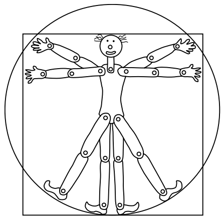


Cinemática de Mecanismos

A. Cálculo Vectorial

Paulo Flores
J.C. Pimenta Claro

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Guimarães 2007

ÍNDICE

It is the glory of geometry that from so few principles,
fetched from without, it is able to accomplish so much.

Isaac Newton

A. CÁLCULO VECTORIAL

A.1. GENERALIDADES

Em mecânica há dois tipos de grandezas, a saber, as escalares e as vectoriais.

As primeiras são caracterizadas por uma quantidade numérica, que representa a magnitude ou módulo da grandeza, seguida de uma unidade adequada. Exemplos de grandezas escalares são a massa de um corpo, o tempo, a temperatura, entre outras.

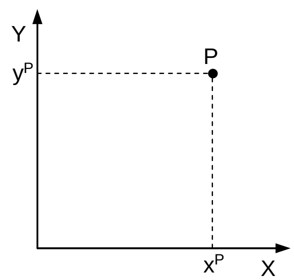
As grandezas físicas cuja completa especificação exige, para além de um valor numérico, o conhecimento de uma direcção e sentido de actuação denominam-se grandezas vectoriais. Assim, por exemplo, o deslocamento de um corpo só fica completamente especificado pela caracterização da distância percorrida e pela direcção e sentido associados à trajectória. As grandezas vectoriais devem ser estudadas com base na álgebra vectorial, como, por exemplo, a resultante de dois vectores pode ser obtida pela regra do paralelogramo de vectores.

A caracterização geométrica do movimento e das forças transmitidas nos sistemas mecânicos constitui o cerne da análise cinemática e dinâmica. Com efeito, a análise vectorial pode ser aplicada, quer no estudo de deslocamentos, velocidades e acelerações, quer no estudo de forças e momentos transmitidos pelos elementos que constituem os sistemas mecânicos.

A representação vectorial forma a base matemática do estudo cinemático e dinâmico de mecanismos, bem como de outras áreas da mecânica. De facto, a análise vectorial permite obter, de forma simples e conveniente, expressões matemáticas que de outro modo seria difícil, se não mesmo impossível, de traduzir em linguagem científica.

A.2. TIPOS DE COORDENADAS

Os tipos de coordenadas mais frequentemente utilizados na álgebra vectorial aplicada ao estudo cinemático e dinâmico de mecanismos articulados são as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares, como ilustra, esquematicamente, a figura A.1. As coordenadas cartesianas, também denominadas rectangulares, de um ponto são as componentes x^P e y^P da posição desse ponto, ao passo que em coordenadas polares o mesmo ponto é localizado pela distância r e pelo ângulo θ.



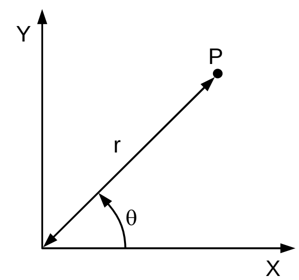


Figura A.1 – Tipos de coordenadas: (a) Cartesianas; (b) Polares.

A.3. NOTAÇÃO VECTORIAL

Convencionalmente, os vectores são representados por setas que unem os seus pontos inicial e final. Na figura A.2 está representado o vector $\vec{a}$ que começa no ponto A e termina no ponto B, cuja magnitude é igual a a.

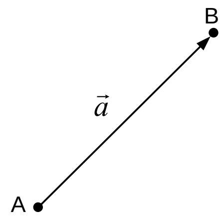


Figura A.2 – Representação convencional de um vector.

Por simplicidade e comodidade, no presente trabalho, os vectores são representados por uma letra maiúscula em negrito[1], **R**, em vez da representação convencional, $\vec{r}$, como se ilustra na figura A.3. O módulo ou magnitude de um vector, que é uma grandeza escalar, é representado por uma letra minúscula, $r = |\mathbf{R}|$. O vector unitário, ou versor, na direcção do vector **R** é representado por $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$.

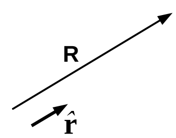


Figura A.3 – Representação de um vector e respectivo vector unitário.

Em suma, no presente trabalho a notação adoptada para a representação vectorial encontra-se resumida na figura A.4.

NOTAÇÃO VECTORIAL		
TIPO DE LETRA	SIGNIFICADO	EXEMPLO
Maiúscula	Vector (magnitude, direcção e sentido)	$\mathbf{R}$
	Componente vectorial numa dada direcção	$\mathbf{R}^x$
Minúscula	Magnitude de um vector (grandeza escalar)	r
	Magnitude de um vector numa dada direcção	r^x
	Vector unitário numa dada direcção (versor)	$\hat{\mathbf{r}}$

Figura A.4 – Notação vectorial adoptada no presente trabalho.

[1] A distinção entre a representação de um ponto e de um vector reside no facto de que, apesar de em ambos os casos se usar letras maiúsculas, os pontos serem representados em itálico, por exemplo, o ponto *P*, enquanto que os vectores serem representados em negrito, por exemplo, o vector **R**.

Com efeito, um vector pode ser representado e descrito de diferentes modos. Assim, o vector representado na figura A.5 pode ser escrito como,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^x + \mathbf{R}^y \quad \text{(coordenadas cartesianas)} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{R} = r\angle\theta \quad \text{(coordenadas polares)} \tag{A.2}$$

$$\mathbf{R} = r^x\hat{\mathbf{i}} + r^y\hat{\mathbf{j}} \quad \text{(coordenadas cartesianas)} \tag{A.3}$$

$$\mathbf{R} = r^x + ir^y \quad \text{(coordenadas cartesianas e notação complexa)} \tag{A.4}$$

$$\mathbf{R} = re^{i\theta} \quad \text{(coordenadas polares e notação complexa)} \tag{A.5}$$

onde i nas equações (A.4) e (A.5) representa a unidade complexa, em que $i = \sqrt{-1}$, e $e^{i\theta} = cos\,\theta + isen\theta$, que representa a equação de Euler.

Deve notar-se ainda que da análise geométrica da figura A.5 tem-se que,

$$r^x = r\,cos\,\theta \tag{A.6}$$

$$r^y = rsen\theta \tag{A.7}$$

$$r = \sqrt{(r^x)^2 + (r^y)^2} \tag{A.8}$$

$$\theta = arctg\frac{r^y}{r^x} \tag{A.9}$$

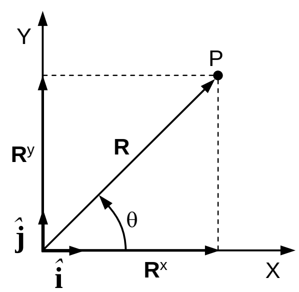


*Figura A.5 – O vector **R** localiza a posição do ponto P no sistema de coordenadas XY.*

A.4. Componentes de um Vector

É oportuno recordar alguns conceitos elementares no âmbito da análise vectorial. Com efeito, vectores que actuam no mesmo plano são denominados vectores complanares. Vectores colineares têm a mesma direcção e a mesma linha de acção. Vectores iguais têm o mesmo módulo, a mesma direcção e o mesmo sentido. Vector nulo ou zero tem módulo zero e, por isso, a sua direcção não é especificada. A multiplicação de um vector por um escalar é definida como sendo um vector com a mesma direcção e módulo igual ao produto da magnitude do vector pelo escalar. Um vector negativo consegue-se por simples multiplicação por -1, invertendo-se, por isso, o seu sentido.

Na figura A.6 está representado um vector **R** que une a origem do sistema de eixos coordenados ao ponto *P*. As componentes vectoriais de **R** ao longo dos eixos são $\mathbf{R}^x$, $\mathbf{R}^y$ e $\mathbf{R}^z$, respectivamente. Ainda na figura A.6 estão representados os vectores unitários dos eixos *X*, *Y* e *Z*, ou seja, $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente.

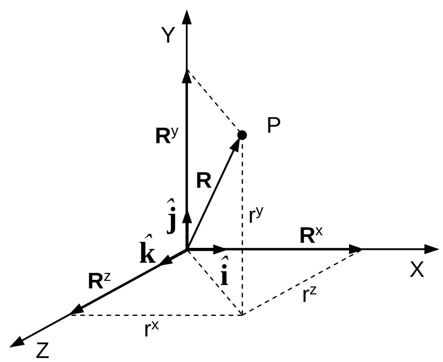


Figura A.6 – Componentes de um vector ao longo dos eixos coordenados.

As grandezas escalares r^x, r^y e r^z representam, respectivamente, o módulo dos vectores $\mathbf{R}^x$, $\mathbf{R}^y$ e $\mathbf{R}^z$, pelo que se podem escrever as seguintes relações,

$$\mathbf{R}^x = r^x\hat{\mathbf{i}} \tag{A.10}$$

$$\mathbf{R}^y = r^y\hat{\mathbf{j}} \tag{A.11}$$

$$\mathbf{R}^z = r^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.12}$$

Quando dois vectores são iguais, então são também iguais as suas componentes. Assim, se os vectores **A** e **B** forem iguais, tal que,

$$\mathbf{A} = a^x\hat{\mathbf{i}} + a^y\hat{\mathbf{j}} + a^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.13}$$

$$\mathbf{B} = b^x\hat{\mathbf{i}} + b^y\hat{\mathbf{j}} + b^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.14}$$

então, sabe-se que,

$$a^x = b^x \tag{A.15}$$

$$a^y = b^y \tag{A.16}$$

$$a^z = b^z \tag{A.17}$$

A.5. ÁLGEBRA VECTORIAL

A.5.1. Adição e Subtracção

A adição de vectores envolve simplesmente a soma individual de cada uma das componentes nas direcções *X*, *Y* e *Z*. Assim, considerando o vector **C** como sendo a adição dos vectores **A** e **B**, isto é, **C**=**A**+**B**, tem-se que,

$$\mathbf{C} = (a^x + b^x)\hat{\mathbf{i}} + (a^y + b^y)\hat{\mathbf{j}} + (a^z + b^z)\hat{\mathbf{k}} \tag{A.18}$$

em que os vectores **A**, **B** e **C** estão representados pelas suas coordenadas cartesianas.

Graficamente, a adição de vectores pode representar-se como na figura A.7, em que o vector **C** é igual à soma dos vectores **A** e **B**. Ainda na figura A.7 observa-se que a adição de vectores goza da propriedade comutativa, isto é, o resultado é o mesmo independentemente da ordem pela qual os vectores são adicionados.

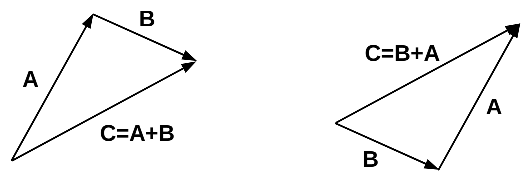


Figura A.7 – Propriedade comutativa da adição de vectores.

A figura A.8 ilustra também a adição gráfica de dois vectores, a qual é usada como base para se obter uma expressão matemática que permite calcular o módulo da soma de dois vectores.

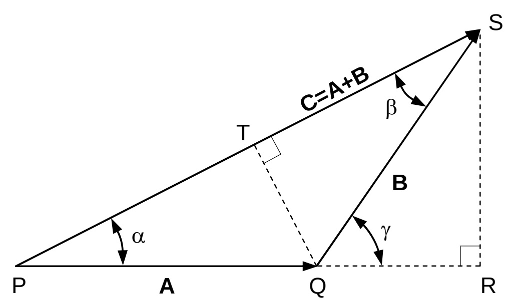


Figura A.8 – Adição gráfica de dois vectores.

Da observação da figura A.8 pode escrever-se que,

$$PS^2 = PR^2 + RS^2 \tag{A.19}$$

$$PR = PQ + QR \tag{A.20}$$

$$PR = a + b\,cos\,\gamma \tag{A.21}$$

$$RS = bsen\gamma \tag{A.22}$$

onde *a* e *b* representam os módulos dos vectores **A** e **B**, respectivamente.

Assim, das equações (A.19)-(A.22), o módulo do vector **C** pode ser expresso por,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\,cos\,\gamma} \tag{A.23}$$

A direcção do vector **C** pode facilmente ser conhecida se o valor do ângulo α for calculado, pelo que aplicando a lei dos senos ao triângulo *PQS* vem que,

$$\frac{a}{sen\beta}=\frac{b}{sen\alpha}=\frac{c}{sen(180-\gamma)} \qquad (A.24)$$

Considerando, agora, os vectores **A**, **B** e **C** e ainda o escalar *s*, verificam-se as seguintes propriedades em relação à álgebra vectorial,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \quad \text{(propriedade comutativa da adição)} \qquad (A.25)$$

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \quad \text{(propriedade associativa da adição)} \qquad (A.26)$$

$$s\mathbf{A}=\mathbf{A}s \quad \text{(propriedade comutativa da multiplicação)} \qquad (A.27)$$

$$s(\mathbf{A}+\mathbf{B})=s\mathbf{A}+s\mathbf{B} \quad \text{(propriedade distributiva da multiplicação)} \qquad (A.28)$$

A subtracção de dois vectores é em tudo semelhante à adição de vectores anteriormente apresentada. Assim, considerando o vector **C** como sendo a subtracção dos vectores **A** e **B**, isto é, **C**=**A**-**B** ou **C**=**A**+(-**B**), tem-se que,

$$\mathbf{C}=(a^x-b^x)\hat{\mathbf{i}}+(a^y-b^y)\hat{\mathbf{j}}+(a^z-b^z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (A.29)$$

Graficamente, a subtracção de vectores é obtida somando-se o primeiro vector com o negativo ou oposto do segundo, como ilustra a figura A.9.

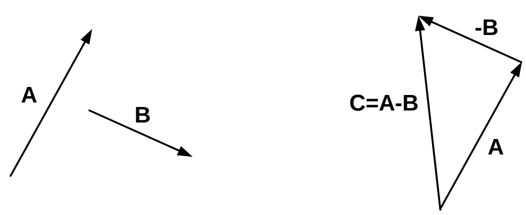


Figura A.9 – Subtracção de dois vectores.

Deve notar-se que a subtracção de vectores não goza da propriedade comutativa, como se demonstra graficamente na figura A.10.

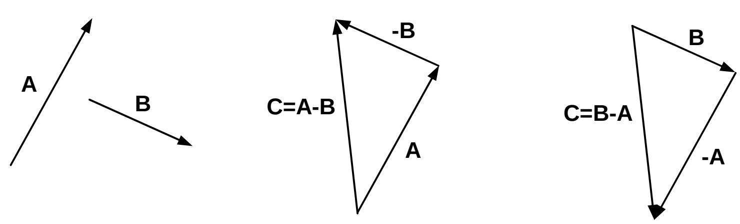


Figura A.10 – Propriedade não comutativa da subtracção de vectores.

A.5.2. Produto Externo ou Vectorial

O produto externo ou vectorial de dois vectores **A** e **B** é definido como sendo um vector perpendicular ao plano definido por **A** e **B**. O produto vectorial é representado por **A**×**B** ou $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$. O sentido do vector resultante do produto vectorial é o correspondente ao sentido do avanço de um parafuso de rosca direita que roda de **A** para **B**. Um parafuso de rosca direita avança na direcção de um polegar quando se coloca a mão direita na forma indicada na figura A.11, isto é, com os dedos a apontar no sentido de rotação. Deve notar-se que a maior parte dos parafusos são de rosca direita. Por outro lado, da definição de produto vectorial decorre que,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \tag{A.30}$$

uma vez que o sentido de rotação do parafuso é invertido quando a ordem dos dois vectores é alterada, pelo que o produto vectorial é anticomutativo.

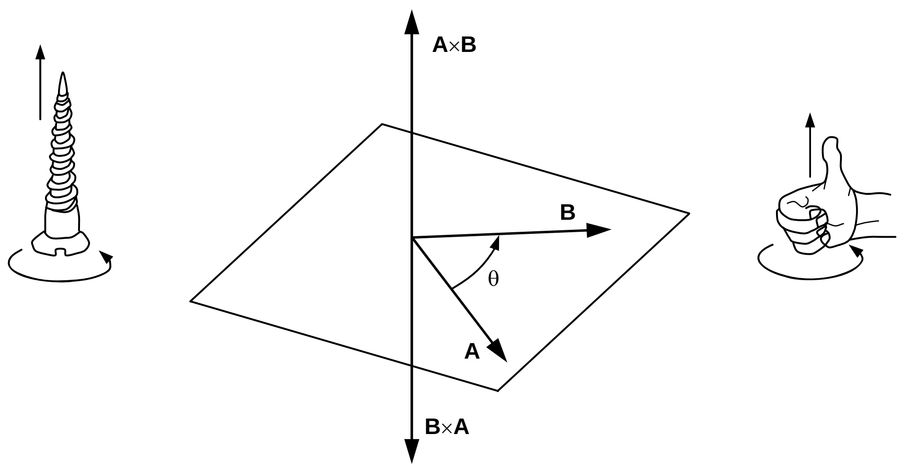


Figura A.11 – Representação do produto externo ou vectorial de dois vectores.

Uma outra regra simples, que permite saber o sentido do produto vectorial **A**×**B**, é a bem conhecida regra da mão direita, a qual pode ser resumida do seguinte modo, ao colocar o dedo polegar, o dedo indicador e o dedo médio da mão direita na posição ilustrada na figura A.12, se o indicador e o dedo médio apontarem nos sentidos de **A** e **B**, respectivamente, então o polegar indica o sentido de **A**×**B**.

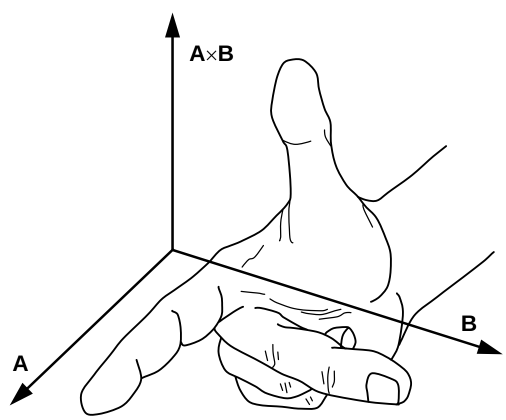


Figura A.12 – Regra da mão direita usada no produto vectorial de dois vectores.

A magnitude ou módulo do produto vectorial **C**=**A**×**B** pode ser calculada por,

$$c = ab\,sen\theta \tag{A.31}$$

em que a e b representam os módulos dos vectores **A** e **B**, respectivamente, e θ define o ângulo formado pelos dois vectores considerados.

Deve notar-se que é nulo o produto vectorial de dois vectores paralelos, uma vez que é nulo o ângulo por eles formado e, consequentemente, é também nulo o seno desse ângulo. Com efeito, pode concluir-se que a condição necessária e suficiente para garantir o paralelismo entre dois vectores é dada pelo seu produto vectorial, ou seja,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{A.32}$$

Deve ainda observar-se que o produto vectorial dos vectores unitários associados aos eixos coordenados *X*, *Y* e *Z* apresenta os seguintes resultados,

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \tag{A.33}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0} \tag{A.34}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \tag{A.35}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{A.36}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}} \tag{A.37}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \tag{A.38}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \tag{A.39}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \tag{A.40}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \tag{A.41}$$

Quando os vectores são expressos pelas suas componentes cartesianas,

$$\mathbf{A} = a^x\hat{\mathbf{i}} + a^y\hat{\mathbf{j}} + a^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.42}$$

$$\mathbf{B} = b^x\hat{\mathbf{i}} + b^y\hat{\mathbf{j}} + b^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.43}$$

então, o produto vectorial de **A** por **B** é dado por,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a^y b^z - a^z b^y)\hat{\mathbf{i}} + (a^z b^x - a^x b^z)\hat{\mathbf{j}} + (a^x b^y - a^y b^x)\hat{\mathbf{k}} \tag{A.44}$$

A equação (A.44) pode ser escrita na forma mais compacta de um determinante da seguinte matriz,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{bmatrix} \tag{A.45}$$

A.5.3. Produto Interno ou Escalar

O produto interno ou escalar de dois vectores **A** e **B** é definido como sendo um escalar resultante do produto dos seus módulos pelo coseno do ângulo por eles formado. O produto escalar é representado por **A·B**. Matematicamente, o produto escalar é escrito como,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ab\cos\theta \tag{A.46}$$

em que a e b representam os módulos dos vectores **A** e **B**, respectivamente, e θ define o ângulo formado pelos dois vectores considerados.

Deve notar-se que é nulo o produto escalar de dois vectores perpendiculares, uma vez que é igual a 90º o ângulo por eles formado e, consequentemente, é nulo o coseno deste ângulo. Com efeito, pode concluir-se que a condição necessária e suficiente para garantir a perpendicularidade entre dois vectores é dada por um produto interno, isto é,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{A.47}$$

Deve ainda observar-se que o produto escalar dos vectores unitários associados aos eixos coordenados X, Y e Z apresenta os seguintes resultados,

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1 \tag{A.48}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1 \tag{A.49}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \tag{A.50}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \tag{A.51}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{A.52}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \tag{A.53}$$

Quando os vectores são expressos pelas suas componentes cartesianas,

$$\mathbf{A} = a^x\hat{\mathbf{i}} + a^y\hat{\mathbf{j}} + a^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.54}$$

$$\mathbf{B} = b^x\hat{\mathbf{i}} + b^y\hat{\mathbf{j}} + b^z\hat{\mathbf{k}} \tag{A.55}$$

então, o produto escalar de **A** por **B** é dado por,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a^x b^x + a^y b^y + a^z b^z \tag{A.56}$$

O produto escalar de um vector por ele próprio, isto é, **A**·**A**, é dado por,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = a^2 \tag{A.57}$$

Algumas considerações adicionais em relação ao produto escalar de vectores devem ainda ser tidas em linha de conta. Em primeiro lugar deve referir-se que o produto escalar goza da propriedade comutativa, isto é,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{A.58}$$

A propriedade distributiva é também aplicável ao produto escalar de vectores,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{A.59}$$

Deve notar-se ainda a equivalência entre os produtos escalares e vectoriais de vários vectores, tal como exemplifica a equação (A.60).

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \\ c^x & c^y & c^z \end{bmatrix} \tag{A.60}$$

A.5.4. Multiplicação e Divisão

Nesta secção são apenas apresentados os casos da multiplicação e divisão de dois vectores, usando para o efeito a notação complexa. Assim, considerando os vectores **A** e **B** expressos em notação complexa, a multiplicação destes dois vectores pode ser expressa como,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = ae^{i\theta_A}\times be^{i\theta_B} = ab[cos(\theta_A+\theta_B)+isen(\theta_A+\theta_B)] \qquad \text{(A.61)}$$

De modo análogo, a divisão de dois vectores **A** e **B** expressos em notação complexa pode ser calculada como,

$$\mathbf{A}/\mathbf{B} = ae^{i\theta_A}/be^{i\theta_B} = (a/b)[cos(\theta_A-\theta_B)+isen(\theta_A-\theta_B)] \qquad \text{(A.62)}$$

A.5.5. Rotação de Eixos no Plano

A rotação dos eixos coordenados com o intuito de definir novos sistemas de eixos é uma necessidade frequente na análise de mecanismos. A figura A.13 ilustra um vector **R** cuja notação em coordenadas polares, relativamente ao sistema de eixos *XY*, pode ser escrita como,

$$\mathbf{R} = r\angle\theta \qquad \text{(A.63)}$$

e relativamente ao sistema de eixos *X'Y'* rodado de um ângulo γ em relação ao sistema de eixos original, é expresso por,

$$\mathbf{R} = r\angle(\theta-\gamma) \qquad \text{(A.64)}$$

Deve notar-se que esta técnica pode ser particularmente útil e interessante no caso de se pretender determinar a magnitude das componentes coordenadas de um vector, sendo conhecida a sua direcção, pois desde que se proceda a uma rotação de valor igual a θ, então, após a rotação vem que,

$$|\mathbf{R}| = r \qquad \text{(A.65)}$$

ou seja,

$$r^{x'} = r \qquad \text{(A.66)}$$

$$r^{y'} = 0 \qquad \text{(A.67)}$$

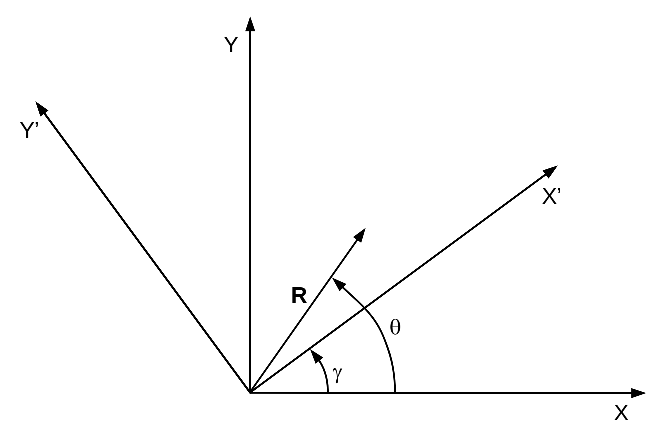


Figura A.13 – Rotação de um vector.

A.5.6. Diferenciação Vectorial

Se o vector **A** variar em módulo e em direcção ao longo do tempo, então a derivada de **A** em ordem ao tempo é dada por,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \tag{A.68}$$

onde Δt representa o incremento de tempo.

Considerando que os vectores **A**, **B** e **C** e o escalar s são funções que variam com o tempo, então, quando incluídos em expressões vectoriais, a sua diferenciação obedece às seguintes regras,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{A.69}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} \tag{A.70}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} \tag{A.71}$$

$$\frac{d}{dt}(s\mathbf{A}) = s\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{ds}{dt}\mathbf{A} \tag{A.72}$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})] = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{dt}) + \mathbf{A}\times(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\times\mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \tag{A.73}$$

Atendendo a que **A**×**B**=-**B**×**A**, então a ordem pela qual os vectores surgem no produto vectorial não pode ser alterada na diferenciação de vectores quando envolve produtos vectoriais. A derivada dos vectores unitários relativos a um sistema de coordenadas fixo é nula, em virtude de, nem o módulo, nem a direcção variarem ao longo do tempo. Contudo, a derivada dos vectores unitários associados a um sistema de coordenadas móvel não é nula. Quando os vectores são expressos em termos das suas componentes cartesianas, a derivada em ordem ao tempo é obtida pela derivação parcial de cada uma das suas componentes.

Considerando **A** um vector que varia com o tempo tal que,

$$\mathbf{A} = f(t) \tag{A.74}$$

então a derivada[2] de **A** em ordem ao tempo pode ser representada por,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}f(t) = \dot{\mathbf{A}} \tag{A.75}$$

De modo análogo, a segunda derivada do vector **A** é representada por,

$$\frac{d}{dt}(\frac{d\mathbf{A}}{dt}) = \frac{d}{dt}[\frac{d}{dt}f(t)] = \ddot{\mathbf{A}} \tag{A.76}$$

---

[2] A notação $\dot{x}$, abreviatura de dx/dt, foi original e primeiramente empregue por Newton para o quociente de duas quaisquer derivadas. Actualmente, significa sempre a derivação da variável x em ordem ao tempo e nunca em relação a uma outra variável qualquer.

A.6. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES VECTORIAIS

A.6.1. Equações Vectoriais

Considerando os vectores **A**, **B**, **C** e **D** dados pelas suas componentes cartesianas, então a equação vectorial,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \tag{A.77}$$

pode ser escrita como,

$$d^x\hat{\mathbf{i}} + d^y\hat{\mathbf{j}} + d^z\hat{\mathbf{k}} = (a^x + b^x + c^x)\hat{\mathbf{i}} + (a^y + b^y + c^y)\hat{\mathbf{j}} + (a^z + b^z + c^z)\hat{\mathbf{k}} \tag{A.78}$$

a qual, por sua vez, origina o seguinte sistema de equações escalares,

$$\begin{cases} d^x = a^x + b^x + c^x \\ d^y = a^y + b^y + c^y \\ d^z = a^z + b^z + c^z \end{cases} \tag{A.79}$$

O sistema dado pela equação (A.79) é passível de ser resolvido para um qualquer conjunto de três incógnitas, entre os módulos e as direcções dos vectores envolvidos. Por exemplo, a equação (A.79) pode ser resolvida para determinar d^x, d^y e d^z se as componentes dos restantes vectores forem conhecidas. Deve notar-se que para outras combinações, o sistema de equações que se obtém é altamente não linear, sendo, por isso, necessário recorrer aos métodos numéricos iterativos.

No espaço bidimensional, como é evidente, a resolução de equações vectoriais apenas pode ser levada a cabo para duas incógnitas, duas magnitudes, duas direcções ou a combinação de uma magnitude com uma direcção.

É conveniente, por vezes, indicar se as variáveis são conhecidas (ν) ou não (o), utilizando para o efeito o respectivo símbolo superior à linha em cada vector, como por exemplo, na seguinte equação,

$$\overset{\text{oν}}{\mathbf{C}} = \overset{\text{νν}}{\mathbf{A}} + \overset{\text{νo}}{\mathbf{B}} \tag{A.80}$$

em que o primeiro símbolo se refere à magnitude e o segundo à direcção.

Na resolução da equação vectorial **C**=**A**+**B**, quatro diferentes situações podem ocorrer, a saber:

- A magnitude e a direcção do mesmo vector são desconhecidas, *e.g.*, c e $\hat{\mathbf{c}}$;
- As magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas, *e.g.*, a e b;
- A magnitude de um vector e a direcção de outro são desconhecidas, *e.g.*, a e $\hat{\mathbf{b}}$;
- As direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, *e.g.*, $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$.

A.6.2. Solução Gráfica

Um das metodologias utilizadas na resolução de equações vectoriais baseia-se na construção ou solução gráfica. De seguida, são apresentadas as soluções gráficas relativas a cada uma das situações descritas na secção anterior.

No caso em que a magnitude e a direcção do mesmo vector são desconhecidas, a equação vectorial (A.80) pode ser fácil resolvida recorrendo aos conceitos de adição e subtracção dos restantes vectores, cujas características são *a priori* conhecidas. Este assunto foi abordado na secção A.5.1., e resume-se na figura A.14.

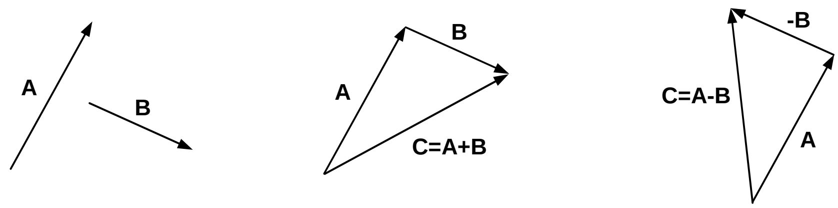


Figura A.14 – Adição e subtracção de vectores.

Na situação em que as magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas, a equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{ov}{\mathbf{B}} \tag{A.81}$$

Os passos concernentes à resolução gráfica da equação (A.81) estão ilustrados na figura A.15 e podem resumir-se do seguinte modo,

- Escolher um sistema de coordenadas;
- Definir uma escala de desenho;
- Desenhar o vector **C**;
- Construir um segmento de recta a partir da origem do vector **C** e paralelo à direcção do vector **A**;
- Construir outro segmento de recta a partir do fim do vector **C** e paralelo à direcção do vector **B**;
- Intersectar os dois segmentos de recta anteriormente desenhados, resultando daí as magnitudes dos vectores **A** e **B**.

Deve notar-se que a equação (A.81) tem solução única, exceptuando o caso em que os vectores **A** e **B** são colineares. Quando os vectores **A** e **B** são paralelos, as suas magnitudes são infinitas.

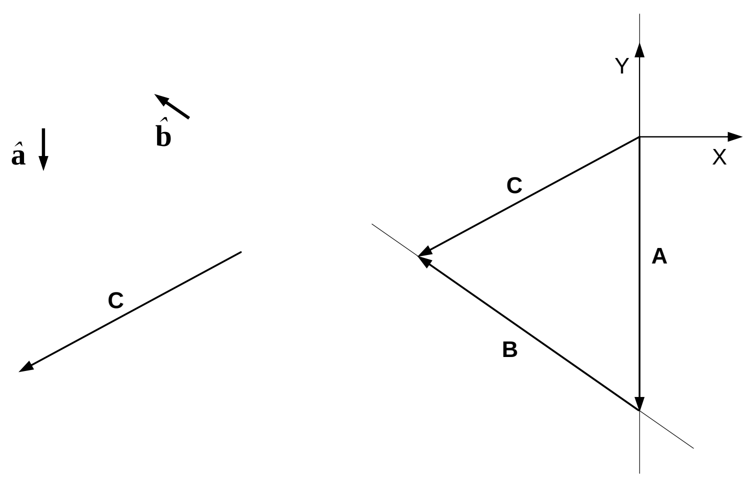


Figura A.15 – Solução gráfica de equações vectoriais em que as magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas.

Na situação em que a magnitude de um vector e a direcção de outro são as incógnitas, a equação vectorial é escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \tag{A.82}$$

A solução gráfica da equação (A.82), ilustrada na figura A.16, é resumida nos passos que em seguida são apresentados,

- Escolher um sistema de coordenadas;
- Definir uma escala de desenho;
- Desenhar o vector **C**;
- Construir um segmento de recta a partir da origem do vector **C** e paralelo à direcção do vector **A**;
- Ajustar o compasso à magnitude do vector **B** e desenhar, com centro no fim do vector **C**, um arco de circunferência;
- Intersectar o segmento de recta com o arco de circunferência anteriormente desenhados, donde resultam duas soluções possíveis, a saber, ($a,\hat{\mathbf{b}}$) e ($a',\hat{\mathbf{b}}'$).

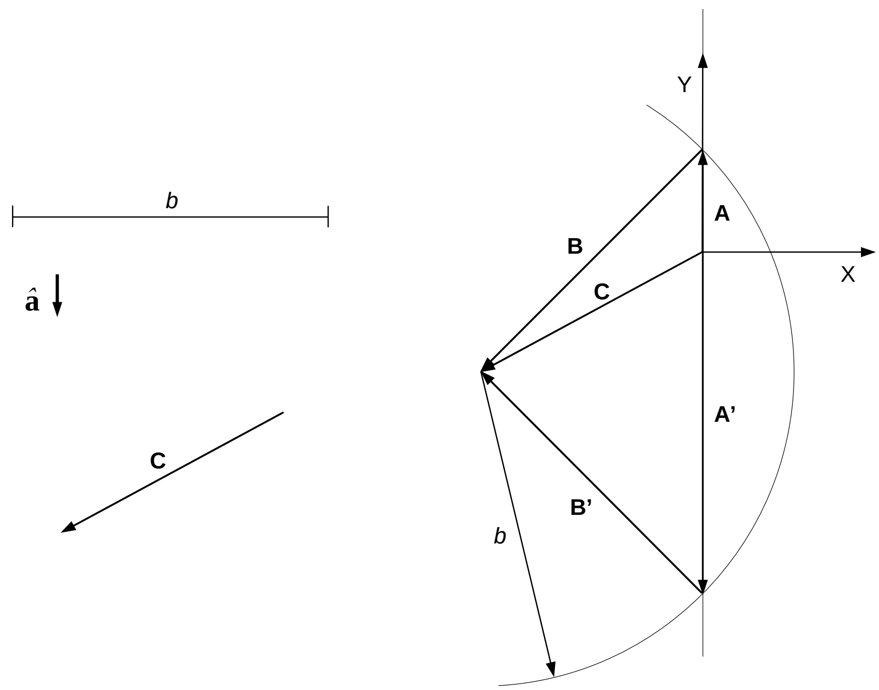


Figura A.16 – Solução gráfica de equações vectoriais em que a magnitude de um vector e a direcção de outro são desconhecidas.

Finalmente, no caso em que as direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, a equação vectorial é dada por,

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \tag{A.83}$$

Os passos correspondentes à solução gráfica da equação (A.83) estão ilustrados na figura A.17 e podem ser resumidos do seguinte modo,

- Escolher um sistema de coordenadas;
- Definir uma escala de desenho;
- Desenhar o vector **C**;
- Construir um arco de circunferência de raio *a* e centrado na origem do vector **C**;
- Construir outro arco de circunferência de raio *b* e centrado no fim do vector **C**;
- Intersectar os dois arcos de circunferência anteriormente desenhados, resultando duas soluções distintas, a saber, ($\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{b}}$) e ($\hat{\mathbf{a}}',\hat{\mathbf{b}}'$).

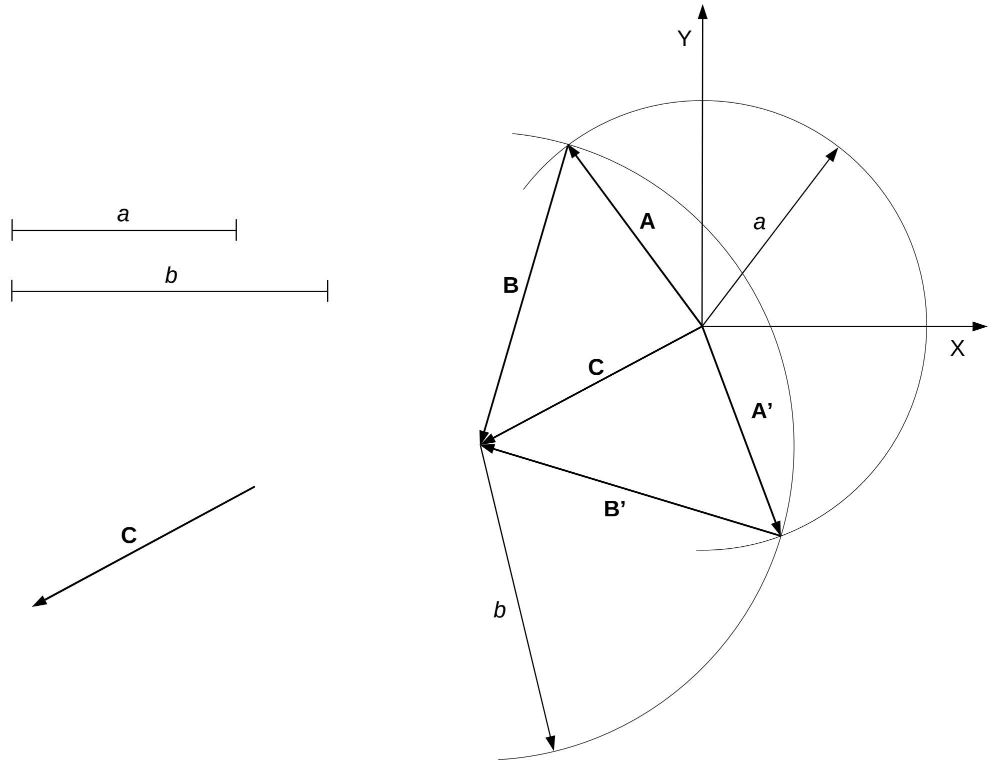


Figura A.17 – Solução gráfica de equações vectoriais em que as direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas.

A.6.3. Solução Analítica

Nesta secção é apresentada a resolução analítica de equações vectoriais utilizando a notação complexa. Com efeito, em notação complexa a equação vectorial **C**=**A**+**B** pode ser escrita do seguinte modo,

$$ce^{i\theta_C} = ae^{i\theta_A} + be^{i\theta_B} \tag{A.84}$$

De seguida, são apresentadas e discutidas as soluções analíticas correspondentes às quatro situações abordadas na secção anterior. Assim, para o caso em que a magnitude e a direcção do mesmo vector são desconhecidas, como, por exemplo, c e θ_C, com base na equação de Euler para a trigonometria, a equação (A.84) pode ser reescrita do seguinte modo,

$$c(cos\theta_C + isen\theta_C) = a(cos\theta_A + isen\theta_A) + b(cos\theta_B + isen\theta_B) \tag{A.85}$$

Separando as partes real e imaginária vem que,

$$c\,cos\theta_C = a\,cos\theta_A + b\,cos\theta_B \tag{A.86}$$

$$csen\theta_C = asen\theta_A + bsen\theta_B \tag{A.87}$$

Elevando ao quadrado as equações (A.86) e (A.87), igualando o resultado, eliminando a variável θ_C, e resolvendo em ordem a c resulta em,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta_B - \theta_A)} \tag{A.88}$$

O valor do ângulo θ_C pode ser obtido dividindo a equação (A.87) pela equação (A.86), e eliminando a variável c, vem que,

$$\theta_C = arctg \frac{asen\theta_A + bsen\theta_B}{a\cos\theta_A + b\cos\theta_B} \tag{A.89}$$

No caso em que as duas incógnitas da equação vectorial são as magnitudes de **A** e **B**, deve começar-se por dividir a equação (A.84) por $e^{i\theta_A}$, resultando em,

$$ce^{i(\theta_C - \theta_A)} = a + be^{i(\theta_B - \theta_A)} \tag{A.90}$$

Deve notar-se que a divisão de equações polares complexas pelo vector unitário $e^{i\theta_A}$ tem o efeito de rodar os eixos real e imaginário de um ângulo θ_A tal que o eixo real fica alinhado com o vector **A**, como se demonstra na figura A.18.

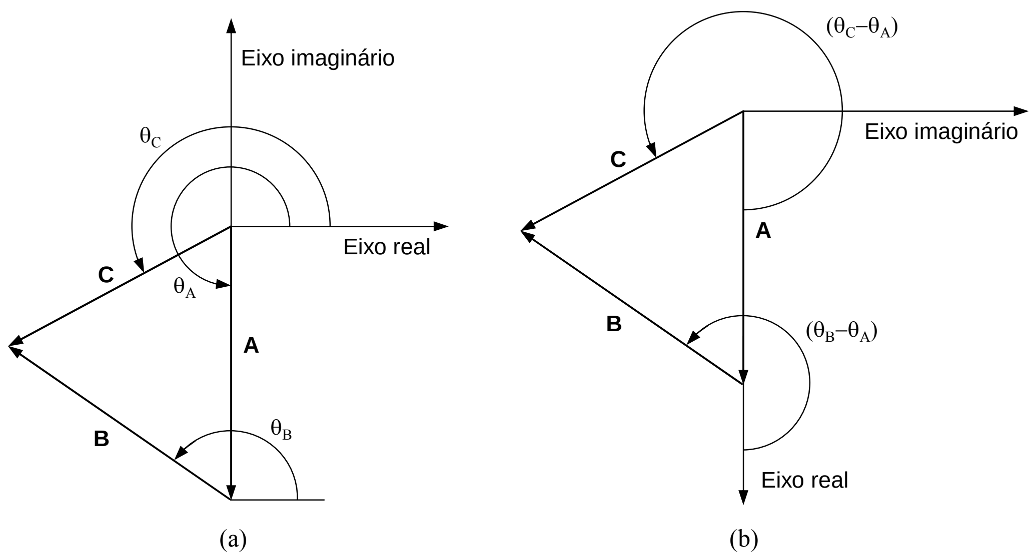


Figura A.18 – Rotação de eixos resultante da divisão de uma equação polar complexa por $e^{i\theta_A}$: (a) Eixos originais; (b) Eixos rodados.

Separando as partes real e imaginária da equação (A.90) vem que,

$$c\cos(\theta_C - \theta_A) = a + b\cos(\theta_B - \theta_A) \tag{A.91}$$

$$csen(\theta_C - \theta_A) = bsen(\theta_B - \theta_A) \tag{A.92}$$

Da equação (A.92) obtém-se a magnitude do vector **B**,

$$b = c\frac{sen(\theta_C - \theta_A)}{sen(\theta_B - \theta_A)} \tag{A.93}$$

O valor da magnitude do vector **A** pode ser determinado de forma idêntica, isto é, dividindo a equação (A.84) por $e^{i\theta_B}$, significando, por isso, alinhar o eixo real com o vector **B** e, consequentemente, vem que,

$$a = c\frac{sen(\theta_C - \theta_B)}{sen(\theta_A - \theta_B)} \tag{A.94}$$

Na situação em que as incógnitas são a magnitude do vector **A** e a direcção do vector **B**, deve começar-se por alinhar o eixo real com o vector **A**, e separando as partes real e imaginária resultam novamente as equações (A.91) e (A.92), obtendo-se as seguintes soluções para θ_B e a,

$$\theta_B = \theta_A + arcsen\frac{csen(\theta_C - \theta_A)}{b} \tag{A.95}$$

$$a = c\,cos(\theta_C - \theta_A) - bcos(\theta_B - \theta_A) \tag{A.96}$$

Atendendo a que a função arcoseno tem solução dupla, na presente situação resultam duas soluções distintas, ou seja, (a,θ_B) e (a',θ_B').

Finalmente, no caso em que as incógnitas são as direcções dos vectores **A** e **B**, isto é, θ_A e θ_B, deve alinhar-se o eixo real com o vector **C**,

$$c = ae^{i(\theta_A - \theta_C)} + be^{i(\theta_B - \theta_C)} \tag{A.97}$$

Separando as partes real e imaginária e rearranjando os termos resulta em,

$$a\,cos(\theta_A - \theta_C) = c - bcos(\theta_B - \theta_C) \tag{A.98}$$

$$asen(\theta_A - \theta_C) = -bsen(\theta_B - \theta_C) \tag{A.99}$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e adicionando o resultado, vem que,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\,cos(\theta_B - \theta_C) \tag{A.100}$$

Esta equação traduz a lei dos cosenos para um triângulo, a qual é resolvida para θ_B originando,

$$\theta_B = \theta_C \mp arccos\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \tag{A.101}$$

De modo análogo, mudando c para o primeiro membro da equação (A.98) antes de elevar ao quadrado e de adicionar, resultando em,

$$\theta_A = \theta_C \pm arccos\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \tag{A.102}$$

Os sinais mais-ou-menos nas equações (A.101) e (A.102) resultam do facto da função arcocoseno ter solução dupla e, por conseguinte, θ_A e θ_B têm também duas soluções distintas, a saber (θ_A,θ_B) e (θ_A',θ_B').

A.6.4. Solução de Chace

A resolução de equações vectoriais utilizando os métodos gráficos e analíticos, embora sejam metodologias simples, são de difícil utilização, bastante laboriosa e de limitada aplicação e generalização à prática da cinemática de mecanismos. A utilização de álgebra vectorial é, sem dúvida, uma alternativa extremamente interessante para este tipo de problemas. Chace[3] foi pioneiro na utilização da análise vectorial para obter soluções explícitas de equações vectoriais. Nesta secção são

[3] Chace, um dos gurus na análise e síntese de mecanismos, desenvolveu a sua actividade docente e de investigação na Universidade de Michigan.

apresentadas as soluções de Chace para equações vectoriais relativas aos quatro casos descritos anteriormente. Assim, no caso em que a magnitude e a direcção do mesmo vector são as incógnitas, a equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{oo}{\mathbf{C}} = \overset{vv}{\mathbf{A}} + \overset{vv}{\mathbf{B}} \tag{A.103}$$

A solução é trivial e é dada por,

$$\mathbf{C} = (a^x + b^x)\hat{\mathbf{i}} + (a^y + b^y)\hat{\mathbf{j}} \tag{A.104}$$

No caso em que as magnitudes de dois vectores diferentes são desconhecidas, a equação vectorial é escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{ov}{\mathbf{B}} \tag{A.105}$$

ou ainda,

$$\overset{vv}{c\hat{\mathbf{c}}} = \overset{ov}{a\hat{\mathbf{a}}} + \overset{ov}{b\hat{\mathbf{b}}} \tag{A.106}$$

A solução de Chace para este caso baseia-se na eliminação de uma das incógnitas através do produto interno da equação (A.106) por um vector adequadamente escolhido. Com efeito, por exemplo, o vector **B** pode ser eliminado se o vector $\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}$ for escolhido para efectuar o produto interno, resultando da equação (A.106),

$$c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}) = a\hat{\mathbf{a}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}) + b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}) \tag{A.107}$$

Como os vectores $\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ são perpendiculares, da equação (A.107) vem que,

$$a = \frac{c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}})}{\hat{\mathbf{a}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{k}})} \tag{A.108}$$

De modo análogo, a solução para a magnitude do vector **B** é dada por,

$$b = \frac{c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})}{\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})} \tag{A.109}$$

Na situação em que as incógnitas são a magnitude de um vector e a direcção de outro, a equação vectorial pode ser escrita como,

$$\overset{vv}{\mathbf{C}} = \overset{ov}{\mathbf{A}} + \overset{vo}{\mathbf{B}} \tag{A.110}$$

ou ainda

$$\overset{vv}{c\hat{\mathbf{c}}} = \overset{ov}{a\hat{\mathbf{a}}} + \overset{vo}{b\hat{\mathbf{b}}} \tag{A.111}$$

Para este caso, Chace sugere começar pela eliminação da magnitude do vector **A**, para tal deve escolher-se o vector $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$ para efectuar o produto interno com a equação (A.111), resultando em,

$$c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \tag{A.112}$$

Por definição, o produto interno de dois vectores, **R** e **S**, é dado por,

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = rs\cos\theta \tag{A.113}$$

então, o segundo membro da equação (A.112) pode ser reescrito como,

$$b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = b\,|\,\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}\,|\cos\theta \tag{A.114}$$

Por outro lado, como $|\,\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}\,| = 1$, a equação (A.114) resulta em,

$$b\hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = b\cos\theta \tag{A.115}$$

em que θ representa o ângulo formado pelos vectores **B** e $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$, e, por conseguinte,

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{b}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \tag{A.116}$$

Como os vectores $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$ são perpendiculares entre si, pode definir-se um sistema de coordenadas *UV*, em que os respectivos vectores unitários são dados por,

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}} \tag{A.117}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{a}} \tag{A.118}$$

Neste novo sistema de coordenadas, o vector unitário $\hat{\mathbf{b}}$ pode ser escrito como,

$$\hat{\mathbf{b}} = cos\,\theta(\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) + sen\theta\hat{\mathbf{a}} \tag{A.119}$$

Por outro lado, substituindo a equação (A.116) em (A.112) vem que,

$$cos\,\theta = \frac{c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})}{b} \tag{A.120}$$

Pela lei fundamental da trigonometria tem-se que,

$$sen\theta = \pm\frac{1}{b}\sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2} \tag{A.121}$$

Substituindo as equações (A.120) e (A.121) na equação (A.119), e multiplicando ambos os membros por *b*, resulta que,

$$b\hat{\mathbf{b}} = [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \pm \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2}\,\hat{\mathbf{a}} \tag{A.122}$$

O vector **A** pode obter-se directamente da equação (A.111), fazendo a subtracção de vectores. Em alternativa, pode substituir-se a equação (A.122) em (A.111) resultando em,

$$a\hat{\mathbf{a}} = c\hat{\mathbf{c}} - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) \pm \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2}\,\hat{\mathbf{a}} \tag{A.123}$$

Com referência à figura A.19, os dois primeiros termos do segundo membro da equação (A.123) podem ser simplificados. Ainda na mesma figura, a direcção $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$ está rodada 90º no sentido horário relativamente à direcção $\hat{\mathbf{a}}$. Assim, a magnitude $c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})$ é dada pela projecção de **C** na direcção $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}$. Por isso, quando $[c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})](\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})$ é subtraída ao vector **C**, o resultado é a magnitude $c\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{a}}$ na direcção $\hat{\mathbf{a}}$. Pelo que se acaba de expor, a equação (A.123) pode ser simplificada e escrita como,

$$a\hat{\mathbf{a}} = [c\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{a}} \mp \sqrt{b^2 - [c\hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}})]^2}\,]\hat{\mathbf{a}} \tag{A.124}$$

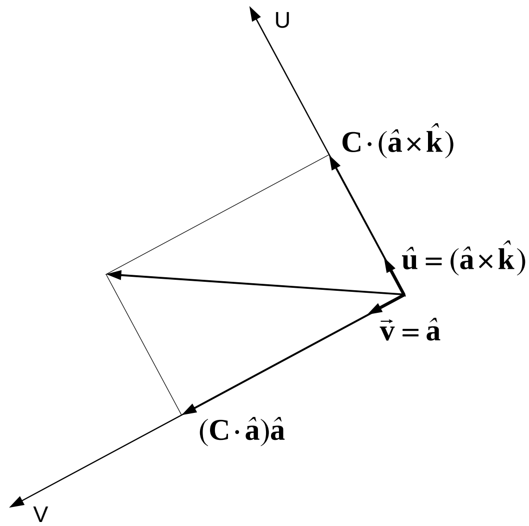


Figura A.19 – Sistema de coordenadas auxiliar usado na resolução de equações vectoriais.

Finalmente, no caso em que duas direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas, a respectiva equação vectorial pode ser escrita como,

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \tag{A.125}$$

ou ainda,

$$c\hat{\mathbf{c}} = a\hat{\mathbf{a}} + b\hat{\mathbf{b}} \tag{A.126}$$

A solução para este caso está ilustrada na figura A.20, onde a vector **C** e as magnitudes *a* e *b* são conhecidos. Assim, a solução deste problema consiste em determinar os pontos de intersecção dos dois arcos de circunferência de raios *a* e *b*. Deve começar-se por definir um sistema de coordenadas *UV*, cujas direcções dos eixos são dados por,

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{k}} \tag{A.127}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{c}} \tag{A.128}$$

Se as coordenadas de um dos pontos de intersecção dos arcos de circunferência, no sistema de coordenadas *UV*, forem *s* e *t*, então,

$$a\hat{\mathbf{a}} = s\hat{\mathbf{u}} + t\hat{\mathbf{v}} \tag{A.129}$$

$$b\hat{\mathbf{b}} = -s\hat{\mathbf{u}} + (c-t)\hat{\mathbf{v}} \tag{A.130}$$

Por um lado, a equação da circunferência de raio *a* é dada por,

$$s^2 + t^2 = a^2 \tag{A.131}$$

Por outro lado, a circunferência de raio *b* tem a equação,

$$s^2 + (t-c)^2 = b^2 \tag{A.132}$$

ou

$$s^2 + t^2 - 2ct + c^2 = b^2 \tag{A.133}$$

Substituindo a equação (A.133) em (A.131) e resolvendo em ordem a t vem que,

$$t = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \tag{A.134}$$

Por outro lado, substituindo a equação (A.134) em (A.131) e resolvendo em ordem a s resulta em,

$$s = \pm\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2} \tag{A.135}$$

O último passo a dar no sentido de encontrar a solução para $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ consiste em substituir as equações (A.134) e (A.135) em (A.129) e (A.130), e substituindo também os valores de $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ de acordo com as suas definições, resultando em,

$$a\hat{\mathbf{a}} = \pm\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2}\,(\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\hat{\mathbf{c}} \tag{A.136}$$

$$b\hat{\mathbf{b}} = \mp\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2}\,(\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{k}}) + \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\hat{\mathbf{c}} \tag{A.137}$$

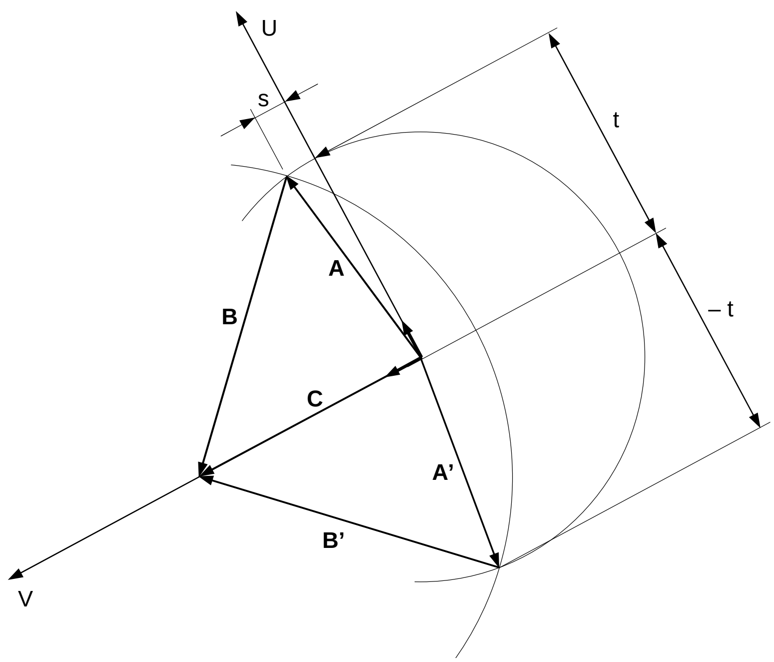


Figura A.20 – Sistema de eixos auxiliar usado na resolução de equações vectoriais em que duas direcções de dois vectores diferentes são desconhecidas.