O desenvolvimento da argumentação matemática no estudo das funções racionais

Maria da Graça Magalhães
Escola Secundária/3 Henrique Medina
Maria Helena Martinho
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho

Introdução

Nas últimas décadas, são vários os documentos no âmbito da investigação em Educação Matemática que destacam a importância de serem criadas condições favoráveis na sala de aula para experiências cujo foco seja a explicação e a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações e a formulação, avaliação e prova de conjeturas (Boavida, 2005). O facto é que, tem-se vindo a registar que um elevado número de alunos manifestam algumas dificuldades na argumentação matemática, pois fundamentam os seus raciocínios em dados não incluídos nos enunciados das tarefas que lhes são propostas, justificam as suas respostas e efetuam generalizações sem terem inicialmente a preocupação em as testar ou em verificar as conjeturas por si formuladas (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Os alunos revelam nas suas respostas às tarefas propostas, algumas fragilidades no que se refere em assumir um compromisso com uma coerente justificação e reflexão dos seus raciocínios e dos efetuados pelos seus colegas.

Ao serem propostas atividades que promovem e estimulem o desenvolvimento da argumentação matemática, os alunos são responsabilizados a fundamentar os seus raciocínios, a descobrir o porquê de determinados resultados ou situações e são incentivados a entender os argumentos dos restantes elementos da turma (Boavida, Gomes & Machado, 2002). Os alunos ao argumentarem matematicamente não só partilham as suas respostas como explicam e justificam as suas ideias e a forma como pensaram e resolveram a tarefa proposta (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997; Ponte & Serrazina, 2000; Whitenack & Yackel, 2008). Com a implementação, em sala de aula, de tarefas de investigação, os alunos são desafiados a clarificar as suas ideias e raciocínios, oralmente ou por escrito, desenvolvendo assim, a capacidade de comunicar e de argumentar matematicamente (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997; Ponte & Serrazina, 2000; Whitenack & Yackel, 2008). Os alunos ao desenvolverem atividades de cariz investigativo são responsabiliza-

dos e estimulados a saber e a entender a necessidade de fundamentar os seus raciocínios, de explicar o porquê de determinados resultados assim como de entender os argumentos apresentados pelos seus colegas (Boavida *et al.*, 2002). A argumentação matemática tem assim um caráter justificativo, que se exprime através de um raciocínio, assumindo assim um caráter de justificação racional (Pedemonte, 2002; Gil, 2012).
No entanto, para que os alunos desenvolvam a capacidade de argumentação em Matemática devem ser incluídas, de uma forma sistemática, atividades de argumentação e de validação dos resultados (Doeuk, 1999).

Particularmente, no que concerne ao tema das funções, Domingos (2008) considera que em 20 anos de Educação Matemática lhe tem sido dada pouca relevância na escola, apesar de fazer parte do currículo do ensino básico e secundário. As funções são uma importante ferramenta da Matemática, em particular como meio de interpretação da realidade e explicitação dessa mesma realidade, através de gráficos, de tabelas e de expressões (Domingos, 2008). No entanto, tem-se observado que os alunos demonstram ter dificuldades em compreender, em traduzir e em fazer conexões entre as diferentes representações, nomeadamente, em passar da representação gráfica de funções para a sua forma algébrica (Elia, Panaoura, Eracleous e Gagatsis, 2007). Segundo Duval (2006), esta é uma das maiores dificuldades da aprendizagem da Matemática, a da passagem de informação de uma representação para a outra, pois é provocada por uma heterogeneidade semiótica. Neste contexto, o processo de ensino aprendizagem deve dar especial destaque ao estudo das conversões entre representações, permitindo aos alunos uma melhoria na compreensão dos conceitos matemáticos, em particular, do conceito de função (Duval, 2006).

Atualmente, no ensino secundário, as tarefas que são propostas aos alunos em contexto de sala de aula, são na grande maioria, de caráter fechado. Estas tarefas não promovem o desenvolvimento nos alunos do espírito crítico e da capacidade de investigar sobre as diferentes representações, ficando assim, acomodados às informações e aos esclarecimentos do professor. No entanto, a calculadora gráfica permite uma mais fácil e rápida manipulação das representações gráficas, possibilitando a visualização das diferentes representações de funções e libertando tempo para a sua interpretação e para o desenvolvimento de raciocínios e exploração de situações diferenciadas. A calculadora desempenha assim um papel importante na potenciação do desenvolvimento do raciocínio matemático, da investigação e da argumentação matemática (Dugdale, 1993).

Neste quadro, o presente estudo procurou compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática, de uma turma do 11.º ano, ao longo da realização de uma sequência de tarefas de investigação sobre o tema das funções racionais. A partir deste objetivo, esta experiência, procurou dar resposta à seguinte questão: Como evolui a capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano, ao longo da realização de uma sequência de tarefas de investigação?

A argumentação Matemática

A argumentação matemática: caraterísticas e significados

As primeiras teorias sobre a argumentação foram desenvolvidas na sociedade grega. Em particular Aristóteles fez a distinção de três domínios onde podia ser exercida a argumentação: a retórica, a dialética e a analítica. A *retórica* destinava-se a um auditório relativamente passivo em que à pessoa que argumentava não importava o método que utilizava e a estratégia, visto que o objetivo era que o interlocutor fosse persuadido (Pedemonte, 2002). A *dialética* destinava-se a um interlocutor bem consciente do sujeito da argumentação e capaz de responder às questões e de refutar os argumentos do orador. A *analítica* era uma forma específica de racionalidade que não se destinava necessariamente a um público fisicamente constituído.

Pedemonte (2002) propôs uma caracterização de argumentação em Matemática, aproximando-a da dialética e da prova analítica. Caracterizou a argumentação em Matemática e a prova explicitamente nas suas características funcionais e nas características estruturais. As características funcionais determinam a finalidade da argumentação, a sua utilidade e o seu papel no interior de um discurso. As características estruturais permitem identificar um argumento e definir uma estrutura.

Para Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) a argumentação em Matemática entende-se como as

> conversações de carácter explicativo ou justificativo, centradas na matemática, em que assumem um papel preponderante a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjeturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático. (p.84)

Neste estudo foi adotada uma perspetiva próxima da referida por Boavida *et al.* (2008), em que a argumentação matemática é considerada como um processo progressivo e dinâmico em que são apresentadas razões e justificações, na resolução de desacordos.

A atividade de argumentar em Matemática é caracterizada pela sua natureza discursiva, dialética e social (Pedemonte, 2002). A argumentação tem uma *natureza discursiva* pois a linguagem natural é usada como uma ferramenta na comunicação que se desenvolve entre a pessoa que argumenta e o seu interlocutor (Pedemonte, 2002). No entanto, a discursividade da argumentação, ou seja, a argumentação retórica não pode ficar cingida a apenas um argumento, mas sim a um conjunto de argumentos pois exige a capacidade de avaliar um argumento e de o opor a outros (Duval, 1999). A argumentação tem uma *natureza dialética*, quando os raciocínios têm por base ideias consideradas como verdadeiras por quem argumenta (Pedemonte, 2002; Boavida *et al.*, 2008). No entanto, os raciocínios envolvidos na argumentação podem não implicar que se chegue necessariamente a conclusões verdadeiras. A argumentação tem uma *natureza social* na medida em que comporta uma atividade intencional discursiva, onde o discurso é entendido como uma atividade social (Balacheff, 1999).

Numa argumentação coletiva é fundamental que exista um entendimento entre todos os seus elementos mesmo que estejam em causa algumas correções ou reformulações. Esta é uma das características típicas do processo de ensino e aprendizagem, pois a aprendizagem individual do aluno é incorporada num processo social de explicar, esclarecer e ilustrar (Krummheuer, 1998).

A argumentação como atividade de comunicação

Na Matemática, a problemática em torno da argumentação prende-se com a necessidade de cada vez mais os alunos interagirem comunicando quer oralmente quer por escrito, as suas ideias valorizando as linguagens naturais (Douek, 2005). Os alunos devem ser estimulados para que se empenhem em fazer matemática enquanto participantes ativos numa comunidade de discurso, a sala de aula. Como a qualidade da aprendizagem da matemática depende do papel que a comunicação desempenha nessa mesma comunidade, é fundamental que aos alunos seja dado tempo para pensar, clarificar, relacionar e justificar as suas ideias, desenvolvendo assim a capacidade de entender qual a lógica presente numa determinada mensagem (Alrø & Skovsmose, 2002; Antão, 1993; Silver & Smith, 1996). Assim, cada aula deverá ser encarada como um encontro de uma pequena comunidade matemática com momentos "de partilha, de descobertas, de dúvidas, de questões, de conjeturas, de argumentos, meios de prova, justificações" (Boavida, Silva & Fonseca, 2009), desenvolvendo a comunicação de raciocínios, ideias e pensamentos matemáticos de carácter mais profundo.

Quando os alunos desenvolvem tarefas de investigação, em pequeno e em grande grupo, estão-se a criar momentos dedicados à discussão com a clarificação de opiniões adequadas e fundamentadas, podendo melhorar e desenvolver a compreensão do modo como pensam e como raciocinam, adquirindo a capacidade de se organizarem e de clarificarem as suas ideias e opiniões (Fonseca, 2009; Ponte, 2005; Rodrigues, 2008).

No entanto, para que os momentos dedicados à discussão sejam produtivos é necessário que seja dedicado algum tempo aos alunos para que organizem as ideias para que as suas intervenções sejam convincentes e esclarecedoras ao comunicarem as soluções encontradas e processos seguidos na resolução de determinada tarefa. Este processo, caracterizado por ser dinâmico, aberto a questões, permite que os alunos se apercebam da qualidade do seu raciocínio e do que necessitam de alterar e adequar no caso de não ter sido o mais correto (Arends, 2008). A comunicação oral desempenha assim um papel crucial na aula de matemática pois funciona como base para o pensamento e é através dela que o raciocínio se desenvolve (Cai, Lane & Jakabcsin, 1996; Ponte *et al.*, 2007).

Quanto à comunicação escrita, consistindo também numa forma de comunicar, desempenha um papel complementar à oral, tomando um carácter mais refletido e, por isso, se revela importante para o ensino e aprendizagem da Matemática. O relatório é um dos instrumentos que se suporta na comunicação escrita. A construção de um relatório promove a articulação de ideias, explicação de procedimentos, a fundamentação e a análise crítica e reflexiva de processos utilizados e de resultados obtidos durante a exploração de uma determinada tarefa (Semana & Santos, 2008). Como consiste num instrumento com um elevado grau de exigência, a maioria dos alunos revela muitas dificuldades na sua elaboração (Menino, 2004). Assim, é fundamental que os alunos sejam devidamente orientados podendo, para tal, propor-se um tipo de guião que sirva como orientador do processo de escrita. Segundo Boavida *et al.* (2008) na elaboração de um guião, o tipo de questões colocadas desempenha um papel crucial, nomeadamente sugere questões como: "No que reparaste? O que achaste interessante? Que previsões fizeste? Porquê? Que relação te faz lembrar? O que é que as tuas descobertas te fazem pensar?" (p. 69). Este tipo de questões pode ajudar a orientar os alunos no sentido de diferenciarem o que é mais e menos relevante considerar na resolução da tarefa e na construção do respetivo relatório.

No entanto, para que os alunos evoluam na forma como elaboram um relatório escrito, é importante que na sala de aula sejam implementadas, de forma continuada, atividades de caráter investigativo para que os alunos se apropriem dos processos e raciocínios adequados e relevantes à sua execução.

A argumentação e o raciocínio

Na sala de aula de Matemática podem ser identificados diferentes tipos de raciocínio. Polya (1954) distinguiu o raciocínio dedutivo do raciocínio plausível, encarando o primeiro como seguro e o segundo como incerto, provisório e controverso. No raciocínio *plausível* é possível adicionar novo conhecimento ao já existente e é fundamental distinguir uma conjetura de outra conjetura e a razoabilidade de cada uma. No raciocínio *dedutivo* é necessário saber distinguir entre uma prova e uma conjetura e entre uma demonstração válida e uma tentativa inválida. Polya (1968) defendeu, ainda que os dois tipos de raciocínio completam-se e que devem ser ensinados em paralelo, devendo o ensino preparar os alunos para a invenção matemática adaptando-a de acordo com o nível de inteligência de cada um. Desta forma, os alunos são preparados para uma experiência matemática mais completa, mais realista e mais responsável. Como o raciocínio matemático é um processo complexo, este pode ser desenvolvido quando se propõem tarefas que promovam a comunicação e argumentação entre alunos ou entre alunos e professor.

Para Greenes e Findell (1999) existem dois tipos de raciocínio: o dedutivo e o indutivo. O raciocínio *dedutivo* está presente quando os alunos resolvem problemas e quando tiram conclusões a partir de diagramas, gráficos ou tabelas. O raciocínio indutivo envolve a análise de casos particulares, identificando as relações entre esses casos e a generalização dessas relações. A generalização de uma regra ou função que descreve a relação entre qualquer termo ou objeto e a sua posição numa sequência de regras, pode ser apresentada na forma de palavras, símbolos ou gráficos (Greenes & Findell, 1999). Ayalon e Even (2006) salientam que o raciocínio *dedutivo* é o único em que as conclusões derivam das informações previamente dadas e assim não existe a necessidade de serem provadas através de experiências. A matemática é mais identificada com este tipo de raciocínio essencialmente por ser usado como sinónimo de pensamento matemático e porque desempenha um papel fundamental na construção de justificações e provas matemáticas.

Nas últimas décadas, o ensino e a aprendizagem da álgebra mereceram um grande destaque na investigação em educação matemática. Para alguns investigadores os problemas e as dificuldades dos alunos relativamente ao raciocínio algébrico devem-se ao seu grau de abstração. O raciocínio *algébrico* pressupõe que partindo da observação de um determinado conjunto de evidências, os alunos façam a generalização das ideias matemáticas através das argumentações (Blanton & Katput, 2005).

Atualmente, em todos os níveis de ensino, verifica-se uma maior preocupação com o desenvolvimento da compreensão e do raciocínio, apelando à argumentação e à justificação matemáticas (Boavida *et al.*,2008; Yackel & Hanna, 2003). Apesar da atividade de argumentação ser uma componente do raciocínio essencial na construção do conhecimento matemático vários estudos realizados têm verificado que esta prática não se encontra presente em algumas salas de aula (Boavida *et al.*, 2002). Associado a essa ausência está o facto de se tratar de uma tarefa complexa dada a necessidade de se criar ambientes propícios ao desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos.

A argumentação e a prova

Os alunos em todos os níveis de ensino continuam a revelar muita dificuldade no processo de prova matemática e na procura de possíveis caminhos para a resolução de situações problema. Para que esta dificuldade seja ultrapassada é importante que as questões colocadas aos alunos na sala de aula estimulem a formulação e teste de conjeturas (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999). Este processo permite que os alunos sintam a necessidade de recolha de vários dados, de rejeição das primeiras conjeturas formuladas caso não sejam válidas e de reformulação de novas conjeturas. Para que tal objetivo seja alcançado é fundamental que se estabeleçam argumentos plausíveis e provas, para validar ou rejeitar as conjeturas previamente formuladas (Ponte, *et al.*, 1999). As conjeturas devem ser sempre colocadas em causa mesmo quando não se consegue encontrar um contraexemplo que as refute (Pedemonte, 2002).

A formulação de conjeturas, segundo Mason, Burton e Stacey (1982) é o processo de supor ou de perceber se uma afirmação é verdadeira, o que induz a necessidade de investigar a sua veracidade. Segundo estes investigadores "uma conjetura é uma afirmação que parece razoável, mas cuja verdade não está demonstrada" (p.71). No entanto, o processo que envolve a formulação de conjeturas pode-se representar por um processo cíclico que envolve uma sequência de várias fases, nomeadamente: formular uma conjetura acreditando na sua veracidade; verificar se a conjetura é válida para todos os casos conhecidos e exemplos; colocar em causa a veracidade da conjetura tentando encontrar um contraexemplo, na tentativa da sua refutação; compreender a razão pela qual a conjetura é válida ou, em alternativa, como é que poderá ser alterada (Mason *et al.*, 1982).

O processo de formulação de conjeturas advém de processos de generalização e de especialização (Mason *et al.*, 1982). Por um lado, o processo de generalização inicia-se quando se encontra uma regularidade, isto é, quando, após a análise de vários exemplos, se verifica que existem características comuns a todos eles. Por outro lado, o processo de *especialização* consiste em iniciar a investigação com exemplos particulares, escolhidos a partir de uma situação mais geral, e tem como objetivo fundamental tentar entender uma questão previamente colocada, clarificando as suas ideias. No entanto, apesar de, na maior parte das vezes, ser fácil formular uma conjetura, verifica-se que para os alunos não é fácil justificá-la (Mason *et al.*, 1982). Estes investigadores consideram que para um aluno justificar as suas conjeturas necessita de encontrar alguma razão ou estrutura, que enquadre o argumento, ou seja, necessita de estabelecer uma ligação entre o que sabe e o que pretende justificar.

Em particular, quando os alunos efetuam as suas primeiras experiências em que é fundamental formular e avaliar conjeturas, verifica-se que a maioria dos alunos concluem a veracidade destas para a generalidade de objetos de um determinado universo, a partir apenas da verificação de um número pequeno de casos observados e testados (Boavida *et al.*, 2008). Este facto, não é propriamente estranho pois muitas das decisões que são tomadas no dia-a-dia baseiam-se essencialmente num raciocínio do tipo indutivo (Boavida *et al.*, 2008). No entanto, na Matemática este tipo de raciocínios, assim como os argumentos empíricos não são suficientes para que se permita efetuar uma prova. As mesmas autoras sublinham que se revela fundamental incutir e ajudar os alunos, desde cedo, a perceberem que o facto de verificar uma afirmação a partir de exemplos, não permite ter uma garantia de que a conjetura formulada é válida para casos que não foram previamente analisados. Para que os alunos tenham a certeza de que a conjetura que formularam é válida é necessário que encontrem uma justificação para o porquê da sua veracidade, ou seja, é fundamental que produzam uma prova matemática para a conjetura previamente formulada (Boavida *et al.*, 2008).

O contexto em que os alunos encontram as provas matemáticas, pode influenciar as suas perceções do valor da prova. Ao criar-se um ambiente no qual os alunos podem experimentar em primeira mão o que é necessário para convencer os outros quanto à verdade ou falsidade das proposições, a prova torna-se num instrumento de valor pessoal que os tornará mais capazes se poder usar numa situação futura (Alibert & Thomas, 1991).

Assim, a prova desempenha um papel preponderante em Matemática (Gholamazad, Liljedahl, & Zazkis, 2003) pois, "a prova é uma característica essencial da disciplina de Matemática e é uma componente fundamental na educação matemática" (Hanna & Jahnke, 1996, p. 877), e ainda é um instrumento importante para a promoção da compreensão da Matemática, na sala de aula. Knipping (2004) considera que as argumentações são processos coletivos em que o professor e os alunos desenvolvem em conjunto a prova matemática. Esses momentos coletivos enriquecem o conhecimento das argumentações dos alunos e ajuda a uma melhor compreensão dos processos de raciocínio que os leva a aceitar a prova matemática (Knipping, 2008).

Os métodos de justificação, em determinadas situações, podem ser ferramentas de ensino, adequadas e eficazes. Hanna e Jahnke (1996) referem que até os matemáticos mais experientes preferem a prova que explique, ou seja, a prova criadora do entendimento. É primordial, que na prova não só se considere "o conhecimento de que" mas também "o conhecimento do porquê" (p.905).

Metodologia

Opções metodológicas e instrumentos

Tendo em conta o objetivo principal deste estudo, o de compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente dos alunos quando exploram tarefas de investigação, e o facto de se realizar numa turma durante a aula de Matemática, ou seja, no seu ambiente natural, a professora investigadora, primeira autora deste artigo, optou por efetuar um estudo de carácter qualitativo e essencialmente descritivo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 2006). Segundo estes autores, quando se pretende desenvolver uma investigação de carácter qualitativo, as questões propostas para serem investigadas são estabelecidas de acordo com o fenómeno que se pretende estudar no seu contexto natural e em toda a sua complexidade.

Dentro de uma metodologia qualitativa, neste estudo optou-se pelo estudo de caso que segundo Yin (1984) é um modelo de investigação que se aplica aos casos em que o fenómeno em estudo não pode ser dissociado do seu contexto. O *estudo de caso* corresponde à investigação de um caso particular, de uma situação com uma certa especificidade, procurando descobrir o que detém de mais característico e essencial, para assim contribuir para uma melhor compreensão de um determinado fenómeno de interesse (Ponte, 2006). Um estudo de caso descreve, analisa e interpreta uma situação particular, o caso.

O presente estudo enquadra-se, assim, num paradigma interpretativo e baseia-se numa experiência implementada numa turma do ensino secundário durante o ano letivo de 2009/10, uma turma do 11.º ano do Curso Científico-humanístico de Ciências e Tecnologias constituída por vinte e cinco alunos, dos quais sete eram rapazes e dezoito eram raparigas, e em que a professora investigadora, primeira autora deste artigo, lecionava a disciplina de Matemática A (Magalhães, 2010). Uma das razões para a seleção da turma foi o facto de se tratar de uma turma com continuidade pedagógica, iniciada no 10.º ano, em que os alunos sempre se mostraram interessados e motivados pela disciplina de Matemática, apesar de algumas dificuldades diagnosticadas. Foi também fundamental o facto de a turma em estudo estar habituada a desenvolver trabalhos de investigação matemática de forma sistemática e contínua em diferentes conteúdos do programa desde o início do terceiro ciclo. Assim, o foco da investigação foi colocado nos alunos de uma turma do 11.º ano, constituindo assim, todos os seus elementos o caso em estudo.

Com esta experiência, pretendeu-se estudar o tema das funções, em particular as racionais, que designam todas as funções cuja expressão analítica se reduz ao quociente entre dois polinómios inteiros em x, ou seja, $R(x) = P(x)/Q(x)$. Este estudo consistiu na exploração de uma sequência de tarefas de modo a que os alunos construíssem o seu próprio conhecimento, na noção do conceito e no comportamento das funções racionais.

A recolha de dados apoiou-se em diferentes instrumentos, com o objetivo de ser possível efetuar uma análise detalhada do estudo e favorecer desta forma a sua triangulação. Assim, recorreu-se à observação de aulas (gravações áudio e vídeo) e à recolha de documentos escritos elaborados pelos alunos individualmente e em grupo. Todo o material recolhido após a exploração de cada uma das tarefas foi posteriormente organizado de acordo com os diferentes momentos das aulas: trabalho de grupo, discussão na turma e relatório individual. Tendo em conta estes diferentes momentos e considerando o papel que cada um desempenha no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos, foram, no contexto deste artigo, apresentados de forma cruzada e dividida em duas partes: i) formulação e teste de conjeturas e ii) da conjetura à prova.

A sequência de tarefas

A elaboração e a seleção de tarefas para a efetivação desta experiência foram realizadas pela professora investigadora de forma ponderada, fruto de uma pesquisa exaustiva sobre o tema das funções racionais. Como se pretendia que os alunos desenvolvessem a capacidade de argumentar matematicamente, foi implementada uma sequência de quatro tarefas de investigação sobre o tema das funções racionais (Anexo 1). A sequência de tarefas foi elaborada com o intuito de que os alunos construíssem o conceito de função racional e estudassem as suas caraterísticas, partindo do estudo de uma família de funções mais simples para uma mais complexa. Para este estudo a calculadora gráfica foi utilizada como instrumento de apoio à investigação e os alunos trabalharam em pequenos grupos de três ou de quatro elementos.

Antes da implementação da primeira tarefa a professora investigadora apresentou e entregou a todos os alunos um documento (Anexo 2) onde constavam os aspetos importantes a ter em conta para a realização da sequência de tarefas, nomeadamente, como deveriam desenvolver o trabalho em pequeno grupo, durante a discussão em grande grupo e como deveriam elaborar o relatório individual de investigação. Posteriormente a estes esclarecimentos a professora investigadora passou à concretização da experiência com a implementação da sequência de quatro tarefas de investigação sobre o tema das funções racionais.

Para cada tarefa proposta na aula a professora organizou o trabalho em diferentes momentos: introdução da tarefa, realização da tarefa em grupo, uma discussão em grande grupo e, finalmente, a elaboração de um relatório individual de investigação. Durante a implementação das tarefas a professora investigadora, enquanto observadora participante, procurou estar atenta às estratégias, raciocínios e dúvidas suscitadas pelos alunos de modo que todos mantivessem sempre uma postura investigativa perante cada uma das tarefas propostas. Em particular, a professora não introduziu o conceito de função racional e suas caraterísticas, pois pretendia que os alunos explorassem os diferentes tipos de famílias de funções estimulando a elaboração de diferentes conjeturas e tentativas de prova durante a realização da tarefa em grupo. Na discussão em grupo-turma o conteúdo temático foi discutido pormenorizadamente tendo sido partilhados os resultados obtidos pelos pequenos grupos e clarificados pela professora investigadora sempre que oportuno.

A *primeira tarefa* foi elaborada de forma a introduzir o capítulo das funções racionais. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos investigassem como é que variava o gráfico da função g dada pela expressão $g(x) = 1/f(x)$, conhecendo eles o comportamento da função afim $f(x) = ax + b$, em que a e b designavam parâmetros reais. Nesta tarefa o aluno teria de efetuar as suas conjeturas de modo a generalizar como é que variava a função do tipo $1/(ax + b)$. Para estudar a variação das duas funções f e g o aluno deveria atribuir diferentes valores a cada um dos parâmetros de forma a estudar a sua influência no comportamento do gráfico desta família de funções racionais.

Na *segunda tarefa*, era pedido aos alunos que investigassem como variava a família de funções f, tal que $f(x) = a + b/(cx + d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, procurando perceber qual o efeito de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico da função. O estudo da influência dos vários parâmetros na família de funções faz com que os alunos compreendam melhor o efeito da alteração desses parâmetros no comportamento gráfico das funções.

A *terceira tarefa* era de cariz mais prático e pretendia-se que os alunos aplicassem o estudo desenvolvido nas tarefas anteriores sobre as funções racionais e descobrissem uma expressão algébrica da função que permitisse determinar as dimensões de todos os retângulos que verificassem as seguintes propriedades: o perímetro é numericamente igual à área e as medidas de comprimento dos lados do retângulo são números naturais. Esta tarefa tinha como objetivo que os alunos explorassem o gráfico da função racional, satisfazendo um dos objetivos do programa, que considera que os alunos devem explorar modelos matemáticos que representem funções reais.

A *quarta tarefa* tinha como objetivo inicial que os alunos estudassem o comportamento do gráfico da família de funções do tipo $f(x) = k/ax^2$, em que a e k pertencem a $\mathbb{R}$. Neste caso era importante que os alunos verificassem que esta família de funções tinha um comportamento gráfico diferente da família de funções das duas tarefas anteriores. Para além deste estudo era também pedido, nesta tarefa que considerassem a família de funções $g(x) = f(x - h)$, com $h \in \mathbb{R}$ e investigassem como variava o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f procurando perceber qual o efeito de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico da função g.

Planificação das tarefas

A planificação da aplicação das tarefas foi efetuada pela professora investigadora para que os alunos, de forma autónoma, investigassem o comportamento gráfico das funções racionais e que tirassem conclusões sobre algumas das noções associadas ao conceito de função, tais como: o domínio, o contradomínio, monotonia, extremos e assintotas. A investigação foi desenvolvida no capítulo das *Funções* visto ser um assunto importante e em que os alunos habitualmente têm algumas dificuldades na interpretação e aplicação a situações reais.

As aulas que foram dedicadas à exploração das tarefas desenvolveram-se em quatro diferentes fases: (i) breve introdução à tarefa; (ii) exploração da tarefa em pequeno grupo; (iii) discussão em grande grupo sobre as conclusões obtidas na investigação da tarefa; e (iv) elaboração de um relatório escrito individualmente e respetiva reflexão.

Pelo facto de um dos objetivos desta experiência ser o estudo da evolução da argumentação matemática no desenvolvimento das diferentes tarefas, a professora investigadora deu atenção a todas as fases da sua exploração. No entanto, à quarta fase foi dado especial relevo por se tratar da elaboração de um relatório em que cada aluno tinha que escrever todo o processo de investigação desenvolvido pelo seu grupo de trabalho e especialmente a sua interpretação, conclusão e reflexão sobre cada uma das tarefas propostas.

Com a implementação do relatório individual foi dada a oportunidade ao aluno de sistematização das suas próprias ideias sobre o trabalho realizado e o de desenvolver a sua própria aprendizagem de forma reflexiva e crítica, evidenciando as conjeturas seguidas e as abandonadas, mas principalmente os seus êxitos e as suas dificuldades em todo o processo investigativo (em pequeno ou em grupo-turma).

Assim, para a realização do presente estudo, a investigadora efetuou uma planificação de forma a ser lecionado o tema das funções racionais durante o mês de Fevereiro. A aplicação das tarefas desenvolveu-se, de acordo com o quadro seguinte (Quadro 1).

Quadro 1 — Aplicação das tarefas

Aulas observadas (Blocos de 90 minutos)	**Tarefa**
1ª Aula — 2/02/2010	Tarefa 1 — trabalho de grupo
2ª Aula — 3/02/2010	Tarefa 1 — conclusão do trabalho de grupo — 1ª parte da aula e início da 2ª parte Discussão na turma — na parte final da aula
3ª Aula — 8/02/2010	Tarefa 1 — conclusão da discussão na turma — 1ª parte da aula Tarefa 2 — trabalho de grupo — 2ª parte da aula
4ª Aula — 9/02/2010	Tarefa 2 - conclusão do trabalho de grupo
5ª Aula — 10/02/2010	Tarefa 2 — discussão na turma — 1ª parte da aula Tarefa 3 — trabalho de grupo — 2ª parte da aula
6ª Aula — 22/02/2010	Tarefa 3 — conclusão do trabalho de grupo
7ª Aula — 23/02/2010	Tarefa 3 — discussão na turma — 1ª parte da aula Tarefa 4 — trabalho de grupo — 2ª parte da aula
8ª Aula — 24/02/2010	Tarefa 4 — conclusão do trabalho de grupo — 1ª parte da aula Discussão na turma — 2ª parte da aula

É de salientar que na realização das diferentes tarefas, a professora investigadora procurou não limitar demasiado o tempo relativo ao processo de investigação desenvolvido por cada um dos grupos nem de discussão em grupo-turma. Para a discussão em grande grupo foi utilizado o quadro interativo com a calculadora gráfica previamente instalada para que pudessem ser gravados todos os *flipchart* relativos a cada uma das tarefas.

Durante cada uma das tarefas, a professora investigadora incentivou os alunos a explorarem ao máximo todas as versatilidades da calculadora gráfica de forma a retirarem as informações necessárias para a concretização e investigação das tarefas propostas.

Resultados

A análise dos dados decorreu de acordo com as diferentes fases em que o estudo foi efetuado, nomeadamente, no trabalho de grupo, na discussão na turma e no relatório e reflexão. Na realização dos trabalhos de grupo os alunos utilizaram a calculadora gráfica e na discussão desenvolvida em grande grupo foi utilizado o quadro interativo com a calculadora gráfica previamente instalada.

Tarefa 1

Nesta tarefa foi proposto aos alunos que em grupo estudassem o comportamento da função g, sabendo que $g(x) = 1/f(x)$ e $f(x) = ax + b$ com a e b números reais. Durante a realização desta primeira tarefa os alunos sentiram algumas dificuldades, inicialmente na interpretação do enunciado e posteriormente na forma como deveriam proceder para efetuarem a investigação. Por exemplo o *grupo* 2 iniciou o seu trabalho tentando entender o que é que se pretendia com a presente investigação.

Luísa: Investiga como varia o gráfico da função $f(x)$…

Sónia: Para investigar, pegamos na função $f(x) = ax + b$ e inventamos valores para e e substituímos em baixo para ver como é que fica a $g(x)$.

Julieta: Pois. Isto é o inverso porque é sobre qualquer coisa.

Luísa: Temos de aumentar o declive e o valor da ordenada na origem no eixo das ordenadas e depois ver como varia.

Esta dificuldade inicial resultou do facto de alguns alunos estarem a utilizar incorretamente o conceito de função afim. Com a exploração da tarefa alguns alunos elaboraram uma conjetura relativa à construção do conceito de assintota, que inicialmente denominaram de "buraco", "paragem" ou de "falha". Este resultado é constatado no diálogo desenvolvido no *grupo* 5.

Professora: Qual foi a função considerada inicialmente?

David: $f(x) = 3x + 2$.

Professora: Reparem no gráfico da função… Atenção que na calculadora têm o menu tabela que permite calcular todos os valores da função…

David: Tem aqui uma paragem.

Rosa: Isto é, as assintotas.

João: São os "buracos".

Este facto, relativamente à formulação do conceito de assintota não é de estranhar pois esta primeira tarefa foi aplicada como introdução ao tema das funções racionais. Apesar das dificuldades na fase de apropriação da tarefa, as lacunas foram sendo resolvidas quando os alunos começaram a atribuir diferentes valores aos parâmetros a e b e verificaram qual o comportamento gráfico de cada uma das funções. Os alunos descobriram que existiam algumas regularidades quando atribuíram determinados valores às incógnitas e começaram a impor condições relativamente a cada uma das conclusões que foram obtendo.

Durante a discussão em pequenos e em grande grupo, os alunos argumentaram relativamente às conjeturas formuladas e testadas, por si e pelos seus colegas, e efetuaram uma tentativa de prova das mesmas, através do estudo de vários exemplos, obtiveram uma generalização para a família de funções desta tarefa. Por exemplo, o *grupo* 1 salientou no seu diálogo que a equação da assintota vertical para a função g era $x = -b/a$.

Fausto: Tem de haver uma fórmula que nos dê o valor da assintota.

Elisa: Para acharmos os zeros iguala-se a expressão a zero, e vemos que dá… A expressão que der é o valor da assintota.

Alexandra: Então a expressão é $x = -b/a$.

Fausto: Substitui essa expressão para os valores 2 e 5 que consideramos anteriormente.

Elisa: Sim a expressão está certa pois o valor da assintota dá –2,5.

Alexandra: Mas como aqui a professora pede as expressões gerais, o domínio fica $\mathbb{R}\backslash\{-b/a\}$.

Júlia: E o contradomínio qual é?

Fausto: Olha o contradomínio é no eixo dos yy, por isso, é $\{0\}$, porque se virmos no gráfico a função não toca no zero.

Alexandra: Mas então isso também é uma assintota. E será que é sempre zero?

Elisa: Muda-se os valores e vemos se muda ou não. Se mudar tentamos ver se também há alguma expressão.

Elisa: Não muda.

Júlia: Então pronto, a assintota horizontal é sempre 0.

Neste *grupo* 1 tornou-se evidente a formulação de conjeturas e a necessidade que os alunos têm de verificar para todos os casos obtendo assim uma generalização.

Num momento de discussão em grande grupo, Aurora dirigiu-se ao quadro interativo, por sugestão da professora, e escreveu uma das conclusões do seu grupo para a família de funções consideradas na primeira tarefa (fig. 1).

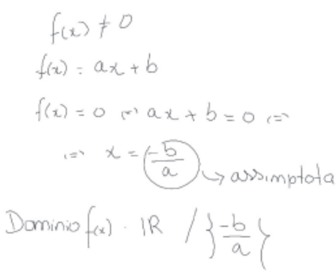
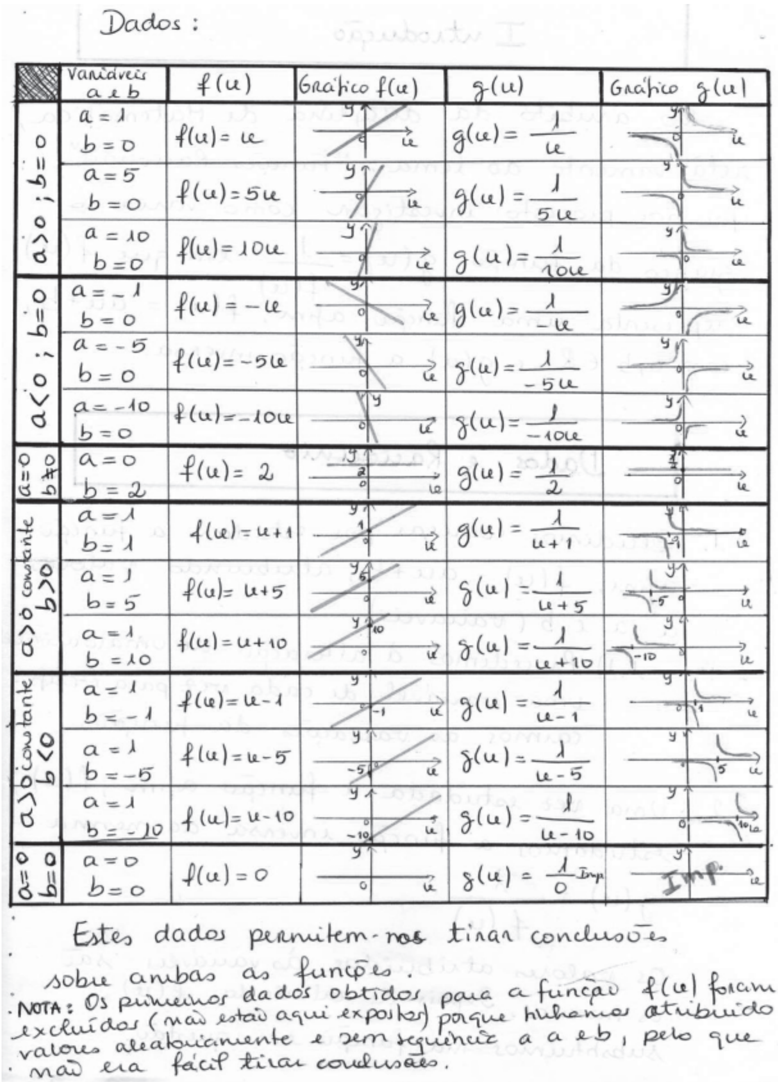


Figura 1. *Flipchart* da tarefa 1 escrito por Aurora

Esta conclusão referia que o zero da função f é a assintota da função g. Provaram a conjetura concluindo também que o domínio da inversa da função afim é o conjunto dos números reais exceto a sua assintota.

Pela análise dos relatórios elaborados pelos alunos, constatou-se que alguns deles não referiram as conjeturas abandonadas durante o decorrer da exploração da tarefa. Estes alunos limitaram-se a explicar como resolveram a tarefa analiticamente (fig.2), esquecendo-se, por vezes, de argumentar relativamente ao processo de exploração da mesma.



Dados:

	Variáveis a e b	$f(x)$	Gráfico $f(x)$	$g(x)$	Gráfico $g(x)$
$a>0;\ b=0$	$a=1$, $b=0$	$f(x)=x$		$g(x)=\frac{1}{x}$	
	$a=5$, $b=0$	$f(x)=5x$		$g(x)=\frac{1}{5x}$	
	$a=10$, $b=0$	$f(x)=10x$		$g(x)=\frac{1}{10x}$	
$a<0;\ b=0$	$a=-1$, $b=0$	$f(x)=-x$		$g(x)=\frac{1}{-x}$	
	$a=-5$, $b=0$	$f(x)=-5x$		$g(x)=\frac{1}{-5x}$	
	$a=-10$, $b=0$	$f(x)=-10x$		$g(x)=\frac{1}{-10x}$	
$a=0$, $b\neq 0$	$a=0$, $b=2$	$f(x)=2$		$g(x)=\frac{1}{2}$	
$a>0$ constante, $b>0$	$a=1$, $b=1$	$f(x)=x+1$		$g(x)=\frac{1}{x+1}$	
	$a=1$, $b=5$	$f(x)=x+5$		$g(x)=\frac{1}{x+5}$	
	$a=1$, $b=10$	$f(x)=x+10$		$g(x)=\frac{1}{x+10}$	
$a>0$ constante, $b<0$	$a=1$, $b=-1$	$f(x)=x-1$		$g(x)=\frac{1}{x-1}$	
	$a=1$, $b=-5$	$f(x)=x-5$		$g(x)=\frac{1}{x-5}$	
	$a=1$, $b=-10$	$f(x)=x-10$		$g(x)=\frac{1}{x-10}$	
$a=0$, $b=0$	$a=0$, $b=0$	$f(x)=0$		$g(x)=\frac{1}{0}$ Imp.	Imp.

Estes dados permitem-nos tirar conclusões sobre ambas as funções.

NOTA: Os primeiros dados obtidos para a função $f(x)$ foram excluídos (não estão aqui expostos) porque tínhamos atribuído valores aleatoriamente e sem sequência a a e b, pelo que não era fácil tirar conclusões.

Figura 2. Excerto do relatório da tarefa 1 de Julieta

Note-se que no quadro considerado por Julieta de forma a sintetizar as conjeturas formuladas pelo seu grupo a aluna referiu que inicialmente atribuíram valores aleatórios às incógnitas a e b. Posteriormente, organizaram os resultados obtidos e impuseram condições aos valores das incógnitas de forma a obterem algumas conclusões da tarefa.

Para colmatar esta lacuna, a professora investigadora incentivou-os a melhorar o primeiro relatório, para que fossem mais explícitos no processo de raciocínio efetuado, não receando argumentar relativamente às conjeturas abandonadas (fig. 3), pois os erros cometidos fazem parte de todo o processo de investigação.

Conjecturas seguidas e abandonadas:

1º caso:

Consideramos este 1º caso como se fosse a nossa função original escolhendo os valores mais simples, e também uma função em que não havia cruzamentos com o eixo dos yy. Esta é a única função que é impar por definição, ou seja, em relação á origem.

2º ao 5ºcaso:

Nas próximas condições (do 2º ao 5º caso) aumentamos o valor de b para verificar qual o deslocamento da função.

Com as várias experiências efectuadas verificamos que a função se desloca no sentido da direita para a esquerda, verifica se também o deslocamento da assimptota, dependem uma da outra e o valor de cruzamento da função f com o eixo dos yy também vai diminuindo.

6º Caso:

A condição seguinte foi seleccionada porque tínhamos visualizado nas experiências anteriores que quando o b era por ex. 4 a coordenada de cruzamento no eixo dos yy era $\frac{1}{4}$, assim quisemos verificar se quando o b era 0,25 o cruzamento no eixo dos yy era 4.

7º e 8º Caso:

Nestes dois últimos casos decidimos variar o valor de a, aqui ao mesmo tempo também mostra a variação do valor de b, mas com tentativas efectuadas na maquina sabemos que ao aumentar o valor de a a função desloca se no sentido da esquerda para a direita.

- Uma falha foi ter exagerado na atribuição de valores ao b, apenas com dois ou três já conseguíamos chegar a conclusão desejada.
- Para calcular a assimptota pensamos que o denominador tinha que ser diferente de 0, e assim foi só resolver a equação. Também com a máquina calculadora, na tabela verificávamos quando o valor de y dá error.

Figura 3. Excerto do relatório da tarefa 1 de Célia

Célia considerou que não deveria ter considerado tantos exemplos em que variava o valor do parâmetro *b*, visto que com menos casos conseguia chegar a uma conclusão relativamente às conjeturas formuladas. Note-se que, esta aluna não estudou o comportamento da família de funções para os casos em que os valores são negativos, de *a* e/ou de *b*. A professora investigadora chamou a atenção para este facto, tendo a aluna posteriormente associado ao seu relatório mais quatro casos, em que as variáveis eram ambas negativas ou apenas uma delas.

No final do relatório, os alunos realizaram as suas reflexões sobre o desenvolvimento dos trabalhos de grupo, desta primeira tarefa. Raul salientou que esta primeira investigação foi "bastante interessante e didática" (fig. 4) e, que através da sua exploração, tiveram a possibilidade de aprender vários conceitos sobre as funções racionais.

Esta primeira tarefa foi bastante interessante e didática. Com a realização desta tarefa pudemos aprender variados conceitos e sobretudo aprender sobre este tipo de funções racionais. O grupo trabalhou em conjunto para a correcta realização desta tarefa, a discussão após a realização da mesma foi bastante pertinente e ajudou-nos bastante a entender a função em questão.

Figura 4. Excerto da reflexão sobre a tarefa 1 de Raúl

Uma outra aluna, Célia, referiu que este método de ensino em que as tarefas de investigação são implementadas como forma de o aluno construir o seu próprio conhecimento, faz com que estas sejam tão interessantes como entusiasmantes (fig.5).

As falhas que cometemos durante o trabalho e também as ideias que foram essenciais para a sua realização seram uma ajuda para as próximas tarefas.

O nosso grupo trabalhou bem, colaboramos uns com os outros, cada um ia dando a sua opinião, e sempre que não percebíamos alguma coisa dita pelo colega ele tentava explicar de forma a compreender. Cada um tirou os seus apontamentos de acordo com as conclusões a que íamos chegando.

Com a finalidade deste trabalho posso concluir que foi uma tarefa bastante interessante, são formas diferentes de aprendizagem que nos entusiasmam pois assim estamos em diálogo com os colegas trocando sempre as nossas ideias e opiniões , tornando se assim uma Matemática ainda mais divertida, que até nem nos damos pelo tempo passar durante a aula.

No final de trabalho em grupo é engraçado a discussão em turma, porque existem opiniões diferentes gerando uma discussão até nos apercebemos quem tem razão. Com essa discussão ate nós mesmos chegamos a conclusões que nunca tínhamos pensado enquanto trabalhávamos em grupo.

Para trabalhos de investigação torna-se mais facilitada a realização em grupo, pois assim existe uma troca de ideias e inter-ajuda com todos e podemos alcançar objectivos que se torna difícil ser alcançado individualmente.

Figura 5. Excerto da reflexão sobre a tarefa 1 de Célia

Esta aluna sublinhou que as falhas de raciocínio cometidas pelo seu grupo no desenvolvimento desta primeira tarefa de investigação podiam proporcionar uma ajuda para a exploração das tarefas seguintes. Na sua reflexão, relativamente à discussão na turma, a aluna referiu que foi importante no que concerne à partilha de diferentes ideias e de opiniões entre todos os elementos. Célia salientou também que com os trabalhos de investigação desenvolvidos em grupo, os alunos podem alcançar objetivos que dificilmente eram possíveis de atingir caso fossem desenvolvidos individualmente. Justificou-se, argumentando que nos trabalhos de investigação em grupo desenvolve-se um ambiente de interajuda, em que os alunos partilham ideias e opiniões. Esta aluna considerou que este tipo de investigações "são interessantes e motivadoras da aprendizagem dos alunos pois tornam a Matemática, uma disciplina muito mais variada e divertida".

Tarefa 2

Durante a realização da segunda tarefa os alunos demonstraram estar mais à vontade, na interpretação do enunciado e na forma como deveria proceder para efetuar a investigação pois esta tarefa tratava-se de uma extensão da anterior. Este facto registou-se devido à família de funções a estudar, $f(x) = a + b/(cx + d)$, englobar a estudada durante a investigação da tarefa 1. Nomeadamente, o *grupo* 3 organizou o seu raciocínio criando uma função genérica fixa para que depois pudessem comparar a sua representação gráfica com a de outras funções, em que os valores dos parâmetros eram diferentes.

Raúl: Vamos primeiro criar uma função genérica. Então $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$ vai ser aquela $1/x$ que foi a primeira que estudamos na tarefa 1.

Margarida: E dizemos isso! Que quando $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

Raúl: … temos a função estudada na tarefa 1.

Célia: Então dizemos que essa foi a original no outro trabalho e por isso já estudámos.

Raúl: Vamos agora atribuir valores simples a todos e criamos uma original para esta tarefa: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1$.

Nesta tarefa, os alunos facilmente organizaram o seu raciocínio, apesar de terem de estudar o efeito da alteração dos quatro parâmetros na representação gráfica da família de funções.

Durante a investigação desta tarefa em pequenos grupos, verificou-se que os alunos manifestaram uma grande evolução no desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente e demonstram ter menos dúvidas na investigação, pois formularam e testaram as suas conjeturas, assim como reconheceram a necessidade de as tentar provar. Os alunos estruturaram o seu processo de raciocínio, encontraram argumentos válidos para as suas conjeturas e iniciaram um processo rudimentar de prova matemática, que, no entender da professora investigadora, esteve mais próxima de uma generalização. Por exemplo, no grupo 7, as alunas chegaram a várias conclusões relativamente à família de funções sugerida na tarefa 2, considerando como função original $f(x) = 1/x$. A escolha, por parte do grupo, de uma função inicial permitiu tirar conclusões para a família de funções, por comparação com a original.

Vitória: Acho que já estamos prontos para tira as conclusões.

Dora: Certo. Então a função é injetiva em todos os casos.

Rui: A função é ímpar em relação à assintota e ímpar em relação a origem na função original.

Maria: A função apresenta zeros, menos na original.

Vitória: O domínio é $\mathbb{R}$ exceto $-d/c$ que corresponde a assintota vertical, não é?

Maria: Sim, e o contradomínio é $\mathbb{R}$ exceto a que corresponde a assintota horizontal.

Rui: O parâmetro a influencia diretamente a assintota horizontal.

Dora: A monotonia varia com os valores do b e do c.

Rui: Podemos dizer que quando b aumenta, a função sofre uma translação afastando-se do eixo dos yy?

Maria: Sim, e quando a é diferente de zero então a função tem zeros, e também a função é contínua exceto na assintota.

Na discussão com toda a turma os alunos manifestaram-se, recorrendo a raciocínios mais elaborados do que os verificados na tarefa anterior. Com alguma facilidade, apresentaram argumentos válidos de forma a validar ou refutar as conjeturas formuladas pelos seus colegas de turma. Por exemplo, alguns alunos apresentaram argumentos que permitissem chegar às equações das assintotas.

Aurora: Oh stora, por exemplo neste caso quando é menor que zero e dando valores mais baixos, a função desloca-se para baixo e se dermos valores mais altos ela desloca-se para cima…

Célia: Sim…

Raúl: … claro, pois a assintota vai ser positiva ou negativa conforme os valores de a.

Professora: Então, conforme está a dizer a Aurora que é muito importante, se o valor de a é positivo a função desloca-se para cima e …

Raúl: … a função sobe…

David: … no eixo dos yy…

Professora: … exato e se o valor de a for negativo a função…

David: … a função desce em relação ao eixo dos yy.

Raúl: O parâmetro a influência a assintota horizontal.

Outra conjetura, de seguida foi formulada por Raúl e de imediato passou ao seu teste e respetiva prova.

Raúl: Nós chegamos à conclusão que se b e c tiverem o mesmo sinal a função é monótona decrescente e se tiverem sinais diferentes a função é monótona crescente.

A professora para que todos os alunos entendessem a conjetura formulada pelo Raúl e os seus argumentos sugeriu que escrevessem no quadro interativo as conclusões obtidas na discussão relativamente à monotonia da família de funções desta tarefa.

Outros argumentos foram surgindo ao longo da discussão, em que os alunos procuraram encontrar conclusões para a família de funções em estudo. Por exemplo, os alunos constataram que caso os valores dos parâmetros fossem $a = 0$ e $d = 0$, a função resultante ficava igual a uma das funções estudada na tarefa 1.

Dora: Quando $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$…

Professora: …a função fica igual a quê?

Dora: $f(x) = 1/x$.

Elisa: Estamos num caso da primeira tarefa!

Professora: A Elisa disse e muito bem. Estamos novamente na primeira tarefa.

Neste momento da discussão, os alunos confirmaram que a família de funções estudada na tarefa 1 era um caso particular da família investigada na tarefa 2.

No relatório desenvolvido individualmente, constatou-se que os alunos elaboraram-no de uma forma mais metódica do que o realizado na tarefa anterior, tiveram o cuidado de explicar todo o processo de investigação desenvolvido pelo seu grupo de trabalho, argumentando sobre todas as conjeturas seguidas e sobre todas as que foram abandonadas. Por exemplo, Julieta que após ter registado todas as conjeturas, passou à apresentação dos seus argumentos de forma a justificar as conclusões obtidas na investigação (fig.6). Note-se que a aluna, após o estudo exaustivo de cada um dos casos estudados, justificou os resultados obtidos para cada um deles.

Como na tarefa anterior foi pedido aos alunos que fizessem uma reflexão sobre esta tarefa. Alexandra, por exemplo, realçou a importância da cooperação, compreensão, entreajuda e espírito crítico no desenvolvimento do trabalho de grupo. A mesma aluna salientou a importância da discussão desenvolvida na turma pois considerou que proporciona o desenvolvimento de "capacidades matemáticas, como também capacidades de empatia e de entendimento entre todos os elementos da turma" (reflexão de Alexandra).

Uma outra aluna, Célia, refere-se ao processo de aprendizagem: "estou a aprender as funções de uma forma interessante, em que chego eu às conclusões e os erros que são feitos por mim, mais dificilmente serão esquecidos". Esta aluna salientou, na sua reflexão, que o erro faz parte da aprendizagem e, assim, do desenvolvimento do conhecimento dos alunos.

→ Quando c e d = 0, a função f(x) é impossível pois qualquer número a dividir por 0 é impossível;

→ Quando a = 0, a função fica igual à estudada anteriormente, na Tarefa 1: $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

→ Quando b = 0, $f(x) = 1 + \frac{0}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = 1 + 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$, a função f(x) = a, que é uma função constante;

→ Quando c = 0, a função é constante, pois desaparece o x (0x = 0);

→ Quando d = 0, assímptota vertical é o eixo dos yy's, 0

→ Para a, b, c e d ≠ 0, a função é uma hipérbole;

→ a é o valor da assímptota horizontal;

→ Quanto maior o valor de a em módulo mais se afasta a assímptota da origem;

→ Quando o valor de a varia, a função sofre uma translacção vertical;

→ Quando a > 0, a função sofre uma translacção positiva no eixo das ordenadas;

→ Quando a < 0, a função sofre translacção negativa no eixo das ordenadas;

→ O valor de b não influencia no Df e D'f;

→ Quanto maior o valor de b em módulo, mais afastados estão os ramos da hipérbole;

→ Quando b > 0, a função é monótona decrescente;

→ Quando b < 0, a função é monótona crescente;

→ Quando o valor de b passa de positivo para negativo e vice-versa, as funções são simétricas em relação à assímptota horizontal;

→ Tanto o valor de b como o valor de c variam o afastamento (forma) e simetria;

→ $f(x) = a + \frac{\frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$

→ Se a e d = 0, a função não tem zeros;

→ Quando o valor de d varia sofre uma translacção horizontal:

→ Quando d > 0, a função sofre uma translacção para a esquerda ao longo do eixo dos xx's;

→ Quando d < 0, a função sofre uma translacção para a direita ao longo do eixo dos xx's.

Figura 6. Excerto do relatório da tarefa 2 de Julieta

Resumindo,

a → assimptota horizontal;
→ translacção vertical;
b → afastamento;
→ simétrico em relação à assimptota horizontal,
c → afastamento;
→ simétrico em relação à assimptota vertical;
d → translacção horizontal;

- Assimptota horizontal → a logo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$
- Assimptota vertical → $-\frac{d}{c}$ logo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$
- Função injectiva pois a dois objectos diferentes correspondem imagens diferentes,
- Função contínua $\setminus \{a\}$

Figura 6 (cont.). Excerto do relatório da tarefa 2 de Julieta

Tarefa 3

Após as duas investigações anteriores os alunos foram confrontados com uma tarefa de cariz mais prático em que eram desafiados a encontrar todos os retângulos cujas medidas dos comprimentos dos lados fossem números naturais e a área numericamente igual ao perímetro.

Esta tarefa foi mais rica que as anteriores, quer na formulação e teste de conjeturas, quer na tentativa de efetuar a prova. Apesar de inicialmente nos grupos, os alunos tentarem encontrar as soluções à tarefa pelo método de tentativa erro, aperceberam-se que desta forma nunca teriam a certeza relativamente ao número de soluções possíveis. Este resultado é verificado no diálogo desenvolvido pelo *grupo* 7.

Rui: Vamos considerar $l \times c = 2l + 2c$.

Dora e Vitória: Sim.

Dora: Vamos experimentar com 2 e 4… não dá.

Vitória: Vamos considerar 2 e 3…

Maria: Também não dá.

Dora: Vamos experimentar 3 e 6... este dá.

Rui: Experimenta 3 e 4.

Maria: Não dá.

Vitória: 2 e 4.

Dora: Também não dá. Bem, assim nunca mais!

Vitória: 4 e 4

Dora: Isso é um quadrado e nós queremos um retângulo.

Vitória: Têm de ser números reais, não é?

Dora: Naturais!

Vitória: E quais são os números naturais?

Dora: Todos os números positivos, sem vírgulas e sem zeros.

Maria: Vamos tentar ir por sistemas ou fórmulas…

Dora: … se temos que a área é igual ao perímetro, sendo a área igual a $c \times l$ e o perímetro igual $2l + 2c$.

Na etapa final da investigação em pequenos grupos, os alunos confirmaram que as soluções encontradas inicialmente eram as únicas possíveis.

Júlia: Mas aqui pede os números naturais, não é?

Elisa: Sim. Assim, só podemos ver no primeiro quadrante onde todos os números são positivos.

Fausto: O domínio fica então $\mathbb{N}\backslash\{1,2\}$. E o contradomínio também.

Elisa: Falta-nos ver se encontramos mais números que sejam válidos para o retângulo.

Júlia: Na tabela já vi até ao $x = 100$ e não encontrei nenhum em que os dois sejam naturais.

Alexandra: Tem o –2 e o 1. Mas é negativo, por isso não dá.

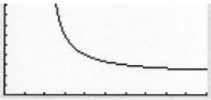
Na discussão na turma, os alunos revelaram que após as suas dificuldades iniciais conseguiram modelar uma função, que lhes permitiu determinar todas as possíveis soluções à tarefa. Por exemplo, Elisa durante a discussão dirigiu-se ao quadro interativo para explicar a conjetura formulada pelo seu grupo (fig. 7), que consistia em igualar a fórmula do perímetro de um retângulo à sua área, a aluna tentou provar analiticamente como é que efetuou o seu raciocínio utilizando, para tal, argumentos matematicamente corretos.

$$
\begin{aligned}
&A = P \Leftrightarrow\\
&cl = 2l + 2c\\
&\Leftrightarrow cl - 2c = 2l\\
&\Leftrightarrow c(l-2) = 2l\\
&\Leftrightarrow c = \frac{2l}{(l-2)} \quad *\\
&\Leftrightarrow 2 + \frac{4}{(l-2)} = c
\end{aligned}
$$

Figura 7. *Flipchart* da tarefa 3 escrito por Elisa

Posteriormente, os alunos observaram que a função encontrada tinha duas assintotas e argumentaram que, atendendo ao facto da equação da assintota vertical ser $x = 2$ e a da horizontal ser $y = 2$, as soluções à tarefa eram apenas três. Os relatórios revelaram uma grande evolução na sua execução relativamente ao que se tinha observado nas anteriores tarefas. Os alunos nos seus relatórios efetuaram uma explicação pormenorizada de todo o processo de investigação, desencadeado por cada um dos grupos. Por exemplo, Raul depois de ter efetuado a prova das possíveis soluções para a tarefa, passou ao estudo da função obtida quanto ao domínio, contradomínio, assintotas, monotonia, paridade e sinal. Finalmente concluiu o seu relatório com a resposta final à investigação proposta pela professora investigadora indicando que eram apenas três, as possíveis soluções à tarefa proposta (fig. 8).

- $y = 2 - \frac{4}{-x+2}$



Estudo da Função Original

- $y = 2 - \frac{4}{-x+2}$

Domínio e Contradomínio

- Geral:
  $Df = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
  $D'f = \mathbb{R}\ \{2\}$
- Resposta ao problema:

  $Df = \mathbb{R}^+, dentro\ deste\ mais\ concretamente, \mathbb{N}\backslash\{1,2\}, x \in \{3,4,6\}$

  $D'f = \mathbb{R}^-, dentro\ deste\ mais\ concretamente,, \mathbb{N}\backslash\{1,2\}, x \in \{6,4,3\}$

Assimptotas

- Vertical: x=2
- Horizontal: y=2

Zeros

A função geral possui um zero respectivamente (0,0) mas que não se insere na restrição estabelecida pelo grupo que não possui qualquer zero.

Sinal

Função geral:

X	-∞	2	+∞
$2 - \frac{4}{-x+2}$	-	S.S.	+

Restrição:

X	2	+∞
$2 - \frac{4}{-x+2}$	S.S.	+

Variação e Monotonia

A função f é decrescente em]-∞,2[e decrescente em]2,+∞[, ou seja decrescente em todo o seu domínio excepto na assimptota vertical que é respectivamente x=2.

Geral:

X	-∞	2	+∞
$2 - \frac{4}{-x+2}$	↘	S.S.	↘

Restrição:

X	2	+∞
$2 - \frac{4}{-x+2}$	S.S.	↘

Paridade

A função não é par ou ímpar nas duas visões, na geral e na nossa restrição.

Continuidade

A função é contínua excepto em x=2.

Injectividade

A função f é injectiva, após a confirmação com o teste da recta.

Conclusão

É então assim que terminamos esta tarefa de investigação número quatro. Concluímos desta forma esta investigação com as respostas ao problema proposto no início desta tarefa que são então:

- A- (3,6)
- B- (4,4)
- C- (6,3)

São então os casos possíveis para o problema proposto, já foi supra dita a justificação porquê que não existem mais soluções a partir do objecto 6 pelo que não será necessário repetir tal conclusão.

Figura 8. Excerto A do relatório da tarefa 3 de Raúl

Os alunos revelaram muito cuidado na argumentação matemática explicando quais foram as conjeturas rejeitadas e o porquê de as rejeitarem, a conjetura seguida, o seu teste e respetiva prova, para a qual sentiram a necessidade em utilizar a calculadora gráfica.

Na reflexão sobre esta tarefa uma aluna, Amélia do grupo 4, salientou que "foram várias as conjeturas abandonadas, umas por erro de raciocínio e outras mesmo por erro analítico", manifestando algumas dificuldades iniciais na interpretação da tarefa, que foram ultrapassadas com o desenvolvimento da investigação. Apesar das dificuldades iniciais, na fase de apropriação da tarefa, com a formulação de conjeturas que tiveram que ser abandonadas devido à não validade das mesmas, o seu grupo conseguiu formular uma conjetura válida e desenvolveu argumentos de modo a provar a sua veracidade. Salientou, também a importância da "interajuda" e da "colaboração entre todos os elementos do grupo", para o bom desenvolvimento do trabalho de grupo. Elisa salientou também a importância do bom ambiente e da troca de ideias durante o desenvolvimento do trabalho em grupo, diz mesmo que "no grupo, o ambiente é muito propício para realizar um bom trabalho uma vez que todos nos ouvimos e nos ajudamos". Referiu ainda que, como esta tarefa era uma aplicação ao real, das duas anteriores, tornou-se mais interessante de investigar e que este método de ensino, em que os alunos são estimulados de uma forma autónoma a construírem os seus conhecimentos, tornou-se "uma maneira muito interessante de aprender".

Uma outra aluna, Vitória do grupo 7, considerou importante "trabalhar em conjunto, raciocinar em conjunto e chegar a soluções verdadeiras também em conjunto". A aluna argumentou que esta tarefa foi muito educativa porque desenvolve o raciocínio e a prática matemática. Verificou também que "o método de tentativa erro poderia induzir os alunos na formulação de conjeturas erradas e que o método de prova mais indicado era o analítico".

Rafaela, que pertencia ao grupo 5, salientou também a importância da realização das tarefas de investigação salientando que "são dos melhores métodos de ensino, pois permitem-nos estabelecer relações entre diferentes conteúdos com o fim de chegar a uma solução".

Tarefa 4

Nesta tarefa foi proposto aos alunos o estudo da família de funções do tipo $g(x) = f(x - h)$ em que $f(x) = k/ax^2$ e $a, k, h \in \mathbb{R}$. Na investigação desta tarefa, os alunos manifestaram algumas dificuldades na interpretação do enunciado. Nesta tarefa, para além de terem de estudar a influência da alteração dos valores dos parâmetros no gráfico de uma função, tinham também de efetuar o estudo de uma transformação gráfica. As dificuldades registaram-se apenas na fase de apropriação da tarefa, quando tentaram escrever a expressão analítica da função g. Por exemplo, o grupo 4 teve algumas dificuldades iniciais em escrever a expressão analítica da função g a partir da função f. Estas alunas formularam as suas conjeturas iniciais e tentaram validá-las, mas como após várias tentativas não conseguiram entender como determinar a expressão analítica da função g a partir da função f, solicitaram a ajuda da professora.

Flora: Aqui devemos ter que estudar a $g(x)$ em função da $f(x)$.

Rafaela: Temos que dar valores a x e a h.

Flora: Mas tem $f(x - h)$.

Rafaela: Estão a perceber? O problema é a substituição. Fica $g(x) = k/ax^2 - h$?

Flora: Nós temos de substituir uma pela outra, mas não sabemos como.

Após esta barreira ter sido ultrapassada, os alunos efetuaram a investigação da tarefa, normalmente sem revelarem dificuldades na generalização dos resultados para a família de funções em estudo. Por exemplo, o grupo 1 elaborou várias conjeturas e conseguiu com o auxílio da calculadora gráfica testar e verificar a validade das mesmas.

Elisa: Agora já podemos atribuir valores aos parâmetros da função g, podem ser também com o número 1.

Alexandra: Neste gráfico a assintota vertical é $x = 1$.

Fausto: E se alterarmos o parâmetro k?

Júlia: Eu acho que à medida que aumentámos o k, as parábolas da função se afastam, mas confirma Alexandra.

Alexandra: Sim é o que acontece se o valor de k for aumentado, mas se o diminuirmos as parábolas vão-se aproximar.

Fausto: Agora podemos ver o que varia o parâmetro a.

Elisa: É o contrário do k, se aumentarmos o valor de a a função aproxima-se, se diminuirmos afasta-se.

Júlia: E o h?

Alexandra: Eu considerei h igual a 6 e assintota tomou o valor 6.

Fausto: Eu considerei 9 e a assintota também deu nove.

Júlia: Eu 15 e assintota deu igual.

Elisa: Então nesta família de funções a assintota vertical é sempre a h.

Alexandra: Olha se k tomar valor negativo a única alteração na função é que sofre uma translação.

Elisa: Tens a certeza que é só o parâmetro h que influencia a função?

Alexandra: Não sei.

Os alunos deste grupo, ao longo desta fase da investigação, foram atribuindo diferentes valores aos parâmetros h e k, como forma de formulação e posterior verificação das suas conjeturas. Relativamente à argumentação matemática, verificou-se que os alunos evoluíram no desenvolvimento desta capacidade nos seus trabalhos, quer em pequeno grupo, quer em grande grupo. No entanto, durante a discussão em turma surgiu uma dúvida que só foi diagnosticada nesta fase da investigação, relativamente à existência de assintota horizontal. Verificou-se que o conceito de assintota ainda não estava completamente construído até à exploração desta tarefa, pois os alunos quando nas tarefas anteriores afirmaram a existência de assintotas, justificavam este facto devido ao gráfico das funções obtidas terem todas uma "falha" ou "buraco" em determinado ponto. Por exemplo, Elisa durante a discussão em grupo turma dirigiu-se ao quadro interativo com o intuito de tentar provar a conjetura formulada pelo seu grupo de trabalho. O grupo considerava que a função dada na tarefa tinha assintota vertical mas não tinha assintota horizontal. No quadro a aluna desenhou o gráfico de uma função, riscando a parte negativa do eixo dos *yy* referindo que nessa parte a função não estava definida e, assim, não existia uma "falha", logo a função não tinha assintota horizontal (fig. 9).

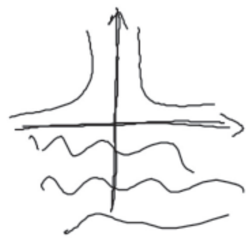


Figura 9. *Flipchart* da tarefa 4 escrito por Elisa

O facto é que estes alunos nunca se enganaram, nas anteriores tarefas, na determinação das equações das assintotas, quer verticais quer horizontais, pois nos gráficos das diferentes funções consideradas existiam, no seu entender, sempre "falhas".

Elisa: Isto aqui é a assintota vertical. É uma interrupção entre duas…

(A aluna passava com a caneta ao longo do eixo dos *yy*)

Elisa: … e esta aqui é a horizontal e aqui não há nada professora!

Esta parte da discussão desenvolveu-se durante algum tempo, mas a professora investigadora entendeu pertinente que os alunos ficassem sem qualquer dúvida relativa a um conceito particularmente importante quando se pretende fazer o estudo de qualquer função, nomeadamente das racionais.

Nos relatórios individuais verificou-se que todos os alunos refletiram e argumentaram relativamente às dificuldades iniciais diagnosticadas, nomeadamente, no que se refere à existência e determinação das equações das assintotas horizontais. Como no anterior relatório, os alunos descreveram pormenorizadamente todo o processo de investigação argumentando relativamente às conjeturas seguidas e às abandonadas. No que se refere às conjeturas seguidas, os alunos registaram os testes efetuados para a sua validação e novamente sentiram a necessidade de provar generalizando os resultados obtidos para a família de funções em estudo (fig. 10).

	Consoante a, k e h, mas considerando a e k ≠0	
	$f(x)=k/(ax^2)$	$g(x)=k/(a(x-h)^2)$
Domínio	Se a e k tiverem sinais iguais: IR\{h}	
	Se a e k tiverem sinais diferentes: IR\ {0}	Se a e k tiverem sinais diferentes: IR\{h}
Contradomínio	Se a e k tiverem sinais iguais: IR^+ Se a e k tiverem sinais diferentes: IR^-	
Assimptota **Horizontal**	y=0	
Vertical	x=0	x=h
Monotonia	Se k > 0 : Crescente de]-OO ; 0[Decrescente de]0 ; +OO[	Se k > 0 : Crescente de]-OO ; h[Decrescente de]h ; +OO[
	Se k<0 : Decrescente de]-OO ; 0[Crescente de]0 ; +OO[	Se k<0 : Decrescente de]-OO ; h[Crescente de]h ; +OO[
Zeros	Não tem zeros	
Paridade	È par	È par e relação a h
injectividade	Não é injectiva	
Continuidade	Contínua excepto 0	Contínua excepto na assimptota

Além disso sabemos que:

- Quando o módulo de k aumenta a função sofre uma dilatação
- Quando o módulo de k diminui a função sofre uma contracção
- Se h>0 a função desloca-se para a parte positiva do eixo dos xx's
- Se h<0 a função desloca-se para a parte negativado eixo dos xx's

Atenção: Tudo o que fui registando nas tabelas em relação à assimptota vertical não está de acordo com as conclusões que tiramos da aula, pois pensávamos que ela era (h/a), devido a um erro colocado na máquina calculadora. Em relação à assímtota vertical também não é o que tínhamos concluído, pois pensávamos que não existia, devido a uma definição incorrecta da mesma.

Figura 10. Excerto do relatório da tarefa 4 de Célia

Neste relatório os alunos também tinham que efetuar uma reflexão sobre a tarefa de investigação desenvolvida. Júlia referiu que teve mais dificuldades em explorar esta tarefa, devido ao conceito de assintota que tinha sido construído na turma e ainda estava um pouco incompleto, diz mesmo "ao iniciarmos a tarefa tivemos algumas dificuldades em perceber que o gráfico da função g continha uma assintota horizontal, visto que a definição que tínhamos de assintota, não estava totalmente correta". Raúl salientou que "discutimos raciocínios e chegamos a conclusões em comum acordo" que discutiram entre todos os elementos do grupo e, chegaram às conclusões da tarefa em conjunto, com organização, empenho e respeito mútuo. Raúl salientou também a importância de se ter efetuado uma discussão na turma após o trabalho em pequeno grupo, pois possibilitou aos alunos a partilha de raciocínios, intercâmbio de ideias e correção da escrita matemática, diz mesmo: "devido a um erro de escrita o grupo foi induzido em erro durante um certo raciocínio pelo que a existência de uma discussão e debate após a realização da tarefa 4, ajudou bastante e provou ser necessária pois o erro foi corrigido a tempo da realização do relatório, o que demonstra a importância do intercâmbio de ideias" (reflexão de Raúl).

Elisa referiu também a importância da realização de tarefas de investigação pois desenvolve nos alunos "um sentido de autossuficiência, autonomia e investigação" e faz com que as aulas se tornem "mais atrativas" desenvolvendo as capacidades dos alunos enquanto estudantes e investigadores.

Conclusão

Ao longo da sequência de quatro tarefas sobre o tema funções racionais, os alunos evidenciaram evolução. Esta evolução verificou-se, na facilidade com que os alunos progressivamente se apropriaram e exploraram cada uma das tarefas da sequência, no que concerne à forma como formularam e testaram as suas conjeturas, nos argumentos que apresentaram de modo a validá-las, assim como ao sentirem e ao evidenciarem a necessidade de efetuar a sua prova. Esta conclusão do estudo vai ao encontro de Doeuk (1999), que considera que os alunos desenvolvem a capacidade de argumentar matematicamente quando na sala de aula, são implementadas de uma forma sistemática e contínua atividades de argumentação e de validação dos resultados.

Durante a implementação da sequência de tarefas foi evidente que os alunos, progressivamente, foram aumentando o cuidado posto na formulação e teste das suas conjeturas; na apresentação de argumentos que as validassem, caso contrário tinham de ser rejeitadas ou reformuladas; na necessidade, tomando a iniciativa, de provar a validade das suas conjeturas. À semelhança de um estudo de Boavida (2005), verificou-se que, como as tarefas implementadas envolveram os alunos na argumentação matemática e em experiências de prova, desencadearam a necessidade de testarem a validade das suas conjeturas.

Os momentos de discussão em grande grupo revelaram-se importantes para os alunos, pelo facto de tornar possível ouvir a opinião, a explicação das ideias e os raciocínios dos restantes colegas da turma. O facto de se terem trabalhado tarefas de investigação seguindo três fases distintas, uma destinada ao trabalho de grupo, outra à discussão em grupo-turma e uma terceira dedicada à produção de um relatório individual, criou oportunidades de argumentação e de reflexão sobre essa argumentação. Os alunos foram incentivados a formular e testar conjeturas, analisar exemplos e contraexemplos e a utilizar argumentos válidos, de formas a convencerem-se a si próprios e aos restantes colegas de grupo, aspetos estes sublinhados por diferentes autores como Ponte *et al.* (1997), Boavida (2005), Rodrigues (2008), Whitenack e Yackel (2008). Essas oportunidades de trabalho em conjunto tarefas de investigação, ouvindo e confrontando os argumentos uns dos outros, permitiu que construíssem o seu próprio conhecimento de forma "interessante e entusiasmante", chegando em conjunto a argumentos válidos e mesmo a provas matemáticas. Num sentido similar, Knipping (2004, 2008) considera que sendo a argumentação um processo coletivo, é nesse contexto que deve ser desenvolvida.

O facto das tarefas elaboradas para este estudo terem sido de carácter investigativo, contribuiu para que se revelassem um incentivo à exploração de forma autónoma, para que fossem os próprios alunos a construir a sua aprendizagem e ao mesmo tempo a desenvolver as suas capacidades argumentativas. Os estudos desenvolvidos por Boavida *et al.* (2002) apontam no mesmo sentido, visto que os alunos neste tipo de tarefas desenvolvem a capacidade de fundamentar os seus raciocínios, de explicar o porquê dos resultados por si obtidos e pelos seus colegas. As tarefas de carácter investigativo revelaram-se, neste estudo, importantes para a autoaprendizagem de cada um.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade — COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT–Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projetos «PTDC/CPE-CED/098931/2008» e «FCOMP-01-0124-FEDER-041405 (Refª. FCT, EXPL/MHC-CED/0645/2013)».

Referências

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education.* Intention, reflection, critique. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Antão, J. A. S. (1993). *Comunicação na sala de aula.* Porto: Edições Asa.

Arends, R. I. (2008). *Aprender a ensinar.* Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, SAU.

Ayalon, M., & Even, R. (2006). Deductive reasoning: Different conceptions and approaches. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp. 89–96). Prague: PME.

Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate…* International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Retirado em 1 de Janeiro de 2010 de http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/contentstorage01/.

Blanton, M. L., & Katput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In A. M. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres, J. Duarte & T. O. Duarte, *Atas XVI SIEM* (pp. 13–43). Évora: APM.

Boavida, A. M., Gomes, A., & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de Matemática. Olhares sobre um projeto de investigação colaborativa. *Educação e Matemática*, *70*, 18–26.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no Ensino Básico. Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Boavida, A. M., Silva, M., & Fonseca, P. (2009). Pequenos investigadores matemáticos. Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento. *Educação e Matemática*, *102*, 2–10.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2006). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Cai, J., Lane, S., & Jakabcsin, M. S. (1996).The role of open-ended tasks and holistic scoring rubrics: Assessing students´ mathematical reasoning and communication. In Portia C. Elliott & Margaret J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 137–145). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Domingos (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino aprendizagem. In A.P Canavarro (Org.), *20 anos de temas na EeM* (pp. 126–136). Lisboa: APM.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In I. Schwank (Ed.), *European Research I Mathematics Education I* (pp. 125–139). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Douek, N. (2005). Communication in the mathematics classroom. Argumentation and development mathematical knowledge. In A. Chronaki & I. M. Christiansen (Eds.), *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication* (pp. 145–172). USA: IAP.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs — Perspectives on student thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 101–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1999). *Questioning argumentation. International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. Retirado em 18 de Junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeU.htm

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of comprehension in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils`conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics*, *5*, 33–556.

Fonseca, L. (2009). Comunicação matemática na sala de aula. Episódios do 1.º ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *103*, 2–6.

Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2003). On line proof: What can go wrong? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education held jointly with the 25th conference of PME-NA, Volume 2* (pp. 437–443). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Gil, P. (2013). *A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula*. Tese de Doutoramento em Ciências da Educação (área de especialização e Educação Matemática), Universidade do Minho.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing student´s algebric reasoning abilities. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades k-12* (pp. 127–137). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.). *International handbook of mathematics education* (pp. 877–908). London: Kluwer Academic Publishers.

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving discourses in mathematics classroom. In G. Tőrner, R. Bruder, A. Peter-Koop, N. Neill, H. Weigand, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries* (pp. 73–84). Ludwigsburg: Verlag Franzbecker, Hildesheim.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving process. *ZDM Mathematics Education* (40: pp.427–441). New York: Springer.

Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 207–222). Reston: NCTM.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). Thinking mathematically. Bristol: Addison-Wesley. Magalhães, M. G. (2010). *A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: experiência numa turma do 11.º ano*. Braga: Instituto de Educação da Universidade do Minho.

Menino, H. A. L. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática*. Lisboa: APM.

Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et des rapports cognitiva de l'argumentação et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. Tese de Doutorado. Grenoble I: Université Joseph Fourier.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. II). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105–132.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática da Matemática*. Ensino Secundário. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A relação professor — aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projeto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), 39–74.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, *100*, 51–58.

Silver, E. A., & Smith, M. S. (1996). Building discourse communities in mathematics classroom: A worthwhile but challenging journey. In P. C. Elliott & M. J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics, k-12 and beyond* (pp. 20–28). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, *100*, 85–88.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research companion to principals and standards for school mathematics* (pp. 227–236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods.* Newsbury Park, CA: Sage.

Anexo 1

Sequência de tarefas de investigação sobre as funções racionais com recurso à calculadora gráfica

Tarefa 1
Investiga como varia o gráfico da função $g(x) = 1/f(x)$, tal que, $f(x) = ax + b$ em que, com $a, b \in \mathbb{R}$. Faz as tuas conjeturas para generalizares como varia o gráfico de g sendo f uma função afim.

Tarefa 2
Investiga como varia a função f, tal que, $f(x) = a + b/(cx + d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, procurando perceber qual o efeito de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico da função.

Tarefa 3
Considera os retângulos que verificam as seguintes propriedades:

- O perímetro é numericamente igual à área;
- As medidas de comprimento dos lados do retângulo são números naturais.

Determina as dimensões de todos os retângulos que verificam as condições dadas.

Tarefa 4
Seja $f(x) = k/ax^2$, com $a, k \in \mathbb{R}$. Considera a família de funções g, tais que $g(x) = f(x - h)$, $h \in \mathbb{R}$. Investiga como varia o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f procurando perceber qual o efeito de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico da função.

Anexo 2

Introdução às tarefas

Trabalho de Grupo
Na realização do trabalho de grupo é importante terem em conta os seguintes aspetos:

- Ler atentamente e individualmente o enunciado de cada tarefa;
- Depois de ler, discutir com os restantes elementos do grupo o que cada um percebeu;
- Discutir as estratégias para iniciar a tarefa, explicitando o raciocínio, as conjeturas e as argumentações de cada um;
- Não seguir uma estratégia que não percebe só porque os outros elementos do grupo acham que pode ser assim;
- Registar no caderno quais foram as conjeturas que foram seguidas e quais as que foram abandonadas;
- Registar quais os exemplos e quais os contra exemplos encontrados;

- Registar todo o processo da investigação no caderno;
- Organizar a discussão em grupo-turma para que se explicite todo o processo de investigação e os resultados obtidos.

Discussão em grupo-turma
Na discussão em grande grupo devem ter em conta os seguintes aspetos:
- Estar atentos à explicação dos restantes colegas da turma;
- Questionar os colegas caso não percebam o que disseram;
- Fazer sugestões indicando o que pensam que está mal, explicitando e pedindo para melhorar;
- Explicar com cuidado e na vossa vez como chegaram aos resultados de modo a que todos compreendam como fizeram.

Elaboração do relatório
O relatório deve ser realizado para que nele conste a descrição pormenorizada de todo o processo de investigação, nomeadamente:
- Os raciocínios efetuados;
- As conjeturas seguidas e as abandonadas, argumentando sobre o porquê das tuas opções;
- As conclusões a que chegaste e se os argumentos apresentados são suficientes para constituírem uma prova para a família de funções apresentada.
- No relatório deve também constar uma apreciação crítica da atividade, assim como uma apreciação autocrítica de cada elemento do grupo na sua intervenção no trabalho desenvolvido.

Resumo. Este artigo tem com referência um estudo cujo objetivo foi o de compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, de uma turma do 11.º ano, ao longo da realização de uma sequência de tarefas de investigação sobre o tema das funções racionais. Este estudo teve como suporte teórico a argumentação matemática. A metodologia adotada foi de carater qualitativo e descritivo e o caso estudado foi uma turma do 11.º ano em que professora investigadora lecionava a disciplina de Matemática A. A recolha e análise de dados, neste estudo, contemplou as discussões desenvolvidas inicialmente em pequeno grupo e posteriormente em grupo turma, e finalmente os relatórios individuais escritos com as respetivas reflexões críticas e autocríticas sobre as tarefas desenvolvidas na sala de aula. Com a presente investigação foi possível concluir que o trabalho colaborativo, ajudou a desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinar e de argumentar matematicamente. Verificou-se que a interação entre alunos durante a exploração da sequência de tarefas de investigação foi promotora de uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Argumentação matemática, tarefas de investigação e funções racionais.

Abstract. This article is based on a study directed by the goal to understand the development of the capacity of arguing mathematically throughout the execution of a sequence of tasks in an 11th year class, about the theme rational functions. This study had theoretical support the argumentation in Mathematics. The methodology adopted was qualitative and descriptive and the case to be studied an 11th year class, in which the investigative teacher teaches Mathematics. The gathering and analysis of data, in this study, contemplated the discussions developed initially in small groups and afterwards in the whole class, and finally the individual reports written with the respective critical analysis on the tasks developed in the classroom. With the present investigation, one may conclude that the collaborative work, helped to develop in the pupils the capacity of reasoning and of arguing mathematically. It made clear that the interaction between pupils during the exploration of the sequence of tasks promoted a significant apprenticeship.

Keywords: Mathematical argumentation, tasks and rational functions.

■ ■ ■

MARIA DA GRAÇA MAGALHÃES
Escola Secundária/3 Henrique Medina
graca.n.magalhaes@gmail.com

MARIA HELENA MARTINHO
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

(Recebido em abril de 2013, aceite para publicação em abril de 2014)