

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas por alunos futuros educadores e professores do ensino básico

José António Fernandes¹, Carmen Batanero², Gustavo Cañadas²

¹ Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt

² Universidad de Granada, batanero@ugr.es, grcanadas@ugr.es

Resumo. Neste texto estuda-se o desempenho de alunos futuros educadores e professores do ensino básico em probabilidade de experiências compostas, designadamente a probabilidade condicional e a probabilidade conjunta. Participaram no estudo 46 alunos do 3º ano da Licenciatura em Educação Básica de uma universidade, a quem foi aplicado um questionário com quatro questões, das quais é aqui explorada apenas uma delas, envolvendo dois itens de probabilidade condicionada e outros dois de probabilidade conjunta. Em termos de resultados, globalmente, obteve-se uma baixa percentagem de respostas corretas em qualquer dos dois tipos de probabilidade estudados. Nas respostas corretas destacou-se o cálculo explícito ou implícito da probabilidade em questão, enquanto nas respostas erradas se salientou a adesão à falácia da inversão do eixo temporal e o cálculo da probabilidade de apenas um acontecimento, ignorando o acontecimento condicionante, no caso da probabilidade condicionada, e a não combinação, total ou parcial, das probabilidades determinadas de forma explícita ou implícita para obter a probabilidade pedida e a adição de probabilidades em vez da multiplicação, no caso da probabilidade conjunta.

Palavras-chave: probabilidade condicionada; probabilidade conjunta; futuros educadores e professores do ensino básico.

Introdução

Sobretudo a nível do ensino básico, o recente reforço do ensino de Probabilidades e Estatística nas escolas de muitos países, entre os quais se encontra Portugal (Ministério da Educação, 2007), relevam a importância de avaliar os conhecimentos dos professores e futuros professores nesta temática.

No caso dos educadores e professores do 1º ciclo do ensino básico, trata-se de uma temática que passam agora de ter de ensinar às crianças, o que antes não acontecia. Ora essa exigência implica que os estudantes futuros educadores e professores do 1º ciclo recebam formação nesses conteúdos ao longo da sua formação inicial, tal como já vem acontecendo, bem como aqueles que se encontram no exercício da profissão.

Neste contexto, torna-se pertinente conhecer até que ponto a formação recebida ao longo da sua formação inicial se revela adequada para as necessidades de ensino, tendo sempre presente questionar essa formação e contribuir para a sua melhoria.

Tendo por pressuposto que a formação dos futuros educadores e professores do 1º ciclo não se deve confinar estritamente aos conteúdos que terão de explorar com as suas crianças, antes devem adquirir uma compreensão mais ampla desses conteúdos, no presente estudo avaliam-se conhecimentos probabilísticos desses futuros educadores e professores através de uma tarefa que envolve a determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas.

Investigação prévia

A literatura mostra-nos que os alunos sentem muitas dificuldades quando lhes é requerida a determinação de probabilidades de acontecimentos compostos de dois acontecimentos (e.g., Fernandes, 2001; Polaki, 2005; Watson & Moritz, 2002).

No caso da probabilidade condicionada e da probabilidade conjunta, Watson e Moritz (2002) concluíram do seu estudo que alunos do ensino primário a recém-ingressados na universidade exibiram dificuldades em ambos estes conceitos.

Para Tarr e Lannin (2005), os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade de estabelecer comparações probabilísticas, tal como foi verificado nos estudos de Falk (1993) e Green (1983), onde, recorrendo a vantagens (*odds*) ou outra comparação do tipo parte-parte, os alunos foram capazes de comparar probabilidades de acontecimentos. Estes resultados sugerem que, diferentemente de Piaget e Inhelder (1951), que destacam as comparações a partir de relações parte-todo, os alunos não necessitam de atingir o estágio das operações formais para efetuarem com sucesso tais comparações.

Fischbein e Gazit (1984), numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, em que participaram alunos do 5º, 6º e 7º ano de escolaridade, concluíram que a percentagem de respostas corretas foi superior nas situações com reposição relativamente às situações sem reposição, identificando dois equívocos fundamentais nos raciocínios dos alunos em probabilidade condicionada: os alunos não perceberam que o espaço amostral é modificado nas situações sem reposição; e calcularam a probabilidade de um acontecimento em situações sem reposição fazendo a comparação entre o número de casos favoráveis para o acontecimento antes e depois da primeira tiragem em vez de fazerem comparações com o número total de resultados possíveis.

Embora Tarr e Lannin (2005) considerem que em situações sem reposição a probabilidade condicionada torna-se particularmente explícita porque a redução do espaço amostral é visível, enquanto em situações com reposição isso não acontece, tal não se repercutiu nas respostas dos alunos do estudo de Fischbein e Gazit (1984).

Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem os significados das probabilidades condicional e conjunta, isto é, $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$, confusão que se tornou particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que implicavam a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em futuros professores do ensino primário (Estrada & Díaz, 2006) e em alunos do 9º ano de escolaridade (Correia, Fernandes & Contreras, 2011) na resolução de uma tarefa envolvendo frequências de dois acontecimentos numa tabela de dupla entrada.

Falk (1986) verificou que muitos alunos aderem à *falácia da inversão do eixo temporal*, afirmando uma visão determinista, em que a probabilidade de algo que ocorre depois não pode afetar algo que ocorreu antes, e não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades $P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro designado por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011) verificou-se que alguns alunos do 9º ano também cometeram este erro.

Relativamente à probabilidade conjunta, Polaki (2005) concluiu no seu estudo que os alunos apresentam muitas dificuldades no estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas, apresentando conjuntos de resultados incompletos com base em raciocínios subjetivos ou estratégias de tentativa-e-erro. Ora, estas dificuldades repercutem-se na determinação de probabilidades e, segundo este autor, mesmo alguns alunos que foram sucedidos na definição do espaço amostral cometeram muitos erros na predição de probabilidades. Face a estas dificuldades, recomenda-se o uso da regra do cardinal do produto cartesiano como forma de confirmação de que o espaço amostral está realmente completo.

Tversky e Kahneman (1983) salientam o erro da *falácia da conjunção*, que significa que os sujeitos avaliam a probabilidade da conjunção como sendo superior à probabilidade de um dos acontecimentos seus constituintes, isto é, $P(A \cap B) > P(A)$ ou $P(A \cap B) > P(B)$. Este fenómeno verifica-se, sobretudo, quando um dos acontecimentos é altamente representativo do outro, como é o caso do acontecimento

“Um ser humano nasceu em África” é altamente representativo do acontecimento “Um ser humano é de cor negra”. Nesta situação, Fernandes (1990) verificou que a maioria dos alunos do 11º ano e futuros professores de matemática que participaram no estudo afirmaram ser mais provável o acontecimento “Um ser humano é de cor negra e nasceu em África” do que o acontecimento “Um ser humano é de cor negra”.

No estudo de Díaz e Batanero (2009), em que participaram estudantes universitários de Psicologia, verificou-se que eles exibiram, com elevada incidência, vários enviesamentos de raciocínio sobre probabilidade condicional, dos quais se salientam a falácia da condicional transposta, a falácia da inversão do eixo temporal, a falácia da conjunção e a confusão entre acontecimentos independentes e mutuamente exclusivos.

Watson e Moritz (2002) acrescentam às dificuldades antes referidas que os alunos quando confrontados com a determinação de uma probabilidade conjunta, para além de a confundirem com a probabilidade da união, simplesmente adicionam as probabilidades dos acontecimentos que a constituem ou determinam a sua média. No estudo que realizaram, estes autores verificaram que o aumento de nível escolar e de compreensão de conceitos básicos de probabilidade esteve associado ao aumento de respostas corretas, mas não esteve associado à diminuição da incidência da falácia da conjunção.

Também no estudo de Fernandes (2001), em que foram incluídos vários itens de probabilidade em experiências compostas, se verificou que alunos do 8º e 11º ano (sem ensino de probabilidades) revelaram muitas dificuldades, as quais se deveram ao recurso a probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a uma descrição incompleta do espaço amostral, a fatores causais e ao *enviesamento de equiprobabilidade*. Neste último caso, os alunos avaliam os acontecimentos de carácter aleatório como sendo equiprováveis (Lcoute & Duran, 1988).

Método

Na presente investigação estuda-se o desempenho de alunos futuros educadores e professores do ensino básico na determinação de probabilidades condicionadas e conjuntas.

Participaram no estudo 46 alunos do 3º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, último ano do curso que dá acesso a

cursos de mestrado em Educação Pré-Escolar, em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e em Ensino do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico. Estes alunos tinham idades compreendidas entre os 20 e os 40 anos, com média de idades de 22,5 anos e desvio padrão de 4,2 anos, e como é habitual neste curso, quase todos os alunos (93,5%) eram do sexo feminino.

Quase todos os alunos (91,3%) tinham frequentado a unidade curricular Números e Probabilidades, no 2º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, embora 32,6 % sem sucesso, que incluía conteúdos de Probabilidades, designadamente os conceitos de probabilidade conjunta e probabilidade condicionada, aqui tratados.

A formação matemática destes alunos à entrada na universidade era muito variada, tendo estudado matemática em cursos muito distintos, de que se salientam a Matemática A (15,2%), Matemática Aplicada às Ciências Sociais (37,0%) e Matemática do 9º ano do ensino básico (23,9%). Em geral, os alunos percecionaram dificuldades na aprendizagem das disciplinas do âmbito da matemática na universidade, afirmando cerca de três em quatro ter muita dificuldade (30,4%) ou ter dificuldade (47,8%), enquanto muitos menos afirmaram ter pouca dificuldade (21,8%) e nenhum afirmou não ter dificuldade.

A recolha de dados foi efetuada através da aplicação de um questionário, numa das suas aulas, composto por quatro questões, cada uma com vários itens, versando os conceitos de probabilidade simples, condicional e conjunta. Neste texto, apresentam-se apenas resultados de uma dessas questões, envolvendo dois itens a probabilidade condicionada e os outros dois a probabilidade conjunta. Na secção seguinte, onde são referidas as resoluções dos alunos, apresenta-se o enunciado da questão.

Finalmente, em termos de análise de dados, classificaram-se as respostas dos alunos em corretas e incorretas, caracterizando-se, seguidamente, os raciocínios desenvolvidos pelos alunos em cada um dos dois tipos de resposta. Em ambos os casos determinaram-se frequências e as categorias de raciocínios são estabelecidas aquando da análise das respostas dos alunos.

Resolução da tarefa pelos alunos

No âmbito deste estudo, foi proposto aos alunos a resolução da tarefa seguinte, constituída por quatro questões:

Num grupo de 25 pessoas, 10 são homens e 15 são mulheres.
Escolhem-se, ao acaso, **duas** pessoas do grupo das 25 pessoas.

- a) Sabendo-se que a primeira pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a segunda pessoa ser homem?
- b) Sabendo-se que a segunda pessoa escolhida é mulher, qual a probabilidade de a primeira pessoa ser homem?
- c) Qual a probabilidade de obter duas mulheres?
- d) Qual a probabilidade de obter um homem e uma mulher (por qualquer ordem)?

Seguidamente apresentam-se o tipo de respostas e os raciocínios realizados pelos alunos na resolução das várias questões da tarefa.

Tipo de respostas

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de respostas corretas, erradas e de não respostas em cada uma das quatro questões da tarefa.

Tabela 1. Percentagem de respostas corretas, erradas e não respostas nas quatro questões da tarefa ($n = 46$)

Questão	Respostas corretas (%)	Respostas erradas (%)	Não respostas (%)
a)	63	30	7
b)	4	83	13
c)	30	59	11
d)	20	63	17

Globalmente, no conjunto das quatro questões, constata-se um fraco desempenho dos alunos, com uma média de percentagens de respostas corretas muito baixa (29%). No caso da probabilidade condicionada, avaliada nas questões a) e b), verifica-se uma grande disparidade nas percentagens de respostas corretas: enquanto na questão a) cerca de dois em cada três alunos responderam corretamente, na questão b) apenas dois alunos apresentaram a resposta correta. O facto de se ter invertido o eixo temporal na sequência dos acontecimentos da questão b) tornou muito mais difícil a questão para os alunos.

Embora menor, também entre as questões c) e d) se observa alguma discrepância entre as percentagens de respostas corretas. Neste caso, a menor percentagem de respostas corretas na questão d), relativamente à questão c), deve-se também, com certeza, ao facto de a questão d) envolver a ordem, o que não acontece na questão c). A este respeito, a menção explícita à ordem no próprio enunciado da questão não foi suficiente para eliminar as diferenças no nível de dificuldade entre as duas questões.

A seguir apresentam-se os raciocínios desenvolvidos pelos alunos na resolução das diferentes questões de modo a complementar-se a evidência relativa às respostas antes apresentadas.

Raciocínios desenvolvidos pelos alunos

Na questão a), os alunos obtiveram a resposta correta através do cálculo explícito da probabilidade pedida (27 alunos) ou da alusão implícita a essa razão (2 alunos), sem contudo a formularem sob a forma de fração (ver Figura 1).

$P(\text{de 24 pessoa ser homens}) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$	10 em 24
--	----------

Figura 1. Respostas dos alunos A₁₂ e A₂₃ à questão a).

Já as respostas erradas basearam-se no cálculo da probabilidade de apenas um acontecimento (9 alunos) e do cálculo da probabilidade conjunta (3 alunos) em vez da probabilidade condicionada (ver Figura 2).

10 Homens 15 mulheres 25 pessoas	$\frac{10}{25} = 0,4 = 40\%$	$\frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = \frac{150}{600} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
--	------------------------------	--

Figura 2. Respostas dos alunos A₉ e A₃₃ à questão a).

No caso do cálculo da probabilidade de um apenas um acontecimento, embora não seja explícito nas respostas dos alunos, é possível que eles tenham ignorado a influência do acontecimento condicionante na probabilidade condicionada.

Finalmente, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respectivas frequências (ver Figura 3) e outro apresentou um valor de que não se percebe a sua origem.

10H 15F	$ \begin{array}{l} H \begin{cases} H (H, H) \\ F (H, F) \end{cases} \\ F \begin{cases} H (F, H) \\ F (F, F) \end{cases} \end{array} $ <p>A probabilidade é de 50%.</p>
------------	---

Figura 3. Resposta do aluno A₃₅ à questão a).

Na questão b), a resposta correta foi referida por apenas dois alunos, que apresentaram apenas o valor da probabilidade pedida, talvez recorrendo à analogia entre as questões a) e b).

A maioria das respostas erradas resultou da determinação explícita da probabilidade de apenas um acontecimento (28 alunos, ver Figura 4) ou da alusão implícita a essa razão (2 alunos).

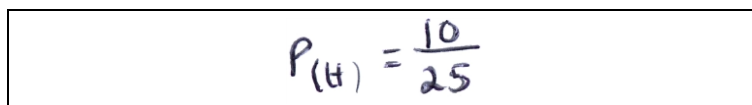
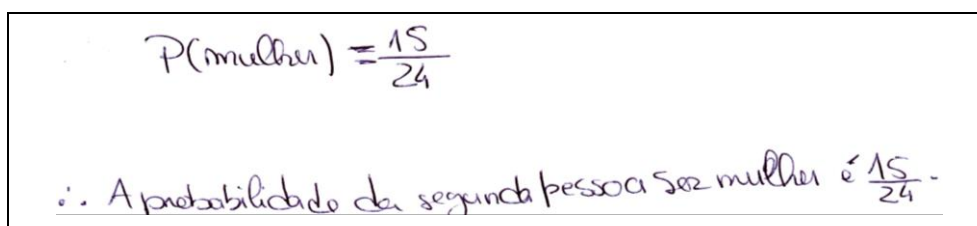

$$P(H) = \frac{10}{25}$$

Figura 4. Resposta do aluno A₂ à questão b).

Conforme foi referido antes, estas respostas terão sido muito influenciadas pela inversão do eixo temporal, em que os alunos afirmam que a probabilidade de um acontecimento não pode ser influenciada pela realização de um acontecimento que ocorre depois.

Outros erros dos alunos resultaram da determinação da condicional transposta, isto é, calcular $P(2^{\text{a}} \text{ pessoa } M | 1^{\text{a}} \text{ pessoa } H)$ em vez de $P(1^{\text{a}} \text{ pessoa } H | 2^{\text{a}} \text{ pessoa } M)$ (3 alunos, ver Figura 5), e do cálculo da probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicionada (1 aluno), considerando eventualmente a reposição da primeira pessoa selecionada.


$$P(\text{mulher}) = \frac{15}{24}$$

\therefore A probabilidade da segunda pessoa ser mulher é $\frac{15}{24}$.

Figura 5. Resposta do aluno A₂₈ à questão b).

Por último, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências e outros três apresentaram um valor de que não se percebe a sua origem.

Na questão c), as respostas corretas basearam-se sempre no cálculo da probabilidade pedida (14 alunos). Destes alunos, apenas um incluiu na sua resposta a construção de um diagrama de árvore com as respetivas probabilidades (ver Figura 6).

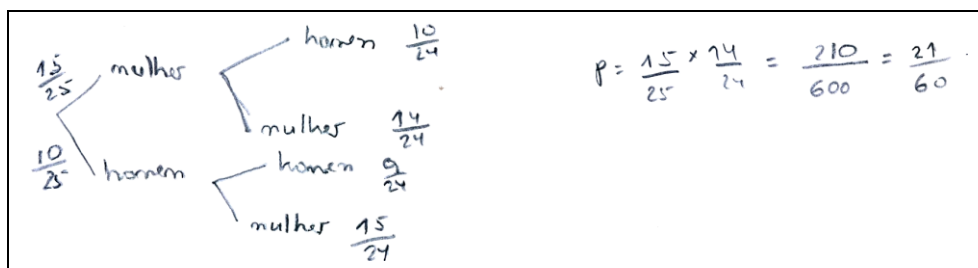


Figura 6. Resposta do aluno A₆ à questão c).

Alguns alunos apresentaram respostas erradas porque consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida nos casos favoráveis e possíveis ou apenas num desses casos (3 alunos, ver Figura 7), enquanto outros (12 alunos), para além de considerarem ou não a reposição da primeira pessoa selecionada, adicionaram as probabilidades (ver Figura 7).

$\frac{15}{25} \times \frac{14}{25} = \frac{210}{625} = 0,336$	$P = \frac{\text{seleção mulher}}{\text{total pessoas}} + \frac{\text{seleção homem}}{\text{total pessoas}} = \frac{15}{25} + \frac{15}{25} = \frac{30}{25}$
--	--

Figura 7. Respostas dos alunos A₉ e A₁₁ à questão c).

Outros alunos determinaram as probabilidades dos acontecimentos de forma explícita (3 alunos) ou implícita (2 alunos) sem, contudo, as combinarem através de qualquer operação (ver Figura 8).

$10 \text{ escolha } 15 \text{ em } 25$
$20 \text{ escolha } 14 \text{ em } 24$

Figura 8. Respostas do aluno A₂₃ à questão c).

Ainda outros alunos determinaram a probabilidade de apenas um acontecimento de forma explícita (3 alunos) ou implícita (1 aluno), como se exemplifica na Figura 9.

$\frac{15}{25}$
$R: \text{ A probabilidade de obter duas mulheres } \frac{15}{25}$

Figura 9. Respostas dos alunos A₂₄ à questão c).

Por fim, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências e outros dois apresentaram um valor de que não se percebe a sua origem.

Na questão d), todos os alunos que reponderam corretamente (9 alunos) fizeram-no a partir do cálculo da probabilidade pedida (ver Figura 10).

$$P = \frac{15}{25} \times \frac{10}{24} + \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} =$$

$$= \frac{150}{600} + \frac{150}{600} = \frac{300}{600} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Figura 10. Respostas dos alunos A₃₆ à questão d).

No caso das respostas erradas, alguns alunos consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida (2 alunos, ver Figura 11) e outros adicionaram as probabilidades (1 aluno, ver Figura 12).

$$P(\text{homem e uma mulher}) = \frac{10}{25} \times \frac{15}{25} + \frac{15}{25} \times \frac{10}{25} = \frac{150}{625} + \frac{150}{625} =$$

$$= \frac{300}{625}$$

Figura 11. Respostas do aluno A₃₀ à questão d).

$$P(H \text{ e } \pi) \rightarrow \frac{10}{25} + \frac{15}{24}$$

$$P(\pi \text{ e } H) \rightarrow \frac{15}{25} + \frac{10}{24}$$

$$P(H \text{ e } \pi \text{ por qualquer ordem}) = \left(\frac{10}{25} + \frac{15}{24}\right) + \left(\frac{15}{25} + \frac{10}{24}\right)$$

Figura 12. Respostas do aluno A₃₄ à questão d).

Seis alunos determinaram as probabilidades dos acontecimentos envolvidos, mas falharem em combiná-las, total ou parcialmente, para obter a probabilidade pedida, tendo dois desses alunos recorrido também à operação de adição (ver Figura 13).

$$P(\text{seu homem e mulher}) = \frac{10}{25} + \frac{15}{24} \text{ ou } \frac{15}{25} + \frac{10}{24}$$

Figura 13. Resposta do aluno A₄₀ à questão d).

Muitos alunos (18) falharam em constatar que a ordem de realização dos acontecimentos conduz a possibilidades distintas, considerando apenas uma das duas possibilidades. Entre estes alunos, 11 combinaram as probabilidades dos acontecimentos (ver Figura 14) e 5 destes consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida.

$$\frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{150}{600} = 0,25 = 25\%$$

R: A probabilidade de obter um homem e uma mulher (por qual que ordem) é de 25%.

Figura 14. Resposta do aluno A₁₆ à questão d).

Já os restantes 7 alunos que não consideraram a ordem calcularam as probabilidades dos acontecimentos envolvidos, de forma explícita (5) ou implícita (2), mas falharam em combinar essas probabilidades para obterem a probabilidade pedida e quase todos (6) admitiram a reposição da primeira pessoa selecionada (ver Figura 15).

<p>Homens 10 em 25</p> <p>Mulheres 15 em 25</p>	<p>$P(\text{homem}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$</p> <p>$P(\text{mulher}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$</p>
---	--

Figura 15. Resposta dos alunos A₇ e A₈ à questão d).

Finalmente, um aluno atendeu apenas aos atributos ser homem e ser mulher sem considerar as respetivas frequências e outro apresentou um valor de que não se percebe a sua origem.

Conclusão

Quer na probabilidade condicionada quer na probabilidade conjunta, os alunos revelaram muitas dificuldades na determinação das respetivas probabilidades.

Entre as duas questões de probabilidade condicionada, destacam-se dificuldades muito acentuadas na questão de inversão do eixo temporal (questão b), em que cerca de dois em cada três alunos determinaram a probabilidade da primeira pessoa ser homem, ignorando a influência do acontecimento condicionante. Assim, ainda que implicitamente, estes alunos admitiram que a probabilidade de um acontecimento não é afetada pela ocorrência de um acontecimento que ocorre depois (Falk, 1986), determinando, em consequência, a probabilidade do acontecimento condicionado independentemente do acontecimento condicionante.

Também na outra questão de probabilidade condicionada (questão a), na qual cerca de dois em cada três alunos responderam corretamente, o erro mais frequente consistiu no

cálculo da probabilidade de apenas um acontecimento, ignorando também o acontecimento condicionante.

Além das dificuldades referidas, embora em menor percentagem, nas duas questões de probabilidade condicionada, alguns alunos determinaram a probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicionada (Pollatsek et al., 1987) e outros determinaram a condicional transposta (Falk, 1986).

No caso das duas questões de probabilidade conjunta, a maior dificuldade experimentada pelos alunos na segunda (questão d) resultou de eles não considerarem que a ordem de realização dos acontecimentos conduz a possibilidades distintas.

Para além do erro de ordem, ao longo das duas questões de probabilidade conjunta, cerca de um em cada três alunos adicionaram probabilidades quando deviam multiplicá-las (Watson & Moritz, 2002), consideraram a reposição da primeira pessoa escolhida e determinaram probabilidades de forma explícita e implícita sem as combinarem, total ou parcialmente, para obterem a probabilidade pedida. Em muito menor percentagem, alguns alunos determinaram a probabilidade de apenas um dos acontecimentos (9%).

Face ao facto de que estes futuros educadores e professores do ensino básico terão de ensinar probabilidades às crianças, globalmente, os resultados do presente estudo não são muito otimistas por duas ordens de razões: primeiro, embora os itens não envolvam raciocínios elaborados, como a necessidade de usar técnicas de contagem *standard* (arranjos, permutações ou combinações), e apresentem potencial para mostrarem a compreensão probabilística dos respondentes, independentemente de eles terem ou não de ensinar às crianças tais conceitos, eles obtiveram percentagens de respostas corretas muito baixas; e, segundo, os raciocínios subjacentes às respostas dos alunos, sobretudo em relação às respostas erradas, mostram que muitos deles têm uma compreensão muito limitada, e frequentemente envolvendo ideias erradas, dos conceitos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta.

Assim, o sucesso na introdução de conteúdos de probabilidades a estas crianças aconselha um reforço de formação dos educadores e professores implicados no seu ensino e, eventualmente, de um tipo de formação distinto daquele que receberam, valorizando mais as ideias e menos os cálculos. No caso da probabilidade condicionada, Borovcnik (2012) defende que o seu ensino deve privilegiar uma perspetiva teórica e multifacetada em vez de uma perspetiva simplificada através da simulação.

Referências bibliográficas

- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.
- Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto, & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 4(3), 131-162.
- Estrada, A., & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.
- Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, 10(2), 3-32.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Falk, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Peters.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Lecoutre, M., & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 357-368.
- Ministério da Educação (2007). *Programa Ajustado de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191-214). New York, NY: Springer.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.
- Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.

Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 59-84.