RepositóriUM
Universidade do Minho

CMAT
Centro de Matemática da Universidade do Minho
Campus de Gualtar 4710-057 Braga Portugal
www.cmat.uminho.pt

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Centro de Matemática

Multiplicador de Lagrange num problema com restrição não constante no gradiente

Assis Azevedo[a] Fernando Miranda[a] Lisa Santos[a]

[a]Departamento de Matemática e Aplicações e Centro de Matemática, Universidade do Minho, Portugal

Informação

Palavras-chave:
inequação variacional
restrição no gradiente
multiplicador de Lagrange

Publicação original:
Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Número especial, julho de 2012, 19–22
Boletim SPM

Resumo

Prova-se a existência de solução, num sentido generalizado, de um problema com um multiplicador de Lagrange, para uma restrição arbitrária no gradiente e condição de Dirichlet homogénea na fronteira. Prova-se ainda a equivalência deste problema com a correspondente inequação variacional elíptica. A abordagem utilizada para provar o resultado de existência baseia-se na utilização de soluções de uma família aproximante de equações quasilineares elípticas.

1 Formulação do problema

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitz Γ. Dado $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ não negativo, definimos o convexo fechado

$$\mathbb{K} = \{v \in H^1_0(\Omega) : |\nabla v| \leq \varphi \text{ q.s. em } \Omega\}$$

e a inequação variacional

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), \quad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{1}$$

Dado $f \in L^2(\Omega)$, considere-se o problema de encontrar λ e u verificando

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot (\lambda \nabla u) &= f \quad \text{em } \mathscr{D}'(\Omega), && \text{(2a)}\\
u &= 0 \quad \text{em } \Gamma, && \text{(2b)}\\
|\nabla u| &\leq \varphi \quad \text{em } \Omega, && \text{(2c)}\\
\lambda &\geq 1 \quad \text{em } \mathscr{D}'(\Omega), && \text{(2d)}\\
(\lambda - 1)(|\nabla u| - \varphi) &= 0 \quad \text{em } \mathscr{D}'(\Omega). && \text{(2e)}
\end{aligned}$$

Relativamente à igualdade (2a) provaremos a seguinte formulação, ligeiramente mais forte,

$$\langle \lambda, \nabla u \cdot \nabla v \rangle_{L^\infty(\Omega)' \times L^\infty(\Omega)} = \int_\Omega f v, \; \forall v \in W^{1,\infty}_0(\Omega), \tag{3}$$

onde $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{L^\infty(\Omega)'\times L^\infty(\Omega)}$ representa o par dualidade entre $L^\infty(\Omega)'$ e $L^\infty(\Omega)$.

O problema (2) foi tratado por Brezis em [2] no caso em que $\varphi\equiv 1$ e f é constante. Este resultado foi estendido em [5] ao caso em que a restrição satisfaz $\Delta\varphi^2\le 0$. Um problema análogo, com restrição $\varphi\equiv 1$, com um operador mais geral e f não constante, foi estudado, num sentido generalizado, em [3].

2 Existência do multiplicador de Lagrange

Nesta secção apresentamos o teorema de existência de solução (u,λ) do problema (2), indicando também que u é a solução da inequação variacional (1). Serão enunciados os resultados utilizados na demostração deste teorema.

Teorema 1 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in W^{2,\infty}(\Omega)$ minorada por uma constante positiva, o problema* (2) *tem solução $(u,\lambda)\in W^{1,\infty}(\Omega)\times L^\infty(\Omega)'$. Além disso, se (u,λ) é solução de* (2)*, u resolve a inequação variacional* (1)*.*

Considera-se uma família de problemas aproximados, utilizando uma penalização sugerida em [4],

$$-\nabla\cdot\big(k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\nabla u^\varepsilon\big)=f_\varepsilon \qquad \text{em } \Omega, \tag{4a}$$

$$u^\varepsilon=0 \qquad \text{em } \Gamma, \tag{4b}$$

sendo $k_\varepsilon:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$, não decrescente, convexa e tal que

$$k_\varepsilon(s)=\begin{cases}1 & \text{se } s\le 0,\\ e^{\frac{s}{\varepsilon}} & \text{se } s\ge\varepsilon,\end{cases}$$

e onde $f_\varepsilon=f*\rho_\varepsilon$, sendo ρ_ε uma função regularizadora e $*$ o operador convolução.

Proposição 2 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in L^\infty(\Omega)$ positiva, o problema* (4) *tem solução única $u^\varepsilon\in\mathscr{C}^{2,\alpha}(\Omega)\cap\mathscr{C}(\bar\Omega)$.*

Lema 3 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in L^\infty(\Omega)$ com um minorante positivo e $1\le q<\infty$, existem constantes positivas C e C_q tais que, se $0<\varepsilon<1$ e u^ε é a solução do problema aproximado* (4) *então*

$$\begin{aligned}\|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)|\nabla u^\varepsilon|^2\|_{L^1(\Omega)}&\le C,\\ \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\|_{L^1(\Omega)}&\le C,\\ \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\nabla u^\varepsilon\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)'}&\le C,\\ \|\nabla u^\varepsilon\|_{\boldsymbol{L}^q(\Omega)}&\le C_q.\end{aligned}$$

Proposição 4 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in L^\infty(\Omega)$ com um minorante positivo, a família de soluções $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ dos problemas aproximados* (4) *possui uma subfamília que converge fracamente em $H^1_0(\Omega)$ para a solução da inequação variacional* (1)*.*

Teorema 5 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in W^{2,\infty}(\Omega)$ com um minorante positivo, então as soluções u^ε dos problemas aproximados* (4) *pertencem a um subconjunto limitado de $H^2_{loc}(\Omega)$.*

Proposição 6 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in W^{2,\infty}(\Omega)$ com um minorante positivo, se u^ε é a solução do problema aproximado* (4) *e u é a solução da inequação variacional* (1)*, então*

$$u^\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}u \ \ \text{em} \ \ W^{1,p}_0(\Omega),\ 1\le p<\infty$$

e também em $\mathscr{C}^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, para $0\le\alpha<1$.

De seguida apresentam-se os passos mais relevantes da demonstração do Teorema 1. Das estimativas apresentadas no Lema 3 resulta que existe uma subfamília de $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, também denotada por $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, tal que

$$k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{\Upsilon} \text{ fraco-}* \text{ em } \boldsymbol{L}^\infty(\Omega)'$$

$$k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda \text{ fraco-}* \text{ em } L^\infty(\Omega)'.$$

Mostra-se que

$$\langle \boldsymbol{\Upsilon}, \nabla u\rangle_{\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)'\times \boldsymbol{L}^\infty(\Omega)} = \langle \lambda, |\nabla u|^2\rangle_{L^\infty(\Omega)'\times L^\infty(\Omega)},$$

o que permite concluir que

$$\int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)|\nabla(u^\varepsilon - u)|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \langle \boldsymbol{\Upsilon}, \nabla u\rangle - 2\langle \boldsymbol{\Upsilon}, \nabla u\rangle + \langle \lambda, |\nabla u|^2\rangle = 0. \tag{5}$$

Uma vez que

$$\int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v = \int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla(u^\varepsilon - u)\cdot \nabla v$$
$$+ \int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f_\varepsilon v,$$

usando (5) obtém-se (3).

As demonstrações de (2b), (2c) e (2d) são relativamente simples.

Observando que, por definição de k_ε,

$$\big(k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2) - 1\big)\big(\varphi^2 - |\nabla u^\varepsilon|^2\big)^+ = 0,$$

algumas das relações anteriores permitem concluir (2e).

Os detalhes das demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser consultados em [1].

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CMAT - "Centro de Matemática da Universidade do Minho", através de fundos do FEDER pelo "Programa Operacional Factores de Competitividade - COMPETE" e pela FCT - "Fundação para a Ciência e a Tecnologia", Projeto Est-C/MAT/UI0013/2011.

Referências

[1] A. Azevedo, F. Miranda e L. Santos, Variational and quasivariational inequalities with first order constraints, *J. Math. Anal. Appl. 397* (2013) 738-756.

[2] H. Brezis, Multiplicateur de Lagrange en torsion elasto-plastique, *Arch. Rational Mech. Anal. 49* (1972) 32–40.

[3] V. Chiadò Piat e D. Percivale, Generalized Lagrange multipliers in elastoplastic torsion, *J. Differential Equations 114*(2) (1994) 570–579.

[4] C. Gerhardt, On the existence and uniqueness of a warpening function in the elastic-plastic torsion of a cylindrical bar with multiply connected cross-section, *Joint Sympos., IUTAM/IMU, Marseille, 1975*, pp. 328–342. Lecture Notes in Math., 503. Berlin: Springer, 1976.

[5] L. Santos, Variational problems with non-constant gradient constraints, *Port. Math. (N.S.) 59*(2) (2002) 205–248.