Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

As aulas de matemática com alunos com deficiência auditiva: perspetivas de uma professora e uma intérprete*

Joana Margarida Tinoco[1], *Maria Helena Martinho*[2], *Anabela Cruz-Santos*[3]
[1] CIEd, Universidade do Minho, joanamargaridatinoco@gmail.com
[2] CIEd, Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt
[3] CIEd, Universidade do Minho, acs@ie.uminho.pt

Resumo. *O abraçar da inclusão colocou vários alunos, que até então se encontravam, na sua maioria, em instituições próprias, na escola regular. Criaram-se escolas de referência para determinadas necessidades educativas especiais (NEE) e tentou-se proporcionar condições para a existência de uma igualdade de oportunidades plena. Com este artigo, pretende-se fazer uma reflexão sobre as perspetivas que uma professora de matemática, a lecionar numa escola de referência para o ensino bilingue, a quem foi atribuída uma turma de alunos com deficiência auditiva (DA), e da intérprete que a acompanhou durante a lecionação dessas aulas, possuem sobre a comunicação com alunos com DA nas aulas de matemática, o papel da intérprete de língua gestual portuguesa (LGP) e as tarefas matemáticas e atividade do aluno. Esta reflexão teve por base entrevistas realizadas à professora e à intérprete e realçam uma grande proximidade relativamente às conclusões de estudos existentes.*

Palavras-chave: matemática; comunicação matemática; deficiência auditiva.

Introdução

Na sociedade atual, as várias formas de comunicação nas mais diversas situações têm assumido cada vez mais importância. Mas até que ponto conseguimos que a comunicação presente na escola seja eficaz de modo a envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem, tornando-os participativos? Ao falarmos de comunicação, estamos sem dúvida a referir-nos a noções diferentes, de acordo com as vivências de cada um, o contexto socioeconómico e até cultural, na medida em que o processo de comunicação envolve interações mútuas nas quais os atores partilham ideias, pensamentos, experiências e sentimentos (Most, 2003). Sendo a escola cada vez mais um meio multicultural, não podemos deixar de nos lembrar de um grupo de alunos que estão inseridos nesta escola inclusiva e que gozam de uma língua e cultura próprias: os alunos com deficiência auditiva (DA).

* Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Em Portugal, o Decreto-Lei n.º3/2008, de 7 de Janeiro, adota uma atitude claramente inclusiva, relativamente à educação, assumindo a importância da promoção da igualdade de oportunidades, quer no acesso quer nos resultados, da valorização da educação e da promoção da melhoria da qualidade do ensino. Na sequência da Convenção dos Direitos da Pessoa com Deficiência e através da Resolução da Assembleia da República n.º56/2009, de 30 de Julho, é confirmada a determinação do Estado Português em manter a educação inclusiva no centro da Agenda Política.

Atualmente, a tónica do conceito de inclusão tem sido, cada vez mais, a qualidade da educação e as mudanças a introduzir nos contextos educativos para responder às necessidades de todos os alunos:

> A inclusão é vista como um processo de atender e de dar resposta à diversidade de necessidades de todos os alunos através de uma participação cada vez maior na aprendizagem, culturas e comunidades, e reduzir a exclusão da educação e dentro da educação. Isso envolve modificação de conteúdos, abordagens, estruturas e estratégias, com uma visão comum que abranja todas as crianças de um nível etário apropriado e a convicção de que educar todas as crianças é responsabilidade do sistema regular de ensino. (UNESCO, 2005, p. 10)

De modo a garantir a plena igualdade de oportunidades, Correia (2008) sugere que a escola deve equacionar um conjunto de experiências construídas a partir das realizações iniciais dos alunos e da observação dos seus ambientes de aprendizagem com a finalidade de maximizar as suas aprendizagens académicas e sociais.

A inclusão em contexto escolar passa também por uma aceitação e valorização da cultura, ou das várias culturas dos alunos que engloba a aceitação e valorização da língua usada em casa, já que muitas vezes a língua materna dos educadores e educandos não é a mesma, como é o caso dos alunos com DA (Borges & César, 2011).

No caso particular dos alunos com DA, Antia, Jones, Reed e Kreimeiyer (2009) referem que, para que o processo de inclusão seja satisfatório, é necessário a presença de um intérprete de língua gestual (LG), boas adequações curriculares, adaptações metodológicas e didáticas, conhecimentos sobre a DA e sobre a LG, por parte de todos os intervenientes.

Com este artigo pretendeu-se refletir sobre: a) a comunicação com alunos com DA nas aulas de matemática; b) o papel da intérprete de língua gestual portuguesa (LGP) e c) as tarefas matemáticas e atividade do aluno. Esta reflexão teve por base duas entrevistas realizadas à professora de matemática, e uma à intérprete de LGP.

Na próxima secção, iremos referir alguns estudos feitos nesta área, orientados pelas três questões que constituem o nosso objeto de estudo e posteriormente, alguns aspetos relativos às opções metodológicas seguidas na elaboração de um projeto mais vasto e no qual se insere este artigo. Em seguida, iremos elencar as perspetivas da professora e da intérprete, que sobressaem das entrevistas realizadas. Finalmente, pretendemos proceder à discussão das perspetivas da professora e da intérprete à luz dos estudos referidos.

As aulas de matemática com alunos com DA

Os estudos existentes não nos permitem generalizar sobre a facilidade, ou dificuldade, com que os alunos com DA encaram a matemática, chegando alguns relatos a ser contraditórios.

Comunicação com alunos com DA

De forma unanime, os estudos existentes consideraram que os alunos com perda auditiva se encontram em desvantagem na aquisição da linguagem, uma vez que a maioria do vocabulário, gramática, expressões, significados e muitos outros aspetos das expressões verbais é adquirido, de forma espontânea, através da audição de conversas entre as pessoas que as rodeiam, de programas de televisão ou rádio (Heward, 2000; Sousa, 2011; Ruiz & Ortega, 1995).

No que se refere a conceitos matemáticos, são apontados, por exemplo, atrasos ao nível do conceito de número, do desenvolvimento do conceito de fração, da resolução de problemas aritméticos de comparação, de conhecimentos de contagem e de estimativas (Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004; Kritzer, 2009), na leitura e escrita de números compostos por vários algarismos (Kritzer, 2009) do raciocínio multiplicativo informal (Nunes et al., 2009) da composição aditiva de números e da compreensão da relação inversa entre adição e subtração (Nunes, Evans, Barros & Burman, 2011) ou do processamento de informação temporal (Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004).

Kelly e Gaustad (2007) e Júnior e Ramos (2008) que o consideram um dos grandes desafios da comunicação de pessoas com DA ao nível da matemática (bem como de outras áreas científicas) é a inexistência de gestos que simbolizem termos específicos desta disciplina. Além disso, segundo Lang e Pagliaro (2007), os alunos com DA memorizam significativamente melhor termos que são transmitidos na forma de um único gesto do que os transmitidos com recurso ao soletrar ou à combinação de gestos.

Segundo Silva, Sales e Bentes (2009), a comunicação é a verdadeira chave para o sucesso em situações escolares, enquanto meio de interação privilegiado através do qual todos os alunos, quer tenham DA ou não, podem indicar aos professores se os objetivos curriculares estão a ser alcançados com sucesso.

No mesmo sentido, Borges e César (2012) chamam a atenção para a importância dos professores de alunos com DA conseguirem distinguir as dificuldades de comunicação dos seus alunos das dificuldades de aprendizagem ou da não mobilização de alguns conhecimentos lecionados.

Tarefas matemáticas e atividade do aluno

Ao nível das tarefas realizadas em sala de aula, Kelly, Lang e Pagliaro (2003), Pagliaro e Ansell (2002) e Ansell e Pagliaro (2006) referem que o enfoque das aulas de matemática para estes alunos se encontra na resolução de exercícios, mais ou menos rotineiros, favorecendo a aquisição de regras e treino de procedimentos e não em verdadeiras situações de resolução de problemas cognitivamente desafiadores. O que pode vedar, a estes alunos, a possibilidade de aceder a uma matemática de um nível cognitivamente mais exigente.

Um outro motivo que leva a que não sejam exploradas verdadeiras situações de resolução de problemas são as dificuldades acrescidas que os alunos com DA evidenciam na leitura e interpretação de enunciados de problemas matemáticos. Este facto faz com que quando estas situações são exploradas, seja dada mais importância e mais tempo à análise e compreensão de enunciados do que ao desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínios, síntese de informação e aspetos inerentes à análise da resolução do problema e à análise e desenvolvimento de outras possíveis estratégias de resolução (Kelly, Lang & Pagliaro, 2003; Nunes & Moreno, 2002; Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004). Em particular, o apoio dado na fase inicial da resolução do problema, em que se tenta clarificar de tal forma o enunciado, pode transformá-lo numa mera resolução de exercícios.

Ansell e Pagliaro (2006), Fávero e Pimenta (2006) e Kritzer (2009) referem que os alunos com DA evidenciam dificuldades acrescidas em traduzir a situação problemática, tentando solucionar o problema por meio de operações aritméticas desvinculadas da questão, considerando possível qualquer solução que ocorra. Além disso, tentam seguir um padrão de atuação no que diz respeito à resolução de problemas: utilizam os números na sequência que aparecem no enunciado, associando-os com os sinais convencionais das operações aritméticas, sem evidenciar espírito crítico, quer durante a resolução quer na apresentação de resultados.

Os alunos com DA evidenciam mais dificuldades em transferir conhecimentos de umas situações para outras e em recordar o que foi aprendido em situações anteriores (Kelly & Mousley, 2001), tendem a focar a sua atenção em itens individuais ou dimensões únicas de uma tarefa em vez de desenvolver procedimentos relacionais e integrados (Borgna et al., 2011), a ter mais dificuldade em perceber relações entre os vários componentes em tarefas multidimensionais complexas e a apresentar um comportamento mais irrefletido demonstrando menos persistência ao trabalhar problemas mais complexos (Blatto-Valle et al., 2007).

Um resultado extraído de um estudo levado a cabo por Kelly, Lang e Pagliaro (2003) é a noção de que, para colmatar possíveis dificuldades de comunicação oral, estes alunos tendem a ser sujeitos a situações que envolvem estratégias visuais concretas em detrimento das estratégias analíticas. Os autores chamam a atenção para o facto da representação visual ser uma excelente estratégia para perceber as variáveis de um problema (para qualquer aluno), mas é insuficiente, por si mesma, quando se trata da resolução de problemas mais avançados, mais desafiantes ou mais complexos.

O papel da intérprete de língua gestual portuguesa

Mas o papel da intérprete na sala de aula passa também por um apoio ao nível da discussão das metodologias mais eficazes a utilizar no ensino destes alunos pois, tal como defendem Ansell e Pagliaro (2006) e Nogueira e Zanquetta (2008), a escola não se deve limitar a traduzir para LG as metodologias, estratégias e procedimentos utilizados nas turmas regulares. Deve, sim, organizar tarefas e atividades eficazes que promovam o trabalho matemático dos alunos com DA.

Metodologia do estudo

Este artigo tem por base uma investigação mais vasta que assumiu uma metodologia de caráter qualitativo e interpretativo (Erickson, 1986), através da análise de um estudo de caso cujo objeto são a professora e a intérprete, que trabalham em conjunto, nas aulas de matemática, de uma turma de alunos com DA.

Neste artigo, a análise é feita, unicamente, através das perspetivas da professora e da intérprete que trabalharam com os alunos nas aulas de matemática. A presença da intérprete de LGP nas aulas é justificada pelo facto destes alunos estarem inseridos num currículo bilingue.

Para tal, foram realizadas duas entrevistas à professora de matemática, uma realizada antes da observação das aulas e muito próxima do início do ano letivo 2012/2013 (EP1) e outra no final do mesmo ano letivo, após a conclusão das aulas e da realização dos exames nacionais de 6º ano (EP2), e uma à intérprete, antes do período de observação das aulas (EI).

Os alunos da turma em questão eram portadores de deficiência auditiva, tinham idades compreendidas entre os 11 e os 12 anos e constituíam, na íntegra, uma turma do 6.º ano de escolaridade, numa escola de referência para a educação bilingue.

Os alunos têm uma surdez que varia entre moderada a profunda. Três alunas têm vestígios auditivos, o que lhes permite oralizar. Apenas um aluno, não oraliza. Os pais destes alunos são todos ouvintes mas nem todos conhecem a LGP.

A professora de matemática é professora do quadro de nomeação definitiva daquela escola há 12 anos. Com mais de 39 anos de serviço, leciona as disciplinas de matemática e ciências da natureza ao 2.º ciclo do ensino básico. Já foi professora de alunos categorizados como tendo NEE, que frequentavam turmas regulares, mas nunca uma turma de alunos com DA. Fez uma formação em LGP, naquela escola, seis anos antes de receber esta turma, pelo que considera que de pouco serviu, pois tudo o que tinha aprendido já tinha esquecido (EP1).

A intérprete de LGP é contratada anualmente e foi colocada nesta escola em 1 de outubro de 2012. Tem 7 anos de serviço e formação especializada na interpretação de LGP quer ao nível da licenciatura quer ao nível de mestrado. Já trabalhou com alunos com DA nos 1.º, 2.º e 3.º ciclos, em todas as disciplinas. Apesar da sua contratação ser anual, uma vez que no ano letivo anterior foi colocada na mesma escola, conseguiu acompanhar estes alunos desde o 5.º ano, mantendo uma boa relação com todos eles.

As perspetivas da professora e da intérprete

Seguindo a estrutura adotada na introdução teórica, iremos agora analisar as perspetivas da professora de matemática e intérprete de LGP, tendo por base as entrevistas efetuadas.

Comunicação com alunos com DA

Na perspetiva da professora, estes alunos encontram-se em grande desvantagem em relação aos seus colegas:

> *Decididamente estes meninos entram com um handicap muito grande. Entram. Não há dúvida nenhuma que é um handicap muito grande. Não ouvir o que os outros dizem… a gente aprende ouvindo, imitando, o facto de eles não ouvirem é um handicap enorme para eles, e um esforço.* (EP2)

A professora considera que o contacto que eles têm com o mundo exterior é mais reduzido pelo que sente que eles estão mais limitados em termos de vocabulário, significados e, acima de tudo, “cultura geral”. A professora chega a sugerir que a escola deveria pensar uma forma de dar a estes alunos mais do que as disciplinas usuais de um currículo normal, mais experiências, que, para a grande maioria dos alunos são banais e que estes alunos desconhecem. Dá, como exemplo, uma aluna que não sabia o significado de aquário, inserido num problema sobre o cálculo de volumes; de um aluno que não sabia o que era produzir azeite, inserido num problema envolvendo números racionais, ou de nenhum deles conhecer Leonardo DiCaprio, do filme Titanic, que surgiu numa conversa informal (EP2).

Um outro aspeto salientado pela professora e intérprete é a pouca fluência destes alunos na língua portuguesa escrita: “*Eles não percebem, ou partirão já do princípio que não percebem, o que vão ler, estão atidos à intérprete, e eu aqui acho que também há alguma coisa que se perde*” (EP2), e que tinham muitas dificuldades quer em perceber o enunciado e estruturar a expressão algébrica que permitia a sua resolução, quer em dar uma resposta a um problema porque não relacionavam o enunciado com o resultado algébrico a que tinham chegado.

Segundo a intérprete, um outro fator que pode potenciar a perda de informação é o facto de não existirem muitos gestos para termos específicos de matemática. Nesse caso, a intérprete recorre à datilologia e à combinação de um determinado gesto para determinado termo. No entanto, isto exige tempo, ou seja, implica que os professores progridam de forma mais lenta. Quando não há termos específicos, a tradução torna-se mais demorada, o que pode levar a que os alunos, intérprete ou até a professora percam a linha de raciocínio. Além disso, estes gestos combinados acabam por ser aproximações dos termos científicos, o que retira algum rigor à matemática.

Em contexto de sala de aula, até a atitude de todos tem de ser diferente. A professora fala, essencialmente, voltada para os alunos. No entanto, os alunos, principalmente os que possuem vestígios auditivos menores, alternam o seu olhar entre a professora e a intérprete. No início, este facto fez bastante confusão à professora, que insistia com os alunos para que olhassem para ela. Só depois se lembrava que a fonte de informação estava na intérprete e, portanto, seria natural que os alunos estivessem a "olhar para o lado". No entanto, quando querem esclarecer alguma dúvida, os alunos chamam diretamente a professora a fim de a questionar. Apenas o Daniel necessitava da ajuda permanente da intérprete. Mas não eram raras as vezes que ele se entendia diretamente com a professora através da utilização de mimicas ou de gestos que a professora foi aprendendo ao longo do ano.

Tarefas matemáticas e atividade do aluno

A professora afirma ter notado mais dificuldades "*em tudo o que seja [resolução de] problemas, em qualquer um dos tópicos*" (EP2), no trabalho com números racionais: "*Como uma fração que tinha o papel de calcular um produto… esta noção de partição não é uma coisa que esteja muito… muito adquirida.*" (EP2), mas em especial na memorização de regras das operações, e na realização de operações algébricas, nomeadamente ao nível da divisão e da multiplicação. Em relação a este último ponto, a professora referiu que eles são totalmente dependentes da máquina de calcular o que conduziu a uma enorme dificuldade em realizar as operações sem máquina ou a não ter espírito crítico quanto aos resultados que ela gera: "*Até porque estão muito habituados a fazer com a máquina, não sabem dividir. E também o conceito de multiplicar não é uma coisa muito adquirida*" (EP2).

A professora referiu que estes alunos teriam também evidenciado dificuldades a nível da distinção entre áreas e perímetros, mas ressalvou que também é problema recorrente nos alunos ouvintes: "*A confusão entre áreas e perímetros, não sei como é que se há de resolver isto, porque não é só destes alunos. É transversal*" (EP2).

Com base em conversas mais ou menos informais que tinha com a intérprete e na experiência que ia adquirindo, a professora optou por adaptar os enunciados substituindo termos mais complexos por sinónimos que fossem melhor entendidos pelos alunos e pôr de lado quer as tarefas mais longas, com várias alíneas encadeadas umas nas outras, quer as tarefas com enunciados mais extensos ou mais complexos:

> *Logo de lado as do livro mais longas. Porque de princípio eu tinha a ideia de que, bom, são as mais longas mas por acaso até estão bem orientadas, são progressivas. Esquece. Porque, enquanto para os não surdos, os ouvintes, se calhar a questão de ser progressivo eles não esquecem o que*

está ali, e portanto vão usar. Nestes miúdos, cinco ou seis… eu tentei isso, cinco ou seis perguntas na mesma tarefa, esquece, porque não fazem ligação. De facto é uma memória muito curta. (EP2)

Quer a professora, quer a intérprete referiram também a falta de autonomia generalizada e a necessidade que demonstraram em ver validados todos os passos que iam fazendo durante a resolução de uma tarefa e durante a realização de fichas de avaliação: "*A insegurança, a falta de autonomia. A necessidade de estar sempre a dizer sim está bem… anda, faz!"* (EP2). No caso das fichas de avaliação, como, de uma maneira geral, evidenciam pouca fluência na leitura, estão muito dependentes da intérprete para traduzir as questões para LGP.

A professora também sentiu necessidade de recorrer a aspetos visuais na expetativa de potenciar a aprendizagem dos seus alunos como se pode verificar pelos excertos:

> *Eu tive muitas vezes na preparação de aulas, ao perceber que aquele termo, no léxico deles, não lhes dizia nada, então procurei até através de imagens (…) quando foi os números negativos, por exemplo, fui através do Google, buscar o fundo do mar, o acima do mar.* (EP2)

Papel da intérprete

Tanto a professora como a intérprete consideram que o papel da intérprete na sala de aula é o de traduzir o que a professora diz para os alunos e vice-versa. Ou seja, serve de elo de comunicação entre pessoas que não possuem a mesma língua materna. No entanto, quando questionadas sobre se a tradução era plena, as respostas foram algo divergentes. Ao passo que a intérprete considera que traduz a totalidade das aulas, a professora tem a sensação de que há partes da informação que se perdem neste trajeto professor-intérprete-aluno:

> *E eu aqui acho que também há alguma coisa que se perde. Ou a intérprete podia ser uma especialista de matemática e também me ajudava. Não sendo, a própria [intérprete] disse-me que às vezes se perde. Não há gestos, ou… linguagem própria… são aproximações que são feitas.* (EP2)

No entanto, também a intérprete reconhece que há algumas partes da comunicação em sala de aula que não são traduzidas para a professora. Isto acontece essencialmente quando se verificam conversas paralelas e a intérprete, percebendo que a dúvida ficou esclarecida, não a devolve à professora:

> *Às vezes em situações em que o professor está a explicar uma matéria a um aluno, está tirar uma dúvida a um aluno, e entretanto o professor já acabou mas eu ainda estou a traduzir, por exemplo, e há outro aluno que está a tirar outra dúvida, ora eu não consigo traduzir a outra dúvida do aluno.* (EI)

Também quando há trabalhos de grupo, as conversas que os alunos vão tendo entre eles não são traduzidas, pelo que a professora não se consegue aperceber, a menos que eles oralizem, da qualidade das discussões matemáticas que se realizam no grupo de trabalho.

Na perspetiva da professora, o papel da intérprete passava também pelo seu auxílio no sentido de aferir se os alunos estavam ou não a perceber a matéria, se eles conheciam determinada palavra ou conceito, se eles tinham conhecimentos anteriores que lhes permitissem progredir em determinado conceito ou se a linguagem que utilizava era adequada, por exemplo.

Conclusão

Da análise das perspetivas da professora de matemática e da intérprete de LGP, realçamos que, tal como defendem Heward (2000), Sousa (2011) e Ruiz & Ortega (1995), a professora considera que estes alunos se encontram em grande desvantagem em relação aos seus pares, uma vez que se aprende muito ouvindo. Encontram-se também em desvantagem ao nível da fluência na língua portuguesa escrita.

Também foi referido o facto de não existirem muitos gestos para termos específicos de matemática, obrigando a intérprete a recorrer à datilologia e à combinação de determinado gesto para determinado termo, à semelhança dos estudos de Kelly e Gaustad (2007) e Júnior e Ramos (2008).

No que respeita às tarefas, esta desvantagem está espelhada nas dificuldades acrescidas que ela verificou em relação à capacidade transversal de resolução de problemas, ou aos tópicos como trabalho com números racionais, memorização de regras de operações e realização de operações algébricas, nomeadamente ao nível da multiplicação e divisão e da distinção entre áreas e perímetros, tal como defendem Zarfaty, Nunes & Bryant (2004) e Kritzer (2009).

Para minimizar estas dificuldades, a professora adaptou os enunciados das tarefas substituindo termos mais complexos por sinónimos, pôs de lado quer as tarefas mais longas, com várias alíneas encadeadas umas nas outras, quer as tarefas com enunciados mais extensos ou mais complexos e recorreu a aspetos visuais na expetativa de potenciar a aprendizagem dos seus alunos, à semelhança de Kelly, Lang e Pagliaro (2003).

Em relação ao papel que a intérprete adota a sala de aula, ambas consideram que fundamentalmente é o de traduzir o que a professora diz para os alunos e vice-versa. No entanto, reconheceram que há partes da comunicação em sala de aula que não vão sendo traduzidas para a professora.

Após este ano e trabalho com alunos com DA, a professora diz sentir falta de um maior apoio no sentido de melhor perceber a DA para poder agir de forma mais consistente. Diz que seria fundamental que houvesse uma formação, logo no início do ano, em que fossem transmitidas algumas noções básicas de LGP mas, essencialmente, algumas dicas sobre a forma de potenciar as aprendizagens destes alunos.

Referências bibliográficas

Ansell, E., & Pagliaro, C. (2006). The relative difficulty of signed arithmetic story problems for primary level deaf and hard-of-hearing students. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 11*(2), 153-170. doi: 10.1093/deafed/enj030

Antia, S., Jones, P., Reed, S., & Keimeyer, K. (2009). Academic status and progress of deaf and hard-of-hearing students in general education classrooms. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 14*(3), 293-311. doi: 10.1093/deafed/enp009

Blatto-Valle, G., Kelly, R., Gaustad, M., Porter, J., & Fonzi, J. (2007). Visual-spatial representation in mathematical problem solving by deaf and hearing students. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education, 12*(4), 432-448. doi: 10.1093/deafed/enm022

Borges, I., César, M. (2011). Processos de inclusão de dois alunos surdos nas aulas de matemática de 12º ano de escolaridade. *Educação Inclusiva, 2*(2), 8-17.Associação nacional de docentes de educação especial: Almada.

Borges, I., César, M. (2012). Eu leio, tu ouves, nós aprendemos: experiências de aprendizagem matemática e vivências de inclusão de dois estudantes surdos, no ensino regular. *Interacções, 8*(20), 141-180.

Borgna, G., Convetiono, C., Marschark, M., Morrison, C., & Rizzolo, K. (2011). Enhancing deaf students' learning from sign language and text: Metacognition, modality, and the effectiveness of content scaffolding. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *16*(1), 79-100. doi: 10.1093/deafed/enq036

Correia, L. (2008). *Inclusão e necessidades educativas especiais: um guia para educadores e professores*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C.Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Mac Millan.

Fávero, M., & Pimenta, M (2006). Pensamento e linguagem: a língua de sinais na resolução de problemas. *Psicologia e reflexão crítica*, *19*(2). Disponível em http://redalyc.uaemex.mx/pdf/188/18819208.pdf

Heward, W. (2000). *Exceptional children: an introduction to special education* (6th ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kelly, R., & Mousley, K. (2001). Solving word problems: more than reading issues for deaf students. *American Annals of the Deaf*, *146*(3), 251-262.

Kelly, R., Lang, H., & Pagliaro, C. (2003). Mathematics word problem solving for deaf students: a survey of practices in grade 6-12. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *8*(2), 104-119. doi: 10.1093/deafed/eng007

Kelly, R., Gaustad, M. (2007). Deaf college student's mathematical skills relative to morphological knowledge, reading level and language proficiency. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *12*(1), 25-37. doi: 10.1093/deafed/en1012

Kritzer, K. (2009). Barely started and already left behind: a descriptive analysis of the mathematics ability demonstrated by young deaf children. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *14*(4), 409-421. doi: 10.1093/deafed/enp015

Lang, H., & Pagliaro, C. (2007). Factors predicting recall of mathematics terms by deaf students: implications for teaching. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *12*(4), 449-460. doi: 10.1093/deafed/enm021

Most, T. (2003). The use of repair strategies: bilingual deaf children using sign language and spoken language. *American Annals of the Deaf*, *148*(4), 308-314.a).

Nogueira, C., & Zanquetta, M. (2008). Surdez, bilinguismo e o ensino tradicional de matemática: uma avaliação piagetiana. *Zetetiké Cempem Fe Unicamp*, *16*(30), 219-237. Disponível em http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2523.

Nunes, T., Bryant, P., Burman, D., Bell, D., Evans, D., & Hallett, D. (2009). Deaf children's informal knowledge on multiplicative reasoning. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *14*(2), 260-277. doi: 10.1093/deafed/enn040

Nunes, T., Evans, D., Barros, R., & Burman, D. (2011, junho). Promovendo o sucesso das crianças surdas em matemática: uma intervenção precoce. Comunicação oral apresentada no XIII CIAEM-IACME, Recife: Brasil.

Nunes, T., Moreno, C. (2002). An intervention program for promoting deaf pupils' achievement in mathematics. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *7*(2), 120-133. doi: 10.1093/deafed/7.2.120

Pagliaro, C., & Ansell, E. (2002). Story problems in the deaf education classroom: frequency and mode of presentation. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *7*(2), 107-119. doi: 10.1093/deafed/7.2.107

Ruiz, J. R., & Ortega, J. L. (1995). Alteraciones del language en el deficiente auditivo. In J.R. Galhardo Ruiz, J.L. Gallego Ortega (Ed.), *Manual de logopedia escolar: um enfoque práctico*. (pp. 375-419). Málaga: Ediciones Aljibe.

Silva, F., Sales, E., & Bentes, N. (2009). A comunicação matemática e os desafios da inclusão. Arqueiro, 17, 7-18. Rio de Janeiro. Disponível em http://ersalles.files.wordpress.com/2009/05/a-comunicacao-matematica-e-os-desafios-da-inclusao.pdf

Sousa, A. (2011). *Problemas de audição e atividades pedagógicas*. Lisboa: Instituto Piaget.

UNESCO (2005). *Orientações para a inclusão: garantindo o acesso à educação para todos*. Paris: UNESCO.

Zarfaty, Y., Nunes, T., & Bryant, P. (2004). The performance of young deaf children in spatial and temporal number tasks. *Journalof Deaf Studies and Deaf Education*, *9*(3), 315-326. doi: 10.1093/deafed/enh034.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O sentido de adição e subtração de números racionais de futuros professores dos primeiros anos

Hélia Pinto[1], *C. Miguel Ribeiro*[2], *Nádia Ferreira*[3]
[1]Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, helia.pinto@ipleiria.pt
[2]Centro de Investigação sobre os Espaços e as Organizações; Universidade do Algarve, cmribeiro@ualg.pt
[3]Instituto Superior de Ciências Educativas, Odivelas, nadiadferreira@gmail.com

Resumo. *O conhecimento do professor é fundamental no processo de ensino e nas oportunidades de aprender que promove. Este conhecimento engloba, entre outros, saber responder ao tipo de questões que se espera que os (seus) alunos possam responder, mas também um conhecimento matemático que lhe permita responder a questões de porquês e enunciar problemas (de contexto real) que possam ser modelados por determinadas expressões. Para uma melhoria da formação é vital identificar, discutir e refletir as situações que sejam matematicamente (mais) críticas no conhecimento dos professores, de modo a delinear formas de a centrar onde é efetivamente necessária. Neste texto discutimos alguns resultados preliminares de um estudo sobre o conhecimento de futuros professores relativamente às componentes do sentido de adição e subtração de números racionais. Os resultados permitem-nos refletir sobre a necessidade de delinear formas que melhorem a formação de professores neste âmbito.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores, conhecimento matemático para ensinar, números racionais.

Introdução

Os números racionais configuram-se como um dos tópicos matematicamente críticos para os alunos. Esta criticidade poderá prender-se, entre outras, com a dificuldade de os alunos relacionarem o seu conhecimento sobre frações com o sentido de operação (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Kieren, 1988), ou mesmo ser fundamentada nas abordagens com que foram confrontados aquando do seu ensino (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993) pois, tal como refere Lamon (2007), por vezes "os professores lutam com as mesmas dificuldades e apresentam os mesmos mal-entendidos dos alunos" (p. 633).

O conhecimento do professor é considerado o fator crucial nas aprendizagens (e resultados) dos alunos (e.g., Nye, Konstantopoulos & Hedges (2004)). Assim, torna-se, portanto, essencial equacionar, de forma explícita, a necessidade de que a formação de professores se passe a focar mais no conhecimento do professor, nas tarefas de ensinar (entendidas aqui no sentido de Ball, Thames e Phelps (2008)) e nas situações matematicamente críticas identificadas (que podem ser tanto ao nível dos conteúdos como das capacidades transversais ou das estratégias de ensino). Esse foco contribuirá para um incremento do nível de significação das tarefas propostas (matematicamente ricas, desafiadoras e com efetivo significado) bem como possibilitando uma passagem suave (efetiva e profícua) dos alunos entre os diferentes tópicos e as diferentes etapas educativas.

Apesar de um reconhecimento das dificuldades dos alunos nos números racionais, bem como do papel do professor e do seu conhecimento nas aprendizagens dos alunos, a maioria das investigações sobre estes números tem, ainda, como foco essencial os alunos (e.g., Behr et al. (1993); Mamede e Silva (2012)) Assim, tem deixado à margem o professor e sua importância no processo de ensino, bem como o impacto que o seu conhecimento assume na promoção das aprendizagens e resultados dos alunos. O conhecimento do professor é aqui considerado, tendo em conta as suas especificidades quando comparado com o conhecimento (matemático) de outros profissionais, seguindo a concetualização do *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball et al., 2008).

Por conseguinte, conjugando as duas dimensões (dificuldades dos alunos e papel do conhecimento do professor), iniciou-se uma investigação que tem por foco último, contribuir para desenvolver o conhecimento dos (futuros) professores. Uma das dimensões desse projeto refere-se ao conhecimento que futuros professores revelam das diferentes componentes do sentido de operação, envolvendo números racionais. Neste texto iremos apresentar alguns resultados preliminares relativos ao conhecimento matemático para ensinar revelado por futuros professores, ao resolverem expressões numéricas que envolvem a adição e subtração de números racionais, na sua representação fracionária, e ao formularem problemas para essas expressões. Partindo desses resultados discutiremos alguns aspetos que sustentam a necessidade de delinear formas que permitam/conduzam a uma efetiva melhoria da formação de professores.

Números racionais, operações e conhecimento do professor

Os números racionais são um dos tópicos em que os alunos revelam dificuldades e onde, portanto, apresentam um sucesso reduzido (e.g., Monteiro & Pinto (2006)). Estas dificuldades relacionam-se, também, com o facto de ser um tema complexo, tanto no aspeto matemático como pedagógico (Lamon, 2007).

Deste modo, o trabalho com números racionais e respetivas operações implica um conhecimento matemático por parte do professor, quer ao nível das componentes do sentido de número racional, quer ao nível das componentes do sentido de operações com números racionais, bem como das situações que potenciam/limitam o desenvolvimento dos referidos sentidos por parte dos aprendentes.

A designação "sentido" implica que se veja o aluno como um pensador, uma pessoa capaz de compreender os domínios matemáticos. Por conseguinte, a referida expressão está associada a um ensino-aprendizagem da Matemática com "sentido", ou seja, promovendo a compreensão (e.g., Huinker (2002); McIntosh, Reys & Reys (1992); NCTM (2000) e Slavit (1999)). Assim, sentido de número e sentido de operação são semelhantes, na medida em que representam uma maneira de pensar, em vez de um corpo de conhecimentos a ser transmitidos. Segundo Huinker (2002) desenvolver estes sentidos requer uma construção a longo prazo, de uma compreensão flexível dos números, operações e suas relações. Refere que a manipulação prematura de símbolos promove equívocos entre conceitos e procedimentos e contextos reais dos alunos. Porém, considera que se for desenvolvida uma base conceptual para o sentido de número racional e o sentido de operação, os alunos aprendem significativamente, podendo criar algoritmos apropriados para números racionais.

Dado o foco deste artigo importa clarificar sentido de operação, que de acordo com Slavit (1999) é a capacidade de usar operações em pelo menos, um conjunto de objetos matemáticos. O autor salienta que o referido sentido envolve vários tipos de conceções flexíveis que podem ser inter-relacionadas pelo aluno, nomeadamente a estrutura subjacente à operação, suas propriedades, seu uso, suas relações com outras operações e estruturas matemáticas, suas generalizações e as várias formas e contextos em que as operações podem existir. Com base em Huinker (2002), McIntosh, Reys e Reys (1992) e Slavit (1999), Pinto (2011) apresenta um modelo para caraterizar o sentido de operação, que requer o desenvolvimento integrado de quatro componentes, nomeadamente (i) estar familiarizado com diferentes significados e contextos das operações – significados que são essencialmente os mesmos dos números naturais, mas requerem algumas adaptações e cuidados na contextualização das operações, tendo em atenção que existem algoritmos diferentes (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010). Assim, a adição continua a significar "juntar/combinar" e "acrescentar" e a subtração a significar "retirar", "comparar" e "completar", alterando apenas as quantidades envolvidas e a(s) forma(s) como estas se encontram expressas (nestes casos são um quociente entre uma parte e um todo e antes eram cardinais ou ordinais); (ii) ter flexibilidade no uso das propriedades das operações – que requer o desenvolvimento de capacidades de cálculo, como o uso de factos operacionais básicos (compor e decompor números), entre outras estratégias de cálculo baseadas nas propriedades das operações; (iii) ser razoável na análise de processos e resultado – que requer o desenvolvimento da capacidade de conhecer o efeito de uma operação sobre um par de números, entre outras; e (iv) usar símbolos e linguagem matemática formal com significado – que requer o desenvolvimento da capacidade de formular problemas, entre outras.

Conforme referido, de acordo com Pinto (2011), o modelo apresentado para caraterizar o sentido de operação requer o desenvolvimento integrado das suas quatro componentes. Assim, os alunos revelam sentido de operação ao evidenciarem conhecimento simultâneo das referidas componentes.

Porém, para que os alunos possam desenvolver os referidos sentidos é essencial que o professor prepare e desenvolva tarefas com esse intuito, assumindo o seu conhecimento um papel central na preparação e implementação de tais tarefas (e.g., Charalambous, (2008) e Ribeiro e Carrillo (2011)). Este conhecimento do professor pode ser considerado sob distintas perspetivas, sendo que a maioria destas encontra a sua génese nos trabalhos de Shulman e colegas (e.g., Shulman (1986)). De entre esses trabalhos destacamos a concetualização do *mathematical knowledge for teaching* – MKT (Ball et al., 2008). Complementar ao conhecimento do conteúdo matemático, às especificidades deste, e sustentado nele – considerando os subdomínios definidos por Ball e colegas (Ball, et al., 2008) – de modo a dar corpo às tarefas de ensinar de forma a que os alunos entendam o que fazem e porque o fazem a cada momento, é também importante um conhecimento didático do conteúdo. Este conhecimento permite operacionalizar a prática letiva tornando o conhecimento matemático acessível aos outros (alunos), mas esse tornar acessível apenas se poderá efetivar se o professor for detentor de um sólido e amplo conhecimento do conteúdo, considerando-o integrado nos três subdomínios considerados no MKT (Cf. Figura 1). Esta concetualização considera os domínios do conhecimento do conteúdo e didático do conteúdo subdivididos, cada um deles, em três subdomínios. Pelo contexto específico do trabalho que temos vindo a desenvolver, aqui abordamos apenas o domínio do conhecimento do conteúdo e, em particular, os subdomínios do *common e specialized content knowledge*. Esta opção tem em consideração também o facto de que apenas sendo detentores de um amplo e sólido conhecimento do conteúdo, na perspetiva que o encaramos e, portanto, de forma compreensiva, será possível ao professor, desenvolver os subdomínios do conhecimento didático do conteúdo (Baumert et al., 2010).

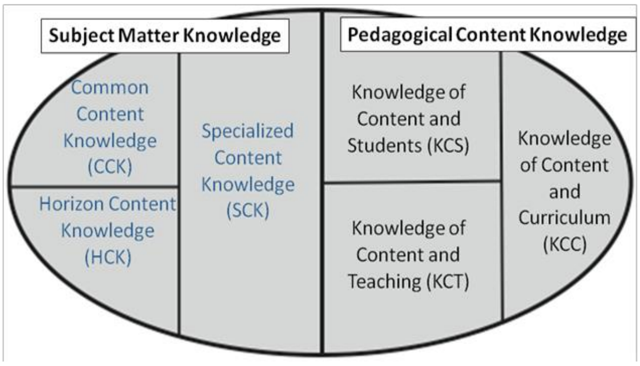


Figura 1. Domínios do MKT (Ball et al., 2008)

O *Common Content Knowledge* (CCK) corresponde a um conhecimento matemático que nos permite saber fazer – na ótica do utilizador. Corresponde ao conhecimento de um qualquer indivíduo com alguma formação matemática e que lhe permite, entre outros, encontrar respostas corretas para determinada operação ou resolver problemas do seu contexto laboral. Associa-se, também, entre outros, a um conhecimento que permite reconhecer respostas algebricamente incorretas e usar notações matemáticas corretas. Associado aos números racionais corresponde, por exemplo, a saber determinar o resultado correto de (3/8+1/2) e, portanto, a identificar como incorreto o resultado de 4/10. No âmbito da enunciação de problemas, relaciona-se, também com o conhecimento que permite identificar como sem sentido/significado o enunciado "O João tinha 3/8 de um berlinde, depois ganhou mais meio berlinde. Com quantos berlindes ficou?".

O *Specialized Content Knowledge* (SCK), complementar do CCK, corresponde a um aspeto do conhecimento especificamente associado à atuação docente e que se associa, entre outros, ao entender os porquês subjacentes a determinada resolução, à atribuição de sentido aos erros dos alunos, ao avaliar ideias alternativas e explicações matemáticas, ao usar representações matemáticas distintas para uma mesma noção (conhecendo em profundidade os porquês da possibilidade de navegar frutiferamente entre elas – Ribeiro, 2011) e na precisão (e adequação) da linguagem matemática utilizada na prática. Corresponde, assim, e no contexto deste trabalho, por exemplo, a um conhecimento que permite atribuir sentido aos motivos matemáticos (complementares a um saber calcular o mínimo múltiplo comum – *mmc*) que levam a que para adicionar duas quantidades representadas por frações tenhamos de ter essas quantidades representadas sob uma mesma unidade dividida num mesmo número de partes (atribuição de sentido ao *mmc* num contexto de adição de frações). Em termos de enunciação de problemas, será expetável que um professor que tenha a intenção de permitir aos seus alunos a possibilidade de entenderem o que fazem e porque o fazem, detenha também um conhecimento relativo aos sentidos das operações e das suas especialidades envolvendo quantidades inteiras ou não.

Considerando que este conhecimento matemático para ensinar pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004) – e, portanto, aprendido, é fundamental aceder às áreas onde os professores (atuais e futuros) apresentam mais dificuldades, de modo a que formação se possa focar onde é, efetivamente, necessária (Ribeiro & Carrillo, 2011). O desenvolvimento destes aspetos poderá ser potenciado com a confrontação e vivência de situações similares às que se espera que os (futuros) professores possam vir a facultar aos seus alunos (e.g., Magiera, van den Kieboom & Moyer (2011)), discutindo-as e encarando-as como ponto de partida para o desenvolvimento de um tal conhecimento.

Metodologia

Tendo por intuito explícito obter informações que nos permitam concetualizar formas para contribuir, de modo efetivo, para a melhoria da formação de professores facultada nas nossas instituições, concetualizamos um projeto que tem como um dos seus objetivos aceder e desenvolver o MKT de (futuros) professores dos Primeiros Anos. Este texto é um dos resultados desse projeto no âmbito dos números racionais, no sentido de efetuar uma contextualização e de definir um ponto de partida acedendo ao *estado da arte* relativamente a alguns dos aspetos do conhecimento matemático dos futuros professores.

O estudo combina uma metodologia quantitativa com um estudo de caso instrumental (Stake, 2005) tendo sido aplicado um conjunto de tarefas a futuros professores dos Primeiros Anos nas nossas Instituições no ano letivo de 2012/2013. Estas tarefas envolvem um conhecimento sobre números racionais e operações com estes números, que qualquer aluno do 6.º ano deveria estar em condições de resolver, considerando o que se encontra explícito no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Esta escolha tem também por base o facto de pretendermos discutir, posteriormente, com os estudantes, o conhecimento matemático para ensinar idealmente envolvido numa plena compreensão e posterior exploração em contexto de sala, de modo a que os futuros professores possam ser confrontados com situações similares às que esperamos possam facultar aos seus alunos (na linha do que refere Magiera et al. (2011)).

Estas tarefas foram respondidas individualmente por um conjunto de 56 estudantes no âmbito de Unidades Curriculares em três contextos distintos – tanto em termos de Unidades Curriculares distintas (sendo os autores deste texto os docentes de cada uma delas) como em termos da fase de formação em que se encontravam (1.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo e do 2.º Ciclo do Ensino Básico; 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica; 1.º ano do Mestrado em ensino do 1º. Ciclo). Esta diversidade de contextos foi propositada uma vez que não se pretende (nesta fase do trabalho) comparar as formações ou os níveis dos estudantes, mas sim obter uma mais ampla compreensão dos aspetos em análise, sendo essa diversidade encarada como mais um elemento de riqueza para um maior entendimento sobre os possíveis motivos que sustentam as dificuldades identificadas.

Aqui, por uma questão de gestão de espaço disponível, focamo-nos apenas nas respostas dos estudantes de duas das IES (correspondendo a 29 futuros professores) e discutimos, em concreto, uma das tarefas (com duas alíneas). Nesta foram fornecidas duas expressões numéricas (1- (3/8 + ½); 4–3 3/7) e solicitou-se aos estudantes que calculassem cada uma delas e formulassem um problema (com contexto real) que pudesse ser resolvido por cada uma das referidas expressões numéricas.

A análise efetuada centra-se na discussão e reflexão sobre os possíveis porquês associados às dificuldades nas componentes do sentido de operação evidenciadas pelos futuros professores aquando do cálculo das expressões numéricas apresentadas e formulação de problemas envolvendo as mesmas. Estas dificuldades são encaradas, por um lado, como uma oportunidade de aprendizagem e, por outro, como mais uma forma de contribuir para uma maior clarificação relativamente ao conteúdo do conhecimento matemático para ensinar e da sua especificidade.

Alguns resultados

Dos estudantes cujas produções aqui discutimos (29), apenas nove tentaram calcular o resultado das expressões apresentadas (e nem sempre corretamente) e, destes, apenas sete efetivamente tentaram formular problemas que consideraram puderem ser resolvidos pelas expressões fornecidas.

Para o cálculo de uma mesma expressão os estudantes apresentaram diferentes respostas revelando, algumas delas, desconhecimento sobre como adicionar e subtrair números racionais (considerado CCK). Houve, por exemplo, estudantes para quem a subtração à unidade de uma determinada quantidade diferente de zero, não os impediu de obterem uma quantidade igual à unidade (Figura 2). Revelam desconhecer o efeito da operação sobre um par de números racionais diferentes de zero e por conseguinte, falta de razoabilidade na análise de processos e resultados, evidenciando, assim, dificuldades nesta componente do sentido de operação (Pinto, 2011).

$$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1^{\times 4}}{2_{\times 4}}\right) = 1-\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\right) = \frac{1^{\times 8}}{1_{\times 8}}-\frac{7}{8} = 8-7=1$$

Figura 2. Produção evidenciando desconhecimento do efeito da subtração sobre um par de números racionais

Houve ainda estudantes a revelarem pouca familiaridade com numerais mistos, evidenciando dificuldades em conectar esta representação de números racionais, com a representação em fração (Figura 3, abaixo). Por conseguinte, manifestaram dificuldades em recorrerem a factos operacionais básicos, que se repercutem na falta de flexibilidade no uso das propriedades das operações, mais uma das componentes identificadas por Pinto (2011) para caraterizar o sentido de operação. Estes estudantes também evidenciaram desconhecimento do efeito da operação sobre um par de números racionais, ou seja, falta de razoabilidade na análise de processos e resultados.

$$4-3\frac{3}{7} = 4-\frac{6}{7} = \frac{28}{7}-\frac{6}{7} = \frac{22}{7}$$

Figura 3. Produção evidenciando desconhecimento de factos operacionais básicos, bem como do efeito da operação sobre um par de números racionais

Outros estudantes, apesar de terem evidenciado algum entendimento de numeral misto, já que o consideraram corretamente como representando uma adição entre a parte inteira e a parte decimal, revelaram desconhecimento relativamente ao que se entende por subtrair – que quando subtraem este numeral têm de subtrair quer a parte inteira, quer a parte fracionária (Figura 4, abaixo). Assim, e ao contrário do que seria expectável, subtraem a parte inteira e adicionam a parte fracionária – revelando mais uma vez, desconhecimento de factos operacionais básicos, bem como do efeito da operação sobre um par de números racionais e por conseguinte, dificuldades respetivamente na flexibilidade no uso das propriedades das operações e na razoabilidade na análise de processos e resultados.

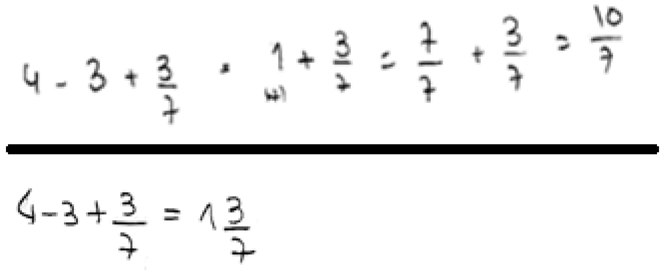


Figura 4. Produções evidenciando desconhecimento relativamente à subtração de quantidades representadas em numeral misto

Dos sete estudantes que criaram enunciados, alguns optaram por "simplificar" a situação de partida e o enunciado do problema proposto, considerava uma expressão equivalente à apresentada, assumindo a unidade dividida já num mesmo número de partes – dividida em oito fatias (Figura 5).

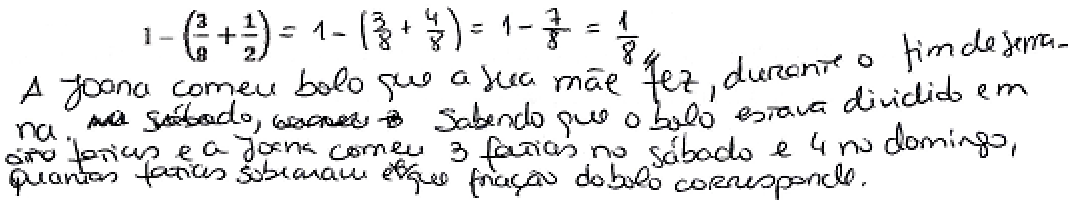


Figura 5. Produção de um enunciado para uma expressão equivalente à apresentada

Esta opção revela, por um lado, uma boa estratégia de resolução de problemas pois, se o que estava a criar dificuldades se prendia com o facto de existirem duas divisões diferentes do todo – considerando aqui a fração como parte-todo, então uma forma de solucionar o problema seria a de considerar uma sua representação equivalente. Porém, revela, por outro lado, dificuldades em relacionar símbolos com ações e conhecimentos informais, que pode decorrer da pouca familiaridade com os diferentes significados e contextos das operações de adição e subtração de números racionais. Deste modo, fica condicionada, também, a sua capacidade (conhecimento) de enunciar problemas que possam ser resolvidos por expressões numéricas dadas (algo que corresponde a um dos conteúdos do SCK do professor), e por consequência, a sua capacidade de usar símbolos e linguagem matemática formal com significado, outra das componentes identificadas por Pinto (2011) para caraterizar o sentido de operação.

Outro dos estudantes considerou uma unidade discreta (berlindes) e, uma vez que dividiu a unidade em oito partes iguais, assumiu que cada uma dessas partes correspondia a 20 berlindes (Figura 6).

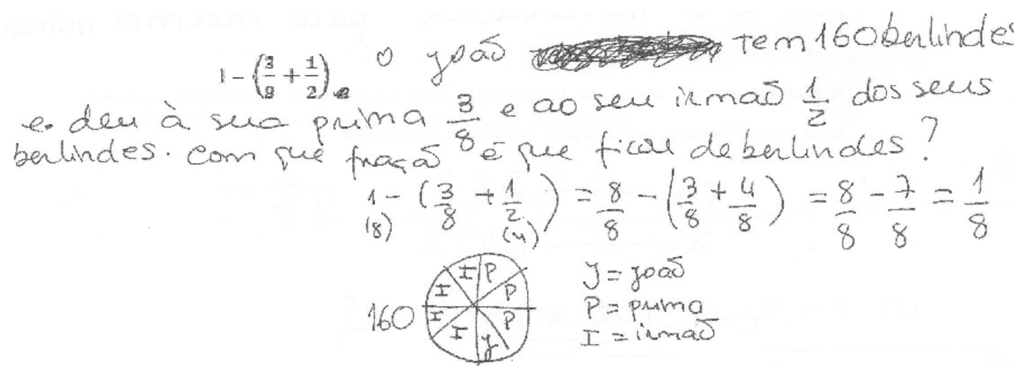


Figura 6. Produção de um enunciado com recurso à unidade discreta e à representação pictórica

Porém o recurso à unidade discreta parece ter sido apenas uma forma de auxiliar o seu raciocínio, dado que ao elaborar o enunciado para a expressão não teve em linha de conta a unidade considerada "(…). Com que fração ficou de berlindes?", sendo esta completamente irrelevante para o contexto do problema enunciado. De salientar ainda, que este foi o único estudante que recorreu a uma representação pictórica para a resolução do problema, o que parece ter-lhe permitido atribuir sentido às diferentes etapas dos procedimentos que efetuou.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e faz parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), financiado pelo Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. NY: NCTM.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd IGPME* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, México: PME.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hilbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. VII, pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

McIntosh, A., Reys, J., & Reys, E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8, 44.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, to appear.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ribeiro, C. M. (2011). Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 4, pp. 41-48). Ancara, Turquia: PME.

Ribeiro, C. M., & Guerreiro, P. (em preparação). Quando os alunos elaboram e resolvem problemas envolvendo racionais – o que podemos aprender também para a formação de professores.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Alemanha: PME.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J., & Silver, E. A. (2009). Problem posing in mathematics learning: Establishing a theoretical base for research. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd IGPME* (Vol. 1, pp. 299). Thessaloniki: PME.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Negociação de significados no 1.º ano de escolaridade: Conceitos e processos matemáticos[1]

António Guerreiro
ESEC, Universidade do Algarve, aguerrei@ualg.pt

Resumo. *Este artigo discute o papel da negociação de significados na definição de conceitos e processos matemáticos em aulas do 1.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do ensino básico. Os dados foram recolhidos por mim, por vídeo gravação, em aulas do 1.º ano de escolaridade de dois professores com habilitação profissional para a docência no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, na variante matemática/ciências da natureza. A análise de dados assume uma orientação interpretativa da ação e significação da prática profissional dos professores. Os resultados apontam para a importância da partilha e negociação de significados matemáticos no desenvolvimento de conceitos e processos matemáticos na aprendizagem da matemática e para o aprofundamento da formação matemática dos professores do ensino básico.*

Palavras-chave: negociação de significados; práticas profissionais; conceitos e processos matemáticos; comunicação matemática.

Introdução

A comunicação matemática como suporte do processo de ensino e de aprendizagem da matemática resulta do reconhecimento das interações culturais em sala de aula, entre o professor, os alunos e o conhecimento matemático (Sierpinska, 1998), reconhecendo o discurso como uma prática social (Godino & Llinares, 2000), em que sobressai a relevância de todos os intervenientes na negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). O conhecimento matemático dos alunos (e do professor) advém de contextos de negociação de significados, através da integração dos conhecimentos da ciência matemática com os conhecimentos pessoais de cada indivíduo.

O desenvolvimento da compreensão de conceitos e processos matemáticos (Guerreiro, 2011a, 2011b; Jiménez, Suárez & Galindo, 2010) determina a partilha e negociação de múltiplos significados, de acordo com o seu uso, em contextos específicos da matemática, e segundo as perspetivas e ações dos intervenientes (Araújo, 2004). A assunção da negociação de significados na partilha e interpretação dos conceitos e processos matemáticos pressupõe uma participação ativa dos indivíduos na conjugação das rotinas e procedimentos matemáticos conhecidos com a sua reinterpretação e a

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

negociação de novos significados e processos que ampliam os conhecimentos matemáticos dos alunos (e do professor).

Este artigo discute o papel da negociação de significados em aulas do 1.º ano de escolaridade (início da escolaridade formal) na definição de conceitos matemáticos, relacionados com a comutação de situações numéricas e espaciais, e de processos matemáticos, associados à sistematização do pensamento combinatório, tendo por objetivo valorizar a pertinência do aprofundamento do conhecimento matemático na formação inicial e contínua de professores do ensino básico. A negociação de significados matemáticos é ilustrada empiricamente por relatos de sala de aula de dois professores do 1.º ciclo do ensino básico (com formação em matemática/ciências da natureza), recolhidos no âmbito de estudos sobre práticas de comunicação matemática no 1.º ciclo do ensino básico.

Negociação de significados matemáticos

A negociação de significados matemáticos caracteriza-se por um processo dinâmico de construção de significados durante a atividade matemática na sala de aula (Meira, 1996), em resultado da construção interativa da intersubjetividade (Godino & Llinares, 2000), em que se confrontam distintas interpretações e soluções na busca de consensos (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010). As ambiguidades resultantes entre os significados matemáticos do professor e os significados atribuídos pelos alunos, especialmente nos primeiros anos de escolaridade, como (ainda) não membros da cultura de sala de aula (Voigt, 1994), são progressivamente resolvidas através de um processo de negociação de significados intrínseco ao ensino e à aprendizagem da matemática (Meira, 1996).

Esta ambiguidade é gerada pela significativa diferença entre os conhecimentos do professor e dos alunos, especialmente na introdução de conceitos matemáticos (Voigt, 1994), por vezes descorada, em resultado de uma cultura matemática tradicional de transmissão de informação e conhecimentos sem a participação ativa dos alunos (Frid & Malone, 1994). As ideias e os significados matemáticos da sala de aula são significativos à medida que os alunos são capazes de fazer conexões com outras ideias matemáticas e com outros aspetos do seu conhecimento pessoal e de construir novos significados a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com os outros indivíduos (Bishop & Goffree, 1986).

O poder e a autoridade do professor na sala de aula de matemática é uma das complexidades do processo de negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). O controlo do professor na sala de aula pode ser usado de modo a permitir a negociação de significados matemáticos ou a prescrever um conhecimento matemático sustentado na memorização e mecanização de procedimentos matemáticos. Bishop e Goffree (1986) defendem que o professor tem que desenvolver uma real consciência da autoridade que exerce na sala de aula, dos seus efeitos no discurso e na negociação de significados matemáticos e da necessidade de compreensão das estratégias singulares dos alunos, para assumir o discurso e a comunicação como alicerce da construção do conhecimento matemático.

Nesta perspetiva, a negociação de conceitos e processos matemáticos (Guerreiro, 2011a, 2011b; Jiménez , Suárez & Galindo, 2010) resulta das relações sociais entre os alunos e o professor (Voigt, 1994), emergindo do confronto interpretativo em múltiplas práticas sociais e culturais (Meira, 1996), cada uma delas em constante transformação, com especial relevo da cultura escolar matemática (Pinto & Fiorentini, 1997), suportada por premissas comunicativas na sala de aula que sustentam e impõem limites à atividade do professor e dos alunos.

Breve descrição da metodologia

Os dados empíricos desta comunicação resultam de estudos sobre a comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática no 1.º ciclo do ensino básico, desenvolvidos segundo uma perspetiva interpretativa da análise de dados, nomeadamente em relação à ação e significação sobre a ação da prática profissional dos professores. Os episódios de sala de aula retratam a prática profissional de dois jovens professores do 1.º ciclo do ensino básico (Beatriz e José – nomes ficcionados), ambos licenciados em Professores do Ensino Básico, variante Matemática/Ciências da Natureza, com oito anos de serviço docente (aquando das filmagens) nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, em duas turmas do 1.º ano de escolaridade da Escola Básica do 1.º Ciclo D. Francisca de Aragão, em Quarteira. A recolha de dados (no ano letivo 2007/2008) conjugou a utilização das técnicas de observação participante com a colaboração (Stake, 2000), com registos áudio e vídeo, entre os professores e o investigador (eu próprio) e a análise de dados sustentou-se na redução de dados (Goetz & LeCompte, 1984) com o intuito de espelhar a natureza das interações entre o professor e os alunos na negociação de significados matemáticos em sala de aula do 1.º ciclo do ensino básico.

Negociação de conceitos matemáticos

A negociação de conceitos matemáticos resulta da confrontação dos conceitos e representações matemáticas do professor, fundados no seu conhecimento matemático, com conceitos e representações matemáticas e sociais dos alunos, estabelecidos pelos seus conhecimentos matemáticos e sociais. A ambiguidade dos significados matemáticos resultantes da distinção entre quantidade e localização, associada às propriedades da adição, gerou conflito de interpretação nas aulas do 1.º ano de escolaridade, cuja tarefa matemática consistia na localização de cinco pássaros em duas árvores distintas (uma menor e outra maior). O aluno Michael apresentou a hipótese de dois pássaros na árvore pequena (com fundo vermelho) e três pássaros na árvore grande (com fundo verde), acompanhado do registo numérico 2 – 3. A aluna Taíssa dispôs três pássaros na árvore pequena e dois pássaros na árvore grande.

> Professora: − Que maneira é esta? É igual ou diferente à do Michael?
>
> Alunos: − É diferente.
>
> Professora: − É diferente. Então escreve lá (solicita à aluna o registo numérico da situação).
>
> Michael: − É igual.
>
> Professora: − Diz lá. É igual? Ele diz que é igual, o Michael diz que é igual.
>
> Aluno: − Igual, só que é diferente, o lado mudado…
>
> Professora: − O lado…
>
> Aluno: − O lado mudado.
>
> Professora: − O que é que é o lado mudado?
>
> Aluno: − O vermelho (árvore pequena) estava no verde (árvore grande) e o verde estava ali…
>
> Professora: − E agora tro…
>
> Aluno: − Trocou.
>
> Professora: − Trocou.
>
> [Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Perante o desacordo do aluno Michael em relação à diferença matemática entre as duas situações, Beatriz gera um processo coletivo de explicação e negociação da diferença das situações apresentadas, apesar da sua similaridade, através do conceito de comutação (troca). Este conflito relacionado com a comutação dos objetos, desta vez em relação a flores amarelas e vermelhas numa jarra, também ocorreu na outra turma, a do professor José. O professor pretendia saber quantas flores amarelas e vermelhas, num total de sete flores, estavam numa jarra. A aluna Marta tinha proposto uma jarra com quatro flores amarelas e três flores vermelhas. Um outro aluno propôs três flores amarelas e quatro flores vermelhas. Os alunos reagiram por considerarem duas soluções matematicamente iguais.

Professor: − É igual ao dela?

Alunos: − Não, é diferente, é ao contrário.

Professor: − Ai é! Então, e qual é que está certa?

Alunos: − É a da Marta (quatro flores amarelas e três flores vermelhas).

Professor: − É a da Marta?

Alunos: − Sim.

Professor: − A outra está mal? Quantas flores estão lá?

Alunos: − Sete.

Professor: − Estão sete flores na jarra! A pergunta era «Quantas flores são vermelhas e quantas são amarelas?», não é? Estão lá flores de outra cor?

Alunos: − Não.

Professor: − Amarelas e vermelhas, não estão?

Alunos: − Sim.

Professor: − Então, o que é que está mal?

Alunos: − Nada.

Professor: − Então, qual é que está certa?

Alunos: − As duas.

Professor: − Estão as duas certas. Aqui temos quantas vermelhas? Vermelhas temos uma, duas, três, quatro (contando as flores), quatro vermelhas. E amarelas temos…

Alunos: − Três.

Professor: − Temos três. Quantas vermelhas agora aqui?

Alunos: − Três.

Professor: − E amarelas?

Alunos: − Quatro.

Professor: − São diferentes respostas?

Alunos: − Sim.

[Aula _ 1.º ano _ José]

A situação de permuta entre os pássaros nas árvores ocorreu igualmente na situação extrema de todos os cinco pássaros numa das árvores. O aluno Rui coloca 5 pássaros na árvore pequena e zero pássaros na árvore grande como solução diferente das anteriores, nomeadamente a do aluno André que colocou todos os pássaros na árvore grande.

Professora: − Então? Imitou quem?

Aluno: − Eu.

Professora: − O André?

Alunos: − Não.

Rui: − O André pôs aqui cinco (indicando a árvore grande) e aqui zero (indicando a árvore pequena).

Professora: − E tu?

Rui: − Pus aqui cinco (árvore pequena) e ali zero (árvore grande).

Professora: − Está igual ou diferente?

Alunos: − Diferente.

Professora: − O Rui sabe explicar que não fez igual ao André, pois não?

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

As ambiguidades geradas pela localização dos pássaros e pelas cores das flores foram facilmente ultrapassadas pelos alunos através da negociação do significado de permuta associada a resoluções matematicamente distintas. Os alunos assumiram sem dificuldade aparente a existência da situação extrema (cinco pássaros numa das árvores) sem se questionarem sobre a necessidade ou não da existência de pássaros nas duas árvores. Na turma do professor, que apresentou a tarefa das árvores com esquilos em vez de pássaros, um dos alunos questionou a existência dos cinco esquilos numa mesma árvore porque, atendendo à dimensão das árvores e dos esquilos, na sua perspetiva as árvores não suportavam todos os esquilos em simultâneo. A aluna Carolina vai ao quadro e coloca os cinco esquilos na árvore pequena.

Aluno: − Agora pôs todos na mesma árvore.

Professor: − A Carolina pôs… Foi assim que puseste, Carolina? (Aluna confirma gestualmente) Os cinco escondidos nesta árvore. Pode ser ou não pode ser?

Alunos: − Não.

Professor: − Quem é que diz que não, põe o braço no ar. (Alguns alunos colocam o braço no ar). Marco, então porque é que não pode ser?

Aluno: − Porque não cabem todos.

Professor: − Cabem, não estão lá todos agora?

(…)

Professor: − Estão cinco esquilos na árvore pequena, quantos estão na árvore grande?

Alunos: − Zero.

> Professor: − Zero. Então, quer dizer que, para a Carolina, podem estar cinco na árvore pequena escondidos e zero aqui escondidos.
>
> [Aula _ 1.º ano _ José]

A existência de zero pássaros ou esquilos numa das árvores não se refletiu na ausência de pintura, como uma solução no caso da tarefa da pintura das listas (com três e quatro listas) de uma bandeira, para a esmagadora maioria dos alunos. A ideia de uma bandeira não pintada como solução matematicamente possível só ocorreu na turma de Beatriz. Este episódio de sala de aula gerou uma situação de conflito secundada por uma negociação do significado de não pintada associada ao conceito matemático de nada como sinónimo de zero.

> Professora: − O Tiago disse que falta uma (bandeira), qual é a que falta?
>
> Tiago: − O nada.
>
> Professora: − O nada, o que é que é o nada?
>
> Tiago: − Falta aí uma não pintada.
>
> Professora: − Não pintada. Concordam com ele?
>
> Alunos: − Não.
>
> Professora: − Então, explica lá aos teus colegas, porque é que pensaste assim.
>
> Tiago: − É porque aqui não está nenhuma pintada. Estão todas pintadas…
>
> Professora: − Sim…
>
> Tiago: − Mas não há nenhuma que não esteja pintada.
>
> Aluno: − São só pintadas.
>
> Professora: − Ele está a dizer que pode haver outra bandeira que não tenha nenhuma risca pintada. E é uma bandeira diferente ou igual àquelas que pintaram?
>
> Alunos: − Sim.
>
> Professora: − É uma bandeira…
>
> Alunos: − Diferente.
>
> [Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

A ausência de pintura como solução matemática na pintura de listas em bandeiras, com três ou quatro listas, foi abordada por José como uma ideia matemática pouco provável na sua turma de alunos do 1.º ano: “A instrução foi para eles pintarem as riscas de modo a obterem bandeiras diferentes, mas não houve nenhum que me pusesse uma bandeira completamente branca” [Aula _ 1.º ano _ José]. A existência ou não de uma bandeira não pintada, como solução matemática, direciona a discussão para o conhecimento matemático dos professores, neste caso para a importância de associar este tipo de tarefas matemáticas (pintura de listas de bandeiras) ao cálculo combinatório. A solução da bandeira não pintada existe associada às combinações de n, zero a zero, o que sugere a importância do papel do professor em estimular os alunos a esgotar todas as situações matematicamente possíveis, incluindo as situações extremas da bandeira integralmente pintada e da bandeira não pintada.

As situações extremas na pintura de bandeiras geraram alguma ambiguidade junto dos alunos, como casos extremos do cálculo combinatório, em contraponto com a localização dos pássaros ou esquilos nas árvores, propriedades da adição, denotando um entendimento matematicamente distinto das situações e, provavelmente, uma maior proximidade dos alunos com os problemas de adição, em relação ao cálculo combinatório. O episódio seguinte ilustra a negociação do professor e dos alunos sobre a possibilidade da pintura total das listas de uma bandeira.

> Aluna: − Podemos pintar as três riscas?
>
> Professor: − Acham que podem pintar as três riscas?
>
> Alunos: − Não.
>
> Professor: − E porque é que não podem pintar as três riscas? Não é uma maneira diferente de pintar a bandeira?
>
> Alunos: − É… Sim…
>
> Professor: − É ou não é?
>
> [Aula _ 1.º ano _ José]

A constante negociação de significados matemáticos na sala de aula é descrita pelo professor, ainda a propósito desta tarefa matemática, ao relatar que, para um dos alunos, a diferença limitava-se ao número de listas pintadas (limitação do pensamento ao aritmético): “A dificuldade dele era que, se pintasse só uma risca era uma hipótese, se pintasse duas riscas era outra hipótese e três riscas era outra hipótese, não havia mais hipóteses” [Aula _ 1.º ano _ José]. A discussão entre a localização e a quantidade foi recorrente na sala de aula, aludindo regularmente à igualdade ou diferença matemática das soluções analisadas. José negoceia com os alunos a valorização da quantidade em detrimento da localização (na tarefa matemática das árvores, associada às propriedade da adição): “Eu já disse que não me importa se é no tronco, se é na copa, não interessa. O que interessa é em qual das árvores eles (os esquilos) ficaram escondidos” [Aula _ 1.º ano _ José]. O conhecimento matemático profundo das tarefas matemáticas pelo professor pode promover uma maior consciência sobre o sentido matemático das situações e, consequentemente, sobre a natureza matemática da negociação de significados matemáticos com os alunos.

Numa outra tarefa matemática com sentido combinatório (localização de três árvores em torno das quatro paredes de uma escola), as ambiguidades entre a quantidade (em relação a cada uma das paredes) e a sua localização espacial foram progressivamente ultrapassadas por negociação de significados matemáticos. O conforto entre duas perspetivas sobre o sentido de diferença matemática é esgrimido entre dois alunos com a mediação e incentivo da professora. O Aluno Michael coloca três cruzes (em representação de três árvores) em forma de V junto à parede da frente (localizada em baixo) da escola (representada por um quadrado).

> Professora: − Olhem lá para esta maneira do Michael!
>
> Taíssa: − Já está (representada anteriormente).
>
> Professora: − Explica lá. Onde é que já está Taíssa?
>
> Taíssa: − Está ali, terceira de cima.
>
> Professora: − Explica lá, achas que é igual ou diferente.
>
> (…)
>
> Michael: − Aqui faz assim (indica V), diferente.
>
> Taíssa: − Não professora, é igual porque ali está três cruzinhas e ali também está três cruzinhas.
>
> (…)
>
> Professora: − Se contarmos o número de árvores, aqui estão três e aqui estão três e a parede é a mesma, elas são…
>
> Aluna: − Diferente.
>
> Professora: − Diferentes? Taíssa, elas são iguais.
>
> [Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

A ambiguidade entre as parcelas e a sua soma num problema matemático relacionado com padrões (matematicamente associados aos termos de uma sucessão e à série correspondente) é negociado por ambos os professores. A distinção entre parcelas e soma numa situação de observação de uma gravura com pessoas à janela (n pessoas na janela de posição n).

> Professora: − Quantas pessoas estão em cada uma das janelas?
>
> Alunos: − Dez.
>
> (…)
>
> Professora: − Em cada janela? Não perguntei «Quantas estão ao todo?»

(…)

Jorge: − A primeira janela só tem uma pessoa, a segunda tem duas, a terceira tem três e a quarta tem quatro.

Professora: − A resposta dele está certa?

Alunos: − Sim.

Professora: − Pedia tudo junto? O que é que pedia lá na pergunta?

Jorge: − Não era tudo junto.

Professora: − Era o quê?

Jorge: − Era tudo separado.

Professora: − Era tudo separado, era em cada uma das janelas. Tinham que contar quantas pessoas estão na… primeira, quantas estão na…

Alunos: − Segunda, terceira e quarta.

Professora: − E na quarta. Vocês todos perceberam mal a pergunta, só o Jorge e a Inês é que perceberam.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Apesar da negociação de significados entre parcelas e soma, a ambiguidade tornou-se recorrente nas situações de extensão da tarefa anterior.

Professor: − A minha pergunta foi: «Se eu desenhar outra janela, quantas pessoas irão cá estar?

Aluno: − Cinco.

Outro Aluno: − Cinco?

Joaquim: − Quinze.

Alunos: − Cinco.

Professor: − Porque é que dizes quinze, Joaquim? Como é que tu contas? Vem cá (ao quadro) contar. Explica lá como é que estão quinze.

Aluno Joaquim escreve no quadro.

Professor: − Um, duas pessoas, três pessoas, quatro pessoas, cinco pessoas (acompanhando os registos do aluno). Então, estavam cinco pessoas. Estás a dizer que o total dá é…

Joaquim: − Quinze.

Professor: − A minha pergunta era «Quantas pessoas estavam aqui nesta janela (a quinta)?». Nesta janela vão estar quantas pessoas? Nesta aqui?

Joaquim: − Cinco.

Professor: − Nesta vão estar cinco. Ao todo vão estar quantas?

Alunos: − Cinco.

Professor: − Quando eu digo «ao todo», é todas. Quando eu digo «nesta», é só nesta. Nesta janela vão estar…

Alunos: − Cinco.

Professor: − Nesta janela vão estar cinco pessoas. Ao todo é que passam a estar quinze. Ao todo é que vão estar…

Alunos: − Quinze.

Professor: − Mas nesta janela só vão estar?

Alunos: − Cinco.

[Aula _ 1.º ano _ José]

A negociação de significados matemáticos revela uma significativa relevância do conhecimento matemático do professor na abordagem com os alunos sobre os conceitos matemáticos, associados a cada uma das tarefas matemáticas, especialmente em relação aos problemas e outras atividades de natureza investigativa. Nos episódios de sala de aula apresentados, parece existir uma familiaridade social e escolar dos alunos com as situações resultantes de propriedades numéricas em contraponto com o pensamento combinatório e com a regularidade de padrões. Nestas circunstâncias, a profundidade do conhecimento matemático do professor pode condicionar o sentido matemático da negociação de significados na sala de aula.

Negociação de processos matemáticos

A negociação de processos matemáticos confronta processos matemáticos e sociais condicionados pelo espaço institucional da escola e do contexto da aula de matemática (Meira, 1996). Neste sentido, uma das linhas estruturantes do papel do professor emerge do ensino de processos matemáticos estruturantes do conhecimento e pensamento matemático. O professor José desafia os alunos a estruturarem o seu pensamento em torno de uma tarefa matemática associada ao pensamento combinatório. A aluna Eva começou por pintar (no quadro da sala de aula) uma bandeira com as quatro listas pintadas, seguida de uma bandeira com duas listas pintadas (a primeira e a quarta). O professor José propõe aos alunos uma sequência lógica na pintura das bandeiras.

Professor: − Pintou uma (bandeira) de quatro riscas, sim senhora. Continua. Agora optou por pintar uma de duas riscas. E agora o que é que a Eva podia fazer?

(…)

Aluna: − Pode pintar uma e depois outra.

Alunos de dedos no ar.

Professor: − Martins?

Martins: − Pode pintar duas juntas. E na outra fazer duas juntas diferentes, para cima e para baixo.

(…)

Professor: − O que o Martins está a fazer, ele já vai explicar.

(…)

Professor: − O Martins pintou na mesma duas risquinhas de maneira diferente (terceira e quarta) e voltou a pintar outra vez duas risquinhas de maneira diferente (primeira e segunda). O que é que o Martins está a fazer? O que é que ele está a fazer?

(…)

Professor: − Está a tentar ver… Pintando duas riscas quantas maneiras há. Há mais alguma de duas riscas, Martins?

(…)

Professor: − O que o Martins está a fazer é esgotar as hipóteses todas com duas (listas pintadas)…

Alunos: − Riscas.

[Aula _ 1.º ano _ José]

Esta negociação de processos matemáticos emerge na sala de aula de Beatriz com uma tarefa matemática baseada no produto cartesiano. Neste contexto, Beatriz tenta organizar o pensamento dos alunos estimulando a organização deste produto por fixação de um dos fatores. A tarefa proposta aos alunos consistia no vestir de uma menina com uma camisola amarela, azul ou cor-de-rosa e uma saía verde ou vermelha. Após a realização dos alunos, a professora aproveita a sistematização da tarefa matemática para incentivar numa sequência lógica a pintura das camisolas e saías.

Professora: − Qual será destas todas a maneira mais fácil e de não se enganarem?

Alunos de dedos no ar.

(…)

Professora: − Pintam a camisola amarela com a saía… (indicando as camisolas e saías em folha colorida no quadro)

Alunos: − Verde.

Professora: − Pintam a camisola…

Alunos: − Azul…

Professora: − Com a saía…

Alunos: − Verde.

Professora: − A camisola…

Alunos: − Rosa…

Professora: − Com a saía…

Alunos: − Verde.

Professora: − Já estão todas as maneiras de vestir a saía verde. Agora, a camisola…

Alunos: − Amarela…

Aluna: − Com a saía vermelha.

Professora: − Com a saía vermelha. A camisola…

Alunos: − Azul com a saía vermelha.

Professora: − E a camisola…

Alunos: − Rosa com a saía vermelha.

Professora: − E assim nunca se enganam. Vão seguindo a ordem e vão pintando.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Esta organização do pensamento dos alunos foi igualmente estimulada pela professora em torno de uma tarefa matemática associada ao cálculo combinatório. A professora Beatriz estrutura a atividade dos alunos atendendo à estruturação do pensamento matemático. A aluna Cláudia fez 3 cruzes (a representarem árvores) à direita do quadrado (representante da escola).

Professora: − Olhem lá esta que a Cláudia fez. Agora qual é a que vocês faziam a seguir?

David: − Do outro lado.

Professora: − De qual lado?

David: − Deste (esquerda).

Professora: − E fazias ali quantas árvores?

David: − Três.

Professora: − Três. David vem cá fazer como estavas a dizer que fazias. A Cláudia fez aquela, agora o David diz que faria outra no outro lado.

David desenha 3 cruzes no lado esquerdo.

Professora: − Ele fez agora daquele lado. Agora, quem é que fazia… De que maneira… Diz lá Tiago.

Tiago: − Em cima.

Professora: − Agora fazias?

Tiago: − Todos em cima.

Professora: − Todos em cima. Vem lá fazer.

Tiago faz as 3 cruzes em cima.

[Aula _ 1.º ano _ Beatriz]

Esta organização do pensamento dos alunos esteve igualmente presente nas aulas do professor José: "O Vasco, o amigo Vasquinho está a fazer sempre o quê? Diga lá, qual é a sua lógica, senhor Vasco? O Vasco está sempre a fazer as duas árvores neste lado (direito) e a outra árvore é que vai mudando de sítio, é verdade ou mentira?” [Aula _ 1.º ano _ José].

A negociação de processos matemáticos parece estruturante na construção do conhecimento e pensamento matemático dos alunos. O desenvolvimento de um ensino matemático baseado em processos de negociação de significados pode estar condicionado ao conhecimento matemático dos professores ao nível do conhecimento de e sobre matemática, incluindo conceitos e processos matemáticos.

Considerações finais

A negociação de significados matemáticos emerge do conflito entre as interpretações que os alunos, neste caso do primeiro ano de escolaridade, têm dos conceitos e processos matemáticos e dos conceitos e processos sociais, como referem Meira (1996) e Voigt (1994). Neste sentido, o conhecimento matemático do professor, mesmo na abordagem de tarefas matemáticas elementares, propostas aos alunos do primeiro ano, pode ser estruturante da natureza do conhecimento matemático dos alunos, nomeadamente em relação ao conhecimento profundo dos conceitos matemáticos e à estruturação do seu pensamento matemático.

A aparente familiaridade dos alunos com as propriedades numéricas em detrimento do pensamento combinatório e algébrico pode sugerir um desnível de conhecimento dos professores em relação aos mesmos temas matemáticos, implicando uma deficiente negociação de significados dos conceitos e processos matemáticos, neste caso combinatórios e algébricos. Nesta perspetiva, a formação inicial e contínua de professores de matemática deve valorizar a reflexão sobre as estratégias de negociação de significados matemáticos do professor, como defendem Bishop e Goffree (1986), evidenciando a partilha de conhecimentos entre os alunos e o professor, o questionamento do professor, a linguagem matemática e os processos de raciocínio matemático.

Nesta ótica, advogo uma formação matemática dos professores do ensino básico com incidência no conhecimento de e sobre matemática, nomeadamente em relação aos conceitos e processos matemáticos que excedem significativamente o conhecimento de regras e procedimentos matemáticos, a partir de tarefas com características figurativas e outras relacionadas com o ensino básico, equacionando as interpretações alternativas dos conceitos e processos matemáticos dos alunos.

Referências bibliográficas

Araújo, J. (2004). Um diálogo sobre comunicação na sala de aula de matemática. *Veritati*, 4, 81-93.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Frid, S. & Malone, J. (1995). Negotiation of Meaning in Mathematics Classrooms: A Study of Two Year 5 Classes. *Mathematics Education Research Journal*, 7(2), 132-147.

Godino, J. & Llinares, S. (2000). El Interaccionismo Simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática,* Vol. 12, 1, 70-92.

Goetz, J. & LeCompte, M (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Orlando: Academic Press, Inc.

Guerreiro, A. (2011a). Imposição ou negociação de significados matemáticos. *Educação e Matemática,* 115, Novembro/Dezembro 2011, 73-75.

Guerreiro, A. (2011b). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Jiménez, A., Suárez, N., Y Galindo, S. (2010). la comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Práxis & Saber*, Vol. 1, 2, 173-202.

Meira, L. L. (1996): Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula, *in*: Mira, M.; Brito, M. (Org) *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica* (Vol. 5, pp. 95-112). Rio de Janeiro: ANPEPP.

Pinto, R. A. & Fiorentini, D. (1997). Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para a "coisa". *Zetetiké*, Vol. 5, 8, 45-71.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (1994). Case studies. In. Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Londres: Sage.

Voigt J. (1994). Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

POSTERS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Da História da Matemática na Educação de Jovens e Adultos: Relações de saberes e contribuições pedagógicas

Rodrigo Donizete Terradas[1], *Josimar de Sousa*[2]
[1]SESI – Serviço Social da Indústria, Brasil, rodrigoterradasmt@hotmail.com
[2]Universidade do Estado de Mato Grosso, Brasil, jsousa.mt@unemat.br

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo central compreender como a História da Matemática contribui no processo de ensino/aprendizagem dos sistemas de numeração na Educação de Jovens e Adultos (EJA). A base teórica desta pesquisa está apoiada em: (1) Miguel e Miorim (2004) e D'Ambrósio (1999), que discutem os conceitos e interrelações da História da Matemática com o ensino da Matemática; (2) Fonseca (2002), que trata a Educação Matemática no âmbito do EJA; e em Fantinato (2004), que aborda a Etnomatemática na EJA. O poster que apresentamos resulta de uma pesquisa qualitativa. A coleta de dados baseou-se na aplicação de uma Sequência Didática aos alunos do II Segmento (Ensino Fundamental) da EJA na cidade de São Jose dos Quatro Marcos - Brasil. Participaram no estudo vinte e três alunos do II Seguimento. A Sequência Didática foi concebida seguindo as indicações de Miguel (1993) relativas aos objetivos do uso da História da Matemática no ensino desta ciência. Os dados recolhidos provêm das respostas dos alunos dadas aos problemas propostos em sala de aula. Os resultados sugerem que a integração da História da Matemática na sala de aula contribui para a compreensão do conceito de sistema de numeração a partir do estudo de sistemas organizados por civilizações antigas. Percebeu-se que, aproximando os sistemas de numeração da Antiguidade com os que atualmente são usados no cotidiano, os alunos não só compreenderam o conceito de sistema de numeração como também tiveram a oportunidade de perceber que a Matemática é criação humana e está presente em todas as culturas, classificando, contando, enumerando as coisas na vida social ou de trabalho, como a dos alunos da EJA.*

Palavras-chave: História da Matemática; ensino-aprendizagem da Matemática; Ensino de Jovens e Adultos.

Referências Bibliográficas

D'Ambrósio, U. (1999). A História da Matemática: Questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In. Bicudo, M. (Org.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP.

Fantinato, M. (2004). A construção de saberes matemáticos de jovens e adultos no Morro de São Carlos. In: *Revista Brasileira de Educação*, *27*, 109-124.

Fonseca, C. (2002). *Educação Matemática de Jovens e Adultos*. Belo Horizonte: Autêntica.

Miguel, A. (1993). *Três Estudos sobre História e Educação Matemática* – Tese de Doutorado – Faculdade de Educação, Unicamp.Campinas.

Miguel, A., & Miorim, A. (2004). *História na Educação Matemática: Propostas e Desafios*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autentica.

SIMPÓSIO 5

MATERIAIS DIDÁTICOS E RECURSOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Coordenadores: *Manuel Vara Pires* & *Nélia Amado*

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática

Manuel Vara Pires[1], *Nélia Amado*[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, mvp@ipb.pt
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt

O ensino e aprendizagem da matemática não podem dissociar-se da sociedade em que vivemos. Os alunos do século XXI estão permanentemente ligados ao mundo e em contacto com o conhecimento, através das mais variadas tecnologias, não aprendendo da mesma forma que os seus pais aprenderam. O acesso à informação está disponível em todo o lado e a escola deve tirar partido desta situação e enquadrá-la. Contudo, fazê-lo não é uma tarefa fácil. A existência de inúmeros recursos e materiais não é, por si só, garantia de melhores aprendizagens. A questão reside na forma como eles são potencializados e aproveitados. Os professores estão perante um novo desafio e um novo dilema, o de gerir a infinidade de materiais e recursos que o século XXI lhes proporciona a cada momento. Apesar da atenção que a formação, inicial e contínua, de professores tem dado à integração dos recursos e materiais no ensino e na aprendizagem da matemática, este é um campo vasto e em permanente desenvolvimento.

Em educação matemática, quando nos referimos a "recursos", devemos pensar para além dos objetos materiais que habitualmente se reconhecem como tal para a aprendizagem da matemática (Adler, 2000). Geralmente, associava-se recursos a materiais manipuláveis, a réguas e compassos, ao quadro ou ao manual escolar, sem dúvida o recurso dominante (Pepin, 2009). Depois surgiram os recursos tecnológicos, como as calculadoras gráficas, os computadores, a Internet ou os quadros interativos. Ao mesmo tempo desenvolveram-se inúmeros *softwares* para a aprendizagem da matemática, como o GeoGebra. Atualmente os recursos devem ser encarados numa perspetiva mais ampla, envolvendo também, como defende Adler (2000), recursos humanos e culturais, dado serem igualmente importantes na formação matemática dos cidadãos.

Desde há várias décadas que os contextos exteriores à sala de aula começaram a ganhar relevância. Em 1987, a UNESCO publica um livro totalmente dedicado às atividades exteriores à sala de aula, mostrando a importância destas no sucesso escolar dos alunos. Em 2008, o 16th ICMI Study é igualmente dedicado a atividades e recursos para o enriquecimento da aprendizagem da matemática, designadamente tecnológicos, em ambientes que se prolongam para além da sala de aula.

As obras referidas apresentam recursos, que podem ser encarados como culturais e humanos no sentido atribuído por Adler (2000), dos quais são exemplos as visitas de estudo, as escolas de verão de matemática, as Olimpíadas e outras competições matemáticas, os museus de ciências ou os clubes de matemática. É nesta perspetiva ampla de materiais didáticos e recursos que se situam as diversas propostas presentes neste seminário.

As comunicações e os pósteres apresentados no simpósio "Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática" incluem várias contribuições resultantes de trabalhos de investigação em desenvolvimento, em Portugal e no Brasil, que ilustram exemplos da utilização de recursos e materiais didáticos, dentro e fora da sala de aula.

O professor e a sala de aula

Entre os recursos humanos, o professor e o seu conhecimento é, sem dúvida, o mais importante, na medida em que é ele que escolhe e seleciona os recursos, os transforma e reinventa nas suas práticas da sala de aula. São os professores que selecionam os problemas criando oportunidades significativas de aprendizagem e de desenvolvimento de capacidades, tal como a criatividade matemática.

Os alunos são igualmente recursos humanos, tal como as suas famílias ou amigos. Os recursos culturais são indiscutivelmente decisivos e devem ser tidos em conta, já que o meio em que cada aluno está inserido, o contexto rural ou urbano, é um recurso cultural determinante que influencia naturalmente as suas experiências e aprendizagens. De facto,

> os recursos, políticas, práticas e ambiente de uma escola ajudam a explicar porque é que os estudantes são mais propensos a ter sucesso numa escola do que noutra e também a força da vantagem educacional que os estudantes obtêm nas escolas com níveis socioeconómicos mais favorecidos (OCDE, 2010, p. 103).

Assim, concluímos que os recursos e as condições mais favoráveis para o ensino e aprendizagem da matemática podem estar tanto dentro como fora da sala de aula.

Sandra Pinheiro e Isabel Vale, na comunicação *Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática*, referem uma experiência didática numa turma do

5.º ano de escolaridade, que procura analisar a forma de desenvolver a criatividade dos alunos, recorrendo à resolução e à formulação de problemas. Os resultados demonstram que os alunos são, de um modo geral, recetivos às tarefas abertas, revelando grande entusiasmo, empenho e interesse na concretização das mesmas. Os alunos envolvidos mostraram não estar habituados a este tipo de tarefas, razão pela qual os enunciados dos problemas por eles produzidos revelavam alguma desorganização, escassez de dados e, por vezes, eram de difícil compreensão. As autoras destacam o facto de nem sempre as produções mais criativas ao nível da formulação de problemas pertencerem aos alunos com melhores desempenhos.

Ana Barbosa apresenta o póster *Experiências matemáticas na educação pré-escolar: A importância da articulação,* que descreve as potencialidades de algumas tarefas que promovem a articulação entre diferentes áreas ou domínios do currículo da educação pré-escolar, com especial enfoque na área da matemática.

Kátia Medeiros e Misleide Santiago, no póster *Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: Explicitando o intertexto*, procuram identificar como é que o professor e os seus alunos concebem a formulação e a resolução de problemas matemáticos. Procuram, ainda, compreender como estes alunos formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto.

As competições matemáticas

Em Portugal, tal como em outras partes do mundo, temos assistido ao surgimento de competições matemáticas em diversos contextos escolares, sendo muitas delas organizadas por grupos de professores das universidades portuguesas. Geralmente estas competições, não estando vinculados diretamente ao currículo, podem permitir uma maior liberdade e oferecer um carácter desafiante. Por outro lado, os participantes dispõem de um período de tempo para a elaboração das respostas que possibilita o desenvolvimento de competências que não se coadunam com o tempo limitado da sala de aula. Segundo Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich & Taylor (2008), "estas atividades extracurriculares, como as competições matemáticas complementam, ampliam e enriquecem o trabalho feito em sala de aula" (p. 53).

As quatro comunicações seguintes têm como contexto de investigação os Campeonatos de Resolução de Problemas SUB 12 e SUB 14, desenvolvidos na Universidade do

Algarve, que se constituem como competições matemáticas de natureza inclusiva e baseadas na Internet.

A comunicação *O contributo da participação numa competição matemática para a aprendizagem de um aluno com necessidades especiais: O caso de Rui*, de Nélia Amado e Susana Carreira, relata o caso de um aluno com deficiência visual, dando destaque à importância da sua participação, ao longo de quatro anos, numa competição matemática de natureza inclusiva. No texto estão patentes aspetos que ilustram a evolução das suas competências matemáticas e tecnológicas e apresentam-se evidências de que a participação deste jovem, do 5.º ao 8.º ano de escolaridade, teve um papel muito significativo no seu desenvolvimento, nomeadamente na forma como estimulou a leitura e a comunicação matemática e o ajudou a superar obstáculos mais globais.

A comunicação *Fatores afetivos na resolução de problemas matemáticos desafiantes no contexto de uma competição inclusiva baseada na Web*, da autoria de Susana Carreira, Rosa Antónia Ferreira e Nélia Amado, foca a questão da procura de ajuda na resolução de problemas, o grau de apreciação e a dificuldade sentida pelos alunos ao resolver os mesmos. Os resultados sugerem que os participantes procuram ajuda sobretudo junto da família e dos professores, e que gostam bastante dos desafios colocados ao longo da competição, desafios esses que consideram, em geral, ser fáceis ou de dificuldade média. Indicam, ainda, a existência de uma forte correlação entre o gosto e o baixo grau de dificuldade sentida, bem como entre o gosto e a ausência de necessidade de procura de ajuda.

A comunicação *Criatividade matemática e flexibilidade de representação na resolução de problemas para além da sala de aula*, apresentada por Nuno Amaral e Susana Carreira, analisa a flexibilidade de representação associada à criatividade, a partir das resoluções enviadas pelos participantes. Os autores apresentam evidências da relação entre a criatividade expressa nas resoluções e a flexibilidade representacional. Concluem que a representação tabular assume elementos específicos e distintivos, num dado espetro de resoluções, permitindo afirmar que cada participante fez criativamente uma utilização própria desta forma particular de representação matemática.

Finalmente, Hélia Jacinto e Susana Carreira, na sua comunicação *“Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho.” – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra,* mostram como uma concorrente nestes campeonatos coloca em interação os seus conhecimentos matemáticos e a sua fluência tecnológica para solucionar dois problemas do campeonato, com recurso ao GeoGebra. Os dados revelam que a jovem utiliza o programa como uma ferramenta-para-pensar, e que é o reconhecimento das potencialidades de ação do GeoGebra em estreita articulação com as suas aptidões que geram esta atividade de resolução de problemas.

As visitas de estudo

Este recurso cultural (Adler, 2000) tem sido pouco estudado e divulgado na educação matemática. Dificilmente encontraremos um estudante que, durante o seu percurso escolar, não tenha realizado, pelo menos, uma visita de estudo. No entanto, não é habitual que a disciplina de matemática esteja envolvida em visitas de estudo ou saídas de campo. Tal facto pode não ser alheio à necessidade de se elaborar uma planificação minuciosa e com objetivos precisos da visita, realizar a ação e efetuar uma reflexão que permita avaliar se foram alcançados os objetivos propostos. A dificuldade em encarar a visita de estudo como um recurso no ensino e na aprendizagem da matemática pode estar relacionada com conceções mais formais e estáticas desta disciplina e da sua aprendizagem. No entanto, uma visita de estudo pode ajudar-nos a mergulhar na vida real do dia a dia e permitir contactar de perto com a aplicabilidade da matemática e a sua contextualização.

Nesta perspetiva, na comunicação *Atividades matemáticas na interseção de saberes no 1.º ciclo do ensino básico*, apresentada por Fátima Regina Jorge, Fátima Paixão, Helena Martins e Maria Fernanda Nunes, a visita de estudo ao *Jardim do Paço de Castelo Branco* realizada pelos alunos do 4.º ano do 1.º CEB constituiu um excelente recurso no ensino e na aprendizagem da matemática em contexto real, permitindo estabelecer conexões entre a matemática e outras disciplinas. No texto são apresentados alguns dados relacionados com a planificação da visita de estudo. A importância da planificação da utilização de qualquer recurso é um dos aspetos enfatizado por Adler (2000), referindo que não é a existência de recursos mais sofisticados que melhora as aprendizagens mas a forma como o professor os coloca em prática. Uma visita de estudo não planificada poderia reduzir-se a um mero passeio ao Jardim, importando, por isso, definir inicialmente o que se pretende que os alunos aprendam e como o devem aprender. As autoras destacam a importância desta visita na aplicação de conhecimentos matemáticos em situações da vida real, bem como no desenvolvimento de aspetos afetivos essenciais na aprendizagem da matemática (Malmivuori, 2006).

Os projetos

Os projetos, a par de outras iniciativas, são um importante recurso na aprendizagem, em particular quando promovem as conexões entre várias áreas do conhecimento e um contacto direto com a matemática no mundo real. A realização de projetos pode conjugar diversos recursos ou materiais, culturais e humanos.

O póster *Do ponto ao espaço: Contributos do croché para a matemática do planeta Terra,* apresentado por Maria Antónia Forjaz, Alexandra Nobre, Cristina Almeida Aguiar e Maria Judite Almeida, destaca a relação da matemática com a biologia, em particular, no âmbito da geometria. Segundo as autoras este projeto propicia o desenvolvimento de diversas competências fundamentais e a aprendizagem dos diversos conceitos geométricos, assim como da interdisciplinaridade.

Referências bibliográficas

Adler, J. (2000) Conceptualising resources as a theme for mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*. *3*(3), 205-224.

Barbeau, E., & Taylor, P. (Eds.) (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Tayor, P. (2009). Challenges beyond the classroom – Sources and organizational issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Malmivuori, M. (2006). Affect and self-regulation. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 149-164.

Morris, R. (Ed.) (1987). *Studies in mathematics education – Out-of-school mathematics education*. Paris: UNESCO.

OCDE (2010). *PISA 2009 results: What makes a school successful? – Resources, policies and practices*. Acedido em setembro, 2013, em http://dx.doi.org/10.1787/9789264091559-en;.

Pepin, B. (2009). The role of textbooks in the ‘figured world’ of English, French and German classrooms – a comparative perspective. In L. Black, H. Mendick & Y. Solomon (Eds.), *Mathematical relationships: Identities and participation*. London: Routledge.

COMUNICAÇÕES

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM & CIEd da Universidade do Minho.

Formulação de problemas e criatividade na aula de matemática

Sandra Pinheiro[1], *Isabel Vale*[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, sandrapinheiro@ipvc.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo. *Este artigo apresenta parte de uma investigação mais ampla que decorreu numa turma de 5.º ano de escolaridade, onde se desenvolveu uma experiência didática com o propósito de analisar de que modo é possível desenvolver a criatividade dos alunos, recorrendo à resolução e à formulação de problemas realizadas pelos alunos em díades. Optou-se por uma abordagem qualitativa, segundo o design de estudo de caso. Apresenta-se uma breve análise da criatividade na formulação de problemas, nas suas dimensões, fluência, flexibilidade e originalidade, aquando da resolução de três tarefas por duas díades. Os resultados demonstraram que os alunos, de uma forma geral, encontram-se bastante recetivos às tarefas abertas, demonstrando grande entusiasmo, empenho e interesse na concretização das mesmas. Por outro lado foi possível verificar que os alunos não estão habituados a tarefas desta natureza o que leva a criarem enunciados com escassez de dados, desorganizados e, por vezes, de difícil compreensão. Simultaneamente, verificou-se que na aula de matemática é possível surgirem produções criativas ao nível da formulação de problemas sem que estas pertençam necessariamente aos alunos de melhor desempenho.*

Palavras-chave: Criatividade; formulação de problemas; matemática.

Introdução

Criatividade, segundo a etimologia da palavra, vem do verbo *creare* que significa originar, gerar, formar e tem na sua origem a dimensão de nascimento e transformação (Cavalcanti, 2006). Leikin(2009) assegura que a definição de criatividade não é simples, pois existem variadas conceções e que estas estão em permanente mudança. Nesta sociedade que desperta para a criatividade em todas as áreas do saber, considerou-se pertinente verificar, ao nível da educação, até que ponto é possível encontrar criatividade no campo da matemática. É possível encontrá-la em todas as áreas da atividade humana (e.g. artes, ciências, trabalho, jogo) e todas as pessoas têm habilidades criativas. (National Advisory Committee on Creative and Cultural Education [NACCCE], 1999).

Nas escolas, nem sempre há espaço para explorar a criatividade assim como a própria formulação de problemas, que também é pouco explorada. A resolução de problemas é parte imprescindível em toda a aprendizagem matemática utilizando-a de um modo transversal permitindo que os alunos pensem de modos diferentes, estimulando a perseverança e curiosidade, promovendo a confiança quando se enfrentam situações desconhecidas, sendo estas capacidades de extrema importância no contexto extra sala de aula e na própria vida do dia-a-dia de cada aluno (NCTM, 2007).

A tarefa de formular problemas na aula de matemática

Uma tarefa só é um problema se exigir uma solução tendo em conta condições próprias: se o aluno entende a tarefa, mas não se depara de imediato com uma estratégia para a sua resolução e, em simultâneo, se se sente aliciado a procurar uma solução (Díaz & Poblete, 2001). Enquanto que Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), entre outros autores, consideram que a "resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjeturas " e "constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática" (p. 14). Por outro lado, a solução desses mesmos problemas de diferentes formas torna-se uma ferramenta poderosa para a construção de conexões matemáticas (Leikin, 2009).

As tarefas desafiadoras, onde se incluem os problemas, habitualmente exigem uma visão que promove o pensamento divergente, mais rico, complexo e produtivo, movimentando conhecimentos prévios e necessitando de perseverança, constituindo em si um estímulo para os alunos (Vale & Pimentel, 2012). Considera-se que o pensamento divergente durante a resolução de problemas carateriza-se pela observação atenta do problema, analisando todas as possibilidades de resolução e explorando a melhor estratégia para alcançar a solução do mesmo.

Polya (2003) refere que numa aula de matemática a resolução de problemas fica empobrecida se não for articulada com a formulação de problemas. Esta articulação é benéfica no processo de aprendizagem da matemática nomedamente pelo facto de contribui positivamente no desenvolvimento das habilidades na resolução de problemas, ao mesmo tempo que permite aprofundar os conceitos matemáticos envolvidos e estimular o pensamento crítico bem como capacidades de raciocínio (Boavida et al., 2008; NCTM, 2007).

Yuan e Sriraman (2011) afirmam que existem diferentes modos de referir formulação de problemas tais como descoberta de problemas, deteção de problemas, descobrindo problemas criativos, criação de problemas e prevendo problemas. Silver(1997) considera que a formulação de problemas se refere quer à criação de novos problemas quer à reformulação de um dado problema. O importante desta atividade não é chegar a uma solução de um determinado problema, mas sim a criação desse novo problema. Esta investigação assumiu como fio condutor ao nível da formulação de problemas a perspetiva de Silver (1997).

Singer, Pelczer e Voica (2011) referem que os alunos para serem criativos em matemática devem ser capazes de colocar questões matemáticas que alarguem e aprofundem o problema original, assim como resolver problemas de diferentes modos, exibindo desta forma capacidade de formulação de problemas, uma condição da criatividade matemática. A literatura sobre a formulação de problemas revela que esta atividade é pertinente em diversas perspetivas e refere também conexões entre a formulação de problemas e a criatividade. Na disciplina de matemática, a essência do pensamento matemático e a sua conexão com a criatividade deriva da ligação entre a formulação e a resolução de problemas. A atividade criativa vê-se no jogo de formular, na tentativa de resolver, reformulando resolvendo um problema (Silver, 1997). Segundo Singer, Ellerton, Cai e Leung (2011) formular um problema matemático pode aliciar os alunos a realizar uma autêntica atividade matemática, pois permite-lhes encontrar muitos problemas, métodos e soluções e simultaneamente promove-lhes a criatividade, incentivam-nos na procura de novos problemas, métodos alternativos e soluções inovadoras.

Boavida et al. (2008) apresentam duas estratégias para a formulação de problemas: *E se em vez de*? – com esta estratégia é pedida a criação de novos problemas através da modificação de dados de problemas já apresentados; *Aceitando os dados* – com esta estratégia são apresentadas situações estáticas, sejam elas figuras, expressões ou simplesmente um conjunto de dados, a partir das quais os alunos são convidados a criar um problema. Stoyanova e Ellerton(1996), por sua vez, identificam três tipos de situações na formulação de problemas: situações livres, estruturadas e semiestruturadas. Na formulação de problemas *em situações livres*, os alunos são desafiados a criar um problema a partir de uma dada situação, naturalista ou artificial. Na formulação de problemas *em situações estruturadas*, os alunos realizam a atividade com base num problema, sendo estimulados a explorar a sua estrutura ou a completá-la. Finalmente, na formulação de problemas *em situações semiestruturadas*, é dada aos alunos uma situação aberta, nomeadamente com a apresentação de fotos, desigualdades, equações, onde os alunos são convidados a apresentar problemas. Neste estudo optou-se por propor aos alunos situações de formulação de problemas *semiestruturadas* com vista a aplicação da estratégia *Aceitando os dados*.

A criatividade na formulação de problemas

Silver (1997) e Guerra (2007) consideram que a criatividade não é apenas própria dos alunos sobredotados ou excecionais, visão clássica de criatividade, mas assumem a visão contemporânea da conceção de criatividade em matemática. Segundo esta visão, contemporânea da criatividade Silver (1997) considera que, na matemática, a criatividade pode ser "promovida amplamente na população escolar em geral"(p. 75) e pode ser desenvolvida na maioria dos estudantes (Har & Kaur, 1998). Estas duas linhas de pensamento, apesar de divergirem no tipo de população onde é possível encontrar a criatividade, convergem quando consideram que a atividade criativa resulta da focalização do trabalho nos métodos criadores de formulação e resolução de problemas (Silver, 1997; Leikin, 2009). Silver (1997) refere ainda que a ligação da matemática com a criatividade não reside apenas na problematização, mas resulta da ligação entre a formulação e resolução de problemas e sugere que se pode promover a criatividade na matemática, mas tendo em atenção ao tipo de ensino utilizado, sempre alargado a todos os estudantes.

No âmbito da matemática criativa, de acordo com Pelczer e Rodríguez (2011), a investigação em educação matemática, é sustentada pelo propósito de que a criatividade é possível estar presente em todos os alunos e pode ser promovida utilizando tarefas com estrutura ajustada. A criatividade matemática é essencial no desenvolvimento de talento em matemática mas também é muito difícil de identificar e de avaliar (Mann, 2006).

Conway (1999) afirma que devem ser identificadas as categorias que incluem respostas que o investigador acredita serem originais ou matematicamente perspicazes. Ainda no âmbito da originalidade, Conway (1999) e Vale (2012) afirmam que para verificar a originalidade de uma solução no contexto de uma turma, pode-se recorrer a outros professores para colaborar na validação da escolha. Conway (1999) indica um método para a avaliação da fluência, flexibilidade e originalidade na resolução de problemas abertos sendo este composto por quatro fases: organização das possíveis soluções do problema por categorias; resolução dos problemas pelos alunos; identificação das categorias em que se enquadram as respostas; pontuação dos estudantes para cada dimensão. Esta pontuação é dada às respostas dos alunos de acordo com cada área – fluência, flexibilidade e originalidade. Esta metodologia foi seguida ao longo deste estudo também para formulação de problemas. Neste sentido, após a organização dos problemas formulados pelas díades de acordo com a sua tipologia, foi analisado o desempenho geral quer da turma quer de cada um dos casos, em termos de formulação de problemas, seguida da atribuição de pontuação a cada dimensão da criatividade.

Do produto da atividade matemática, nomeadamente aquando da formulação de problemas, também resultam novos problemas, pelo que é possível adaptar as técnicas avaliativas da extensiva investigação no campo da resolução de problemas (Leung & Silver, 1997). De acordo com Kontorovich, Koichu, Leikin e Berman (2011) as tarefas de formulação de problemas podem ser uma ferramenta potente para avaliação da matemática criativa. Estes mesmos autores referem também o benefício de incorporar as tarefas de formulação de problemas no processo de ensino/aprendizagem da matemática.

Para analisar a criatividade na formulação de problemas são utilizadas as suas três dimensões – fluência, flexibilidade, originalidade – à semelhança do que acontece com a resolução de problemas. Leikin, Koichu e Berman (2009), afirmam que *fluência* corresponde ao número de problemas levantados que se ajustam aos requisitos da tarefa; *flexibilidade* corresponde ao número de diferentes tipos de problemas colocados; *originalidade* corresponde ao número de problemas colocados que são únicos ou raros. Nesta investigação, foi seguido este procedimento para a análise ao nível da formulação de problemas. No entanto foi realizada uma adaptação da metodologia em termos de originalidade. Para esta dimensão da criatividade, serão considerados os diferentes tipos de problemas formulados pelas díades serem únicos ou até mesmo raros, quando apenas se regista este tipo de problemas num máximo de duas díades (Pinheiro, 2013).

Contexto e metodologia

Neste texto descrevem-se parte dos resultados de um estudo qualitativo mais alargado segundo o *design* de estudo de caso, com o propósito de analisar e compreender de que modo é possível desenvolver a criatividade dos alunos, recorrendo à resolução e à formulação de problemas. A metodologia adotada decorre sobretudo do propósito do estudo onde se pretendia compreender o fenómeno a investigar em contexto natural (e.g. Bogdan e Biklen, 1994; Stake, 2009; Yin, 2011). A investigadora assumiu duplo papel na realização deste estudo, professora/investigadora, sendo observadora participante, com um papel privilegiado na recolha de dados, que segundo Yin (2011) reforça a ideia de que a fonte de recolha de dados primordial é o investigador. A construção da experiência didática resultou, por parte da investigadora, de uma pesquisa intensa quer no campo da resolução e formulação de problemas quer no campo da criatividade. Os critérios para a escolha dos casos, que tiveram como propósito obter o máximo de informação sobre o problema em estudo, incidiram em alunos com diferentes níveis de aproveitamento e sobretudo serem bons comunicadores revelando capacidades em termos de expressão escrita e expressão oral.

A experiência didática subjacente a esta investigação decorreu, ao longo das aulas de matemática, no 5.º ano de escolaridade, numa turma de vinte e um alunos, entre os nove e os onze anos, organizados em díades. Esta investigação, como já referido, teve como propósito estudar a criatividade dos alunos através da resolução e formulação de problemas, tendo em conta a tipologia de tarefas e analisando as representações que os alunos utilizam nas suas resoluções. Neste sentido, tornou-se pertinente explorar diferentes estratégias de resolução de problemas, dotando os alunos de ferramentas que facilitassem a realização das tarefas (Pinheiro & Vale, 2013). Neste artigo apenas serão analisadas resoluções de duas díades no âmbito da formulação de problemas, contextualizados na turma da qual faziam parte.

Nesta experiência didática as tarefas têm um papel fundamental, onde a professora aplicou o modelo de Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), tendo: realizado a previsão das resoluções das tarefas; acompanhado o trabalho realizado pelas díades durante a aplicação das tarefas num ambiente descontraído; selecionado os alunos para a apresentação do seu trabalho à turma; organizado os trabalhos, de forma sequencial, do mais comum para o mais diverso e escolhendo os alunos para fazerem a apresentação dos mesmos; e promovido discussões com a turma evidenciando as conexões entre as resoluções com as ideias matemáticas.

A experiência didática recaiu no tópico "Números racionais não negativos". Em todas as tarefas, os alunos foram convidados a analisar, resolver e discutir as tarefas propostas, dando relevo à comunicação quer oral, quer escrita, nomeadamente às representações realizadas pelos alunos. A recolha dos dados foi realizada de forma holística, onde se incluem as observações na sala de aula, questionário, notas de campo, entrevistas e produções escritas dos alunos. Para melhor percecionar a ideia que possuíam de criatividade em matemática, foi realizado um inquérito no início da operacionalização da experiência didática. No fim da aplicação das tarefas, foi realizado um inquérito final onde os alunos exprimiam a sua opinião relativamente ao facto das tarefas serem criativas ou serem promotoras de produções criativas, ao grau de dificuldade das tarefas, assim como à metodologia de trabalho em díade. Também se utilizaram entrevistas às duas díades que constituíam os casos em estudo.

Ao longo deste estudo todos os dados recolhidos durante a investigação (e.g. as produções das díades, as gravações áudio e vídeo, notas de campo, relatos da investigadora redigidos tendo por base as observações realizadas, vários documentos escritos) foram cuidadosamente organizados e analisados de acordo com o problema em estudo e o enquadramento teórico adotado e, paralelamente, dando resposta às questões da investigação.

Resultados e discussão

O conjunto de tarefas foi selecionado de forma criteriosa, possibilitando a criação de problemas dentro do tema dos números racionais não negativos ou em outros temas, pois não existiam limitações neste campo. As tarefas[1] de formulação de problemas utilizadas eram de variados contextos de forma a possibilitar diferentes interpretações e ideias. Foram apresentadas figuras, gráficos, expressões algébricas e numéricas para as quais os alunos teriam que formular problemas. Por outro lado, as tarefas foram apresentadas segundo uma sequência atendendo ao grau de dificuldade das mesmas assim como aos tópicos que foram sendo abordados ao longo das aulas.

Para estas tarefas, perspetivava-se que a maioria das díades fosse capaz de criar pelo menos um problema de cálculo de um passo para cada uma das situações propostas. Eventualmente, alguma díade poderia apresentar um problema de cálculo de dois ou mais passos.

Nos problemas formulados, foi possível identificar algumas caraterísticas comuns a várias díades, nomeadamente: apresentaram textos sem formularem qualquer questão,

---

[1] Adaptadas de *Materiais da Unidade Curricular Didática da Matemática e das Ciências, no âmbito do Mestrado em Didática da Matemática e das Ciências da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*.

mas apresentaram respostas; criaram problemas com dados reais mas que revelam a falta de conhecimento da realidade; após apresentarem o contexto, questionaram quanto a uma situação e responderam relativamente a outra; criaram problemas demasiadamente básicos para o nível de ensino a que pertenciam e muitas vezes confusos e desorganizados ao nível das ideias; criaram textos que não estavam adequados à situação dada e enunciados com falta de dados que impossibilitam a compreensão da situação problemática.

Seguidamente são apresentadas as propostas de três tarefas, as formulações apresentadas por algumas das díades, independentemente de serem os casos do estudo principal ou não.

A Figura 1 mostra a tarefa 2F, a qual apresenta uma figura a partir da qual as díades tinham que formular dois problemas.

Observa a imagem e inventa dois problemas relacionados com a mesma. Dá largas à tua imaginação. Sê criativo!
No final resolve-os.

Figura 1. Tarefa 2F.

Para esta tarefa surgiram diferentes propostas, como podemos observar na Figura 2.

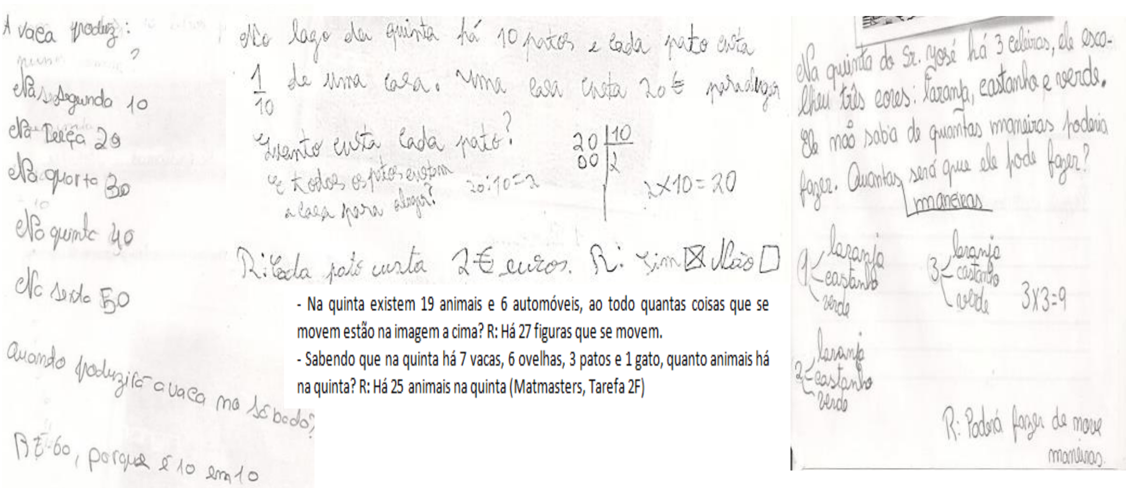


Figura 2. Tarefa 2F dos Resolucionistas, Matmasters e díades da turma.

As díades apresentaram variadíssimos problemas, desde os mais simples, que envolvem apenas um cálculo até àqueles um pouco mais sofisticados, que por meio de combinações apresentam várias soluções.

Na Figura 3 é possível observar a quinta tarefa de formulação de problemas proposta.

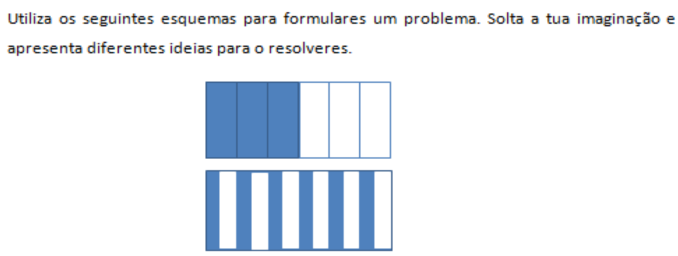


Figura 3: Tarefa 5F.

Um dos casos, para a tarefa 5F apresentou a proposta patente na Figura 4.

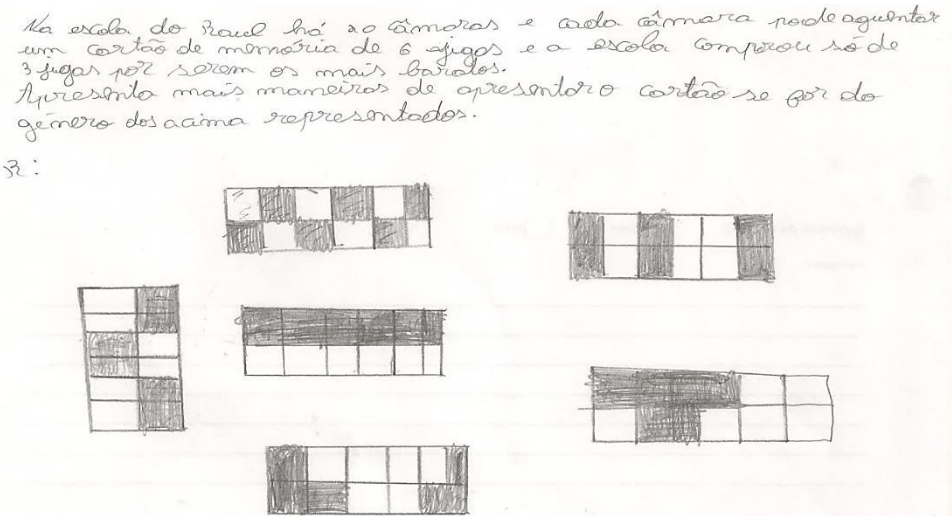


Figura 4. Formulação e resolução da tarefa 5F por parte dos Matmasters.

Após a entrevista à díade que apresentou este trabalho, tornou-se compreensível o que pretendiam com esta formulação. Verificou-se que, apesar da escassez de informação no enunciado, a díade criou um problema aberto que possibilita múltiplas soluções. A díade também foi capaz de apresentar soluções ao problema. Esta formulação, no contexto da turma é original uma vez que mais nenhuma díade apresentou uma formulação desta natureza.

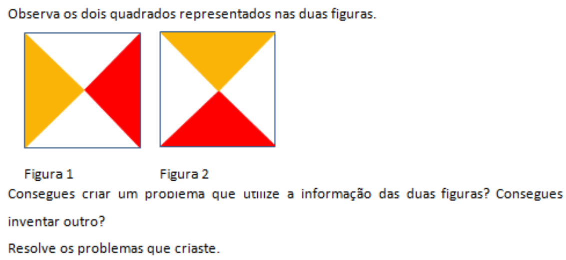

Observa os dois quadrados representados nas duas figuras.

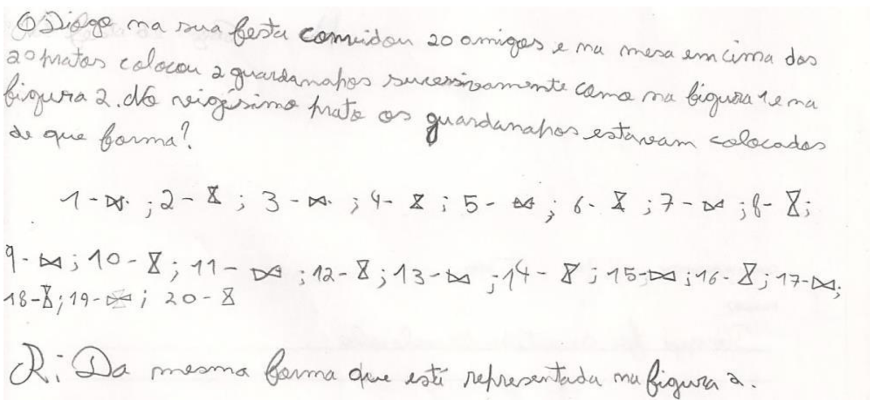
Figura 1 Figura 2

Consegues criar um problema que utilize a informação das duas figuras? Consegues inventar outro?

Resolve os problemas que criaste.

Figura 5: Tarefa 6F.

Para esta tarefa, apresenta-se na Figura 6, uma proposta original realizada por uma díade da turma que se destacou-se das demais, uma vez que mais nenhuma díade apresentou uma formulação com um problema desta tipologia.


O Diogo na sua festa convidou 20 amigos e na mesa em cima dos 20 pratos colocou 2 guardanapos sucessivamente como na figura 1 e na figura 2. No vigésimo prato os guardanapos estavam colocados de que forma?

1 - ⋈ ; 2 - ⧖ ; 3 - ⋈ ; 4 - ⧖ ; 5 - ⋈ ; 6 - ⧖ ; 7 - ⋈ ; 8 - ⧖ ;
9 - ⋈ ; 10 - ⧖ ; 11 - ⋈ ; 12 - ⧖ ; 13 - ⋈ ; 14 - ⧖ ; 15 - ⋈ ; 16 - ⧖ ; 17 - ⋈ ;
18 - ⧖ ; 19 - ⋈ ; 20 - ⧖

R: Da mesma forma que está representada na figura 2.

Figura 6. Formulação e respetiva resolução para a tarefa 6F.

Este trata-se de um problema em que, apesar de um enunciado desorganizado, em termos de linguagem, compreende-se o objetivo do problema. É bastante simples para o nível de ensino, no entanto, a díade contextualiza o problema de forma a trabalhar um padrão de repetição, sendo este um tópico pouco abordado pelos alunos.

Na análise da criatividade na formulação de problemas, utilizou-se uma estrutura da tabela que assenta igualmente nas três dimensões da criatividade – fluência, flexibilidade, originalidade. Esta análise foi realizada sobre o conjunto das tarefas. Neste sentido, foi apresentado o desempenho dos dois casos, Matmasters e Resolucionistas, e da turma, em termos de fluência, flexibilidade e originalidade. Contabilizando o número de situações propostas para formularem problemas, num total de oito, foram atribuídos pontos ao nível das dimensões: na fluência um ponto por cada problema criado, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução; na flexibilidade, um ponto por cada tipo de problema criado, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução; na originalidade, um ponto por cada problema criado único ou raro, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução, sendo que raro foi considerado aquele em que no máximo duas díades apresentam um problema do mesmo tipo. Em termos das díades da turma, foi utilizado o mesmo processo, registando-se na referida tabela a díade com maior pontuação, naquela dimensão, no conjunto das díades da turma. Após a análise cuidadosa de todo o trabalho desenvolvido, foi possível preencher a seguinte tabela:

Tabela 1. Comparação do desempenho entre os casos e a turma segundo das dimensões da criatividade no âmbito da formulação de problemas.

Formulação de problemas				
Tarefas	Díades	Dimensões da Criatividade		
		Fluência	Flexibilidade	Originalidade
Todas	Matmasters	8	3	2
	Resolucionistas	8	2	3
	Turma	7	3	1

Da análise da tabela, verificamos que os Matmasters e Resolucionistas, apesar dos resultados não se destacarem muito em relação à turma, no geral, revelam melhor desempenho em relação à mesma no âmbito das dimensões da criatividade.

Apesar do grande empenho na realização das tarefas, as díades, consideraram complexas as tarefas de formulação de problemas. Revelaram dificuldade em redigir os enunciados dos problemas de forma coerente, organizada e esclarecedora, sem que faltassem dados que permitissem a sua resolução e enquadrados com a situação proposta. Verificaram-se falhas ao nível dos enunciados criados com escassez de dados, sustentando-se quer em figuras quer em cálculos das situações propostas mas, na maioria das situações sem proceder a alusão das mesmas sem que haja referência a tal necessidade. No desempenho apresentado pelas díades aquando da aplicação destas tarefas de formulação de problemas, denota-se, por parte dos alunos, a falta de contacto com tarefas desta natureza, uma vez que revelam inúmeras dificuldades aquando da sua resolução. Finalmente os alunos formulam problemas com contextos reais mas não realistas uma vez que, podem ser resolvidos matematicamente mas não refletem a realidade.

Algumas considerações finais

O desenvolvimento da experiência didática em díade revelou-se bastante motivador para os alunos e simultaneamente eficaz no que respeita ao seu desempenho, o que vem de encontro ao referido por Ventura, Branco, Matos e César (2002), que afirmam que a emoção e a criatividade demonstradas pelos alunos, bem como o sentimento de realização matemática revelado por muitos indicam a importância da realização deste tipo de atividades em díade.

A formulação de problemas não pode dissociar-se da resolução de problemas pois formam um todo uma vez que a cada formulação precede a resolução do problema criado sendo esta uma forma de testar o que foi anteriormente criado. Como já foi referido anteriormente, os alunos não estavam familiarizados com este tipo de atividades, no entanto, surgiram diversas produções uma vez que é a formulação de problemas é algo que "surge naturalmente às crianças" (NCTM, 2007, p. 58), revelando-se estas criativas visto que evidenciam as dimensões da criatividade (Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2011). Os alunos foram incentivados na procura de diferentes soluções para as tarefas propostas promovendo deste modo o pensamento divergente (Pinheiro & Vale, 2012).

O trabalho desenvolvido em torno da criatividade com base na formulação de problemas proporcionou variadas experiências, ricas e desafiantes, como seja a própria resolução de problemas mas também o raciocínio e a comunicação, ideia partilhada por Vale (2012). Para concluir, apresenta-se um comentário proferido por uma aluna relativamente à matemática: "[a matemática] é uma disciplina criativa e é com criatividade que se aprende matemática." (Pinheiro, 2013, p. 140).

Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico* - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: um introdução à teoria e aos métodos*. (S. S. Maria Alvarez, Trad.) Porto (Trabalho original publicado em 1991): Porto Editora.

Cavalcanti, J. (2006). A criatividade no processo de humanização. *Saber (e) educar , 11*, 89-98.

Conway, K. (1999). Assessing Open-Ended Problems. *Mathematics Teaching in the Middle School , 4*, 510-514.

Díaz, M. V., & Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 45*, 33-41.

Guerra, E. (2007). Creatividad en Educación Matemática. In S. d. Torre, & V. Violant, *Compreender y Evaluer La Creatividad* (Vol. 1, pp. 457-469). Archidona, Málaga: Aljibe.

Har, Y. B., & Kaur, B. (1998). Mathematical problem solving, thinking and creativity: emerging themes for classroom instruction. *The Mathematics Educators, 3(2)*, 108-119.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they? *Proceedings of the 6th International Conference of Creativity in Mathematics* (pp. 120-125). Latvia: Latvia University.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R., Koichu, B., & Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality of problem-solving acts. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and Education of Gifted Students* (pp. 115-128). Rotterdam: Sense Publishers.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge and Creative Thinking on The Aritmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal , 9(1)*, 5-24.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted,* 30(2), 236-260.

NACCCE. (1999). All Our Futures: Creativity, Culture and Education. London: NACCCE.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Pelczer, I., & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity assessement in school setting through problem posing tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 8, n.º 1 e 2, 383-398.

Pinheiro, S. (2013). *A criatividade na resolução e formulação de problemas: Uma experiência didática numa turma de 5.º ano de escolaridade*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Pinheiro, S., & Vale, I. (2013). Criatividade e Matemática: Um caminho partilhado. *Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos* (*Atas*) (pp. 30-39). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Pinheiro, S., & Vale, I. (2012). Criatividade: onde a encontrar na sala de aula? *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 621-636). Lisboa: APM.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (1.ª ed.). (L. Moreira, Trad.) Lisboa: Gradiva.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3* , 75-80.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. In T. Rowland, & E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Math Education (CERME 7)* (pp. 1133-1142). Poland: University of Rzeszów.

Singer, F., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mahtematics Education*. *1*, pp. 137-166. Ankara, Turkey: PME.

Stake, R. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso* (2.ª ed.). Lisboa. (Trabalho original publicado em 1995): Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Shown and Tell. *Mathematical Thinking and Learning* , 313-340.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problemposing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Groupof Australasia.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interações , 20*, 181-207.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Ed.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347-360). Lisboa: SPIEM.

Ventura, C., Branco, N., Matos, A., & César, M. (2002). Um aventura fantástica: Contributo do trabalho em díade para o sucesso de uma actividade de investigação. In APM, *Actas do ProfMat2002*. Viseu: APM.

Yin, R. (2011). *Qualitative Research from Start to Finish*. New York: The Guilford Press.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between student's creativity and mathematical problem-posing abilities. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics* (pp. 5-28). The Netherlands: Sense Publishers.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Criatividade matemática e flexibilidade de representação na resolução de problemas para além da sala de aula

Nuno Amaral[1], *Susana Carreira*[2]
[1]EB 2,3 das Naus, Lagos, nualroam@gmail.com
[2]Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Nesta comunicação pretende-se examinar a criatividade matemática associada à flexibilidade de representação, a partir de resoluções produzidas por participantes no Campeonato de Matemática SUB12 a um dos problemas da edição 2012/2013. Procurámos evidências da relação entre a criatividade expressa nas resoluções e a flexibilidade representacional manifestada, numa atividade que decorre para além da sala de aula, tendo em conta que os ambientes escolares são muitas vezes restritivos para o desenvolvimento da criatividade matemática. Concluiu-se que a representação tabular, sendo claramente apropriada para a compreensão do problema e para a construção da respetiva solução, assumiu elementos específicos e distintivos num dado espetro de resoluções, permitindo afirmar que cada participante fez criativamente uma utilização própria e flexível desta forma particular de representação matemática.*

Palavras-chave: criatividade; resolução de problemas; flexibilidade representacional; representações matemáticas; competição matemática.

Criatividade matemática para além da sala de aula

A criatividade pressupõe a manifestação de ideias ou produtos originais e inovadores adequados ao contexto e cultura onde o fenómeno se manifesta (Starko, 2010) e deve ser entendida através das habilidades e prontidão de qualquer indivíduo para criar algo de novo (Gusev & Safuanov, 2012).

Neste estudo, a criatividade é entendida, na atividade de resolução de problemas de matemática, no sentido em que desta resultam resoluções originais, diferentes e perspicazes, no contexto específico em que a atividade decorre (isto é, com alunos de determinado nível etário, para além da sala de aula, no âmbito de uma competição matemática). A criatividade traduz-se, nesse contexto, na originalidade de produtos únicos e novos, do ponto de vista de quem os constrói, diferentes dos restantes quando comparados com os demais, num determinado grupo alvo, e perspicazes na revelação do pensamento matemático que conduziu à solução, de forma clara, compreensível e esclarecedora para quem examina a resolução (por ex., o professor, os colegas, o leitor a quem se dirigem).

A criatividade é uma característica inerente ao saber matemático e embora seja, muitas vezes, associada à genialidade ou a habilidades excecionais, ela pode ser amplamente estimulada na população escolar em geral (Mann, 2005; Pelczer & Rodríguez, 2011; Silver, 1997). A criatividade dos alunos nem sempre é visível em sala de aula. No entanto, defendemos que os alunos têm imensas capacidades latentes de inovação, pensamento criativo e formas alternativas de ver as coisas que precisam de ser estimuladas para se revelarem. Por isso, é importante um clima que inclua atividades e tarefas criativas, designadamente que suscitem desafio e curiosidade, cujas resoluções estimulem o raciocínio e a comunicação matemática e em que seja dada liberdade de resolução e expressão. Devem ser atividades e tarefas pensadas, não só com o propósito de estimular os alunos com melhor desempenho em matemática, mas também aqueles que têm potencial matemático e que se veem impedidos de manifestarem as suas capacidades em contextos curriculares restritivos, centrados em regras formais e algoritmos (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2011). A liberdade de trabalhar matematicamente é fundamental, uma vez que a criatividade se evidencia quando os alunos têm a possibilidade de encontrar e utilizar os seus próprios métodos de resolução (Pehkonen, 1997). Pode ter-se todos os recursos necessários para pensar de forma criativa mas sem um ambiente favorável, gratificante e promotor de ideias novas, é muito difícil ou praticamente impossível a qualquer indivíduo exibir a criatividade que tem dentro de si (Sternberg, 2007).

As atividades de resolução de problemas, para além da sala de aula, de que é exemplo o Campeonato de Matemática SUB12®, destacam-se pelas oportunidades de realização do potencial intelectual e criativo dos alunos e pelo importante papel que desempenham no apoio à educação matemática dos jovens em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009). Oferecem circunstâncias para o desenvolvimento do poder matemático dos alunos, para além daquelas que existem no contexto escolar, tendo em conta os níveis de aptidão de cada um. São contextos que permitem, não apenas estimular as capacidades de resolução de problemas, comunicação e raciocínio, como também atrair os alunos para a matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2009). Disponibilizam o tempo de que os alunos precisam para o desenvolvimento da criatividade matemática que, muitas vezes, não existe na sala de aula. Prestam um serviço importante à educação matemática e a um grande número de alunos promissores, com potencial talento matemático, constituindo um complemento natural ao trabalho realizado na escola (Koichu & Andzans, 2009).

Nesta perspetiva, as competições matemáticas surgem como parceiros da escola, ou seja, como promotores de uma aprendizagem paralela e complementar àquela que é intencionada pelo currículo escolar.

Flexibilidade de representação e criatividade na resolução de problemas

Conhecer e lidar com representações e ser capaz de representar matematicamente, constitui uma competência que aumenta a capacidade de pensar matematicamente (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). O acesso a uma variedade de representações e a capacidade de as pôr em funcionamento contribui para o desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos (Berthold & Renkl, 2005; Harries, Lopez, Reid, Barmby & Suggate, 2008) e para fortalecer o raciocínio matemático (Ponte & Velez, 2011).

As representações não são produtos estáticos, na medida em que refletem o processo de raciocínio e o conhecimento utilizado pelos alunos na construção de relações ou de conceitos matemáticos (Steele, 2008). Podem ser caraterizadas como construções inerentes à descrição de conceitos, através de componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos e simbólicos, que retratam aspetos dos conceitos e que, ao mesmo tempo, permitem interpretar, comunicar e discutir ideias (Tripathi, 2008).

Os alunos que são capazes de recorrer a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, são mais inclinados a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009). A flexibilidade de representação é uma caraterística dos alunos que fazem escolhas adequadas de representações matemáticas, tendo em conta as tarefas em mão (Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009). No entanto, as tarefas, só por si, não definem a flexibilidade de representação, pois o conhecimento e o domínio representacional também devem ser tomados em conta (Nistal et al, 2009). Nesta investigação, entende-se a flexibilidade de representação como a capacidade de selecionar, combinar, usar e adaptar representações úteis, de acordo com as caraterísticas dos problemas a resolver.

As representações matemáticas são centrais na resolução de problemas e a sua construção, de acordo com o conhecimento matemático dos alunos, é uma etapa crucial do processo de resolução (Stylianou, 2008). O conhecimento matemático, conjugado com a liberdade para pensar profundamente e construir representações, permitem que os alunos testem e explorem com mais detalhe as suas próprias representações e estabeleçam conexões significativas, de modo a que os problemas façam sentido para si (Benko & Maher, 2006). Dar espaço para que os alunos possam construir as suas representações aumenta o sucesso na resolução de problemas, proporciona o desenvolvimento de métodos próprios de resolução e leva a que considerem e apreciem representações alternativas (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000).

A facilidade de utilização e adaptação de múltiplas representações e a habilidade de alternar entre diversas representações é parte de uma variabilidade cognitiva que permite resolver problemas com maior rapidez e precisão (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Cada forma de representação exprime elementos do raciocínio utilizado, subjacente à escolha da estratégia e à forma da sua comunicação (Preston & Garner, 2003). Quando os alunos são pensadores flexíveis, desenvolvem representações geralmente muito ricas (Steele, 2008). À medida que refletem sobre as suas ações, as suas representações podem evoluir para versões cada vez mais sofisticadas.

Os ambientes que possibilitam o uso de múltiplas representações e que promovem esse uso de forma flexível, como por exemplo o SUB12, são considerados eficazes em privilegiar a compreensão de noções matemáticas. Neste contexto, a liberdade para usar múltiplas representações permite que os alunos as escolham e explorem, de acordo com o seu grau de experiência e de conhecimento (Ainsworth, 1999). Incentivar sistematicamente os alunos a usarem várias representações, pode aumentar a consciência de que há uma diversidade de representações possíveis na resolução de um problema (Friedlander & Tabach, 2001). Por outro lado, encorajar os alunos a refletir ativamente sobre a adequação de representações específicas para situações particulares, é um meio para o desenvolvimento da flexibilidade de representação (Nistal et al., 2009).

Campo empírico e procedimentos metodológicos

O Campeonato de Matemática SUB12 (para alunos de 5.º e 6.º ano), promovido pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, inclui duas fases distintas: a fase de apuramento, que é constituída por 10 problemas e decorre através da Internet; e a fase final, na qual os alunos finalistas participam num torneio presencial. Na fase de apuramento, de janeiro a junho, quinzenalmente, os participantes têm acesso aos problemas publicados no website do campeonato e enviam as suas resoluções por e-mail ou através de um formulário de resposta disponível na página, podendo enviar ficheiros em anexo. O presente estudo tem como objetivo investigar a relação entre a flexibilidade de representação e a criatividade matemática, fixando-se num tipo particular de representação matemática, a tabela, utilizada por participantes no Campeonato, num dos problemas da fase de apuramento.

A incidência num tipo específico de representação – a representação tabular – justifica-se pelo problema proposto, que envolve uma contagem sistemática associada a uma sequência de números naturais. Embora este problema tenha sido resolvido por diversos processos pelos participantes no campeonato, é claro que a representação tabular constitui uma representação adequada que apoia a obtenção da solução, sobretudo no caso de resolvedores que não dispõem de um conhecimento mais sofisticado, como cálculo combinatório ou progressões aritméticas, por exemplo. Por outro lado, interessou-nos saber em que sentido a construção de uma tabela pode ser original e revelar flexibilidade representacional, uma vez que, à partida, a noção de tabela parece relativamente inocente e, quase poderia dizer-se, indiscutível. Tendo em conta que o nosso propósito é compreender a criatividade matemática à luz dos parâmetros originalidade e flexibilidade de representação, optámos por considerar uma amostra de resoluções de 9 participantes em que a representação matemática essencial para solucionarem o problema foi a tabela. O pequeno número de resoluções consideradas foi intencional, na medida em que quisemos perceber como, num conjunto reduzido de produções do mesmo "género" (i.e., centradas na utilização de tabelas), se distinguem variações e particularidades que podemos relacionar com originalidade (dentro da identidade do tipo geral de representação tabular) e com flexibilidade (face à intencionalidade e à estruturação colocada na construção de cada tabela). O objetivo não se traduz numa avaliação ou medição da criatividade matemática dos 9 participantes ou das suas produções; pretende-se, antes, dar corpo a uma visão qualitativa e relativa da presença da criatividade matemática. Em certo sentido, pretendemos estudar a criatividade inclusiva (do pequeno-c, em vez do grande-C) que nos deixe ver a diversidade na aparente uniformidade (Beghetto & Kaufman, 2009).

> Tradicionalmente, os estudiosos da criatividade têm-se centrado em resultados criativos classificados como Grande-C (eminente) ou pequeno-c (quotidiano). A criatividade Grande-C centra-se em exemplos de rasgos de grande expressão criativa (por exemplo, o teorema de Pitágoras, a poesia de

Dickinson, as composições de Mozart). Em contraste, a criatividade pequeno-c concentra-se mais na criatividade da vida quotidiana, acessível a quase toda a gente (Runco & Richards, 1998). Um exemplo de criatividade do dia-a-dia poderia ser a forma criativa com que alguém organiza as plantas e flores no seu jardim, um arranjo que recebe elogios de amigos e familiares (Beghetto & Kaufman, 2009, p. 40).

Este estudo integra-se num paradigma interpretativo de investigação, adotando uma abordagem qualitativa, uma vez que nos interessa compreender o fenómeno da criatividade matemática no contexto em que ele acontece, privilegiando-se essencialmente os produtos enviados pelos participantes no campeonato por via eletrónica. Na investigação qualitativa os dados são geralmente descritivos e a fonte direta é o ambiente natural em que se produzem. Neste caso, os dados foram obtidos a partir das resoluções de alguns participantes, a um problema da fase de apuramento, que foram publicadas na página web do SUB12 (http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/).

Análise de dados

O problema considerado não exige a aplicação de conteúdos curriculares específicos (Fig. 1). Deste modo, os participantes tiveram de conceber e pôr em prática as suas próprias estratégias e representações para resolver o problema. A situação colocada no problema das chaves e dos cadeados apela a um raciocínio indutivo, na medida em que é preciso testar, uma a uma, cada chave em todos os cadeados para saber qual o cadeado que lhe corresponde. O problema refere ainda uma situação limite (a pior das hipóteses) em que só se encontra o par chave-cadeado na última tentativa, quando todos os cadeados, menos um, já foram testados e rejeitados. O raciocínio indutivo pode sugerir uma ordenação das chaves, v_1, v_2, …, v_{20}, e dos cadeados, d_1, d_2, …, d_{20}, e uma estratégia que estabelece todos os testes feitos com a chave v_1 (em 19 cadeados), com a chave v_2 (em 18 cadeados), etc., considerando que só o último cadeado combinará com a chave que está a ser testada. Assim, trata-se de pensar organizadamente no número de testes que irá ser realizado com cada chave e isso permitirá chegar ao total de testes: a soma dos primeiros 19 números naturais.

Problema7: Fechado a cadeado

Numa gaveta temos 20 cadeados e 20 chaves. Cada chave abre um e um só cadeado mas não sabemos que chave corresponde a cada cadeado. Para associar cada chave ao cadeado que lhe corresponde teremos de proceder por tentativas. Suponhamos então que uma tentativa significa experimentar uma chave num cadeado.
Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

Figura 1: Problema 7 do SUB12, edição 2012/13.

O uso de ferramentas comuns, disponibilizadas pelo computador (Word, Excel, PowerPoint), a que muitos participantes recorrem na resolução dos problemas é revelador das capacidades e competências destes alunos – matemáticas e tecnológicas (Jacinto & Carreira, 2008). O recurso ao computador conjuga dois aspetos poderosos – por um lado, é um meio de tornar a comunicação eficiente e, por outro, acentua o poder da visualização e organização da informação na atividade matemática dos alunos, o que se torna evidente nas formas de representação propostas. Desta forma, a comunicação matemática é destacada para primeiro plano, tendo por base formas eficazes de representação de ideias e processos matemáticos.

As resoluções apresentadas pelos participantes (ver Anexo) mostram que compreenderam o problema, uma vez que identificaram a informação importante e o objetivo a atingir. Foram capazes de definir e aplicar um plano, escolher uma estratégia e selecionar as representações e os recursos digitais adequados à sua execução. No que diz respeito ao raciocínio matemático produzido, as resoluções mostram a explicação dos processos e resultados, através de deduções formais e informais, expressas nas representações utilizadas.

As resoluções selecionadas associam e combinam a tabela, como elemento central, com representações icónicas, designadamente imagens, e representações simbólicas, em particular relacionadas com números e expressões numéricas, conjugadas com linguagem natural, na descrição e registo do processo desenvolvido. Em cada caso, a combinação das representações utilizadas é reveladora do modelo conceptual que está na base da solução do problema.

Em todas as resoluções, o recurso a tabelas funciona essencialmente para organizar a informação e transformá-la, de modo a revelar regularidades e a gerar uma imagem (ou modelo) da situação. No entanto, cada tabela é única, revelando diferenças significativas ao nível da forma, organização e representação da informação e evidenciando caraterísticas do raciocínio próprias de quem a construiu.

Na resolução 1, (ver Anexo) o participante recorreu a ícones representativos de cadeados e chaves, combinados com representações simbólicas, traduzidas em sequências de números naturais, por ordem decrescente, organizados numa tabela de três colunas. A primeira coluna refere-se a cadeados e indica o número de cadeados a testar; a segunda coluna refere-se a chaves e indica o número de chaves por testar; a terceira coluna refere-se ao número de tentativas atribuídas a cada caso, usando ícones representativos de cadeados-com-chave. A justificação dada por palavras – "a última chave pertence ao último cadeado" – repete-se sucessivamente após a indicação do número de tentativas e é um elemento importante para justificar o número total de tentativas.

A resolução 2 (ver Anexo) revela uma tabela com duas colunas, ainda que esta tabela tenha um caráter eminentemente gráfico. Na verdade, a primeira coluna é preenchida por uma sucessão de ícones representativos de cadeados excluídos (com a letra X a vermelho) seguida de uma outra sucessão de cadeados aprovados (com a letra V a verde), num total de 20 cadeados. De uma linha para a seguinte, diminui um cadeado excluído e aumenta um cadeado aprovado. Na coluna 2, representam-se as tentativas falhadas (correspondentes ao número de cadeados excluídos), gerando uma sequência de números naturais por ordem decrescente. Ao lado da tabela, é dada a explicação da racionalidade da mesma e do modo como esta permitiu obter o total de tentativas.

No conjunto das resoluções 3, 4, 5 e 6, (ver Anexo) a organização da informação representada nas tabelas é semelhante, tratando-se agora de tabelas de dupla entrada. Numa das dimensões são representadas as chaves e, na outra, os cadeados. Nas células das tabelas a informação registada tem diferentes sentidos e propósitos. A tabela da resolução 3 indicia o teste de cada chave (numerada) em cada um dos cadeados (numerados) e assume que o par é encontrado na última tentativa. Assim, a organização dos pares é indicada pelos elementos da diagonal, preenchidos a negrito (chave 1 - cadeado 20, chave 2 - cadeado 19, …, chave 20 - cadeado 1). A tabela pode ser lida ao longo de cada uma das duas entradas (por linhas ou por colunas). A tabela da resolução 4 tem uma estrutura idêntica mas assinala com um X cada combinação falhada entre a chave p e o cadeado q. Assim, ficam registadas as tentativas falhadas e a solução do problema é obtida, contando-se o número de células marcadas com um X. Numa coluna adicional é colocado o número de tentativas falhadas (por cada cadeado testado) e, por fim, é calculado o total. A tabela 5 usa uma ideia análoga à anterior mas recorre à cor vermelha para registar as tentativas falhadas e à cor verde (com um V) para indicar a tentativa que tem sucesso. Todas estas tabelas recorrem a alguma forma de representação visual traduzida por destaques com cores, letras ou ícones. A tabela da resolução 6, igualmente de dupla entrada, inscreve em cada célula o número de tentativas falhadas, à medida que estas se vão sucedendo, tendo em conta que a última tentativa em cada sequência foi a que teve sucesso. Assim, a função da tabela usada na resolução 6 é a de realizar a contagem ininterrupta de tentativas falhadas. É de notar que, nesta tabela, as duas dimensões não são legendadas (colunas ou cadeados), parecendo evidenciar o facto de que estas são comutáveis, pois é indiferente considerar-se cada uma das chaves a testar os vários cadeados ou cada um dos cadeados a testar as várias chaves. Neste caso, sobressai uma estratégia de contagem sistemática em vez de uma estratégia de adição do número de tentativas feitas até acontecer cada emparelhamento.

Observando as resoluções 7, 8 e 9, (ver Anexo) percebe-se que os participantes usam uma maior quantidade de texto para explicar a forma como organizaram a informação representada nas suas tabelas. Em todas elas, é facilmente compreensível a estratégia e o raciocínio utilizado para chegar à solução do problema, devido à forma como explicitam o significado da tabela construída. As resoluções 7 e 8 apresentam tabelas com uma estrutura idêntica à das tabelas usadas nas resoluções 1 e 2. No entanto, dispensam elementos figurativos e concentram-se no registo do número de tentativas (por cada chave testada nos vários cadeados). A tabela da resolução 9 destaca-se das anteriores por introduzir a ideia de soma acumulada, isto é, na coluna destinada ao número de tentativas, vai sendo feita a adição de todas as tentativas falhadas nos ensaios anteriores.

Em todas as resoluções (à exceção da tabela que funciona como ferramenta de contagem), bastou aos participantes adicionarem sucessivamente o número de tentativas ensaiadas, para cada caso, para responderem à questão colocada no problema.

Conclusões

De uma forma geral, tendo em conta o contexto e a pequena amostra selecionada, todas as resoluções revelam originalidade, uma vez que não há duas formas de representação tabular que se possam considerar iguais, dada a singularidade visível em cada uma delas (Starko, 2010). Combinam representações simbólicas, icónicas e verbais, unindo estes elementos representacionais a um dispositivo central – a tabela – para organizar e representar informação. Recorrem a imagens, destaques com cores e outro tipo de inscrições, revelando estratégias interessantes e próprias de quem as produziu (Preston & Garner, 2003). É facilmente reconhecida a flexibilidade de representação, através da forma como a tabela é construída e moldada, em cada caso, ajustando-se e adaptando-se aos propósitos de cada indivíduo para resolver o problema, resumindo o raciocínio feito e permitindo reconstruí-lo de forma clara. Para além da subtileza específica de cada uma das tabelas, a flexibilidade de representação começa pela adequação das representações tabulares utilizadas pelos participantes, revelando o seu domínio de conhecimento matemático para a resolução do problema (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). As formas de representação escolhidas e transportadas para o contexto do problema revelam também um evidente sentido estético na expressão das resoluções, o que constitui uma caraterística de alunos matematicamente criativos.

Resolver problemas, para além da sala de aula, usando as ferramentas tecnológicas disponibilizadas pelo computador, estimula os participantes a procurar formas eficazes e simultaneamente interessantes de comunicarem as suas resoluções, contribui para a riqueza das representações que produzem e para o desenvolvimento da sua criatividade matemática (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Parece evidente que as tecnologias usadas têm valor pedagógico na resolução de problemas de matemática, exibindo o desenvolvimento de competências tecnológicas, associadas à representação, inovação e criatividade, não se traduzindo numa utilização trivial das tecnologias (Jacinto & Carreira, 2008).

As tecnologias usadas permitiram aos participantes recorrer a formas de representação eminentemente visuais, como as cores, as imagens e os destaques, para darem corpo ao seu raciocínio matemático. A criatividade matemática pode, portanto, ser encarada de um ponto de vista micro-analítico, isto é, a forma como diferentes indivíduos dão corpo e fazem uso de uma estrutura tabular – uma representação geralmente vista como genérica ou indiferenciada – para resolverem e exprimirem o seu pensamento matemático, constitui uma importante evidência de originalidade e de flexibilidade representacional. Em geral, parece resultar da análise apresentada que aquilo que é novo, único e diferente, em cada uma das resoluções apresentadas, não se resume a simples detalhes superficiais mas reveste-se de sentido matemático e está associado à capacidade de cada um de criar e reinventar a representação tabular e, portanto, à sua flexibilidade representacional.

A interação entre a tecnologia, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, parece igualmente ter influência na promoção de resoluções matemáticas pessoais, inventivas e distintivas. Este fenómeno está em sintonia com as características do Campeonato de Matemática SUB12, uma vez que possibilita aos participantes a liberdade de usar os seus próprios processos e recursos, nomeadamente, digitais.

Referências bibliográficas

Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & Education*, *33*, 131-152.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009). Do we all have multicreative potential?. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 39-44.

Benko, P. & Maher, C. A. (2006). Students constructing representations for outcomes of experiments. In J. N. H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-143), Prague, Czech Republic: PME.

Berthold, K. & Renkl, A. (2005). Fostering the Understanding of Multi-Representational Examples by Self-Explanation Prompts. In B. G. Bara, L. Barsalou & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the CogSci* (pp. 250-255). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Freiman, V. & Lirette-Pitre, N. (2009). Building a virtual learning community of problem solvers: example of CASMI community. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 245-256.

Friedlander, A & Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The Roles of Representation in School Mathematics* (pp.173-185). Reston, Virginia: NCTM.

Gusev, V. & Safuanov, I. (2012). Fostering Creativity of Pupils in Russia. In *ICME 12 – Pre-Proceedings* (pp. 1513- 1518), Seoul, South Korea.

Harries. T., Lopez, P., Reid, H., Barmby, P. & Suggate, J. (2008). Observing children's inductive reasoning processes with visual representations for multiplication. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, p. 268). Morelia, México: PME.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 553-540.

Jacinto, H. & Carreira, S. (2008). "Assunto: resposta ao problema do Sub14" – A Internet e a resolução de problemas em torno da competência matemática dos jovens. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 434-446). Secção de Educação Matemática da SPCE.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). Does Mathematical Creativity Differentiate Mathematical Ability? In M, Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1056-1065). University of Rzeszów, Poland.

Koichu, B. & Andzans, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R. A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 286-307). Rotterdam: Sense Publishers.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. (Tese de Doutoramento não publicada), University of Connecticut, USA.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa de NCTM, 2000).

Nistal, A. A., Dooren, V., Clarebout, G., Helen, J. & Verschaffel (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(3), 627-636.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 63-67.

Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity Assessment In School Settings Through Problem Posing Tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *8*(1&2), 383-398.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim do GEPEM*, *59*, 53-68.

Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(1), 38-43.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 88-100). Rotterdam: Sense.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 75-80.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the Classroom: Schools of Curious Delight*. New York: Routledge.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*, 97-110.

Sternberg, R. (2007). Creativity as a Habit. In A-G. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 3-25). Singapore: World Scientific.

Stylianou, D. (2008). Representation as a cognitive and social pratice. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, p. 289-296). Morelia, México: PME.

Tripathi, P. N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

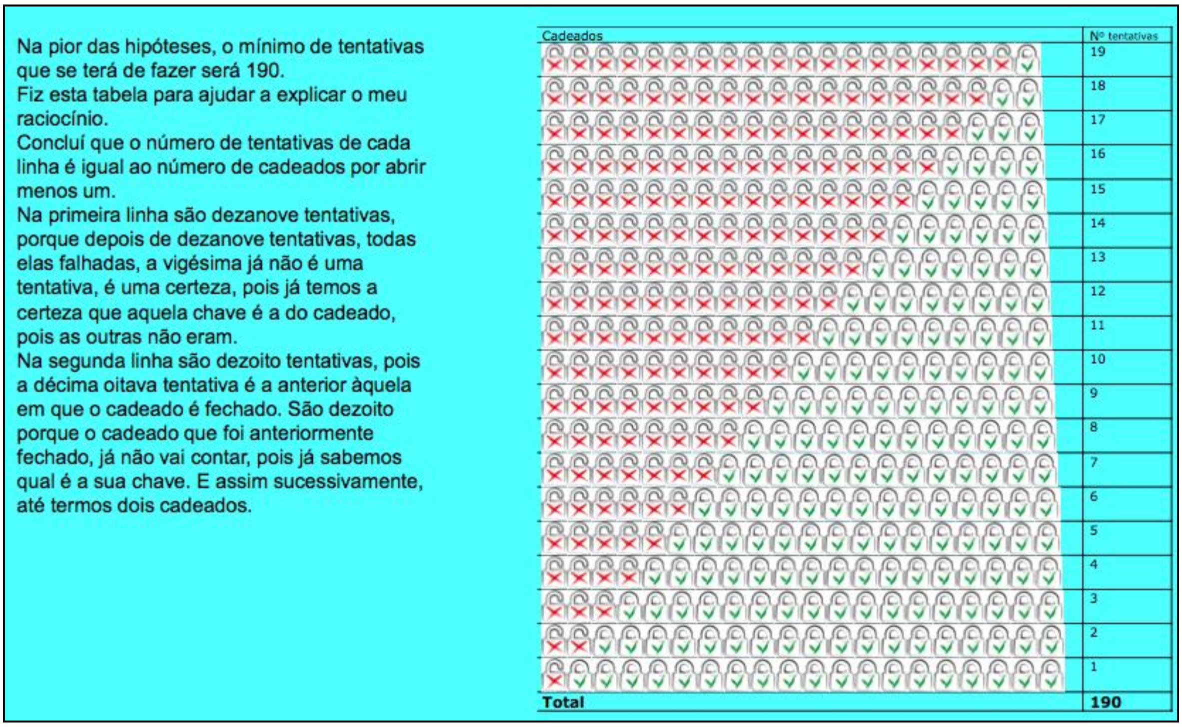
Reconhecimento

Este trabalho teve o apoio e foi desenvolvido no âmbito do projeto de investigação Problem@Web – Projeto n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia.

ANEXO

Resoluções de participantes com representação tabular

Resolução 1



Resolução 2

Primeiro pensámos em experimentar as chaves para cada um dos cadeados. No primeiro descobrimos que teríamos de experimentar pelo menos 19 chaves para ter a certeza que a chave era a certa. No segundo teriam de se experimentar 18 chaves e era sempre assim. Depois de somarmos todas as tentativas descobrimos que seriam precisas 190 tentativas para descobrir todas as chaves e cadeados.

	Cadeados																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chaves	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	**3**		
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**			
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	**5**				
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	**6**					
	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	**7**						
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	**8**							
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	**9**								
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**									
	11	11	11	11	11	11	11	11	11	**11**										
	12	12	12	12	12	12	12	12	**12**											
	13	13	13	13	13	13	13	**13**												
	14	14	14	14	14	14	**14**													
	15	15	15	15	15	**15**														
	16	16	16	16	**16**															
	17	17	17	**17**																
	18	18	**18**																	
	19	**19**																		
	20																			
Tentati-vas	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Resolução 3

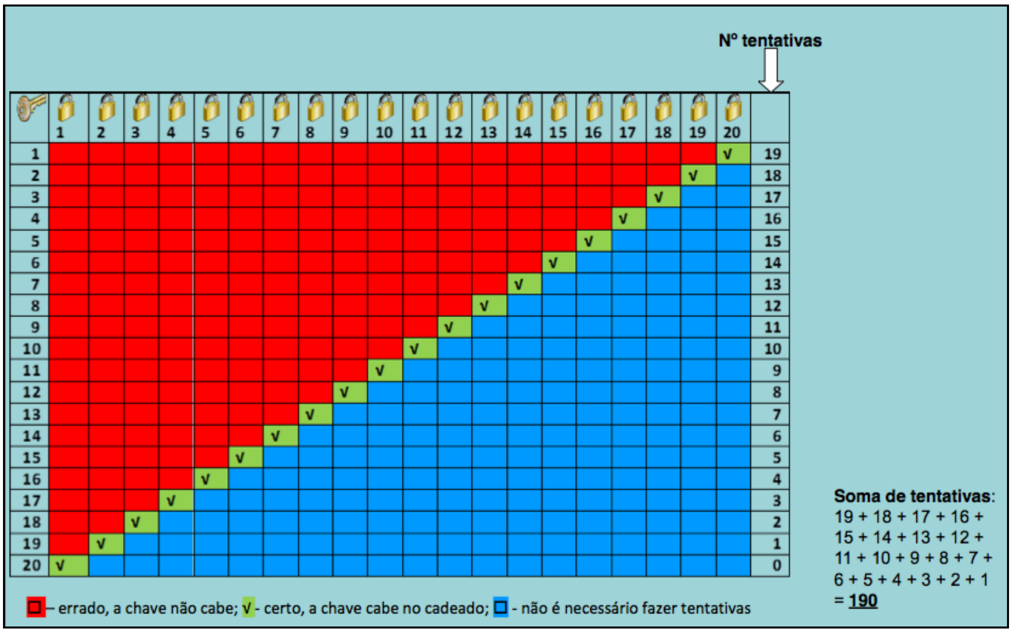
T= tentativas

Chaves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Cadeados																					
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		19 T
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			18 T
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				17 T
4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					16 T
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						15 T
6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X							14 T
7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								13 T
8	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X									12 T
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X										11 T
10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											10 T
11	X	X	X	X	X	X	X	X	X												9 T
12	X	X	X	X	X	X	X	X													8 T
13	X	X	X	X	X	X	X														7 T
14	X	X	X	X	X	X															6 T
15	X	X	X	X	X																5 T
16	X	X	X	X																	4 T
17	X	X	X																		3 T
18	X	X																			2 T
19	X																				1 T
20																					0 T

19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 190 T

Resposta: Na pior das hipóteses, o mínimo de tentativas são 190.

Resolução 4



Resolução 5

1. Li e compreendi
2. Dados: 20 cadeados e 20 chaves.
Cada chave abre um cadeado
3. Questão: Na pior da hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

4. Tabela:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	X
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	X	X
3	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	X	X	X
4	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	X	X	X	X
5	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	X	X	X	X	X
6	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	X	X	X	X	X	X
7	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	X	X	X	X	X	X	X
8	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	X	X	X	X	X	X	X	X
9	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	146	147	148	149	150	151	152	153	154	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	155	156	157	158	159	160	161	162	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
13	163	164	165	166	167	168	169	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
14	170	171	172	173	174	175	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	176	177	178	179	180	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
16	181	182	183	184	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
17	185	186	187	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
18	188	189	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
19	190	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
20	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5. Contagem: 190

6. Resposta: 190 tentativas.

Resolução 6

Inicialmente, tenho 20 chaves para 20 cadeados.
Vou numerar as chaves de 1 a 20.
Para a chave nº1 tenho 20 cadeados, dos quais 19 estão errados e só um está certo.
Por isso, na pior das hipóteses faço 19 tentativas para a chave nº1, sendo que depois destas tentativas a associo ao cadeado correto.
A chave nº2 já só tem 19 cadeados ao dispor, pelo que faço 18 tentativas para chegar ao cadeado certo, e assim sucessivamente, como está indicado nesta tabela:

chaves	tentativas	cadeados
1ª	19	20
2ª	18	19
3ª	17	18
4ª	16	17
5ª	15	16
6ª	14	15
7ª	13	14
8ª	12	13
9ª	11	12
10ª	10	11
11ª	9	10
12ª	8	9
13ª	7	8
14ª	6	7
15ª	5	6
16ª	4	5
17ª	3	4
18ª	2	3
19ª	1	2
20ª	0	1

Resposta:
Para associar todas as chaves aos respetivos cadeados, assim, são precisas 190 tentativas, no total (1+2+3+4+5+....+18+19).

Resolução 7

1.- Para resolver o problema, recolhi o número de cadeados. Depois vi que a pior das hipóteses para descobrir a chave correspondente a um cadeado, em 20 cadeados, era 19 tentativas falhadas;
2.- Para abrir o 2º cadeado tinha de fazer a mesma coisa com 19 cadeados e na pior das hipóteses tinha de fazer 18 tentativas e assim sucessivamente.
3 - Até ficar com dois cadeados, e na pior das hipóteses fiz apenas 1 tentativa falhada. Depois somei tudo, dando 190 tentativas.
4 - Somei com o computador, mas outra das maneiras de o fazer era :
19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =
= (19 + 1) + (18 + 2) + (17 + 3) + (16 + 4) + (15 + 5) + (14 + 6) + (13 + 7) + (12 + 8) + (11 + 9) + 10 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 10 =
= 20 x 9 + 10 =
=180 + 10=
= 190

Cadeados	Máximo de tentativas
20	19
19	18
18	17
17	16
16	15
15	14
14	13
13	12
12	11
11	10
10	9
9	8
8	7
7	6
6	5
5	4
4	3
3	2
2	1
1	

Resolução 8

1.Li enunciado até o perceber.
2.Quando fui lendo, tirei os seguintes dados:
-Há 20 cadeados e 20 chaves, baralhados;
-Cada chave só corresponde a um cadeado;
3.Expermentar uma chave é o mesmo que fazer uma tentativa;
4.Quero saber: “Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?”.
5.Por ser mais fácil, comecei a trabalhar com um número pequeno de chaves e igual ao número de cadeados.
6.Fui aumentando o número de chaves e de cadeados e organizei tudo numa tabela.
7.A tabela fica assim.

Chaves e cadeados	Tentativas	Soma das Tentativas
1	0	0
2	1	1
3	2+1	3
4	3+2+1	6
5	4+3+2+1	10
6	5+4+3+2+1	15
7	6+5+4+3+2+1	21
8	7+6+5+4+3+2+1	28
9	8+7+6+5+4+3+2+1	36
10	9+8+7+6+5+4+3+2+1	45
11	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	55
12	11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	66
13	12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	78
14	13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	91
15	14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	105
16	15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	120
17	16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	136
18	17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	153
19	18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	171
20	19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	190

8.Em resumo, a resposta ao problema é : O mínimo de tentativas que terei de fazer para ter a certeza que cada chave descobriu o seu cadeado são 190 tentativas.

Resolução 9

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

"Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra

Hélia Jacinto[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Escola Básica José Saramago e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, helia_jacinto@hotmail.com
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Este artigo aborda a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias no âmbito de um Campeonato extraescolar – o Sub14. A investigação, de natureza qualitativa, apoiada em diversos tipos de dados, visa compreender de que forma uma concorrente coloca em interação os seus conhecimentos matemáticos e a sua fluência tecnológica para solucionar dois problemas do campeonato, com recurso ao GeoGebra. Os dados revelam que a jovem utiliza o programa como uma ferramenta-para-pensar, e que é o reconhecimento das potencialidades de ação do GeoGebra em estreita articulação com as suas aptidões que geram esta atividade de resolução de problemas. Assim, uma forma de compreender e caraterizar a influência mútua entre literacia tecnológica e aptidão matemática do sujeito consiste em reconhecer e descrever aquilo a que chamaremos a sua literacia tecno-matemática.*

Palavras-chave: Competições matemáticas; resolução de problemas; literacia tecnológica; literacia tecno-matemática; GeoGebra.

Atividades matemáticas para além da sala de aula

Nos últimos anos têm surgido inúmeras competições matemáticas extracurriculares com o intuito de fomentar o gosto pela disciplina e complementar as aprendizagens formais. Apesar da popularidade, poucos são os estudos que se debruçam sobre este fenómeno, pelo que alguns autores frisam a necessidade de maior compreensão sobre essas atividades, em particular as que assentam em contextos tecnologicamente ricos e são extensões do currículo escolar (Barbeau & Taylor, 2009).

O Campeonato de Matemática Sub14®, organizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, destina-se a alunos de 7.º e 8.º ano do Algarve e Alentejo. Os concorrentes acedem a um problema publicado quinzenalmente na página *web* do Sub14 e enviam a sua resolução por correio eletrónico, num formato à sua escolha, para a comissão organizadora. As regras definem que é necessário apresentar o raciocínio e o processo de resolução com detalhe e clareza.

Estudos anteriores, com foco no fenómeno "resolução de problemas de matemática com tecnologias", revelaram o elevado grau de sofisticação tecnológica dos participantes na apresentação das suas resoluções, cuja fluência é desenvolvida, sobretudo, fora da sala-de-aula (Jacinto & Carreira, 2012a). Identificaram-se, ainda, determinadas características dos resolvedores de problemas, observando-se uma certa concomitância entre o uso de conhecimento matemático e do conhecimento da tecnologia durante essa atividade. Outro conjunto de evidências ilustra diferentes modos de pensar e de agir sobre um mesmo problema, recorrendo a uma mesma ferramenta, o que constituiu um forte indício de como o uso da tecnologia modifica e transforma a atividade de resolução de problemas (Jacinto & Carreira, 2012b; Jacinto & Carreira, 2013).

Pretende-se aqui compreender e clarificar de que modo o conhecimento matemático e a fluência tecnológica se inter-relacionam, na atividade de resolução de problemas de uma concorrente, quando recorre ao GeoGebra para solucionar e exprimir a solução de alguns problemas do campeonato.

Literacia para o século XXI

Vivemos numa sociedade de tal forma *e-permeada* (Martin & Grudziecki, 2006) e matematizada que se tem vindo a assistir a uma significativa transformação nas formas de representação do conhecimento. As representações digitais estão a modificar a natureza do conhecimento matemático, pelo que a capacidade para compreender como é que a informação se transforma em conhecimento é uma faceta fundamental, indispensável à existência plena de um indivíduo no século XXI (Noss, 2001).

Quem são estes jovens que resolvem problemas no computador?

Várias propostas teóricas têm sido avançadas com o fim de contribuírem para uma compreensão mais profunda dos seres humanos em ação no mundo tecnológico. Consideraremos neste estudo a contribuição teórica de Borba e Villarreal (2005), apoiada nas ideias de Lévy (1990) e consistente com a perspetiva de Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), que tem por base o argumento de que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana, e de que o próprio conhecimento resulta de uma simbiose entre os seres humanos e a tecnologia com que agem. Essa estreita relação origina uma nova entidade – "humanos-com-media" – metáfora que explica como o pensamento é reorganizado na presença de tecnologias. Os autores recorrem a duas noções basilares para fundamentar esta construção teórica: por um lado, consideram a natureza social e coletiva da cognição e, por outro, assumem que a própria cognição compreende as ferramentas que fazem a mediação da produção de conhecimento. Os *media* são considerados parte constitutiva do sujeito que age, não se limitando a auxiliar ou complementar a atividade, pelo que as ferramentas tecnológicas que são usadas para comunicar, para produzir ou representar ideias matemáticas, têm influência no tipo de matemática e de pensamento matemático que resultam dessas ações. Perspetiva-se, portanto, que a introdução de uma ferramenta no sistema humanos-com-media impele modificações ao nível da atividade, isto é, o coletivo humanos-com-media altera-se consoante o tipo de *media* que o integre: diferentes coletivos originam diferentes modos de pensar e de conhecer. Por exemplo, o conhecimento matemático produzido por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquele que é produzido por humanos-com-GeoGebra (Villarreal & Borba, 2010).

Como interagem com a tecnologia?

Na origem da produção de diferentes tipos de conhecimento está o reconhecimento, pelo sujeito, das *possibilidades de ação* (*affordances*, em inglês) com a ferramenta. Esta noção, atribuída a Gibson (1979), define o conjunto de particularidades arrogadas a uma dada ferramenta tecnológica que convidam o indivíduo a executar uma ação sobre ela.

Mais recentemente, Chemero (2003) defende que "percecionar as possibilidades de ação é colocar atributos, é observar que a situação possibilita uma certa ação" (p. 187). Esta posição sustenta que as *possibilidades de ação* emergem das interações entre o agente e o próprio objeto (Chemero, 2003; Greeno, 1994). Mas, apesar de a perceção das *possibilidades de ação* ser condição prévia para que exista atividade, nem sempre a sua existência determina que essa atividade ocorra. Para Greeno (1994), dado que a expressão "possibilidades de ação" se refere a tudo o que existe no sistema, que contribui para o tipo de interação que ocorre, torna-se necessário recorrer a uma expressão que designe tudo o que existe no agente, que também contribui para essa mesma interação, e propõe as designações "capacidade" ou "aptidão". Esta relação intrínseca traduz-se numa impossibilidade de separar as *possibilidades de ação* da *aptidão* do agente, isto é, as *possibilidades de ação* e a *aptidão* não são especificáveis na ausência uma da outra.

Que conhecimento é posto em ação durante esta atividade?

Importa, pois, clarificar o que se entende por "aptidão". Até meados dos anos sessenta, perdurou uma certa ideia de que ser-se letrado, ter literacia, era possuir um conjunto de destrezas de índole técnica: ler, escrever, calcular. Bélisle (2006), tendo estudado a evolução histórica do conceito de literacia, organizou as diferentes visões em três modelos: o *modelo funcional*, o *modelo de prática sociocultural* e o *modelo de* *aquisição de poder intelectual*, segundo o qual "a literacia não só providencia os meios e as capacidades para lidar com textos escritos e números (…) mas confere um enriquecimento profundo e, eventualmente, envolve uma transformação ao nível do pensamento humano" (p. 54). Este empoderamento intelectual, associado às novas "ferramentas cognitivas", tem sido suporte para o desenvolvimento de conceitos como o de literacia tecnológica ou digital.

O projeto DigEuLit (Martin, 2006) propunha-se desenvolver um referencial teórico que permitisse a professores e alunos europeus partilhar um entendimento comum sobre o que constitui a literacia digital, que é vista como a capacidade de ter sucesso nas interações com as ferramentas eletrónicas que tornam possível o mundo do século XXI.

Tabela 1 – Processos da literacia tecnológica (adaptado de Martin & Grudziecki, 2006)

Processo	**Tarefa digital**
Definição	Definir claramente a tarefa ou o problema a ser resolvido, bem como as ações que, previsivelmente, serão necessárias.
Identificação	Identificar os recursos digitais necessários para resolver o problema / completar a tarefa.
Acessibilidade	Localizar e obter o recurso digital necessário.
Avaliação	Avaliar a possibilidade de concretização, a precisão e a fiabilidade do recurso digital bem como a sua relevância para a resolução do problema / tarefa.
Interpretação	Compreender o significado emanado pelo recurso digital.
Organização	Organizar e definir os recursos digitais de forma a permitir a resolução do problema / a realização da tarefa.
Integração	Aliar diferentes recursos digitais de forma a encontrar uma combinação relevante para o problema / tarefa.
Análise	Examinar recursos digitais a partir de conceitos e modelos que permitam solucionar o problema / realizar a tarefa com êxito.
Síntese	Combinar recursos digitais de novas formas para permitir solucionar o problema / realizar a tarefa.
Criação	Criar novos objetos de conhecimento, unidades de informação ou outros produtos digitais que irão contribuir para a resolução do problema / realização da tarefa.
Comunicação	Interagir de forma relevante com outros enquanto se lida com o problema / tarefa.
Disseminação	Apresentar a solução ou os produtos a outros.
Reflexão	Considerar o sucesso do cumprimento da tarefa e refletir sobre o seu próprio desenvolvimento enquanto pessoa com literacia digital.

Este referencial pressupõe que a aprendizagem é uma atividade construtiva, reflexiva e social pelo que, entre outros, a literacia digital envolve: a aquisição e a utilização de conhecimentos, técnicas, atitudes e características pessoais do indivíduo, como a capacidade de planificar, executar e avaliar ações digitais na resolução de problemas reais, e ainda a aptidão para refletir sobre o seu desenvolvimento. O *framework* desenvolvido faz emergir treze processos (Tabela 1) executados com uma ferramenta digital, sobre um qualquer recurso digital, no contexto específico de uma tarefa ou problema (Martin & Grudziecki, 2006).

Hoyles, Wolf, Molyneux-Hodgson e Kent (2002), num estudo centrado em atividades laborais, identificaram uma interdependência entre a utilização das tecnologias da informação e os conhecimentos matemáticos dos trabalhadores que, segundo os autores, contribuía para uma transformação no tipo de capacidades matemáticas necessárias no mundo do trabalho. Esta relação de dependência constituiu a origem do termo Literacias Tecno-matemáticas (LTm), noção que envolve três aspetos essenciais: (i) o contexto em que a atividade decorre; (ii) a matemática necessária à ação e (iii) as ferramentas tecnológicas necessárias à ação (Hoyles, Noss, Kent, & Bakker, 2010). O termo Literacias Tecno-matemáticas designa o conhecimento matemático funcional mediado por ferramentas tecnológicas e está ancorado em contextos específicos de trabalho.

Metodologia de investigação

Este estudo, visando compreender a influência mútua entre conhecimento matemático e fluência tecnológica na atividade de resolução de problemas com tecnologias, segue uma abordagem naturalista que envolve técnicas qualitativas de recolha, sistematização e análise de dados (Quivy & Campenhoudt, 2008).

Reporta-se, aqui, o caso de uma concorrente, de nome fictício Jéssica, que se destacou em trabalhos anteriores (Jacinto & Carreira, 2013) por revelar à-vontade na utilização de ferramentas tecnológicas para resolver os problemas do campeonato, em particular o GeoGebra. O processo de recolha documental envolveu coligir as produções da concorrente em duas edições do Sub14, bem como todas as mensagens eletrónicas trocadas com a comissão organizadora. Realizou-se uma entrevista semiestruturada à concorrente, gravada em suporte vídeo, focando aspetos da aula de matemática e da sua participação no Sub14, incluindo um momento dedicado a relembrar algumas resoluções submetidas ao Campeonato.

Selecionaram-se para análise mais detalhada as produções da concorrente em dois problemas da edição 2011 do Sub14, que a concorrente resolveu recorrendo ao GeoGebra. Enquanto estes dados (ficheiros GGB e respetivos protocolos de construção, justificações, e-mails) foram analisados com a intenção de revelar interações entre conhecimento matemático e fluência tecnológica nas suas resoluções com o GeoGebra e outras ferramentas tecnológicas generalistas, as informações recolhidas por entrevista sustentam um enquadramento geral das características da jovem enquanto aluna, resolvedora de problemas ou utilizadora de tecnologias.

Os dados provenientes desta diversidade de fontes foram organizados e analisados à luz das perspetivas teóricas discutidas, para ilustrar o caso "Jéssica a resolver problemas com o GeoGebra" e assim obter uma maior compreensão de como incorpora conhecimentos matemáticos e fluência tecnológica na resolução destes problemas.

Jéssica a resolver problemas com o GeoGebra

A Jéssica participou em duas edições do Sub14, durante os seus 7.º e 8.º anos. Sempre demonstrou muito empenho, quer na disciplina de Matemática, quer no Campeonato. Na escola gosta de ter boas notas e esforça-se para isso, embora reconheça que tem algumas facilidades. Não gosta muito de trabalhar em grupo, mas não se importa de ajudar os colegas quando precisam. No Campeonato o seu desempenho é exemplar: responde sempre dentro do prazo estabelecido, prima pela clareza, completude e correção das suas respostas, e orgulha-se disso.

Embora não seja habitual resolver problemas do género dos do Sub14 nas aulas, nem tampouco utilizar tecnologias para além da calculadora, desenvolveu um gosto muito particular pelos desafios e pela utilização de algumas ferramentas, como o GeoGebra. Este interesse foi motivado pela professora de Matemática, de quem gosta muito, porque a incentiva a participar em inúmeras atividades e já a acompanhou à Universidade do Algarve a uma final do Sub14. É muito autónoma, na escola e em casa, mas não se inibe de procurar ajuda sempre que enfrenta alguma dificuldade. Para resolver alguns problemas do Sub14, a Jéssica contou com ajuda da professora que lhe fazia perguntas sobre o problema ou dava dicas, mas nunca lhe dizia a resposta diretamente. Ocasionalmente, pesquisou na Internet sobre alguns conteúdos que ainda não tinha dado nas aulas, mas que imaginava serem úteis para resolver determinado problema.

Segundo a Jéssica, a sua professora também utilizava com bastante regularidade o GeoGebra como forma de ilustrar alguns aspetos dos conteúdos que lecionava.

> J: Como já disse usamos muito as tecnologias. Nós temos o quadro de… de caneta, e depois temos o quadro interativo. E utilizamos muito. Quando estivemos a dar geometria e isometrias utilizámos muito o GeoGebra.
>
> I: Quando dizes "utilizam", é a professora que faz?
>
> J: Exatamente. E nós vemos.

Esta utilização frequente, embora centrada na professora, incentivou a concorrente a instalar o programa no seu computador pessoal e a explorá-lo em casa, com calma.

Parece gostar bastante dos problemas de geometria porque, numa primeira reflexão, pode usar o GeoGebra para aperfeiçoar o arranjo gráfico das suas resoluções. A propósito da sua resolução do Problema 5 da edição 2012, a Jéssica afirma:

> J: "Eu acho que fui direitinha ao GeoGebra. Sabia que era qualquer coisa de geometria, pronto! (…) vi que formava um triângulo, que isto formava um triângulo e que pondo assim de uma maneira muito simples era só fazer a área toda disto tudo e tirar a área do triângulo, que era fácil: base vezes altura sobre dois. E depois assim… «Ah, boa! Geometria! Vou por isto tudo direitinho!» [e aponta com orgulho para as suas construções em GeoGebra]."

Os seus instrumentos de trabalho são, por norma, o computador (mas raramente imprime o enunciado), um bloco de notas, muitas canetas coloridas e uma calculadora.

> J: Aaa… normalmente é sempre primeiro bloco de notas e caneta, depois o Word e depois vou sempre a… vou sempre ao GeoGebra ou a outro programa para adicionar ao Word, para ficar assim um trabalho mais completo.
>
> E: Mas… só vais quando já resolveste?
>
> J: Sim, mas… também depende. Se o GeoGebra ou outro programa me ajudar a perceber melhor o problema, então vou primeiro a esse programa e depois é que apresento no Word.
>
> E: Ok, então também usas enquanto ainda não chegaste à solução…
>
> J: Sim, por exemplo, num dos quadrados que é esse [Problema 5] eu fui primeiro ao GeoGebra para perceber bem como é que aquilo era, e depois é que descobri "Ah, aquilo faz um triângulo e depois é só tirar a área do triângulo". Aí tive que ir primeiro ao GeoGebra para perceber melhor.

A Jéssica parece, assim, reconhecer outras potencialidades do GeoGebra além do embelezamento da resolução, nomeadamente, o facto da manipulação da construção lhe permitir "perceber bem" o problema. Embora identifique casos esporádicos em que isso acontece, este papel do GeoGebra está patente noutras resoluções.

O problema "Um quadrado dividido"

Na figura está representado um quadrado que foi dividido em 14 quadrados representados a amarelo, de dimensões diferentes e inteiras, e 1 rectângulo representado a branco, também de dimensões inteiras. O rectângulo branco tem 30464 cm² de área.

Qual é a área do quadrado grande?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

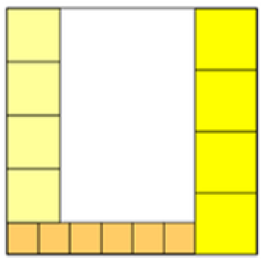


Figura 1 – Enunciado do problema 9, edição 2011

O ficheiro enviado pela Jéssica contém uma representação da figura do enunciado do problema e um pequeno texto que apresenta, simultaneamente, uma legenda para melhor interpretação da sua construção e a resolução do problema com a determinação da área pedida (Figura 6). O protocolo de construção revela que este trabalho requereu um total de 195 passos, sendo os dois últimos a inserção de uma imagem com quatro parágrafos de descrição (do exterior) e a inserção de texto com a resposta final (no GeoGebra).

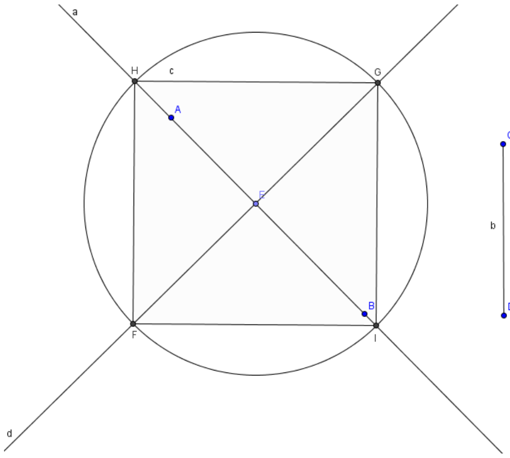


Figura 2 – Construção do quadrado inicial

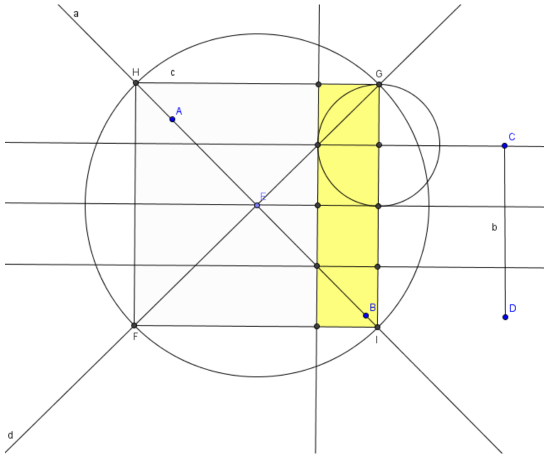


Figura 3 – Construção dos quadrados à direita

Em traços gerais, a Jéssica começa por representar o quadrado maior que sustenta a construção: desenha duas retas perpendiculares e uma circunferência com centro no ponto de interseção dessas retas e com um raio de comprimento definido pelo segmento CD (portanto, variável). Em seguida dedica-se à construção dos quatro quadrados à direita: marca pontos médios, constrói uma circunferência e, através de retas paralelas, perpendiculares e suas interseções, constrói os quatro polígonos regulares (Figura 3).

Quanto à construção dos quadrados inferiores (Figura 4), a Jéssica começa por marcar o ponto médio, R. Seguidamente utiliza uma reflexão do vértice I relativamente à reta vertical que passa por F'_1 para obter o ponto I', e designa o ponto médio do segmento $I'F'_1$ por S. Constrói então uma circunferência de centro R, a passar por I', e designa U à sua interseção com FI. Encontra V, o ponto médio de FU. Continua com a construção de retas paralelas, circunferências com determinado centro e raio, e determina interseções até concluir a representação dos quadradinhos inferiores. De forma análoga, constrói os quatro quadrados em falta no lado esquerdo (Figura 5).

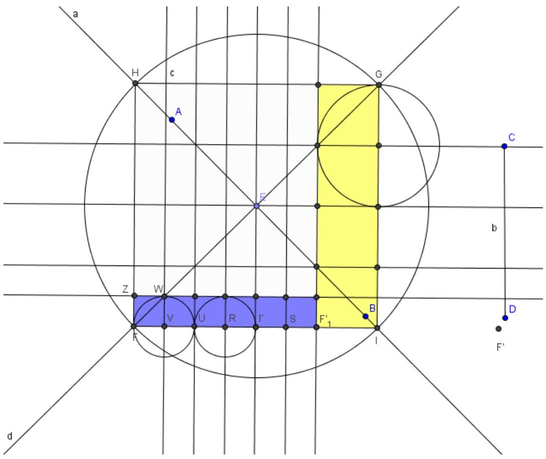


Figura 4 – Construção dos quadrados inferiores

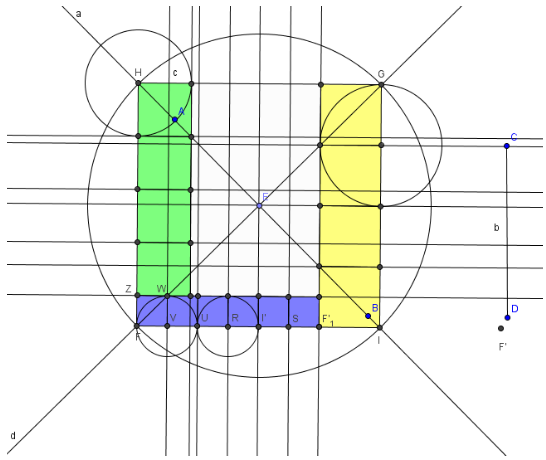


Figura 5 – Construção dos quadrados à esquerda

Em seguida destaca alguns aspetos do seu trabalho, colorindo polígonos e acrescentando quadradinhos exteriores ao quadrado inicial e algumas circunferências, em baixo à esquerda, que permitem identificar visualmente as relações entre os diversos comprimentos (Figura 6). À direita, acrescenta uma legenda que ajuda a interpretar a sua produção e a quantificar as relações referidas. Posteriormente, define como incógnita a medida do lado do quadradinho azul e, recorrendo às relações identificadas, estabelece que esse valor desconhecido é a solução da equação $4{,}25x \times 7x = 30264$. Com esse valor, determina o comprimento do lado do quadrado maior e, em seguida, a sua área.

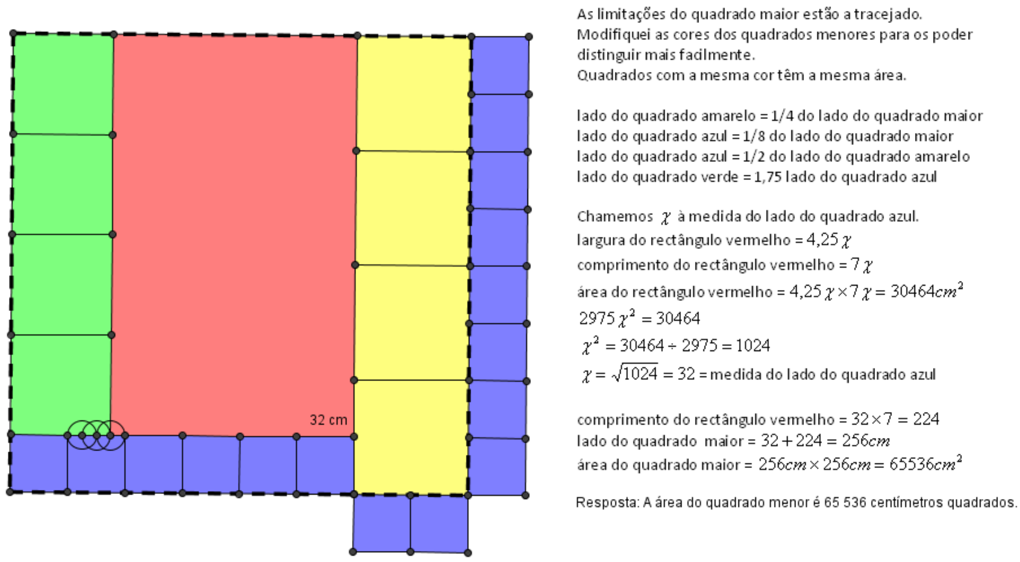
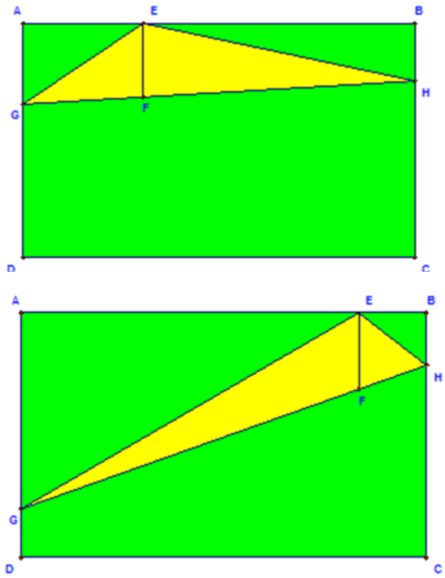


Figura 6 – Aspeto final da resolução do problema

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva retangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do retângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH].

No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do retângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!

Figura 7 – Enunciado do problema 6, edição 2011

A Jéssica também recorre ao GeoGebra para simular a construção do relvado retangular e do canteiro triangular (Figura 8). Começa por representar dois pontos, A e B, e a reta que passa por eles, designada por *a*, que servirá de suporte ao lado direito do retângulo. Marca um ponto C sobre essa reta, mas fora do segmento AB, e uma reta *b*, perpendicular à reta *a* que passa por C. Sobre esta reta marca o ponto D e por ele traça a reta *c* que é perpendicular a *a*. Em seguida marca o ponto E sobre a reta inicial *a* e por ele fez passar uma reta perpendicular a *a*, designada por *d*. Encontra então os pontos F, G e H, resultantes da interseção de várias retas.

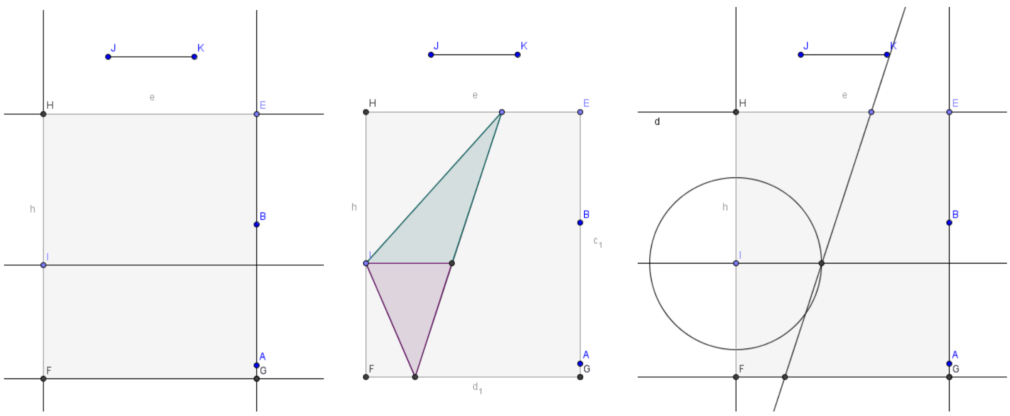
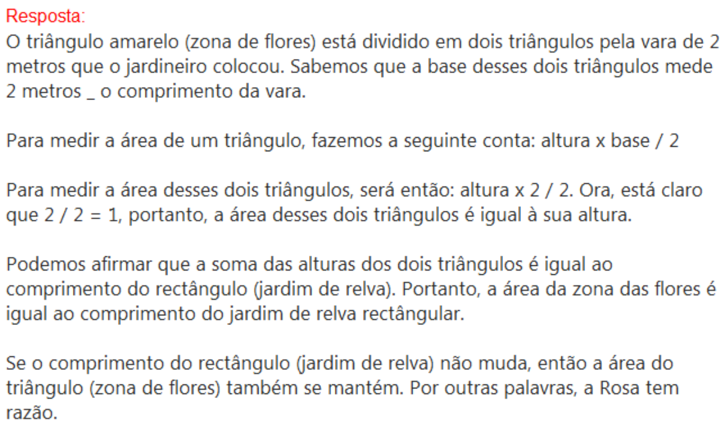


Figura 8 – Três fases da construção

Em seguida constrói o quadrilátero EHFG, usando as Ferramentas de Polígono, o ponto I sobre o segmento HF, e por I faz passar uma perpendicular a HF, ou seja, a reta *f*.

O próximo passo da concorrente leva-a a construir um seletor: marca dois pontos, J e K, fora do retângulo, e constrói o segmento JK. Regressa agora à construção e desenha uma circunferência com centro no ponto I e com raio de comprimento igual ao do segmento JK. Ao ponto de interseção da circunferência com a reta *f*, interior ao retângulo, chama L, e constrói também o segmento LI, a que corresponde a "vara". Sobre o segmento HE marca o ponto M, e por L e M traça a reta *j*. Ao ponto de interseção de *j* com o segmento DC chama N. Em seguida, constrói o triângulo NIM, o triângulo ILM e o triângulo ILN, alterando a cor do seu preenchimento.

A explicação enviada pela Jéssica completa a construção e permite acompanhar o seu raciocínio (Figura 9). A jovem reconhece que a área do canteiro triangular coincide com o valor escolhido para comprimento do lado do retângulo. Obtém esse resultado a partir da manipulação da variável "altura" de cada um dos triângulos obtidos da decomposição do canteiro triangular pelo segmento que representa a vara.


Resposta:
O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2

Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.

Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.

Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

Figura 9 - Excerto da resolução enviada pela Jéssica por e-mail

Discussão

A fluência tecnológica identificada anteriormente nas produções dos concorrentes do Sub14 era bastante visível ao nível da comunicação dos seus processos de resolução dos problemas. Mais recentemente, emergiu um conjunto de evidências que mostram como essa sofisticação tecnológica permeia também outras fases da resolução de problemas. Nestas produções desta concorrente sobressai a elevada complexidade das construções, mas estas não se limitam a ilustrar as situações descritas nos enunciados ou a complementar os cálculos apresentados. A análise das ações detalhadas da Jéssica com o GeoGebra revela a importância da construção na compreensão do problema e no deslindar de uma estratégia que lhe permita vir a obter a solução pretendida.

Este caso ilustra a complexidade da simbiose que Borba e Villarreal (2005) descrevem, pois as estratégias de resolução dos problemas revelam uma concorrente “a pensar com o GeoGebra”. Jéssica revela várias outras características dos “humanos-com-media”: por um lado, mostra alguma indiferença relativamente ao papel que as tecnologias desempenham na sua atividade de resolução de problemas, embora goste de mostrar que conhece a linguagem própria da era digital e que é capaz de usar uma multiplicidade de ferramentas, aprendizagens motivadas na Escola mas que decorreram sobretudo à sua conta, muito para além da sala de aula.

A concorrente reconhece e responde a uma grande diversidade de convites para a ação com o GeoGebra, pois é nessa relação simbiótica entre a utilização de conceitos matemáticos, favorecida pela representação visual, que vai compreendendo os problemas e deslindando um caminho para a sua resolução. Esta fluência em lidar com a ferramenta é revelada pela perceção daquilo que é capaz de fazer no GeoGebra, ou seja, marcar pontos, desenhar retas paralelas ou perpendiculares a outras, circunferências com determinado centro e raio, encontrar pontos médios de segmentos, fixar distâncias e transportá-las para outras construções, dividir um segmento em partes iguais, determinar a reflexão de um ponto relativamente a uma reta, usar um seletor para fazer variar o comprimento de um segmento, arrastar e explorar famílias de figuras. Curiosamente, a Jéssica opta sempre por não recorrer às ferramentas de medida. Nestes seus trabalhos, o GeoGebra assume o papel de ferramenta-para-pensar e não de ferramenta-para-calcular, pelo que as suas resoluções só ficam completas com a inclusão de uma justificação detalhada, onde explica o seu raciocínio e indica os cálculos que julga necessários. Na primeira resolução, parece ser a própria atividade de construção que lhe permite “ver as relações” entre os lados dos vários tipos de quadrados. Já no segundo problema parece ter sido a construção rigorosa, suportada pela possibilidade de uma total manipulação das dimensões dos entes geométricos, o que leva a uma visão mais abrangente do problema proposto, estendendo as várias condições e permitindo uma generalização da solução.

Tal como a teoria sustenta, é o reconhecimento das potencialidades de ação da ferramenta em estreita articulação com as aptidões da concorrente que geram atividade. Essa articulação envolve, pois, dois tipos de conhecimento: o matemático e o tecnológico, que se influenciam e inter-relacionam, pelo que nesta atividade de resolução de problemas de matemática com o GeoGebra é possível identificar vários dos processos que Martin e Grudziecki (2006) sugeriram para caracterizar a literacia digital, e que aqui se propõem como base para descrever a literacia tecno-matemática desta concorrente.

Numa primeira abordagem a estes problemas, a Jéssica começa por detetar o tema matemático envolvido, Geometria, o que remete para a identificação de um repertório matemático associado, e imediatamente reconhece o GeoGebra como o recurso digital imprescindível à resolução (*identificação*), ferramentas estas – matemáticas e GeoGebra – que já são do seu conhecimento e, portanto, às quais tem acesso garantido (*acessibilidade*), não só porque lhe permitem uma elevada precisão e fiabilidade (*avaliação*), mas também porque consegue executar determinados procedimentos e compreendê-los no âmbito do problema (*interpretação*). Tanto a atividade que a concorrente relatou como a que foi observada sugerem que a compreensão em extensão do problema e a decisão sobre o conjunto de ações que serão necessárias à sua resolução (*definição*) têm início aqui, mas não se esgotam nesta etapa.

A esta fase de "observação e decisão", segue-se a de "produção da solução". A concorrente organiza então diferentes recursos materiais, como o bloco de notas, canetas coloridas, calculadora, GeoGebra, Word, Paint, e-mail, e diversos recursos matemáticos, por exemplo, propriedades de retas paralelas ou perpendiculares, de circunferências e suas representações, determinação de áreas ou manipulação de uma expressão algébrica, e combina-os de forma relevante à criação e desenvolvimento da estratégia (*organização*, *integração* e *análise*). A partir dessa construção e da própria manipulação da construção, a Jéssica cria novos objetos de conhecimento, por exemplo, uma estratégia, uma representação, um modelo conceptual (*criação*), podendo interagir com a professora, a mãe ou a equipa do Sub14 de forma relevante para a resolução (*comunicação*). Tal como a jovem refere, e as resoluções evidenciam, a sua compreensão do problema aprofunda-se durante esta etapa de realização de construções e aquando da sua manipulação.

A última fase diz respeito ao "reportar" da atividade ou do processo de resolução dos problemas a outros de relevo, neste caso, a equipa do Sub14. Esse relato é composto pelo trabalho em GeoGebra e por uma explicação detalhada dos procedimentos: na primeira solução destaca-se uma pequena legenda, a representação das relações entre os lados dos quadrados e os cálculos necessários à solução; na segunda solução destaca-se o texto escrito, onde a Jéssica explica o seu raciocínio e prova que a área do canteiro triangular se mantém, independentemente da posição da vara (*disseminação*). O último processo mencionado por Martin e Grudziecki (2006), *reflexão*, não emerge imediatamente da análise das produções da concorrente embora o facto de as ter enviado para a equipa do Sub14 seja indicador de que considera que cumpriu a tarefa com sucesso.

O *framework* concebido para explicar a literacia tecnológica oferece grandes potencialidades para clarificar a literacia tecno-matemática na atividade de resolução de problemas com tecnologias, que constitui um conceito operacional para descrever a inter-relação entre o sujeito e a tecnologia, permitindo explicitar o que ocorre no sistema humanos-com-media na resolução de problemas matemáticos. Trabalhos futuros debruçar-se-ão sobre o aperfeiçoamento deste conceito e prosseguirão no apuramento da adaptação do *framework* aqui utilizado.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 – "Resolução de Problemas de Matemática: perspectivas sobre uma competição interactiva na web - Sub12&Sub14", e pela Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/73363/2010, da FCT.

Referências

Barbeau, E. J., & Taylor, P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Bélisle, C. (2006). Literacy and the Digital Knowledge Revolution. In A. Martin, & D. Madigan (Eds.) *Digital Literacies for Learning* (pp. 51-67), London: Facet.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York, NY: Springer.

Chemero, A. (2003). An outline of a theory of affordances. *Ecological Psychology*, *15*(2), 181–195.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. Em R. Shaw & J. Bransford (Eds.) *Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Greeno, J. (1994). Gibson's Affordances. *Psychological Review*, 101(2), 336-342.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker. A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. London: Routledge.

Hoyles, C., Wolf, A., Molyneux-Hodgson, S., & Kent, P. (2002). *Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council*. Relatório do Projeto. Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012a). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web-based mathematical competition. *International Congress on Mathematics Education - ICME 12*, pp. 2933-2942. Seoul: ICMI.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012b). Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com tecnologias. Em H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), *Atas do XXIII SIEM*, pp. 677-691. Coimbra: APM. ISBN: 978-972-8768-53-9.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). Beyond-school mathematical problem solving: a case of students-with-media. Em A. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the IGPME*, Vol. 3, pp. 105-112. Kiel, Germany: PME.

Lévy, P. (1990). *As Tecnologias da Inteligência*. *O Futuro do Pensamento na Era da Informática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Martin, A. (2006). A European framework for digital literacy. *Digital Kompetanse*, 2, 151-161.

Martin, A., & Grudziecki, J. (2006). DigEuLit: Concepts and Tools for Digital Literacy Development. *Innovation in Teaching And Learning in Information and Computer Sciences*, *5*(4), 249 -267.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 21-46.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

Villarreal, M., & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, *42*(1), 49-62.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

O contributo da participação numa competição matemática para a aprendizagem de um aluno com necessidades especiais: O caso de Rui

Nélia Amado[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[2]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *As competições, a par de outras atividades matemáticas desafiadoras que se realizam para além da sala de aula, têm vindo a merecer atenção recente por parte da investigação em educação matemática. As competições de caráter inclusivo, como é o caso dos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14, são atualmente encaradas como oportunidades de aprendizagem e de desenvolvimento. Neste estudo elegemos como foco de investigação a relação entre a participação de um aluno com necessidades especiais nestas competições e o seu percurso de aprendizagem e de transformação. Analisando o caso de Rui, com base em dados qualitativos recolhidos ao longo de quatro anos, descrevemos a sua evolução na resolução de problemas, no uso do computador e na sua autoconfiança, face às dificuldades e ao sucesso que experimentou enquanto concorrente.*

Palavras-chave: competições matemáticas inclusivas; resolução de problemas; tecnologias; necessidades educativas especiais.

Atividades matemáticas para além da escola

A escola e, em particular a sala de aula, foi durante décadas o principal espaço de aprendizagem. Hoje, a Internet, a comunicação à distância, os media e os cada vez mais abundantes recursos digitais e multimédia constituem fatores responsáveis pela atenção acrescida ao conhecimento obtido fora da sala de aula. Atualmente é possível aceder à informação e ao conhecimento em qualquer momento e em qualquer local. Esta é uma circunstância importante pela qual a investigação em educação matemática começou a mostrar maior consciência da relevância dos espaços de aprendizagem "para além da sala de aula" (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich & Taylor, 2009).

Apesar de ser recente, em Portugal, o interesse pelas aprendizagens matemáticas fora da escola, a nível internacional este tema tem merecido atenção por parte de diversas organizações. Estas e outras atividades têm por objetivo expor aos alunos a uma matemática estimulante, procurando motivá-los para o estudo desta disciplina ou dar-lhes a oportunidade de aprender mais.

A crescente participação dos jovens neste tipo de atividades não deve ser encarada como um sinal de insuficiência da sala de aula mas, pelo contrário, pode e deve ser vista como mais uma oportunidade para novas e diferentes aprendizagens que podem contribuir para melhorar o desempenho escolar dos alunos.

Em Portugal são conhecidas várias atividades desta natureza, em particular concursos ou competições, tais como os campeonatos de jogos matemáticos, e outros projetos ligados à matemática, como o Equamat, o Canguru Matemático, o matUTAD ou os Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14. Estudos nacionais e internacionais (Kenderov et al, 2009; Wedege & Skott, 2007, Jacinto & Carreira, 2011) permitem afirmar que este tipo atividades realizadas para além da sala de aula tem resultados importantes para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, da capacidade de comunicação matemática, da ligação afetiva dos jovens e das famílias com a matemática, da utilização pertinente e interessante das tecnologias digitais como ferramentas para lidar com a matemática.

Nesta comunicação apresentamos e analisamos o percurso evolutivo de um participante com necessidades educativas especiais nos Campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 (http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/subs/sub12.html), mostrando evidências do desenvolvimento da comunicação matemática, da sua fluência tecnológica e da sua autoconfiança ao longo da sua participação, durante quatro anos consecutivos, dois em cada um dos campeonatos.

Enquadramento teórico

Competições matemáticas inclusivas

A maior parte das competições matemáticas existentes têm lugar fora da sala de aula e assumem uma caracter voluntário. Protasov, Applebaum, Karp, Kasuba, Sossinsky, Barbeau & Taylor (2009) defendem que nenhum educador deve forçar ou obrigar os alunos a participar e recomendam ainda um cuidado especial na seleção dos desafios ou problemas a apresentar, de modo a garantir o sucesso nas atividades. A escolha e seleção dos desafios está diretamente relacionada com o objetivo das competições.

Nos últimos anos surgiram diversas competições matemáticas dirigidas a todos os alunos, conhecidas como inclusivas (Kenderov, 2009), com objetivo primordial de despertar o gosto e o interesse dos participantes pela matemática. Estas competições envolvem um número muito elevado de alunos devido ao facto das atividades propostas serem de um nível mais acessível, estimando-se que milhões de alunos pelo mundo estejam envolvidos em competições desta natureza.

A resolução de problemas e os Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14

A resolução de problemas é reconhecida como uma competência essencial no ensino e aprendizagem da matemática (Schoenfeld, 1992), sendo simultaneamente notada como uma das áreas de dificuldade de muitos alunos. A competência de resolução de problemas pode assumir vários significados na investigação em educação matemática (Callejo & Vila, 2009). Neste artigo adotamos a definição de competência de resolução de problemas apresentada no PISA (OCDE, 2012):

> A competência de resolução de problemas é a capacidade individual para levar a cabo um processo cognitivo que permita ao indivíduo compreender e resolver situações problemáticas para as quais não dispõe de um método imediato. Inclui a vontade de se envolver com tais situações como forma de realização do seu potencial enquanto cidadão construtivo e reflexivo (p. 4).

Desta definição depreende-se que a resolução de problemas de matemática exige mais do que conhecimento de procedimentos e técnicas, exige a capacidade de os mobilizar e colocar em ação, de pensar em estratégias que à partida não são diretas nem pré-estabelecidas e de recorrer a diversas formas de comunicar o raciocínio e o processo de resolução. Enfim, implica mobilizar e desenvolver uma variedade de competências para atingir um determinado fim, numa situação em que o indivíduo não tem, de antemão, um algoritmo ou procedimento já construído que lhe garanta a solução.

Os problemas propostos nos Campeonatos Sub 12 e Sub 14 não procuram ajustar-se aos temas curriculares, antes pretendem que os alunos mobilizem conceitos, procedimentos e formas diversas de raciocínio matemático. Além disso, os problemas são projetados para dar aos alunos a possibilidade de usar diferentes abordagens (papel e lápis, recurso às TIC, uso de materiais concretos, etc.), diversas estratégias (tentativa e erro, procedimentos algébricos ou numéricos, propriedades geométricas, etc.) e várias representações (figuras, tabelas, diagramas, linguagem simbólica e natural, resultados obtidos com o computador, etc.), permitindo assim o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, em sentido amplo. Aos alunos é dada plena liberdade relativamente ao modo de apresentar as suas soluções (escritas à mão e digitalizadas, usando o computador – com ou sem a ajuda de software específico –, recorrendo a imagens, etc.). O registo escrito é um requisito indispensável nesta competição, independentemente da linguagem utilizada. O recurso à escrita é visto por Cooper (2012) como uma excelente oportunidade para os alunos expressarem o seu raciocínio e ampliar a sua compreensão muito para além daquilo que é possível quando se limitam a apresentar cálculos e operações. A qualidade das respostas dos alunos não é aferida em função das suas escolhas de abordagens, estratégias, representações e formas de apresentação, mas sim em termos da exatidão e justificação do processo de resolução. Neste sentido, independentemente do grau de sofisticação matemática, todas as respostas corretas e completas são igualmente valorizadas.

Os jovens do século XXI e as tecnologias

Atualmente, o computador, a Internet ou o telemóvel fazem parte dos recursos disponíveis da maioria dos jovens e adolescentes. O recurso às novas tecnologias tem vindo a provocar alterações profundas na comunicação escrita, em geral e, na matemática, em particular. Cooper (2012) destaca os benefícios da utilização das tecnologias como estímulo para a comunicação, nomeadamente na matemática. Para esta autora, a utilização dos recursos tecnológicos tem provocado mudanças relevantes na forma como os alunos escrevem e expressam as suas ideias e conhecimentos. Tal facto também tem sido constatado por Jacinto e Carreira (2011) que evidenciam a forma como os participantes no Sub 12 e Sub 14 recorrem aos recursos digitais para "pensar, agir e comunicar". Igualmente, Zemelman, Daniels & Hyde (2005) destacam a necessidade de conjugar o raciocínio, a resolução de problemas, a comunicação, o estabelecimento de conexões e a criação de representações como forma de promover uma verdadeira compreensão da matemática. Ao responderem aos desafios dos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14 os participantes conjugam estas diversas habilidades. Os campeonatos proporcionam aos alunos oportunidades de utilizar os conhecimentos e competências adquiridos na escola mas, em simultâneo, dão-lhes a liberdade de experimentarem os recursos tecnológicos de que dispõem e a possibilidade de usarem um largo período de tempo para produzirem a sua resolução, o que é impensável na sala de aula. Os resultados da investigação mostram que muitos participantes recorrem com frequência aos conhecimentos adquiridos em sala de aula mas evidenciam uma criatividade, que pode ser explicada pela oportunidade de: i) escolherem livremente entre várias abordagens, ii) recorrerem às tecnologias (Amado, Amaral & Carreira, 2009; Moyer, Niezgoda & Stanley, 2005) e iii) disporem de duas semanas para resolver os problemas.

Em suma, a aprendizagem da matemática, para além da sala de aula, está hoje muito suportada por ambientes tecnológicos cada vez mais versáteis e acessíveis (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdnyakov & Stedøy, 2009).

Alunos com necessidades educativas especiais

A razão pela qual nos propomos abordar o caso de um aluno com necessidades educativas especiais, prende-se com a perspetiva inclusiva dos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14. O facto de esta competição *ser inclusiva* não significa ter baixas expetativas em relação aos participantes (Freire, 2008), designadamente no que se refere à criatividade.

Em educação, o conceito de necessidades educativas especiais está presente sempre que seja exigida educação ou atenção especial a uma criança, nomeadamente devido a deficiências sensoriais, auditivas ou visuais (Correia, 2004; Rodd, 2006). Os alunos com necessidades educativas especiais são aqueles que por exibirem determinada condição específica podem necessitar do apoio de um serviço de educação especial durante todo ou parte do seu percurso escolar, de modo a facilitar o seu desenvolvimento académico, pessoal e socio emocional. Entre as condições específicas referidas, pelos diversos autores, encontramos a deficiência visual.

Procedimentos metodológicos

Atendendo à natureza deste estudo optou-se por uma metodologia qualitativa, de natureza interpretativa. Apresentamos o caso de Rui, um jovem da região do Alentejo, que durante quatro anos participou nos Campeonatos de Matemática Sub 12 (5.º e 6.º anos de escolaridade) e Sub 14 (7.º e 8.º anos de escolaridade). Rui foi apurado para a final presencial em todas as edições dos campeonatos em que participou.

Recorremos a diversas formas de recolha de dados: entrevistas, observação e recolha documental das produções de Rui ao longo dos quatro anos de participação. As observações tiveram lugar em cada uma das Finais dos Campeonatos, em junho de cada ano, de 2009 a 2012. Nestes contactos pessoais com Rui e a sua mãe tivemos oportunidade de observar o participante durante a resolução da prova e as suas atitudes e comportamentos durante outros momentos das finais, tais como receção aos finalistas, lanche e sessão de encerramento.

As entrevistas, uma à mãe e outra ao participante, assumiram formatos diferentes no que se refere à sua estrutura e em ambos os casos foram realizadas à distância. À mãe foi pedido um testemunho acerca da participação do Rui nos Campeonatos, em maio de 2012. Com o Rui, a opção tomada foi por uma entrevista estruturada cujo guião foi enviado por correio eletrónico, dando-lhe o tempo necessário para o envio da resposta. Esta entrevista teve lugar após terminar a sua participação nos Campeonatos, em outubro de 2012. Recorremos ainda a diversas mensagens trocadas entre a organização do Campeonato e a mãe de Rui, nomeadamente no que se refere à caraterização da deficiência visual e às necessidades especiais do jovem durante a realização das finais.

No que se refere às produções de Rui, selecionámos as que marcam as diferentes fases do seu percurso: o início da participação, a primeira mudança e a alteração profunda que ocorre nos últimos anos.

Rui é o verdadeiro nome deste jovem participante. A razão pela qual não usaremos um nome fictício prende-se com a vontade do próprio e da mãe, tendo sido obtida a devida autorização para a realização das entrevistas e registado por escrito o desejo da encarregada da educação de não atribuição do anonimato em possíveis trabalhos de investigação publicados a partir dos dados fornecidos por ambos.

A deficiência visual de Rui é descrita pelas próprias palavras da mãe:

> Mãe: A extrema sensibilidade à luz, o diagnóstico de afaquia conjuntamente com nistagmus e esotropia... são responsáveis por um crescimento com pouco acesso à visão e condicionam o Rui na manutenção da atenção, equilíbrio, motricidade fina, na realização de tarefas de leitura e escrita… e impossibilitam-no de usufruir, na sua totalidade, das acuidades visuais que já adquiriu. De referir que quanto maior o cansaço menores são as suas produções, adotando uma postura incomum a nível de movimentos.

Esta descrição está de acordo com a definição encontrada na literatura (Correia, 2004; Rodd, 2006), pelo que Rui é um participante com necessidades educativas especiais. Contudo importa sublinhar que tal facto não foi impeditivo da sua participação nas duas fases do campeonato (através da Internet, na fase de apuramento, e presencial na final).

Análise de dados – O caso de Rui

O primeiro contacto com os Campeonatos

Rui iniciou a sua participação quando frequentava o 5.º ano, em 2008/09 e explicou-nos como foi o seu primeiro contacto com o Sub 12:

> Rui: Vi um cartaz na escola mas não liguei muito. A minha professora de matemática explicou, numa aula, o que era e perguntou se queríamos participar. Vim para casa com muita vontade de participar.

A mãe recordou o dia em que Rui recebeu o flyer de divulgação. Como habitualmente, esperava-o à entrada da escola e viu-o a correr na sua direcção, a gritar: “Mããeeeeeeeeeeeee... e aquele pequeno papel que continha um simples endereço eletrónico, serviu de mote a uma noite sem dormir”.

As primeiras dificuldades

Rui confessou que o gosto pela matemática e por “coisas novas, diferentes e interessantes” contribuíram para se aventurar a ser um dos concorrentes. Mas o início não foi fácil.

> Mãe: O começo não foi fácil, ampliávamos e imprimíamos os problemas, o Rui juntava algumas letrinhas, a mãe completava a leitura. (…) Este contato com a “nova Matemática”, não foi propriamente um momento calmo e doce, senti o choque do meu filho.

As dificuldades de Rui estavam relacionadas com dois aspetos distintos: em primeiro lugar, como consequência da sua deficiência visual, era difícil a leitura dos problemas e depois a escrita da resolução. Em segundo lugar, a própria atividade da resolução de problemas provocou alguns dilemas e conflitos, como foi descrito pela mãe:

> Mãe: A rotina do ‘sei e aplico o conhecimento adquirido ao longo dos anos escolares’ havia-se quebrado. As respostas não eram óbvias, requeriam: uma maior estruturação do pensamento matemático, formular hipóteses, a experimentação e enfrentar esse monstro que atormenta qualquer criança ‘fazer, refazer, recomeçar, explicar’. Apesar do silêncio, nos dias seguintes à leitura de mais um desafio, podia sentir as faíscas da encruzilhada de neurónios que se criou no interior daquela cabecita. Aos poucos surgiam desenhos, tabelas, hipóteses... que a mãe pacientemente ia registando.

Rui nunca perdeu o entusiasmo, nem desanimou; o gosto pela matemática é evidente neste aluno. Por outro lado, a necessidade de aceder à Internet para consultar a página do campeonato e a oportunidade de usar o computador, foram atrativos que Rui destacou.

> Rui: Era algo diferente: o ser pela Internet. Não era a matemática da aula, era algo em que se tinha que pensar mais. Os problemas ‘puxavam pela cabeça’ de uma forma diferente.

Rui mostra gostar de resolver problemas, destacando que esta atividade é diferente do que faz na sala de aula. Como foi referido, os problemas dos Campeonatos não pretendem estar alinhados com os conteúdos curriculares, até porque o Sub 12 ao abranger os alunos de 5.º e 6.º ano não pode dirigir-se especificamente a tópicos matemáticos focados nos programas pois colocaria os alunos de 5.º ano em posição de desvantagem. São, por isso, problemas que estão ao alcance dos jovens, mediante estratégias e processos de raciocínio que estes podem construir, usando pensamento matemático e desenvolvendo modelos concetuais que permitem a sua resolução.

As dificuldades muitas vezes sentidas pelos alunos quando tentam aplicar mecanicamente o que sabem ou aprenderam, em problemas rotineiros, à resolução de problemas de índole mais desafiadora são bem conhecidas da investigação (Callejo & Vila, 2009). Em muitos casos, perante problemas menos usuais, os comportamentos dos alunos refletem as suas conceções e crenças acerca da atividade de resolução de problemas, muitas das quais impregnadas pela sua experiência escolar.

A resolução de problemas e a utilização do computador

A oportunidade de ler e resolver os problemas, recorrendo ao computador surgiu como uma dupla vantagem para o Rui. Por um lado, foi motivante e aliciante recorrer a esta ferramenta, mas foi também um precioso recurso que o ajudou a transpor as dificuldades visuais. Com o computador tornou-se muito fácil ampliar o texto e as imagens do enunciado do problema, facilidade que não encontra ao consultar os manuais escolares, por exemplo. Ao mesmo tempo, permitiu ir ensaiando e produzindo as respostas aos problemas sem ter de usar o papel e o lápis.

> Rui: Gostava de usar o computador e este ajudava-me por causa das minhas dificuldades. Permitia-me participar. O seu uso era importante porque eu não escrevia e tinha muitas dificuldades a ler. Não conseguia escrever com a mão. O computador ampliava os problemas, o que me permitia ler. Em termos de escrita era muito mais fácil fazê-lo no computador. O computador também me ajudou a descobrir funcionalidades novas. Também devo aos Subs parte do gosto que tenho em relação a computadores.

A possibilidade de recorrer ao computador foi uma mais-valia para Rui em diversos aspetos como se pode concluir das suas palavras. Foi facilitador da sua participação no campeonato mas revelou-se igualmente uma oportunidade para novas e diferentes aprendizagens que extravasaram a própria matemática. São aliás, de destacar as competências desenvolvidas ao nível da utilização das tecnologias. Rui, para exprimir as suas ideias, sentiu necessidade de descobrir e usar múltiplas funcionalidades do computador que lhe permitiam ir elaborando as suas respostas e torná-las progressivamente mais completas, mais desenvolvidas e mais expressivas do seu processo de resolução, como adiante se pode constatar.

Das poucas palavras às produções digitais

As duas primeiras respostas que apresenta aos problemas do Sub 12 são curtas e escritas diretamente no formulário online existente na página do campeonato (Fig. 1).

Resposta:

Resposta:A Olivia Palito pode estar descansada 59 dias, o Popeye e o Brutus vão encontrar-se 60 dias depois

Problema1

Popeye	Brutus
15	20
30	40
45	60
60	

Figura 1. Resposta ao problema 2 do Sub 12 (5.º ano).

Como se pode ver, Rui é parco em palavras nas suas primeiras resoluções. Não utiliza anexos, não faz esquemas nem usa outras representações e pouco escreve para apresentar o seu processo. Esta dificuldade não é exclusiva de Rui; a maioria dos participantes mostra uma grande dificuldade inicial em expressar as suas ideias. Ao apresentar a resposta ao terceiro problema, ainda no 5.º ano, Rui envia um primeiro anexo em formato Word (Fig. 2) onde se percebe já uma diferença; não se limita a escrever algumas palavras e números como nas respostas anteriores, apresenta um pequeno esquema feito por si no computador com as ferramentas disponíveis.

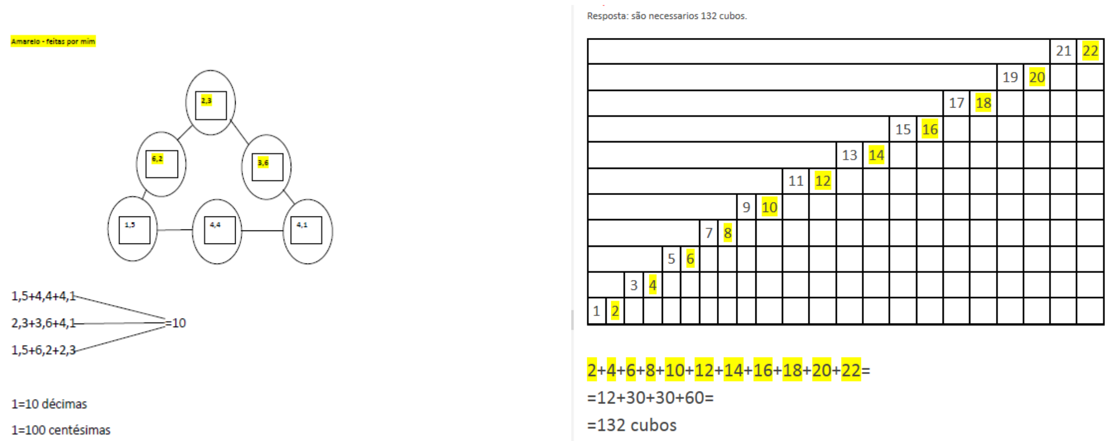


Figura 2. Resposta aos problemas 3 e 4 do Sub 12 (5.º ano).

O mesmo sucede na resposta ao quarto problema, sendo que, desta vez, surge uma tabela e o recurso a cores para distinguir alguns aspetos que considera relevantes (Fig. 2). Ao longo da sua participação no 5.º ano, Rui apresenta todas as respostas aos problemas corretas, dentro do prazo indicado pela organização, mostrando-se muito responsável e interessado.

Durante o 6.º ano, a sua participação na fase de apuramento assumiu caraterísticas semelhantes às do ano anterior, mas foi sendo notório o seu progresso na forma como comunicava as resoluções, sendo evidente que ia explicando cada vez melhor o seu processo de resolução.

No último ano de participação, no Sub 14, quando frequentava o 8.º ano, Rui era um participante bastante diferente do menino tímido e de poucas palavras que se mostrava anos antes. As suas resoluções vinham num documento em anexo, com mais de uma página. As suas respostas incluíam sempre tabelas, gráficos ou esquemas acompanhados de uma justificação em linguagem corrente. Ao contrário do que aconteceu várias vezes no início da sua participação, escrevia sempre uma mensagem na caixa de resposta apesar de enviar um anexo. As suas palavras deixavam transparecer uma atitude de confiança e de segurança que não existia nos primeiros anos. Como exemplo, apresentamos a resposta dada pelo Rui ao problema 1 do Sub 14 em 2012 (Fig. 3).

Para responder a este problema, Rui escolhe duas imagens distintas para representar cada um dos amigos: Alexandre e Bernardo. Em seguida cria um esquema que mostra cada um dos amigos a sair de casa a uma hora diferente, marca o espaço percorrido por cada um de acordo com a velocidade, como é dado no problema. E por fim, marca com um traço mais grosso a hora a que se encontram. Esta resolução, com que Rui enceta a sua participação no último ano do campeonato, mostra que este jovem desenvolveu uma variedade de competências ao longo da sua participação nestes campeonatos, confirmando a importância de manter expetativas elevadas em relação a um aluno com necessidades educativas especiais.

Rui desenvolve um conjunto de competências que permite colocar as suas resoluções entre as melhores de um Campeonato que envolveu mais de um milhar de participantes.

Cada aluno ou participante tem o seu ritmo; Rui é um jovem que necessita de mais tempo para elaborar as suas respostas devido às dificuldades visuais que apresenta, mas tal não o impediu de ser um dos melhores participantes.

A troca de mensagens entre Rui e a equipa organizadora também registou uma grande alteração ao longo do campeonato.

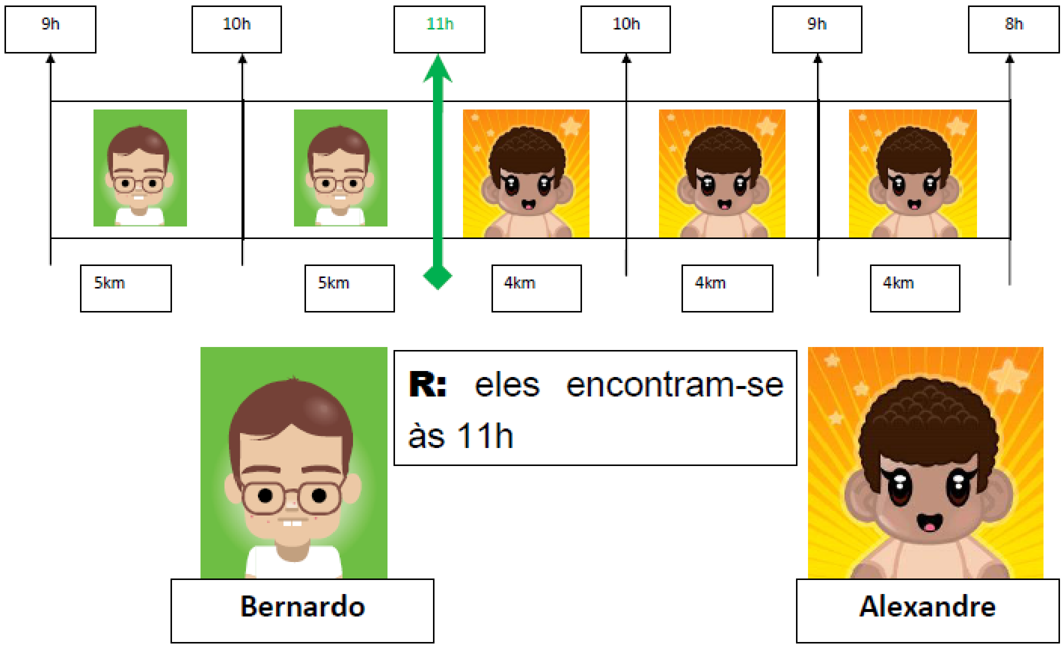


Figura 3. Resposta de Rui ao problema 1 do Sub 14 (8.º ano).

Na entrevista confessou que apreciava particularmente as mensagens que recebia quando as suas resoluções eram mais elaboradas:

> Rui: Gostava. Quando resolvia um problema de uma forma melhor recebia uma mensagem diferente que me fazia ficar com um sorriso. Se errava, as mensagens incentivavam-me a continuar. Motivavam-me bastante.

A presença nas Finais

Quando Rui foi apurado para a Final no primeiro ano de participação, a mãe enviou uma mensagem à organização, expondo a situação do Rui e solicitando que o enunciado da prova fosse escrito com letra de tamanho 20, visto não estar prevista a utilização de computador, e informando da sua necessidade de utilizar uma lupa binocular. A organização procurou criar as condições necessárias à participação deste aluno, tanto no que se refere à escrita da prova como dando mais tempo para a resolução dos problemas, visto Rui ter dificuldades na escrita à mão.

> Rui: Sentia-me apertado com o tempo. Sentia que se tivesse um dia resolvia aqueles 5 problemas totalmente certos. A meia hora que tinha a mais, era insuficiente para mim e não me ajudava a concluir pois encontrava-me bastante cansado. Os meus tempos sempre foram diferentes. Apesar de não ter conseguido aproveitar o tempo extra, o esforço que a equipa [organizadora] fez permitiu-me participar.

Ao longo destes quatro anos fomos testemunhando as mudanças de atitude do Rui nas finais. No primeiro ano era uma criança tímida, de poucas palavras. De ano para ano, assistimos a uma mudança de atitude e à medida que o tempo passava, mostrava-se mais confiante, seguro e, no último ano, já não era o menino acanhado de outrora. Ele falava e sorria para os elementos da organização com um grande carinho. A propósito da sua participação nas finais, comentou:

> Rui: Adorava o lanche. Sentia-me emocionado e feliz.

No final de quatro anos de participação ativa nos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14, Rui resume nestas palavras a importância que estes campeonatos tiveram na sua vida:

> Rui: Os Subs ajudaram-me a gostar ainda mais da matemática. Ajudaram-me a desenvolver a leitura e o registo das coisas, acabaram por me influenciar em tudo. Devo aos subs as notas que tenho.

Considerações finais

Rui é um exemplo de como a matemática, a resolução de problemas e, mais ainda, as competições matemáticas podem estar ao alcance de todos. A investigação alerta-nos para o erro de ter baixas expetativas (Freire, 2008) perante alunos com necessidades educativas especiais (Correia, 2004, Rood, 2006). Apesar das dificuldades iniciais na leitura e na escrita, resultantes dos seus problemas de visão, Rui fez um percurso notável ao longo da sua participação nos Campeonatos de Matemática Sub 12 e Sub 14.

Outros estudos têm demonstrado o valor e o interesse das competições matemáticas inclusivas, pautadas por desafios moderados e pelo objetivo de envolver um grande número de jovens, em comparação com as competições seletivas e destinadas à procura de talentos em matemática (Grugnetti & Jaquet, 2005). Uma das vantagens das competições inclusivas está no facto de produzir efeitos positivos tanto em alunos com níveis de desempenho mais elevado como em alunos de desempenho mais baixo em matemática. O caso de Rui revela como o seu interesse pela matemática, por coisas novas e diferentes, a atitude de curiosidade e o entusiasmo por participar, encontraram eco nalgumas das condições presentes nos campeonatos em que se envolveu ao longo de quatro anos consecutivos. A sua participação tornou-se numa experiência de aprendizagem rica, em vários domínios, e gerou importantes oportunidades de desenvolvimento. Transformou-se num jovem confiante, entusiasta e capaz de se equiparar aos demais concorrentes, apesar das suas limitações físicas. Tal como a mãe de Rui faz notar, o percurso evolutivo deste jovem não foi isento de dificuldades e de esforço mas traduziu-se na sua própria capacidade de ultrapassar limitações e, como refere o próprio aluno, ter sucesso numa competição de resolução de problemas influenciou o progresso que fez a nível escolar.

A participação nestes campeonatos exige o recurso ao computador para consultar o enunciado e responder ao problema, o que foi uma mais-valia para Rui. A utilização do computador foi um aspeto motivador e mostrou-se vantajoso para ultrapassar as suas restrições específicas. Mas revelou-se ainda uma ferramenta muito valiosa, ao promover uma verdadeira aprendizagem da matemática. O computador foi fundamental na produção de respostas progressivamente mais elaboradas, justificadas e completas. Atendendo à natureza do campeonato, a escrita apresenta-se como uma característica determinante para apresentar e exprimir todo o processo de resolução. Cooper (2012) destaca a forma como os recursos tecnológicos podem constituir uma poderosa ferramenta na melhoria da competência da escrita, o que foi muito evidente com este participante. Por outro lado, nos últimos dois anos, Rui mostrou ser capaz de desenvolver e pôr em prática uma variedade de habilidades (Zemelman et al, 2005), indicadoras de uma sólida compreensão da matemática que foi trabalhando nos problemas propostos. Por fim, é de sublinhar a mudança na sua maneira de estar e o seu crescente à-vontade entre os seus pares e entre os adultos com que ia dialogando ao longo dos campeonatos. Este é um outro aspeto que importa referir a propósito de competições inclusivas e de outras iniciativas apostadas em captar o interesse e o gosto dos alunos pela matemática. Corresponde a uma componente afetiva que passa pela valorização das capacidades individuais, pela importância do encorajamento e do estímulo, pelo reconhecimento do valor do envolvimento parental e da construção da autoconfiança em matemática. Rui é hoje um jovem seguro e confiante na sua capacidade de aprender matemática, na escola e fora da escola.

Referências bibliográficas

Amado, N., Amaral, N. & Carreira, S. (2009). A liberdade que as tecnologias permitem: Trabalhando os números e as capacidades matemáticas transversais. In C. Costa, E. Mamede e F. Guimarães (Orgs.). *Números e Estatística: refletindo no presente perspetivando o futuro*. Secção de Educação Matemática, SPCE

Callejo, M., & Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two cases studies. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 111-126.

Cooper, A. (2012). Today´s Technologies Enhance Writing in Mathematics, The Clearing House, 85, 80-85.

Correia, L. (2004). Problematização das dificuldades de aprendizagem nas necessidades educativas especiais. *Análise Psicológica* 2 (XXII) 369-376. Acedido em agosto, 2013, em http://www.scielo.gpeari.mctes.pt/pdf/aps/v22n2/v22n2a05.pdf.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). NY: Springer.

Freire, S. (2008). Um olhar sobre a inclusão. Revista Educação, Vol. XVI, n.º 1, 5-10.

Grugnetti, L., & Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 373-384.

Jacinto, H. & Carreira, J. (2011). Nativos digitais em atividade de resolução de problemas de matemática. Conferência Online de Informática Educacional. Lisboa, UCP. Acedido em agosto, 2013, em http://www.coied.com/2011/actividades/artigos/tema1/.

Kenderov, P. (2009). A short history of the World Federation of National Mathematics Competition. *Mathematics Competitions*, *22*(2).

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the Classroom – Sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer

OCDE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. Acedido em agosto, 2013, em http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

Protasov, V., Applebaum, M., Karp, A., Kasuba, R., Sossinsky, A., Barbeau, E., & Taylor, P. (2009). Challenging Problems: Mathematical Contents and Sources. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 11-51). New York, NY: Springer

Rodd, M. (2006). Commentary: mathematics, emotions and special needs. *Educational Studies in Mathematics,63,* 227-234.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Wedege, T., & Skott, J. (2007). Potential for change of views in the mathematics classroom? In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 389-398). Larnaca, Cyprus. Acedido em agosto, 2013, em http://ermeweb.free.fr/CERME5b/.

Zemelman, S., Daniels, H., & Hyde, A. (2005). *Best practice: Today´s standards for teaching and learning in America´s schools*, 3rd Ed. Portsmouth, NH: Heinemann.

Reconhecimento de apoio

Este trabalho é parte do Problem@Web financiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, Projeto n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Fatores Afetivos na Resolução de Problemas Matemáticos Desafiantes no Contexto de uma Competição Inclusiva Baseada na Web*

Susana Carreira[1], *Rosa Antónia Tomás-Ferreira*[2], *Nélia Amado*[3]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt
[2]Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e Centro de Investigação da Universidade do Porto, rferreir@fc.up.pt
[3]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt

Resumo. *Nesta comunicação, procuramos descrever os padrões de comportamento dos participantes numa competição de resolução de problemas, de natureza inclusiva e baseada na Web, no que toca à procura de ajuda para resolver os problemas propostos e aos graus de apreciação e dificuldade sentidas ao resolver os mesmos. Os resultados sustentam o carácter desafiador dos problemas do SUB12, em particular o seu grau de desafio moderado. Sugerem que os participantes procuram ajuda sobretudo junto da família e dos professores, e que gostam bastante dos desafios colocados ao longo da competição, desafios esses que consideram, em geral, ser fáceis ou de dificuldade média. Indicam ainda a existência de uma forte correlação entre o gosto e o baixo grau de dificuldade sentida, bem como entre o gosto e a ausência de necessidade de procura de ajuda. Algumas questões para investigação futura são levantadas.*

Palavras-chave: *competições matemáticas inclusivas; resolução de problemas; gosto; procura de ajuda; dificuldade sentida.*

Contexto e objetivos do estudo

As competições matemáticas inclusivas

O número de competições matemáticas (regionais, nacionais ou internacionais) tem vindo a crescer em todo o mundo. Estas competições têm formas, conteúdos e durações distintas, e dirigem-se a grupos variados de estudantes tanto em termos de idade como de desempenho em matemática.

A natureza desafiante e competitiva de atividades de enriquecimento curricular parece estar associada ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos e a sentimentos positivos relativos à matemática. A participação dos alunos,

* Trabalho financiado por fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito dos projetos PTDC/CPE-CED/101635/2008 e PEst-C/MAT/UI0144/2011, e por fundos do FEDER através do programa COMPETE.

sobretudo os mais novos, em competições matemáticas influencia positivamente sua motivação para aprender matemática (Freiman & Vézina, 2006). Freiman e Applebaum (2011) argumentam que as competições matemáticas apresentam bastantes vantagens relacionadas com fatores afetivos e emocionais, como satisfação, sentido de eficácia, gosto e interesse pela matemática. As competições inclusivas (isto é, dirigidas a todos os alunos) têm vindo a manifestar-se como contextos onde a matemática é apresentada como desafiante, entusiasmante, acessível, social e emocionalmente envolvente, e próxima da vida quotidiana dos alunos.

O SUB12 e as questões de investigação

O SUB12 é uma competição regional de resolução de problemas de matemática para alunos de 5.º e 6.º anos, baseada na Web e promovida pela Universidade do Algarve (http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/). A explicação do processo de resolução é um requisito fundamental para que as respostas possam ser consideradas completas. Todos os participantes recebem *feedback* às respostas enviadas, com sugestões para ultrapassar obstáculos ou efetuar correções, podendo voltar a submeter as suas respostas tantas vezes quantas quiserem durante o prazo permitido. Reconhecendo o papel dos fatores afetivos no âmbito das competições matemáticas inclusivas, pretendemos descrever os padrões de comportamento dos participantes no SUB12 no que toca à procura de ajuda para resolver os problemas e aos graus de apreciação e de dificuldade sentidas na resolução desses problemas. Foram colocadas as questões seguintes: (1) Que significância tem a ajuda prestada aos participantes durante a fase de apuramento? (2) Que grau de apreciação manifestam os participantes em relação aos problemas propostos?; (3) Que grau de dificuldade sentem os participantes na resolução dos problemas propostos?; e (4) Que tendências se podem identificar combinando estas dimensões?

Perspetivas teóricas

Problemas matemáticos desafiantes

Desenvolvimentos teóricos recentes não se limitam à identificação de relações causais entre afetos e cognição. A visão de que afetos e cognição são duas faces da mesma moeda está a ser abandonada pois os afetos são cada vez mais entendidos como fazendo parte integrante do pensamento: “Os afetos influenciam o pensamento, da mesma forma que o pensamento influencia os afetos. Os dois interagem" (Walshaw & Brown, 2012, p. 186).

A própria noção de desafio reflete como os afetos podem ser integrados nos aspetos cognitivos que lhe estão inerentes. Por definição, um desafio pressupõe algum grau de dificuldade, a necessidade de ultrapassar um obstáculo. Segundo Barbeau (2009), os desafios matemáticos incitam deliberadamente os seus recetores a tentar uma resolução. Um desafio é bom quando um indivíduo possui um reportório matemático suficiente para o resolver mas requer que o aborde de uma forma inovadora; estas características levam à sensação de estar intelectualmente ativo e à emoção de descobrir novas abordagens, tal como acontece aos matemáticos profissionais. Os bons desafios matemáticos são normalmente vistos pelos alunos como sendo diferentes das atividades usuais de resolução de problemas com que se deparam na escola e, mesmo quando os alunos os veem como difíceis, estimulam sentimentos de prazer e satisfação (Jones & Simons, 1999).

Os problemas do SUB12 apresentam uma situação contextualizada e uma questão bem definida; no entanto, espera-se que os participantes os vejam como verdadeiros desafios, sentindo vontade genuína de os resolver. Um *problema matemático desafiante* inclui um forte apelo afetivo, envolvendo curiosidade, imaginação e criatividade, resultando, assim, num problema que dá gozo resolver, independentemente de a resolução ser ou não fácil de alcançar (Freiman, Kadijevich, Kuntz, et al., 2009).

A ideia de desafio moderado

A investigação tem sublinhado a necessidade de equilíbrio nas questões desafiantes que se propõem aos alunos (Schweinle, Turner & Meyer, 2006) e a ideia de *desafio moderado* tem tomado corpo (Turner & Meyer, 2004). Os desafios moderados são os que estão ao alcance de todos os alunos mas exigem esforço para que haver sucesso na sua resolução. Tais desafios parecem ser meios privilegiados para persuadir os alunos a tentar resolvê-los e para os encorajar a procurar e explicar estratégias alternativas, compreender e avaliar abordagens distintas e valorizar possíveis soluções múltiplas. Em suma, uma característica marcante da promoção de desafios moderados é persuadir os indivíduos a tentar (Schweinle, Berg & Sorensen, 2013).

A predisposição para resolver uma tarefa parece diminuir em duas situações: quando as expetativas acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil). Turner e Meyer (2004) sugerem que, em média, os alunos preferem situações com alguma dificuldade, conjugada com um certo sentimento de medo ou desconforto associado à possibilidade de errar.

O uso de desafios moderados pode ser bastante potenciado em contextos cujas características são valorizadoras do desafio *per se*. Uma delas é a perceção da procura de ajuda como algo legítimo; outra está associada ao requisito de explicar o processo de resolução do desafio e de o submeter a apreciação (Schweinle et al., 2006). Estes dois aspetos estão claramente presentes no SUB12 – não só a procura de ajuda é explicitamente encorajada nas regras de participação na competição como a explicitação e explicação do processo de resolução são ambas requeridas.

A procura de ajuda pelos participantes

Quando um participante procura ajuda, podemos assumir que o problema foi, de facto, percecionado como um desafio? Se o não foi, porquê? O grau de dificuldade do problema pode ter sido demasiado elevado, resultando na necessidade de obter ajuda para o resolver. No entanto, para os participantes, pedir ajuda pode ser comprometedor do caráter desafiador da tarefa uma vez que a sensação de realização (ou sucesso), sobretudo se associada à demonstração de desempenho, pode não ser completa – o reconhecimento por uma resposta correta não é apenas do participante mas é partilhado com terceiros.

O papel da procura de ajuda no processo de aprendizagem tem recebido cada vez mais atenção da comunidade de investigação, destacando-se vários desenvolvimentos na concetualização da procura de ajuda bem como da evasão à ajuda (Zusho & Barnett, 2011). Em particular, têm sido enfatizadas as conotações sociais da procura de ajuda com os custos envolvidos: por exemplo, ser visto como alguém que precisa de ajuda e admitir falhas ou mesmo incapacidade para realizar uma tarefa. Há evidências de que os alunos que exibem confiança e comportamentos de autorregulação tendem a procurar ajuda porque desejam aprender e compreender a situação em questão e não porque escolhem um caminho (mais) fácil para realizar a tarefa (Zusho & Barnett, 2011).

Dados empíricos (e.g., Kitsantas & Chow (2002) e Ryan & Pintrich (1997), citados em Zusho & Barnett, 2011) sugerem que os alunos com pior desempenho veem tendencialmente a procura de ajuda como uma ameaça e, por conseguinte, manifestam níveis de evasão à ajuda mais elevados; por seu turno, alunos com perceções de competência cognitiva mais elevada mostram níveis mais baixos de evasão à ajuda. "Tomados em conjunto, estes resultados sugerem uma ligação relativamente forte entre as expetativas dos alunos e a sua confiança no sucesso académico, e os padrões de procura de ajuda ou de evasão à mesma" (Zusho & Barnett, 2011, p. 153).

Além disto, os alunos cujos objetivos de sucesso se focam no desenvolvimento de competências tendem a ver na procura de ajuda uma boa estratégia para melhorar as suas capacidades e compreensão. Pelo contrário, os que privilegiam objetivos de demonstração exterior de competência já veem na procura de ajuda um sinal de fraqueza e entendem que a ajuda deve ser evitada (Zusho & Barnett, 2011).

A procura de ajuda articula-se com fatores contextuais, designadamente quando existe um ambiente de aprendizagem afetuoso e exploratório. A preferência por atividades desafiantes está muitas vezes associada ao envolvimento e à sensação de satisfação dos alunos. Em tais ambientes, pode aumentar a preferência dos alunos por resolver os problemas sozinhos, e a procura de ajuda torna-se próxima de procurar pistas em vez de respostas (Zusho & Barnett, 2011).

O grau de dificuldade sentida pelos participantes

A forma como os jovens percecionam a dificuldade de uma tarefa amadurece com o seu desenvolvimento cognitivo e social. Para os mais novos, a dificuldade de uma tarefa é "uma propriedade endémica à tarefa (…) enquanto os mais velhos associam ao termo uma maior complexidade, colocando a ênfase na rapidez com que ela é realizada…" (Schweinle et al., 2013, p. 1). Com a idade, há a tendência de associar maior dificuldade da tarefa a maior esforço e ao menor número de indivíduos que a consegue resolver. Existe, assim, "uma comparação social inerente à perceção de dificuldade" (p. 3).

Embora as ideias de desafio e dificuldade tenham pontos em comum – por exemplo, ambas requerem esforço e implicam um certo nível de complexidade – e sejam usadas muitas vezes como sinónimos, elas são distintas. Às tarefas desafiantes são dados valor e importância, ao passo que estes atributos não estão necessariamente presentes nas tarefas difíceis; além disto, "os desafios são suscetíveis de encorajar orientações motivacionais positivas" (Schweinle et al., 2013, p. 5) ao passo que as tarefas difíceis já não. Assim, nem todas as tarefas difíceis são suficientemente desafiadoras para quem as enfrenta e o sucesso nos desafios “não é determinado pela comparação com terceiros” (p. 5).

Quando os alunos veem o seu próprio sucesso em comparação com o de outrém, tendem a envolver-se apenas em tarefas para as quais se sentem confiantes. Para estes, os desafios podem ser “tanto oportunidades para melhorar o seu desempenho como ameaças, pois podem conduzir ao fracasso” (Schweinle et al., 2013, p. 4). Porém, quando os alunos veem o seu sucesso como reflexo do desenvolvimento dos seus conhecimentos ou capacidades, tendem a ver os desafios como oportunidades para promover esse desenvolvimento; por seu turno, a natureza das tarefas desafiantes contribui para que os alunos adotem esta visão do seu próprio sucesso (Schweinle et al., 2013).

Relação entre desafios e afetos

O significado de desafio moderado não é universal pois diferentes: um mesmo indivíduo pode sentir níveis distintos de desafio numa mesma tarefa dependendo de ter voluntariamente escolhido realizá-la ou de esta lhe ter sido imposta (Schweinle et al., 2006). A perceção de desafio também está associada ao interesse da tarefa – o interesse é um fator importante para que possam ocorrer experiências emocionalmente ricas e para promover a compreensão em contextos de aprendizagem. Os desafios vistos como importantes relacionam-se essencialmente com os interesses dos alunos e não saem fora da sua zona de conforto em termos da sua perceção de sucesso na sua resolução. “As tarefas difíceis requerem (…) mais esforço e, ao mesmo tempo, ameaçam o sentido de eficácia” (Schweinle et al., 2013, p. 16).

Apesar do carácter relativo dos desafios moderados, há indicadores que sustentam que eles favorecem o desenvolvimento de afetos positivos. Porém, outras condições devem girar em torno dos desafios moderados, entre as quais um ambiente social que promova sentimentos de satisfação, gozo e autoconfiança, bem como de apreciação pela matemática (Schweinle et al., 2006), desencorajando a comparação social e realçando o valor e importância das tarefas desafiantes (Schweinle et al., 2013). Estas características estão presentes no SUB12 contribuindo para a natureza inclusiva da competição. A inclusão tem também em vista promover a satisfação e o prazer na resolução de problemas de matemática desafiantes – diminuindo a frustração, dando reforço positivo, encorajando a persistência. “Níveis ótimos de desafio, rodeados por apoio afetivo e motivacional, podem proporcionar contextos muito propícios a sentimentos de satisfação, prazer, eficácia e valor na matemática por parte dos alunos" (Schweinle et al., 2006, p. 289).

Parece existir uma relação bastante interativa entre afetos positivos, desafio e valor atribuído à matemática (em particular, às tarefas matemáticas). Simultaneamente, encontramos dois tipos de ameaça, que os alunos identificam sobre a sua capacidade: a dificuldade da tarefa e a necessidade de procurar ajuda.

Metodologia

Nesta comunicação, abordamos três dimensões relativas a fatores afetivos manifestadas pelos participantes na edição do SUB12 de 2012/13: a procura de ajuda, o grau de apreciação e o grau de dificuldade sentida na resolução dos problemas propostos ao longo da fase de apuramento. Os dados provêm das respostas dos participantes a um miniquestionário (MQ), constituído por três questões de escolha múltipla, colocadas no formulário na página Web do SUB12 para submeter as respostas a cada problema. Para cada questão: (1) Com ajuda de: a) Professor; b) Familiares; c) Amigos; d) SUB12; e) Ninguém; (2) Gostei do problema: a) Muito; b) Mais ou menos; c) Pouco; e (3) Achei o problema: a) Difícil; b) Mais ou menos; c) Fácil, os participantes devem escolher apenas uma das opções.

A resposta é apenas obrigatória quando a resolução é enviada através do formulário, não sendo obrigatório no envio por correio eletrónico. Quando os participantes enviaram a resolução mais do que uma vez, foram consideradas as respostas relativas à última resolução submetida.

O número de participantes que respondeu ao MQ é ligeiramente inferior a 50% dos envolvidos em cada jornada, o que corresponde aos que usaram o formulário da página Web para enviar a sua resolução. O número de participantes diminui a cada jornada tal como o número de respondentes ao MQ (de 691 respostas no início para 63 na última jornada – Figura 1).

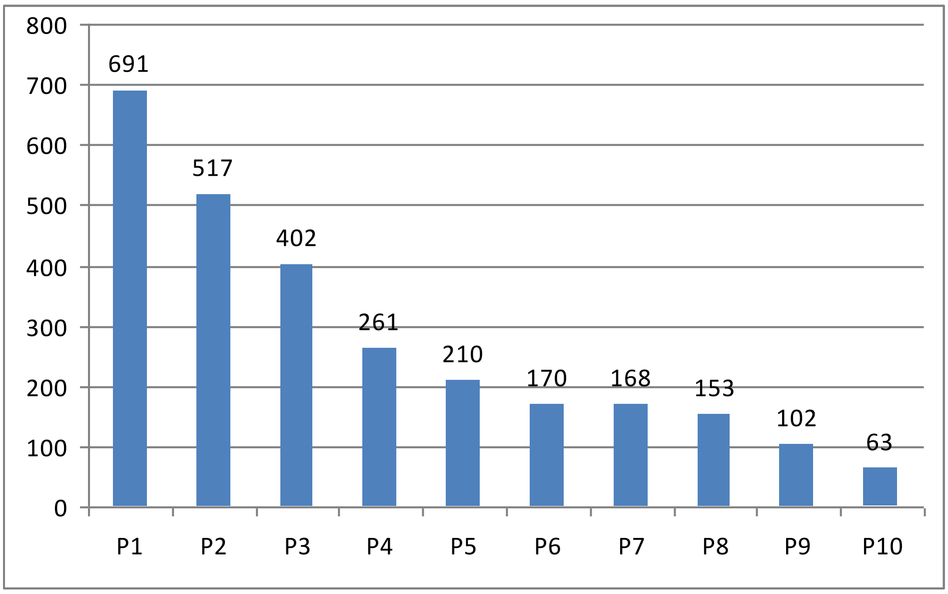
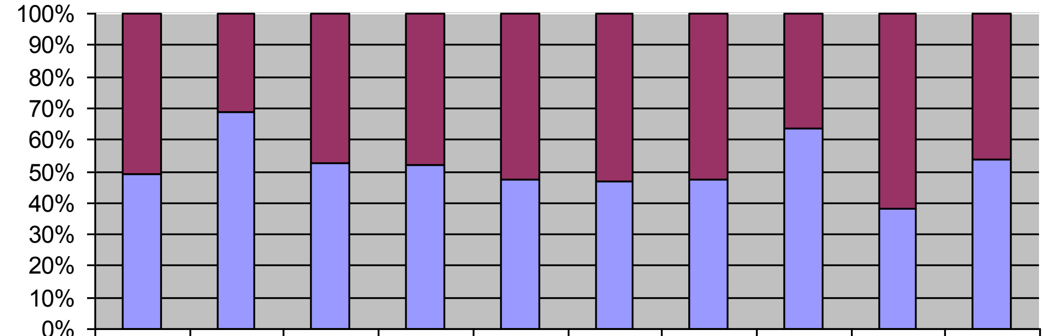


Figura 1. Número de respostas ao MQ.

A análise de dados é guiada pelas questões de investigação e pretende sobretudo encontrar padrões que possam ajudar a compreender a significância dos aspetos afetivos considerados, bem como possíveis associações entre eles. A nossa abordagem, baseada em contagens e correlações, é essencialmente descritiva, baseada no número de respostas e percentagens relativas a cada opção do MQ para cada problema, procurando também cruzar os dados no conjunto de todos os problemas propostos na fase de apuramento.

Análise de dados

A procura de ajuda teve uma expressão bastante visível na maioria dos problemas (Figura 2), destacando-se o problema P9 como aquele em que os participantes mais sentiram necessidade de pedir ajuda. A indicação de procura de ajuda foi sempre superior a 46%, exceto nos problemas P2 e P8, com apenas 31,3% e 36,6% dos participantes, respetivamente, a recorrer a terceiros. Os problemas P2 e P8 são usuais nesta competição (um problema de contagens e outro de raciocínio lógico) e, portanto, podem não se ter apresentado como complexos aos participantes.



	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Alguém	51,1%	31,3%	47,5%	47,9%	52,4%	52,9%	52,4%	36,6%	61,8%	46,0%
Ninguém	48,9%	68,7%	52,5%	52,1%	47,6%	47,1%	47,6%	63,4%	38,2%	54,0%

Figura 2. Procura de ajuda indicada pelos participantes por problema.

As duas principais fontes de ajuda são os familiares e os professores, com expressividades em geral muito próximas (Figura 3), seguindo-se os amigos, com uma

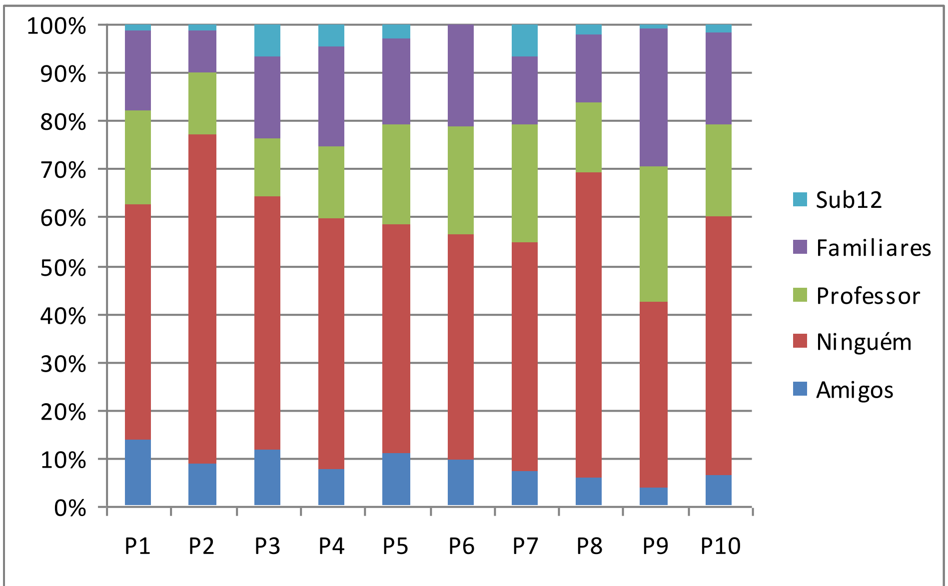


Figura 3. Fontes de ajuda indicadas pelos participantes por problema.

expressividade bastante menor. Os amigos podem incluir os colegas, por exemplo se o problema foi resolvido em contexto escolar – como sabemos ser uma realidade frequente (Carreira et al., 2012) – ou se foi resolvido em grupo e não individualmente.

Finalmente, a ajuda da organização da competição com quem os participantes contactam via correio eletrónico tem apenas uma expressão residual. No entanto, todos os participantes que enviam uma resposta incorreta ou incompleta recebem feedback da organização incitando à reformulação da resposta e fornecendo algumas pistas se necessário; e em vários casos isto resulta numa resposta correta e completa. Levanta-se a questão: será que os participantes apenas reconhecem que receberam ajuda do SUB12 quando a pedem? São poucos os casos em que os participantes pedem ajuda ao SUB12 de forma explícita, por exemplo, para começar a resolver um problema. Nestes casos, declaram, de facto, que tiveram ajuda do SUB12, reconhecendo esta fonte de ajuda.

Na Figura 4 exprimimos graficamente o grau de apreciação sentido pelos participantes ao resolver cada um dos problemas da fase de apuramento. Em geral, revelam ter emoções positivas na resolução destes desafios. No entanto, nos problemas P3, P4 e P9, o número de respostas exprimindo ter gostado *muito* do problema é menor que nos restantes. A percentagem de participantes que indica ter gostado pouco dos desafios nunca ultrapassa os 13%.

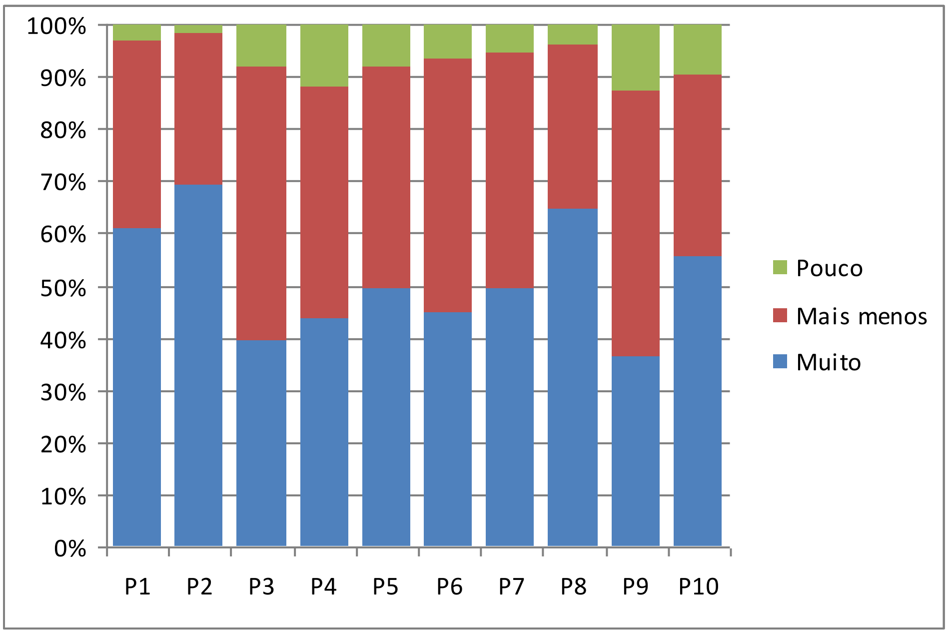


Figura 4. Grau de apreciação reportado pelos participantes por problema.

O problema P9 suscitou maior procura de ajuda, despoletando também um sentimento de apreciação mais reduzido. Ao contrário do problema P3 (em que houve necessidade de bastante ajuda), que lida com tópicos geométricos (em que os alunos habitualmente têm dificuldades na matemática escolar), o problema P9 relaciona-se com números e regularidades, um tópico usualmente bem recebido pelos alunos e que não lhes coloca tantos entraves na sala de aula. Assim, a procura de ajuda pode ser dependente do problema em causa e não tanto do conteúdo curricular central.

Finalmente, a Figura 5 ilustra o grau de dificuldade sentida pelos participantes na resolução de cada problema da fase de apuramento. Os problemas P2 e P8 são aqueles que os participantes sentiram como os mais fáceis e são também aqueles em que a percentagem de ajuda pedida é claramente a mais baixa: 68,7% e 63,4% dos respondentes, respetivamente, declaram não ter tido ajuda de ninguém para os resolver.

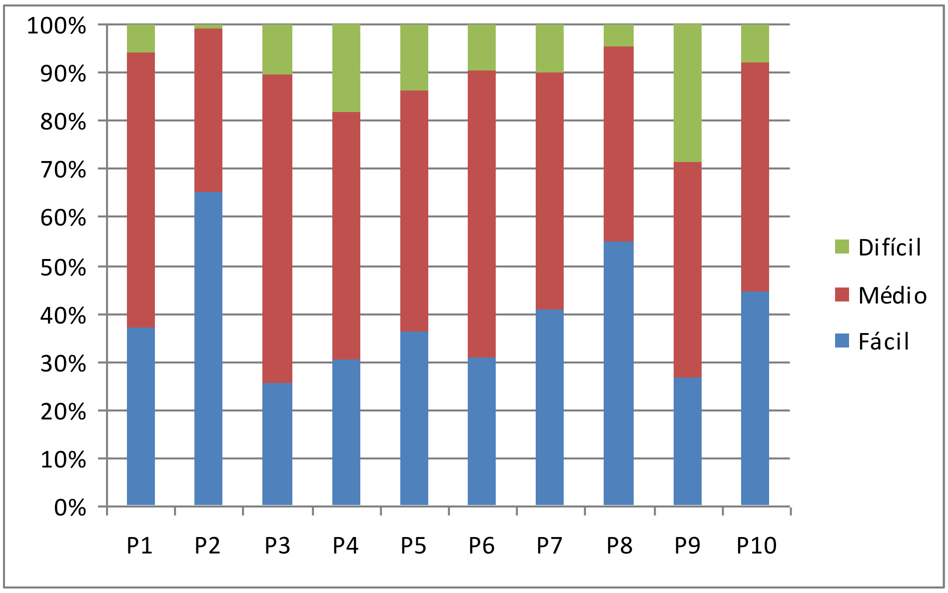


Figura 5. Grau de dificuldade sentida pelos participantes na resolução de cada problema.

Os problemas P3 e P9 destacam-se novamente, desta vez por serem os que mais dificuldades colocam aos participantes: apenas 25,1% e 26,5% dos respondentes, respetivamente, consideram aqueles problemas como fáceis. Se o contexto geométrico do problema P3, como já referimos, pode estar associado a uma maior dificuldade do problema e à necessidade de pedir ajuda, o contexto numérico e de regularidades que rodeia o problema P9 já não surge como uma hipótese explicativa forte para o grau de dificuldade sentida pelos participantes neste problema em particular. Os dados parecem sugerir que os problemas que os participantes sentiram como sendo os mais difíceis são também aqueles em que eles sentiram maior necessidade de ajuda para os resolver e a procuraram efetivamente.

Cruzando os dados obtidos acerca da procura de ajuda, grau de apreciação e grau de dificuldade sentida na resolução de todos os problemas da fase de apuramento do SUB12 podemos identificar algumas tendências. Por exemplo, não é surpreendente que exista uma correlação positiva significativa (coeficiente de correlação de 0,78) entre achar um problema *difícil* e sentir necessidade de *pedir ajuda* (Figura 6), bem como uma correlação negativa igualmente significativa (coeficiente de correlação de -0,85) entre achar um problema *fácil* e *procurar ajuda* junto das fontes disponíveis.

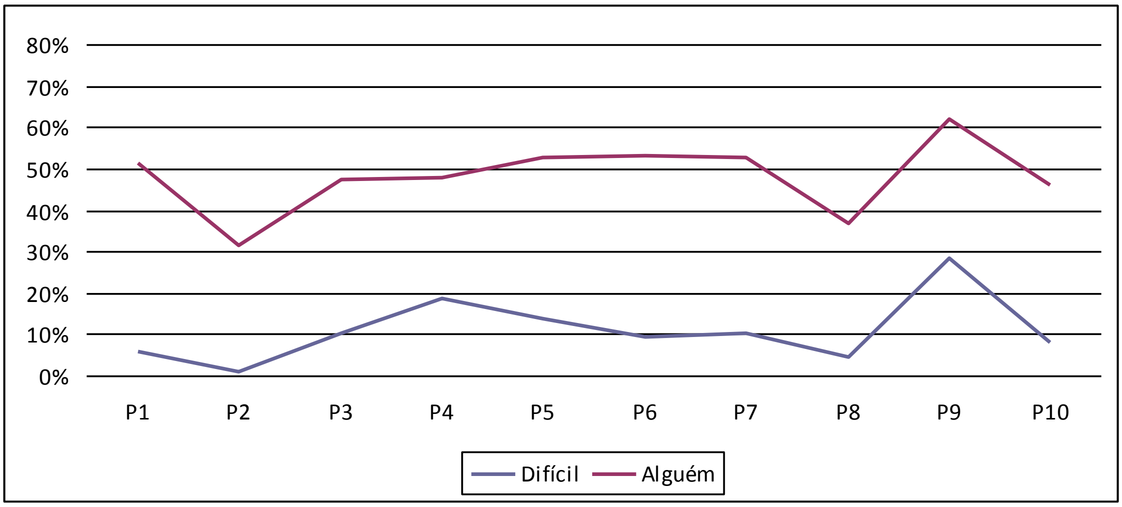


Figura 6. Correlação entre achar um problema difícil e procurar ajuda junto de alguém.

No entanto, como vimos, pedir ajuda é *bem aceite* entre os participantes no SUB12 dado o elevado número que reportou ter tido ajuda de alguma fonte. Pedir ajuda quando se sente dificuldade parece ser também *bem aceite* e natural.

Os dados indicam existir uma correlação positiva muito forte (coeficiente de correlação de 0,91) entre *gostar muito* de um problema e achá-lo *fácil*, ao mesmo tempo que existe uma correlação negativa também forte (embora ligeiramente inferior – coeficiente de correlação de 0,88) entre *gostar pouco* de um problema e achá-lo *difícil*. As figuras 7 e 8 ilustram bem estas relações.

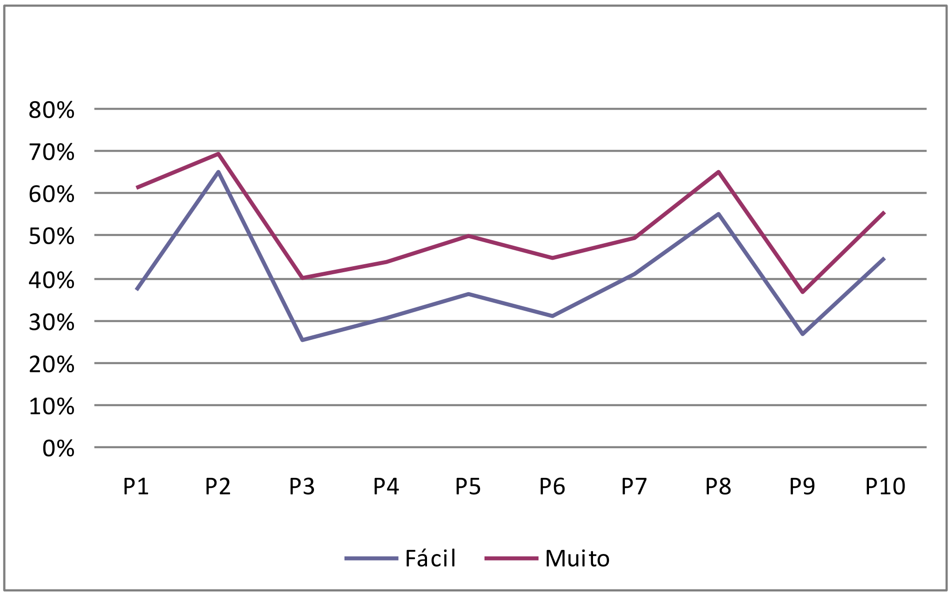


Figura 7. Correlação entre gostar muito de um problema e achá-lo fácil.

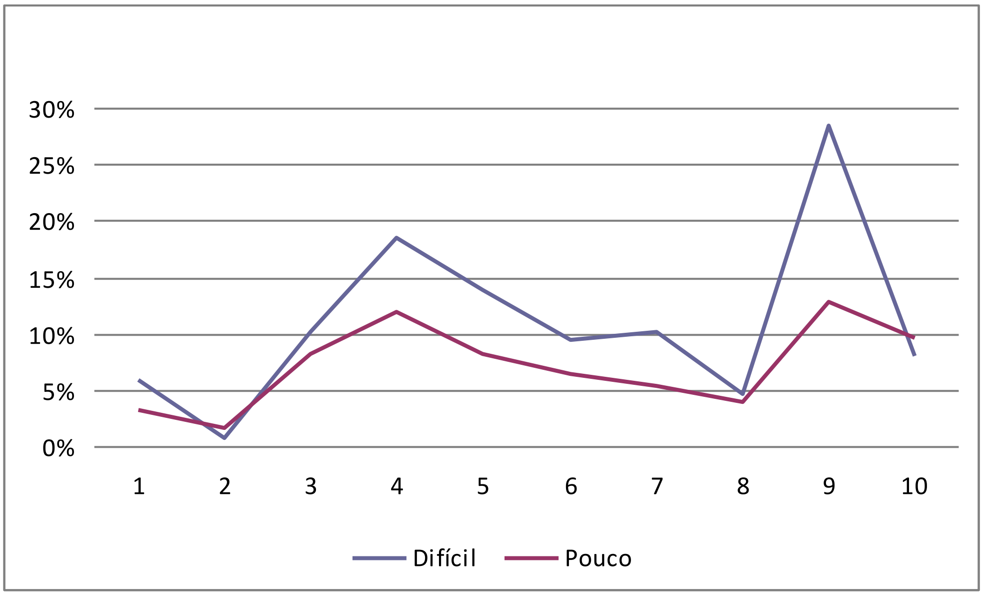


Figura 8. Correlação entre gostar pouco de um problema e achá-lo difícil.

Gostar *muito* de um problema está também correlacionado positivamente (coeficiente de correlação de 0,79) com *não* sentir necessidade de *pedir ajuda* e, observando a Figura 9, este fenómeno é aparentemente mais visível a partir da segunda metade da fase de apuramento.

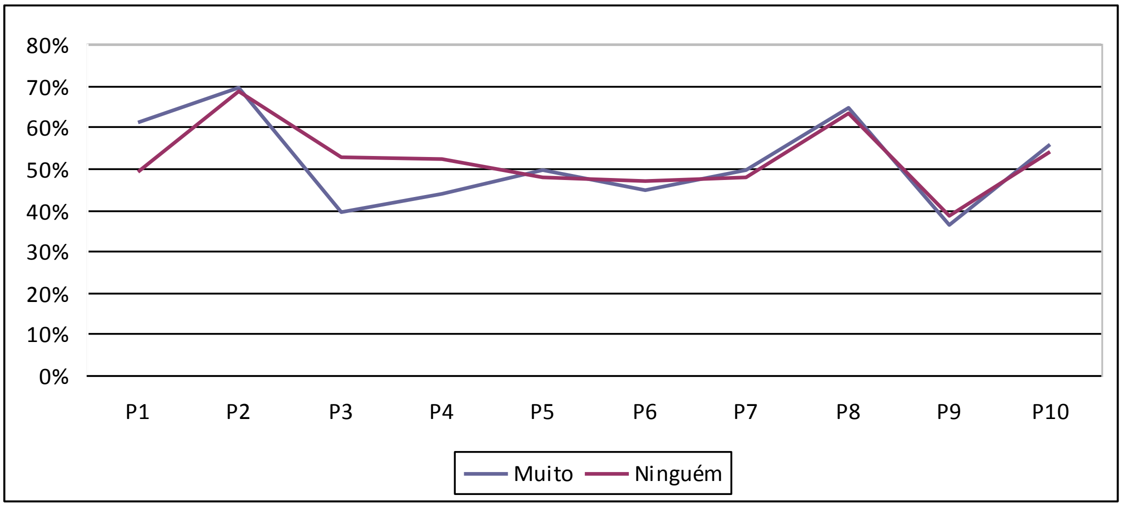


Figura 9. Correlação entre gostar muito de um problema e não procurar ajuda.

Apesar de positiva, a correlação entre gostar *pouco* de um problema e sentir necessidade de *pedir ajuda* junto de alguém não é muito elevada (coeficiente de correlação de 0,63). Mais uma vez, e observando a Figura 10, a reta final da fase de apuramento do SUB12 parece ser a altura desta competição em que mais se evidencia a relação entre apreciar pouco (ou mesmo muito pouco) um problema (o caso do problema P9 é paradigmático) e uma maior necessidade de procurar ajuda junto das fontes disponíveis.

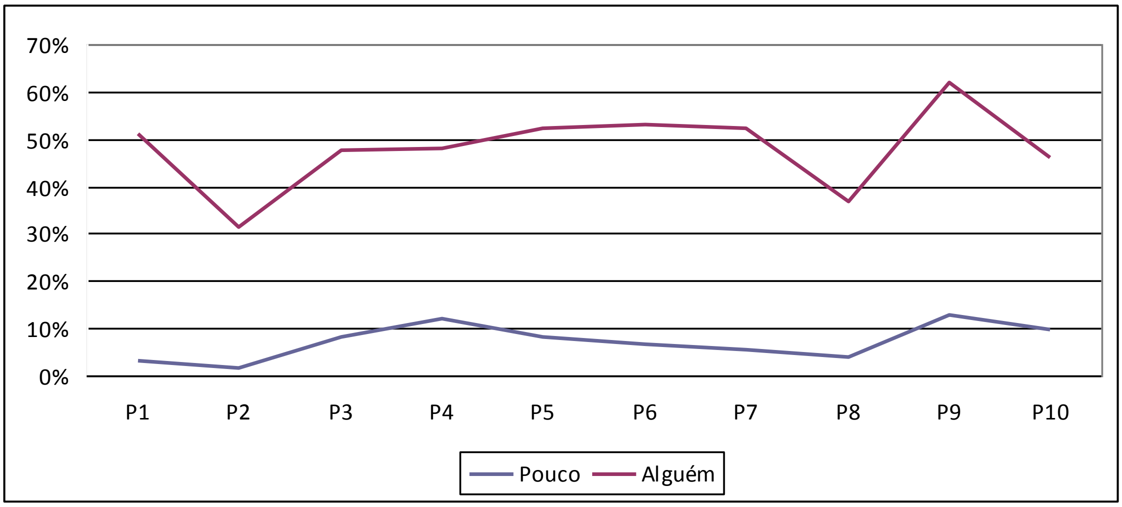


Figura 10. Correlação entre gostar pouco de um problema e procurar ajuda junto de alguém.

Reunindo as respostas relativas a *gostar muito* ou *gostar mais ou menos* de um problema e procurando uma associação com a *procura de ajuda* junto de alguma fonte, obtemos um coeficiente de correlação de – 1, o que evidencia uma forte correlação negativa entre aquelas duas dimensões (Figura 11). Deste modo, *não desgostar* de um problema está fortemente relacionado com resolvê-lo sem a ajuda de ninguém.

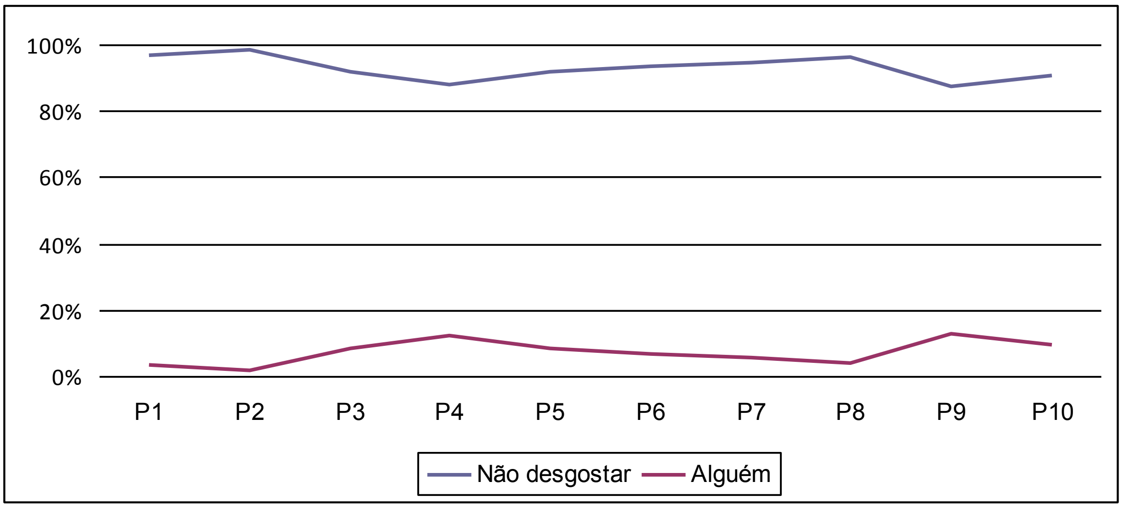


Figura 11. Correlação entre não desgostar de um problema e procurar ajuda junto de alguém.

Discussão e conclusões

No âmbito de uma competição inclusiva de resolução de problemas matemáticos desafiantes (SUB12), procurámos identificar que tendências existem quanto à procura de ajuda por parte dos participantes para resolver os problemas propostos, ao grau de apreciação desses problemas e ao grau de dificuldade sentida nessa resolução. Os dados recolhidos espelham as perceções dos participantes relativamente a estes três aspetos.

A procura de ajuda é um aspeto importante, em particular no seio de uma competição matemática inclusiva; no caso do SUB12, a procura de ajuda é explicitamente encorajada pela organização. Os dados recolhidos indicam uma elevada significância da procura de ajuda por parte dos participantes. A ajuda fornecida por diferentes fontes contribui positivamente para o sucesso ao longo da fase de apuramento do SUB12 e para um sentimento de realização; além disso, influencia positivamente a quantidade e diversidade de alunos que decidem participar naquela competição. Assim, os participantes no SUB12 mostram-se, em geral, à vontade em procurar ajuda para resolver os problemas da fase de apuramento.

Existem duas fontes primordiais de ajuda: os familiares e os professores. Isto é sinal de um envolvimento parental significativo, ao longo da fase de apuramento do SUB12, que já tínhamos detetado, e reforça também a presença desta competição no ambiente escolar (Carreira et al., 2012, 2013). É muito provável que um mesmo professor seja fonte de ajuda para um número elevado de participantes – vários professores revelaram dar apoio aos seus alunos durante a competição e, portanto, esta fonte de ajuda pode abranger muitos participantes (Carreira et al., 2012).

Será importante perceber no futuro como é que os participantes percecionam o ato de procurar ajuda conforme as várias fontes disponíveis, em particular a própria organização do SUB12, uma vez que apenas parece ser reconhecida como uma fonte efetiva de ajuda quando os participantes a solicitam de forma explícita (cf. Carreira et al., 2013). Além disso, os participantes podem não reconhecer no feedback que lhes é dado pelo SUB12 uma ajuda efetiva, talvez porque esse feedback é dado sem ser pedido. Assim, o SUB12 pode ser visto como quem *avalia* a resposta enviada e, portanto, esta ajuda pode ter, aos olhos dos participantes, um carácter avaliativo não regulador. O facto de toda a comunicação estabelecida entre os participantes e o SUB12 ser feita à distância pode também condicionar o reconhecimento do SUB12 como uma fonte de ajuda. A comunicação à distância torna a organização da competição mais *distante* que outras fontes de ajuda, que estarão mais *à mão*!

Em geral, os participantes apreciam positivamente os desafios do SUB12 e relatam sentir dificuldade reduzida ou mediana na sua resolução. Os problemas P3 e P9 são os menos apreciados ao longo da competição, sendo que o P9 é o que coloca mais dificuldades. A complexidade deste problema pode estar associada a um menor grau de apreciação, o que pode sugerir que o grau de desafio deste problema pode ser demasiado elevado, levando a emoções menos positivas. Num estudo anterior, a um menor grau de apreciação de um problema estava associado um conteúdo temático tipicamente complexo na matemática escolar (Carreira et al., 2013), mas tal não é evidente nos dados do presente estudo. O gosto por um problema pode depender do problema em si: a forma como foram percecionados o valor e o interesse dos problemas P3 e P9 pode ter condicionado o apreço nutrido pelos participantes. Ao não serem vistos como interessantes, os participantes podem não os ter encarado como desafios, indo ao encontro das ideias de Schweinle e colaboradores (2013).

Num estudo anterior (Carreira et al., 2013), tanto o grau de apreciação como a procura de ajuda pareceram depender do problema em questão. No entanto, os dados agora recolhidos parecem indicar que tal pode não ser o caso. De facto, enquanto o problema P9 foi aquele que reuniu menor apreciação e maior necessidade de ajuda, o problema P3, apesar de não ter sido particularmente apreciado pelos participantes, teve associada uma procura de ajuda mediana em relação aos restantes desafios. Além disso, os participantes podem confundir o gosto por um problema com a sensação de o conseguir, ou ter conseguido, resolver, o que pode distorcer os dados recolhidos. Uma abordagem qualitativa poderá ajudar a melhor compreender estes aspetos.

É possível identificar correlações positivas fortes entre gostar muito de um problema e achá-lo fácil, bem como gostar pouco de um problema e achá-lo difícil. As correlações encontradas parecem ir ao encontro das sugestões de Turner e Meyer (2004), fornecendo evidências de que os problemas propostos na fase de apuramento do SUB12 são, em geral, problemas matemáticos desafiantes e de desafio moderado, e que o *design* desta competição é consistente com práticas que apoiam o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Além disso, os resultados corroboram a ligação entre a natureza do SUB12, os desafios moderados e os afetos positivos relativos à resolução de problemas (Freiman & Vézina, 2006).

Os desafios considerados fáceis estão negativamente correlacionados, de modo significativo, com a ausência de necessidade de pedir ajuda para os resolver, ao passo que os considerados difíceis se correlacionam significativa e positivamente com a necessidade de obter ajuda. Estes resultados desmontam, de algum modo, que pedir ajuda não diminui o sentimento de autoeficácia dos participantes, mesmo enfrentando problemas vistos como difíceis.

Neste estudo e em relação ao grau de apreciação por um problema, foi considerada a última resposta dada pelos participantes, podendo ter existido mais do que uma, no caso de terem submetido várias resoluções. Por muito regulador e formativo que este feedback seja, carrega consigo um elemento avaliativo pois o participante é informado sobre a correção ou completude da resposta enviada, o que pode alterar a apreciação do problema inicialmente feita. Uma análise mais detalhada da forma como este aspeto evolui ao longo do vaivém de respostas e feedback poderá iluminá-lo melhor.

Referências bibliográficas

Barbeau, E. (2009). Introduction. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 1-9). New York, NY: Springer.

Carreira, S., Amado, N., Tomás-Ferreira, R. A., Silva, J. C., Rodriguez, J., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre. R. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs*. Faro: Universidade do Algarve – Projeto Problem@Web.

Carreira, S., Tomás-Ferreira, R. A., & Amado, N. (2013). Young students solving challenging mathematical problems in an inclusive competition: Enjoyment vis-à-vis help-seeking. Artigo apresentado no CERME8, Antalya, Turquia.

Freiman, V., & Applebaum, M. (2011). Online mathematical competition: Using virtual marathon to challenge promising students and to develop their persistence. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 55–66.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom*. *The 16th ICMI Study* (pp. 97-131). New York, NY: Springer.

Freiman, V., & Véniza, N. (2006). *Challenging virtual mathematical environments: The case of the CAMI Project*. Pre-conference paper of the Study Conference for ICMI Study 16 – Challenging mathematics in and beyond the classroom [Acedido em http://www.amt.edu.au/icmis16pcanfreiman.pdf].

Jones, K., & Simons, H. (1999). *Online mathematics enrichment: An evaluation of the NRICH project*. Southampton: University of Southampton.

Kitsantas, A. & Chow, A. (2007). College students' perceived threat and preference for seeking help in traditional, distributed, and distance learning environments. *Computers and Education, 48*, 383-395.

Ryan, A. M., & Pintrich, P. R. (1997). "Should I ask for help?" The role of motivation and attitudes in adolescents' help seeking in math class. *Journal of Educational Psychology, 89*, 329-341.

Schweinle, A., Turner, J., & Meyer, D. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *Journal of Educational Research*, *99*(5), 271-293.

Schweinle, A., Berg, P. J., & Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychologist*. (Published online: May 2013). DOI:10.1080/01443410.2013.785049.

Turner, J., & Meyer, D. (2004). A classroom perspective on the principle of moderate challenge in mathematics. *Journal of Educational Research*, *97*(6), 311-318.

Walshaw, M., & Brown, T. (2012). Affective productions of mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1-2), 185-199.

Zusho, A., & Barnett, P. (2011). Personal and contextual determinants of ethnically diverse female high school students' patterns of academic help seeking and help avoidance in English and mathematics. *Contemporary Educational Psychology*, *36*(2), 152-164.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Atividades matemáticas na interseção de saberes no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Fátima Regina Jorge[1], *Fátima Paixão*[2], *Helena Martins*[3], *Maria Fernanda Nunes*[4]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, frjorge@ipcb.pt
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Castelo Branco & Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, mfpaixão@ipcb.pt
[3]Jardim de Infância da Santa Casa da Misericórdia de Castelo Branco, hellenmartins04@hotmail.com
[4]Mestre em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico, fernandahnunes@hotmail.com

Resumo. *Um aspeto essencial da educação no 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) prende-se com a implementação de práticas de ensino direcionadas para o desenvolvimento integrado de atividades e áreas do saber, promotoras do desenvolvimento cognitivo dos alunos, do crescimento das capacidades relacionais e da aquisição de cultura científica. Nesse âmbito, cada vez mais se requerem oportunidades de aprendizagem diversificadas, estabelecendo a complementaridade entre os espaços formais, associados à escola, e os espaços não formais, pelo seu potencial de interdisciplinaridade, criatividade e motivação. Tomando como referência dois estudos desenvolvidos com uma turma de 4.º ano do 1.º CEB, apresentamos alguns dos recursos didáticos desenvolvidos para apoiar a exploração didática de um espaço de educação não formal – o Jardim do Paço de Castelo Branco – e implementar práticas de ensino integrando as áreas de estudo do meio e matemática. Apresentam-se evidências das atividades desenvolvidas pelos alunos, analisam-se os resultados obtidos e sustenta-se a pertinência da utilização dos espaços não formais para a promoção de aprendizagens de índole curricular*.

Palavras-chave: Ensino Básico; integração curricular; interação de contextos formais e não formais de educação; Geometria e medida.

Introdução

No atual contexto socioeducativo não podemos considerar a instituição escolar com exclusividade na aquisição de conhecimentos, devendo adequar-se aos desafios que lhe são colocados pela sociedade. Reconhecendo que existe uma multiplicidade de saberes, muitos autores têm vindo a defender o grande valor educativo de atividades desenvolvidas em contextos não formais, como é o caso de Museus, Centros de Ciência e exposições científicas, entre outros, congregadores de estímulos sociais, cognitivos e afetivos. As aprendizagens curriculares podem, deste modo, evidenciar a sua ligação a aspetos concretos do quotidiano dos alunos, de forma contextualizada, estabelecendo a complementaridade entre os espaços formais, tradicionalmente associados ao sistema de ensino e os espaços não formais, pela sua riqueza, diversidade e potencial na criação de oportunidades de desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e de despertar o interesse e a curiosidade dos alunos (Oliva, Matos & Acevedo, 2004; Praia, 2006).

O Jardim do Paço de Castelo Branco, envolvente do Paço Episcopal construído no século XVIII, é um espaço de educação não formal de grande valor educativo que advém do facto de aliar a dimensão estética, geometricamente equilibrada do seu traçado, a uma dimensão iconográfica bem percetível na estatuária de granito, disposta entre ruas de buxo, simultaneamente labirínticas e ordenadas, mas que tem subjacente uma organização em temáticas e percursos distintos.

Neste contexto, desenvolveram-se dois projetos inseridos na problemática da inter-relação entre as aprendizagens realizadas em espaços de educação não formal e as realizadas em sala de aula. As investigações, inseridas na prática de ensino supervisionada no 1.º Ciclo do Ensino Básico, contemplaram a construção de recursos didáticos em que se tomaram como ponto de partida a organização e os elementos iconográficos do Jardim e se enfatizaram experiências de aprendizagem centradas no desenvolvimento do sentido espacial, transversal às diferentes áreas curriculares.

Enquadramento

A organização curricular do 1.º CEB preconiza a articulação e contextualização dos saberes e a integração das várias áreas do currículo. Essa integração remete para uma abordagem interdisciplinar em que são esbatidas as fronteiras das disciplinas, identificados temas comuns a diferentes áreas curriculares e enfatizado o desenvolvimento de conceitos e competências transversais (Drake & Burns, 2004; Martins, Paixão & Vieira, 2004). Lederman e Neiss (citados em Eichinger, 2009, pp. 4-5) sublinham que tal abordagem deve salientar as interações entre as disciplinas, mas, ao mesmo tempo, ter em conta os seus traços diferenciadores, pois só deste modo, o aluno pode desenvolver uma visão adequada da natureza das diferentes áreas do saber.

A preocupação da integração da matemática com outras áreas curriculares está bem presente em documentos de orientação curricular, portugueses e internacionais. Por exemplo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, pode ler-se "o estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar" (ME, 2007, p. 6).

Do exposto, sobressai que no 1.º CEB se recomendam práticas de ensino da matemática, contextualizadas e direcionadas para o desenvolvimento integrado de atividades e áreas do saber, indispensáveis ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Tais práticas requerem o uso de tarefas que atendam ao conhecimento e às capacidades que se pretendem desenvolver, mas a que o aluno consiga atribuir significado (NCTM, 2007; ME, 2007; Planas & Alsina, 2009). Em paralelo, devem ser considerados o estabelecimento de conexões criativas e pessoais com os conteúdos, a promoção de uma aprendizagem com compreensão e da motivação para a aprendizagem (Eichinger, 2009). Assim, cabe aos professores promover ligações da matemática com outras áreas do currículo e o mundo real, seja destacando as muitas situações em que os alunos encontram matemática dentro e fora da escola, seja planeando aulas em que as competências e os conceitos surgem interligados.

De entre os vários temas do currículo de matemática, a Geometria surge como um campo com muitas potencialidades para se fazerem conexões com a realidade física e com outras áreas curriculares. "As ideias geométricas revelam-se muito úteis (…) em situações do dia-a-dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível, com outras áreas" (NCTM, 2007, p. 44).

Um aspeto essencial do ensino da Geometria é o desenvolvimento do sentido espacial. De acordo com vários autores, o sentido espacial adquire-se gradualmente a partir das interações da criança com os objetos e o meio físico em que se movimenta, nomeadamente através do envolvimento ativo em atividades espaciais concretas e envolve três componentes fundamentais, a visualização espacial, as figuras geométricas e a orientação espacial (Breda *et al*., 2011).

A visualização espacial, que tem a ver com a forma como se perceciona e interpreta o mundo físico, implica "observação, manipulação e transformação de objectos e suas representações, e a interpretação de relações entre os objectos e entre estes e as suas representações" (ME, 2007, p. 20) e constitui um aspeto fundamental do raciocínio geométrico (NCTM, 2007). Para Matos e Gordo (1993), a visualização espacial envolve sete capacidades, entre as quais se incluem a:

- Coordenação visual motora: capacidade de coordenação da visão com os movimentos do corpo.
- Memória visual: capacidade de recordar objetos que não estão visíveis.

- Constância percetual: capacidade de reconhecer figuras geométricas em diferentes posições, tamanhos e contextos.
- Perceção da posição no espaço: capacidade de ver ou imaginar dois objetos em relação consigo próprios ou em relação com o observador.
- Perceção das relações espaciais: capacidade de ver ou imaginar dois objetos em relação consigo próprios ou em relação com o observador.
- Discriminação visual: capacidade de identificar semelhanças e diferenças entre figuras.

A orientação espacial está relacionada com a posição relativa das formas e dos objetos bem como a relatividade dos seus tamanhos (Breda *et al*., 2011) e implica a capacidade para detetar combinações de objetos segundo um padrão e a capacidade de manter precisas as perceções, face à mudança de orientação (Bishop, 1993, citado em Gordo, 1994). Em termos do currículo de matemática, este tópico envolve conceitos e procedimentos relacionados com a posição e localização, pontos de referência e itinerários, mapas, plantas e maquetas.

O programa de Matemática recomenda que "a abordagem de aspectos históricos, artísticos e culturais relacionados com a Geometria favorece a exploração e compreensão dos tópicos abordados" (ME, 2007, p. 20). Nesse âmbito, o recurso a espaços de educação não formal pode viabilizar uma apresentação mais realista e interativa dos assuntos, nomeadamente quando as atividades aí desenvolvidas complementem e estejam articuladas com o trabalho desenvolvido em sala de aula (Martins, 2011, Nunes, 2011; Jorge & Paixão, 2012).

Assumindo que a formação de crianças bem incluídas na cultura do seu tempo passa por inseri-las no seu quotidiano e nos seus contextos próximos, ultrapassando a tradicional dicotomia entre escola e realidade, os espaços urbanos, pela sua acessibilidade e riqueza em termos de património científico, natural e cultural, apresentam um elevado potencial educativo, quase sempre inexplorado (Paixão, 2006, Praia, 2006). Assim, a escola pode e deve tirar proveito de tais espaços de educação não formal, no sentido da promoção de aprendizagens dos conteúdos curriculares, da valorização da cultura regional, da aquisição de valores de cidadania e de pertença a uma comunidade (Paixão, 2006).

Problemática e objetivos

No reconhecimento da importância de promover um ensino e aprendizagem de cariz interdisciplinar e de integrar as áreas de matemática e de estudo do meio (físico e social), apresentamos dois estudos convergentes centrados na problemática da interação entre as aprendizagens realizadas em espaços de educação não formal e as realizadas em sala de aula (Martins, 2011; Nunes, 2011). Como já referido, a opção do espaço de educação não formal recaiu no Jardim do Paço Episcopal de Castelo Branco.

A questão que desencadeou e orientou o desenvolvimento dos dois estudos enunciou-se da seguinte forma: Em que medida a realização de atividades no Jardim do Paço de Castelo Branco estimula e se repercute nas aprendizagens dos alunos do 4.º ano do 1.º CEB, nas áreas de Estudo do Meio (Físico e Social) e de Matemática?

Para responder a esta questão definiram-se, entre outros, os seguintes objetivos:

(i) Construir e validar recursos didáticos para a aprendizagem não formal no Jardim do Paço, que incluam o desenvolvimento de atividades promotoras de aquisição de conhecimento nas áreas de Estudo do Meio e Matemática.

(ii) Evidenciar o contributo das atividades realizadas no Jardim do Paço para as aprendizagens de Estudo do Meio e Matemática, dos alunos de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Foram valorizadas as dimensões dessas aprendizagens relacionadas com o desenvolvimento de processos de pensamento e ação, realizando atividades de natureza diversificada, relevando a aplicação de conhecimentos curriculares em situações da vida real.

Metodologia

Tendo em conta a problemática investigativa, as questões e os objetivos do estudo, visando a compreensão e exploração da complementaridade de dois espaços de aprendizagem, formal e não formal, o desenvolvimento da visita de estudo ao Jardim do Paço teve subjacente uma intervenção no contexto da prática de ensino-aprendizagem.

Na medida em que estava em causa a compreensão e exploração de situações que se desenrolam na ação educativa e se pretendia a sua descrição e interpretação optou-se por uma metodologia qualitativa, de cariz interpretativo. De facto, abordagens interpretativas permitem um maior entendimento crítico das situações e dos fenómenos educativos (Santomé,1988 in Goetz e LeCompte, 1998; Pérez Serrano, 2004).

A recolha de dados privilegiou diversos procedimentos, onde se incluem a observação participante, as notas de campo, os registos escritos dos alunos (textos e desenhos), o registo fotográfico e uma entrevista semiestruturada à Professora Titular. Para a codificação e posterior análise dos dados adotou-se a técnica de categorização analítica (Bogdan & Biklen, 1994), tendo sido consideradas duas categorias: aprendizagem (desenvolvimento de competências científicas - observar, classificar, descrever, prever, medir, efetuar registos, recolher e organizar material; desenvolvimento de competências transversais-autonomia, responsabilidade e trabalho com os pares); e perspetivas dos alunos relativamente à visita ao Jardim do Paço. No que concerne à validade, recorreu-se à triangulação metodológica que requer uma combinação de várias práticas, materiais empíricos, perspetivas e observadores; neste caso, realizou-se entre diferentes métodos de recolha de dados sobre o mesmo objeto de estudo (Pérez Serrano, 2004).

O estudo envolveu, de modo ativo e direto, uma turma de 24 alunos de 4.º ano do 1.º CEB e a sua Professora Titular, em duas visitas de estudo ao Jardim do Paço, correspondentes aos dois estudos convergentes e complementares que se integram num projeto de investigação mais amplo.

Desenvolvimento da atividade

O Jardim do Paço de Castelo Branco é visitado por alunos de muitas escolas, de vários níveis de ensino, que abordam, essencialmente, uma perspetiva histórica e não disponibiliza recursos didáticos ou qualquer outra documentação, existindo apenas um folheto informativo, direcionado para o turismo. Como exceção da perspetiva turística da literatura sobre o Jardim, salientamos o "Roteiro de uma visita de estudo" que propõe uma visita explorando uma visão atenta dos pormenores (lagos, fontes, estátuas e vegetação), permitindo perceber a simbologia do Jardim (Salvado, 1999). Considerando que o planeamento adequado de uma visita de estudo é condição fundamental para o seu sucesso, estruturámos as diversas etapas, de modo a proporcionar aos alunos atividades lúdicas sendo, simultaneamente, fonte de aprendizagem.

No dia anterior à visita, fizemos, em sala de aula, a par do enquadramento histórico-social do espaço, uma abordagem prévia, salientando os cuidados a ter no Jardim e a importância da coesão e autonomia dos grupos, com vista à consecução com êxito, das atividades a realizar.

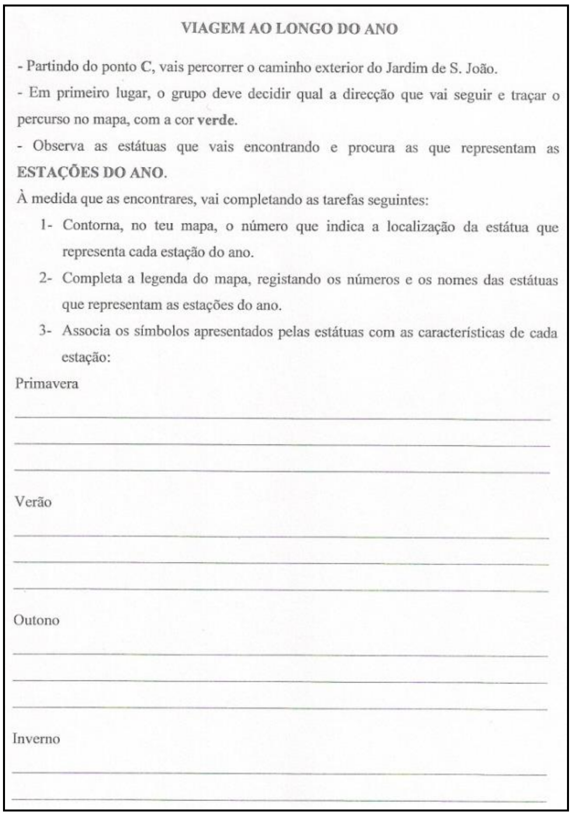
A visita de estudo envolveu o desenvolvimento de um conjunto de tarefas no Jardim, tendo-se definido os seguintes objetivos gerais:

- Proporcionar experiências de aprendizagens diversificadas, em contexto não formal;
- Promover o trabalho colaborativo;
- Fomentar a curiosidade científica;
- Valorizar e compreender a utilidade das áreas de Estudo do Meio e Matemática na vida quotidiana;
- Apreciar e valorizar o património histórico e cultural.

Para a realização de cada atividade os alunos dispunham de um Guião com instruções detalhadas dos procedimentos a seguir e onde deviam fazer os registos e reflexões acerca das conclusões obtidas e a Planta do Jardim, onde deviam assinalar os diversos percursos realizados.

Das várias tarefas propostas, salientamos duas, "Viagem ao longo do ano" e "Nem todos somos iguais", que englobaram, no seu conjunto, aspetos interdisciplinares, em particular, das áreas de Estudo do Meio e Matemática. Em ambas, esteve presente a leitura e interpretação da Planta do Jardim, a orientação no espaço no espaço físico, o registo de itinerários, a localização de objetos e locais e a especificação das suas posições na Planta.

Na atividade "Viagem ao longo do ano" (figura 1), a leitura da Planta do Jardim tinha um papel essencial para o desenvolvimento de referenciais de orientação espacial. O traçado do itinerário a seguir, segundo as instruções do Guião, possibilitava aos alunos fazerem, mais tarde, a explicação do local onde tinham iniciado a atividade e qual a direção tomada pelo grupo. Mesmo sendo um espaço restrito, fomenta-se, deste modo, a ligação ao exterior da escola, estimula-se a autonomia dos alunos nas suas deslocações e estabelece-se a ligação da Matemática, mais concretamente de tópicos de orientação espacial, com o Meio Social.



VIAGEM AO LONGO DO ANO

- Partindo do ponto C, vais percorrer o caminho exterior do Jardim de S. João.
- Em primeiro lugar, o grupo deve decidir qual a direcção que vai seguir e traçar o percurso no mapa, com a cor **verde**.
- Observa as estátuas que vais encontrando e procura as que representam as **ESTAÇÕES DO ANO**.

À medida que as encontrares, vai completando as tarefas seguintes:

1- Contorna, no teu mapa, o número que indica a localização da estátua que representa cada estação do ano.
2- Completa a legenda do mapa, registando os números e os nomes das estátuas que representam as estações do ano.
3- Associa os símbolos apresentados pelas estátuas com as características de cada estação:

Primavera

Verão

Outono

Inverno

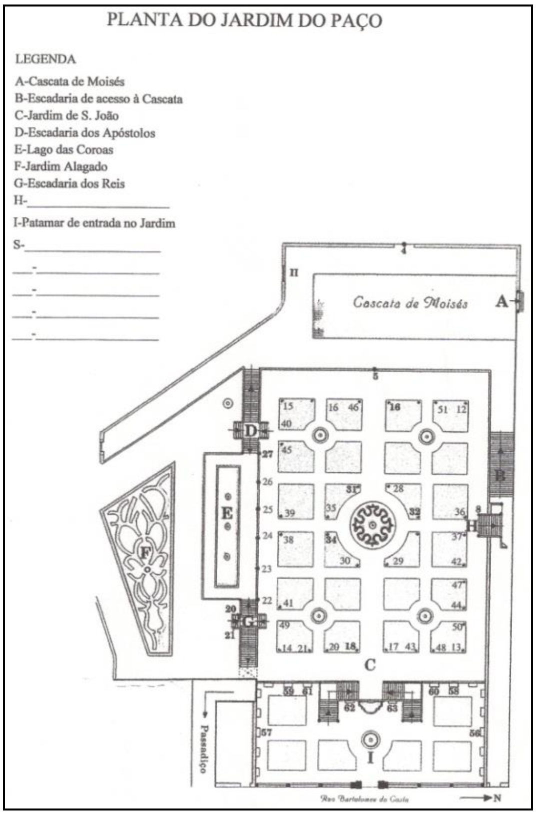


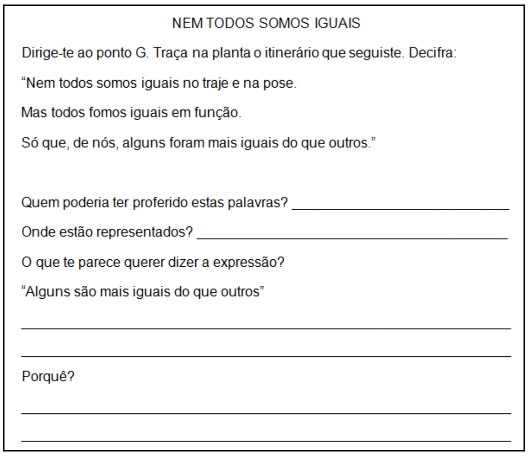
Figura 1. Guião da atividade "Viagem ao longo do ano".

Figura 2. Planta do Jardim do Paço.

No percurso pelo caminho exterior do Jardim, os alunos deveriam encontrar cada uma das estátuas, assinalar a sua localização na planta e completar a legenda. Tendo em conta que as estações do ano surgem representadas por figuras humanas (figura 3), propunha-se aos alunos a sua descrição, associando os elementos simbólicos às caraterísticas de cada uma. A apreciação estética das estátuas e a observação cuidada dos pormenores, num espaço muito rico em termos de património histórico e cultural pretendia estimular nos alunos a valorização da cultura local, o desenvolvimento de valores de cidadania e o interesse pela cultura regional, em estreita ligação com os conteúdos curriculares.

Figura 3. Representações da Primavera, Verão, Outono e Inverno no Jardim do Paço.

Para a realização da atividade “Nem todos somos iguais” os alunos deviam dirigir-se ao local indicado no Guião, que se referia à Escadaria dos Reis, traçando na planta o itinerário seguido. Em seguida, os grupos eram confrontados com um enigma, que devia ser decifrado e que remetia para a diferença de tamanho entre as estátuas. Os alunos deviam estabelecer a ligação entre a altura das estátuas e a sua posição relativa com o papel que os reis representados tiveram na História de Portugal (figura 4).


NEM TODOS SOMOS IGUAIS

Dirige-te ao ponto G. Traça na planta o itinerário que seguiste. Decifra:

“Nem todos somos iguais no traje e na pose.

Mas todos fomos iguais em função.

Só que, de nós, alguns foram mais iguais do que outros.”

Quem poderia ter proferido estas palavras? ______________________

Onde estão representados? ______________________________

O que te parece querer dizer a expressão?

“Alguns são mais iguais do que outros”

____

____

Porquê?

____

____

Figura 4. Guião da atividade “Nem todos somos iguais”.

Com efeito, neste Jardim, as estátuas do Cardeal D. Henrique e dos Reis Espanhóis apresentam uma altura bastante menor, além da sua colocação ser estrategicamente relegada para um plano secundário (figura 5). Pretendia-se que os alunos conectassem a condição - altura das estátuas - e a sua posição relativa no conjunto estatuário temático. A justificação pedida seria respondida de acordo com os conhecimentos adquiridos na área curricular de Estudo do Meio. A atividade incluía uma Sopa de Letras que pressupunha o recurso a conhecimentos adquiridos, designadamente a identificação do nome de oito dos reis de Portugal.


Figura 5. Pormenores da escadaria dos reis de Portugal no Jardim do Paço

Complementando a visita ao Jardim do Paço, e já em sala de aula, os alunos também registaram, em desenho e em texto individual, as suas observações e comentários acerca do desenvolvimento da atividade (aprendizagens, dificuldades, colaboração no trabalho de grupo, apreciação global, …) tendo em conta o espaço onde decorreram, distinto do contexto de sala de aula.

Análise e discussão dos resultados

A observação do desempenho dos alunos na realização das tarefas propostas e a análise dos registos acerca das suas perspetivas sobre a visita ao Jardim do Paço, sugerem-nos que a atividade e os recursos didáticos concebidos/construídos contribuíram para desenvolver/proporcionar uma boa parte das aprendizagens expectáveis. A observação e a interação com o meio envolvente revelaram as possibilidades pedagógicas dos espaços não formais, neste caso, o Jardim do Paço, estimulando o processo de formação pessoal e social dos alunos.

De um modo global, os alunos referem nos textos o facto de terem feito aprendizagens de maneira diferente, mas muito interessantes:

> -*Era uma aula fora da sala de aula, mas ao mesmo tempo estivemos a aprender (...).*
>
> -*Foi uma maneira mais interessante de aprender*.

Aliando a componente afetiva à apreciação estética do Jardim, os alunos demonstraram interesse em visitar o espaço mais vezes, revelando envolvimento e motivação para novas aprendizagens.

No que se refere à descrição das estátuas que representam as estações do ano, os alunos associaram os elementos simbólicos com as caraterísticas de cada época, como se pode observar nos seus registos:

> -*A Primavera tem um ramo de flores na mão, uma coroa de flores e é muito alegre*.
>
> -*O Verão, como é muito quente, tem as pernas descobertas e cabelo curto*.
>
> -*O Outono tem uma taça de frutos na mão, frutos secos…*
>
> -*O Inverno (...) tem um manto, está ao pé do lume.*

Na segunda atividade, registaram-se algumas dificuldades na decifração do enigma. Em particular, a descodificação do sentido da expressão “Alguns são mais iguais que outros”, suscitou em todos os alunos muitas hesitações.

Num dos grupos, um aluno sugeriu que isso se devia a que uns tinham espadas e outros não. Esta ideia de associar o enigma ao vestuário e adereços apresentados pelas estátuas foi, após uma observação mais atenta das estátuas dos diferentes reis, refutada pelo grupo. Após algumas discussões e indecisões, em que se denotou que os alunos foram capazes de considerar os pontos de vista uns dos outros e de colaborar ativamente para encontrar uma explicação, acabaram por notar a diferença entre a altura das estátuas. Um dos alunos registou o seguinte: “Pensei, porque é que os Filipes I, II e III eram pequenos e o Conde D. Henrique também porque [também] é pequeno”. Esta resposta revela a observação atenta das estátuas, a perceção que a diferença na altura estava associada a determinadas figuras históricas, e, o mais importante, refletir sobre a razão dessa diferença. A conclusão a que chega o seu grupo está reproduzida na figura 6.

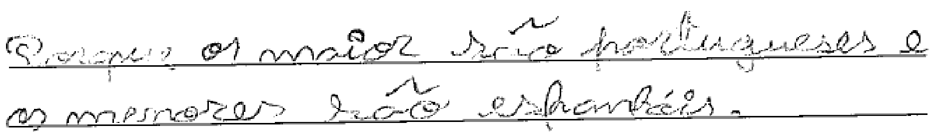

Porque os maior são portugueses e os menores são espanhóis.

Figura 6. Explicação sobre a diferença de altura das estátuas dos reis

Outro grupo observou que os reis portugueses estão colocados à mesma distância uns dos outros, todos no mesmo patamar e com a mesma orientação. Já os reis espanhóis, para além de serem bem mais pequenos, estão colocados noutro patamar, a menor distância entre si, ainda estão de costas voltadas para os reis portugueses. Por exemplo, um aluno escreveu: “(…) os reis estarem todos à mesma distância uns dos outros menos os espanhóis, que estão mais pequenos e encostados e virados para o outro lado”.

Dos dados recolhidos, é de destacar que os alunos foram sensíveis ao caráter interdisciplinar das atividades:

> *-Trabalhámos três matérias, Língua Portuguesa ao lermos o que fazermos, Estudo do Meio dos reis e da História, e de Matemática (...).*
>
> *- No Jardim do Paço há muita matemática e arte.*
>
> *- Em vez de estarmos a aprender uma coisa de cada vez, juntámos tudo.*
>
> *- Eu descobri que no Jardim do Paço há matemática.*
>
> *- Eu antes de chegar ao Jardim do Paço julgava que era um pouco esquisito fazer experiências lá (...).*

Também a componente colaborativa exigida pelas atividades foi igualmente reconhecida e valorizada pelos alunos:

> *- Aprendemos, aprendemos a trabalhar em equipa.*

- Eu acho que as visitas de estudo são muito importantes, para nós aprendermos a trabalhar em equipa.

- Aprendemos a trabalhar em grupo e porque depois quando quisermos trabalhar em grupo já sabemos trabalhar melhor.

Relativamente ao ambiente de aprendizagem, ou seja, inter-relação entre contextos formal e não formal, os alunos fazem igualmente uma apreciação muito positiva:

- Foi uma maneira diferente de aprender, sem estar sentado na cadeira da sala de aula e acho que aprendemos mais.

- O Jardim do Paço tem tudo para animar uma pessoa, principalmente uma criança, tem água, plantas, reis, diversão e muita matemática.

- Eu acho que é melhor irmos mesmo aos sítios do que estar a ver fotografias do livro.

- Eu antes de irmos, quando faltavam 2 dias estava a pensar como seria esta visita, porque já lá tinha ido cinco vezes, mas nunca lá tinha ido fazer matemática.

Com vista à avaliação das aprendizagens propiciadas pelas atividades, identificou-se para além de conhecimentos conceptuais a desenvolver com a atividade, um conjunto de capacidades científicas e transversais, cuja síntese se apresenta na Tabela 1.

Tabela 1. Síntese das aprendizagens propiciadas pelas atividades

		Capacidades										Conhecimentos		Componente atitudinal e afetiva					
		Interpretar informação	Observar e descrever	Inferir	Classificar	Registar	Recolher e organizar material	Representar	Resolver problemas	Simular a situação	Mobilizar conhecimentos	Termos e conceitos relacionados com o conteúdo de Estudo do Meio e Matemática	Conhecimentos transversais/ interdisciplinares	Autonomia	Trabalho colaborativo	Responsabilidade	Envolvimento	Apreciação	Curiosidade
Atividades	Viagem ao Longo do Ano	X	X	X		X						X	X	X	X	X	X	X	X
	Nem todos somos iguais	X	X	X		X					X	X	X	X	X	X	X	X	X

Do exposto, sobressai que as aprendizagens favorecidas pelas atividades e as perspetivas dos alunos sobre as atividades desenvolvidas em contexto não formal são de molde a confirmar a pertinência do recurso a este espaço, para a promoção de aprendizagens integrando diferentes áreas curriculares e o desenvolvimento de capacidades e atitudes, inferência também sustentada pela opinião da Professora Titular:

Estar sempre na sala de aula, sempre a fazer o mesmo tipo de trabalhos, os alunos não aprendem mais por isso. O facto de saírem, viverem *experiências diferentes, ao mesmo tempo enriquecem mais as aprendizagens e motivam-se mais, ...*

Conclusões e implicações

Tendo em conta o interesse e a motivação dos alunos durante a visita de estudo, resolvendo os desafios propostos com manifesto empenho, de modo autónomo e havendo colaboração entre os elementos do grupo consideramos que a aprendizagem proporcionada pelos espaços não formais se assume como uma componente fundamental no desenvolvimento do currículo.

Da análise efetuada, pode inferir-se que as diversas atividades complementaram o trabalho realizado em aula de aula e podem continuar a servir de mote para o aprofundamento de alguns aspetos relacionados com esta temática. Por parte dos alunos verificou-se grande interesse, tentando corresponder aos desafios colocados, estando embora num espaço aberto, circulando de forma autónoma e onde conseguiram experimentar e aprender, nomeadamente, aplicando conhecimentos já adquiridos.

Num espaço social que apresenta elementos simbólicos, com grande profusão de formas e elementos decorativos, os alunos fizeram aprendizagens relacionadas com a aplicação de conceitos matemáticos, estimulando a compreensão do papel da matemática na sociedade, ao longo dos tempos.

Com base nos recursos do próprio Jardim, a natureza das atividades propostas contribuiu para uma maior motivação da turma, estimulando a promoção de aprendizagens matemáticas, desenvolvendo atitudes positivas face à disciplina e salientando o grande valor didático deste espaço.

A análise das atividades e os dados recolhidos evidenciam o reconhecimento, pelos participantes, do estímulo proporcionado pelo espaço social onde se desenvolveram e o interesse em continuar a participar em novas experiências, voltando ao Jardim para fazer outras aprendizagens.

Posteriormente, em sala de aula, será fundamental que a exploração das visitas de estudo tenha continuidade, para dar sentido às observações e aos conceitos dos alunos, articulando as aprendizagens realizadas nos espaços não formais com as aprendizagens curriculares.

Das opiniões expressas pelos alunos e pela Professora Titular cremos que o Jardim do Paço foi determinante para a promoção de aprendizagens contextualizadas, de cariz interdisciplinar, aliadas à apreciação estética do espaço e que o estudo realizado permite evidenciar.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L. Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Drake, S. M. & Burns, R. C. (2004). *Meeting Standards Through Integrated Curriculum*. Danvers: ASCD.

Eichinger, John (2009). *Activities linking science with math, K-4*. Arlington (VA): NSTA Press.

Gordo, M. F. (1993). *A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática*. *Um estudo no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado. Acedido em Outubro, 20, 20132, em http://run.unl.pt/bitstream/10362/278/1/gordo_1993.pdf.

Jorge, F. R. & Paixão, M. F. (2012). Horto de Amato Lusitano – um espaço de educação não formal na formação em ciências de professores para o ensino básico. In J. M. Domínguez Castiñeiras (Ed.), *XXV Encuentro de Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp. 675-681). Santiago de Compostela: USC.

Martins, I. P.; Paixão F. e Vieira, R. (Org.). (2004). *Perspectivas Ciência - Tecnologia - Sociedade na Inovação da Educação em Ciência*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Martins, M. H. (2011). *Relatório de Estágio*. *À descoberta das ciências no Jardim do Paço: Interacção dos contextos formais e não formais para a aprendizagem das ciências no 1.º CEB*. Castelo Branco: IPCB. Escola Superior de Educação.

Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática*, 26.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.

Nunes, M. F. (2011). *Relatório de Estágio: Experiências Matemáticas no Jardim do Paço*. Castelo Branco: IPCB. Escola Superior de Educação.

Oliva, J. M., Matos, J. & Acevedo, J. A. (2004). Las exposiciones científicas escolares y su contribución al desarrollo profesional docente de los profesores participantes. In I. P. Martins, F. Paixão & R. Vieira (Org.), *Perspetivas Ciência Tecnologia e Sociedade na Inovação da Educação em Ciência* (pp.189-193). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Paixão, M. F. (2006). (Coord.). *Educação em Ciência Cultura e Cidadania*. *Encontros em Castelo Branco*. Coimbra: Alma Azul.

Pérez Serrano, G. (2004). *Investigación cualitativa*. *Retos e interrogantes - Métodos*. Madrid: Editorial La Muralla.

Planas, N. & Alsina, A. (2009). Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas. In N. Planas & A. Alsina (Coords), *Educación matemática y buenas prácticas*. *Infantil, primaria, secundaria y educación superior* (pp. 9-30). Barcelona: Gráo.

Praia, J. (2006). A Importância da Cultura Científica nas Sociedades Contemporâneas e formas de a Promover. *Educare-Educere*, 18(1), 9-30.

Salvado, M. A. (1999). *O Jardim do Paço de Castelo Branco – roteiro de uma visita de estudo*. Coimbra: A Mar Arte.

Santomé, J. T. (1988). La investigación etnográfica y la reconstrucción crítica en educación. In J. P. Goetz & M. D. LeCompte, *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa* (pp.11-22). Madrid: Ediciones Morata.

POSTERS

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Experiências matemáticas na educação pré-escolar: a importância da articulação

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo. *Nesta comunicação pretende-se explorar as potencialidades de algumas tarefas que promovem a articulação entre diferentes áreas/domínios do currículo da educação pré-escolar, com especial enfoque no domínio da Matemática. O principal objetivo deste estudo passa por explorar o potencial desta abordagem, procurando compreender que matemática pode ser aprendida por crianças desta etapa educativa, através da operacionalização de diferentes tipos de conexões*.

Palavras-chave: Matemática; Educação Pré-escolar; Conexões.

Introdução

Muito do que se passa no mundo que nos rodeia pode ser compreendido através de uma lente matemática. A educação pré-escolar pode ser um ponto de partida para que as crianças se interessem por explorar fenómenos que as conduzam à contagem, à seriação, à medição, à exploração de formas, à descoberta de padrões, à estimativa, entre outras experiências (Clements, 2001). Frequentemente, na formação de professores, em particular na formação inicial direcionada para a educação pré-escolar, há algumas questões que usualmente surgem: (1) Como e quando deve a matemática ser explorada nesta etapa educativa?; (2) Qual é o impacto da integração curricular na aprendizagem da matemática no pré-escolar?

A Matemática na educação pré-escolar

As bases necessárias ao desenvolvimento matemático das crianças estabelece-se nos primeiros anos, através da interação com o meio envolvente e das experiências do dia a dia (DEB, 1997; NCTM, 2000). As orientações curriculares para a educação pré-escolar sugerem que as crianças construam gradualmente ideias matemáticas, tendo como ponto de partida situações do seu quotidiano. O professor deve avaliar o conhecimento informal que possuem para proporcionar experiências diversificadas que desenvolvam o seu pensamento matemático. A resolução de problemas é encarada como a metodologia privilegiada nesta etapa educativa, possibilitando que as crianças descubram as suas próprias soluções e as discutam.

As experiências matemáticas proporcionadas devem desafiar as crianças a explorar ideias relacionadas com padrões, formas, números, medida e espaço, com cada vez maior sofisticação. Tão importantes como os conteúdos matemáticos são os processos como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação, as conexões e as representações (Clements, 2001). Em geral, os professores devem focar-se em tarefas matemáticas desafiantes, que suscitem a curiosidade das crianças e apelem ao raciocínio e à comunicação matemáticos, na criação de oportunidades para as crianças trabalharem colaborativamente e em encorajá-las a falar e *escrever* sobre a matemática aprendida (Van de Walle, 2004).

A importância das conexões

Os conteúdos patentes no currículo do pré-escolar não devem ser concebidos separadamente. Considerando o caso da Matemática, surge nos primeiros anos através de tarefas que reflitam contextos significativos e a conexão entre conteúdos. Uma abordagem efetiva da matemática não deve limitar-se a um determinado período do dia, deve procurar-se explorá-la ao longo do dia, atravessando o currículo. É fundamental integrar a matemática nas atividades destinadas a outras áreas, como a literatura, linguagem, ciências, conhecimento do mundo, artes, música, entre outras (DEB, 1997; NCTM, 2000). Considera-se assim relevante ajudar as crianças a relacionar a matemática com outros domínios do saber, uma vez que desenvolve conhecimentos específicos de cada um e permite o reconhecimento da aplicabilidade da matemática.

Metodologia

Dada a natureza do estudo, e de forma a responder às questões enunciadas, adotou-se uma metodologia qualitativa (Erickson, 1986). O estudo envolveu vinte e duas crianças de 5-6 anos, de uma turma do pré-escolar, associada ao contexto da formação inicial de professores. Para compreender o potencial da integração curricular nas primeiras experiências matemáticas, foram exploradas várias tarefas, em pequeno e grande grupo, que emergiram dos interesses das crianças ou foram intencionalmente planeadas com a finalidade de realçar conexões entre a matemática e outras áreas (ver exemplos em anexo).

Discussão

Foi evidente que tarefas que contemplam a integração curricular constituem experiências de aprendizagem mais efetivas e naturais. O conhecimento é percebido como um todo e os conceitos específicos de cada área, envolvidos nas explorações efetuadas, são interligados de modo a produzir uma sequência de referências comuns. Focando algumas das tarefas abordadas, pode afirmar-se que: (a) há várias conexões que emergem entre a expressão plástica e a matemática, principalmente porque existe uma componente visual que facilita a exploração de formas, padrões, cores, transformações geométricas; (b) atividades diárias (e.g. receitas, lanche, rotinas) constituem contextos privilegiados para desenvolver competências de medição e aspetos relacionados com o sentido de número; (c) as ciências naturais focam o ambiente e a compreensão de fenómenos, o que conduz à previsão, observação, comparação, classificação, procura de padrões; (d) a literatura infantil também despoleta experiências matemáticas uma vez que muitos livros têm elementos que se relacionam com outras áreas, como a matemática.

Referências bibliográficas

Clements, D. (2001). Mathematics in the Preschool. *Teaching Children Mathematics, 7*, 270-275.

DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (5th Edition). Boston: Pearson Education Inc.

Anexo

Tarefa&1&

!

Com! a! aproximação! do! dia! da! Mãe,! o! grupo! decidiu! construir! o! seu! próprio! papel! de! embrulho,! que! iria! ser! utilizado! para! embrulhar!o!presente!a!oferecer!à!mãe.!

!
!
!
!
!
!
!
!

Tarefa&2&

!

Após! um! diálogo! em! grande! grupo,! as! crianças! propuseram! fazer! na! sala! queques! de! chocolate.! Discutiram! quais! os! ingredientes! a! utilizar,! os! utensílios! necessários! e! os! procedimentos! a! seguir.!!

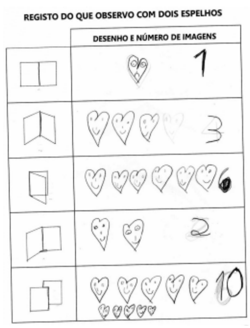
!
!
!
!
!
!
!

Tarefa&3&

!

!A!partir!da!leitura!de!uma!história!centrada! no!conceito!de!reflexão,!emergiu!a!questão:! O!que!podemos!observar!num!espelho?! Em!pequeno!grupo!manipularam!um!e!dois! espelhos,!registando!as!suas!conclusões.!

!



Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: explicitando o intertexto*

Kátia Maria de Medeiros[1], *Misleide Silva Santiago*[2]
[1]Universidade Estadual da Paraíba, katiamedeirosuepb@gmail.com
[2]Universidade Estadual da Paraíba, misleide.santiago@hotmail.com

Resumo. *O objetivo geral desta pesquisa foi identificar como o professor e os alunos de uma turma do 1.º Ano do Ensino Médio, que se encontravam na faixa etária dos 14 aos 16 anos, de uma escola pública estadual de Campina Grande, na Paraíba, Brasil, concebem a formulação e a resolução de problemas matemáticos e compreender como estes alunos formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, um estudo de caso, cuja unidade de análise é a turma. Os dados foram recolhidos a partir de entrevistas semi-estruturadas com o professor de Matemática e com os alunos, da observação, da formulação e resolução de problemas matemáticos por parte dos alunos e de um questionário por eles respondido. Neste poster apresentaremos excertos da entrevista do professor e dos alunos e de formulações e resoluções de problemas matemáticos dos alunos. Os resultados apontam que o professor concebe a formulação e a resolução de problemas matemáticos como uma metodologia de ensino eficaz. Os alunos concebem a formulação de problemas matemáticos como importante e difícil e a resolução de problemas como fácil, difícil e importante. Além disso, os problemas formulados e resolvidos foram fechados, na maioria das sessões. Um pequeno número de alunos conseguiu explicitar plenamente o intertexto. Tais resultados sugerem a necessidade da reflexão sobre as atividades com estas tarefas e da maior frequência na utilização da formulação e resolução de problemas nas aulas de Matemática.*

Palavras-chave Formulação e resolução de problemas matemáticos; Concepções; Intertextualidade; Ensino Médio; Sala de aula.

Referencial teórico

Ponte (1992) considera que as concepções constituem uma forma de encarar o mundo ou de pensar, funcionam como um obstáculo a novas realidades ou a alguns problemas, atuando "como uma espécie de filtro" (p. 1). A formulação e a resolução de problemas matemáticos na sala de aula, por sua vez, são tarefas com um potencial didático

* Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, no âmbito do Projeto Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade, do Programa Observatório da Educação (Edital 049/2012/CAPES/INEP), que financiou passagens e diárias da primeira autora.

relevante (Brown & Walter, 2005; Medeiros & Santos, 2007). Por outro lado, a formulação de problemas matemáticos não é uma tarefa comum nas aulas de Matemática, uma vez que, frequentemente, a tarefa predominante nestas aulas é o problema fechado ou exercício (Medeiros & Santos, 2007; Ponte, 2005).

Atualmente, o texto é um todo coerente e com significado (Bakhtin, 2003). Pode ser uma palavra, um quadro, um filme, um problema matemático, há muitos outros exemplos. Não apenas o texto escrito. Os alunos podem utilizar estes textos para as suas formulações. Esse texto pode ter a sua significação composta não apenas de um único texto, mas do cruzamento de vários textos, numa relação de intertextualidade. Nos diferentes de tipos de texto os alunos podem interpretar o subtexto ou intertexto a ser compreendido, que pode estar relacionado a um dos Temas Transversais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998).

A metodologia da investigação

O projeto aqui apresentado foi metodologicamente desenvolvido numa pesquisa qualitativa (Yin, 2003) numa sala de aula de uma escola pública estadual localizada em Campina Grande, Paraíba, Brasil, recorrendo a um estudo de caso, cuja unidade de análise é a turma. Inicialmente, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com o professor de Matemática e com os alunos da turma, a fim de identificar as suas concepções sobre a formulação e a resolução de problemas matemáticos na sala de aula. A seguir, os alunos formularam e resolveram problemas matemáticos a partir de dez diferentes tipos de textos. Dois Temas Transversais distintos, a cidadania e o meio-ambiente, foram utilizados. A seguir, os alunos responderam a um questionário, num encontro extra, similar ao utilizado em Medeiros e Santos (2007), para identificar o intertexto (tema implícito), presente nos problemas (textos), referentes a um dos Temas Transversais. No terceiro momento da pesquisa, os dados coletados nas entrevistas, nas formulações e nas resoluções de problemas matemáticos e no questionário, foram analisados. A seguir escreveu-se o estudo de caso.

Resultados

O professor concebe a formulação e a resolução de problemas matemáticos como uma metodologia de ensino eficaz, porque propicia melhor perspectiva para a compreenssão do aluno. Os alunos, por sua vez, concebem a formulação de problemas matemáticos como importante e difícil. A resolução de problemas é concebida pelos alunos como fácil, difícil e importante. Além disso, os problemas formulados e resolvidos foram fechados, na maioria das sessões, uma exceção foi a formulação com o texto referente ao *Projeto Tamar*, na qual os alunos utilizaram, na resolução, a escrita em língua materna para escrever a resposta.Um pequeno número de alunos conseguiu explicitar plenamente o intertexto meio ambiente.

Conclusões

As concepções do professor e dos alunos sobre a formulação e a resolução de problemas matemáticos parecem influenciar os tipos de problemas que foram formulados e resolvidos pelos alunos, sendo estes, predominantemente, fechados (Medeiros & Santos, 2007), e a dificuldade destes alunos em explicitar o intertexto, uma vez que tal explicitação refere-se à capacidade de interpretar os enunciados dos problemas matemáticos**.** Nas atividades com problemas fechados, a interpretação não é imprescindível na resolução.

Tais resultados sugerem a necessidade de maior frequência na utilização da formulação e da resolução de problemas matemáticos, a partir de textos no sentido bakhtiniano. A reflexão sobre as atividades com estas tarefas (Ponte, 2005) também nos parece relevante para contribuir com a interpretação do enunciado e a explicitação do intertexto emergente na relação intertextual.

Referências bibliográficas

Bakhtin, M. (2003). *Estética da criação verbal*. São Paulo: Martins Fontes.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF.

Brown, S., & Walter. M. (2005). *The art of problem posing*. (3.ª ed). New York: Routledge.

Medeiros, K. M., & Santos, A. (2007). Uma experiência didática com a formulação de problemas matemáticos. *Zetetiké 28*(15) pp. 87-118.

Ponte, J. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Coords.), *Educação Matemática* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Do ponto ao espaço: Contributo do croché para a Matemática do planeta Terra

Maria Antónia Forjaz[1], *Alexandra Nobre*[2], *Cristina Almeida Aguiar*[2], *Maria Judite Almeida*[2]

[1]CMAT, Centro de Matemática da Universidade do Minho, & DMAT, Departamento de Matemática e Aplicações da Universidade do Minho, & STOL, *Science Through Our Lives*, maf@math.uminho.pt

[2]CBMA, Centro de Biologia Molecular e Ambiental da Universidade do Minho, & DB, Departamento de Biologia da Universidade do Minho, & STOL, *Science Through Our Lives*, anobre@bio.uminho.pt, cristina.aguiar@bio.uminho.pt, juditealmeida@bio.uminho.pt

Resumo. *O projeto "Ponto a Ponto enche a Ciência o Espaço" assenta numa iniciativa intergeracional colaborativa e evidencia a relação entre a Biologia e a Matemática no âmbito da geometria hiperbólica. As atividades desenvolvidas têm por base uma Instalação em croché que recria um recife em coral e procuram proporcionar aos seus participantes ambientes interdisciplinares de ensino e aprendizagem ricos na diversidade, estimulantes e desafiantes, que lhes permitam desenvolver a sua capacidade para explorar, conjeturar e raciocinar logicamente. O tema da Geometria, neste caso particular da geometria hiperbólica, propicia o desenvolvimento dessas competências ao requerer a aprendizagem dos diversos conceitos geométricos, das suas relações e propriedades, aliadas a capacidades, entre outras, de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais (Vale, 2012).*

Palavras-chave: geometrias não-euclidianas; geometria hiperbólica; crescimento biológico; croché; ambientes interdisciplinares de ensino-aprendizagem.

Uma Instalação de Arte

Tendo por objetivo comunicar, divulgar, democratizar e pensar a Ciência com "consciência", o STOL, *Science Through Our Lives*[1], tem em mãos o projeto "Ponto a Ponto enche a Ciência o Espaço" que evidencia a relação entre a Biologia e a Matemática no âmbito da geometria hiperbólica (Almeida, *et al*., 2012). O projeto tem por base uma *Instalação* de um recife de coral em croché tradicional. O desenvolvimento deste projeto passa pelo envolvimento de comunidades escolares e da sociedade.

---

[1] Pode obter mais informações em: http://www.cbma.bio.uminho.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=240:stol&catid=102:stol&Itemid=169)

Em 1997, D. Taimina executou o primeiro plano hiperbólico em croché (Figura 1) (Henderson & Taimina, 2001). Até hoje o croché é a única técnica que permite construir modelos tridimensionais da geometria hiperbólica.

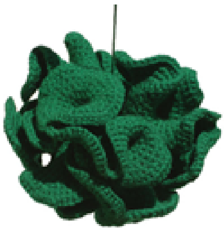


Figura 1. Pseudoesfera hiperbólica (Taimina, Lamb, 2011).

Na sequência da *ilustração* de um capítulo do livro de J. Buescu (Buescu, 2011) com modelos em croché, o STOL abraçou a criação de um recife de corais, que já foi exposto na Festa da Ciência ECUM 2012, Biblioteca Lúcio Craveiro da Silva, Braga, associou-se ao projeto "A Matemática dos Nossos Avós" do Museu da Ciência da Universidade de Coimbra, esteve na "Exposição Ciência e Arte" do Museu Nacional Soares dos Reis, Porto, na exposição "Ver Arte Prever Ciência", no Mosteiro de Tibães, Braga e na abertura do Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra (MPT2013), <http://www.mat.uc.pt/mpt2013/>, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa (Figura 2).

Figura 2. Instalação em croché. Geometrias não-euclidianas.

A Geometria constitui uma óptima forma de relacionar a Matemática com a realidade e, consequentemente, com outras ciências, como a Biologia. São as geometrias não-euclidianas que permitem explicar alguns dos fenómenos. Ao enfatizar a existência e importância das geometrias não-euclidianas, a sua exploração com a verificação de algumas propriedades dadas como irrefutáveis na geometria euclidiana, pode contribuir para melhor compreensão do mundo pelos alunos.

Croché: potencialidades e aplicações

No âmbito da iniciativa internacional MPT2013, propomos dois *workshops,* tendo por base os ecossistemas de corais e as diferenças entre as Geometrias Hiperbólica e

Euclidiana. Os *workshops* pressupõem a presença da instalação do recife de corais em croché (Figura 3). Esta, em construção permanente, serve-se das formas dos corais como exemplo de estruturas geométricas hiperbólicas que exemplificam um modo de crescimento onde há um significativo aumento de área de superfície, limitada a um dado volume. Este facto é vantajoso pois permite uma forma de nutrição muito eficiente. O referido recife serve também para alertar para as causas de degradação nos corais, como sejam a poluição, a pesca excessiva, as mudanças climáticas ou a acidez dos oceanos (Buddemeie *et al*., 2004; Cohen, 2008). Nos *workshops* os participantes são convidados a manipular os modelos de croché com o objetivo de uma melhor visualização das suas propriedades.

Atividade 1: Visita guiada à Instalação de Arte

Propõe-se a exploração do "recife" de forma dirigida a aspetos relativos à nova (porque será certamente uma novidade para a grande generalidade do público) geometria hiperbólica e suas propriedades.

Figura 3. A Instalação de Arte.

Atividade 2: Exploração orientada

Propõe-se a exploração do recife de croché (i) no sentido *hands-on* ou de realização de um modelo (Figura 4); (ii) na pesquisa de propriedades da geometria hiperbólica, comparando com as mesmas propriedades em geometria euclidiana; e (iii) com o "desenho" de "retas" paralelas (Figura 5A), determinação de distâncias, medição da amplitude de ângulos, soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo (Figura 5B), cálculo das áreas e aplicação (ou não!) do Teorema de Pitágoras.

Figura 4. Workshop – realização de modelos em croché.

(A) **(B)**

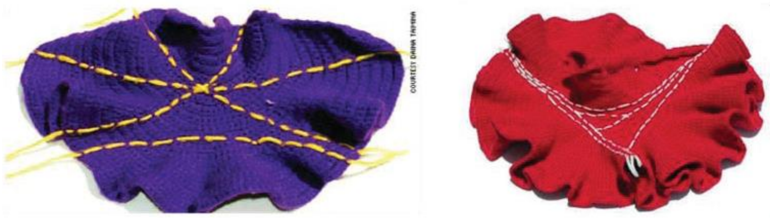


Figura 5. Geometria hiperbólica. (A) Retas paralelas. (B) Triângulo em que a soma dos ângulos internos é menor que 180º e a área se aproxima de zero (Taimina, 2009).

Referências bibliográficas

Almeida, M. J., Nobre, A. Maciel, M., Forjaz, A., & Almeida Aguiar, C. (2012). Stitch by Stitch the Science Fills the Space. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *55*, 935-944, Third International Conference on New Horizons in Education, INTE 2012.

Buddemeier, R. W., Kleypas, J. A., & Aronson, R. B., (2004). *Coral reefs & Global Climate Change Potential Contributions of Climate Change to Stresses on Coral Reef Ecosystems*. Prepared for the Pew Center on Global Climate Change.

Buescu, J. (2011). *Casamentos e Outros Desencontros*. Lisboa. Gradiva Publicações.

Cohen, P. (2008). Crochê ecológico defende Grande Barreira de Coral. *The New York Times*.

Henderson, D. W., & Taimina, D. (2001). Crocheting the Hyperbolic Plane. *Mathematical Intelligencer*, *23*(2), 17-28.

Henderson, D. W., & Taimina, D. (2004). *Experiencing Geometry* (3rd Edition). Pearson PUB.

Taimina, D. (2009). *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes*. A. K. Peters Pub.

Vale, I. (2012). A utilização da visualização para ensinar e aprender matemática. In *Atas do SIEM XXXIII*. Lisboa: APM.

LISTA DE REVISORES

Abigail Lins
Ana Barbosa
Ana Boavida
Ana Henriques
António Domingos
António Guerreiro
António Ribeiro
Assumpta Estrada
Carlos Miguel Ribeiro
Cecília Costa
Cecília Monteiro
Cláudia Mendes Araújo
Conceição Costa
Cristina Martins
Darlinda Moreira
Ema Mamede
Fátima Mendes
Fátima Paixão
Fátima Regina Jorge
Gabriela Gonçalves
Gustavo Cañadas
Helena Rocha
Hélia Jacinto
Hélia Oliveira
Hélia Pinto
Isabel Cabrita
Isabel Vale
Isabel Velez
Isolina Oliveira
Joana Brocardo
Joana Tinoco
João Pedro da Ponte
José António Fernandes
José Duarte
José Marcos Lopes
José Miguel Contreras
Josimar de Sousa
Júlio Paiva
Kátia Maria de Medeiros
Leonor Santos
Lina Fonseca
Luciano Veia
Lucília Teles
Luís Menezes
Lurdes Serrazina
Manuel Saraiva
Manuel Vara Pires
Maria Alexandra Oliveira Gomes
Maria Antónia Forjaz
Maria Helena Martinho
Maria Manuel Nascimento
Marisa Quaresma
Mercedes Carvalho
Nádia Ferreira
Nélia Amado
Olga Seabra
Patrícia Beites
Patrícia Sândalo
Paula Vieira da Silva
Paulo Ferreira Correia
Pedro Palhares
Renata Carvalho
Rodrigo Terradas
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Rosário Contente Monteiro
Sandra Nobre
Sandra Pinheiro
Sandra Quintas
Sílvia Semana
Susana Carreira
Susana Colaço
Teresa Pimentel

AGRADECIMENTOS

Instituto de Educação da Universidade do Minho

Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho

Departamento de Estudos Integrados de Literacia, Didática e Supervisão

Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Câmara Municipal de Braga

Edições ASA