SOBRE DISJUNÇÕES, CONFLUÊNCIAS E O CENTRO DE GRAVIDADE DA LÓGICA FILOSÓFICA

José Carlos Espírito Santo[1]

Centro de Matemática da Universidade do Minho

I – INTRODUÇÃO

No dizer de Burgess [B2009], o centro de gravidade da Lógica Filosófica é, hoje em dia, a área científica que, em Inglês, se designa por *Theoretical Computer Science*. Não sei bem como traduzir esta designação, mas, se assim é, a área científica assim designada parece ser relevante num painel sobre Matemática e Ciências da Computação, integrado num colóquio sobre as disjunções e confluências entre Humanidades e Ciências. O pequeno trabalho técnico sobre o qual vou aqui escrever pertence à Teoria da Demonstração – pertence, portanto, a um dos compartimentos principais da Lógica Matemática, dos mais próximos da *Theoretical Computer Science*; e é relativo às distinções entre lógicas clássicas e não-clássicas – ora o estudo das lógicas não-clássicas é outra definição da Lógica Filosófica.

O referido trabalho técnico ocupa a segunda parte deste artigo e debruça-se (curiosamente) sobre a operação lógica de *disjunção*, no contexto da lógica clássica. O objectivo do exercício não é tanto o de publicitar o resultado final, mas antes o de ilustrar como, através de exercícios técnicos deste género, que constituem o dia-a-dia de alguns lógicos, se tocam indirectamente questões que talvez possam ser do interesse de alguns colegas das Humanidades. Esta tentativa de *confluência* ocupará a terceira parte deste artigo.

Depois de explicitado o objectivo do artigo, é evidente qual será o seu tom: o cientista tentará, numa linguagem que não é a sua, falar ao humanista em problemas estranhos a este, sem perder a esperança de ser transparente. A ver vamos.

II – DISJUNÇÕES

Na Teoria da Demonstração, as demonstrações lógicas e matemáticas são objecto de estudo. Isso pressupõe a sua formalização, ou seja, a sua tradução em termos de estruturas matemáticas, ditas *derivações*. As derivações são tipicamente geradas por regras de inferência, que se agrupam para constituírem sistemas formais de dedução, passíveis eles próprios de investigação matemática.

Quando Hilbert iniciou a Teoria da Demonstração nas primeiras décadas do Século XX, a formalização das demonstrações estava ao serviço da investigação de questões metamatemáticas – por exemplo a consistência e a completude da Aritmética. Mas, com o tempo, constatou-se que o estudo das derivações e dos sistemas formais de dedução era interessante em si mesmo, e é nesta segunda perspectiva que nos colocamos.

---

[1] O autor é financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia através do projecto PEstOE/MAT/UI0013/2014.

Há, pelo menos, duas razões que tornam o estudo das derivações interessante em si mesmo. Por um lado, há uma variedade grande de sistemas formais de dedução, com vantagens e desvantagens relativas bem marcadas entre sistemas diferentes. Por outro lado, embora as derivações sejam uma formalização das demonstrações e, portanto, partilhem com estas a beleza fria e austera de que falou Russell [R1917], elas são afinal dinâmicas, pois estão munidas e animadas de processos de transformação ricos de aplicações e significado computacional.

Pese embora a variedade de sistemas formais de dedução, estes podem classificar-se em grandes famílias. A família que nos interessa aqui é a da *dedução natural*, cujos sistemas procuram modelar com proximidade o raciocínio que se encontra nas demonstrações que os matemáticos fazem. Em sistemas de dedução natural, o processo de transformação de derivações designa-se por *normalização* e foi originalmente estudado por Prawitz [P1965].

O processo de normalização é gerado por regras de *conversão*, que podem ser de três tipos:

- Conversões principais
- Conversões r. a. a.
- Conversões comutativas

As conversões principais eliminam certas ocorrências de fórmulas/proposições nas derivações que constituem redundâncias. O que interessa reter aqui é que há uma série de situações-tipo de redundância, determinadas pela operação lógica principal da fórmula a eliminar. Assim, haverá conversões para eliminar ocorrências redundantes de uma conjunção, disjunção, negação, etc.

As conversões r. a. a. actuam em ocorrências de fórmulas inferidas por *redução ao absurdo*, e são determinadas pela operação lógica principal da fórmula assim inferida. Prawitz observou que, se uma conjunção $A \wedge B$, por exemplo, é inferida dessa maneira, então tal derivação pode ser rearranjada de modo a utilizar reduções ao absurdo que concluam A e B, ou seja, fórmulas mais simples. A iteração deste processo conduz a uma atomização das conclusões obtidas por redução ao absurdo, mas, crucialmente, exige que a operação lógica de disjunção esteja ausente do sistema. Há uma forma diferente de abordar as conversões r. a. a, adoptada por Stålmarck [S1991], que permite tratar o caso da disjunção. De acordo com von Plato e Siders [PS2012], a ideia deve-se a Statman [S1974]. Vou empregar a mesma ideia, na versão ligeiramente generalizada que se encontra em Rehof-Sørensen [RS1994].

Por outro lado, é visível nos trabalhos de Prawitz e Stålmarck que, para além das referidas conversões r. a. a, que diremos *principais*, há outras, de carácter *auxiliar*, que podem ser escolhidas por ajuste fino, de acordo com as necessidades do resultado ou argumento técnico desejado no momento.

Finalmente, as conversões comutativas são engendradas pela operação lógica de disjunção (também o são pela quantificação existencial, mas neste artigo vamos ater-nos ao nível proposicional). Suponha que já estabeleceu a disjunção $A \vee B$ e que quer mostrar que C segue dessa fórmula. Uma forma de o fazer é argumentando por casos: basta mostrar que C segue quer da hipótese temporária A, quer da hipótese temporária B. Suponha que estas duas derivações de C existem e designemo-las por DA e DB. Suponha ainda que C é afinal, por exemplo, uma conjunção $C1 \wedge C2$. E suponha, finalmente, que, depois de estabelecer $C1 \wedge C2$, inferiu $C1$. Mas, nesse caso, há um caminho alternativo para inferir $C1$ a partir de $A \vee B$: basta acrescentar a inferência de $C1$ a partir de $C1 \wedge C2$ a cada uma das derivações DA e DB. A conversão da primeira derivação de $C1$ na segunda é um exemplo de conversão comutativa. O que comuta é a ordem de aplicação das regras de inferência: na primeira alternativa, a inferência de $C1$ a partir de $C1 \wedge C2$ sucede à demonstração por casos; na segunda, a referida inferência faz parte da referida demonstração.

Alguns autores consideram a existência deste tipo de alternativa e consequentes conversões como um "defeito de sintaxe", uma imperfeição do sistema formal [GLT1989]. Na monografia de Prawitz [P1965], as conversões comutativas são evitadas no tratamento da lógica clássica, porque a disjunção é pura e simplesmente omitida no sistema, na base de que é uma operação lógica definível em termos das restantes operações. Mas esta solução não está disponível no tratamento da lógica intuicionista. Num trabalho recente [FF2009], Ferreira e Ferreira exploram o facto de a disjunção intuicionista ser definível em termos de quantificação de segunda ordem, e observam que esta tradução, quando estendida ao nível das derivações, mapeia conversões comutativas em sequências de conversões principais, as quais estão a salvo de qualquer crítica. A conclusão é que, quando a disjunção intuicionista é vista através da lente da referida tradução, as condenáveis conversões comutativas são afinal sequências de conversões perfeitamente aceitáveis.

Este resultado sugere um regresso à lógica clássica com a seguinte questão: estará a omissão da disjunção sustentada por um resultado dizendo que a tradução da disjunção clássica em termos das outras operações da lógica clássica, se estendida a derivações, produz uma tradução das conversões comutativas em sequências de conversões principais e/ou r. a. a. ?

O resultado técnico que vou aqui anunciar responde afirmativamente a esta questão, conquanto se considere como tradução da disjunção a tradução familiar em termos da conjunção e da negação, dada pela equação $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$, que designaremos como *tradução de De Morgan*; e se estenda esta tradução do nível das fórmulas ao nível das derivações da forma esperada:

- Uma inferência de $A \vee B$ a partir de A é traduzida na seguinte inferência de $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ a partir de A: concluir a negação $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ a partir do facto de se obter uma contradição a partir da hipótese temporária $\neg A \wedge \neg B$ e da hipótese A.
- Uma inferência de C a partir de $A \vee B$ segundo o princípio já referido da demonstração por casos é traduzida numa inferência por redução ao absurdo de C a partir de $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Teorema. Sejam *D1* e *D2* quaisquer derivações no sistema de dedução natural clássico tais que *D1* se reduz a *D2* através de uma conversão comutativa, ou de uma conversão r. a. a. principal para a operação de disjunção; e sejam *E1* e *E2* o resultado de aplicar a tradução de De Morgan a *D1* e *D2* respectivamente. Então, *E1* e *E2* estão relacionadas por uma sequência de conversões dos seguintes tipos: (i) conversões principais para a operação de negação; (ii) conversões r. a. a. principais para a operação de negação; (iii) conversões r. a. a. auxiliares.

A demonstração deste teorema faz-se sem dificuldade por indução nas relações de conversão onde estão *D1* e *D2* [ES2013].

Vimos como a operação lógica de disjunção levanta dois problemas à formulação do sistema de dedução natural para lógica clássica: a existência de conversões comutativas; e qual a formulação exacta das conversões r. a. a. principais. E mencionámos que, em lógica clássica, a regra de inferência por redução ao absurdo engendra um conjunto de conversões auxiliares que podem ser adoptadas consoante objectivos de ocasião. O teorema anterior dá uma justificação para a formulação das conversões r. a. a. principais relativas à disjunção, bem como para a formulação do sistema de dedução natural clássico com omissão pura e simples da disjunção e respectivas conversões comutativas. O teorema indica ainda algumas das conversões r. a. a. auxiliares que devem estar presentes neste último sistema.

III – CONFLUÊNCIAS

Chegado aqui, o humanista - que eu imagino ser o meu interlocutor privilegiado – ainda não sentirá qualquer recompensa por ter subida a vertente íngreme do tecnicismo durante toda a segunda parte do artigo: ainda não se vislumbra um panorama de inesperadas confluências entre Humanidades e Ciências. De pouco consolo serve dizer que deslindar as diferenças entre a disjunção clássica e a disjunção intuicionista contribui para a Lógica Filosófica, e que essas questões, apesar de vagamente filosóficas, são também relevantes para a *Theoretical Computer Science*.

De facto, para chegarmos onde quero chegar, é preciso percorrer ainda um pouco de caminho e falar de uma correspondência entre dois campos de investigação da Lógica, esquematizada do seguinte modo.

I. Sistemas formais de dedução: derivações, fórmulas, normalização
II. Cálculo-λ: termos, tipos lógicos, redução

O Cálculo-λ é um formalismo inventado por Church nos anos 1930 [C1940], originalmente com a intenção de constituir uma fundação sobre a qual se poderia desenvolver a Matemática. Por outro lado, um dos usos do formalismo, desde logo reconhecido por Church e os seus colaboradores, é o de ser uma linguagem para exprimir algoritmos – nesse sentido, quando foi inventado, o Cálculo-λ era uma linguagem de programação *avant la lettre*. Esta dupla vocação do Cálculo-λ não cessou de ser confirmada ao longo do tempo: o Cálculo-λ deu origem a toda uma família de formalismos que está na base de muitas das modernas teorias de tipos (sistemas formais que pretendem capturar a organização do universo lógico-matemático) e linguagens de programação.

Há, porém, uma terceira vocação do Cálculo-λ, a de *linguagem de demonstração*, uma vez reconhecida a correspondência entre os níveis I e II, dita *correspondência de Curry-Howard* [CF1958,H1980,SU2006], que diz o seguinte. Existe uma analogia perfeita entre tipos lógicos e fórmulas, por um lado, e entre termos e derivações, por outro, de tal modo que:

- Se M é um termo representando um habitante do tipo lógico T, então M, visto como a derivação D que lhe é análoga, prova a fórmula A que é análoga ao tipo lógico T.
- Se M se reduz a M' pelo processo de redução que é inerente aos termos do Cálculo-λ, então a derivação D análoga a M converte-se na derivação D' análoga a M' no processo de normalização.

É como se os dois formalismos, o Cálculo-λ e o sistema formal de dedução, fossem duas faces da mesma moeda, não havendo necessidade de distinguir entre tipos T e fórmulas A, nem entre termos M e derivações D, nem entre redução e normalização. De facto, não há necessidade de distinguir entre programar ou executar um programa no Cálculo-λ, por um lado, e demonstrar ou normalizar uma demonstração no sistema formal de dedução, por outro.

Se, por via da correspondência de Curry-Howard, podemos dizer que, num certo sentido, programar e demonstrar são a mesma coisa, quantas consequências haverá a extrair, digamos, ao nível da Pedagogia? De facto, a correspondência não é uma analogia vazia, mas sim uma ligação fecunda, com aplicações que vão do campo mais teórico à tecnologia. Por exemplo, Howard, no seu artigo seminal [H1980], estabelece e usa a correspondência para propor o Cálculo-λ como uma linguagem de construções - a misteriosa entidade na base do carácter construtivo da lógica intuicionista. E, hoje em dia, há sistemas computacionais que executam o Cálculo-λ, oferecendo ferramentas com as quais é possível programar demonstrando (ou vice-versa), e suportando as mais avançadas metodologias de produção de *software*.

Mas o que eu quero sublinhar é o carácter singular do Cálculo-λ. Por um lado, Church fixou de forma lapidar a universalidade do formalismo, na sua famosa tese: um procedimento é algorítmico se, e só se, for definível no Cálculo-λ. Contudo, a correspondência de Curry-Howard dá ao formalismo uma universalidade de tipo diferente: as suas estruturas sintácticas reflectem as estruturas em que se organiza o raciocínio dedutivo. E esta analogia, amplamente verificada, é ainda um princípio de desenho, pois, obviamente, a investigação do raciocínio dedutivo continua e, portanto, do outro lado da correspondência, o Cálculo-λ está ainda em desenvolvimento.

Assim, por exemplo, quando investigamos as conversões comutativas relativas à disjunção, ou quando um teorema dá uma argumento para adoptar determinadas conversões auxiliares, como aconteceu na segunda parte deste artigo, estamos simultaneamente a estudar a semântica do Cálculo-λ, uma vez que está em causa considerar relações de redução ou igualdade entre as expressões que traduzem as derivações relacionadas pelas conversões. Similarmente, quando discutimos se a disjunção deve ou não ser omitida do sistema dedutivo, isso equivale a discutir se uma determinada operação sobre tipos lógicos deve ou não estar disponível no Cálculo-λ.

Este é, espero, o ponto de confluência prometido: uma certa linha de investigação em lógica e *Theoretical Computer Science* vem desenvolvendo uma linguagem que, pelo seu carácter singular, pela sua universalidade, pelo seu princípio lógico de desenho, não pode deixar de apelar ao linguista interessado em linguagens artificiais.

Várias das contribuições para o painel sobre Matemática e Ciências da Computação inseriam-se na área da Linguística Computacional. Sem dúvida que na Linguística há processos para automatizar, sem dúvida que há Computação na Linguística. Mas o que eu tentei aqui frisar é, não só o facto igualmente óbvio de que há Linguística na Computação, mas também que esta última relação tem um dimensão lógica profunda. A computação tem que ser programada, e os programas são textos de uma determinada linguagem. Mas a computação pode ser programada numa linguagem singular, cujo desenvolvimento prossegue na *Theoretical Computer* Science, de braço dado com o desenho e estudo dos sistemas formais de dedução.

Referencias Bibliográficas

[B2009] J. Burgess. Philosophical Logic, 2009. Princeton University Press.

[C1940] A. Church. The Calculi of Lambda-Conversion. Princeton University Press. 1940.

[CF1958] H. B. Curry and R. Feys. Combinatory Logic. North-Holland, 1958

[ES2013] J. Espírito Santo. Contributions to the proof-theory of classical disjunction, 2013. Manuscrito.

[FF2009] F. Ferreira and G. Ferreira. Commuting conversions vs. the standard conversions of the "good" connectives. Studia Logica, 92:63-84, 2009.

[GLT1989] J.-Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor. Proofs and Types. Cambridge University Press, 1989.

[H1980] W. A. Howard. The formulae-as-types notion of construction. In J. P. Seldin and J. R. Hindley, editor, To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, pages 480-490. Academic Press, New York, 1980.

[P1965] D. Prawitz. Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study. Almquist and Wiksell, Stockholm, 1965.

[RS1994] N. Rehof and M. H. Sørensen. The lambda-Delta-calculus. In TACS'94, volume 789 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Verlag, 1994.

[R1917] B. Russell. Mysticism and Logic and Other Essays. George Allen and Unwin Ltd. 1917

[S1991] G. Stålmarck. Normalization theorems for full first order classical natural deduction. The Journal of Symbolic Logic, 56(1):129-149, 1991.

[S1974] R. Statman. Structural complexity of proofs. PhD thesis, Stanford University, 1974.

[SU2006] M. H. Sørensen and P. Urzyczyn. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. Elsevier, 2006

[PS2012] J. von Plato and Annika Siders. Normal derivability in classical natural deduction. The Review of Symbolic Logic, 5(2):205-211, 2012.