabe-se que a velocidade de um ponto de um corpo rígido<sup>2</sup> relativamente a outro ponto do mesmo corpo tem a direcção perpendicular ao segmento de recta que une os dois pontos considerados. Este teorema pode ser demonstrado recorrendo ao método de redução ao absurdo, *i.e.*, provando que a velocidade relativa de dois pontos de um corpo rígido não pode ter componente segundo a direcção do segmento que os une.

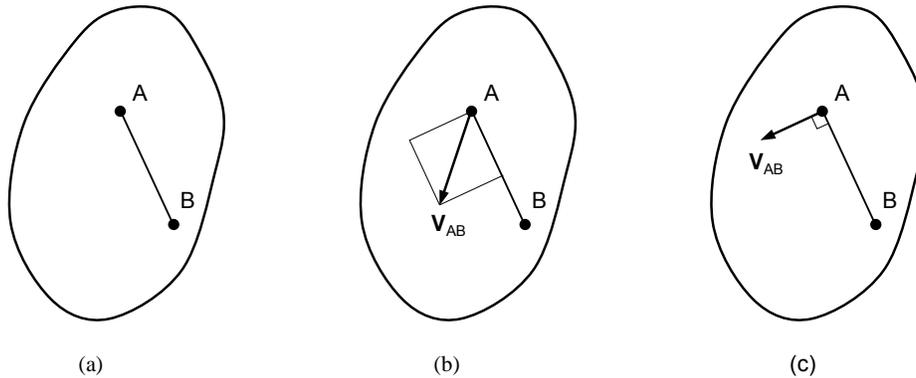


Figura B.2 – A direcção da velocidade relativa entre dois pontos de um corpo rígido é sempre perpendicular ao segmento que os une.

Na figura B.2a está representado um corpo rígido no qual se consideram os pontos  $A$  e  $B$ . Admitindo que a velocidade de  $A$  em relação a  $B$ , ou seja,  $\mathbf{V}_{AB}$ , é tal como se ilustra na figura B.2b. Assim, esta velocidade pode ser decomposta em duas direcções perpendiculares entre si, sendo uma delas a direcção do segmento de recta que une os pontos  $A$  e  $B$ . Todavia, como esta última componente não é nula significa que os pontos  $A$  e  $B$  se estão a aproximar (ou a afastar), o que é contrário ao conceito de corpo rígido. Com efeito, a velocidade relativa entre  $A$  e  $B$  não pode ter componente segundo a direcção do segmento que une estes dois pontos, mas sim, e apenas, segunda a sua perpendicular, como se ilustra na figura B.2c.

Considerando, agora, os corpos 1 e 2 representados na figura B.3, em que o corpo 2 está fixo e o corpo 1 se move no plano em relação ao corpo 2. Os pontos  $A$  e  $B$ , pertencentes ao corpo 1, têm velocidades  $\mathbf{V}_A$  e  $\mathbf{V}_B$ , respectivamente. Considerando ainda as rectas  $op$  e  $qr$ , que passam pela origem dos vectores das velocidades  $\mathbf{V}_A$  e  $\mathbf{V}_B$ , e são perpendiculares às respectivas linhas de acção, então todos os pontos pertencentes a  $op$ , em relação ao corpo 2, têm velocidades cujos vectores são perpendiculares a  $op$ . O mesmo acontece ao ponto  $I$  de intersecção das duas rectas.

Do mesmo modo, todos os pontos pertencentes à recta  $qr$  têm velocidades cujos vectores são perpendiculares a  $qr$ . O mesmo sucedendo ao ponto  $I$ . Contudo, como as velocidades dos pontos  $A$  e  $B$  são absolutas, uma vez que o corpo 2 está fixo, o ponto  $I$  teria velocidade segundo duas direcções distintas, o que é de todo impossível atendendo ao conceito de corpo rígido. Conclui-se, portanto, que a velocidade do ponto  $I$  tem de ser nula, ou seja, é o ponto do corpo 2 em torno do qual o corpo 1 roda. Este ponto é, por definição, o centro instantâneo de rotação dos dois corpos.

<sup>2</sup> Deve referir-se que num corpo rígido ou inelástico as distâncias entre os seus pontos permanecem constantes quando sujeito à acção de uma acção exterior. Um corpo rígido conserva, portanto, a forma e a dimensão durante o movimento.

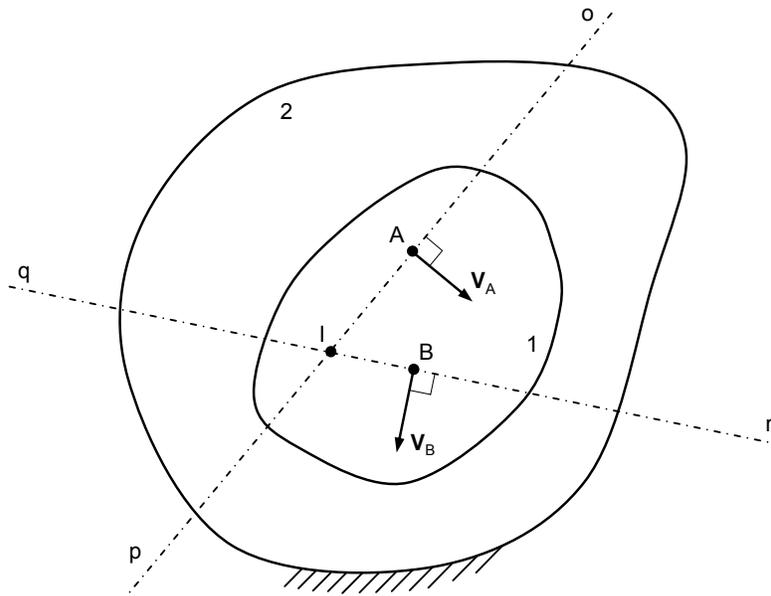


Figura B.3 – Centro instantâneo de rotação de dois corpos rígidos em movimento relativo.

A análise é em tudo semelhante no caso de nenhum dos corpos ser fixo. Nesta situação, no entanto, o centro instantâneo de rotação seria o ponto em torno do qual ambos os corpos não teriam movimento relativo.

Com efeito, de acordo com o que acaba de ser exposto podem tirar-se as seguintes conclusões relativamente aos centros instantâneos de rotação:

- Centro instantâneo de rotação é um ponto de um corpo em torno do qual roda outro corpo;
- Um centro instantâneo de rotação tem a mesma velocidade, quer se considere como pertencente a um ou outro corpo;
- O conhecimento da localização do centro instantâneo de rotação permite calcular imediatamente a velocidade de qualquer ponto do corpo;
- Inversamente, conhecidas as velocidades de dois quaisquer pontos de um corpo, a localização do centro instantâneo de rotação é determinada pela intersecção das rectas normais aos vectores velocidade desses mesmos pontos e que passam pela origem dos vectores.

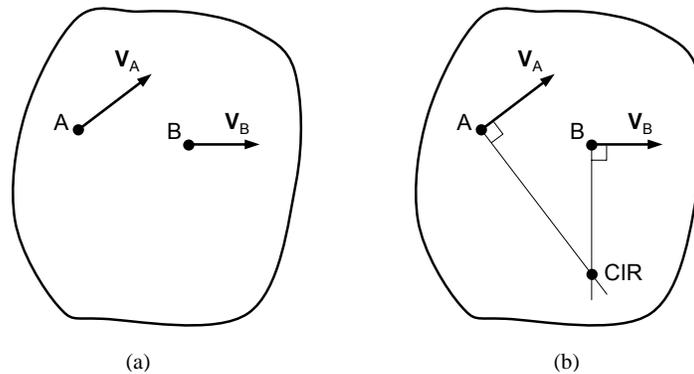


Figura B.4 – Localização do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento, sendo conhecidas as velocidades de dois dos seus pontos.

Quando as velocidades de dois pontos de um corpo rígido são conhecidas, então a localização do centro instantâneo de rotação obtém-se pela intersecção das rectas tiradas perpendicularmente a cada um dos vectores, como se ilustra na figura B.4.

Quando as velocidades têm a mesma direcção, isto é, os vectores  $V_A$  e  $V_B$  são paralelos, a localização do centro instantâneo de rotação depende do módulo das velocidades. Assim, se as velocidades forem diferentes em módulo, o centro instantâneo de rotação situa-se na intersecção da normal comum desenhada a partir dos dois vectores velocidade, com a recta que passa pelos *terminus* dos vectores velocidade, como se ilustra na figura B.5.

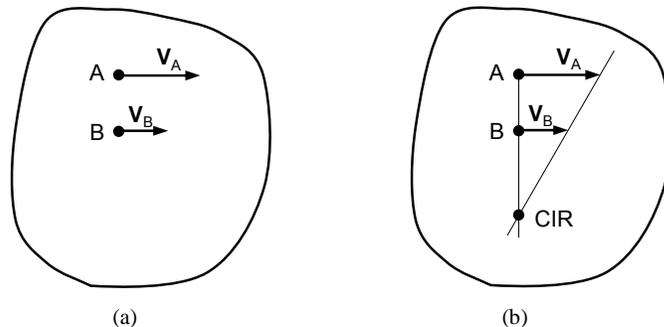


Figura B.5 – Localização do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento, sendo paralelas as direcções das velocidades de dois dos seus pontos.

Quando as velocidades têm a mesma direcção e o mesmo módulo, a localização do centro instantâneo de rotação está situada no infinito, significando que o corpo não descreve um movimento de rotação, mas sim um movimento de translação, como o que se representa na figura B.6.

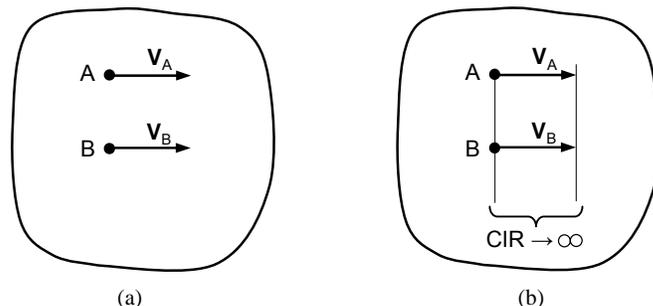


Figura B.6 – Localização do centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento, sendo as velocidades de dois dos seus pontos iguais em módulo e direcção.

### B.3. MOVIMENTO PURO DE ROTAÇÃO

Pelo que foi apresentado anteriormente, pode observar-se que utilizando o conceito de centro instantâneos de rotação, qualquer movimento geral ou misto pode ser considerado como sendo um movimento puro de rotação em cada instante, daí se torna evidente a importância dos centros instantâneos de rotação. A possibilidade de descrever um qualquer movimento como sendo um movimento puro de rotação simplifica sobremaneira a análise cinemática de mecanismos, quer os mais simples, quer os mais complexos. Com efeito, a chave do sucesso na utilização do conceito de centro instantâneo de rotação na cinemática de mecanismos passa, em primeiro lugar, pela sua localização e, posteriormente, pelo correcto cálculo de velocidades.

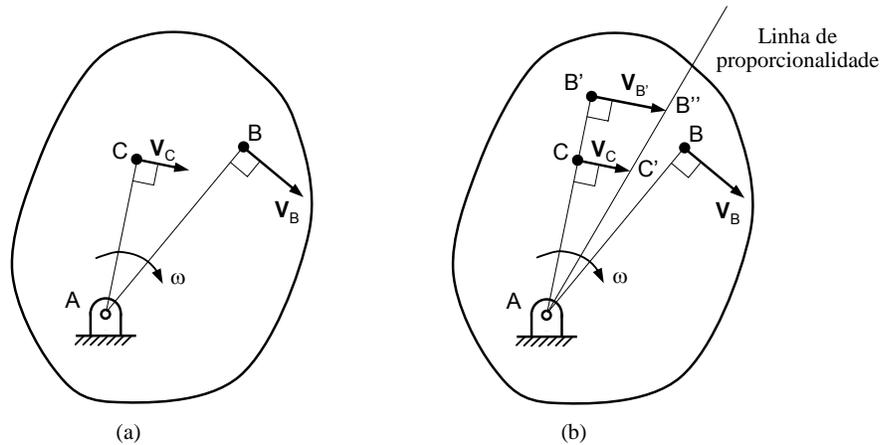


Figura B.7 – Velocidades de pontos que pertencem a um corpo em movimento de rotação.

Com o intuito de compreender profundamente o conceito de centro instantâneo de rotação, é necessário, em primeiro lugar, considerar alguns princípios básicos associados ao movimento puro de rotação. Assim, para um corpo rígido em rotação, a velocidade de um qualquer dos seus pontos é tangente à trajectória descrita por esse ponto e tem o mesmo sentido que o sentido de rotação do corpo. Considerando, por exemplo, o ponto  $B$  do corpo ilustrado na figura B.7a, se o ponto  $A$  for o eixo de rotação do corpo, sabe-se que a velocidade do ponto  $B$  é dada por,

$$v_B = \omega AB \quad (\text{B.1})$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular do corpo e  $AB$  é o raio de rotação do ponto  $B$ . Então, a velocidade angular do corpo pode ser expressa como,

$$\omega = \frac{v_B}{AB} \quad (\text{B.2})$$

De modo análogo, a velocidade do ponto  $C$  do mesmo corpo é dada por,

$$v_C = \omega AC \quad (\text{B.3})$$

e, conseqüentemente,

$$\omega = \frac{v_C}{AC} \quad (\text{B.4})$$

Das equações (B.2) e (B.4) vem que,

$$\frac{v_B}{AB} = \frac{v_C}{AC} \quad (\text{B.5})$$

ou ainda,

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{B.6})$$

o que significa que  $v_B$  é proporcional a  $v_C$ , tal como  $AB$  é proporcional a  $AC$ .

As velocidades  $\mathbf{V}_B$  e  $\mathbf{V}_C$  estão representadas graficamente na figura B.7b, em que se pode observar a sua proporcionalidade em relação ao centro de rotação, pela rotação de  $\mathbf{V}_B$  em torno de  $A$  até que o ponto  $B$  alcance a posição  $B'$  na linha radial  $AC$ . A linha de proporcionalidade pode ser construída a partir de  $A$  e passando nos *terminus* dos vectores  $\mathbf{V}_C$  e  $\mathbf{V}_{B'}$ , como se ilustra na figura B.7b. Da semelhança entre os triângulos  $ACC'$  e  $AB'B''$  observam-se as seguintes relações geométricas,

$$\frac{B'B''}{CC'} = \frac{AB'}{AC} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{v_{B'}}{v_C} = \frac{AB'}{AC} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{B.9})$$

Pelo que acaba de ser exposto, podem ser tiradas as seguintes ilações:

- A velocidade linear de um ponto de um corpo em rotação é sempre tangente à sua trajectória e perpendicular à linha radial que une esse ponto ao centro de rotação;
- A direcção da velocidade é sempre a mesma da direcção de rotação do corpo;
- O módulo da velocidade é sempre proporcional à distância do ponto considerado ao centro de rotação.

## B.4. ROLAMENTO PURO

Um outro caso importante de movimento plano é o movimento de uma roda ou disco que rola sem escorregar sobre uma superfície plana. Neste caso, coexistem as propriedades associadas ao movimento de rotação e de translação, tratando-se, por isso, de um movimento geral ou misto. A figura B.8 ilustra a decomposição deste movimento geral como sendo a soma dos movimentos de rotação e de translação.

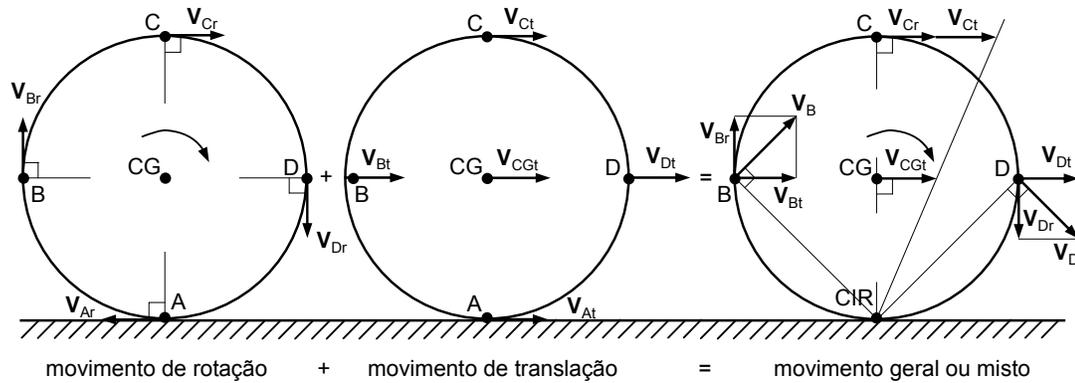


Figura B.8 – Roda em rolamento puro: velocidades rotacionais ( $r$ ) e translacionais ( $t$ ).

Quando uma roda ou um disco rola sem escorregar, verifica-se que no ponto de contacto com a superfície não existe movimento relativo. Este ponto é, portanto, um centro instantâneo de rotação. Da análise da figura B.8, pode observar-se que:

- É nula a velocidade do ponto  $A$  ( $CIR$ );
- A direcção da velocidade de qualquer ponto da roda é sempre perpendicular ao segmento de recta que o une ao ponto  $A$ ;
- A magnitude da velocidade de qualquer ponto é proporcional à distância deste ao ponto  $A$ ;

## B.5. TIPOS DE CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

Os centros instantâneos de rotação podem ser fixos, permanentes ou imaginários.

Os centros instantâneos de rotação fixos, também denominados centros do tipo 1, são, em geral, eixos de rotação nos mecanismos, isto é, são pontos estacionários num corpo fixo em relação ao qual roda outro corpo. Os centros instantâneos de rotação  $O_{12}$  e  $O_{14}$  do mecanismo biela-manivela representado na figura B.9 são exemplos evidentes de centros instantâneos de rotação fixos.

Os centros instantâneos de rotação permanentes são pontos comuns a dois corpos cuja velocidade é a mesma, quer se considerem pertencentes a um ou outro corpo, tal como nas juntas cinemáticas de rotação. O vocábulo permanente implica que a posição relativa entre os corpos é sempre a mesma, independentemente da configuração geométrica do mecanismo. Os centros instantâneos de rotação permanentes são vulgarmente designados centros do tipo 2. Os centros  $O_{23}$  e  $O_{34}$  do mecanismo biela-manivela da figura B.9 são centros instantâneos de rotação do tipo 2 ou permanentes.

Os centros instantâneos de rotação imaginários, também chamados centros do tipo 3, são pontos que, num dado instante, apresentam as mesmas características dos centros do tipo 1 ou do tipo 2. Estes pontos podem pertencer aos corpos de um dado mecanismo, ou estar situados fora dos corpos. Os centros  $O_{13}$  e  $O_{24}$  do mecanismo biela-manivela da figura B.9 exemplificam centros instantâneos de rotação do tipo 3 ou imaginários. O centro  $O_{24}$ , por exemplo, tem a mesma velocidade que o centro  $O_{34}$ , e representa o ponto do corpo 2 em relação ao qual o corpo 4 roda, no instante considerado.

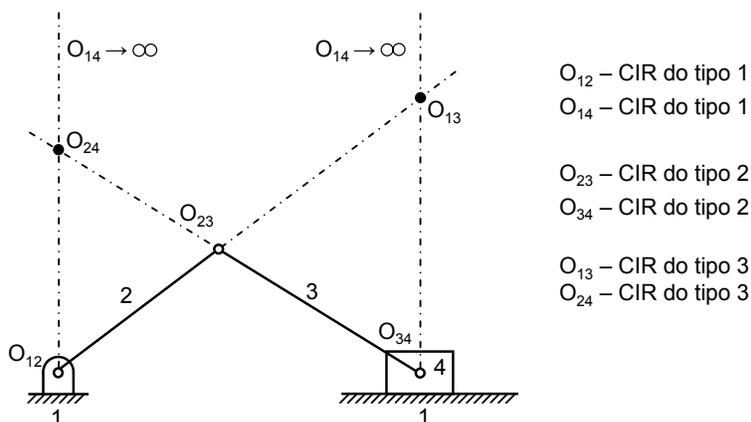


Figura B.9 – Centros instantâneos de rotação do mecanismo biela-manivela.

Os centros instantâneos de rotação do tipo 1 e 2 podem facilmente ser localizados por simples inspeção ou observação directa do mecanismo em análise, ao passo que a localização dos centros do tipo 3 exige métodos de análise adicionais.

Deve referir-se que o centro instantâneo de rotação  $O_{14}$  é indeterminado, o que significa que, na verdade, o corpo 4 não roda em relação ao corpo 1, mas descreve um movimento de translação rectilínea. Este tipo de movimento é, de facto, um movimento de rotação em torno de um eixo localizado no infinito. Os centros instantâneos de rotação situados no infinito podem ser representado por uma linha recta perpendicular à trajectória rectilínea descrita, como ilustra a figura B.9.

## B.6. CÁLCULO DO NÚMERO DE CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

Num mecanismo constituído por  $n$  corpos, há  $n-1$  centros instantâneos de rotação em relação a um determinado corpo. Para os  $n$  corpos há, por conseguinte, um total de  $n(n-1)$  centros instantâneos de rotação. Contudo, como para o mesmo centro há duas designações distintas, isto é,  $O_{ij}$  é equivalente  $O_{ji}$ , então, o número total de centros instantâneos de rotação num dado mecanismo formado por  $n$  corpos pode ser calculado como sendo o número de combinações binárias que se podem estabelecer entre os seus corpos. Com efeito, o número de centros instantâneos de rotação que existe num mecanismo é dado pela seguinte expressão,

$$N_{CIR} = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \quad (\text{B.10})$$

em que  $n$  é número de corpos do mecanismo em análise.

Da análise da equação (B.10) facilmente se observa que o número de centros instantâneos de rotação aumenta rapidamente com o número de corpos, como se mostra na figura B.10.

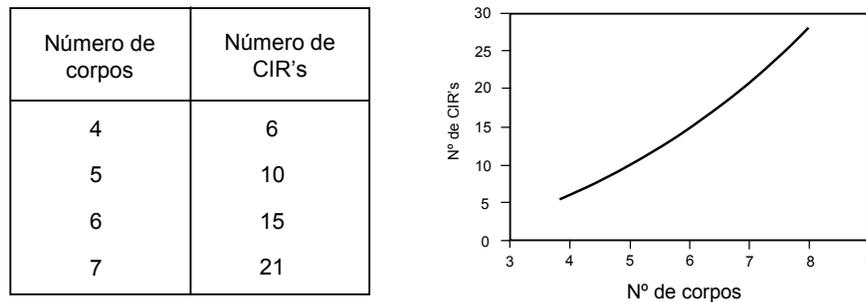


Figura B.10 – Variação do número de centros instantâneos de rotação com o número de corpos de um mecanismo.

## B.7. LOCALIZAÇÃO DOS CENTROS INSTANTÂNEOS DE ROTAÇÃO

### B.7.1. Simples Inspeção

Um dos métodos utilizados na determinação do local dos centros instantâneos de rotação baseia-se na observação do mecanismo em análise. Assim, na figura B.11 estão representados alguns casos evidentes, em que a localização dos centros instantâneos de rotação é feita por simples inspeção ou observação directa.

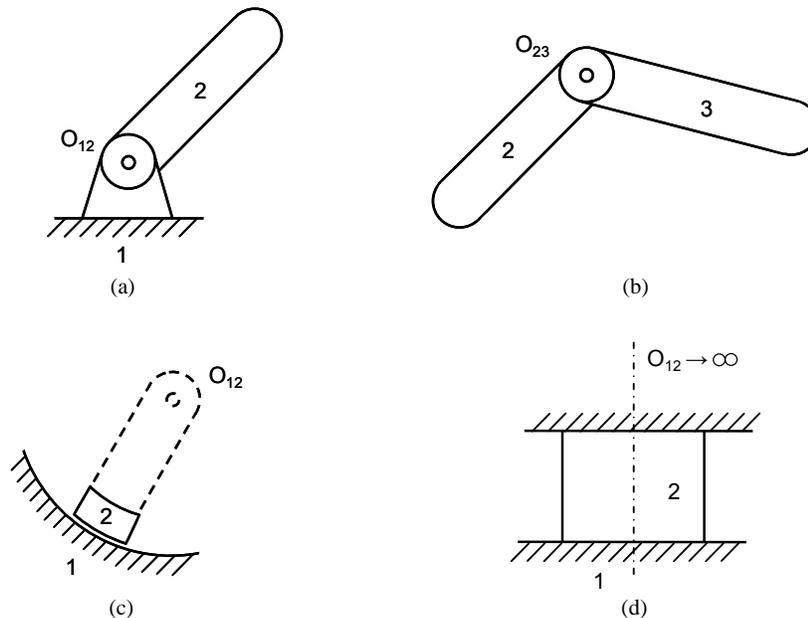


Figura B.11 – Exemplos em que a localização dos centros instantâneos de rotação se faz por simples inspeção ou observação directa.

### B.7.2. Teorema dos Três Centros ou de Aronhold-Kennedy

O teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy<sup>3</sup> estabelece que, “quando três corpos têm movimento relativo entre si, existem três centros instantâneos de rotação situados sobre a mesma linha recta”. Este teorema pode ser demonstrado recorrendo à redução ao absurdo.

Considere-se o sistema ilustrado na figura B.12, em que a forma geométrica dos corpos 2 e 3 é arbitrária. Da aplicação da equação (B.10) observa-se que no sistema existem três centros instantâneos de rotação. Por simples observação directa podem localizar-se os centros  $O_{12}$  e  $O_{13}$ . Pelo teorema acima enunciado, sabe-se que o terceiro centro,  $O_{23}$ , se situa na linha recta que une os centros  $O_{12}$  e  $O_{13}$ . Admitindo que isto não é verdade, e considerando que o ponto de contacto,  $P$ , entre os corpos 2 e 3 é o centro  $O_{23}$ , então  $\mathbf{V}_{P2}$  e  $\mathbf{V}_{P3}$  são as velocidades do ponto  $P$  quando considerado como pertencente aos corpos 2 e 3, respectivamente. Assim, facilmente

<sup>3</sup> O teorema dos três centros ou teorema do Aronhold-Kennedy, foi primeiramente desenvolvido por Aronhold em 1872 e, posteriormente, por Kennedy em 1886. Os trabalhos de Aronhold e de Kennedy foram realizados de forma independente. Na literatura alemã é comum encontrar-se a referência a este teorema, como o teorema de Aronhold, ao passo que, na literatura anglo-saxónica encontra-se a referência ao teorema de Kennedy.

se observa que estes dois vectores velocidade têm direcções diferentes, facto que é inconsistente com a definição de centro instantâneo de rotação. Esta contradição para as velocidades  $V_{P2}$  e  $V_{P3}$  verifica-se para todo e qualquer ponto escolhido, a menos que este se situe na linha recta definida pelos centros  $O_{12}$  e  $O_{13}$ .

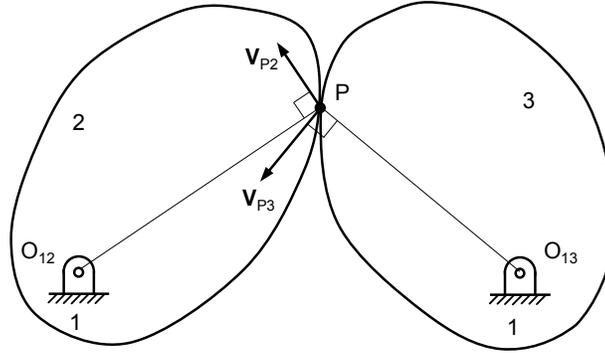


Figura B.12 – Teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy.

### B.7.3. Teorema de Normal Comum

O teorema da normal comum enuncia-se do seguinte modo, “o centro instantâneo de rotação de dois corpos em contacto directo segundo um ponto, situa-se na normal comum aos dois corpos no ponto de contacto”. Combinando este teorema com o anteriormente enunciado, torna-se possível localizar o centro instantâneo de rotação  $O_{23}$  em falta no sistema apresentado na secção anterior. Na figura B.13, está ilustrado o mesmo sistema, em que está já incluída a localização do centro  $O_{23}$ .

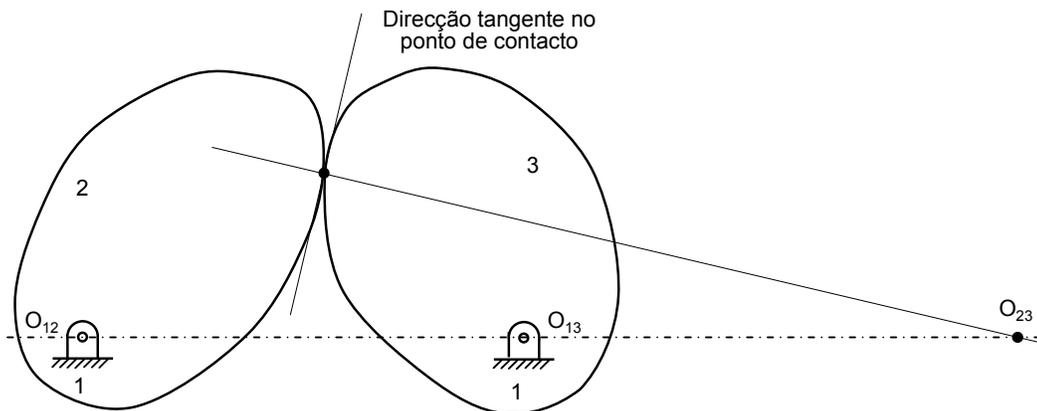


Figura B.13 – Aplicação do teorema da normal comum e do teorema dos três centros.

### B.7.4. Métodos Expeditos

A determinação do número de centros instantâneos de rotação, bem como a sua localização baseia-se nos conceitos apresentados nas secções anteriores. Há, contudo, outros métodos, simples e expeditos, que permitem localizar os centros instantâneos de rotação, os quais são apresentados na presente secção. Com efeito, considere-se o mecanismo representado na figura B.14, ao qual aplicando a equação (B.10) resulta que o número de centros instantâneos de rotação é igual a seis, e que são  $O_{12}$ ,  $O_{13}$ ,  $O_{14}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{24}$  e  $O_{34}$ .

Observando este mecanismo de quatro barras, é possível, por simples inspecção directa, localizar os centros  $O_{12}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{34}$  e  $O_{14}$ , já representados na figura B.14, faltando, assim, determinar a localização dos centros  $O_{13}$  e  $O_{24}$ .

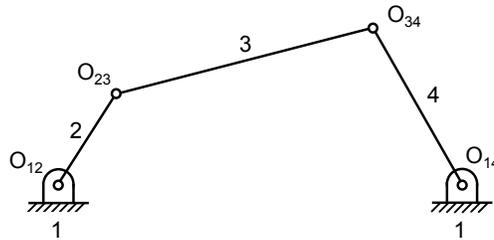


Figura B.14 – Mecanismo de quatro barras: localização dos centros instantâneos de rotação por simples inspecção directa.

Agrupando as barras 1, 2 e 3, e as barras 1, 3 e 4, tem-se, respectivamente, os seguintes conjuntos de centros  $O_{12}$ ,  $O_{23}$  e  $O_{13}$ , e  $O_{13}$ ,  $O_{34}$  e  $O_{14}$ . Pelo teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy, sabe-se que os centros  $O_{12}$ ,  $O_{23}$  e  $O_{13}$  estão situados na mesma linha recta. O mesmo acontece aos centros  $O_{13}$ ,  $O_{34}$  e  $O_{14}$ . Assim, observa-se que o centro  $O_{13}$ , centro comum aos dois conjuntos de centros acima definidos, se situa no ponto de intersecção das rectas definidas pelos centros  $O_{12}O_{23}$  e  $O_{34}O_{14}$ , como se ilustra na figura B.15.

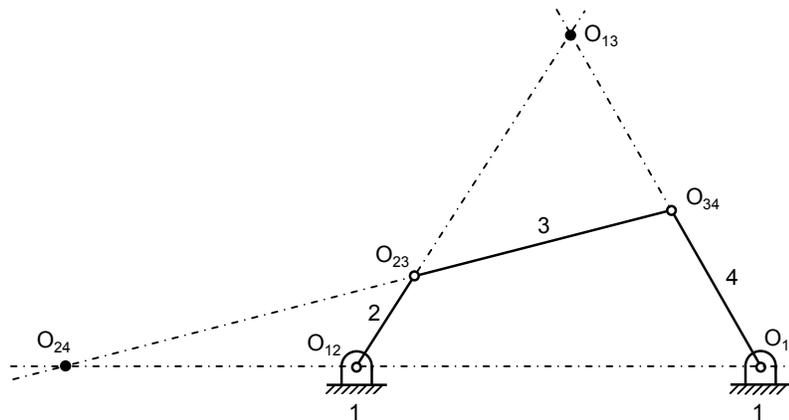


Figura B.15 – Mecanismo de quatro barras: localização dos centros instantâneos de rotação aplicando o teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy.

Analogamente, agrupando as barras 2, 3 e 4, e as barras 1, 2 e 4, observa-se a existência dos seguintes conjuntos de centros instantâneos de rotação  $O_{23}$ ,  $O_{34}$  e  $O_{24}$ , e  $O_{12}$ ,  $O_{24}$  e  $O_{14}$ , respectivamente. Do mesmo modo que anteriormente, o centro  $O_{24}$  fica situado no ponto de intersecção das rectas definidas pelos pontos  $O_{23}O_{34}$  e  $O_{12}O_{14}$ , como se ilustra na figura B.15.

Um processo alternativo, simples e expedito que permite determinar a localização dos centros instantâneos de rotação é o que em seguida se expõe. Em primeiro lugar representam-se os números correspondentes a cada uma das barras que constituem o mecanismo em análise. A disposição dos números deve ser em forma de polígono, como ilustra a figura B.16a. De seguida, representam-se os centros cuja localização é conhecida por simples inspecção, unindo os números correspondentes às respectivas

barras com um segmento de recta contínuo, como mostra a figura B.16b. Para o mecanismo de quatro barras os centros instantâneos de rotação conhecidos, por simples inspecção, são os centros  $O_{12}$ ,  $O_{23}$ ,  $O_{34}$  e  $O_{14}$ . Deve observar-se que os segmentos que ainda não estão representados são os segmentos comuns a dois triângulos, representados a traço interrompido. Da figura B.16c verifica-se que o segmento relativo ao centro  $O_{13}$  é o lado comum aos triângulos 123 e 134, pelo que o centro  $O_{13}$  se pode obter pela intersecção das rectas  $O_{12}O_{23}$  e  $O_{14}O_{34}$ . De modo análogo, verifica-se que o centro  $O_{24}$  se obtém pela intersecção das rectas  $O_{12}O_{14}$  e  $O_{23}O_{34}$ .

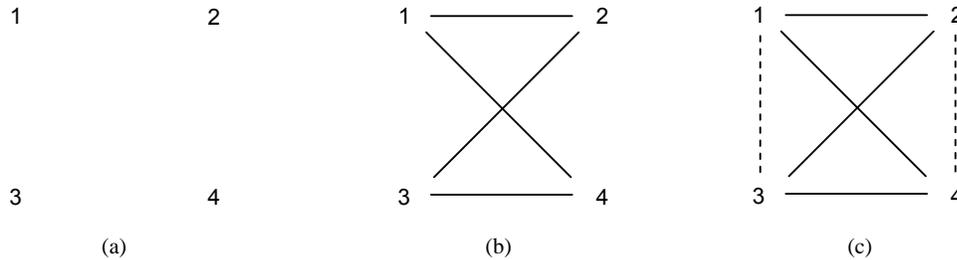


Figura B.16 – Representação de um método expedito que permite determinar a localização dos centros instantâneos de rotação em mecanismos articulados.

Considerando, agora, o mecanismo came-seguidor da figura B.17, verifica-se que este mecanismo tem três centros instantâneos de rotação, a saber,  $O_{12}$ ,  $O_{13}$  e  $O_{23}$ . Por simples inspecção directa, facilmente se observa que o centro  $O_{12}$  se situa no centro de rotação da came. É também evidente que, descrevendo o seguidor movimento de translação rectilínea, o centro instantâneo de rotação  $O_{13}$  se situa a uma distância infinita segunda a perpendicular à direcção o movimento. Pelo teorema dos três centros sabe-se que o centro instantâneo de rotação  $O_{23}$  está situado na linha recta que une os centros  $O_{12}$  e  $O_{13}$ , e pelo teorema da normal comum, o centro  $O_{23}$  está localizado na normal tirada no ponto de contacto. Neste caso a normal é representada por uma linha vertical, cuja intersecção com a linha recta horizontal determina a localização do centro instantâneo de rotação  $O_{23}$ .

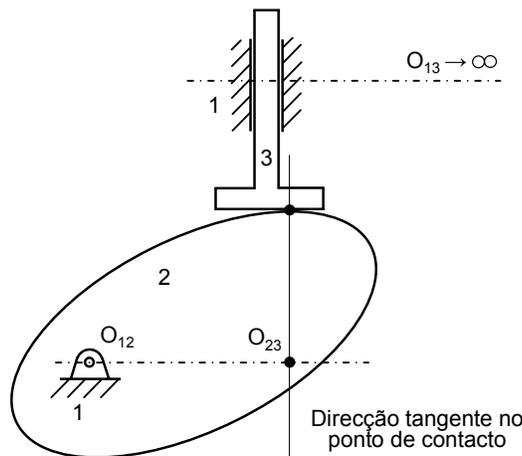


Figura B.17 – Mecanismo came-seguidor: localização dos centros instantâneos de rotação por simples inspecção directa e pelo teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy combinado com o teorema da normal comum.

## B.8. CENTROS INSTANTÂNEOS DE ACELERAÇÃO

Da mesma forma que num mecanismo podem ser localizados centros instantâneos de rotação ou de velocidade, isto é, os pontos para os quais a velocidade relativa é nula, é também possível localizar os centros instantâneos de aceleração (CIA) ou centros de aceleração. Embora a sua utilização prática na análise de mecanismos seja bastante reduzida, é importante abordar, ainda que de forma simples, este conceito.

Com efeito, centro instantâneo de aceleração pode definir-se como sendo *o local instantâneo de dois pontos coincidentes e pertencentes a corpos rígidos diferentes, para os quais a aceleração absoluta é igual*. Quando um dos corpos está fixo e outro descreve um movimento plano, o centro instantâneo de rotação é o ponto do corpo que se move, para o qual a aceleração absoluta, para o instante considerado, é nula.

Na figura B.18 está representado um corpo rígido, em que o ponto  $B$  é o centro instantâneo de aceleração, para o qual a aceleração absoluta é nula e cuja localização é desconhecida. Considerando que o ponto  $A$  tem aceleração absoluta  $\mathbf{A}_A$  e que  $\omega$  e  $\alpha$  representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração angulares do corpo, então, a diferença de acelerações entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por,

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A - \omega^2 \mathbf{R}_{BA} + \alpha \times \mathbf{R}_{BA} = \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

Resolvendo a equação (B.11) em ordem a  $\mathbf{A}_A$ , vem que,

$$\mathbf{A}_A = \omega^2 r_{BA} \hat{\mathbf{r}}_{BA} - \alpha r_{BA} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}) \quad (\text{B.12})$$

Atendendo a que os vectores  $\hat{\mathbf{r}}_{BA}$  e  $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}}_{BA}$  são perpendiculares, os dois termos do segundo membro da equação (B.12) representam as componentes rectangulares do vector  $\mathbf{A}_A$ , como se ilustra na figura B.18.

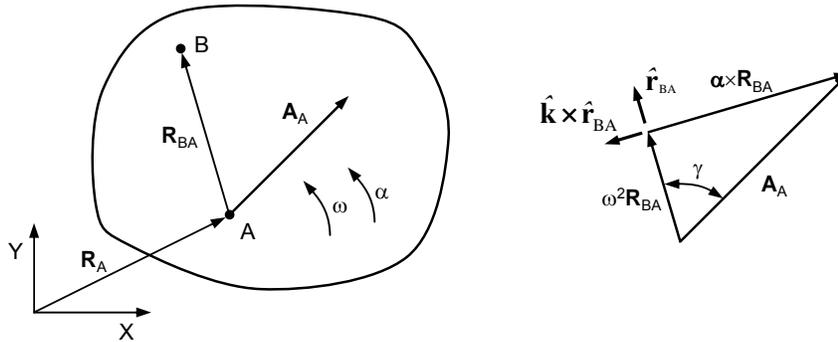


Figura B.18 – Centro instantâneo de aceleração.

Da observação da figura B.18, a direcção e a magnitude do vector  $\mathbf{R}_{BA}$  podem ser calculadas de acordo com as seguintes expressões,

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha}{\omega^2} \quad (\text{B.13})$$

$$r_{BA} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{a_A \cos \gamma}{\omega^2} \quad (\text{B.14})$$

em que  $a_A$  é o módulo da aceleração  $\mathbf{A}_A$ .

Da análise da equação (B.14) pode concluir-se que a distância de um qualquer ponto de um corpo rígido ao centro instantâneo de aceleração pode ser calculada se a magnitude da aceleração desse ponto for conhecida.

A localização dos centros instantâneos de aceleração é uma tarefa bastante trabalhosa, especialmente em mecanismos que apresentam topologias complexas. Há, contudo, métodos gráficos que permitem, de forma simples e expedita, determinar a localização dos centros instantâneos de aceleração, entre os quais se destaca o método das quatro<sup>4</sup> circunferências. Este método, é particularmente útil quando se conhecem duas acelerações absolutas de dois pontos do mesmo corpo, como é caso dos pontos  $A$  e  $B$  da figura B.19 que pertencem à mesma barra. Assim, o procedimento gráfico conducente à localização do centro instantâneo de aceleração pode ser resumido nos seguintes passos,

- Prolongar os vectores das acelerações  $\mathbf{A}_A$  e  $\mathbf{A}_B$ , até que estes se intersectem no ponto  $I$ ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $I$ ;
- Desenhar a circunferência que passa pelos pontos definidos pelos *terminus* dos vectores  $\mathbf{A}_A$  e  $\mathbf{A}_B$  e pelo ponto  $I$ ;
- Intersectar as duas circunferências anteriormente desenhadas, resultando daí o centro instantâneo de aceleração ( $CIA$ ).

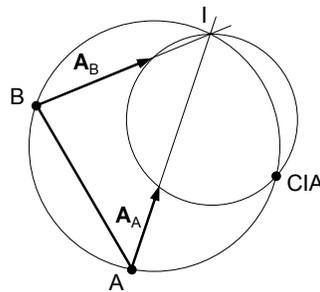


Figura B.19 – Localização do centro instantâneo de aceleração utilizando o método das quatro circunferências.

<sup>4</sup> Refira-se, a título de curiosidade que, apesar do nome adoptado, neste método apenas são usadas duas circunferências.