ISBN: 978-989-8525-22-2

APRENDIZAGEM DOS MODELOS DE GRAFOS, POR ALUNOS DE MACS DO 11º ANO, ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Maria Irene Marques Gonçalves
Floriano Augusto Veiga Viseu

Escola Secundária Padre Benjamim Salgado
Universidade do Minho

irenegoncalvesm@gmail.com
fviseu@ie.uminho.pt

RESUMO. Uma das finalidades do ensino de matemática é desenvolver a capacidade do aluno de resolver problemas. Esta atividade, para além de dotar de significado o que se aprende, prepara o aluno para fazer face a problemas do quotidiano. Os modelos de grafos, integrados no programa de MACS, fornecem ao aluno uma "ferramenta" para interpretar situações de sistemas de distribuição e explorar soluções para problemas. Em detrimento de uma pedagogia expositiva, os conceitos e notações de grafos foram introduzidos e desenvolvidos, numa turma do 11.º ano, através da resolução de problemas. Pretendemos assim averiguar como os alunos interpretam problemas, que estratégias estabelecem na sua resolução e como formulam problemas. Nessa resolução, qualquer processo era valorizado e não existiam indicações para a utilização de conhecimentos destes modelos. Adotando uma metodologia qualitativa e interpretativa, os dados foram recolhidos através da resolução de três problemas pelos alunos, de gravações de aulas e de uma entrevista no final da experiência. As conclusões do estudo evidenciam que os alunos apresentam dificuldades de interpretação e formulação de enunciados de problemas, utilizam diferentes estratégias na resolução de problemas em grupo e aprenderam os conhecimentos dos modelos grafos, reconhecendo a sua utilidade na resolução de problemas do quotidiano.

Introdução

A última reformulação dos programas de Matemática do ensino secundário integrou os modelos de grafos no currículo do ensino secundário com a criação da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), no Curso Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e no Curso Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente. A pertinência da aprendizagem de tais modelos relaciona-se com a missão que a escola tem de preparar os seus alunos para a sociedade como cidadãos, participativos e responsáveis na tomada de decisões. Como um dos objetivos dos programas escolares do ensino secundário é preparar o aluno para o mundo do trabalho, para o exercício da cidadania crítica e para a prossecução de estudos, à escola de hoje exige-se que não se limite a informar mas procure formar pessoas capazes de se adaptarem a uma sociedade em constante mudança e cada vez mais exigente (Menezes, 1999). As orientações metodológicas da disciplina de MACS referem explicitamente

ISBN: 978-989-8525-22-2

que o desenvolvimento das "capacidades de formular e resolver problemas simples em situações do dia a dia" (Ministério da Educação, 2001, p. 3), na modelação de situações reais, tem um papel preponderante na formação dos alunos que frequentam esta disciplina. Na concretização destas orientações delineamos uma estratégia de ensino que envolvesse os alunos na aprendizagem de tópicos de grafos através das atividades de resolução e de formulação de problemas de contexto real. Com base nestas atividades, pretendemos averiguar como os alunos interpretam problemas, que estratégias estabelecem na sua resolução e como formulam problemas.

Resolução de Problemas

Nas últimas décadas, a resolução de problemas surge nas sucessivas reformulações dos programas dos diferentes anos escolares como uma atividade "central do currículo da Matemática" (NCTM, 1991, p. 29), enquanto processo que fornece o contexto em que os conceitos são apreendidos e são desenvolvidas capacidades – como, por exemplo, de raciocínio e de comunicação matemática. A atividade de resolução de problemas torna-se primordial na aprendizagem de conceitos matemáticos e permite, segundo Ponte (2005), "perceber a verdadeira natureza da Matemática" (p. 2). Abrantes, Leal, Teixeira e Veloso (1997) referem que na resolução de problemas os alunos "estão a experimentar e a fazer matemática no sentido próprio do termo, o que constitui um dos objetivos essenciais do currículo" (p. 42). Trata-se de uma perspetiva de ver o ensino de Matemática que promove a construção do conhecimento matemático em detrimento da perspetiva que enfatiza processos de transmissão desse conhecimento do professor para o aluno. As recomendações atuais da educação matemática apontam para um ensino que valorize a Matemática como uma forma de pensar que envolve a resolução de problemas, comunicação e compreensão de conceitos, em vez de limitar o aluno a ouvir, ler e a repetir processos. A resolução de problemas surge no currículo como uma atividade transversal que desenvolve atitudes e capacidades que contribuem para a formação global dos alunos de todos os níveis de ensino, tais como "a confiança em fazer Matemática e desenvolver a perseverança e o espírito investigativo (…) comunicar matematicamente" (NCTM, 1991, pp. 28-29).

ISBN: 978-989-8525-22-2

A discussão sobre a resolução de problemas faz emergir a distinção entre esta atividade e a noção de problema. Para Polya (1986) e Ponte (2005) um problema é uma tarefa com as seguintes características:

– é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata (Polya, 1986);
- uma tarefa de natureza fechada, que apresenta claramente o que é dado e o que é pedido, e de grau de desafio elevado, por traduzir situações não rotineiras às quais o aluno não dispõe de um processo imediato de resolução e que pode ser resolvido por vários métodos (Ponte, 2005).

Um problema surge assim como uma situação que se apresenta ao aluno com um certo grau de complexidade, para a qual não possui resposta imediata ou não sabe resolver com os conhecimentos que possui naquele momento e cuja resposta o obriga a usar diferentes estratégias, mobilizando diferentes capacidades e procedimentos. Quando os alunos enfrentam uma situação-problema da realidade, muitas vezes não a conseguem resolver por considerarem que ela não é em nada parecida com os problemas que resolvem na sala de aula (Abrantes, 1992). Na vida real, muitas vezes os problemas não apresentam uma formulação adequada e esta indefinição tende a gerar dificuldades aos alunos. Uma forma de ultrapassar esta dificuldade na sala de aula passa por envolver os alunos na formulação de problemas de contexto real, a partir de, por exemplo, uma expressão ou de um gráfico. Esta atividade é entendida como uma estratégia de aprofundamento de conceitos matemáticos e de desenvolvimento da compreensão dos procedimentos implicados na sua resolução (Boavida et al., 2008). Ponte et al. (1998) consideram que a formulação de problemas é uma atividade que proporciona um grande envolvimento dos alunos em termos de trabalho de grupo, embora este envolvimento tenha de ser estimulado por não acontecer espontaneamente. Uma intervenção educativa adequada permite que, segundo estes autores, os alunos distingam a formulação de um enunciado de um exercício do de um problema.

A formulação de problemas na disciplina de Matemática tem sido objeto de alguns estudos. Por exemplo, Silver et al. (1996) efetuaram uma experiência com 53 professores do ensino secundário e 28 futuros professores, na qual era dado aos participantes um conjunto de dados e lhes era pedido que, com base neles, formulassem um problema, o resolvessem e testassem a solução encontrada. A resolução desta tarefa

ISBN: 978-989-8525-22-2

poderia ser feita individualmente ou em pares. Foram analisadas 399 respostas, algumas delas contendo esquemas e diagramas, juntamente com a fundamentação escrita. As respostas apresentadas evidenciaram que os participantes foram capazes de criar e responder de um modo diversificado, mostrando que tinham capacidade pessoal para este tipo de tarefa. Os autores salientam que este tipo de tarefa proporcionou o desenvolvimento do sentido crítico dos participantes, já que estimulou a sua envolvência, contrariando o simples aceitar de processos. Defendem ainda que a realização destas tarefas promove a discussão e a apresentação de diferentes processos de resolução, estimulando a criatividade. As atividades de formulação e resolução de problemas ganham relevância pela aplicação da Matemática a situações do quotidiano do aluno.

Grafos

Nas últimas décadas, os modelos de grafos assumiram um papel de relevo como ferramenta matemática em variadíssimas áreas do conhecimento (Cardoso, 2009). A necessidade de aplicar conceitos matemáticos a situações do mundo real transporta-nos para um dos tópicos da matemática discreta: os modelos de grafos. O surgimento destes modelos remonta ao século XVIII, associada às ideias de Euler para resolver o clássico problema das pontes da cidade de Königsberg. Inicialmente, tais modelos eram considerados pouco significativos do ponto de vista matemático, sendo basicamente usados em passatempos. No final da década de oitenta, reconhece-se a importância da matemática discreta na resolução de situações do dia-a-dia e a sua influência no desenvolvimento da tecnologia (Gouveia, 1999). As diretivas da educação matemática apontam desde então a inclusão de alguns tópicos da matemática discreta nos programas escolares, nomeadamente os modelos de grafos, que, na perspetiva do NCTM (1991), “oferecem um complemento importante ao reportório de esquemas de representação dos alunos” (p. 212).

O ensino dos modelos de grafos apoia-se basicamente na lecionação de ’Sistemas de distribuição’ e de ‘Planos de viagens’. O primeiro tópico trata dos problemas eulerianos que envolvem as arestas de um grafo. Na resolução deste tipo de problemas, o programa oficial sugere, entre outras, que o professor trabalhe situações relacionadas com “patrulhamento ou distribuição postal, (…) sobre um mapa desde encontrar

ISBN: 978-989-8525-22-2

quaisquer caminhos possíveis, passando por encontrar caminhos sem repetir arestas, até à necessidade de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto" (Ministério da Educação, 2001, p. 19). No segundo tópico estão englobados os problemas do tipo do 'caixeiro−viajante', que estão diretamente ligados aos grafos hamiltonianos e que têm aplicação em situações do quotidiano, como são exemplo as situações relacionadas com a Gestão e a Economia. São também recomendados o uso de árvores e a procura de algoritmos que facilitem a determinação de soluções.

As orientações metodológicas do programa da disciplina de MACS (Ministério da Educação, 2001) sugerem que os alunos trabalhem situações concretas nas comunidades em que vivem, como forma de promover o desenvolvimento de competências de intervenção cívica e de comunicação matemática. Apesar de ser uma matéria complexa, o ensino dos grafos pode ser iniciado de uma forma intuitiva (Pires & Hravchenko, 2006). A naturalidade inerente aos modelos de grafos faz com que muitos autores apresentem uma definição de grafo baseada em princípios intuitivos, onde existe um conjunto de pontos do plano, chamados de vértices, unidos por linhas, às quais se chama de arestas (Malta, 2008). Existem porém outras definições de grafo que apresentam maior rigor científico, como é exemplo a definição apresentada por Furtado (1973):

> Do ponto de vista geométrico, um grafo pode ser descrito, em um espaço euclidiano de n dimensões, como sendo um conjunto V de pontos e um conjunto A de curvas contínuas que não se intersectam, satisfazendo as seguintes condições: 1) Toda a curva fechada de A contém exatamente um ponto de V; 2) Toda a curva aberta de A contém exatamente dois pontos de V; 3) As curvas de A não têm pontos em comum, a não ser de V. (p. 1)

Trata-se de uma definição que veicula uma linguagem que é culturalmente entendida por quem possui formação matemática. No âmbito deste estudo e de acordo com as orientações metodológicas do programa de MACS, a noção de grafo é entendida como um conjunto de pontos do plano, designados por vértices, e por linhas incidentes nesses pontos, chamadas de arestas, sem evidenciar aspetos não essenciais do conceito, tais como a forma do grafo e as dimensões das arestas.

Os grafos promovem o conhecimento de algumas técnicas matemáticas que assumem grande importância na tomada de decisões das empresas. Permite ainda o desenvolvimento de índices de concentração na análise das relações entre os vários objetos e a criatividade (Furtado, 1973). A formalização dos conceitos apreendidos

ISBN: 978-989-8525-22-2

intuitivamente faz com que, na perspetiva de Holliday (1991), os alunos percebam a importância do domínio das definições. A simplicidade com que se podem introduzir e explorar os modelos de grafos "confere ao aluno do ensino secundário a oportunidade de participar ativamente no processo matemático" (Holliday, 1991, p. 95).

Metodologia

Atendendo à natureza do objetivo delineado, este estudo segue uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa. A experiência realizou-se numa turma do 11.º ano de MACS com 20 alunos, de uma escola secundária do distrito de Braga. A turma foi subdividida em cinco grupos de trabalho, cada um com quatro elementos. Das atividades realizadas, debruçamo-nos sobre o trabalho desenvolvido por três deles: Grupo de Brito (GB), Grupo de Sande S. Martinho (GS) e Grupo de Airão Santa Maria (GA). A escolha destes grupos teve por base os seguintes critérios: (i) a área de residência (procurou-se que os alunos fossem provenientes da mesma freguesia); (ii) o valor da média obtida pelos alunos no final do 1.º período; e (iii) a pertinência da informação recolhida em cada grupo.

A estratégia delineada no estudo de grafos integrou as seguintes fases: (1) visualização de vídeos, retirados da Internet, sobre a poluição e recolha de lixo, seguido de um debate sobre formas de recolher e minimizar a proliferação do lixo; (2) formação de grupos com alunos que residissem na mesma freguesia; (3) descrição de medidas para uma boa gestão do lixo no papel das autoridades locais; (4) distribuição a cada grupo de um mapa com as ruas onde era realizada a recolha de lixo nas suas freguesias de residência; (5) elaboração de um problema sobre formas de minimizar o percurso de ressolha do lixo.

Numa primeira fase, devido à ausência de conhecimentos sobre os modelos de grafos, os alunos resolveram dois problemas, Problema1 e Problema2, com as estratégias que achassem mais convenientes. Posteriormente, cada grupo apresentou à turma a resolução efetuada, o que permitiu formalizar os primeiros conceitos de modelos grafos. Após a aquisição de alguns conceitos, cada grupo elaborou um enunciado de um problema, designado por Problema3, com base no mapa que lhes foi entregue e nas ideias debatidas na visualização dos vídeos sobre o lixo, a poluição e a campanha "Limpar Portugal". No final, cada grupo apresentou à turma a resolução do

ISBN: 978-989-8525-22-2

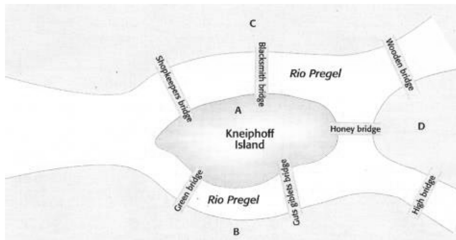
problema 3. Os dados sobre o trabalho realizado foram recolhidos através de gravações áudio, que foram transcritas, e das produções efetuadas pelos alunos. Da análise dos dados relativos aos três problemas, apresentamos a informação sob a designação de: (1) Interpretação de problemas; (2) Estratégias de resolução de problemas; e (3) Formulação de problemas.

Análise e apresentação dos resultados

O estudo de grafos desenvolveu-se com base na resolução de três problemas, sendo um deles formulado pelos alunos, que apresentavam em comum a elaboração de percursos.

Interpretação de problemas. Na resolução do primeiro problema abordado nas aulas sobre grafos, os alunos reagiram de diferentes formas provavelmente devido à ausência de introdução de qualquer conceito sobre grafos. Alguns manifestaram dependência da ação da professora, como foi o caso dos alunos do GB, outros procuraram identificar os elementos essenciais do problema, como evidenciam os alunos do GS e do GA, e outros revelaram iniciativa de pôr em prática as ideias que retiraram da interpretação do problema, como foi o caso dos alunos do GA:

Na cidade de Königsberg existem sete pontes que atravessavam o rio Pregel, como é demonstrado na figura a seguir, que ligam duas pequenas ilhas entre si e a cada uma das margens. No século XVII as pessoas entretinham-se com um desafio ao qual ninguém tinha ainda conseguido responder.



1. Será possível que alguém consiga passear pela cidade passando por todas as pontes uma única vez?
2. Que percurso se poderá fazer, se quisermos finalizar o percurso no local onde se iniciou?

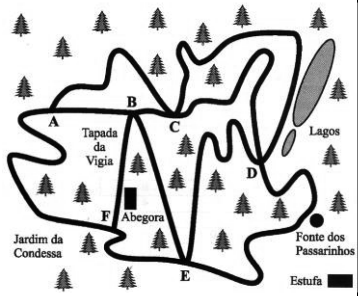
Rosa: Vamos lá ver o percurso.
Carlos: Espero que a professora nos diga o que fazer. (GB)

Hélder: Então podemos ir assim, assim.
Paula: Duas pequenas ilhas, é esta e qual?
Sofia: É esta. (GS)

Rui: Isto são as ilhas.
Tatiana: E o que se pretende é…
Rui: Queremos passar pelas pontes, sem repetir.
Inês: Vamos experimentar, começamos aqui? (GA)

Na discussão deste problema introduziram-se as noções de grafo, vértice e aresta. Estas noções tornam-se explícitas na forma como alguns alunos interpretaram o segundo problema, como exemplifica o discurso dos alunos do GS:

ISBN: 978-989-8525-22-2



Os alunos de uma escola estão a programar para o dia 21 de Março de 2010 uma campanha de limpeza num parque natural, que consiste em apanhar o lixo das ruas assinaladas no mapa.

1. Admitindo que os alunos iniciam a limpeza no ponto A e que finalizam também em A, será possível recolherem o lixo de todas as ruas sem as repetir?
2. Indica o melhor percurso para os alunos efetuarem a limpeza das ruas, admitindo que iniciam e finalizam em A.
3. Indica um percurso para os alunos realizarem, admitindo que iniciam em A e que terminam em F? E se finalizarem em D?
4. Será possível que os alunos iniciem o percurso de limpeza em qualquer cruzamento e finalizarem noutro qualquer cruzamento? Justifica a tua resposta.
5. Admite agora que foi aberta uma segunda rua a ligar diretamente os cruzamentos A e F. Será possível os alunos elaborarem um percurso de limpeza das ruas, sem repetir qualquer rua, iniciando e finalizando a limpeza em A?

Rosa: Tu queres passar nas ruas, não nos pontos.
Adélia: Não percebo. Já viste quantas ruas tem?
Rosa: Admitindo que os alunos iniciam a limpeza em A…
Adélia: Ó Rosa, espera um bocadinho, deixa-me pensar. Indica o melhor percurso. Ele tem de repetir pelo menos duas.
Teresa: AF e FA são ruas diferentes. (GB)

Hélder: As ruas são as nossas linhas?
Sofia: Sim, são as arestas.
Paula: Então, o nosso percurso pode ser 2, 7, 10. (GS)

Sara: E e F. Agora temos de pôr estas linhas.
Tatiana: Como? Ah, a professora disse que eram as pontes. Mas aqui como é que vamos pôr? (GA)

Nem todos os alunos revelaram uma apropriação da terminologia dos grafos, como revelam os alunos do GB e do GA. Os elementos do grupo GB manifestam ainda alguma confusão de linguagem e tendência para trabalharem individualmente, o que não acontece com os alunos do grupo GS, que evidenciam hábitos de trabalharem cooperativamente.

Na fase de interpretação destes dois problemas, a interação da professora com os alunos incidiu na formalização dos novos conceitos e na clarificação das dificuldades que emergiram. Dessas dificuldades destacam-se, no primeiro problema, a compreensão do enunciado e da figura (nos três grupos), e no segundo problema, a compreensão do sentido das arestas (GB) e do seu significado no contexto do problema (GS).

Estratégias de resolução de problemas. As diferenças que os grupos revelaram na interpretação dos dois problemas refletem-se nas estratégias que utilizaram na resolução

ISBN: 978-989-8525-22-2

dos problemas. Relativamente ao Problema1, os alunos do grupo GS revelam preferência pelo trabalho individual:

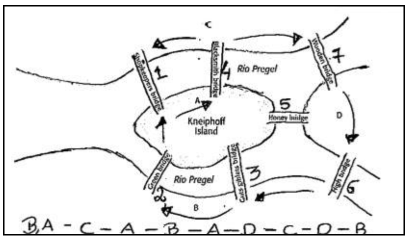
Sofia: Passar por todas as pontes uma única vez.
Sofia: Falta-te uma. Eu já fiz e também já fiz o que agora estás a fazer e continua a não dar.
Paula: Já fizeste? Eu ainda não consegui fazer e já estás a dizer que não dá!

Já os alunos do grupo GB revelam hábitos de trabalho de grupo ao estabelecerem o que cada um faz na resolução do problema:

Rosa: Somos quatro, eu começo na A.
Adélia: Mas, na A podes começar por esta ou por esta ou por esta.
Teresa: Não tem lógica, é pelas pontes. Vamos fazer ponte1, ponte2…
Rosa: Não dá! Vamos tentar outra vez, vamos começar em sítios diferentes. Eu começo aqui.
Adélia: E eu começo aqui. (GB)

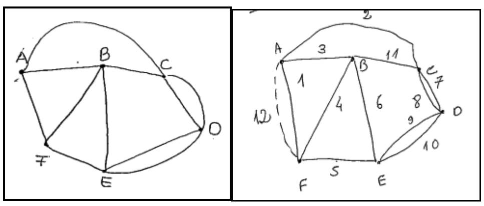
Após algumas tentativas, alguns alunos começaram a relacionar a impossibilidade de resolução devido à inexistência de um número ímpar de pontes, como exemplifica a afirmação de Adélia: "Se for com as 5 do meio dá, imagina que é com as 5 (…) por isso é que com o ímpar é capaz de não dar" (GB). De seguida, os grupos apresentaram a sua resolução à turma na forma de um esquema, como exemplifica o que foi realizado pelo GB:

Figura 1: Esquema que traduz a resolução do Problema1 pelo grupo GB.



As noções de grafo, vértice e aresta forneceram aos alunos do GB e do GS elementos a considerar na resolução do Problema2.

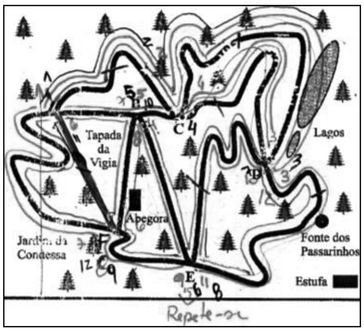
Figura 2: Resolução do Problema2 pelos grupos GB e GS.



ISBN: 978-989-8525-22-2

Estas resoluções revelam que os alunos destes grupos adquiriram a noção de grafo, vértice e aresta. Porém, os alunos do grupo GA não adotaram esta estratégia servindo-se da própria figura:

Figura 3: Resolução do Problema2 pelo grupo GA.



A estratégia utilizada pelos alunos deste grupo indicia que não tiveram presente a compreensão da noção de grafo, vértice e aresta e que não perceberam a utilidade destas noções na resolução do problema.

Com a discussão sobre a resolução do Problema2 foram introduzidos os restantes conceitos de grafos: ordem e dimensão de um grafo, grau de um vértice, vértice isolado, lacete, arestas paralelas, dígrafo, grafo conexo, grafo completo, grafo regular, grafo Kn, subgrafo, caminho, circuito, caminho e circuito de Euler, condições do teorema de Euler e o processo de eulerização.

Formulação de Problemas. Com a aquisição das noções programáticas de grafos, os alunos foram desafiados a elaborar um problema sobre o percurso da recolha de lixo na sua freguesia, tendo como referência o mapa que lhes foi entregue. Numa primeira fase, os alunos revelaram dificuldade em compreender que tipo de problema deveriam elaborar, como é evidenciado pelos alunos do grupo GS:

Paula: Mas que problema é que vamos criar?
Hélder: Sei lá, nunca fiz isto, nunca criei problemas em Matemática.
Paula: Não sei que problema é que a professora quer.
Sofia: Mas será qualquer problema? Vamos chamar a professora. Ó professora, não estamos a perceber bem o que é para fazer. É para inventar um problema?

Apesar dessa dificuldade, alguns alunos dividiram tarefas e deram atenção às ideias dos colegas do grupo, como foi o caso do grupo GB:

ISBN: 978-989-8525-22-2

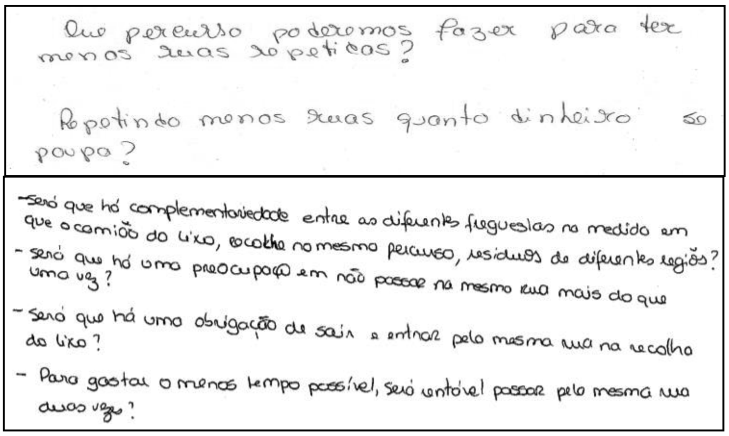
Rosa: Vamos criar um problema. Qual é que é o nosso problema? Olha, pomos este, para gastar o menos tempo possível será rentável passar pela mesma rua duas vezes?
Carlos: Eu acho é que isso vai se um trabalhão, vai ser muito complicado.
Teresa: O quê?
Rosa: Por exemplo, ele vai aqui e quer voltar para aqui, será que ele pode vir assim ou é melhor assim?
Teresa: Pode ser, ou então temos uma ideia nova, criamos o nosso problema, por exemplo…
Adélia: Não, eu acho que devemos seguir.

Os alunos deste grupo reagem às dificuldades e trocam ideias no sentido de as ultrapassar entre si. Porém, outros alunos continuam a revelar dificuldades no trabalho em grupo, limitando-se a esperar pelo apoio da professora, como foi o caso do grupo GA:

Tatiana: Mas que problema é que havemos de criar?
Rui: Não tenho a mínima ideia. Vamos dizer que o nosso problema é criar um problema.
Inês: Sabemos lá que problema é que devemos inventar com o mapa?
Tatiana: Ainda estamos a começar e já está complicado!
Rui: E eu que pensava que isto ia ser simples, acho que antes quero teste! Esperamos que a professora passe por aqui para nos ajudar.
Inês: Vamos mas é chamá-la.

Os alunos deste grupo mostram pouca autonomia de trabalho em grupo e pouco espírito de persistência perante as dificuldades sentidas. Ao terem que apresentar a sua atividade à turma elaboraram como problema um conjunto de questões relacionadas com os debates realizados em sala de aula, bem distintos do que realizaram, por exemplo, os alunos do grupo GB, que apresentaram mais questões e mais elaboradas:

Figura 4: Primeira formulação do problema pelos alunos do GA e do GB.


Que percurso poderemos fazer para ter menos ruas repeticas?

Repetindo menos ruas quanto dinheiro se poupa?

- Será que há complementariedade entre as diferentes freguesias na medida em que o camião do lixo, recolhe no mesmo percurso, resíduos de diferentes regiões?
- Será que há uma preocupação em não passar na mesmo rua mais do que uma vez?
- Será que há uma obrigação de sair e entrar pelo mesma rua na recolha do lixo?
- Para gastar o menos tempo possível, será rentável passar pela mesma rua duas vezes?

ISBN: 978-989-8525-22-2

As questões formuladas pelos grupos apresentam-se muito gerais e focam aspetos passíveis de não poderem ser respondidos por falta de informação, como por exemplo a relação distância – tempo, a complementaridade entre as diferentes freguesias, a forma como é efetuada a recolha do lixo e os custos despendidos. A maioria das questões formuladas é de resposta curta. Perante a discussão no grupo turma sobre as questões formuladas, os grupos GB e GS consciencializaram-se da importância da tarefa e reagiram com sentido de responsabilidade, como se pode constatar a seguir:

Rosa: Não se esqueçam que nós vamos criar um problema, que vamos trabalhá-lo até ao fim, portanto temos de pensar bem no problema que vamos pôr. (GB)

Sofia: Olhem, vamos ao livro ver se diz alguma coisa que nos ajude.
Paula: Vamos ver. Tem aqui algumas coisas que podemos usar. Vamos adaptar.
Sofia: Pomos assim, os escuteiros de Sande S. Martinho pretendem averiguar se o percurso que o camião do lixo faz na recolha de lixo é o melhor entre as várias freguesias. Como poderão eles responder a esta questão? (GS)

Já os alunos do grupo GA acomodam-se perante as dificuldades, continuando a revelar pouca responsabilidade e autonomia, ao recorrerem novamente à ajuda da professora:

Tatiana: Ainda estamos a começar e já está complicado!
Rui: E eu que pensava que isto ia ser simples. Esperamos que a professora passe por aqui para nos ajudar.
Inês: Vamos mas é chamá-la. (GA)

A partir da análise do que os grupos formularam, foram elaborados os enunciados do problema de cada grupo, como ilustra o que foi formulado pelo grupo GB:

ISBN: 978-989-8525-22-2

O presidente da junta de freguesia de Brito pretende reunir-se com o presidente da câmara de Guimarães para lhe apresentar uma proposta de recolha de lixo na sua freguesia.

a) Admitindo que a recolha de lixo é feita por um único camião, que percurso poderá o presidente de junta apresentar, de forma a repetir o menor número de ruas possível e considerando que, a recolha inicia-se e finaliza a recolha no mesmo local, inicia e finaliza noutro local?

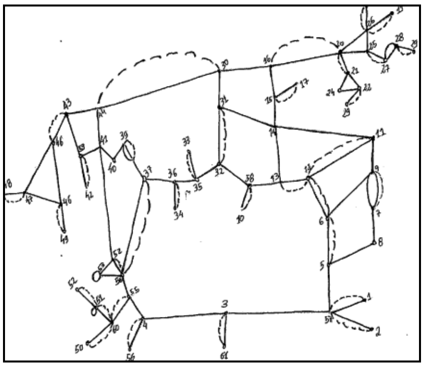
b) Vai realizar-se uma reunião entre o presidente da câmara de Guimarães e os presidentes das juntas de freguesia de Brito, Ronfe, Sande S. Martinho, Vermil e Santa Maria de Airão. Sabendo que o presidente pretende gastar um único dia para reunir com os vários presidentes de junta de freguesia, que percurso poderá ele fazer para efetuar o menor número de km possível?

	Guimarães	Sande S. Martinho	Brito	Ronfe	Vermil	Airão STª.Maria
Guimarães	______	9.8 Km	6.1 Km	10.3 Km	11 Km	12 Km
Sande S. Martinho	9.8 Km	------	6.7 Km	10.2 Km	9.2 Km	10.3 Km
Brito	6.1 Km	6.7 Km	------	9.9 Km	2.6 Km	3.8 Km
Ronfe	10.3 Km	10.2 Km	3.9 Km	------	1.3 KM	2.1 Km
Vermil	11 Km	9.2 Km	2.6 Km	1.3 KM	-------	1.2 Km
Airão STª.Maria	12 Km	10.3 Km	3.8 Km	2.1 Km	1.2 Km	------

c) O presidente de junta pretende renovar a rede de esgotos numa certa zona de Brito. Para isso irá pedir apoio ao presidente de Câmara de Guimarães. Como poderá ser feita essa rede de modo a que seja necessário gastar a menor quantidade de tubos possível?

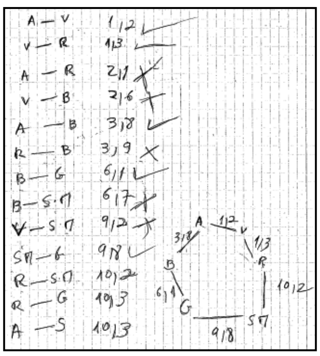
Os valores das distâncias entre as localidades foram obtidos através do Google Maps. Na resolução do problema, os alunos elaboraram um grafo e procederam à sua eulerização, como se observa na resolução de uma das questões pelo grupo GB:

Figura 5: Grafo eulerizado pelo grupo GB.



Para além do grafo, os alunos do grupo GA recorreram à árvore geradora mínima para poderem dizer qual a canalização de água potável de menor custo numa zona da sua freguesia:

Figura 6: Árvore mínima elaborada pelo grupo GA.



ISBN: 978-989-8525-22-2

A formulação do problema pelos grupos, para além de estimular a pesquisa e a comunicação escrita, permitiu que os alunos tomassem consciência de alguns cuidados a ter na elaboração de problemas. A sua resolução possibilitou que os restantes conteúdos programáticos de grafos fossem estudados numa situação problemática de contexto real, próxima dos alunos.

Conclusões

A resolução de problemas propostos consistiu numa atividade que, como referem Polya (1986) e Ponte (2005), os alunos não apresentaram de imediato uma estratégia de resolução. A ausência de noções de grafos ajuda a explicar a complexidade dos problemas para os alunos. Essa complexidade fez com que, na interpretação desses problemas, alguns alunos revelassem dependência da ajuda da professora. Outros alunos procuraram compreender os elementos essenciais do enunciado dos problemas que os ajudassem na sua resolução. A diferença de atitude manifestada pelos alunos na interpretação de problemas indicia dever-se a hábitos enraizados no desenvolvimento das atividades na aula de matemática. Como referem Stein e Smith (1998), muitas das vezes os alunos pressionam o professor para reduzir a complexidade da tarefa e o professor acaba por lhes dizer o que devem fazer. As dificuldades verificadas relacionam-se com a interpretação do enunciado da figura do primeiro problema e no segundo problema com a interpretação do sentido das arestas e do significado destas no contexto do problema.

No que concerne às estratégias utilizadas, intuitivamente os alunos procuraram resolver os problemas por tentativa e erro, o que não lhes permitiu fazê-lo com sucesso devido à ausência de conceitos sobre grafos. A discussão das resoluções serviu de pretexto para a introdução desses conceitos, que, como defende Holliday (1991), possibilitou que os alunos participassem no processo matemático. A maior parte dos alunos revelou preferência pelo trabalho individual, o que pode dever-se à forma como costumam trabalhar nas diferentes disciplinas, em geral, e na aula de matemática, em particular. A importância que o trabalho cooperativo tem nas aprendizagens dos alunos valoriza a articulação entre as estratégias delineadas pelos professores da mesma turma. Essa articulação pode ser potenciada através do contributo de cada disciplina na realização de trabalhos de projeto.

ISBN: 978-989-8525-22-2

Relativamente à formulação de problemas, verificou-se que todos os alunos sentiram dificuldade, o que indicia dever-se à falta de hábito desta atividade. Algumas das questões por eles formuladas não podiam ser respondidas somente com base nos conhecimentos de grafos, o que indicia que nas suas atividades de estudo de conteúdos matemáticos não costumam formular problemas relativos a um dado contexto. A formulação de problemas exige do aluno mais capacidade para dar sentido ao que aprende do que a resolução de problemas cujos enunciados são fornecidos pelo professor ou pelo manual escolar.

Na resolução dos dois primeiros problemas os alunos evidenciaram alguns constrangimentos por não possuírem conhecimentos de grafos. Como sugestão para um futuro trabalho, importa averiguar as atitudes dos alunos na resolução de problemas de contexto real depois de possuírem esses conhecimentos: Que constrangimentos evidenciam? Que capacidades revelam na formulação de problemas?

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1992). Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática*, 23, 25–29.

Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). *Mat789. Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Cardoso, A. (2009). *Teoria de grafos: uma reflexão sobre a sua abordagem no ensino não universitário* (Tese de Mestrado, Universidade Portucalense).

Furtado, A. L. (1973). *Teoria de Grafos. Algoritmos*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Gouveia, M. T. (1999). *Teoria dos Grafos. Currículo alternativo para a disciplina de Métodos Quantitativos* (Tese de Mestrado, Universidade Portucalense-Infante D. Henrique).

Holliday, R. L. (1991). Graph Theory in the High school Curriculum. In M. Kenney, & C. Hirsch, *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (pp. 87–95). Reston, Virginia: National Council of teachers of Mathematics.

Malta, G. (2008). *Grafos no ensino médio: uma inserção possível*. (Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio grande do Sul).

Menezes, L. (1999). *Matemática, linguagem e comunicação*. In Atas do ProfMat99 (pp. 123-145). Portimão: APM.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE .

Pires, M., & Kravchenko, V. (2006). Grafos para todos: a importância dos exemplos na construção dos conceitos. In *Actas do ProfMat* (pp. 15–17). Setúbal: APM.

Polya, G. (1986). *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigações em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Silver, E., Downs, J., Leung, S., & Kenney, P. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematical Education*, 27 (3), 293-309.