A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇAO DE TAREFAS COM A UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA: UMA EXPERIÊNCIA NUMA TURMA DO 11.º ANO

Maria da Graça Magalhães
Escola Secundária/3 Henrique Medina
graça.n.magalhaes@gmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd - Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo

A presente experiência teve como objectivo estudar se as tarefas de investigação com a utilização da calculadora gráfica podem facilitar e proporcionar o desenvolvimento da argumentação matemática nos alunos. Para tal a professora investigadora elaborou cinco tarefas que aplicou a uma turma do décimo primeiro ano com o objectivo de estudar as funções racionais. Nesta comunicação apresenta-se apenas uma das tarefas. O trabalho desenvolveu-se inicialmente em pequenos grupos, posteriormente em grande grupo de discussão e finalmente com a elaboração de um relatório escrito individual que incluía uma reflexão. A metodologia adoptada foi de carácter qualitativo e descritivo. A aplicação da tarefa de investigação em grupo, permitiu tirar várias conclusões relativamente à argumentação matemática, ao trabalho colaborativo e à utilização de forma adequada da calculadora gráfica. A análise dos resultados obtidos evidenciou que a aplicação das tarefas de investigação, apesar das dificuldades iniciais, permitiu uma melhor compreensão e apropriação por parte dos alunos da turma do conteúdo programático relativo às funções racionais. Verificou-se também que os alunos ao longo do trabalho de investigação foram desenvolvendo o espírito crítico relativamente aos resultados que o visor da calculadora gráfica lhes mostrava.

Palavras-Chave: Tarefas de investigação, trabalho de grupo, calculadora gráfica e argumentação.

Introdução

A teoria da educação sofreu vários avanços nos últimos tempos, mudando o foco da investigação do pensador individual para uma pessoa que participa como membro de uma comunidade (Forman, Larreamendy-Joeens, Stein & Brown, 1998). Este ponto de vista está presente nos escritos da filosofia da ciência que defendem a importância das normas e das práticas sociais da comunidade científica na validação das suas teorias. Ou seja, a aceitação das explicações em domínios científicos baseia-se não apenas em critérios lógicos ou empíricos, mas no facto de um membro ser capaz de persuadir os outros membros da comunidade. A matemática não pode ser mais vista como uma actividade puramente individual mas sim como uma actividade social. Forman et al

(1998) consideram que o desenvolvimento de pesquisas educacionais sobre a argumentação colectiva na sala de aula pode fornecer uma forma de compreender como ajudar os alunos a apropriarem-se desta prática científica crucial.

Boavida, Gomes e Machado (2002) afirmam que quando os alunos desenvolvem tarefas que promovem a argumentação matemática são responsabilizados a fundamentar os seus raciocínios, a descobrir o porquê de determinados resultados ou situações e são incentivados a entender os argumentos dos restantes elementos da turma. Os alunos ao argumentarem matematicamente não só partilham, explicam e justificam as suas ideias e a forma como pensam nelas, como resolvem a tarefa proposta (Whitenack & Yackel, 2008). Para que este objectivo seja atingido é fundamental que as tarefas sejam interessantes e desafiadoras para que se desenvolva o raciocínio, se estimule a comunicação e a argumentação matemática nos alunos (Douek & Pichat, 2003).

Este tipo de tarefas é designado por Ponte (2005) como de investigação por serem de carácter aberto, desafiantes e consequentemente importantes para que o aluno obtenha uma verdadeira experiência matemática. Quando na sala de aula se implementam tarefas de investigação, em pequeno ou em grande grupo, criam-se espaços dedicados à discussão com a clarificação e fundamentação de opiniões (Ponte, 2005; Whitenack & Yackel 2008).

Com a introdução da tecnologia e em particular da calculadora gráfica nas aulas de matemática criaram-se oportunidades para uma aprendizagem com o envolvimento activo dos alunos no que concerne à exploração, discussão e compreensão dos conceitos matemáticos (Gracias & Borba, 2000). O processo de elaboração de hipóteses, teste de conjecturas, refutação e generalização, pode ser realizado de forma mais eficiente pois a calculadora gráfica produz gráficos rapidamente estimulando assim, a investigação matemática. Os mesmos autores defendem que a implementação na sala de aula de tarefas de investigação pode ser mais relevante tirando partido da calculadora gráfica.

No entanto, tem-se dado pouca importância às implicações pedagógicas da tecnologia como um mediador da aprendizagem da matemática (Rocha, 2001). Nomeadamente, existem poucas investigações que têm como foco a forma como os alunos efectivamente usam a calculadora gráfica e quais as suas atitudes face a este instrumento.

Neste contexto e por todas as razões apontadas, na presente experiência, elaborou-se uma tarefa de investigação sobre o tema das funções racionais que se aplicou a uma turma do 11.º ano.

Com a presente investigação pretende-se responder às seguintes questões: a) De que forma a tarefa realizada em grupo pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentação matemática dos alunos? b) De que forma a utilização da calculadora gráfica influencia a concretização da tarefa?

Argumentação matemática

Grize (1996) considera que "argumentar é uma actividade específica, que visa intervir sobre as ideias, opiniões, atitudes, sentimentos ou comportamentos de alguém ou de um grupo de pessoas" (p. 5). O argumento é considerado como uma actividade intencional e discursiva requerendo uma participação activa daqueles a quem é dirigida. Segundo Pedemonte (2002) "a argumentação em matemática é uma justificação racional" (p. 29), pois o carácter justificativo expressa-se na forma de raciocínio. Assim, a argumentação pode desempenhar um papel crucial nas actividades matemáticas pois intervêm na conjectura e na prova como uma componente substancial no processo de produção (Douek & Scali, 2000).

A partir dos anos 80 são vários os documentos no âmbito da investigação em educação matemática que destacam a necessidade e a importância de envolver os alunos em actividades que desenvolvam a argumentação, em que estes tenham que fundamentar e explicitar os seus raciocínios encontrando justificações matematicamente válidas e coerentes de acordo com cada situação (Boavida et al, 2002).

A argumentação matemática pode assim, ser influenciada pela forma como os alunos são desafiados a conjecturar, a explorar exemplos e contra-exemplos e a justificar as suas conjecturas apoiando-se em argumentos matemáticos (Boavida et al, 2002).

A capacidade de argumentar é desenvolvida nos alunos quando nas aulas de matemática se criam momentos para a exploração de tarefas de investigação cuidadosa e meticulosamente preparadas, de forma a promoverem a formulação e a prova de conjecturas (Boavida, 2005). Para esta autora as tarefas devem ser desenvolvidas em duas fases distintas, uma destinada ao trabalho de grupo e outra destinada ao grupo turma (Boavida, 2005).

Blunk (1998) salienta a importância do trabalho de grupo na medida em que é um espaço onde se potencia a comunicação verbal em que os alunos têm a possibilidade de definirem caminhos próprios co-responsabilizando-se na sua própria aprendizagem e dos restantes elementos do grupo. Para que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar em grupo é necessário que esta prática se desenvolva desde os primeiros anos de escolaridade, para poderem aprender a sentirem-se mais à vontade na comunicação das suas ideias e em colocá-las em confronto com as dos restantes elementos do grupo, ou seja, argumentando e procurando convencer os restantes colegas das suas opiniões, assim como ouvir e contra-argumentar (Blunk, 1998; Martinho, 2007).

A Calculadora Gráfica

O uso da tecnologia, nomeadamente da calculadora gráfica pode ajudar os alunos a aprender matemática, pois a aplicação deste artefacto na sala de aula enriquece a extensão e a qualidade das investigações na medida em que proporciona e favorece, sob múltiplas perspectivas, um meio de visualização das noções matemáticas e em que os discentes têm mais oportunidades para tomar decisões e maior liberdade para discutir os resultados (NCTM, 2008). Devido à possibilidade de visualização da calculadora gráfica, em muitos temas de matemática do ensino secundário, os alunos podem despender mais tempo na resolução de problemas e menos na manipulação meramente mecânica dos mesmos (Kaber & Longhart, 1995).

Para além da sua componente visual, o trabalho matemático que é desenvolvido a partir daquilo que a calculadora gráfica apresenta proporciona também aos alunos momentos de discussão em que se partilham ideias através de previsões, testes e generalizações, criando-se assim ambientes dedicados à investigação matemática (Jensen & Williams, 1993). Assim, com o aparecimento da calculadora gráfica surgiu um novo desafio no ensino da matemática, pois esta ferramenta alterou a natureza dos problemas importantes para a disciplina e os métodos usados na investigação desses mesmos problemas pois permitiu uma ampliação e diversificação das mesmas. As calculadoras alteraram o tipo de tarefas, questões e estratégias de ensino e aprendizagem a desenvolver dentro da sala de aula (Burril et al, 2002).

No estudo das funções torna-se importante e fundamental a utilização da calculadora gráfica na medida em que com este instrumento se desenvolve a capacidade de descoberta, de exploração e do espírito crítico no aluno (Teixeira, Precatado, Albuquerque & Nápoles, 1997). Como referem estes autores uma das vantagens da calculadora gráfica é a possibilidade de visualização de vários gráficos em simultâneo.

Em particular, no 11.º ano no que se refere ao estudo das famílias de funções racionais o aluno pode experimentar e tentar descobrir propriedades relativamente ao efeito da alteração dos parâmetros nos gráficos das funções. No entanto, deve-se ter o cuidado de incentivar o aluno a fazer registos cuidadosos, de forma a encontrar justificações para o que está a ser observado, assim como, em relacionar em cada momento da experiência, a representação gráfica com a expressão analítica das funções que estão a ser estudadas (Rocha, 2001).

No entanto, o papel que a calculadora gráfica desempenha na aula de matemática é por vezes diminuto pois na grande maioria dos casos não é feita de forma adequada a aprendizagem do seu funcionamento (Rocha, 2001). Os alunos vão aprendendo a utilizá-la sem tomarem consciência da importância de terem um conhecimento profundo do seu funcionamento. Assim, cada vez mais é importante que o aluno, para além do conhecimento das potencialidades da calculadora gráfica, desenvolva a capacidade de interpretar de forma crítica e adequada a informação disponibilizada (Rocha, 2001).

Os alunos devem ser incentivados a agir como pequenos investigadores em todo o processo de ensino e aprendizagem, diversificando as propostas de trabalho e contribuindo assim, para uma melhoria da utilização da calculadora gráfica (NCTM, 2008). Como refere Dugdale (1993), a fácil manipulação das representações gráficas dá origem à possibilidade de visualização da representação de funções e desempenha assim um papel importante no raciocínio matemático, na investigação e na argumentação.

Metodologia

O estudo realizado é de carácter qualitativo e essencialmente descritivo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). A opção por uma metodologia qualitativa deveu-se ao facto do presente estudo apresentar as características enunciadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) o ambiente natural é a fonte directa dos dados e o investigador é o instrumento principal na sua recolha; (ii) a recolha de dados é essencialmente descritiva; (iii) ao investigador interessa mais o processo do que o produto; (iv) os dados são analisados de forma indutiva; e (v) a perspectiva dos participantes é extremamente valorizada. Devido ao objectivo do presente estudo e dentro de uma metodologia qualitativa, optou-se pelo estudo de caso que segundo Yin (1984) é um modelo de investigação que se aplica em casos em que o fenómeno em estudo não pode ser dissociado do seu contexto.

O estudo foi implementado a uma turma do 11º ano heterogénea e em que os casos são os 25 alunos, dos quais 18 são raparigas e 7 são rapazes e em que a professora investigadora, primeira autora deste artigo, é professora da disciplina de Matemática A.

Com esta investigação pretende-se contribuir para uma melhor utilização da calculadora gráfica, tentando provar que este instrumento pode proporcionar uma melhoria na capacidade de argumentar matematicamente.

A selecção do tema das funções racionais, prende-se com o facto de ser um dos itens em que é fundamental os alunos saberem utilizar a calculadora gráfica de forma a tirarem o máximo partido das suas potencialidades.

A recolha de dados foi efectuada através de registos áudio e vídeo dos diálogos desenvolvidos em pequeno e grande grupo e posteriormente através dos relatórios escritos e reflexões realizadas individualmente sobre a tarefa proposta.

Para a análise, discussão e reflexão dos resultados foram consideradas as seguintes categorias: a argumentação (conjecturas, argumentos e prova) e a calculadora gráfica (contributos e dificuldades). Nesta comunicação apenas se apresentam alguns extractos dos diálogos do trabalho de grupo, dos relatórios de investigação e de reflexões sobre a tarefa proposta.

A tarefa de investigação

No início da experiência os alunos da turma foram divididos em pequenos grupos de três ou quatro elementos. Posteriormente a professora distribuiu a todos os alunos dois documentos. Num desses documentos constavam os aspectos importante a terem em conta no desenvolvimento do trabalho de grupo e na discussão em grande grupo. O outro documento referia que o relatório individual devia contemplar a descrição pormenorizada de todo o processo de investigação: (i) os raciocínios efectuados; (ii) as conjecturas seguidas e abandonadas, argumentando sobre o porquê das suas opções; (iii) as conclusões a que chegaram e se os argumentos apresentados foram suficientes para constituírem uma prova; e (iv) uma apreciação crítica da actividade, assim como uma apreciação autocrítica de cada elemento do grupo na sua intervenção no trabalho desenvolvido.

A tarefa de investigação proposta aos alunos foi a seguinte:

> Considera os rectângulos que verificam as seguintes propriedades:
>
> - O perímetro é numericamente igual à área;
> - As medidas de comprimento dos lados do rectângulo são números naturais.
>
> Determina as dimensões de todos os rectângulos que verificam as condições dadas.

Na realização dos trabalhos de grupo os alunos utilizaram a calculadora gráfica e na discussão desenvolvida em grande grupo foi utilizado o quadro interactivo com a calculadora gráfica previamente instalada.

Apresentação dos resultados

Nesta comunicação apenas se apresentam alguns extractos dos diálogos do trabalho de grupo, dos relatórios de investigação e de reflexões sobre a tarefa proposta.

Trabalho de grupo

Na fase de *apropriação* da tarefa os grupos começaram por elaborar conjecturas de forma a encontrar uma expressão que lhes permitisse comparar o perímetro e a área de um rectângulo.

> *Vitória: Ora bem, vamos começar por onde?*
> *Dora: Pelo que percebi, temos de encontrar rectângulos em que o perímetro é igual à área...*
> *V: ... e em que a as medidas do comprimento dos lados sejam números naturais.*
> *D: Então nós sabemos que a área do rectângulo é igual ao comprimento vezes a largura e o perímetro é a soma de todos os lados...*
> *Rui: P = 2L+2C*

Seguidamente, *começaram a explorar* atribuindo valores aleatórios a cada uma das variáveis **L** e **C**, medidas de largura e comprimento do rectângulo. Foram efectuando várias tentativas no sentido de encontrar rectângulos que verificassem as condições dadas sem recorrerem à calculadora, limitaram-se assim a fazer pequenos cálculos mentais.

Júlia: Nesta tarefa temos que achar valores do comprimento e da largura para a área ser igual ao perímetro.
Fausto: Vai-se por tentativas.
Alexandra: Vamos ver então números que possam dar. Têm de ser inteiros, não é?
J: Sim e positivos.

Heloisa: Olha 4 dá. É um quadrado, mas é um rectângulo na mesma. 4x4 dá 16.
A: ... e 4+4+4+4 dá 16 também, então está certo.
F: Descobri outro, 3 e 6. A área e o perímetro dão 18.
H: Já temos dois.

As tentativas seguidas pelos alunos a determinado momento da investigação desencadearam uma necessidade de encontrar uma alternativa que lhes permitisse identificar todos os rectângulos que se verificassem as duas condições dadas. Apesar de terem encontrado dois casos em que verificava a igualdade entre o perímetro e a área, nos alunos começou a instalar-se a dúvida se os casos encontrados eram os únicos ou se poderiam existir mais.

J: Já não conseguimos encontrar mais...
F: Então é melhor encontrar uma fórmula.
A: Assim, é melhor colocarmos na máquina. Tem de dar um gráfico pois o tema é funções racionais.

A maior parte dos alunos demonstrou ter algumas dificuldades em resolver a equação obtida em ordem a uma das incógnitas de forma a ser possível visualizar o gráfico da função. Nesta fase da investigação a grande maioria dos grupos pediu ajuda à professora para encontrar uma função que lhes permitisse encontrar todas as soluções da tarefa.

Após várias tentativas no intuito de resolver a equação P = A em ordem a uma das incógnitas pediram ajuda à professora
F: Ora bem: CxL=C+C+L+L isto dá, C=(2C+2L)/L.
Professora: Sim está bem, mas tentem resolver em ordem a uma incógnita.
Seguidamente a professora afastou-se do grupo.
A: Se calhar temos de por em evidência... mas não dá.
F: Mas eu acho que deve ser mesmo por em evidência. Se calhar enganaste-te nos cálculos.
J: Por mais que dermos voltas, voltamos à mesma fórmula. Vamos chamar a professora.
A professora aproxima-se...
F: O que temos de fazer para por o C em evidência?
P: Têm que por em evidência... E depois têm de fazer outra coisa... a divisão de polinómios.
A professora volta a afastar-se do grupo para poderem pensar...
H: Pois. Assim ficamos com a equação das tarefas anteriores e assim é mais fácil para nós vermos como varia a função.
J: Então a expressão é: C=2L/(L-2). Ou seja, pela divisão dos polinómios...C=2+ (4/(L-2)).
A: Colocamos na máquina e dá... uma hipérbole onde cada valor de x e de y dá os valores que queremos.

Após terem encontrado a função que descrevia a situação proposta começaram a testar com a calculadora gráfica se os valores encontrados no início da investigação eram validos e se eram as únicas soluções da tarefa.

H: Vamos confirmar. Vamos à tabela e vemos um valor para x e o seu correspondente Y e vemos se dá a área e o perímetro igual.
A: Podemos usar os que achamos (4 e 4), substituir na função e ver se dá.
J: Sim dá. Dá 16=16.
H: Então a expressão está correcta.
F: O que temos de fazer agora, então?
A: Estudar a função. As assimptotas são as duas 2. Então o domínio é]2,+∞[e o contradomínio também.

Quando a Júlia conclui que para x=4 e y=4 o perímetro é igual à área, os colegas concordam com o resultado e passam de imediato a outras *conclusões*.

No final da investigação confirmaram que as soluções que tinham encontrado inicialmente eram as únicas soluções possíveis.

J: Mas aqui pede os números naturais não é?
H: Sim. Assim, só podemos ver no primeiro quadrante onde todos os números são positivos.
F: O domínio fica então IN\ {1,2}. E o contradomínio também.
H: Falta-nos ver se encontramos mais números que sejam válidos para o rectângulo.
J: Na tabela já vi até ao x=100 e não encontrei nenhum em que os dois sejam naturais.
A: Tem este, o -2 e o 1. Mas é negativo, por isso não dá.

Alguns tiveram dificuldades em provar porque é que só existiam três soluções, no entanto, houve casos que com o auxílio da calculadora gráfica e das suas potencialidades quer ao nível gráfico quer ao nível de tabela conseguiram tirar conclusões para alguns casos.

A grande maioria dos alunos argumentou que como a função tinha duas assímptotas, uma vertical de equação x=2 e outra horizontal de equação y=2, e atendendo às dimensões serem números naturais, as três soluções encontradas eram as únicas que verificavam as condições.

Relatórios individuais

Os alunos da turma em estudo elaboraram relatórios escritos e revelaram algum cuidado na sua realização. A capacidade de argumentar matematicamente sobre o processo de resolução é evidente em alguns casos. A forma como começaram a construir os relatórios foi muito diversificada. Por exemplo, uma aluna inicia o seu relatório argumentando sobre o processo de raciocínio desenvolvido pelo seu grupo na fase relativa à exploração inicial da tarefa, da seguinte forma:

• Começou-se por, individualmente, cada elemento do grupo ler a tarefa, de seguida em comum acordo, começámos por tentativa erro atribuindo aos lados do rectângulo vários valores, mas como é quase impossível atribuir todos os valores, decidimos igualar a área e o perímetro, visto que estes têm que ser de igual número; sendo que as medidas de comprimento dos lados do rectângulo são números naturais (positivos e inteiros).

$\boxed{\text{Área} = \text{Perímetro}}$

• $A = c \times L$

• $P = c + c + L + L$

$c \times L = c + c + L + L$

$cL = 2c + 2L$

$cl - 2c = 2L$

$c = \frac{2L}{(L-2)}$

$c = 2 + \frac{4}{(L-2)}$

→ Chegou-se então à seguinte expressão:

$$\boxed{c = 2 + \frac{4}{(L-2)}}$$

Figura 1 – Excerto do relatório de Júlia

Com o decorrer da investigação os alunos na sua maioria colocaram a função na calculadora gráfica e posteriormente fizeram uma restrição ao domínio. Em particular, Raul apresentou o seguinte janela de visualização e respectivo gráfico:

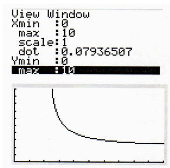


Figura 2 – Excerto do relatório do Raul

Na tentativa de encontrar as possíveis soluções e de forma a provar que eram apenas três (3,6), (6,3) e (4,4), o aluno utilizou o menu tabela da sua calculadora gráfica e considerou diferentes valores para x.

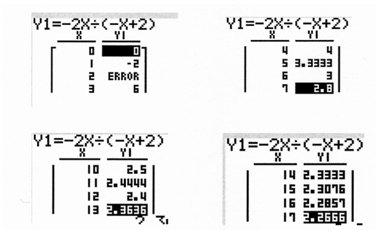


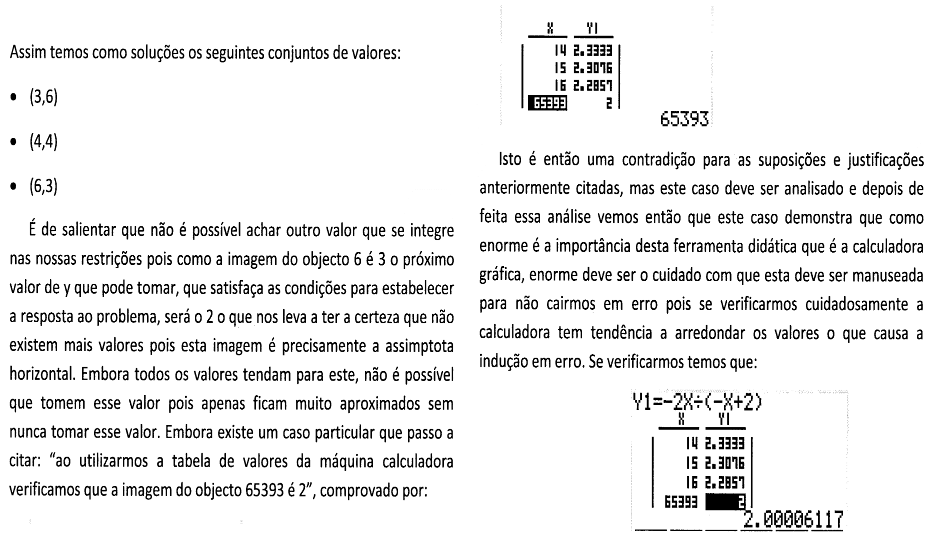
Figura 3 – Excerto do relatório do Raul

Raul, relativamente aos resultados obtidos argumenta que:

> a partir do valor de 10, isto é relativamente a x, as imagens correspondentes são todas superiores a 2 mas cada vez mais próximas

> deste valor pois este estabelece a assímptota horizontal pelo que podemos concluir que não encontramos mais nenhuma resposta que satisfaça os nossos requisitos para encontrarmos a solução para o problema.

Verificou-se que o grupo do qual este aluno fazia parte foi o único que conseguiu provar o porquê de só existirem três soluções, argumentando que:



Assim temos como soluções os seguintes conjuntos de valores:

- (3,6)
- (4,4)
- (6,3)

É de salientar que não é possível achar outro valor que se integre nas nossas restrições pois como a imagem do objecto 6 é 3 o próximo valor de y que pode tomar, que satisfaça as condições para estabelecer a resposta ao problema, será o 2 o que nos leva a ter a certeza que não existem mais valores pois esta imagem é precisamente a assimptota horizontal. Embora todos os valores tendam para este, não é possível que tomem esse valor pois apenas ficam muito aproximados sem nunca tomar esse valor. Embora existe um caso particular que passo a citar: "ao utilizarmos a tabela de valores da máquina calculadora verificamos que a imagem do objecto 65393 é 2", comprovado por:

Isto é então uma contradição para as suposições e justificações anteriormente citadas, mas este caso deve ser analisado e depois de feita essa análise vemos então que este caso demonstra que como enorme é a importância desta ferramenta didática que é a calculadora gráfica, enorme deve ser o cuidado com que esta deve ser manuseada para não cairmos em erro pois se verificarmos cuidadosamente a calculadora tem tendência a arredondar os valores o que causa a indução em erro. Se verificarmos temos que:

Figura 4 – Excerto do relatório de Raul

O Raul na exploração da tarefa desenvolveu o espírito crítico relativamente ao resultado que a calculadora gráfica lhe mostrava. No relatório é notório quando refere que é preciso ter cuidado com o seu manuseamento devido à tendência que a calculadora tem arredondar os valores, podendo assim, induzir os alunos em erro.

Verifica-se que alguns alunos não sentiram a necessidade de provar a validade da expressão encontrada para todos os números naturais.

No entanto, são várias as conjecturas que vão seguindo ou abandonando, ao longo da investigação na tentativa de poderem efectuar uma prova matemática para todos os rectângulos nas condições dadas, como quando consideram A=8 e P=8 e através da resolução de um sistema chegam à conclusão que não tem solução devido a um erro no cálculo.

De seguida demos um valor igual ao perímetro e á área, sendo os dois 8.

Então ficou:

A=8 (=) xy=8

P=8 (=) 2x +2y=8

Fizemos então o sistema:

$$\begin{cases} xy = 8 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} (=) \begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ 2 \times \frac{8}{y} + 2y = 8 \end{cases} (=) \begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ 2y^2 - 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

Chegamos a este ponto e verificamos que não existiam raízes, logo era impossível.

Figura 5 - Excerto do relatório da Célia

Em todos os grupos foram várias as conjecturas abandonadas, tendo constatado que na sua grande maioria devia-se a erros, nomeadamente ao resolver a equação obtida em ordem a uma das incógnitas, o ter obtido expressões para o perímetro erradas ($P = a^2 + b^2$**)**, ou ainda, tentar resolver a tarefa a partir de conceitos de trigonometria.

Reflexões dos alunos

A professora propôs aos alunos que no final do relatório deveria constar uma reflexão sobre a tarefa e a importância da utilização da calculadora gráfica. Os alunos salientaram que sentiram dificuldades iniciais na interpretação da tarefa, mas que foram ultrapassadas com o desenvolvimento da investigação.

Esta tarefa foi bastante interessante de realizar, muito motivadora e divertida, pois puxou pelo nosso raciocínio.

O grupo como sempre funcionou da melhor forma possivel; houve cooperação, troca de raciocinios e entreajuda por parte de todos os elementos do grupo.

Relativamente à calculadora gráfica, é muito bom para nós utilizarmos a calculadora pois com a utilização frequente da mesma aprendemos a utilizá-la melhor, dominando-a melhor.

Em questão, à utilização do quadro interactivo a minha opinião mantém-se, é importante aderir às novas tecnologias e é também uma forma de aprendermos e expôrmos as nossas conclusões de forma diferente.

A realização destas tarefas é muito importante pois contribui para a auto-aprendizagem de cada um.

Figura 6 – Reflexão de Júlia

Júlia revela a importância da colaboração entre os elementos do grupo e o reflexo que teve no desenvolvimento do raciocínio e na aprendizagem. É possível depreender que houve uma aprendizagem significativa em consequência da dinâmica criada em torno da argumentação matemática. A grande maioria dos alunos gostou de realizar a tarefa de investigação em grupo. Manifestaram também vontade de em futuras aulas desenvolverem tarefas do mesmo tipo. Um aluno concluiu que:

> A máquina calculadora gráfica representou um papel fundamental na realização desta tarefa pois sem esta não seria possível uma tão exacta resolução do problema bem como a rápida e mais fácil resolução dos cálculos intermédios para o estudo pormenorizado da função. Sem dúvida que estabelece um ponto fulcral e pertinente mas também concluímos desta tarefa que a calculadora deve ser manuseada e utilizada com cuidado e exactidão para não sermos induzidos em erro, como seríamos nesta tarefa se não tivéssemos conferido os resultados.

A utilização da calculadora gráfica tornou-se, para os alunos, um instrumento imprescindível para a investigação e referiram que sem este artefacto, a actividade não poderia ter sido tão bem explorada.

Conclusão

Com o presente estudo é possível concluir que o trabalho colaborativo com recurso à calculadora gráfica, ajudou a desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinar e de argumentar matematicamente. De acordo com Forman et al (1998) verificou-se que a interacção entre alunos foi promotora de uma aprendizagem significativa.

O facto da tarefa implementada ter sido de investigação desencadeou nos alunos uma necessidade de argumentar matematicamente para que as suas conjecturas fossem validadas por todos os elementos do grupo.

Relativamente à utilização da calculadora gráfica verificou-se que os alunos só recorreram a este artefacto quando sentiram a necessidade de verificar a validade das suas conjecturas. Assim, foi observado que a utilização da calculadora gráfica possibilitou e incentivou os alunos a argumentarem de forma crítica relativamente às possíveis soluções da tarefa.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M., Gomes, A., & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de matemática. Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa. *Educação Matemática, 70*, 18-26.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In A. M. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres, J. Duarte & T. O. Duarte, *Actas XVI SIEM* (pp. 13-43). Évora: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Blunk, M. L. (1998). Teacher talk about how to talk in small groups. In M. Lampert & M. L. Blunk (Eds.), *Talking mathematics in school: studies of teaching and learning* (pp. 190-212). Cambridge: University Press.

Burril, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: Research findings and implications for classroom practice.* Michigan: Michigan State University.

Douek, N., & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In Neil A. Pateman, Barbara J. Dougherty & Joseph T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA,* (Vol. 2, pp.341-348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualization. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp.249-256). Japan: Hiroshima.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In Thomas A. Romberg, Elizabeth Fennema & Thomas P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp.101-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Forman, E. A., Larreamendy-Joeens, J., Stein, M. K., & Brown, C. A. (1998). You´re going to want to find out which and prove it: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8* (6), 527-548.

Gracias, T. S., & Borba, M. C. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações da calculadoras gráficas. *Educação Matemática, 56*, 35-39.

Grize, J. B. (1996). *Loguique naturelle et communications.* Paris: Presses Universitaires de France.

Jensen, R. J., & Williams, B. S. (1993). Technology: Implications for middle grades mathematics. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.225-243). New York: Macmillan and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaber, L., & Longhart, K. (1995). Using graphing calculators to teach high school mathematics. In David Thomas (Ed.), *Scientific Visualization in Mathematics and Science Teaching* (pp.19-25). Charlottesville, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um projecto colaborativo com três professores do ensino básico.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: Cognitive unity or break? In Jarmila Novotná (Ed.), *Proceedings* (pp.70-80). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2001). Calculadoras gráficas: Que Utilização? In *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.233-252). Lisboa: APM.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática - 10º ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos. A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática, 100*, 85-88.

Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods.* Newsbury Park, CA: Sage.