O DESENVOLVIMENTO DE SIGNIFICADOS DAS LETRAS NA APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES LITERAIS

Pedro Marcelo Pereira dos Santos Silva
Universidade do Minho
marcelos_21@hotmail.com

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes
CIEd, Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo. Nesta comunicação aborda-se a questão do desenvolvimento de significados das letras na aprendizagem de equações literais, explorada no âmbito de uma intervenção pedagógica supervisionada do curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade do Minho.

A intervenção de ensino, implementada pelo primeiro autor e supervisionada pelos dois outros autores, decorreu numa turma do 8º ano de escolaridade no ano letivo de 2011/2012, durante sete blocos de 90 minutos e incidiu sobre o tema Equações literais e Polinómios, embora neste texto apenas nos referimos às Equações literais. Neste último caso, o desenvolvimento de significados das letras foi incentivado através da exploração de tarefas contextualizadas, relacionadas com situações da realidade, de modo a levar os alunos a ligarem as letras a referentes desses contextos.

Apesar da análise das primeiras tarefas exploradas nas aulas mostrar que os alunos tinham dificuldade em atribuir significado às expressões e às letras envolvidas nas equações, o que revela a dificuldade dos alunos face ao uso e interpretação das letras, com o progresso da intervenção de ensino verificou-se que os alunos se tornaram mais capazes de atribuir significados às letras e de manipularem expressões e equações com várias letras. Para essa evolução dos alunos terá contribuído a ênfase dada ao tipo de tarefas exploradas, uma visão da Matemática associada ao desenvolvimento de capacidades e à construção de conhecimentos e uma perspetiva de ensino e aprendizagem centrada no aluno.

Introdução

A exploração do significado das letras e expressões, como forma de promover a aprendizagem de Equações literais no 8º ano de escolaridade, foi o tema escolhido para a realização deste projeto. Na altura da sua implementação, o tópico Equações literais pertencia à unidade “Sequências e regularidades. Equações” do tema Álgebra, que era um dos quatro grandes temas matemáticos presentes no Programa de Matemática do

Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007). Também com o novo programa (Ministério da Educação, 2013) se mantém este tema e a importância que lhe é atribuída, sobretudo ao nível do 3º ciclo do ensino básico.

A Álgebra é um tema fundamental, que se encontra presente no currículo da Matemática escolar de todos os países, o que justifica a atenção que lhe deve ser dada, pois "quem não tiver uma capacidade razoável de entender a sua linguagem abstrata e de a usar na resolução dos mais diferentes problemas e situações está seriamente limitado na sua competência matemática" (Ponte, 2005, p. 36).

Para Lins e Gimenez (1997) a Álgebra consiste num conjunto de ações para as quais é possível produzir significados em termos de números e de operações. No entanto, sabe-se que a manipulação algébrica não vai muito além da manipulação de símbolos que na grande maioria das vezes não têm qualquer significado para os alunos, sendo o seu estudo realizado de forma mecanizada.

Na Álgebra residem as ferramentas necessárias para resolver uma grande parte dos problemas da matemática, pois "fornece os meios através dos quais descrevemos e analisamos relações. E é a chave para a caraterização e compreensão de estruturas matemáticas" (Usiskin, 1989, p. 18). Para este autor, com o aumento da matematização da sociedade, cada vez mais a Álgebra será alvo de mais estudos no âmbito da matemática escolar.

Um ensino centrado no significado das letras e expressões

É de conhecimento geral que as grandes dificuldades dos alunos residem no uso dos símbolos matemáticos, sendo "a exigência de manipulação de letras (…) talvez a mais importante característica do pensamento algébrico (Fernandes & Soares, 2003, p. 335). Ora, sendo "a existência do discurso matemático praticamente impossível sem abreviaturas" (Davis & Hersh, 1995, p. 124), é fundamental não perdermos de vista os seus significados, pois se dermos apenas atenção ao modo de manipular símbolos podemos cair num formalismo sem qualquer sentido para o aluno. A solução para uma aprendizagem eficaz da Matemática utilizando símbolos "terá de passar por uma estratégia de ir introduzindo os símbolos e o seu uso, em contextos significativos, no quadro de atividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolização e da formalização" (Ponte, 2005, p. 40).

A importância dos símbolos também é reconhecida por Devlin (2002), quando defende que "sem os seus símbolos algébricos, uma grande parte da matemática simplesmente não existiria" (p. 11). De acordo com Ponte, Branco e Matos (2008), a simbologia usada na matemática é uma ferramenta muito poderosa para a resolução de problemas sendo, por outro lado, a sua grande fraqueza na medida em que pode tornar-se confusa e incompreensível para os alunos, pois os símbolos têm tendência a desviar-se daquilo que são os seus referentes concretos iniciais. Este aspeto fica claro quando se utiliza simbologia de um modo abstrato, onde os símbolos não têm qualquer significado para os alunos.

É fundamental que os alunos compreendam desde cedo os vários significados e usos das letras "pois é uma das razões apontadas para os erros que os alunos cometem" (Soares, 2005, p. 18). Küchemann (1981), ao investigar acerca de como as crianças entendem a aritmética, identificou diferentes níveis de interpretação das letras em expressões matemáticas, que classificou segundo seis níveis: letra avaliada, letra ignorada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como um número generalizado e letra como variável. De seguida, apresentam-se exemplos para se perceber cada um dos níveis mencionados anteriormente.

A "letra avaliada" funciona como uma letra que substitui um número, podendo ser determinado através do método de tentativa erro, sem ser necessário operar com a letra. Por exemplo, para dar resposta à questão: "Se $a+5=8$, então $a=?$" são necessárias apenas operações concretas. Também faz parte deste nível a resposta à questão: "Se $x=3y+1$ e $y=2$, então $x=?$", apesar de estarem envolvidas duas letras.

A "letra ignorada" resulta quando os alunos ignoram a letra, reconhecendo a sua existência mas sem seja necessário manipulá-la. Por exemplo, na questão: "Se $a+b=43$, então $a+b+2=?$", as letras a e b podem ser "ignoradas", considerando assim o valor de $a+b$ como um só e adicionar 2. O mesmo acontece na questão: "Se $e+f=8$, então $e+f+g=?$", uma vez que o valor de $e+f$, que é 8, pode ser adicionado a g.

Na "letra como objeto", as letras podem ser vistas como nomes de objetos concretos. Por exemplo, num quadrado de lado l, $4l$ poderá ser interpretado como quatro lados e não como quatro vezes uma determinada quantidade. Nos casos da simplificação de expressões, como por exemplo $2a+5b+a$, que simplificada resulta em $3a+5b$, pode usar-se os termos "a para maças e b para laranjas".

No que diz respeito à categoria "letra como incógnita específica", os alunos reconhecem a letra como um número específico, embora desconhecido, podendo operar diretamente sobre ele. Por exemplo, na operação: "Multiplica $n+5$ por 4" pode-se operar sobre a letra n, embora se desconheça o seu valor.

Na "letra como um número generalizado", cada letra poderá tomar vários valores, como acontece, por exemplo, em: "Se $c+d=10$ e $c<d$, então $c=?$".

Por fim, a "letra como variável" está relacionada com questões do tipo: qual é maior, $2n$ ou $n+2$? Nestas situações é necessário descobrir uma relação entre as duas expressões, quando n varia. Nesta categoria a letra representa um conjunto de valores.

Segundo o estudo de Küchemann, poucas foram as crianças entre os 13 e 15 anos que foram capazes de considerar as letras como números generalizados e um número ainda menor foi capaz de interpretar as letras como variáveis. Quando foi feita a comparação entre a letra como incógnita específica e a letra como número generalizado, um grande número de alunos interpretou as letras como incógnitas especificas, em vez de as interpretar como número generalizado. Já no caso das interpretações das letras como objeto e como letra ignorada, a grande maioria dos alunos foi capaz de trabalhar corretamente essas interpretações das letras.

Valorizando a atribuição de significados às letras e às diferentes classificações que estas podem assumir, decidimos averiguar os significados atribuídos pelos alunos do 8.º ano, envolvidos no estudo, às letras e expressões na exploração de equações literais.

Caraterização da intervenção de ensino

O estudo apresentado foi desenvolvido numa escola secundária com 3º ciclo, situada no litoral norte do nosso país, numa turma do 8º ano de escolaridade, que era constituída por 20 alunos ($A_1, A_2, \ldots, A_{20}$), dos quais 11 eram raparigas e 9 eram rapazes, com uma média de idades de 13 anos, o que constitui a idade normal dos alunos deste ano de escolaridade.

De acordo com os resultados do teste de avaliação diagnóstica, realizado no início do ano letivo, verificou-se que, de uma maneira geral, os alunos possuíam bastantes dificuldades ao nível do raciocínio matemático e, no que se refere às expressões algébricas, a pontuação média das suas respostas foi de 1,26, numa escala de 0 a 2. Apesar de neste subtópico a média das pontuações não parecer muito preocupante, há conteúdos em que os alunos têm muitas dificuldades, como na simplificação de expressões numéricas recorrendo às regras operatórias das potências (média de 0,26) e na resolução de equações (média de 0,84).

Quanto ao desempenho dos alunos ao longo do ano letivo, pode observar-se pela Tabela 1 que foi sempre positivo, terminando com uma média muito próxima do nível 4.

Tabela 1 – Desempenho dos alunos da turma ao longo do ano letivo

1º Período		**2º Período**		**3º Período**	
$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
3,47	0,83	3,43	0,85	3,95	0,94

Nota: $\bar{x}$ representa a média e s o desvio padrão das classificações obtidas pelos alunos.

De um modo geral, os alunos desta turma tinham hábitos de trabalho, embora apresentassem algumas dificuldades, tanto ao nível do raciocínio matemático como ao nível da manipulação algébrica.

Assim sendo, era fundamental desenvolver nestes alunos a capacidade da manipulação algébrica e a capacidade do raciocínio matemático, pois ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática. “Em todos os níveis de escolaridade, os alunos deverão perceber e acreditar que a matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas matemáticas em todas as áreas de conteúdo”. (NCTM, 2007, p. 61)

“É inquestionável a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade” (Ramos, Boavida & Oliveira, 2011, n.p.) para que quando os alunos cheguem ao 3º ciclo possam “começar a compreender os diferentes significados e utilizações das variáveis, por meio da representação de quantidades numa diversidade de problemas e contextos” (NCTM, 2007, p. 263).

Para ensinar matemática deve ter-se em conta a implementação de tarefas variadas (Fernandes, Almeida, Mourão & Campelo, 1993). Pensar em tarefas específicas para cada conteúdo poderá despertar curiosidade nos alunos, levando a que assumam uma atitude positiva perante a Matemática e, por outro lado, enriqueçam a sua aprendizagem. Assim, decidiu-se implementar este projeto com base em tarefas variadas, de diferentes tipos e contextos. A exploração das tarefas aqui analisadas decorreu na turma em duas aulas de 90 minutos e a metodologia de trabalho adotada foi a de trabalho em grupo. Petocz e Reid (2007) defendem que o trabalho em grupo possibilita aos alunos desenvolver habilidades e competências interpessoais, permite que estejam expostos aos pontos de vista dos outros elementos do seu grupo e promove a reflexão e discussão, que são competências essenciais para se tornarem profissionais reflexivos e competentes. Roa, Correia e Fernandes (2009), numa intervenção de ensino, concluíram que os alunos consideraram o trabalho de grupo importante para que surgissem ideias diferentes, aumentar a sua participação, aprender melhor e superar dúvidas e dificuldades.

Durante as aulas que fizeram parte da intervenção de ensino foram propostas várias tarefas aos alunos, onde foi pedido que escrevessem tudo aquilo que pensavam nas fichas que lhes eram entregues, incluindo cálculos, texto ou esquemas. Também foi pedido aos alunos para não apagarem aquilo que faziam, riscando apenas levemente o que queriam alterar. Todas as fichas de trabalho eram recolhidas no final de cada aula para fotocopiar, sendo entregues aos alunos na aula seguinte.

Finalmente, todas as tarefas eram corrigidas no quadro pelos alunos e foram audiogravadas as suas apresentações e discussões no grupo-turma. Também, em cada grupo de trabalho, existia uma máquina de filmar para gravar as discussões ocorridas entre os alunos do grupo nas resoluções das tarefas, o que permitiu analisar estratégias e formas de pensamento dos alunos.

Exploração das tarefas

Tarefa 1 – Parque de diversões

A primeira tarefa, adaptada de Gay e Jones (2008), relativa ao parque de diversões *Girassol*, é uma tarefa enquadrada num contexto real e pode ser considerada um problema. É uma tarefa fechada na medida em que é dito o que é dado e o que é pedido que os alunos realizem. Nesta tarefa é fornecida uma tabela com dados relativos ao número de visitantes e funcionários de um parque de diversões. Pretendia-se que os alunos obtivessem expressões algébricas e equações utilizando os dados da tabela e determinassem outros valores a partir dos dados fornecidos. Nesta situação era fundamental uma correta interpretação dos significados das letras utilizadas.

Um parque de diversões é um local fechado com um amplo espaço e um conjunto de divertimentos geralmente direcionados para o público jovem e adulto. No parque de diversões *Girassol*, o preço do bilhete para adulto é 30 € e para jovem é 15 €. A Ana é administradora do parque de diversões *Girassol*. No final de cada dia tem que preencher uma tabela com informações onde consta o número de funcionários que trabalharam no parque e o número de pessoas que o visitaram. No dia 26 de Fevereiro de 2012, a Ana teve um imprevisto e não conseguiu completar a tabela. Considera então a seguinte tabela, parcialmente preenchida pela Ana, onde se encontra a informação referente a este dia.

Informação do parque / Sexo	Número de funcionários do parque	Número de visitantes jovens do parque	Número de visitantes adultos do parque
Feminino	A	C	E
Masculino	B	D	F
TOTAL	100	G	H

À semelhança de todas as letras da tabela, as letras H e D são *incógnitas específicas*, pois os alunos reconhecem as letras como representando números específicos, embora desconhecidos, podendo operar diretamente sobre elas. Os alunos sabiam que as letras representavam números específicos, que podiam ser, neste caso, o número de funcionários ou de visitantes do parque.

A tabela apresentada acima foi utilizada para o questionamento aos alunos, decidindo-se começar por analisar os significados que os alunos atribuíam às letras e expressões, conforme a seguir se apresenta.

> *Professor:* Vamos lá olhar para aqui… então, pode ser aqui a A_4, o que representa a letra D?
>
> A_4: Representa o número de visitantes jovens do parque.
>
> *Professor:* Ouçam o que a A_4 disse. A_4 diz alto que os dali não ouviram!
>
> A_4: Masculino…
>
> *Professor:* Desde o início…
>
> A_4: O número de visitantes jovens do parque masculino.
>
> *Professor:* O que é isso? O número de visitantes jovens do parque masculino!
>
> [Risos]
>
> A_4: Oh fogo, você percebeu.
>
> A_{13}: Do sexo masculino.

A_4: Representa o número de visitantes jovens do parque do sexo masculino.

Professor: Toda a gente concorda?

Turma: Sim.

Após a leitura do diálogo, percebemos que a aluna A_4 atribuiu o significado correto à letra apresentada na tabela. No entanto, esta aluna apresentou dificuldades em exprimir-se oralmente. Os restantes alunos que foram questionados não apresentaram qualquer dificuldade em interpretar a informação e em referir o seu significado.

Os alunos também não tiveram dificuldades em atribuir significado às expressões obtidas com as letras da tabela. A reação bastante positiva dos alunos em relação à manipulação de expressões com letras poderá encontrar alguma explicação no contexto da tarefa.

Segue-se um excerto de um diálogo acerca da alínea e) da tarefa.

e) Todos os visitantes pagaram um bilhete único consoante a respetiva idade. Escreve uma expressão algébrica que represente o montante de dinheiro que o parque recolheu dos bilhetes.

A_{16}: Temos de juntar o dinheiro todo.

A_{13}: O de adulto é 30, jovem é 15, por isso…

A_5: É só o G e o H.

A_{16}: 90 euros.

A_{13}: 90 euros? Como é que sabes isso?

A_5: Devia ser $30x$.

A_{13}: $30x$ não! $30H$! $30H$!

A_5: H?!

A_{13}: Sim porque H é o número de visitantes adultos.

(…)

A_5: Ya!

Pode verificar-se no princípio do diálogo que o aluno A_{16} não percebeu o que era pretendido. Para esta questão, os alunos teriam de formular uma expressão algébrica utilizando as letras e os valores da tabela e do enunciado. Seguidamente, podemos verificar que o aluno A_5 começa por escrever uma expressão usando letras que não se encontram na tabela. Em vez de utilizar a letra H, utiliza outra que não tem qualquer significado no contexto do problema. Já o aluno A_{13} mostra que percebe perfeitamente o significado de cada uma das letras, conseguindo orientar o grupo para a apresentação da expressão pretendida.

Apresenta-se agora uma das alíneas da tarefa em que se pretendia que os alunos construíssem a expressão a ela associada e o respetivo cálculo, tendo em atenção a informação fornecida na alínea anterior.

g) Naquele domingo 3/5 dos visitantes andaram de montanha russa. Escreve uma expressão algébrica que represente o número de pessoas que andaram de montanha russa e determina o número dessas pessoas.

Um aluno apresentou no quadro a sua resolução e explicou aos colegas da turma a forma como pensou. Apresenta-se de seguida um extrato do diálogo desenvolvido durante a exposição do aluno A_{13}.

> *Professor:* O A_{13} já fez tudo seguido, pôs a expressão e depois resolveu. Mas qual é a expressão algébrica que representa o número de pessoas que andaram de montanha russa?
>
> A_{13}: É 3/5 de $H+G$.
>
> *Professor:* Porquê? $H+G$ é o quê?
>
> A_{13}: É o número total de visitantes.
>
> *Professor:* Então se queremos 3/5 dos visitantes, é 3/5 de $H+G$. E depois dizemos: determina o número dessas pessoas. Então, como é que nós determinamos o número dessas pessoas?
>
> A_{13}: Na [alínea] f) dizia que havia 400 jovens e descobrimos que havia 500 adultos, então substituímos o número de jovens e adultos pela letra correspondente.
>
> *Professor:* Qual é a letra correspondente?
>
> A_{13}: H é os adultos e G é os jovens, que são 400.
>
> *Professor:* Depois fizeste as contas e deu 540. Está certo?
>
> *Turma*: Está.
>
> *Professor:* Toda a gente chegou ao mesmo? Toda a gente percebeu?
>
> *Turma*: Sim.

Pode concluir-se que o aluno compreendeu o significado de cada letra, conseguindo construir a expressão pedida de forma correta. O aluno foi capaz de retirar os dados das alíneas anteriores para poder dar resposta a esta questão, não apresentando qualquer dúvida nos cálculos que efetuou. De um modo geral, a turma também não teve dúvidas em efetuar os cálculos necessários nesta questão, até porque eram cálculos simples.

Tarefa 2 – Ecossondas

Esta tarefa tinha como suporte uma equação com três letras, onde uma delas assumia um valor fixo (parâmetro). A equação relacionava a profundidade (h) de um local no oceano com o intervalo de tempo decorrido entre a emissão do impulso sonoro de uma ecossonda e a receção do eco (t) e a velocidade de propagação do som na água (v), que assumia o valor de 1450m/s. Trata-se também de uma tarefa em contexto real e fechada, podendo ser considerada um problema, pois, para além de ser dito o que é pedido, comporta um grau de desafio elevado. Nesta tarefa é fundamental que os alunos atribuam os significados corretos a cada letra, para além da necessidade de reduzir quilómetros a metros.

Consideremos então o enunciado e a primeira alínea desta tarefa.

> O fundo dos oceanos tem sido cartografado com rigor a partir da utilização de ecossondas. Inicialmente, emitem um impulso sonoro que posteriormente é refletido (eco) pelo fundo do mar. Conhecidos o intervalo de tempo que decorre entre a emissão do impulso e a receção do eco e a velocidade de propagação do som, é possível determinar a profundidade do local através da seguinte fórmula:
>
> $$h = \frac{t}{2} \times v$$
>
> em que:
> h é a profundidade, em metros (m);
> t é o intervalo de tempo entre a emissão do impulso e a receção do eco, em segundos (s);
> v é a velocidade média de propagação do som na água, em metros por segundo (m/s), que é, aproximadamente, 1450 m/s.
>
> **a)** Uma ecossonda emitiu um sinal sonoro às 14h 52min 56s e recebeu o respetivo eco às 14h 53min. Qual é a profundidade do mar nesse local? Apresenta os cálculos que efetuares.

Depois de os alunos discutirem a tarefa em grupo, pediu-se a um aluno para apresentar, no quadro, a sua resolução à turma. Apresenta-se de seguida um extrato do diálogo desenvolvido durante a exposição do aluno A_5.

Professor: Explica lá o que fizeste.

A_5: Ora bem, eu pensei assim: das 14h 52min 56s para as 14h 53min são 4 segundos.

Professor: Todos perceberam?

Turma: Sim.

Professor: Então o que significa o valor 4 ali na fórmula?

A_5: É o t.

Professor: Muito bem. Continua.

A_5: Por isso pus h igual a 4 sobre 2, depois fui ao v, que é 1450 m/s, e substituí pela letra v. Então, aquilo vezes 1450. Fiz a conta e deu-me 2900.

Professor: Então a profundidade do mar nesse local é?

A_5: 2900 metros.

Pela observação do diálogo verifica-se que o aluno atribuiu corretamente o significado à letra t. Após ter determinado o valor do tempo, substitui-o pela letra correta, para assim encontrar o valor de h. Para além de atribuir significados corretos às letras, este aluno não demonstrou qualquer dificuldade em resolver a equação para determinar o valor pretendido. Sendo a letra t interpretada como *incógnita específica*, verificou-se também que os restantes alunos da turma não tiveram dificuldades em determinar o seu valor.

Para além de os alunos terem de interpretar corretamente os significados das letras utilizadas na equação, era também necessária uma correta interpretação dos dados de uma tabela que lhes era fornecida, para resolverem as alíneas seguintes. Apresenta-se então a tabela que era fornecida nesta tarefa, bem como a alínea b) que tinha como suporte a referida tabela.

Oceano	Antártico	Ártico	Atlântico	Índico	Pacífico
Profundidade	7,235 Km	5450 m	8648 m	7725 m	11,034 Km
Localização	Fossa Sandwich do Sul	Litke Deep, Bacia Eurásia	Fossa de Porto Rico	Fossa de Java	Fossa das Marianas

Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/geografia/fossa-oceanica.htm

b) Imagina uma ecossonda colocada na zona da fossa de Porto Rico e que emite um sinal sonoro. Quantos segundos decorrem até á receção do seu eco? Apresenta os cálculos que efetuares e apresenta o resultado arredondado à décima do segundo.

O aluno A_2 foi ao quadro apresentar a sua resolução e foi questionado relativamente à resolução que apresentou. Vejamos então o excerto de um diálogo que diz respeito à interpretação dos dados da tabela e à letra cujo valor queremos determinar para responder à questão.

Professor: O que é esse 8648?

A_2: É a profundidade do oceano Atlântico.

Professor: Do oceano Atlântico, ou seja, …

Turma: Da fossa de Porto Rico!

A_2: É isso!

Professor: E então, nós queremos saber o quê?

A_2: Quantos segundos decorrem até à emissão do eco.

Professor: Queremos saber os segundos, então queremos saber que letra da equação?

(…)

A_{13}: t. É a letra t.

O aluno que foi apresentar a sua resolução no quadro a toda a turma tinha compreendido os dados da tabela. No entanto, para além de o aluno saber o que queria determinar, pois estava explícito na pergunta, não sabia qual o valor da letra da equação que necessitava de encontrar. Quando foi questionado acerca da letra cujo valor necessitávamos de saber, o aluno não respondeu, tendo sido necessária a intervenção de um dos colegas pois o aluno ainda não tinha compreendido qual o significado de cada letra com que estávamos a trabalhar.

Para colmatar estas dificuldades explicou-se para toda a turma o significado de cada letra da equação, reforçando a ideia de que é essencial atribuirmos um significado a cada uma. Depois dos alunos com dúvidas já terem uma noção do significado de cada letra, a resolução da tarefa tornou-se praticamente trivial, pois substituindo cada uma delas pelos valores fornecidos, passou-se a ter equações apenas com uma incógnita.

Tarefa 3 – Índice de massa corporal

Nesta tarefa é fornecido o *ticket* de uma farmácia, onde é legível a altura e o índice de massa corporal do André, bem como os valores de referência para este índice; já o seu peso era ilegível devido a uma mancha de tinta caída sobre o *ticket*. Os alunos trabalharam com uma expressão com três variáveis, onde tiveram de ter especial atenção às unidades em que se encontrava cada uma delas. É também uma tarefa fechada podendo ser considerada um problema rotineiro que envolve os alunos na procura dos significados das letras e expressões.

Consideremos, então, o enunciado e a primeira alínea desta tarefa.

A Organização Mundial de Saúde considera que um indivíduo tem "peso normal" quando o seu Índice de Massa Corporal (M) está entre 18,5 e 24,9. Este índice é reconhecido como padrão internacional para avaliar o grau de obesidade de um indivíduo e depende da altura (h) do indivíduo, expressa em metros, e do seu peso (p), expresso em quilogramas.

A fórmula que a Organização Mundial de Saúde utiliza para calcular o Índice de Massa Corporal de um indivíduo é a seguinte:

$$M = \frac{p}{h^2}$$

O André foi à farmácia *Central* medir o seu Índice de Massa Corporal e guardou o *ticket* na mochila. Quando chegou a casa quis mostrar o *ticket* à mãe e reparou que tinha tinta de caneta, como se mostra na figura seguinte.

a) No *ticket* que o André mostrou à mãe o peso não está legível. Ajuda o André a encontrar o seu peso.

Reparemos num diálogo ocorrido no grupo G_{IV} na resolução desta alínea.

A_3: O P não sabemos.

A_6: E o IMC é o quê? É o índice de massa corporal. E o índice de massa corporal é o M.

A_3: Ya.

A_6: Ou seja, M é 16.

A_3: Como é que sabes que é 16?

A_6: O índice de massa corporal é o M!

A_3: E como é que sabes quanto é o M?

A_6: Porque está no *ticket*.

São evidentes as dificuldades do aluno A_3 na interpretação dos dados fornecidos na tarefa. O aluno não foi capaz de observar o *ticket* que era fornecido e verificar que lá se encontrava o valor do índice de massa corporal, que era necessário para o cálculo do peso do André. Diferentemente, verifica-se que o aluno A_6 percebe o que terá de ser feito para responder à questão, ajudando o aluno A_3 na resolução da mesma.

Tal como aconteceu no grupo G_{IV}, a maior parte das dificuldades dos alunos da turma nesta questão resultaram do facto de não interpretarem corretamente o enunciado.

Conclusão

No ensino do tópico *equações literais*, os alunos começaram por trabalhar equações e expressões que envolviam mais do que uma letra. Verificou-se, ao longo da análise das tarefas exploradas nas aulas, que os alunos tinham dificuldade em atribuir significado às expressões e também às letras envolvidas nas equações. Foi visto que os alunos não tinham em atenção o significado de cada letra da equação, levando a que cometessem alguns erros ao resolver as tarefas, nomeadamente ao substituir as letras por valores incorretos. Por vezes, esta lacuna na atribuição de significados proveio da interpretação errada dos dados que eram fornecidos nos enunciados das tarefas.

À medida que os alunos iam sendo confrontados com estas situações, foi evidente, ao longo de toda a intervenção, o desenvolvimento da destreza na manipulação de expressões e equações com várias letras. O facto de ter sido explorada com afinco a questão dos significados fez com que o interesse dos alunos pelas fórmulas e expressões matemáticas fosse evoluindo ao longo das aulas.

Apesar de ainda terem persistido erros na resolução das equações, verificou-se ao longo da intervenção uma evolução dos alunos no que diz respeito à capacidade de interpretação dos problemas e à atribuição correta de significados às expressões.

Das seis interpretações das letras estabelecidas por Küchemann (1981), três foram alvo de análise neste estudo: letra como *incógnita específica*; letra como *objeto* e letra como *variável*, as quais foram alvo de estudo por serem enfatizadas nas tarefas. Destas três interpretações, verificou-se que, ao longo das aulas, a letra como *objeto* foi aquela em que os alunos menos dificuldades sentiram e a letra como *variável* foi a que criou mais dificuldades aos alunos, o que corrobora resultados semelhantes do estudo efetuado por Küchemann (1981).

Verificou-se, ao longo da intervenção de ensino, que também se verificaram mais erros nas situações relativas às letras como *variáveis*, menos erros nas situações relativas às letras como *incógnitas específicas* e ainda menos erros nas situações relativas às letras como *objetos*.

Apesar dos erros referidos, foi evidente no final da intervenção que, para além das dificuldades que ainda subsistiram, os alunos tinham um maior cuidado em perceber o significado das letras e expressões, prestando também atenção às unidades a que cada uma se referia. Quando lhes eram apresentadas equações em que era necessário substituir letras por números, verificou-se um maior cuidado relativamente a essas mesmas substituições. Assim, a questão da exploração dos significados das letras e expressões nos tópicos lecionados apresentou um forte potencial para as aprendizagens destes alunos.

Também uma visão da Matemática associada ao desenvolvimento de capacidades e à construção de conhecimentos e uma perspetiva de ensino e aprendizagem centrada no aluno pode ter contribuído para a troca de ideias entre os alunos e para a negociação de significados, tal como aconteceu num estudo efetuado por Almeida e Fernandes (2008). Estes aspetos mostraram-se essenciais para os alunos atribuírem significados às letras e expressões envolvidas nas tarefas exploradas.

Referências bibliográficas

Almeida, M. G., & Fernandes, J. A. (2008). *A interacção promovida por uma futura professora na aula de matemática*. In R. Luengo González (Coord.), B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín & L. J. Blanco Nieto (Eds.), Investigación en Educación Matemática XII (pp. 587-597). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Fernandes, J. A., & Soares, M. J. (2003). O ensino de equações lineares. In Comissão Organizadora do ProfMat 2003 (Org.), *Actas do ProfMat 2003* (pp. 327-336). Santarém: Associação de Professores de Matemática.

Fernandes, J. A., Almeida, L. S., Mourão, A. P., & Campelo, M. C. (1993). Caracterização e apresentação do programa. In L. S. Almeida, J. A. Fernandes & A. P. Mourão (Orgs.), *Ensino-Aprendizagem da Matemática: Recuperação de Alunos com Baixo Desempenho* (pp. 91-119). Vila Nova de Famalicão: Didáxis.

Gay, A. S., & Jones, A. R. (2008). Uncovering variables in the context of modeling activities. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 211–221). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In: K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, (pp. 102-119). London: John Murray.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Petocz, P., & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In Philips B. & Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD-ROM.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, nº 85, 36-42.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, nº 100, 89-96.

Ramos, T., Boavida, A. M., & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico no 2º ano de escolaridade: generalização de sequências. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática (XXII SIEM)*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Roa, R., Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In María Guzmán P. (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323-347).Granada, Espanha: Editorial Atrio.

Soares, M. (2005). *O ensino de equações lineares no 8º ano de escolaridade: Uso de calculadoras, erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Usiskin, Z. (1989). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp.8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.