



Azcapotzalco

**Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco**

**División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Maestría en Ciencias e Ingeniería de Materiales**

CARACTERIZACIÓN DE VIBRACIONES MECÁNICAS
DE UN CRISTAL FONÓNICO CIRCULAR

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

PRESENTA:

ING. EZEQUIEL MARTÍNEZ SOLÍS



DIRECTORES DE TESIS:

DRA. MA. GABRIELA BÁEZ JUÁREZ

DR. RAFAEL A. MÉNDEZ SÁNCHEZ

Ciudad de México, 30 de agosto de 2021

Dedicatoria

Dedicado con mucho amor y afecto a mi madre, Bertha Solís Jiménez, por impulsarme a ser cada vez mejor en el camino del bien y por confiar en mí, aún en los peores momentos.

A mi padre, Francisco A. Martínez Vásquez, que siempre fui tu motivo de orgullo y presunción, por sembrar en mí una mente exitosa encaminado en la honradez y honestidad.

En cualquier parte del cielo que te encuentres, debes de saber que este logro más, es también gracias a tí; para tí papá con mucho cariño.

Muy en especial, con mucho cariño a mi esposa, Yuridia Miline Figueroa López, por su apoyo y comprensión.

Particularmente a mis hermanas y hermanos, Magdalena, Rosa, Julia, Ana, Damián, Ranulfo, Magín y Javier.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por DGAPA-UNAM, bajo el proyecto PAPIIT-IN111021 y por CONACyT a través de AI-S-33920.

Se agradece al Instituto de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México (ICF-UNAM) y al Centro Internacional de Ciencias CIC A.C., campus Cuernavaca Morelos, por brindarnos su apoyo y sus instalaciones para el desarrollo del prototipo de la presente tesis.

Se agradece el estímulo económico de posgrado al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), ya que con esta aportación económica fue posible sacar adelante la investigación del presente trabajo.

Estoy muy agradecido con mi Alma Máter, la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM). Por brindarme educación de la mejor calidad y también por brindarme apoyo económico extraordinario para la culminación de la última etapa de esta Maestría en Ciencias que concluyo con mucha satisfacción.

En especial a mi tutora y directora de tesis, a la doctora María Gabriela Báez Juárez y a mi director de tesis, el doctor Rafael Alberto Méndez Sánchez, por apoyarme con su invaluable hospitalidad, experiencia y orientación. Por su paciencia, y por sus comentarios científicos y críticas constructivas bien intencionadas, que me permitieron una mejor estancia en el transcurso de mis estudios de posgrado, y en suma contribuyeron al buen término de la presente tesis.

Agradezco mucho a la doctora Deyanira Angeles Beltrán y a la doctora Rosa María Luna Sánchez, coordinadoras en turno del Posgrado en Ciencias e Ingeniería en Materiales de la UAM.

Mi reiterado agradecimiento a los doctores Enrique Flores Olmedo, José Antonio López Toledo, y Arturo Arreola Lucas, por sus consejos y su apoyo incondicional tanto en la parte teórica como en la parte técnica del presente trabajo.

ÍNDICE

Resumen	7
<i>Abstract</i>	8
I. Introducción	9
II. Marco teórico	13
2.1. Materiales amorfos y cristalinos	13
2.2. El Teorema de Bloch	17
2.3. Cristales artificiales	18
2.3.1. Cristales fotónicos	19
2.3.2. Cristales fonónicos finitos	20
2.4. Vibraciones en anillos uniformes	23
2.4.1. Vibraciones flexionales en el plano	23
2.4.2. Vibraciones flexionales fuera del plano	26
2.4.3. Modos torsionales	28
2.4.4. Modos compresionales	29
2.5. Principios del Método del Elemento Finito para la solución numérica	30
III. Anillo circular	32
3.1. Simulación numérica de las vibraciones de un anillo elástico uniforme	32
3.1.1. Simulación numérica del anillo uniforme	34
3.1.2. Análisis y clasificación de modos de vibración del anillo uniforme	35
3.2. Espectro de frecuencias teórico de los modos para el anillo uniforme	40
IV. Cristal fonónico circular	45
4.1. Descripción geométrica y física del diseño del cristal fonónico circular	46

4.1.1.	Determinación de los parámetros relevantes del cristal fonónico circular	48
4.1.2.	Simulación numérica del cristal fonónico circular	50
4.1.3.	Análisis Post-Solución numérica del cristal fonónico circular	51
4.1.4.	Propiedades espectrales del anillo dentado: análisis paramétrico	53
4.1.5.	Patrones estacionarios de los distintos tipos de vibraciones del anillo dentado.	60
4.1.6.	Dinámica paramétrica de los espectros del cristal fonónico	62
V.	Conclusiones y Perspectivas	66
	Referencias	69
	Apendices	75
A.	Ecuaciones de onda para los cuatro tipos de vibración de un anillo uniforme	76
B.	Solución de la ecuación de onda para los modos flexionales en el plano, para un anillo uniforme	85
C.	Cálculo del segundo momento de inercia de área	88
D.	Solución de la ecuación de onda para los modos torsionales en el anillo uniforme	90

Índice de tablas

3.1. Clasificación de los 4 espectros de vibración del anillo uniforme	39
3.2. Cálculos teóricos para los modos flexionales en el plano	42
3.3. Cálculos teóricos para los modos flexionales fuera del plano	43
3.4. Cálculos teóricos para los modos torsionales del sistema uniforme	43
3.5. Cálculos teóricos para los modos compresionales del aro uniforme	44
4.1. Variación paramétrica de la profundidad δ	48
4.2. Clasificación de las frecuencias en los cuatro tipos de espectros de vibración del cristal fonónico circular	52
4.3. Clasificación de espectros de frecuencia numéricos del modelo con $\delta= 0.50$ cm	53
4.4. Conector a profundidad $\delta= 0.75$ cm y su solución numérica	54
4.5. Conector a profundidad $\delta= 1.00$ cm y cálculos numéricos	55

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de material fotónico	10
1.2. Ejemplo de material fonónico	11
1.3. Engranés en ingeniería	12
2.1. Estructura cristalina y amorfa	14
2.2. Estructura cristalina del Cloruro de Sodio	15
2.3. Red + Base	16
2.4. Bandas permitidas y prohibidas	19
2.5. Modelo de un cristal fotónico en 1D, 2D y 3D	20
2.6. Cristal fonónico unidimensional	21
2.7. Engranés más comunes en ingeniería mecánica	22
2.8. Anillo en tres dimensiones	23
2.9. Anillo uniforme como ejemplo de los modos flexionales en el plano	24
2.10. Diagrama de cuerpo libre de un anillo uniforme	24
2.11. Ejes de simetría que se forma en los modos flexionales en el plano para $n=2$, 3 y 4	26
2.12. Anillo uniforme bajo el efecto de modos flexionales fuera del plano	27
2.13. Diagrama de cuerpo libre del anillo, sujeto a esfuerzos que provocan modos flexionales fuera del plano y torsionales	28
2.14. Anillo uniforme donde se observan los modos torsionales	29
2.15. Enmallado fino como el que usa el método de los elementos finitos	31
3.1. Anillo elástico uniforme	33

3.2.	Anillo uniforme manufacturado en aluminio 1100	34
3.3.	Diagrama de flujo, solución numérica anillo uniforme	35
3.4.	Simulación numérica del anillo uniforme en 3D	36
3.5.	Solución numérica en función de frecuencia propia a 364.58 Hz	37
3.6.	Diferentes perspectivas para observar los modos flexionales en el plano	38
3.7.	Primer modo flexional en el plano a 383.75 Hz	40
4.1.	Celda unidad fonónica	46
4.2.	Cortes transversales de la celda y muesca o conector del cristal fonónico en forma de engrane	47
4.3.	Variación paramétrica δ	49
4.4.	Diagrama de flujo para la solución numérica del cristal fonónico circular . . .	50
4.5.	Enmallado del cristal fonónico circular	51
4.6.	Dimensiones geométricas macroscópicas del Cristal Fonónico Circular	56
4.7.	Surgimiento de las bandas permitidas y prohibidas para los modos flexionales en el plano	57
4.8.	Frecuencia VS número de modos, para las ondas flexionales fuera del plano .	58
4.9.	Surgimiento de las bandas fonónicas prohibidas y permitidas del cristal fo- nónico, para los modos torsionales	59
4.10.	Surgimiento de las bandas fonónicas prohibidas y permitidas del FPC, para los modos compresionales	60
4.11.	Modos flexionales en el plano en el cristal fonónico con $\delta=11.7$ mm circular .	61
4.12.	Primeros cuatro modos flexionales fuera del plano en el cristal fonónico circular	62
4.13.	Dobletes de modos torsionales en el cristal fonónico con $\delta=11.7$ mm circular	63
4.14.	Dobletes para los modos compresionales del cristal fonónico diseñado	64
4.15.	Espectro global de modos propios desde $\delta=0$ cm hasta $\delta=11.70$ cm para los cuarenta modelos	65
4.16.	Zoom del espectro total de frecuencias propias	65

1.1. Vista superior del diagrama de cuerpo libre	77
1.2. Elemento diferencial del anillo uniforme	78
1.3. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas transversales	80
3.1. Esquema para el cálculo del segundo momento de inercia de área	89

Resumen

El presente trabajo consiste en el diseño numérico de un cristal fonónico circular unidimensional en aluminio 1100. La forma final del diseño es un aro que consta de ocho dientes al interior del mismo, parecido a un engrane mecánico automotriz con dentadura interna. Cada uno de estos dientes realiza el papel de un átomo o una molécula; entre uno y otro diente se diseño un conector que enlaza los dientes formando una celda.

Se hizo un análisis de frecuencias propias usando el *software* COMSOL *Multiphysics* estudiando más de 40 diseños diferentes. Se encontró un sistema que presenta conectores capaces de formar bandas y brechas en espectro de la estructura periódica y se encontraron los modos de vibración de éste. Las cuatro familias de modos que aparecen en estos aros dentados son: modos flexionales en el plano, compresionales, torsionales y flexionales fuera del plano. Éste diseño, presenta una estructura de bandas fonónicas de frecuencias permitidas y prohibidas, principalmente en los modos flexionales en el plano y en los modos torsionales.

También se presenta las soluciones analíticas de las ecuaciones onda que mejor mostraron el surgimiento de las bandas permitidas y prohibidas (ondas flexionales en el plano y ondas torsionales) para el sistema uniforme. Reproducimos las expresiones analíticas con las que se efectuaron cálculos teóricos para este tipo de ondas. Los cálculos efectuados para este tipo de ondas presentaron un error porcentual entre lo teórico y numérico del 4.90 % y 0.94 %, en promedio, respectivamente.

Abstract

The present work consists of the numerical design of a one-dimensional circular phononic crystal in 1100 aluminum. The final shape of the design is a ring consisting of eight internal teeth, similar to an automotive mechanical gear with internal teeth. Each of these teeth performs the role of an atom or a molecule, between one tooth and another a connector is designed that links the teeth to form a cell.

An eigenfrequency analysis was done using COMSOL Multiphysics *software* studying more than 40 different designs. A system was found that presents connectors capable of forming bands and gaps in the spectrum of the periodic structure and its vibration modes were found. The four families of modes that appear in these serrated rings are: in-plane flexional, compressional, torsional, and out-of-plane flexional modes. This design presents a structure of phononic bands of allowed and prohibited frequencies, mainly in the flexional modes in the plane and in the torsional modes.

The analytical solutions of the wave equations that best showed the emergence of the allowed and prohibited bands (flexional waves in the plane and torsional waves) for the uniform system are also presented. We reproduce the analytical expressions with which theoretical calculations were made for this type of waves. The calculations carried out for this type of waves presented a percentage error between the theoretical and numerical of 4.90 % and 0.94 %, on average, respectively.

Capítulo I

Introducción

Los materiales cristalinos o cristales son sustancias, desde el punto de vista de la física del estado sólido, que tienen una distribución atómica de manera regular y periódica en el espacio tridimensional [1, 2, 3]. En ellos existe la repetición periódica de sus componentes; estos pueden ser átomos, un conjunto de átomos, moléculas o iones. Los cristales, son de vital importancia para la creación de nuevos materiales a través de sus propiedades electrónicas, mecánicas, térmicas, magnéticas y ópticas. Esto está directamente relacionado con el diseño de nuevos materiales como los materiales fotónicos o los fonónicos. Al incidir una onda en un cristal, ésta sufre una dispersión múltiple en los distintos átomos del material cristalino. Como estos átomos tienen asociado un potencial periódico, las ondas dispersadas por los átomos sufren la reflexión de Bragg cuando la diferencia de camino recorrido por diversas ondas es un submúltiplo de la distancia inter-atómica. De aquí surgen las brechas o bandas prohibidas, un rango en el cual no hay estados energéticos y por lo tanto, no logran transportarse las ondas. También surgen las bandas permitidas que son estados energéticos que permiten el transporte de ondas en el cristal [4, 5, 6, 7, 8, 9].

Dentro del campo de estudio de los materiales cristalinos, están los cristales artificiales, como por ejemplo los cristales fotónicos (ver Fig. 1.1). Estos son materiales compuestos de dos o más materiales dieléctricos con estructura periódica, funcionan a través de la dispersión de ondas electromagnéticas en su estructura. Al incidir luz en la estructura periódica de los cristales artificiales surge de nuevo una dispersión múltiple que da lugar a la modulación de la transmisión electromagnética y se producen bandas y brechas fotónicas, es decir, una estructura de bandas fotónica [10, 11, 12, 13].

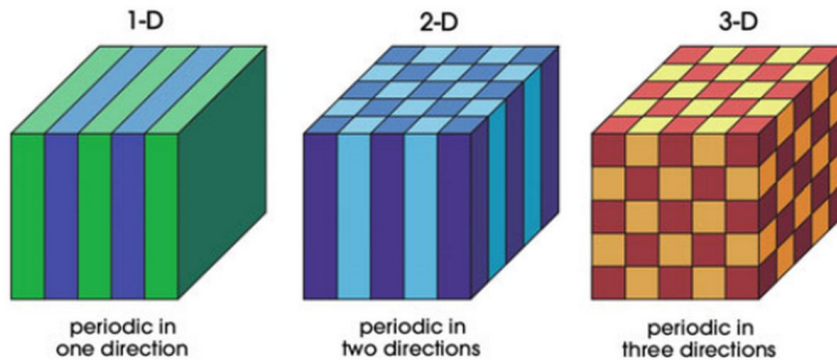


Figura 1.1: Modelos de un cristal fotónico en 1D, 2D y 3D. Los colores representan dos diferentes materiales con distinta propiedad física, es decir tienen su permeabilidad magnética (ϵ_1 y ϵ_2) y permitividad magnética (μ_1 y μ_2) diferentes [11, 12, 14]. Tomado de la Ref. [53].

Un material fonónico, es un segundo tipo de cristal artificial (ver Fig. 1.2). Los cristales fonónicos son similares en estructura a los cristales fotónicos, sólo que funcionan con ondas elásticas o acústicas en lugar de ondas electromagnéticas. Al igual que los cristales fotónicos, los cristales fonónicos tienen una estructura conformada por unidades idénticas con periodicidad en 1, 2 y 3 dimensiones. Las unidades pueden ser de dos o más materiales que presentan propiedades elásticas diferentes. Los cristales fonónicos son útiles para el control de ondas mecánicas y presentan un espectro de frecuencias propias que conforman una estructura de bandas fonónicas permitidas y prohibidas debido a su estructura repetitiva [10, 13, 14, 15, 16, 17].

Los cristales mecánicos son un tipo de cristales artificiales que se estudian en México, particularmente en el Laboratorio de Sistemas Dinámicos de la UAM-Azcapotzalco y en el Laboratorio de Ondas y Metamateriales del Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM, Campus Morelos. Estos cristales mecánicos son estructuras macroscópicas periódicas en una y dos dimensiones aunque también se podrían construir en tres dimensiones. La celda unidad puede ser una barra unidimensional, en forma de placas cuadradas, rectangulares o incluso en formas caóticas en las que se puede controlar el transporte de ondas mecánicas. Estos cristales mecánicos usualmente están fabricados en aluminio y sus propiedades de transporte han sido obtenidas teórica y numéricamente. Esto se ha comprobado experimentalmente usando una variación de la técnica conocida como espectroscopia acústica resonante. Los resultados de estas investigaciones muestran bandas y brechas desde unos cuantos Hertz hasta aproximadamente 110 kHz [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

El presente trabajo está motivado al considerar que tanto en la naturaleza como en diferentes disciplinas (ingenierías automotriz, en comunicaciones, en aeronáutica, etcétera), están involucrados sistemas con periodicidad angular como diferentes tipos de engranes (ver Fig. 1.3). Estos engranes son componentes mecánicos empleados para transmitir movimiento



Figura 1.2: En esta Figura se observa la escultura “el órgano”, de Eusebio Sempere, ejemplo de aislamiento acústico. Esta escultura fue construida sin saber las características de un cristal fonónico, es un apilamiento de tubos cilíndricos, orientados periódicamente, como se observa en esta figura, estas características llamo la atención a algunos estudiosos, confirmando que dicha escultura se trataba de un material fonónico con un aislamiento acústico notable en el rango audible. Tomado de la [15].

lineal y angular, y para transferir potencia mecánica a través de otros elementos de maquinas, mediante mecanismos o engranajes [24, 25]. Los dientes de los engranes mecánicos o coronas dentadas, presentan un ordenamiento localmente periódico, es decir, son periódicos en la variable angular, cual si fueran algún tipo de cristal artificial. La separación que hay entre un diente y otro sería el equivalente al conector fonónico. Uno de los dientes del engrane, más dos mitades de la muesca o conector sería el equivalente de la celda unidad de un cristal fonónico.

Los engranes están sometidos a movimientos repetitivos en su funcionamiento cotidiano dentro de diversas maquinas y motores. Por ello sus vibraciones son de interés. La pregunta que se plantea responder en esta tesis es si los engranes son un tipo de cristal mecánico. En otras palabras, *¿Es posible que los engranes mecánicos tengan un espectro de vibración formado por bandas y brechas como los cristales fonónicos?*

Para contestar la pregunta anterior, en el Capítulo II, se presenta un marco teórico que inicia por el estudio de los materiales cristalinos naturales y artificiales. Se comienza dando las propiedades de la celda básica o primitiva y del teorema de Bloch. En ese mismo Capítulo también se estudian los modos de vibración de anillos uniformes que son los modos flexionales dentro y fuera del plano, los modos torsionales y los modos compresionales. Se presentan también, en este mismo apartado, las ecuaciones ondulatorias que rigen su comportamiento.

En el Capítulo III se presenta el diseño asistido por computadora del anillo uniforme. En este mismo se resuelve numéricamente este anillo. El *software* usado para obtener las

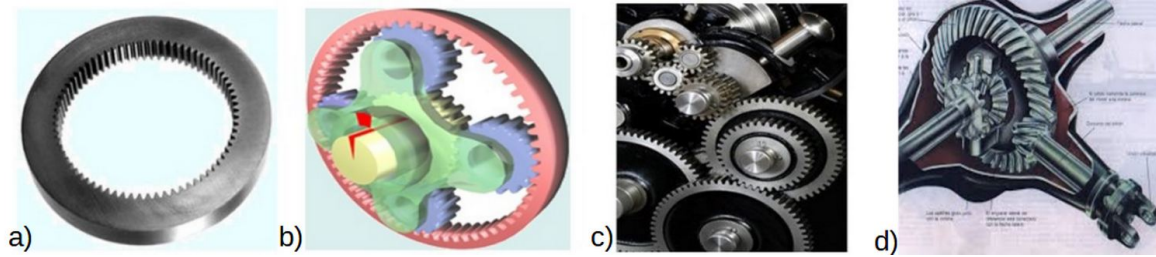


Figura 1.3: a) Es un engrane que constan de un anillo con una corona dentada al interior del mismo. b) En esta imagen se observa un engrane planetario, que constan de un engrane como el inciso a) y dentro cinco engranes más con dentadura externa, estos en conjunto son usados para el acoplamiento de naves satelitales. c) En esta imagen se observan un conjunto de engranes con dentadura externa, típicos de las cajas mecánicas de transmisión en automóviles. d) Podemos observar en un corte transversal, al conjunto de engranes con que funcionan los diferenciales de tracción trasera o delantera en automóviles. Tomado de *The Fundamentals of Planetary Gear Systems* y la Ref. [24, 25].

soluciones numéricas es COMSOL *Multiphysics*, que se basa en el método de los elementos finitos.

Posteriormente en el Capítulo IV se diseña el cristal fonónico circular. Este cristal se resuelve numéricamente, el anillo con dentadura interna, cual si fuera un engrane tipo corona. Los resultados obtenidos se exponen en el mismo Capítulo. Estos resultados muestran la clasificación de los modos de vibración del cristal fonónico circular en: modos flexionales dentro y fuera del plano, modos torsionales y modos compresionales (ver Tablas 3.1 – 4.5). La clasificación de los modos se realizó con el espectro de frecuencias propias que van desde aproximadamente 150 Hz, hasta por arriba de los 55 kHz. Dicho espectro es el resultado de los cálculos numéricos con COMSOL *Multiphysics*. La clasificación permite mostrar que el espectro se distribuye en bandas fonónicas permitidas y prohibidas. Se obtuvo un espectro de frecuencias propias para 40 aros con dentadura interna con diferentes parámetros (Ver Fig. 4.15). A partir de estos resultados se eligió el conector apropiado para el diseño, y se obtuvo un modelo final del cristal fonónico circular que podría maquinarse y medir su espectro de vibraciones en el laboratorio.

En el Capítulo V, se concluye haciendo énfasis que el modelo del cristal fonónico circular diseñado, es una estructura periódica macroscópica unidimensional en forma de anillo dentado. Queda claro del estudio presentado en esta tesis que los engranes mecánicos tienen un espectro de vibraciones constituidas por bandas y brechas.

Por último, se dan cuatro apéndices. En el Apéndice A se expone a detalle el desarrollo de las ecuaciones que rigen el movimiento un aro circular. En el Apéndice B se resuelve analíticamente la Eq. (2.5), que modelan los modos flexionales en el plano. En el apéndice C se calcula el segundo momento de área del aro uniforme y en el apéndice D se resuelve la ecuación para las ondas torsionales en el aro.

Capítulo II

Marco teórico

2.1. Materiales amorfos y cristalinos

Los materiales sólidos pueden clasificarse en materiales naturales y artificiales. Los primeros son los que podemos encontrar en la naturaleza, como una roca, un trozo de cuarzo, etcétera, mientras que los materiales artificiales requieren de la intervención de métodos de la ingeniería de materiales y de la física del estado sólido para su fabricación, a partir de los materiales naturales.

Para su estudio, desde el punto de vista del estado sólido, los materiales se clasifican en amorfos y cristalinos, según la estructura atómica que presenten. En el primer caso, los átomos o moléculas que conforman el sólido, no poseen una estructura bien definida ni ordenada, como se observa en la Fig. 2.1(a). Estos materiales tienen un orden atómico únicamente en una pequeña parte y luego ésta se pierde. Así, el resto de la estructura del sólido amorfo tiene otro u otros ordenamientos atómicos diferentes. Algunos ejemplos de estos materiales son los vidrios, los plásticos y el caucho [1].

Una repercusión directa de la disposición irregular de los átomos o moléculas en un sólido amorfo, es la diferencia de intensidad que toman las fuerzas intermoleculares entre las mismas. De ahí que, por ejemplo, la fusión se alcance a distintas temperaturas, según la proporción de las partículas que forman la muestra. Esto hace que un sólido amorfo no tenga un punto de fusión definido, sino que dicha transformación acontece en un intervalo de temperatura [1, 2, 3].

Por el contrario, los átomos de los sólidos cristalinos están dispuestos de forma bien definida y con un ordenamiento de largo alcance, ver Fig. 2.1(b). El ordenamiento atómico en los sólidos cristalinos se puede describir representando a los átomos en los puntos de intersección de una red tridimensional infinita. Cada red espacial, que describe una estructura atómica cristalina, se genera a partir de una celda unitaria de átomos que se repiten periódicamente.

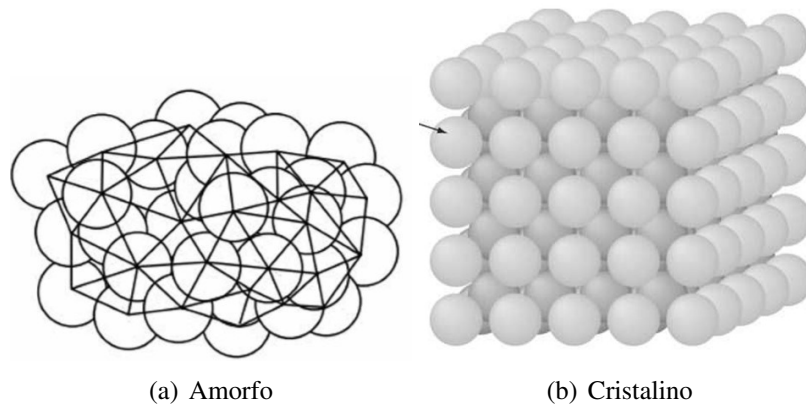


Figura 2.1: (a) Estructura de un material amorfo: las esferas representan los átomos del material. El centro de las esferas (átomos) están ubicados en los nodos de una red irregular. Esta estructura representa un ordenamiento atómico de muy corto alcance, es decir que tienen un orden en una pequeña región del material y luego éste se pierde. Así, el resto de la estructura del sólido tiene otro u otros ordenamientos atómicos diferentes [1]. (b) estructura de un material cristalino: en estos materiales las esferas (átomos) están dispuestos en los nodos de una red claramente periódica en las tres direcciones espaciales. Tomado de la Ref. [1, 2].

camente en el espacio [1, 2].

Los materiales cristalinos tienen propiedades mecánicas, térmicas y eléctricas, además desde el punto de vista microscópico también presenta un espectro de energía con estructura de bandas y brechas electrónicas [3, 4, 5]. La capacidad que tienen éstos materiales, es permitir o no el paso de las ondas en la periodicidad de su estructura, va a depender principalmente del tipo de cristal y del ángulo de incidencia con que la fuente este perturbando el sólido cristalino. Los modelos teóricos para estudiar los sólidos cristalinos, se basan tanto en la periodicidad espacial de su estructura atómica, como en la alta simetría que estos presentan [5, 6].

Para el estudio de los materiales cristalinos es necesario apoyarse de una estructura denominada red, formada por una infinidad de puntos. A cada punto se le asocia un grupo de átomos ligados entre sí. A este grupo de átomos se les llama base y cuando estos son repetidos periódicamente en el espacio, conforman un todo que en física del estado sólido es conocido como estructura cristalina. En la Fig. 2.2, se muestra una estructura cristalina que sirve para representar al Cloruro de Sodio. Las esferas grandes representan los átomos de cloro y las esferas de menor diámetro corresponden a los átomos de sodio.

Se puede estudiar la morfología de los sólidos cristalinos desde su periferia, pero si se estudian en su estructura interna, puede saberse más a detalle la posición espacial de sus átomos, respecto a los átomos adyacentes. Para esto se usan los vectores de traslación de la red, estos son denotados por, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (para el caso en tres dimensiones 3D). Esta notación sirve para reproducir la periodicidad espacial de los átomos de la red cristalina. Es decir, la

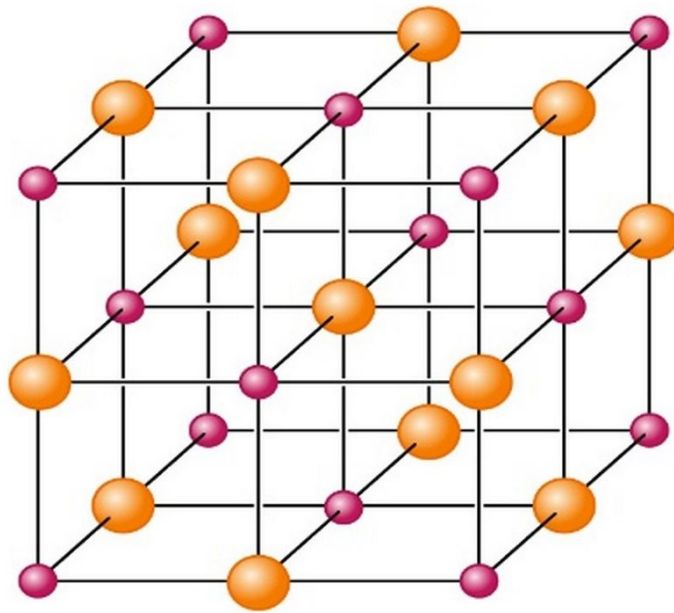


Figura 2.2: Estructura cristalina del Cloruro de Sodio. Las esferas grandes representan a los átomos de cloro y las esferas pequeñas a los átomos del sodio. Estos se repiten periódicamente en el espacio tridimensional, sobre una red cuadrada. Tomado de *Minerals and Rocks; coauthor of Manual of Mineralogy, University of New Mexico*.

distribución atómica es la misma en espacio 3D, tanto si se examina desde una posición \vec{r} , como desde cualquier posición \vec{r}' , expresada en términos de los vectores de traslación como:

$$\vec{r}' = \vec{r} + u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3, \quad (2.1)$$

donde u_1, u_2, u_3 , son números enteros. La red generada a partir de la expresión (2.1) es periódica en el espacio tridimensional (en dos dimensiones se define de forma similar). Entonces al asociar una red a una base de vectores, se obtiene una estructura cristalina particular [5, 6, 7], es decir,

Red+Base =Estructura Cristalina

Una estructura cristalina, también puede representarse esquemáticamente por medio de algún conjunto de figuras en particular. Considere, por ejemplo, una red de rectángulos y la base como un conjunto de figuras en forma de estrella, al sumar los dos conjuntos, da como resultado un tipo de estructura cristalina en dos dimensiones, como se observa a continuación en la Fig. 2.3 (Basado en [7, 8]). El vector \vec{T} , que representa la ubicación determinada de una posición de la estructura cristalina, se puede expresar como una operación de traslación sobre la red, en términos de los vectores de traslación cristalográfica. Este vector T se expresa matemáticamente (para dos dimensiones) como:

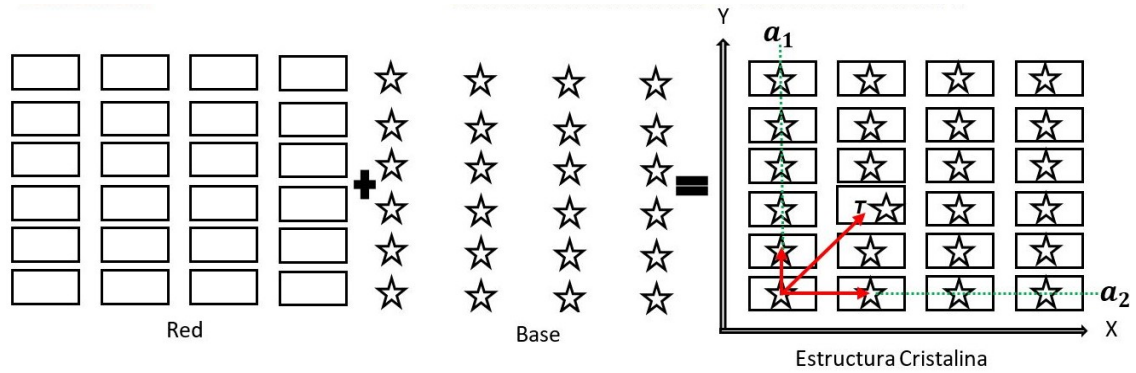


Figura 2.3: En esta imagen se observa la Red, representada por medio de rectángulos y la Base por medio de símbolos de estrellas. Al unir ambos conjuntos, se obtiene una estructura cristalina, en dos dimensiones. Los vectores de traslación de la red \vec{a}_1 y \vec{a}_2 , se indican en color rojo, en dirección de los ejes de coordenadas X y Y . Mientras que el vector de traslación \vec{T} , se indica con la flecha de mayor tamaño (**una Base + una Red**). Esta figura se diseñó basada en la Ref. [1, 2, 3].

$$\vec{T} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

Un ejemplo adecuado para comprender el vector de traslación, es la estructura cristalina bidimensional, como se observa a la derecha de la Fig. 2.3. A la derecha de esta figura, se puede observar que al cambiar de posición en el plano XY , los vectores a_1 y a_2 (ejes cristalinicos en dos dimensiones), la red y la base, denotadas por los rectángulos y las figuras en forma de estrellas, permanecen invariantes al presentarse una traslación T , esto es por la periodicidad y la simetría que tiene la estructura cristalina. Los ejes cristalinicos están denotados por a_1 y a_2 en dos dimensiones, representados con las flechas en color rojo y la flecha más grande es la traslación T correspondiente. Es preciso notar que la estructura cristalina está representada por un conjunto de rectángulos que permanecen invariantes ante una traslación. Algo similar sucede cuando en lugar de rectángulos, se empleen círculos o esferas en tres dimensiones, las traslaciones y rotaciones con los vecinos próximos deja inalterada la estructura cristalina.

En general, las operaciones de simetría que se realizan en una estructura cristalina, hacen que ésta se transforme en sí misma, sin presentar alteración. Cuando esto ocurre, se dice que la estructura cristalina es invariante ante esa transformación o tiene esa simetría. Si la red es periódica, entonces es invariante ante traslaciones espaciales específicas. Otro tipo de operaciones de simetría, para este tipo de estructuras, son las operaciones de rotación o de reflexión [3, 4].

2.2. El Teorema de Bloch

En física del estado sólido, una estructura cristalina es un sistema periódico que consiste en una distribución regular de átomos en el espacio a escalas microscópicas como macroscópicas. En los sólidos cristalinos, sus constituyentes periódicos están unidos entre sí, por medio de enlaces atómicos. Cuando estos sistemas periódicos son excitados por medio de ondas electrónicas, los acoplamientos entre los átomos vecinos, hace que la excitación se propague en el volumen del cristal [1, 2, 4, 5].

Las excitaciones en la estructura cristalina se describen por ondas que tienen que ser compatibles con la simetría del cristal, es decir, los puntos r y $r + T$, son iguales para cualquier vector r del grupo de traslación del cristal. Por ello cualquier excitación debe tener un comportamiento equivalente en esos dos puntos. En contraste con lo anterior, por ejemplo si $\psi(r)$, es una onda en un sólido, los valores en los dos puntos si acaso deben diferir a lo más, en un factor de fase [4, 5, 7, 8], es decir,

$$\psi(r + T) = \psi(r)e^{ikT} \quad (2.3)$$

en donde, r es la posición, k el vector de onda (un número real) y T el vector de traslación.

Este resultado sirve para describir el movimiento de los electrones y es conocido como teorema de Bloch. Éste establece que la función de onda obtenida de la ecuación de Schrödinger en un cristal (autoestado del electrón, Eq. (2.3)), se escribe como el producto de una onda plana (e^{ikT}), y una función periódica $\psi(r)$ llamada función de Bloch. La función de Bloch es cualquier función periódica cuya periodicidad deberá ser igual a la periodicidad de la red cristalina [5, 7, 8, 32, 33].

El vector del número de onda, se obtiene al imponer las condiciones de contorno que satisfaga la función de onda $\psi(r)$. La existencia de condiciones de contorno implica que el vector de onda está cuantizado, lo que significa que existe un conjunto de valores compatibles con las condiciones de contorno impuestas; esto implica que el espectro de energía, también esté cuantizado. El espectro de energía, asociado a sistemas periódicos, es discreto, y tiene una estructura de bandas y brechas como se expondrá más adelante. A la entidad ondulatoria elemental de energía se llama cuanto de energía. Las excitaciones que se propagan, particularmente en cristales [5, 7, 31, 32, 33], tienen las siguientes características:

- ⊙ Las excitaciones elementales son estacionarias.
- ⊙ Las excitaciones elementales están descritas por funciones de onda de la forma:

$$\psi(r)_k = u_k(r)e^{ik \cdot r} \quad (2.4)$$

En donde, $\psi(r)_k$ es la función de onda, $u_k(r)$ es una función periódica que contiene la periodicidad de la red (estas funciones verifican de forma trivial la Eq. (2.4)), r es la posición y k el vector de onda (un número real).

- ⊙ De acuerdo con la característica anterior, un estado arbitrario cualesquiera del sólido es posible describirlo como una superposición de excitaciones elementales. Las excitaciones elementales son estados propios del hamiltoniano correspondientes a vectores de onda bien definidos. Así, cualquier función de onda, definida en un sólido cristalino, puede expresarse como combinación lineal de esas excitaciones.
- ⊙ Considerando el principio de dualidad onda-partícula, se asocia a cada excitación elemental, una cuasipartícula virtual de energía, y una cantidad de movimiento asociada a cada frecuencia específica. En este sentido surge la cuasipartícula asociada a cada tipo de perturbación. Se definen los fonones como una cuasipartícula asociada a las vibraciones mecánicas. Estos fonones también se definen como modos cuantizados que se encuentran vibrando en la red cristalina, que están íntimamente relacionados con los modos vibracionales de un sólido cristalino cualesquiera.
- ⊙ El principio de dualidad onda-partícula, permite calcular el número de excitaciones elementales que hay en un determinado tipo de sólido cristalino, con características específicas.
- ⊙ Para el caso de sólidos cristalinos, se puede mostrar que el conjunto de niveles discretos de energía, asociados a las excitaciones elementales (llamado en la literatura *espectro de energía*), tiene una distribución en intervalos de energía llamadas las bandas de energía permitidas (solapamiento de los niveles energéticos de un sistema cristalino, el cual aumenta en un número discreto a medida que incrementa el número de átomos, moléculas, electrones, etcétera del sistema) (ver Fig. 2.4). Estas se encuentran separadas entre sí por las bandas prohibidas, que son intervalos de frecuencias en los que no hay ningún nivel de energía de las bandas permitidas del sistema. La energía al interior de las bandas permitidas corresponden a excitaciones elementales [3, 4, 5, 7, 8, 9, 32, 33, 34, 35].

2.3. Cristales artificiales

Entre los sólidos cristalinos artificiales resaltan, por su importancia en la ingeniería de materiales y en física del estado sólido, los cristales fotónicos y los cristales fonónicos, los cuales se exponen a continuación.

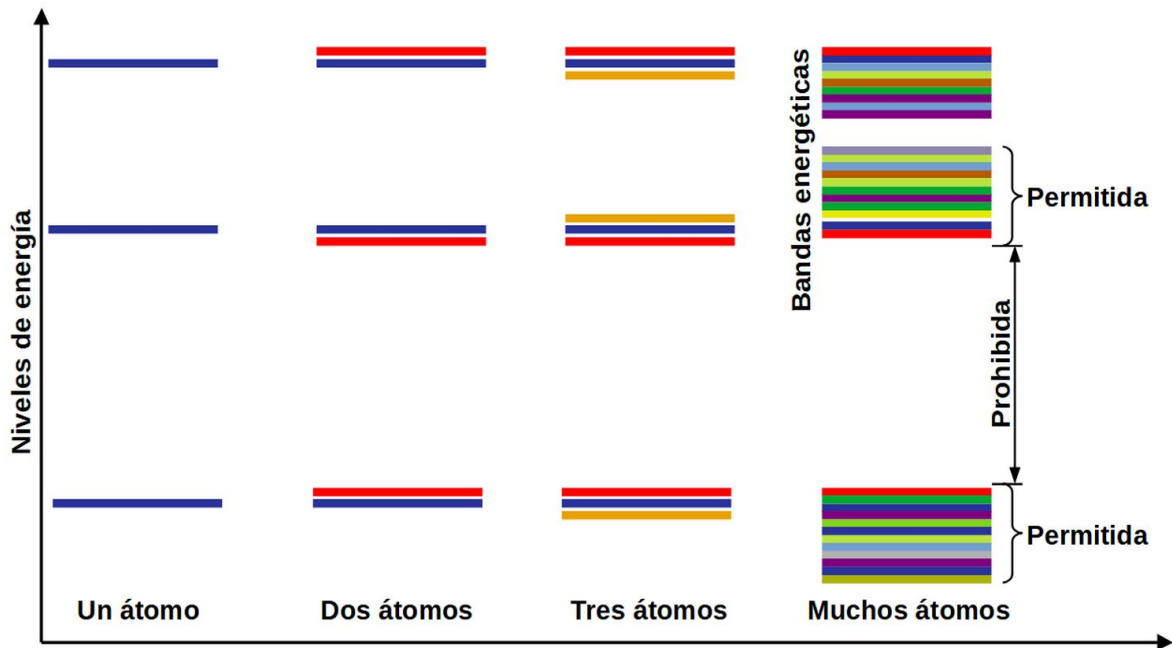


Figura 2.4: En esta imagen se observa la estructura de las bandas, cuando se tiene un sistema de un sólo átomo o una celda unidad, el surgimiento del espectro energético es de un solo nivel (como se observa a la izquierda de esta imagen), aunque solo se aprecian 3 niveles, el espectro tiende al infinito verticalmente. Cuando se trata el caso de un sistema más grande de dos átomos en lugar de uno, el espectro no es el mismo que el caso monoatómico, si no que el espectro energético consta de 2 niveles creciendo de forma similar en el eje vertical. A si que para tres átomos, tendremos 3 niveles, pero cuando se tiene un sistema periódico conformado por muchos átomos, tendremos el surgimiento de las bandas permitidas y prohibidas. Notese que cuando pasamos de un sistema con una celda a un sistema con muchos átomos, los niveles permitidos se van distribuyendo alrededor del primer nivel del sistema monoatómico. Esta figura se diseñó basada en la Ref. *Silicon, Circuits, and the Digital Revolution* [33].

2.3.1. Cristales fotónicos

Los cristales fotónicos, son materiales diseñados de tal forma que su función dieléctrica varía periódicamente en el espacio tridimensional, son estructuras con índices de refracción diferente. Este tipo de cristales pueden estar diseñados de dos o más tipos de materiales, por lo que su estructura cristalina tiene constantes dieléctricas diferentes [10, 11, 12].

Debido a que los cristales fotónicos están constituidos de uno o más materiales, es decir tienen permitividad eléctrica (ϵ_1 y ϵ_2) diferente a lo largo de su estructura periódica. Las permeabilidades magnéticas (μ_1 y μ_2) también son diferentes [12, 14, 28, 36, 37, 38]. Cuando las ondas electromagnéticas inciden en la estructura de un cristal, se encuentran con un potencial que varía periódicamente en el espacio tridimensional. Esto hace que las ondas se propaguen sólo a determinadas frecuencias y surge la estructura de banda fotónica. El sur-

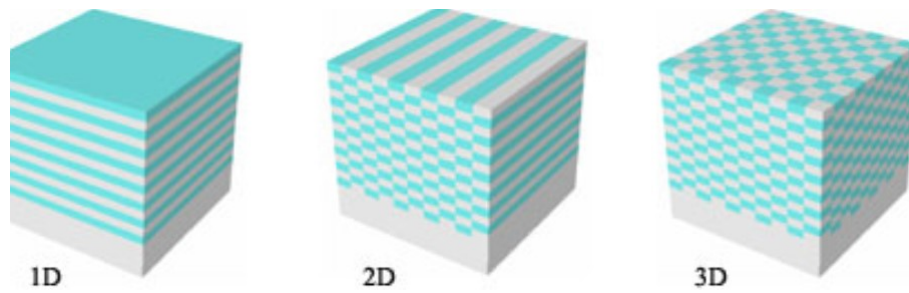


Figura 2.5: Modelo de un cristal fotónico en 1D, 2D y 3D. Los colores representan dos materiales diferentes con distinta propiedad física, es decir tiene su permeabilidad magnética (ϵ_1 y ϵ_2) y permitividad magnética (μ_1 y μ_2) diferentes. Note que se habla de un material fotónico en 1D, si la propagación del material o los materiales con que esté diseñado, es hacia una dirección, para este caso la propagación es verticalmente. Cuando la propagación de los materiales con que esta constituido el diseño fotónico se da por ejemplo tanto vertical como horizontalmente, es el caso del diseño del material fotónico en 2D, algo similar sucede para el caso en 3D. Tomado de la Ref. [11, 12, 14].

gimiento de la estructura de bandas puede ser provocada si se controla la cantidad de luz incidente en el material con un diseño apropiado. Los materiales fotónicos pueden diseñarse de una a tres dimensiones, como se ve en la en la Fig. 2.5. Las estructuras básicas de estos cristales, para el control de ondas electromagnéticas, tienen dimensiones nanométricas, por lo que su diseño y fabricación es difícil [9, 10, 11, 13, 14].

2.3.2. Cristales fonónicos finitos

Los cristales fonónicos [10, 11, 12, 13, 14], son materiales estructurados con periodicidad espacial, que presentan propiedades análogas a la de los cristales fotónicos, para el control de la propagación de ondas mecánicas. El nombre de material fonónico, esta basado en las excitaciones elementales asociadas con la dispersión de partículas de ondas vibratorias que se conocen en física del estado sólido con el nombre de fonón. Un fonón es una cuasipartícula o modo cuantizado vibratorio localizado en las redes cristalinas y esta asociado con los modos vibracionales de un solido cristalino [7, 8, 13, 15, 16].

Estos materiales, son estructuras constituidas por dispersores periódicos (hacen el papel de la molécula, iones, átomo o grupos de átomos) compuestas por uno o más materiales. La función principal de estas estructuras es la dispersión de ondas mecánicas o elásticas (formación de la estructura de bandas fonónicas), por medio de la distribución de las ondas elásticas dispersadas localmente en la estructura del cristal. Con esto da lugar a un rango de propiedades espectrales en el espacio, a través del vector de onda, que es donde surgen las bandas fonónicas permitidas y prohibidas[13, 14].

Las bandas permitidas son un intervalo de frecuencias propias en donde las ondas elásticas logran transportarse en el sólido cristalino. Las bandas prohibidas son intervalo de frecuencias en las que las ondas elásticas no logran transportarse por el material fonónico

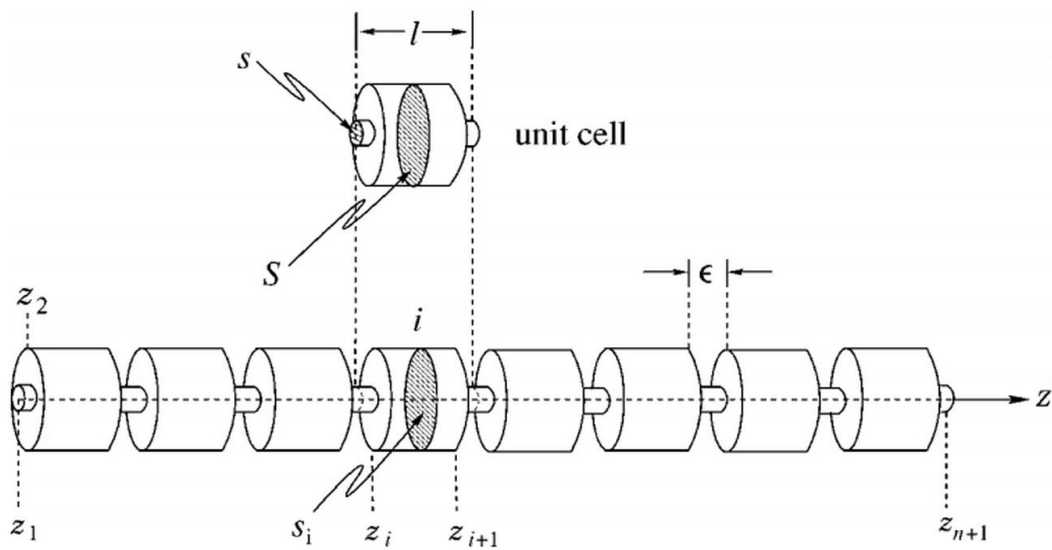


Figura 2.6: Se observa un material fonónico en una dimensión constituido por ocho celdas unitarias, cada celda tiene una longitud l con sección transversal circular (S), el conector entre celdas tiene una longitud ϵ . Este sistema presenta bandas prohibidas y permitidas fonónicas para ondas torsionales que se han estudiado teóricamente y hay mutuo acuerdo con la comprobación experimental. Tomado de la Ref. [19].

[15, 16, 17, 18, 19, 20]. Un ejemplo de material fonónico en una dimensión se observa en la Fig. 2.6. Este sistema periódico tiene características de un cristal fonónico, constituido teóricamente por ocho celdas unidad que ya presenta en su espectro finito bandas prohibidas y bandas permitidas fonónicas. Estas son similares al que se observa en la Fig. 2.4 para modos torsionales. Estos cálculos teóricos están en acuerdo con los resultados experimentales [19, 20, 21, 22].

Algunos cristales fonónicos fabricados funcionan para el control de ondas de ultrasonido y tienen algunas aplicaciones específicas: podrían funcionar como paredes aislantes. Los cristales fonónicos por tener una estructura macroscópica, pueden facilitar la verificación experimental para corroborar sus propiedades elásticas o mecánicas planeadas en un diseño determinado [19, 20, 33, 34].

En este proyecto, se propone el diseño y caracterización de un cristal fonónico unidimensional elástico, a partir de estructuras periódicas básicas en forma de anillo con dentadura interna, para el control de vibraciones mecánicas. Nuestro interés radica en que las estructuras anilladas aparecen en muchos mecanismos que, a lo largo del tiempo han sido de utilidad en diversas disciplinas. Las áreas en donde se observan con más frecuencia son: en aeronáutica, a través de los fuselajes de aviones [24, 25, 26, 39], en ingeniería mecánica, son comunes en piezas circulares como poleas y engranajes, como es el caso del juego de engranes que tiene una caja de transmisión automotriz (ver Fig. 2.7) [39, 40, 41]. También en ingeniería eléctrica, podemos mencionar maquinas rotativas, estatores y poleas de ventilación. En comunicaciones, en los engranajes satelitales o planetarios. Estos mecanismos sufren fatiga a

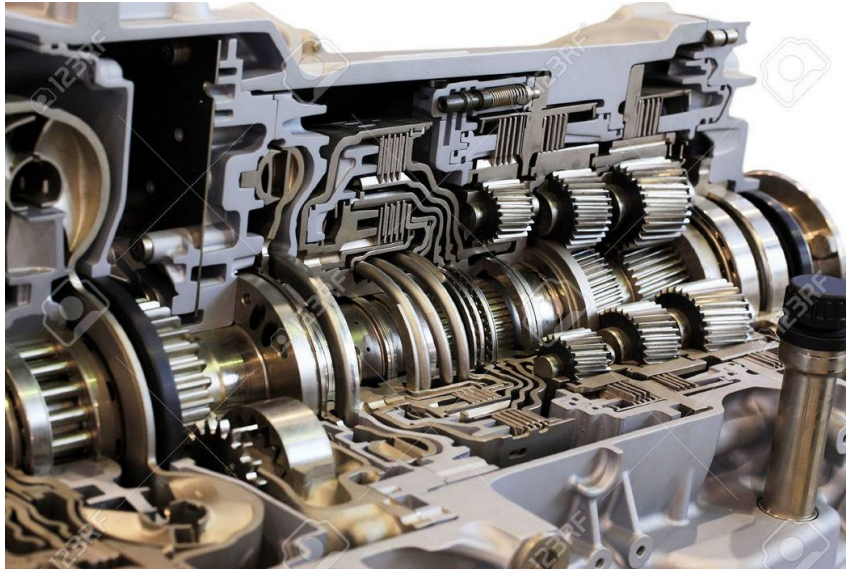


Figura 2.7: Corte transversal de una caja de transmisión automotriz. Aquí se puede notar que ésta, como en muchos otros casos en ingenierías como: mecánica, aeronáutica etc., funcionan principalmente por medio de engranes circulares, los cuales merecen atención espacial para prevenir fatiga o el deterioro parcial o total de estos sistemas. Tomado de 123RFAutomotive-transmission.

lo largo de su vida útil por vibraciones excesivas, lo cual se traduce en enormes cantidades de dinero para darles mantenimiento o sustituirlos cuando su daño es irreparable [41, 42, 43]. Todos estos sistemas se ven afectados por las vibraciones de sus estructuras macroscópicas, tales como barras y anillos [43, 44, 45, 46, 47], son sistemas semejantes a las estructuras de engranes, objeto de estudio para el presente trabajo de investigación.

En la siguiente sección, se tratará a detalle la teoría de anillos uniformes, enfatizando las ecuaciones de onda que modelan las cuatro formas de vibrar de este tipo de sistemas: ondas torsionales, compresionales, flexionales dentro y fuera del plano. El diseño para un cristal fonónico circular, es el objetivo principal de este trabajo, en donde el diseño, es un anillo con estructura periódica al interior del mismo, similar a un engrane con dentadura interna. Para este tipo de anillos estructurados, tal como es la forma geométrica del modelo de este trabajo, por su grado de complejidad, no existe teoría que sea exactamente de utilidad para el modelado y construcción de éste. Es por eso que se estudia primeramente en la presente investigación la teoría para vibración de anillos uniformes de acuerdo a [44, 45, 46, 47], para posteriormente adaptar esa teoría al modelo de nuestro interés. La aportación de la presente investigación, es el diseño de un cristal fonónico circular.

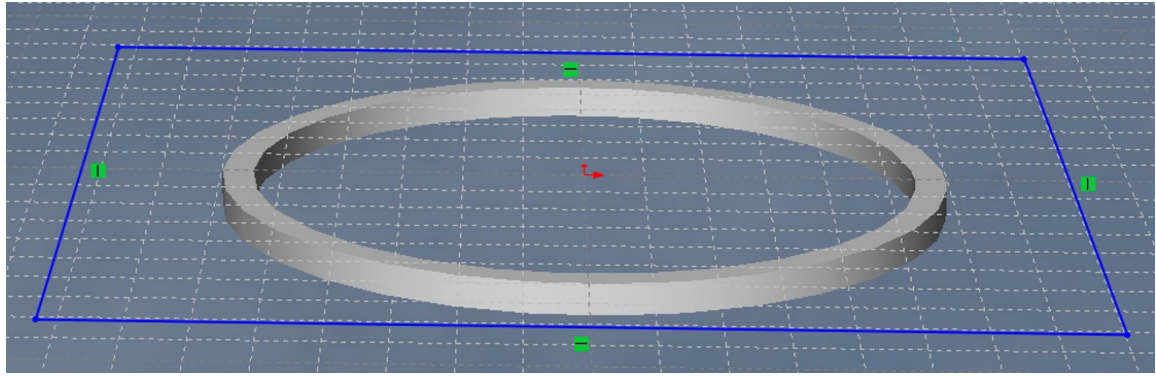


Figura 2.8: Anillo en tres dimensiones con sección transversal uniforme. También se observa un rectángulo en color azul, el cual es un plano imaginario paralelo a la orientación del aro, en lo subsiguiente se mencionaran los modos dentro y fuera del plano, y el plano del que se hace referencia es al plano imaginario antes mencionado en color azul. Basado en la Ref. [44, 45].

2.4. Vibraciones en anillos uniformes

Las vibraciones de anillos uniformes con sección transversal constante, se clasifican en cuatro tipos: Ondas flexionales dentro y fuera del plano, torsionales y compresionales. Cada una de estas formas de vibración serán descritas y discutidas en este apartado. A continuación, se definen los modos flexionales en el plano. La exposición de los cuatro modos de vibrar de este tipo de anillo es como el que se observa en la Fig. 2.8, con radio R y sección transversal cuadrada constante, como son las vibraciones flexionales en el plano que se definen a continuación.

2.4.1. Vibraciones flexionales en el plano

Los modos flexionales en el plano para este sistema elástico en particular, se caracterizan por deformaciones y desplazamientos, en el plano horizontal del anillo. Si se tomara un vídeo para describir este tipo de modos, se observaría el aro desplazándose horizontalmente en dirección radial, eventualmente, al aumentar el tiempo y la frecuencia de vibración, éste cambiaría de posición a un ángulo θ , y al poner en pausa dicho vídeo, se vería algo como lo que se observa en la Fig. 2.9. Las vibraciones flexionales en el plano, se pueden entender a partir de la Fig. (2.9). En esta figura, se observa el anillo con línea continua en posición de equilibrio, en ausencia de vibraciones. En presencia de vibraciones, el aro se desplazaría de una posición inicial hacia una segunda posición final, en dirección radial en un instante determinado. Este tipo de modos es producto de las deformaciones en el plano horizontal. En la literatura [44, 45, 46, 47] se puede encontrar la ecuación de onda que gobierna las vibraciones flexionales en el plano de un anillo homogéneo como el de la Fig. 2.9. Algunas consideraciones que se hacen para su deducción, son expuestas en detalle por S. S. Rao (2007) [45, 47], y son las siguientes:

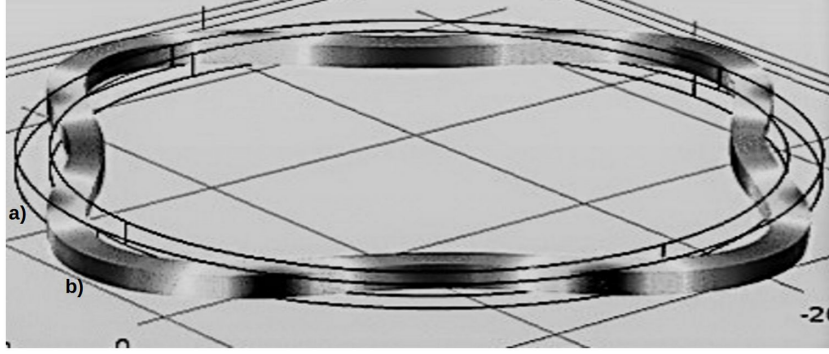


Figura 2.9: Anillo uniforme vibrando en un modo flexional en el plano.

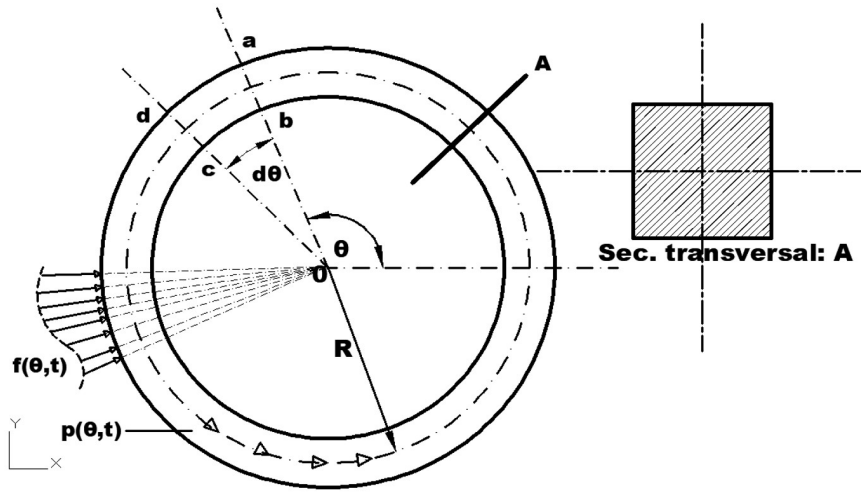


Figura 2.10: Diagrama de cuerpo libre para el aro uniforme, vista superior. A la izquierda de esta Fig. se puede observar la fuerza distribuida $f(\theta, t)$ con flechas en dirección radial hacia el centro del anillo. Se aprecia que el radio R llega hasta la línea punteada, en donde está actuando la fuerza tangencial externa $p(\theta, t)$. El elemento diferencial $d\theta$ corresponde a la sección circunscrita por los puntos $abcd$, y a la derecha de ésta, se encuentra el área “A” de la sección transversal cuadrada del sistema. Este diagrama se elaboró basado en [44, 45, 46, 47].

- (a) La línea central del anillo (ver Fig. 2.10) en un estado no deformado, constituye un círculo completo.
- (b) La sección transversal del anillo, es constante alrededor de todo el círculo central.
- (c) El anillo tiene frontera libre.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, la ecuación que se obtiene, para este tipo de vibraciones esta dada por [44, 45]:

$$\frac{\partial^6 U}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{R^4}{EI_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} - p \right) + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - U \right) = 0. \quad (2.5)$$

$U(\theta, t)$ de la ecuación (2.5) representa las deformaciones radiales, que es como se manifiestan las vibraciones flexionales en el plano. Así, el círculo central del anillo se ve de-

formado como consecuencia de las deformaciones horizontales. Un elemento diferencial del aro está limitado por $d\theta$, en cualquier posición angular θ , por la condición de uniformidad del sistema. R , representa el radio constante del anillo. El módulo de Young esta denotado por E y el segundo momento de inercia de área, con respecto al eje “y”, es I_1 . La fuerza de acción es $f(\theta, t)$, que actúa en dirección radial. Las fuerzas tangenciales externas son $p(\theta, t)$. También en dicha expresión esta involucrada la densidad ρ , del material de que este fabricado el aro. Aquí A , es el área de la sección transversal del anillo y t , la variable temporal, ver Fig. (2.10), para visualizar las variables descritas con anterioridad. En lo que sigue se supondrá un anillo libre de fuerzas, es decir, $f(\theta, t) = p(\theta, t) = 0$.

Para resolver la Eq. (2.5) se sustituye la siguiente separación de variables

$$U(\theta, t) = W(\theta)e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

en la Eq. (2.5) y se llega a,

$$\frac{d^6 W(\theta)}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 W(\theta)}{d\theta^4} + \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - \frac{\rho AR^4 \omega^2}{EI_1} \left(\frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - W(\theta) \right) = 0. \quad (2.7)$$

Al sustituir la función armónica,

$$W(\theta) = C_1 \sin(n\theta + \phi) \quad (2.8)$$

en la ecuación (2.7), después de hacer las derivadas y manipulaciones algebraicas correspondientes, se llega a una ecuación polinomial en n ,

$$(\cos \phi \sin(n\theta) + \sin \phi \cos(n\theta))(-n^6 + 2n^4 - n^2 - \frac{\rho AR^4 \omega^2}{EI_1}(-n^2 - 1)) = 0. \quad (2.9)$$

El resultado final que se obtiene al despejar ω^2 del segundo paréntesis de la Eq. 2.9, es la ecuación característica correspondiente a las frecuencias propias,

$$\omega_n^2 = \frac{EI_1}{\rho AR^4} \left(\frac{n^6 - 2n^4 + n^2}{n^2 + 1} \right). \quad (2.10)$$

En donde $n = \pm 2, \pm 3, \dots$

Los valores $n = 0, \pm 1$, se excluyen ya que arrojan una frecuencia de vibración nula, es decir, este valor representa el movimiento de cuerpo rígido del aro por lo que no hay alteración en la forma del sistema. Los detalles de como se llega a la Eq. (2.5) se pueden consultar en el Apéndice A y el procedimiento detallado para resolver la misma se da en el Apéndice B. En el Apéndice C puede consultarse el cálculo analítico del segundo momento de inercia de área I_1 .

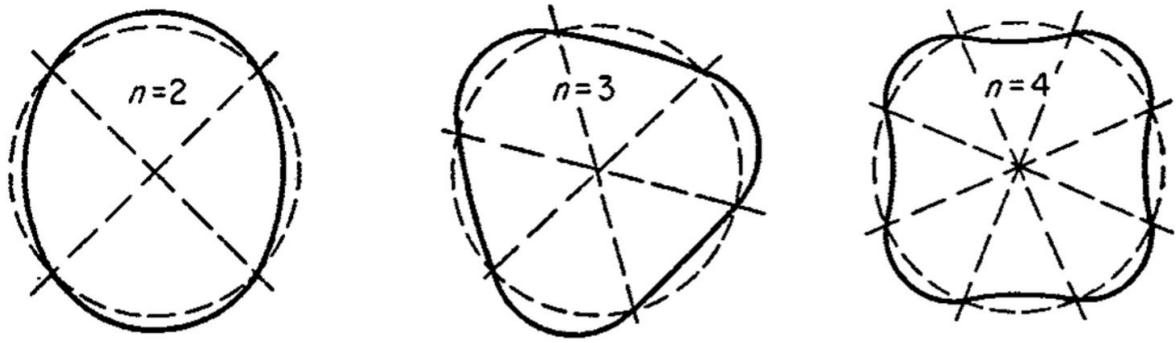


Figura 2.11: Vista superior de los modos normales flexionales en el plano de un aro circular uniforme para valores de $n=2, 3$ y 4 . Si se estudia esta figura de izquierda a derecha, se observa el anillo original en línea punteada y el anillo ovalado es el modo flexional para $n=2$, éste consta de cuatro nodos que se pueden notar en los extremos de las líneas punteadas. Para $n=3$ el sistema adquiere forma triangular en algún instante determinado, para este caso, en lugar de tener dos ejes de simetría, cuenta con tres y en los extremos de estos ejes se pueden notar los nodos que se forman, dando un total de seis nodos, algo similar sucede para el caso de $n=4$ para este mismo tipo de modos. Tomado de la Ref. [44].

En la Fig. 2.11, se muestran algunas formas de vibrar de la línea central del anillo, asociadas a los modos: $n=2, n=3$ y $n=4$. Estos tres modos de vibración muestran cuatro, seis y ocho nodos sobre el perímetro del anillo. Esto corresponde de forma equivalente a la longitud de dos, tres y cuatro longitudes de ondas a lo largo del perímetro del anillo [44, 45, 46, 47]. Estos patrones de vibración flexional en el plano corresponden a un anillo de masa y rigidez uniforme.

2.4.2. Vibraciones flexionales fuera del plano

Este tipo de vibraciones, a diferencia de lo que se estudió en la sección anterior, provocan deformaciones en la dirección perpendicular al plano del anillo. En la Fig. 2.12, se puede ver el comportamiento del anillo sometido a este tipo de vibraciones, en una perspectiva tridimensional. En la parte a) de dicha figura, se puede observar el anillo circular original en líneas punteadas, en ausencia de vibraciones. En la parte b) de esta figura se observa el sistema anterior vibrando en un modo flexional bajo, tiene localmente un perfil tipo parábola, cóncava hacia arriba, al flexionarse respecto al aro original. Este modo de vibración cambia armónicamente según el valor de la frecuencia de perturbación del sistema.

La ecuación para las ondas flexionales fuera del plano, que se estudian en esta sección satisface una ecuación diferencial de sexto orden, bien conocida en la literatura [44, 45, 46, 47]:

$$\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\rho AR^4}{EI_2} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) - \frac{\rho AR^4}{C} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) - \frac{R^4}{EI_2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \right) + \frac{R^4}{C} q + R^3 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{EI_2} \right) \left(\frac{\partial^2 m_0}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

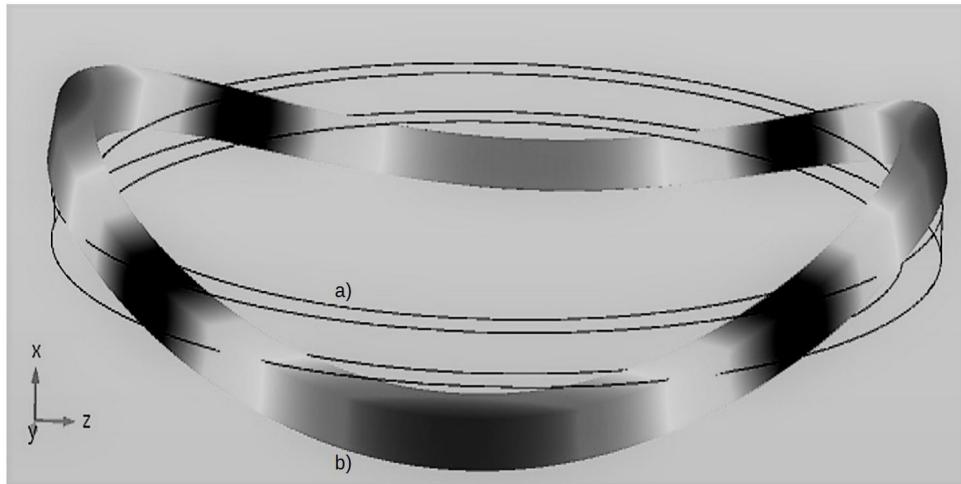


Figura 2.12: Modos flexionales fuera del plano. En el inciso a) se observa el aro antes de someterse a vibración y en la Fig. 2.12b) en escala de grises, es el anillo anterior bajo deformación en dirección perpendicular al plano, de tal manera que en un instante determinado este adquiere forma de una parábola cóncava hacia arriba. En la parte más baja de la curvatura del anillo se presenta la máxima deformación y el tono de grises más fuere (color negro) son puntos de inflexión o secciones del sistema donde se tiene la mínima deformación en la sección transversal, en dirección ortogonal al plano.

En donde: $v(\theta, t)$ es el movimiento transversal, ρ la densidad del material del anillo, A el área de la sección transversal del anillo de radio R , E el módulo de Young, I_2 el segundo momento de inercia de la sección transversal respecto a “ x ”, t el tiempo, θ la variable angular, $q(\theta, t)$ la fuerza transversal externa en dirección normal al plano medio del anillo, $C = GJ$ la rigidez torsional con G el módulo de corte y J el momento polar de inercia con respecto al eje “ y ”. El par externo distribuido es $m_0(\theta, t)$. La explicación detallada de la expresión Eq. (2.11), se puede consultar en el Apéndice A. Para tener una mayor claridad de las fuerzas involucradas en la vibración del anillo y que aparecen en la Eq. (2.11) se muestra en la Fig. 2.13 el diagrama de cuerpo libre del aro para este tipo de movimiento.

Para resolver la Eq. (2.11), se sigue la misma metodología que se usó para resolver la Eq. (2.5) de los modos flexionales en el plano. El cálculo en detalle se puede consultar en el Apéndice B. Al resolver la Eq. (2.11) se obtiene la ecuación característica, cuyas raíces dan la relación para estimar las frecuencias propias (ω_n) de los modos propios de vibración flexional fuera del plano:

$$\omega_n^2 = \frac{EI_2}{\rho AR^4} \left(\frac{n^6 - 2n^4 + n^2}{n^2 + EI_2/C} \right), \quad (2.12)$$

en donde $n = \pm 2, \pm 3, \dots$, ya que los valores $n = 0, \pm 1$ están asociados al movimiento del cuerpo rígido.

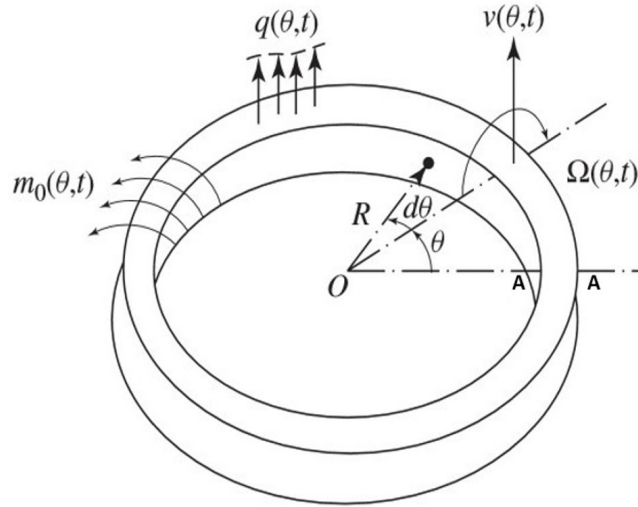


Figura 2.13: Diagrama de cuerpo libre del anillo, sujeto a esfuerzos que generan modos flexionales fuera del plano y modos torsionales. Se puede observar la dirección y la forma en que se da el momento externo $m_o(\theta, t)$, la fuerza distribuida externa actúa normal al plano medio del anillo como se ve en las flechas de esta figura y también se observa la deformación angular $\Omega(\theta, t)$. Tomado de la Ref. [45, 46, 47].

2.4.3. Modos torsionales

Las vibraciones torsionales se presentan cuando ocurre una deformación angular $\Omega(\theta, t)$, en la sección transversal (A) del anillo. Como respuesta de una perturbación externa específica, el anillo se tuerce. Un ejemplo de un modo de vibración de este tipo torsional, se puede ver en la Fig. 2.14. Este modo de torsión con $n=4$, a una frecuencia propia de 7910.20 Hz presenta cuatro nodos (gris oscuro). Entre estas regiones se observan deformaciones angulares $\Omega(\theta, t)$ que hacen que gire la sección transversal A del aro. La ecuación de onda correspondiente a las vibraciones torsionales es

$$\frac{C}{R} \frac{\partial^2(\Omega)}{\partial \theta^2} - \frac{EI_2}{R}(\Omega) = \rho J R \frac{\partial^2(\Omega)}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

donde al igual que antes, $C= GJ$ es la rigidez torsional, G el módulo de corte, J el momento polar de inercia de la sección transversal respecto a y , R el radio del anillo, ρ la densidad del material, $\Omega(\theta, t)$ la deformación torsional, θ ; la variable angular, t el tiempo, I_2 el segundo momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje “ x ” y E el módulo de Young. Esta ecuación es conocida en la literatura y es diferente de las vibraciones flexionales de las secciones anteriores porque es una ecuación diferencial de segundo orden. La solución de la Eq. (2.13) se puede obtener siguiendo un procedimiento análogo a como se procede con las ecuaciones (2.5) y (2.11) para modos flexionales dentro y fuera del plano. La solución detallada de la Eq. (2.13) se puede consultar el Apéndice D. En dicho apéndice se propone

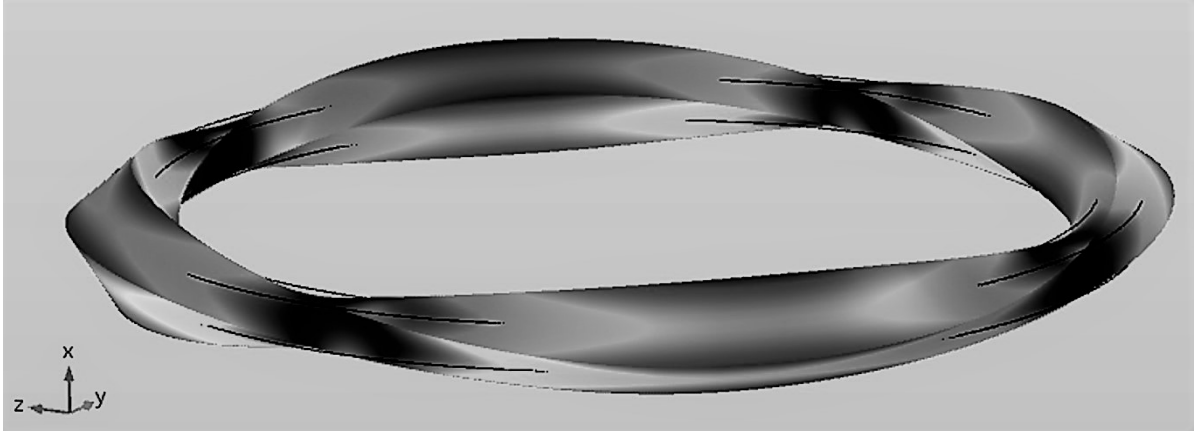


Figura 2.14: Anillo uniforme vibrando en modo torsional para $n=4$, con una frecuencia propia de 7910.20 Hz, para esta frecuencia en particular el sistema tiene cuatro nodos (región en color negro), aquí tiene lugar el máximo grado de deformación $\Omega(\theta, t)$, este efecto hace que el área A de la sección transversal sea menor y en las regiones de color gris sea mayor dicha área.

una solución armónica de la forma,

$$\Omega(\theta, t) = C_1 \sin(n\theta + \phi) e^{i\omega t}, \quad (2.14)$$

donde C_1 y ϕ son constantes. Sustituyendo esta expresión en la Eq. (2.13) y después de hacer las derivadas y las operaciones algebraicas correspondientes se llega a

$$(\cos(\phi)\sin(n\theta) + \sin(\phi)\cos(n\theta)) \left\{ \frac{-Cn^2}{R} - \frac{EI_2}{R} + \omega^2 \rho J \right\} = 0. \quad (2.15)$$

Despejando ω^2 de esta ecuación se obtiene la expresión para los modos propios para las ondas torsionales,

$$\omega_n^2 = \frac{Cn^2 + EI_2}{\rho J R^2}, \quad (2.16)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$

2.4.4. Modos compresionales

Los modos compresionales, también llamados extensionales, consisten en estirar (hay reducción en la sección transversal del aro) o contraer el perímetro del anillo (aumenta la sección transversal A). El sistema de ecuaciones que describe este tipo de vibraciones, expresadas en términos de los desplazamientos transversal u y radial U son:

$$P = \frac{EA}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - u \right) = \rho A R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \rho A R \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

En donde, $P(\theta, t)$ es la fuerza de tracción, ρ , A y R son la densidad, área de la sección transversal y radio del aro, respectivamente. También $u(\theta, t)$ es el movimiento radial transversal y $U(\theta, t)$ el movimiento radial con θ y t la variable angular y el tiempo, respectivamente. La U y u son dos funciones diferentes que tiene que ver cuando se estira y cuando se contrae el material del aro. Se requiere de un sistema de ecuaciones para estudiar las ondas compresionales, debido a que cuando el aro se comprime (alarga) en la dirección angular el aro se ensancha (angosta) en la dirección radial. Una vez más, se proponen funciones armónicas como solución:

$$u(\theta, t) = (C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta)e^{i\omega t} \quad (2.19)$$

$$U(\theta, t) = n(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta)e^{i\omega t} \quad (2.20)$$

El procedimiento para obtener la Eq. (2.21), es similar al del Apéndice B, para la solución de la Eq. (2.5). La expresión final para las frecuencias propias asociadas a las ondas compresionales del anillo es:

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2}(1 + n^2). \quad (2.21)$$

Para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$

2.5. Principios del Método del Elemento Finito para la solución numérica

Los cálculos numéricos se realizaron por medio de la plataforma COMSOL *Multiphysics*, éste es un software potente y robusto para solución de ecuaciones diferenciales parciales, con aplicaciones específicas, basado en el método numérico del elemento finito (FEM, del término en inglés, *finite element method*) [48, 54, 55]. Los distintos módulos de simulación que existen están enfocados a la simulación de problemas en áreas de: ciencias de la tierra, transferencia de calor, acústica, ingeniería química, ingeniería estructural, aplicaciones en física, etc. Este software también cuenta con una biblioteca de los materiales y un módulo para importación CAD (por sus siglas en inglés, Computer-Aided Design), el cual permite importar el archivo de un determinado diseño, realizado en otros programas de diseño [48].

El método de elementos finitos es un método numérico que se utiliza para solucionar de forma aproximada muchos problemas complejos en una, dos y tres dimensiones, como es el caso abordado en este trabajo. Es una técnica numérica para resolver sistema de ecuaciones diferenciales lineales dentro de una región del espacio, sujeta a ciertas condiciones de frontera [48, 49]. El método de elementos finitos consiste en dividir la región de interés (dentro de la que se va a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, sujeto a ciertas condiciones de frontera), en pequeños elementos finitos usando una malla cuadrada, hexagonal o en

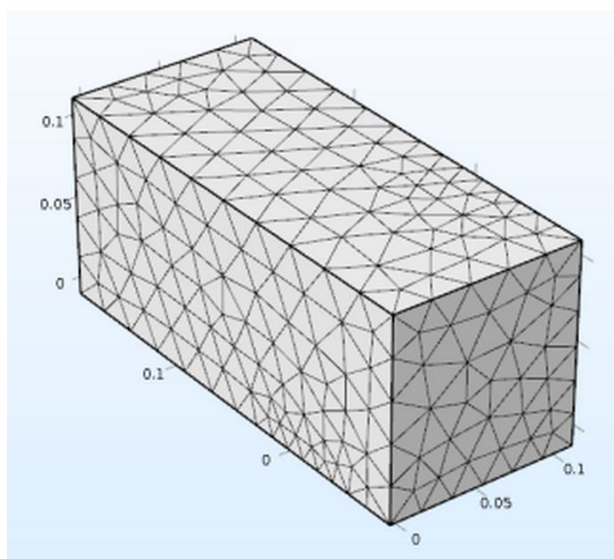


Figura 2.15: Se observa como es el enmallado fino en tres dimensiones que usa el método de los elementos finitos para dividir las regiones de interés de un modelo en forma de prisma, para aproximar la solución local del sistema mediante ecuaciones diferenciales que sirven para modelar para algún interés particular a través de los ejes coordenados X,Y y Z respectivamente. Tomado de la Ref. [49].

triángulos, en 1D, 2D o 3D, como es caso del prisma con enmallado fino triangular en 3D de la Fig. 2.15, o según sea el caso.

Dentro de cada elemento finito, obtenido a partir de la malla, se utiliza un conjunto de funciones polinomiales para aproximar el campo de desplazamiento físico relevante que es solución local al sistema de ecuaciones diferenciales que representan el fenómeno. En el caso del anillo homogéneo de la sección anterior, nos interesa el campo de desplazamiento estructural asociado a los distintos tipos de deformación del objeto, en cada una de las tres direcciones de coordenadas X, Y o Z [48, 49, 50]. La tensión por ejemplo, es calculada diferenciando el campo de desplazamiento en una dirección, acorde al estudio. El grado de exactitud de la solución numérica al problema, depende tanto del tipo de malla como del número de elementos finitos generados con cada malla. Entre más fina sea la malla, más exacta será la solución. Asimismo, entre más fina sea la malla, el tiempo de computo numérico será mayor, para que la plataforma COMSOL *Multiphysics* o cualquier otro programa de simulación numérica (basado en FEM) obtenga la solución del modelo [48, 49, 50, 51, 52, 54, 55].

Capítulo III

Anillo circular

En este capítulo se usará un *software*, asistido por computadora, para determinar las dimensiones de un anillo uniforme cuyas frecuencias propias (para cada tipo de vibración) se encuentren en el rango audible de 20Hz a 20kHz. Esto tiene dos objetivos: reproducir numéricamente los valores de algunas de las frecuencias más bajas, generadas a partir de las Eqs. (2.10), (2.12), (2.16) y (2.21), correspondiente a los modos flexionales dentro y fuera del plano; los modos torsionales y compresionales respectivamente. El segundo objetivo es que estos resultados puedan ser confirmados experimentalmente en un futuro, por lo cual se eligieron las dimensiones del aro para que sus frecuencias propias se encuentren en el intervalo acústico de frecuencias, donde el equipo experimental de los laboratorios del grupo de ondas y materiales funciona.

Una vez que se determinen las dimensiones del anillo uniforme será posible incluir en éste, estructuras periódicas que le darán las propiedades de cristal fonónico para algún tipo de vibraciones. Las simulaciones numéricas que se presentan a lo largo de este capítulo, fueron obtenidas mediante simulación numérica, usando COMSOL *Multiphysics*.

3.1. Simulación numérica de las vibraciones de un anillo elástico uniforme

El primer paso para diseñar el cristal fonónico, tipo engrane, es determinar las dimensiones de un anillo homogéneo que posteriormente será estructurado. En esta sección realizaremos simulaciones numéricas con COMSOL *Multiphysics* para asegurarnos de que los distintos espectros de frecuencias propias de la estructura homogénea se encuentren en el rango audible, el cual corresponde al intervalo de 20Hz-20kHz. Esto es con la finalidad de asegurar que el diseño obtenido en este estudio pueda ser fabricado y caracterizado experimentalmente, como un cristal fonónico en el intervalo audible.

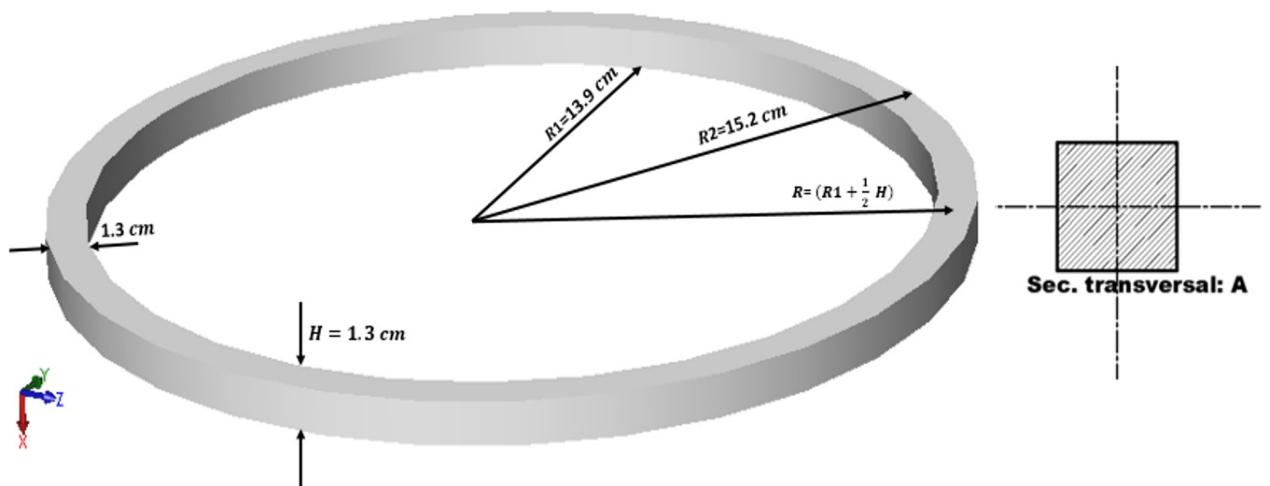


Figura 3.1: Anillo uniforme de aluminio 1100 (Al-1100). El radio interno del aro es R_1 y el externo R_2 y R es el radio del círculo central que es igual a $R_1 + \frac{1}{2}H$. A la derecha se observa sombreada el área A de la sección transversal cuadrada de lado H .

El anillo uniforme homogéneo se planificó por medio de un CAD (Computer-aided design). Se eligió un anillo cuya sección transversal es cuadrada para que tal estructura sea fácil fabricar. Las dimensiones del anillo modelado en 3D son: R_1 el radio interior, R_2 el radio exterior, H la altura o grosor o lado de la sección transversal, $R = (R_1 + \frac{1}{2}H)$ el radio del anillo y A el área de la sección transversal. Éstas se indican en la Fig. 3.1.

Todas las simulaciones consideran estructuras de aluminio (aleación 1100) ya que los posibles experimentos requieren un material paramagnético que no interfiera con los sensores que se usan para la caracterización mediante la técnica de espectroscopia acústica resonante (ARS). Este material es además relativamente económico y fácil de adquirir en el mercado y las estructuras diseñadas son accesibles de cortar con una herramienta llamada control numérico computarizada (CNC, por sus siglas en inglés computerized numeric control). Una vez diseñada la pieza de la Fig. 3.1 y definidas sus dimensiones, se fabricó el anillo que se muestra en la Fig. 3.2. Las dimensiones de este sistema son: $R_1=13.90 \text{ cm}$, $R_2=15.20 \text{ cm}$, $R=14.55 \text{ cm}$ y $H=1.30 \text{ cm}$.

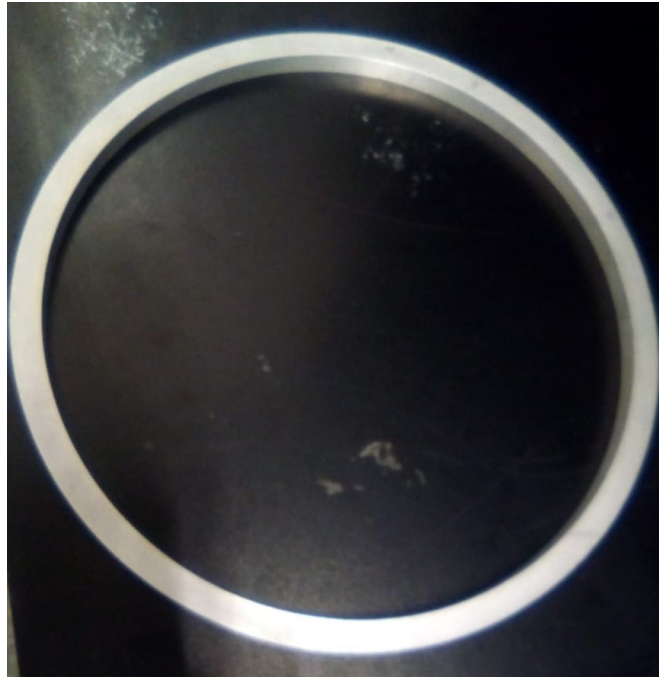


Figura 3.2: Anillo uniforme manufacturado en aluminio 1100 por medio de un CNC, con sección transversal cuadrada y uniforme, las medidas geométricas de esta manufactura son las que se mencionaron anteriormente.

3.1.1. Simulación numérica del anillo uniforme

El módulo de física, para la simulación numérica de las vibraciones del anillo en 3D por medio del *software* COMSOL *Multiphysics* 5.3a es: “Mecánica estructural” y/o “Mecánica de sólidos”. En ambos módulos, se reproduce la mecánica de sólidos resolviendo las ecuaciones constitutivas de la teoría de la elasticidad lineal, conocidas como ecuaciones de Navier-Cauchy [56, 57, 58]. En estos módulos, a partir de los esfuerzos sobre un objeto deformable, se calculan los desplazamientos resultantes de una deformación, a partir de un análisis estacionario, transitorio, cuasiestático y paramétrico.

Los resultados que se pueden obtener, a la salida del *software*, pueden ser en pretensado, pandeo o bien como respuesta del sistema por medio de frecuencias propias. Esta última forma de los resultados obtenidos es de interés para este trabajo. En la Fig. 3.3, se aprecia un diagrama de flujo que ilustra el procedimiento simplificado, que se realiza para lograr la solución numérica de una simulación específica, ejecutada por COMSOL *Multiphysics*.

El dibujo original del anillo homogéneo, diseñado en 3D con dimensiones específicas, fue realizado por medio del *software* SolidWorks. El diseño obtenido desde SolidWorks fue leído por COMSOL para hacer los cálculos numéricos. En la Fig. 3.4 se puede ver, a la izquierda, una parte del árbol de programación para el diseño. A la derecha, se observa uno de los valores de salida del software, el anillo uniforme con un mallado extra fino para lograr la mejor precisión numérica posible.

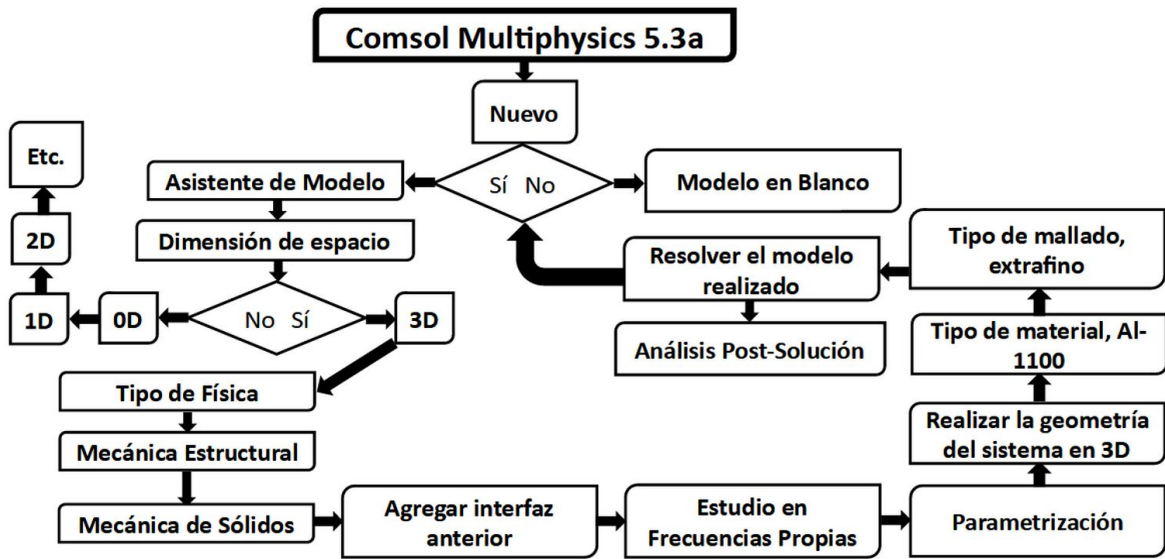


Figura 3.3: Diagrama de flujo del procedimiento para la resolución computacional, usando COMSOL *Multiphysics* de las vibraciones de una estructura 3D arbitrario. En nuestro caso, para el anillo con sección transversal uniforme cuadrada.

Como resultado de la simulación numérica en COMSOL, la solución estacionaria de las ecuaciones de la elasticidad lineal muestran el espectro de eigenfrecuencias y sus correspondientes modos de vibración en 3D para el anillo uniforme. Estos resultados numéricos, obtenidos después de muchas horas de computo, pueden ser comparados con algunos de los resultados analíticos expuestos en el Capítulo II. En la Fig. 3.5 se muestra un modo normal de vibración del anillo, asociado a ondas flexionales fuera del plano que aparece a la frecuencia propia $F = 364.58$ Hz. Para este caso, se pidió al programa COMSOL *Multiphysics* la obtención de las primeras 119 frecuencias propias del anillo uniforme, con sus respectivos modos normales de vibración.

3.1.2. Análisis y clasificación de modos de vibración del anillo uniforme

Los resultados numéricos de las eigenfrecuencias y modos propios de vibración del anillo homogéneo, descritos en la sección anterior, se obtienen como salida de COMSOL en orden creciente de sus frecuencias naturales. Por su parte, dado que la simulación numérica de FEM es en 3D, los modos normales asociados a las frecuencias en forma creciente, corresponden a los cuatro distintos tipos de vibración del anillo descritos en el Capítulo II y aparecen mezclados. El análisis de los resultados numéricos (Post-Solución), obtenidos vía COMSOL *Multiphysics*, consiste en agrupar manualmente por inspección visual los patrones estacionarios de vibración. Es decir, se agrupan las frecuencias propias asociadas a un patrón estacionario correspondiente a cada uno de los cuatro tipos de vibración del anillo: vibraciones flexionales en el plano, fuera del plano, compresionales y torsionales. Se inspec-

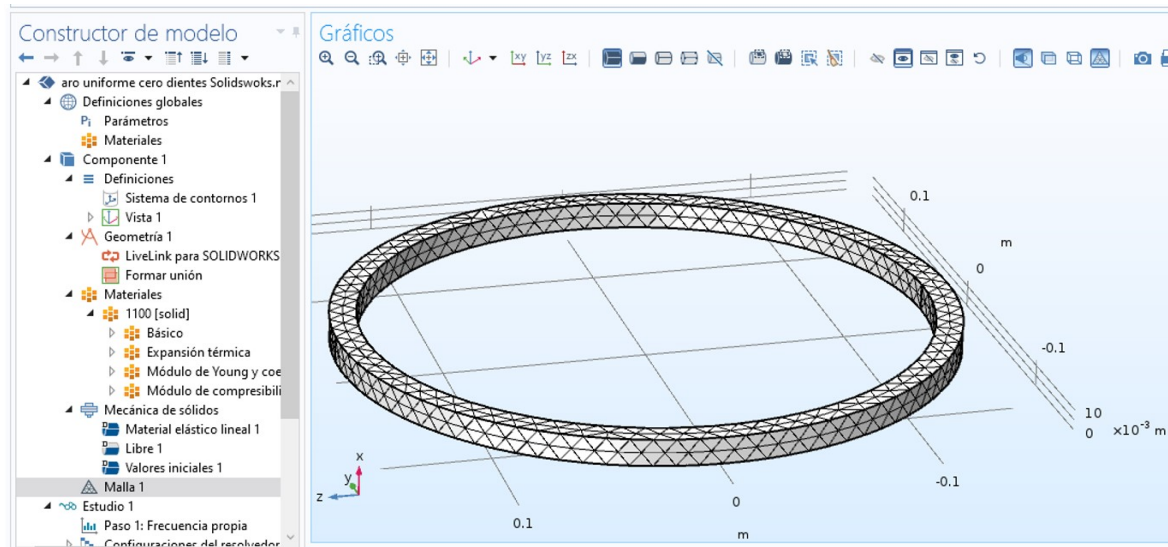


Figura 3.4: Diseño numérico del anillo uniforme en 3D obtenido con COMSOL *Multiphysics*. La imagen a la derecha muestra la discretización del anillo con una malla extrafina. La estructura representa un aro de aluminio 1100, lo cual se logra poniendo los parámetros característicos de este material en el programa, con una densidad $\rho = 2699 \frac{kg}{m^3}$, un módulo de Young $E = 69 \times 10^9 \frac{kg}{s^2m}$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. La gráfica muestra las dimensiones del anillo en unidades de metros ($R_1 = 0.1390$ m, $R_2 = 0.1520$ m, $R = 0.1455$ m y $H = 0.0130$ m). A la izquierda del anillo puede verse una parte del árbol de programación del diseño.

cionó cada modo normal numérico en el intervalo de frecuencias del anillo entre 150 Hz a 55 kHz (un total de aproximadamente 119 patrones estacionarios y sus frecuencias propias) obtenidas como soluciones numéricas de las ecuaciones de la elasticidad independientes del tiempo.

En adelante nos concentraremos en identificar cada tipo de vibraciones a partir de los patrones estacionarios obtenidos numéricamente. Por ejemplo, en la Fig. 3.5(b) se puede observar claramente el patrón estacionario, correspondiente a la frecuencia $F = 364.58$ Hz del anillo, el cual corresponde a vibraciones flexionales fuera del plano ya que el anillo tiene curvatura cóncava hacia arriba del plano del sistema, de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo anterior.

Para identificar el modo anterior, después de obtener la solución numérica completa del problema (espectro de frecuencias y patrones estacionarios asociados), se eligió en COMSOL *Multiphysics*, una de todas las soluciones (en este caso le corresponde una $F = 364.58$ Hz con $n = 2$). El software muestra entonces, el patrón estacionario asociado al valor de frecuencia seleccionado. Dicho patrón de vibración es desplegado en colores, cada uno asociado a un valor de amplitud de deformación, según una escala de colores predeterminada. Esta imagen puede moverse en distintas perspectivas en 3D e incluso volverse dinámica en el tiempo. Con estas posibilidades es posible determinar a que tipo de vibraciones pertenece cada modo normal obtenido de la simulación numérica.

En esta clasificación, se realizaron inspecciones muy minuciosas, usando como referen-

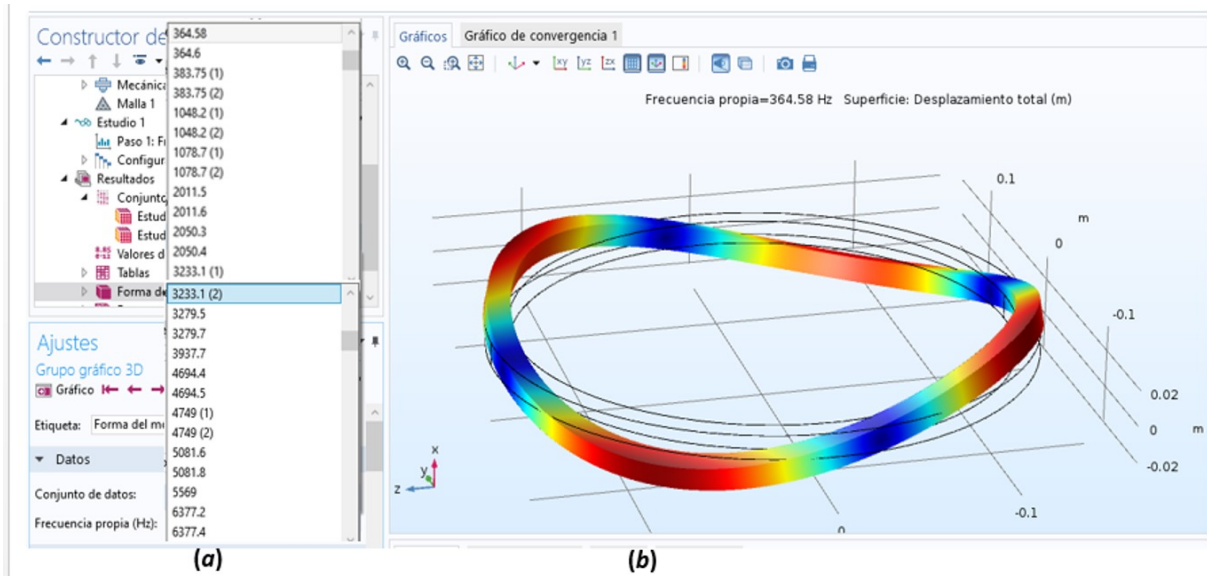


Figura 3.5: (a) Se muestra la lista de eigenfrecuencias del anillo de aluminio 1100, (con radio $R_1= 0.1319$ m, $R_2= 0.1520$ m y con sección transversal cuadrada de lado $H= 0.0130$ m), obtenidas con el mismo *software*. La lista solo muestra las frecuencias propias en el intervalo 364.58 Hz hasta 6377.40 Hz, aunque se programo la solución numérica comenzando en 150 Hz y llegó hasta 55 kHz; (b) se muestra el patrón de vibración numérico de anillo homogéneo para una de sus primeras frecuencias propias, $F_2=364.58$ Hz. Este modo normal corresponde a un modo flexional fuera del plano que presenta cuatro nodos con una escala de colores explicada más adelante.

cia los diferentes ejes (X, Y, Z) y combinación de estos ejes, para identificar físicamente en diferentes perspectivas, la animación gráfica en 3D obtenida por COMSOL, para clasificar cada uno de los 119 modos propios como: torsional, compresional, flexional fuera del plano o en el plano. Aplicando esta minuciosa inspección a la segunda solución del espectro de frecuencias del anillo a $F=383.75$ Hz, se identificó el primer modo flexional en el plano. La Fig. 3.6, muestra dicho patrón en cuatro perspectivas diferentes del aro uniforme. La línea punteada en color negro indica el sistema original sin deformación mientras que, en el aro en colores muestra el anillo deformado. De acuerdo al código de la escala de colores (a la izquierda de la misma figura), en azul se muestran los nodos del patrón de vibración estacionario del anillo. Los colores celeste y amarillo, indican posiciones de mínima deformación del material y el color rojo, es la fatiga o la deformación máxima del aro.

El análisis Post-Solución, que se acaba de discutir para dos ejemplos de eigenfrecuencias del anillo homogéneo en Al-1100, es el mismo que se tiene que hacer para todos y cada uno los 119 valores de frecuencias propias F_n , en el intervalo de los 150 Hz y hasta 55 kHz . Así, después de horas de simulación computacional y posterior inspección minuciosa, quedó caracterizado el anillo uniforme y se identificaron cuatro espectros de frecuencias asociados a cada uno de los tipos de vibración presentes en el aro simple de sección transversal cuadrada.

A continuación en la Tabla 3.1, se presenta de forma organizada y resumida el resultado de la clasificación completa de cada uno de los cuatro modos de vibración para el anillo

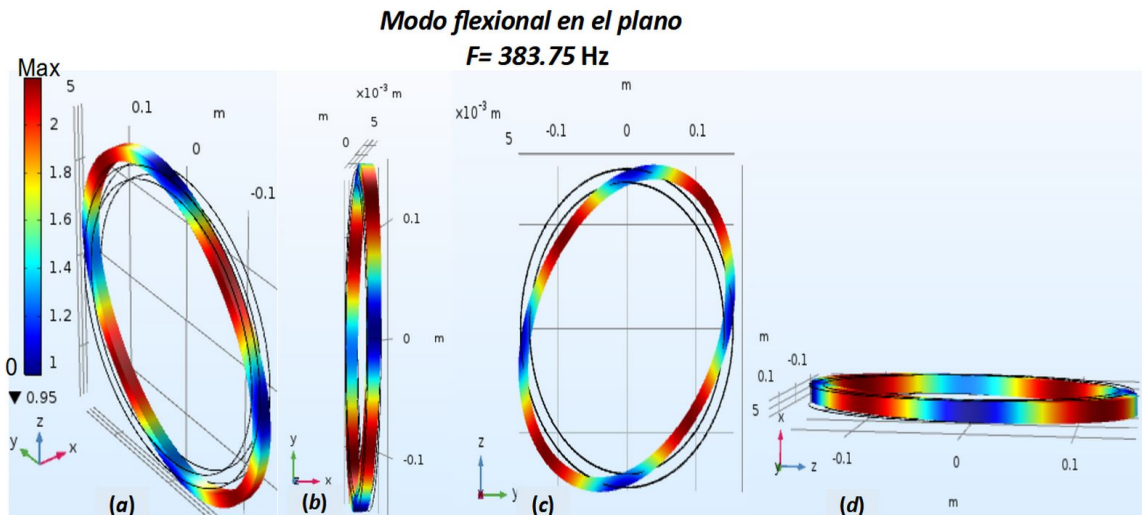


Figura 3.6: Primer modo de vibración para las ondas flexionales en el plano del anillo homogéneo a frecuencia $F_2=383.75$ Hz. Cuatro perspectivas diferentes obtenidas por medio de COMSOL *Multiphysics*. (a) se observa el anillo en perspectiva (X, Y, Z); (b) proyección en el plano Y y X, desde este ángulo visual se ve un modo flexional en el plano Y-Z. En los incisos (c) y (d), en Z, Y (vista superior) y X, Z (vista frontal). Se confirma que el modo normal está en el plano Y-Z.

uniforme: modos flexionales dentro y fuera del plano, modos torsionales y modos compresionales. Cada valor numérico en frecuencia propia F_n , es una solución de las ecuaciones de la elasticidad para el sistema uniforme, obtenido por medio del *software* ya mencionado.

En la Tabla 3.1, se observan las cuatro familias de frecuencias (espectros) que tienen lugar en las vibraciones de anillos. Se puede notar que hay dos valores de frecuencias propias muy parecidas, por ejemplo, existen dos valores de frecuencias propias F muy semejantes en cualquiera de los dos espectros de frecuencias para vibraciones flexionales del anillo. Los valores de $F_2=383.75$ Hz y también $F_{-2}=384.60$ Hz son dos valores de F muy similares para $n=\pm 2$, correspondientemente a los modos flexionales en el plano. Si ahora se analiza la columna de frecuencias asociadas a los modos fuera del plano de esa misma Tabla, con $n=\pm 2$, el valor de $F_n=F_{\pm 2}=370.87$ y 370.97 Hz, respectivamente. Nuevamente, estos son dos valores de frecuencias propias muy parecidas, algo similar sucede para el resto de los valores de $\pm n$ para las ondas flexionales. Estas similitudes con los valores de $\pm n$ se aplican no sólo para las ondas flexionales dentro y fuera del plano, si no también para los otros dos tipos de ondas ya expuestas.

La razón de que los resultados de los cálculos numéricos aparezcan en dos tipos de valores muy similares o en dobletes para las ondas flexionales dentro y fuera del plano, se debe a la simetría circular del anillo y a la sección transversal cuadrada del sistema. Estos resultados, son consistentes con las Eqs. (2.10) y (2.12), para los dos modos de vibración flexionales respectivamente. En cada situación, implica el cálculo de raíces cuadradas para las frecuencias propias.

Clasificación de los 4 espectros de frecuencias asociados a modos de vibración para el anillo uniforme, con $\delta = 0$ cm. Donde F_n := frecuencia propia [Hz]															
Espectro de los Modos Flexionales en el Plano															
Valor de n	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7	+8	-8	+9
F [Hz]	383.75	383.75	1078.70	1078.70	2050.30	2050.40	3279.50	3279.70	4749	4749	6440.3	6440.7	8335.2	8336.1	10416
	-9	+10	-10	+11	-11	+12	-12	+13	-13	+14	-14	+15	-15	+16	-16
	10417	12665	12665	15064	15065	17599	17601	20255	20259	23022	23023	25883	25857	28831	28839
	+17	-17	+18	-18	+19	-19	+20	-20	+21	-21	+22	-22	+23	-23	+24
	31859	31867	34959	34963	38118	38125	41331	41350	44605	44619	47923	47938	51283	51304	54687
	-24														
	54709														
Espectro de los Modos Flexionales Fuera del Plano															
Valor de n	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7	+8	-8	+9
F [Hz]	364.58	364.6	1048.2	1048.2	2011.5	2011.6	3233.1	3233.1	4694.4	4694.5	6377.2	6377.4	8262.8	8263.6	10334
	-9	+10	-10	+11	-11	+12	-12	+13	-13	+14	-14	+15	-15	+16	-16
	10334	12572	12572	14960	14960	17483	17485	20128	20129	22881	22881	25730	25731	28664	28669
	+17	-17	+18	-18	+19	-19	+20	-20	+21	-21	+22	-22	+23	-23	+24
	31680	31681	34762	34764	37908	37911	41106	41120	44367	44369	47666	47676	51014	51022	54397
	-24														
	54414														
Espectro de los Modos Torsionales															
Valor de n	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7
F [Hz]	3937.7	5081.6	5081.8	7542.8	7543.6	10429	10431	13470	13476	16587	16590	19744	19746	22924	22932
	+8	-8	+9	-9	+10	-10	+11	-11	+12	-12	+13	-13	+14	-14	+15
	26124	26137	29345	29355	32580	32588	35823	35841	39082	39106	42356	42384	45655	45664	48957
	-15	+16	-16												
	48973	52265	52308												
Espectro de los Modos Compresionales															
Valor de n	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7
F [Hz]	5569	7860.3	7860.3	17547	17547	22865	22865	28256	28256	33679	33679	39110	39110	44540	44540
	+8	-8													
	49959	49959													

Tabla 3.1: En esta tabla se presenta la clasificación de los cuatro espectros de frecuencias, a partir de todas las soluciones numéricas del sistema por medio de COMSOL *Multiphysics*, para el anillo uniforme de sección transversal cuadrada en Al-1100 (flexionales dentro y fuera del plano, torsionales y compresionales). De izquierda a derecha; en la primera columna están n (número de modo); de la segunda a la quinta columna, están las frecuencias propias F_n en Hertz con valores crecientes. Para el caso de los modos flexionales dentro y fuera del plano el valor de n son $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots$, (Número de ondas completas), con $n=0$ y ± 1 se anulan las frecuencias propias; estas frecuencias están asociadas al movimiento del cuerpo rígido. Pero las ondas torsionales y compresionales el valor de $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 3, \dots$

En la Fig. 3.7, se observan los modos flexionales en el plano correspondientes a los primeros valores de F_n para $n=\pm 2, \pm 3$ y ± 4 de la Tabla 3.1, correspondientemente. Se puede observar que estos modos numéricos aparecen en parejas muy similares, excepto por un ángulo de rotación y, a su vez, son similares a los patrones analíticos de la Fig. 2.11 [44] y a lo obtenido en otros trabajos [45, 46, 47]. El hecho de que haya frecuencias flexionales muy parecidas se conoce como dobletes y se debe a la simetrías del círculo y es conocido en la literatura. Estos resultados numéricos obtenidos son correctos y confiables ya que se han reproducido la física de las vibraciones de anillos que es bien conocida. Ahora estamos listos para pasar al diseño del cristal fonónico en forma de anillo dentado, que se planteó al inicio

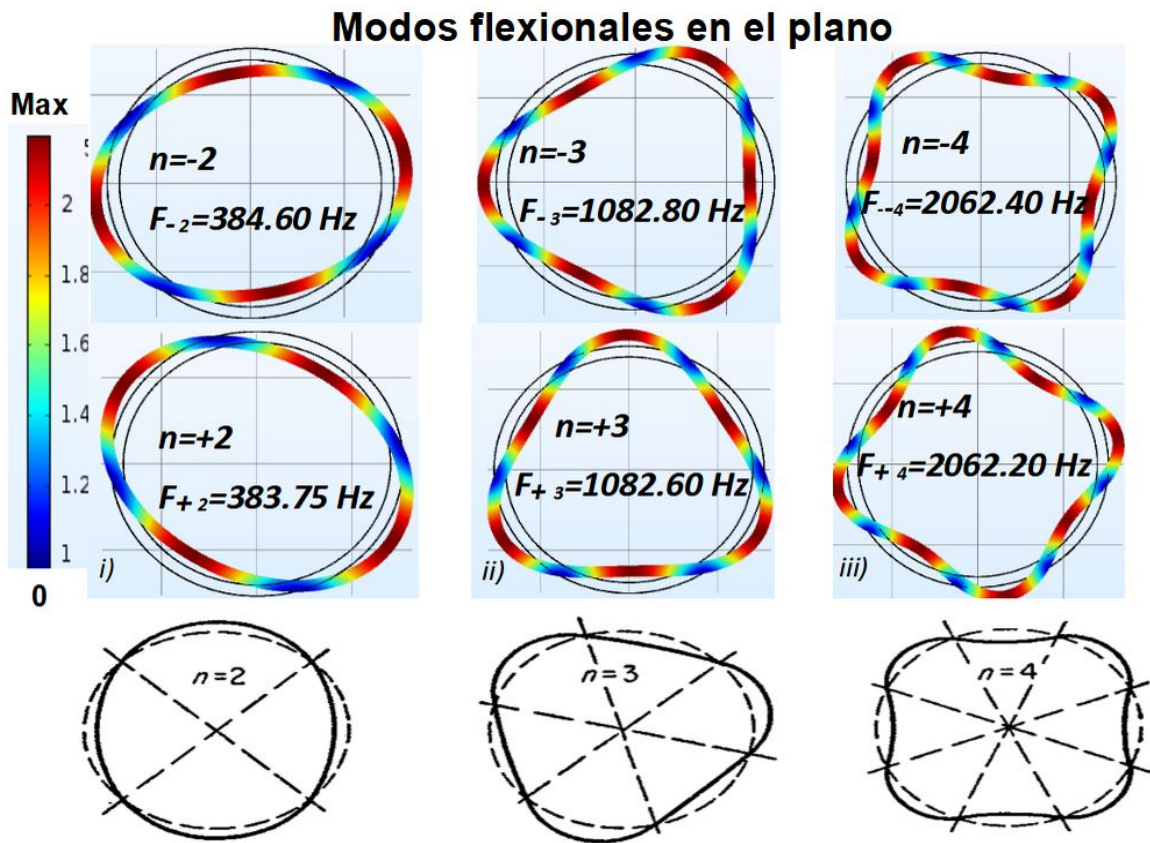


Figura 3.7: i) Es el primer doblete flexional en el plano, con $n = \pm 2$ y $F_{\pm 2} = 383.75$ y 384.60 Hz ; ii) Segundo doblete flexional en el plano a frecuencia $F_{\pm 3} = 1082.60$ y 1082.80 Hz ; iii) doblete de ondas flexionales en el plano para $n = \pm 4$, frecuencias $F_{\pm 4} = 2062.20$ y 2062.40 Hz, respectivamente. En la parte inferior de los incisos i), ii) e iii), se observan los mismos modos de vibración analíticos que se presentaron en la Fig.2.11 [44] y en otros trabajos [45, 46, 47], con valores de $n = 2, 3$ y 4 , similares que en los cálculos numéricos, pero corresponden a lo reportado en la literatura.

de este trabajo, después de realizar exitosamente la simulación del anillo simple que servirá como estructura básica para el diseño del cristal fonónico.

3.2. Espectro de frecuencias teórico de los modos para el anillo uniforme

Antes de proceder al diseño del cristal fonónico, que es el objetivo de este trabajo, realizaremos un ejercicio para comprobar que hemos logrado reproducir resultados numéricos conocidos para un sistema más sencillo, como es el anillo homogéneo de sección transversal cuadrada “A”. Es por ello que mostraremos la comparación entre el espectro de frecuencias numéricas y teóricas de las cuatro vibraciones de este sistema uniforme.

En esta sección se hace la comparación arriba mencionada para las ondas flexionales, torsionales y compresionales. Los valores numéricos del espectro de frecuencias flexional en

el plano, del anillo homogéneo, obtenidos mediante COMSOL *Multiphysics* y presentados en la Tabla 3.1 se comparan con los valores teóricos obtenidos mediante la correspondiente fórmula para ω_n^2 , estimadas en el Capítulo II.

Recordando que las frecuencias propias de los modos flexionales en el plano, están determinados por la expresión analítica de la Eq. (2.10), la cual es deducida en detalle en el Apéndice “B”. Esta fórmula involucra algunos parámetros relevantes, característicos del material y su geometría, entre los que se encuentra el segundo momento de área (I_1), el cual, a su vez es calculado en el Apéndice C. A partir de la Eq. (C.2), se obtiene el valor de $I_1=2.38 \times 10^{-9} m^4$, en donde se han considerado las dimensiones del aro que se especificaron para la simulación numérica y recordando que se considera un prototipo en Al-1100. Estas características y propiedades elásticas corresponden a un módulo de Young $E=69 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$, densidad $\rho = 2699 \frac{kg}{m^3}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$ [59], y dimensiones geométricas $R_1=0.139 m$, $R_2=0.152 m$, $H=0.013 m$, $R = (R_1 + \frac{1}{2}H)=0.1415 m$, $n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$

Al sustituir cada uno de estos valores en la Eq. (2.10), como función de n se obtiene el espectro de frecuencias teórico (analítico) correspondiente a los diferentes modos propios de las ondas flexionales en el plano. Note que la Eq. (2.10) es cuadrática, así que para cada valor de n hay dos raíces y por convención se tomaron las frecuencias positivas, esto no está relacionado con la aparición de los dobletes o degeneraciones. Nótese también que en esta misma expresión los valores de n pueden ser $\pm 2, \pm 3, \pm 4$, etc., ya que el tipo de exponentes a la que están elevadas las “ n ” hacen que el resultado sea el mismo si n es positiva o negativa. En la Tabla 3.2 se encuentran las frecuencias analíticas y numéricas para valores con $\pm n$. Al calcular las frecuencias propias para los casos anteriores de $\pm n$, se obtienen los dobletes teóricos para los modos flexionales en el plano con la expresión analítica de las frecuencias (Eq. (2.10) que se observa a continuación) correspondientes. Los valores de $n = \pm 1$, corresponde al movimiento del cuerpo rígido. Los valores numéricos obtenidos son comparados a continuación con los resultados numéricos (ver Tabla 3.2), recordando la relación $\omega_n = 2\pi F_n$:

$$\omega_n^2 = \frac{EI_1}{\rho AR^4} \left(\frac{n^6 - 2n^4 + n^2}{n^2 + 1} \right)$$

En la Tabla 3.2, se hace una comparación entre las frecuencias propias analíticas (teóricas), obtenidas con la Eq. (2.10), y las numéricas, obtenidas a partir de la simulación con COMSOL *Multiphysics*, correspondientes a las ondas flexionales en el plano. En la primera columna de esta Tabla se encuentran los valores de n . Si se estudia esta Tabla de izquierda a derecha, en la segunda y tercer columna, aparecen las frecuencias teóricas. La cuarta y quinta columna corresponde a las frecuencias numéricas. Incrementando el valor de “ $\pm n$ ” hasta $\pm n = 12$, el error porcentual entre lo teórico y lo numérico es del 4.90 %, el cual nos lleva a reafirmar que los cálculos numéricos realizados son correctos.

Espectro de frecuencias flexionales en el plano del anillo uniforme en Al-1100					
n	Frecuencias analíticas [Hz]		Frecuencias numéricas [Hz]		% de error (promedio)
	$+n$	$-n$	$+n$	$-n$	
± 2	350.73	350.73	383.75	383.75	4.90
± 3	992.02	992.02	1078.70	1078.70	
± 4	1902.11	1902.11	2050.30	2050.40	
± 5	3076.12	3076.12	3279.50	3279.70	
± 6	4512.60	4512.60	4749	4749	
± 7	6211.02	6211.02	6440.30	6440.70	
± 8	8171.13	8171.13	8335.20	8336.10	
± 9	10392.84	10392.84	10416	10417	
± 10	12876.06	12876.06	12665	12665	
± 11	15620.77	15620.77	15064	15065	
± 12	18626.95	18626.95	17599	17601	

Tabla 3.2: Comparación entre las frecuencias calculadas analíticamente con la Eq. (2.10) (columnas 2 y 3) y los valores numéricos de las mismas, obtenidos por COMSOL para los modos flexionales en el plano del anillo (columnas 4 y 5). En la columna seis, se indica el error porcentual correspondiente al 4.90 % en promedio, error porcentual que refleja así, que los cálculos numéricos realizados son confiables.

Para el cálculo del espectro teórico de los modos flexionales fuera del plano se usa la Eq. (2.12), es decir,

$$\omega_n^2 = \frac{EI_2}{\rho AR^4} \left(\frac{n^6 - 2n^4 + n^2}{n^2 + EI_2/C} \right),$$

en donde $n = \pm 2, \pm 3, \dots$, ya que los valores $n = 0, \pm 1$, también están asociados al movimiento del cuerpo rígido. Para este caso se tienen las mismas propiedades elásticas del aluminio, pero con una rigidez torsional $C = 123.50 \text{ Pa m}^4$. Como la sección transversal del aro es cuadrada el segundo momento de inercia de área I_2 es el mismo que I_1 , al sustituir estos valores y las n como fue el caso flexional en el plano, se llega a la Tabla 3.3 del espectro teórico de los modos flexionales fuera del plano.

La Eq. (2.16), que se expuso en la Sección 2.4.3, es la expresión analítica para calcular el espectro teórico de los modos propios de las ondas torsionales para el aro. Esta se obtiene analíticamente en el Apéndice D, y se reescribe nuevamente a continuación:

$$\omega_n^2 = \frac{Cn^2 + EI_2}{\rho JR^2}, \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots,$$

En donde C, I_2 son los mismos para el caso flexional fuera del plano y $J = 4.76 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ (es el momento polar de inercia respecto al eje y). Al sustituir estos valores en la ecuación anterior, para diferentes valores de n , se llega a la Tabla 3.4.

Espectro de frecuencias flexionales fuera plano del anillo uniforme					
$\pm n$	Frecuencias analíticas [Hz]		Frecuencias numéricas [Hz]		% de error (promedio)
	$+n$	$-n$	$+n$	$-n$	
± 2	339.73	339.73	364.58	364.60	4.43
± 3	976.13	976.13	1048.20	1048.20	
± 4	1884.07	1884.07	2011.50	2011.60	
± 5	3057.05	3057.050	3233.10	3233.10	
± 6	4493.00	4493.00	4694.40	4694.50	
± 7	6191.16	6191.16	6377.20	6377.40	
± 8	8151.19	8151.19	8262.80	8263.60	
± 9	10372.90	10372.90	10334	10334	
± 10	12856.21	12856.21	12572	12572	
± 11	15601.06	15601.06	14960	14960	
± 12	18607.43	18607.43	17483	17485	

Tabla 3.3: Comparación entre las frecuencias obtenidas con la Eq. (2.12) (columnas 2 y 3) y los valores numéricos de las mismas, obtenidos por COMSOL para los modos flexionales fuera del plano del anillo (columnas 4 y 5). En la columna seis, se indica el error porcentual promedio correspondiente al 4.43 %, es un error que da certeza de que los cálculos numéricos realizados son correctos.

Espectro de frecuencias torsionales del anillo uniforme					
$\pm n$	Frecuencias analíticas [Hz]		Frecuencias numéricas [Hz]		% de error (promedio)
	$+n$	$-n$	$+n$	$-n$	
0	3743.55		3937.70		0.94
± 1	4954.92	4954.92	5081.60	5081.80	
± 2	7494.15	7494.15	7542.80	7543.60	
± 3	10433.00	10433.00	10429	10431	
± 4	13513.21	13513.21	13470	13476	
± 5	16656.54	16656.54	16587	16590	
± 6	19833.00	19833.00	19744	19746	
± 7	23028.88	23028.88	22924	22932	
± 8	26237.09	26237.09	26124	26137	
± 9	29453.61	29453.61	29345	29355	
± 10	32675.97	32675.97	32580	32588	
± 11	35902.60	35902.60	35823	35841	

Tabla 3.4: Comparación entre las frecuencias obtenidas con la Eq. (2.16) (columnas 2 y 3) y los valores numéricos de las mismas, obtenidos por COMSOL para los modos torsionales del anillo (columnas 4 y 5). En la columna seis, se indica el error porcentual correspondiente al 0.94 % en promedio, que deja claro que los cálculos numéricos son correctos.

Los cálculos teóricos del espectro de las frecuencias propias para las ondas compresionales se obtienen al poner en cuenta la Eq. (2.21), dicha expresión se reescribe a continuación, para recordar las variables asociadas, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Al sustituir en la Eq. (2.21) las propiedades elásticas del material (Al-1100), el módulo de Young E , R y los

Espectro de frecuencias compresionales del anillo uniforme					
$\pm n$	Frecuencias analíticas [Hz]		Frecuencias numéricas [Hz]		% de error (promedio)
	$+n$	$-n$	$+n$	$-n$	
0	5294.19		5569		17.75
± 1	7487.11	7487.11	7860.30	7860.30	
± 2	11838.17	11838.17	17547	17547	
± 3	16741.70	16741.70	22865	22865	
± 4	21828.51	21828.51	28256	28256	
± 5	26995.18	26995.18	33679	33679	
± 6	32203.30	32203.30	39110	39110	
± 7	37435.58	37435.58	44540	44540	
± 8	42683.13	42683.13	49959	49959	

Tabla 3.5: Comparación entre las frecuencias obtenidas con la Eq. (2.21) (columnas 2 y 3) y los valores numéricos computacionales, para los modos compresionales del anillo (columnas 4 y 5). En la columna seis, se indica el error porcentual correspondiente al 17.75 % en promedio, porcentaje de error que refleja la diferencia entre los cálculos teóricos y los cálculos numéricos realizados.

valores de n para este caso, se llega a la Tabla 3.5 para el espectro teórico de frecuencias compresionales para el aro uniforme.

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2}(1 + n^2),$$

Capítulo IV

Cristal fonónico circular

Como es sabido en física del estado sólido, la distribución de átomos que conforman un material cristalino, es por medio de la repetición periódica e infinita de unidades idénticas (arreglos atómicos) a través del espacio, en una, dos o tres dimensiones; como en el aluminio, la sal, el cuarzo, etc. [4, 5]. Algunas propiedades físicas de este tipo de materiales promueven, entre otros, el transporte de ondas a través de su estructura periódica [4, 5, 7, 8, 9, 30, 35]. En este mismo contexto, en la actualidad se pueden diseñar estructuras macroscópicas, formando estructuras elásticas periódicas en el espacio, a través de las cuales se propagan ondas elásticas en un rango de frecuencias audible, cuyo comportamiento es análogo al de ondas electromagnéticas en un cristal fotónico.

Los materiales fotónicos tienen dimensiones nanométricas ya que están diseñados para el transporte de la luz o para el control de las ondas electromagnéticas. Mientras que para el caso del cristal fonónico de nuestro interés, se espera que el diseño desarrollado controle a las ondas mecánicas de cierto tipo específico: compresionales, torsionales, etc. En este capítulo se verifica este hecho a nivel numérico, esperando que en un futuro estos resultados puedan ser verificados experimentalmente.

Basados en los resultados presentados en el Capítulo anterior, se hizo el diseño y estudio numérico del cristal fonónico en forma de anillo estructurado que se presenta en este Capítulo. Como es de esperarse, esta estructura elástica tiene las propiedades de un material cristalino en forma de engrane con dentadura interna que consta de ocho dientes al interior del aro (ver Fig. 4.1). Cada celda unitaria de esta estructura (ver la Fig. 4.1, en la sección que va de 1–2) representa una clase de átomo artificial (meta-átomo) macroscópico. La celda unidad consiste en dos mitades de conector y la sección del aro que hay entre dichas mitades de conector, más adelante se explicará más a detalle el sistema que comprende el cristal fonónico circular de interés. Los meta-átomos vecinos más próximos, están conectados por una muesca al interior del sistema. La muesca o conector, corresponde a una discontinuidad en la sección transversal del anillo, que tiene una profundidad δ (ver Fig. 4.1).

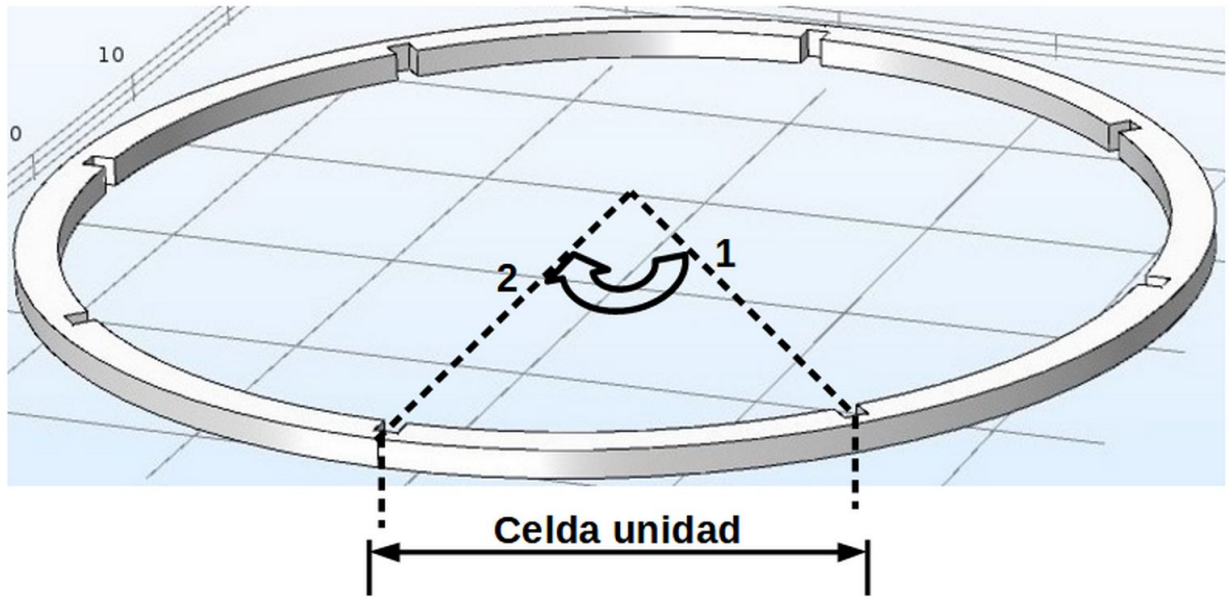


Figura 4.1: En esta figura se observa el modelo del cristal fonónico circular con dentadura al interior de éste, que consta de ocho celdas unidad, una celda del sistema es lo que comprende la región 1–2 que incluye dos mitades de conector respectivamente, más adelante en las Figs. (4.2) y (4.3) se detalla más al respecto.

Como se verá más adelante, dadas las características físicas y dimensiones geométricas macroscópicas definidas numéricamente, el cristal fonónico diseñado presenta las propiedades físicas de un material cristalino, cuyo espectro de frecuencias tiene bandas permitidas y prohibidas bien definidas para ondas flexionales en el plano y para las ondas torsionales en el intervalo de 150 Hz a 55 kHz. Las propiedades espectrales antes señaladas fueron comprobadas numéricamente y confirman la validez de la hipótesis planteada en este trabajo: “las vibraciones mecánicas de una estructura de anillo con dentadura interna se caracterizan por un espectro de frecuencias con estructura de bandas y brechas”.

4.1. Descripción geométrica y física del diseño del cristal fonónico circular

El proceso para llegar al diseño final del cristal fonónico circular (CFC), el cual era parte de los objetivos de esta investigación, se explica a detalle a lo largo de este capítulo. Baste por el momento decir que se realizaron varios modelos previos a este, explorando cada uno de los distintos parámetros relevantes del engrane. En la Fig. 4.2 se muestra la geometría y dimensiones macroscópicas del diseño final asistido por computadora. En ésta es posible observar las dimensiones geométricas macroscópicas del diseño en cuestión en donde H es la altura o el grosor del anillo, A el área de la sección transversal de la celda unitaria de lado H , $A_2 = (H - \delta) \times H$ es el área de la sección transversal del conector o muesca, S el ancho

del enlace (muesca) y δ es la profundidad del conector (muesca).

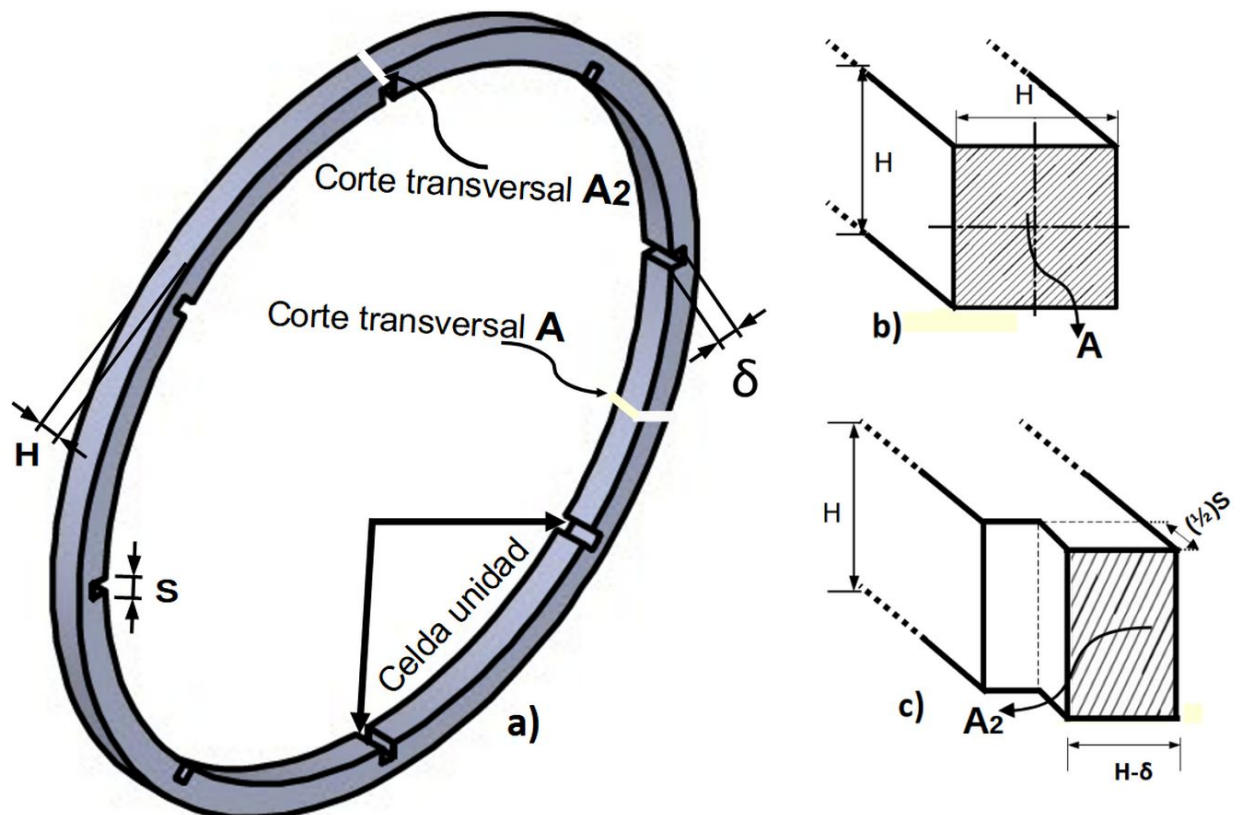


Figura 4.2: Cortes transversales del CFC, **a)**, **área transversal A**: se observa un corte transversal de profundidad H . **Área transversal A2**: corte transversal realizado a la mitad de la muesca o conector del diseño, con profundidad δ . **b) Arriba**: sección transversal A , de la celda unitaria, de lado H (área sombreada en escala de grises). **c) Abajo**: se aprecia la sección transversal $A2$ correspondiente a una de las 8 muescas del sistema, esta área es el producto $(H - \delta)H$. Note que el corte transversal está en la región de $\frac{1}{2}S$. La celda unidad se aprecia en la parte inferior de **a)**, ésta tiene una sección transversal A y dos secciones transversales $A2$, ya que la celda tiene $\frac{1}{2}S$ de separación en cada uno de sus extremos, más toda la región con sección transversal A respectivamente (como lo indican las flechas en esta figura).

El diseño de la Fig. 4.2 fue realizado por medio de *Solidworks*, que muestra ocho celdas unitarias en arreglo anular. Una celda unitaria está representada por un diente interno más dos mitades de conector (una a cada lado del diente) del sistema en forma de anillo (como se observa en las Figs. 4.1 y 4.2). Cada uno de estos dientes, puede representar un meta-átomo elástico del cristal. El conector entre dos celdas (dientes), consiste en un corte realizado al interior del anillo con una profundidad δ y un ancho S (ver Fig. 4.2c). El material seleccionado para el modelo diseñado, fue el aluminio 1100, este tiene un grado de pureza del 95 %, se pensó en éste, porque es fácil de adquirir en el mercado, tiene bajo costo, es un material paramagnético con un grado de dureza que facilita la manufactura en CNC.

Variación paramétrica de la profundidad δ para el conector															
N° de parámetro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Valor δ [cm]	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30	0.33	0.36	0.39	0.42
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0.45	0.48	0.51	0.54	0.57	0.60	0.63	0.66	0.69	0.72	0.75	0.78	0.81	0.84	0.87
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
	0.90	0.93	0.96	0.99	1.02	1.05	1.08	1.11	1.14	1.17					

Tabla 4.1: Se muestran los valores del parámetro δ que se usaron para cada una de las simulaciones numéricas entre 0 y 1.17 cm. Esta exploración de valores de δ , permitió ver el surgimiento de la estructura de bandas permitidas y prohibidas en el espectro de frecuencias del engrane como un CFC.

Otro aspecto muy importante que se tomó en cuenta para el diseño numérico del cristal fonónico circular, es que éste pudiera funcionar como tal en el intervalo de frecuencias acústico (20 Hz - 20 kHz). Al propagarse las ondas mecánicas de un tipo (flexional, torsional, compresional) y en ciertas frecuencias específicas, en la estructura diseñada, se establecen patrones de vibración estacionarios globales, llamados modos normales. El conjunto de frecuencias a las cuales estos patrones estacionarios se presentan es lo que llamamos el espectro de frecuencias propias del sistema. La estructura de este último, en el que las frecuencias propias o eigenfrecuencias se agrupan en ciertos intervalos (permitidos) así como los intervalos de frecuencia en los que no aparece ninguna eigenfrecuencia (intervalos prohibidos), conforman la estructura espectral característica de sistemas periódicos (cristalinos) [3, 4, 7, 34, 35, 36, 37, 38] que aquí comprobamos.

4.1.1. Determinación de los parámetros relevantes del cristal fonónico circular

En la sección anterior se presentó la estructura geométrica que se decidió considerar para el diseño del CFC propuesto, que consta de ocho celdas unitarias, como se observan en la Fig. 4.2. Esta estructura es similar a un engrane con dentadura interna.

Los parámetros relevantes de esta estructura dentada que pueden explorarse para lograr el surgimiento de las propiedades espectrales de un cristal fonónico (ver Sección 4.1), son: S y δ (ver Fig. 4.2). Para hacer un conector, que permitiera mostrar las características físicas del diseño de interés, por simplicidad, se propuso mantener fija la longitud S de la muesca y se varió el parámetro de profundidad de la misma δ . Recordando que el sistema tiene una sección transversal cuadrada cuyo lado mide $H = 1.3$ cm, el barrido paramétrico de la profundidad de la muesca interna fue $\delta = 0.00, 0.03, 0.06, 0.09, \dots$, hasta 1.17 cm. Así, δ pudo tomar 40 valores distintos, espaciados entre sí por 0.03 milímetros, los cuales se indican en la Tabla 4.1.

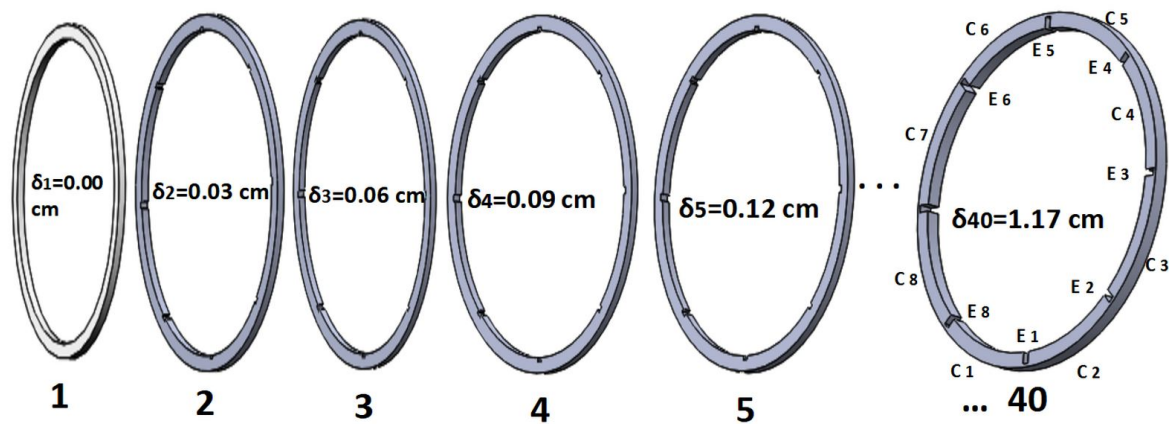


Figura 4.3: Se observan algunos de los 40 diseños de anillos dentados que se realizaron al variar el parámetro δ . De izquierda a derecha, se encuentra el primer sistema uniforme, es por eso que el valor de $\delta_{1,2,3,\dots,40} = 0.00, 0.03, 0.06, 0.09, 0.12, \dots, 1.17$ cm. También se indican las 8 celdas unitarias, etiquetadas como $C_1, C_2, C_3, \dots, C_8$, respectivamente. A su vez, las muescas están indicadas por $E_1, E_2, E_3, \dots, E_8$.

Para encontrar el valor apropiado de la profundidad de la muesca δ , que funcionara para el diseño del CFC, fue necesario realizar la simulación numérica del anillo dentado propuesto con cada uno de los 40 valores del parámetro δ , indicados en la Tabla 4.1 y su correspondiente análisis, como se describe a continuación: El primer valor $\delta=0.00$ cm, corresponde al caso del anillo uniforme, mientras que el valor $\delta=0.03$ cm corresponde al anillo dentados con menor profundidad de la muesca. Para cada valor de δ se genera la geometría resultante, la cual se resolvió mediante COMSOL *Multiphysics*, que da como resultado el espectro de frecuencias propias del sistema y sus correspondientes modos normales tridimensionales. Con estos resultados se realiza el análisis Post-Solución, clasificando por inspección visual directa de las imágenes, cada modo de vibración del diseño (modos flexionales dentro y fuera del plano, torsionales y compresionales). Posteriormente, se graficaron los espectros de cada una de las familias anteriores (número de modos versus la frecuencia).

Este estudio sirvió para ver la respuesta del sistema a medida que se incrementaba la profundidad δ . Al final se identificó el valor de este parámetro que mostró el mejor comportamiento de la estructura como cristal fonónico, mostrando el surgimiento de la estructura de bandas de alguno de sus espectros. En la Fig. 4.3, se muestra la evolución paramétrica (en función de δ) de la estructura dentada propuesta, desde 0.00 cm a 0.12 cm. Se han omitido los diseños entre 0.12 cm y 1.17 cm por ser demasiados indicándolos con puntos suspensivos.

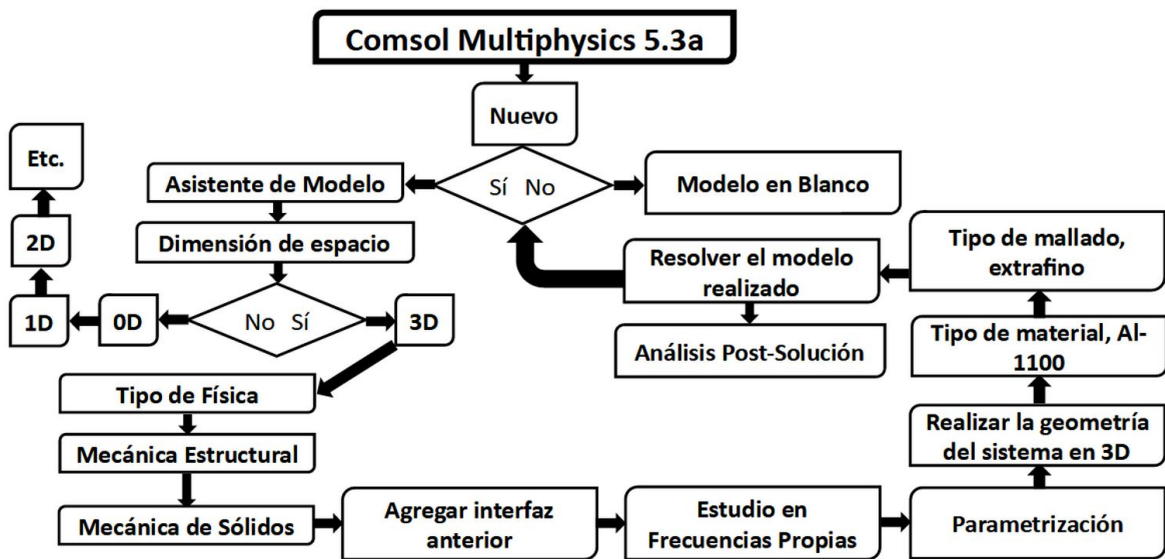


Figura 4.4: Diagrama de flujo simplificado, el cual ilustra los pasos que lleva a cabo el software COMSOL para obtener la solución numérica, correspondiente a una iteración para la estructura dentada en forma de anillo.

4.1.2. Simulación numérica del cristal fonónico circular

La simulación numérica de cada uno de los 40 diseños, propuestos en la sección anterior, fueron realizados mediante *COMSOL Multiphysics*. Se usó el módulo de *Mecánica Estructural* para sólidos. Este módulo de COMSOL, tiene más de quince diferentes opciones de análisis del sistema entre las cuales podemos mencionar: análisis estacionario, transitorio, cuasiestático y paramétrico. Así, el *software* resuelve las ecuaciones de la elasticidad de Navier-Cauchy en 3D por el método del elemento finito. Para las simulaciones numéricas se eligió el análisis estacionario, el cual calcula las frecuencias propias y los modos normales de vibración correspondientes para cada estructura geométrica que se diseñó. El procedimiento de una iteración resolutoria para este tipo de simulación numérica, puede ser simplificado mediante el diagrama de flujo de la Fig. 4.4.

Como parte de la simulación numérica es importante recordar que los prototipos de engrane propuestos se consideran hechos en aluminio 1100, ya que el módulo de simulación requiere los valores de algunas propiedades elásticas características de este material, como son : la densidad $\rho = 2699 \text{ kg/m}^3$, el módulo de Young $E = 69 \text{ GPa}$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. En la Fig. 4.5 a) se muestra el prototipo del engrane, inmerso en un enmallado extra fino, el cual permite discretizar la región donde se resuelven las ecuaciones lineales de la elasticidad, en 3D con condiciones libres a la frontera. La Fig. 4.5 b), muestra el modo normal asociado a una de las 119 frecuencias propias que se obtuvieron numéricamente para el engrane con $\delta=0.25 \text{ cm}$, el cual corresponde a un modo flexional en el plano con $F_3=1040 \text{ Hz}$.

, tipo engrane, con condiciones libres a la frontera. La Fig. 4.5 b), muestra el modo

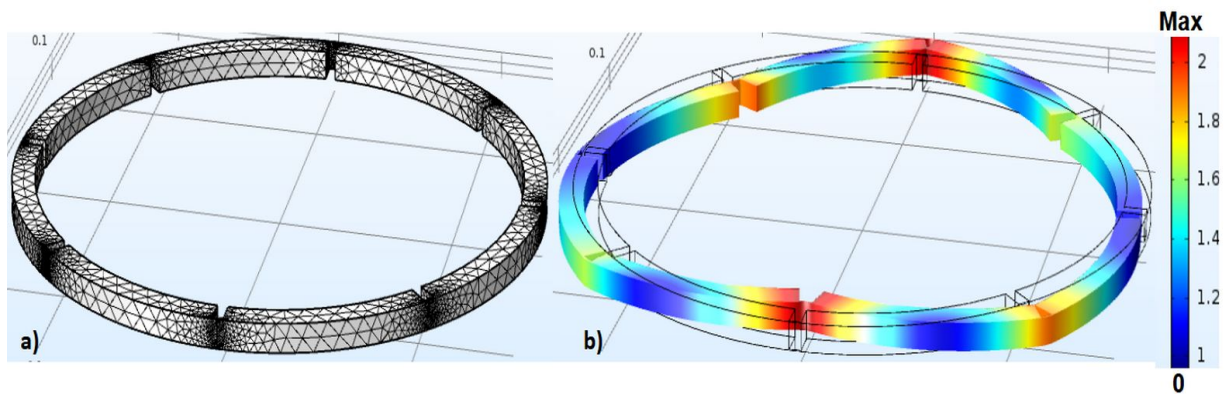


Figura 4.5: a) Se observa la geometría del CFC de Al-1100, en tres dimensiones espaciales, discretizado por COMSOL con una malla extra-fina. b) Patrón estacionario de la vibración del sistema asociado a la frecuencia propia $F_3 = 1040$ Hz, para el caso $\delta = 0.25$ cm. La escala de colores indica las zonas de máxima vibración en rojo y en azul oscuro los nodos. El tiempo de computo para el caso con δ indicado en esta figura, para obtener 119 frecuencias propias del modelo es de alrededor de 5 horas.

normal asociado a una de las 119 frecuencias propias que se obtuvieron numéricamente para el engrane con $\delta = 0.25$ cm, el cual corresponde a un modo flexional en el plano con $F_3 = 1040$ Hz.

4.1.3. Análisis Post-Solución numérica del cristal fonónico circular

En este apartado se presenta el análisis de cinco modelos representativos, de los cuarenta que se simularon numéricamente, del anillo dentado en la sección anterior. Estos son los cinco modelos que mostraron un comportamiento espectral más cercano al modelo de cristal fonónico.

Para cada modelo se extrajeron manualmente tanto el conjunto de frecuencias propias (espectro de frecuencias) en el intervalo de 150 Hz–55 kHz, como sus correspondientes modos normales de vibración. A partir de estos resultados numéricos, obtenidos del *software* COMSOL, se analizan por una minuciosa inspección visual (en diferentes perspectivas) de cada uno de los modos normales de la estructura. Esto permitió hacer la clasificación de los mismos y su pertinencia a cada uno de los cuatro tipos de vibraciones posibles de la estructura anillada (flexional en el plano, fuera del plano, torsional y compresional). Una vez analizados y clasificados todos los patrones estacionarios de cada modelo, es posible separar los resultados originales en cuatro conjuntos de frecuencias que pueden ser graficados para ver si muestran una estructura en bandas y brechas como se espera en un cristal fonónico.

Clasificación, 4 espectros de frecuencia del Cristal Fonónico Circular, con $\delta = 0.25$ cm. Las frecuencias propias F_n están en Hertz [Hz]															
Espectro Flexional en el Plano															
Valor de n	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7	+8	-8	+9
F [Hz]	369.79	369.83	1040	1040.10	1913.50	2054	3180.30	3181.30	4609.70	4611.80	6236.90	6239.20	7945.60	8386.20	10235
	-9	+10	-10	+11	-11	+12	-12	+13	-13	+14	-14	+15	-15	+16	-16
	10241	12050	12053	12653	12662	14748	14751	16861	17786	20129	20138	22838	22859	25690	25732
	+17	-17	+18	-18	+19	-19	+20	-20	+21						
	28255	29214	31781	31842	35236	35248	38227	38321	41051						
Espectro Flexional Fuera del Plano															
Valor de n	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7	+8	-8	+9
F [Hz]	363.47	363.62	1043.80	1044	1992.90	2013.70	3221.30	3222.20	4681.10	4682.60	6367.20	6368.20	8209	8313	10344
	-9	+10	-10	+11	-11	+12	-12	+13	-13	+14	-14	+15	-15	+16	-16
	10346	12599	12606	15012	15017	17519	17644	20258	20282	23066	23076	25969	25985	29014	29043
	+17	-17	+18	-18	+19	-19	+20	-20							
	32101	32114	35236	35286	35301	38491	38515	41947							
Espectro Torsional															
Valor de n	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6	+7	-7
F [Hz]	3915.30	5079.40	5083.10	7571.40	7578.20	10464	10478	13000	14216	16804	16842	19951	19990	23123	23133
	+8	-8	+9	-9	+10	-10	+11	-11	+12	-12					
	25578	27352	29872	29872	33012	33115	36193	36227	38433	40906					
Espectro Compresional															
Valor de n	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	+4	-4	+5	-5	+6	-6		
F [Hz]	5464.20	7776.40	7776.50	17345	17347	22346	23047	27996	27997	33140	33147	38787	38791		

Tabla 4.2: Se observan cuatro cuadros, correspondientes a la clasificación de las frecuencias numéricas en cuatro espectros asociados a cada uno de los tipos de vibración del cristal fonónico circular, con $\delta=0.25$ cm. Los valores de la fila $n = \pm 2, \pm 3, \pm 4...$ etc., indican el número n de longitudes de onda completas, para los modos dentro y fuera del plano. Para las familias de modos flexionales note que $n \neq 0, \pm 1$, ya que estos valores están asociados al movimiento rígido del anillo. Este no es el caso de los modos torsionales y compresionales en los que $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$ etc.

Los valores del parámetro δ para los cinco modelos analizados en esta sección son: 0.00, 0.25, 0.50, 0.75 y 1.00 cm. Hay que recordar que el valor de $\delta=0.00$ cm corresponde al sistema continuo estudiado en la Sección 3.1, el anillo homogéneo. Los resultados de este caso particular sirven de referencia ya que como vimos en el Capítulo II, hay expresiones analíticas aproximadas para obtener las frecuencias propias, las cuales se pueden comparar con las frecuencias obtenidas numéricamente. Como esto se hizo en el Capítulo II, ya no se repite aquí. La clasificación de los resultados numéricos, en los cuatro diferentes espectros de frecuencia, para el caso del sistema con $\delta = 0.25$ cm se presentan en la Tabla 4.2.

En los dos primeros espectros de frecuencia que se muestran en la Tabla 4.2, se pueden distinguir los espectros de frecuencias flexionales, los cuales se caracterizan porque las frecuencias aparecen en parejas con valores similares (degenerados) llamados dobletes. Como ejemplo note que, para el valor de $n = \pm 2$, se obtuvieron las frecuencias numéricas $F_2=369.79$ Hz y $F_{-2}=369.83$ Hz, en el caso del espectro de vibraciones flexionales en el plano. Esto ocurre para cada valor absoluto de n . Estos dobletes están asociados a la simetría de la geometría circular del sistema. Mientras que los espectros de vibraciones torsionales y compresionales son diferentes ya que $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$ no muestra dobletes para $n=0$, pero para $n= \pm 1, \pm 2$, etc., si se encontraron dobletes.

A continuación se presenta la clasificación de espectros numéricos de los otros modelos simulados. En la Tabla 4.3 se presenta el caso $\delta= 0.50$ cm.

4 modos de vibraciones del Cristal Fonónico, con un conector de profundidad $\delta = 0.50$ cm. Donde F =Frecuencia propia [Hz]															
Espectro Flexional en el plano															
Valor de n	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7	+ 8	- 8	+ 9
F [Hz]	337.96	337.98	948.72	949.81	1643.60	2055.30	2994.20	29950.60	4327.10	4328.20	5703.80	5710.50	7561.30	8361.50	10028
	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15	- 15	+ 16	- 16
	10032	13792	13805	15398	17704	19968	19981	22368	22402	25108	25141	27300	29051	31184	31230
	+ 17	- 17	+ 18	- 18	+ 19										
	35477	35537	38201	41056	41733										
Espectro Flexional fuera del plano															
Valor de n	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7	+ 8	- 8	+ 9
F [Hz]	357.79	357.92	1027.60	1028.10	1936.20	2013.70	3178.50	3179.60	4619.90	4624	6294.50	6297	8044.40	8306.20	10248
	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15	- 15	+ 16	- 16
	10252	12491	12495	14881	14888	17306	17654	20168	20186	22969	23020	25912	25939	29016	32175
	+ 17	- 17	+ 18	- 18	+ 19										
	32181	35392	35436	38695	38812										
Espectro Torsional															
Valor de n	0	+ 1	- 1	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7
F [Hz]	3839.80	4979.40	4980.50	7416.10	7417.30	10183	10187	12242	14571	16699	16706	19589	19594	22334	22353
	+ 8	- 8	+ 9	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12						
	23894	28397	30119	30155	32678	32755	35133	35162	36350						
Espectro Compresional															
Valor de n	0	+ 1	- 1	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7
F [Hz]	5018.10	7578.30	7979.10	11107	11109	12748	12752	16890	16896	21618	23252	27437	27441	31906	31916
	+ 8	- 8	+ 9	- 9											
	38062	38069	38092	41424											

Tabla 4.3: Clasificación de los cuatro modos de vibración del cristal fonónico circular para el caso $\delta =0.50$ cm.

El efecto de la variación paramétrica δ en los espectros numéricos, comienza a ser notable si se comparan los valores de las frecuencias correspondientes de cada espectro para cada valor de $\delta= 0.00, 0.25, 0.50$ cm, de las Tablas 3.1, 4.2 y 4.3. En la Tabla 4.4, se presenta la clasificación de los espectros numéricos del modelo con $\delta= 0.75$ cm, en este diseño también se observa un corrimiento similar, discutido anteriormente.

El caso $\delta=1.00$ cm se presenta en la Tabla 4.5, para la clasificación de los cuatro diferentes espectros de frecuencias del sistema estructurado (con ocho celdas unitarias).

4.1.4. Propiedades espectrales del anillo dentado: análisis paramétrico

En esta sección se grafican y analizan los cuatro tipos de espectros de frecuencia, asociados a cada tipo de vibraciones: flexionales en el plano, flexionales fuera del plano, torsionales y compresionales del engrane diseñado al inicio del Capítulo IV y que se clasificaron en la sección anterior. Se analiza el comportamiento paramétrico de cada espectro (obtenido numéricamente) para los cinco modelos, cuyos valores del parámetro relevante son $\delta=0.00, 0.25, 0.50, 0.75$ y 1.00 cm (ver sección 4.1.3). El análisis se enfoca en la comparación entre las familias de espectros para rastrear el surgimiento de la estructura de bandas como función

4 espectros de vibraciones del Cristal Fonónico, con $\delta = 0.75$ cm. Donde F =Frecuencia propia [Hz]															
Espectro Flexional en el plano															
Valor de n	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7	+ 8	- 8	+ 9
F [Hz]	267.28	267.69	743.31	745.16	1178.1	2043.4	2716.5	2719	3852.3	3855.7	4724.8	4731	7452.4	8166	9841.7
	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15	- 15	+ 16	- 16
	9843.7	12048	12059	12688	12692	13218	16911	19582	19586	21397	21408	23885	23888	26053	27167
	+ 17	- 17	+ 18	- 18											
	29224	34557	34560	36363											
Espectros Flexional fuera del plano															
Valor de n	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7	+ 8	- 8	+ 9
F [Hz]	340.81	341.08	987.41	987.62	1821.2	2000.2	3084.1	3085.1	4478.9	4480	6130.3	6133.8	7707.3	8214	9985.8
	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15	- 15	+ 16	- 16
	9986.8	12153	12162	14464	14469	16763	17300	19679	19692	22444	22467	25356	25368	28230	28556
	+ 17	- 17	+ 18	- 18											
	31510	31542	34752	34765											
Espectro Torsional															
Valor de n	0	+ 1	- 1	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7
F [Hz]	3673.8	4619.7	4622.1	6701.9	6710.5	8884.7	8895.1	10113	14566	15788	15793	17771	17784	19514	19534
	+ 8	- 8	+ 9	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12					
	20276	28643	29203	29249	29307	30555	30575	31735	31802	32281					
Espectro Compresional															
Valor de n	0	+ 1	- 1	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7
F [Hz]	4045.5	7278.1	7279	9725.6	9731	16107	16107	16125	20748	23480	26620	26629	29992	30013	

Tabla 4.4: Clasificación de los espectros numéricos: flexionales dentro y fuera del plano, Torsionales y Compresionales, del cristal fonónico circular, con $\delta = 0.75$ cm.

del parámetro δ . Esto permite identificar el valor de δ que identifica al anillo dentado como un cristal fonónico.

Es necesario recordar la forma en que el valor del parámetro δ afecta a la geometría del anillo dentado, que se propuso como posible cristal fonónico circular, lo cual se indica en la Fig. 4.6, δ representa la profundidad de la muesca que separa los dientes internos de la estructura.

Ya se ha mencionado que el prototipo del CFC, se considero fabricado en aluminio 1100 para todas las simulaciones numéricas y sus dimensiones geométricas fueron elegidas para que la estructura funcione como cristal fonónico en el intervalo de frecuencias audible, en donde, R_1 y R_2 son el radio interno y externo, H la altura, grosor o ancho del anillo y lado de la sección transversal cuadrada A , del mismo. δ es la profundidad de la muesca interna, $R = \frac{1}{2}H + R_1$ el radio que va de la circunferencia central del anillo. $C_1, C_2, C_3, \dots, C_8$ son los dientes de la estructura que forma parte de cada celda unitaria y $E_1, E_2, E_3, \dots, E_8$ son las muescas del cristal fonónico circular.

A continuación se retoma el análisis de los diferentes espectros de vibración numéricos para los cinco modelos seleccionados en la sección 4.1.3, se analizan a detalle en esta sección (Ver las Tablas 4.1 - 4.5).

4 espectros de vibración del Cristal Fonónico, con $\delta = 1.00$ cm.															
Espectro Flexional en el Plano															
Valor de n	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7	+ 8	- 8	+ 9
F [Hz]	143.14	143.84	390.8	391.61	573.35	1987.4	2439.8	2440.5	3032.1	3335.4	3336	3733.3	3734.6	6707.8	6712.7
	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15	- 15	+ 16	- 16
	7415.2	7525.2	8215.7	8219.7	9377.2	9385.2	10122	10127	11097	19078	19129	20680	20742	21694	25229
	+ 17	- 17	+ 18	- 18	+ 19	- 19	+ 20	- 20	+ 21	- 21	+ 22	- 22	+ 23	- 23	+ 24
	26116	26126	27122	27147	30738	30785	31102	31282	31324	40265	40740	40814	41844	41894	42522
	- 24	+ 25													
	42571	42678													
Espectro Flexional Fuera del Plano															
Valor de n	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7	+ 8	- 8	+ 9
F [Hz]	292.23	292.48	880.25	880.37	1574.8	1942.4	2871	2872.1	2871	2872.1	4082.1	4082.1	4083.2	5791.3	5792.3
	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15	- 15	+ 16	- 16
	7157.8	7886.1	9447.6	9453.4	11500	11503	13724	13730	15939	16342	18686	18689	21339	21347	24077
	+ 17	- 17	+ 18	- 18	+ 19	- 19	+ 20	- 20	+ 21	- 21	+ 22	- 22	+ 23	- 23	+ 24
	24100	26642	26881	30029	30038	32937	32964	35891	35901	38165	39683	40882	41015	45650	45681
	- 24	+ 25													
	48553	48628													
Espectro Torsional															
Valor de n	0	+ 1	- 1	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7
F [Hz]	3269	3718.7	3721.3	4933.8	4943.8	5772.1	5783	6156.3	14182	14409	14446	14931	14944	15385	15426
	+ 8	- 8	+ 9	- 9	+ 10	- 10	+ 11	- 11	+ 12	- 12	+ 13	- 13	+ 14	- 14	+ 15
	15596	27507	27579	27736	27774	27911	27958	28015	28039	41179	41315	41415	41429	41451	41910
	- 15	+ 16													
	42887	42948													
Espectro Compresional															
Valor de n	0	+ 1	- 1	+ 2	- 2	+ 3	- 3	+ 4	- 4	+ 5	- 5	+ 6	- 6	+ 7	- 7
F [Hz]	11874	11890	13959	13979	18423	18442	19358	23729	25604	25610	33854	33858	35325	46340	47162
	+ 8	- 8	+ 9												
	47171	49525	49548												

Tabla 4.5: Clasificación de los espectros flexionales dentro y fuera del plano, torsionales y compresionales del CFC, para $\delta=1.00$ cm, calculadas numéricamente por medio de COMSOL *Multiphysics*.

En la gráfica de la Fig. 4.7, se observa la primera familia paramétrica de espectros, correspondiente a las vibraciones flexionales en el plano.

Como se puede ver en esta gráfica el espectro del anillo homogéneo, $\delta=0.00$ cm (círculos negros), muestra un comportamiento cuadrático para bajas frecuencias como función del número de modos. Los niveles de frecuencia aparecen en dobletes como ya se ha discutido, en pares de círculos de color negro (ver Fig. 4.7).

Los otros cuatro espectros que ahí aparecen, corresponden al anillo dentado periódico con los distintos valores de $\delta \neq 0.00$ cm seleccionados. Estos también muestran una distribución de niveles de frecuencia con tendencia cuadrática, pero es claro que para el caso de $\delta=1.00$ cm ya se observa bien definida una estructura en agrupamiento de las frecuencias en

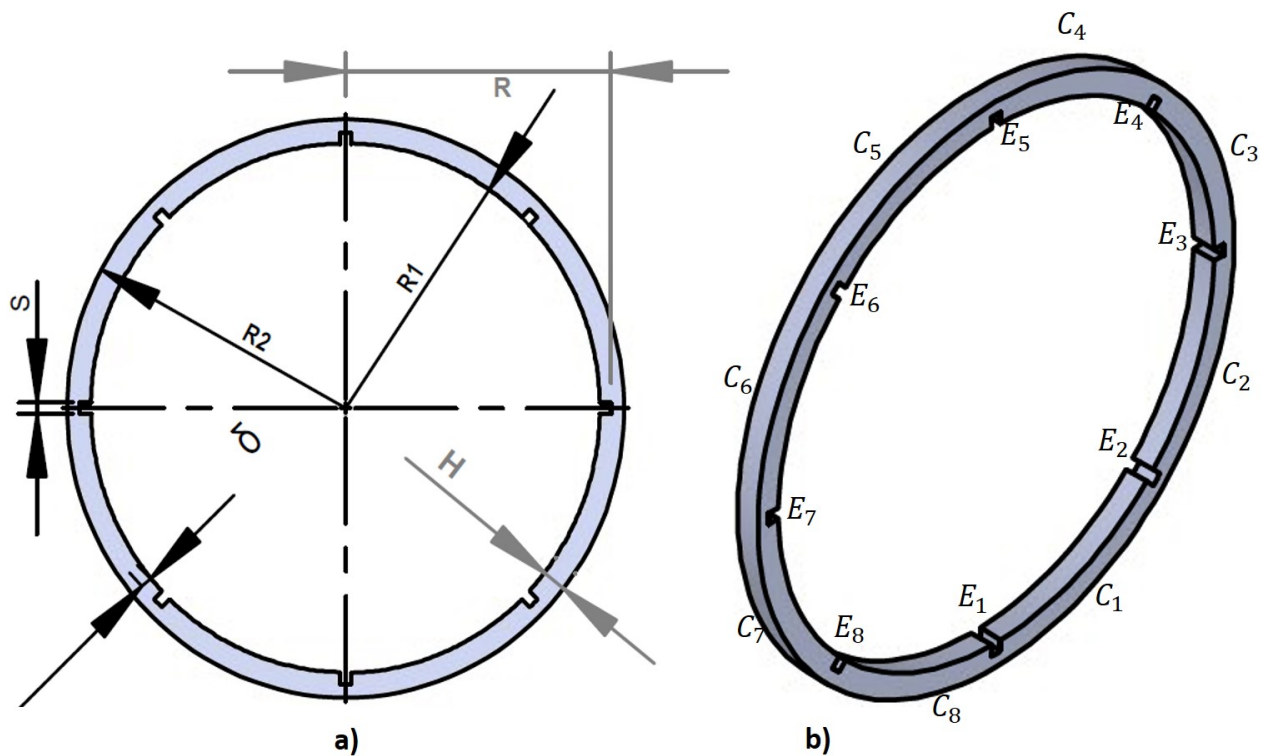


Figura 4.6: Parámetros relevantes en la geometría del anillo dentado diseñado: a) vista superior de la estructura periódica circular, donde R_1 y R_2 , son los radios interno y externo, respectivamente; R es el valor promedio de ambos radios. Para todas las simulaciones numéricas se consideró el diseño de la estructura en aluminio 1100 (Al-1100). La sección transversal del anillo es un cuadrado de lado H (grosor, ancho o la altura del anillo). b) Perspectiva en tres dimensiones del CFC: cada uno de los ocho dientes internos de esta estructura se etiquetan como C_1, C_2, \dots, C_8 , separados por las muescas indicadas como E_1, E_2, \dots, E_8 , respectivamente, las cuales tienen un ancho S (separación entre dientes consecutivos) y una profundidad δ .

intervalos específicos, dejando vacíos otros más, lo cual se conoce en la literatura como la estructura de bandas permitidas y brechas o bandas prohibidas, que caracterizan a los sistemas periódicos en general. En particular, estas bandas y brechas evidencian que este valor del parámetro $\delta=1.00$ cm permite que el anillo dentado funcione como un cristal fonónico para las ondas flexionales en el plano, en el intervalo de 0-50 kHz. Aunque este es un resultado en favor del cumplimiento de los objetivos de este trabajo, el intervalo de frecuencias indicado se sale del rango audible, que se considero originalmente.

La siguiente familia de espectros de frecuencias asociadas a modos flexionales fuera del plano del engrane diseñado se presentan en la Fig. 4.8. Estos cinco espectros corresponden al engrane con los mismos valores para δ , que en el caso de la gráfica de la Fig. 4.7.

A continuación se hace una lista de señalamientos al hacer la comparación entre las curvas de la figura 4.7 y las de la figura 4.8 que corresponden a los dos tipos de vibraciones flexionales, en el plano y fuera del plano, respectivamente:

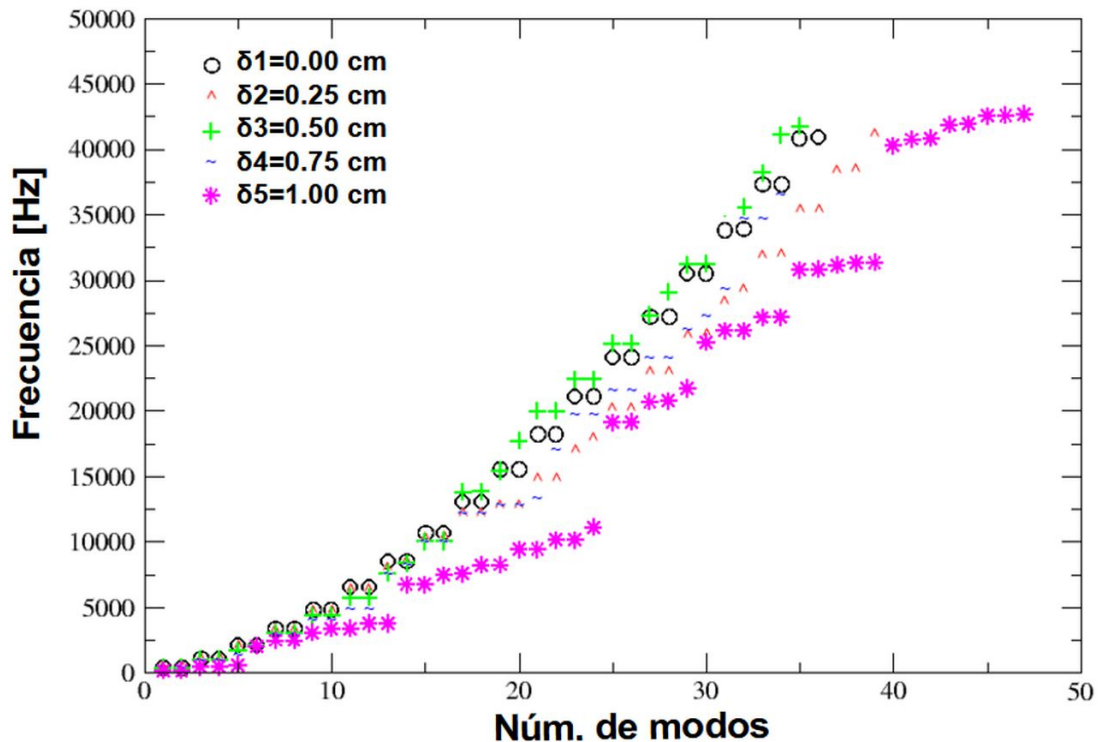


Figura 4.7: Frecuencias propias contra el número de modos flexionales en el plano, correspondientes a los cinco modelos con que se trabajó en las últimas dos secciones, a través de simulación numérica. La curva en color negro (acotada como O), son los modos flexionales en el plano, para el anillo uniforme. La gráfica en color rojo (acotada como ^), es el modelo anterior que a pasado de ser uniforme a ser una estructura periódica con 8 celdas y conectores o enlaces E , con una profundidad $\delta=0.25$ cm. Posteriormente, se observan las curvas de los espectros de frecuencias propias para el mismo tipo de modos del modelo, pero con un enlace primero con $\delta=0.50$ cm, luego a 0.75 y 1.00 cm, en color verde (+), azul (representada como ~) y morado (con el símbolo *), respectivamente.

- ⊙ En ambas familias de espectros se observa un comportamiento a bajas frecuencias con forma cuadrática, en función del número de modo n .
- ⊙ En ambas gráficas los espectros muestran los dobletes o frecuencias casi degenerados que aparecen por pares y que de alguna manera son la huella digital de las vibraciones flexionales en estructuras con la simetría del anillo periódico.
- ⊙ Una diferencia importante es que los espectros flexionales en el plano si desarrollan la estructura bandas permitidas y prohibidas del sistema, que son el objetivo de esta investigación y que indican que se logro que la estructura diseñada funcione como cristal fonónico en el intervalo de 0-50 kHz. Mientras que en los espectros flexionales fuera del plano apenas muestran un incipiente comportamiento que podría ser precursor de las bandas y brechas que nos interesan, en el mismo intervalo de frecuencias.

De la gráfica de la Fig. 4.8, se concluye que la estructura de anillo dentado que se propuso, no parece tener propiedades de cristal fonónico para ondas flexionales fuera del plano en el intervalo de 0 – 50 kHz.

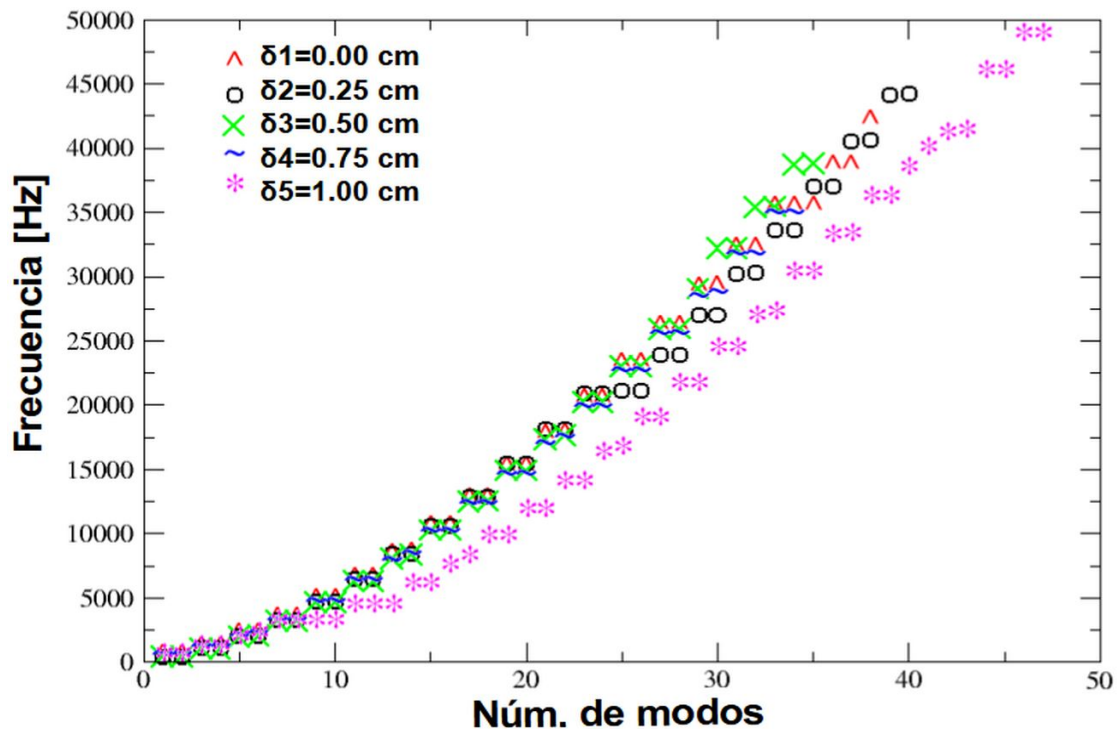


Figura 4.8: Se observan las curvas de los cinco espectros de frecuencias propias, como función del número de modos, para vibraciones flexionales fuera del plano. En color negro (indicada con O) se ve el espectro del anillo uniforme ($\delta=0.00$ cm). En rojo (acotada como ^), el espectro del engrane con $\delta=0.25$ cm; en color verde (+) se ve el caso $\delta=0.50$ cm; en azul (representada como ~), $\delta=0.75$ cm y por último en morado (con el símbolo *), se tiene $\delta=1.00$ cm.

Después de estudiar las vibraciones flexionales, dentro y fuera del plano, del anillo dentado quedan por analizar las familias de espectros compresionales y torsionales, para los cinco modelos asociados a los valores de δ elegidos. En la Fig. 4.9, se presentan las curvas de frecuencias propias contra el número de modos correspondientes a las vibraciones torsionales.

Lo primero que se puede notar en la Fig. 4.9, a diferencia del comportamiento cuadrático a baja frecuencia de los espectros flexionales, los espectros de frecuencias torsionales del engrane muestran un comportamiento lineal a bajas frecuencias. El análisis paramétrico indica además que para $\delta=1.00$ cm ya hay una redistribución de las frecuencias propias en grupos de ocho frecuencias en cuatro intervalos, dejando cuatro intervalos más, libres de frecuencias propias o bandas prohibidas, en el intervalo de 0 – 50 kHz. Por ello podemos decir que la estructura dentada refleja un mejor comportamiento de cristal fonónico para las vibraciones torsionales. Incluso en el intervalo audible de frecuencias (20 Hz-20 kHz), donde aparecen dos bandas permitidas y dos bandas prohibidas. Cada banda permitida consiste en ocho frecuencias propias, asociadas a la estructura dentada de ocho celdas idénticas, como era de esperarse.

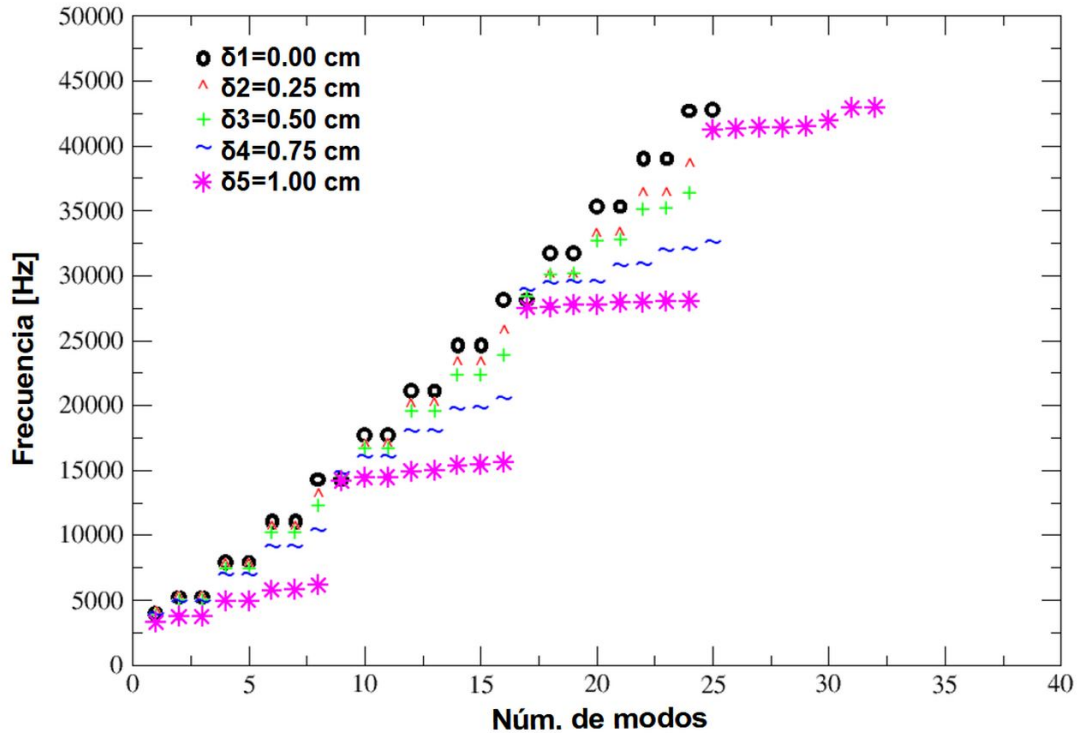


Figura 4.9: Se observan las curvas de frecuencias propias de las ondas torsionales, correspondientes a los cinco modelos previamente seleccionados. La curva en color negro (acotada como O), son los modos torsionales para el anillo uniforme. La gráfica en color rojo (acotada como ^), es el modelo anterior que a pasado de ser uniforme a ser una estructura periódica con 8 celdas y con ocho conectores o enlaces E , con una profundidad $\delta=0.25$ cm, para la misma clasificación de modos. Posteriormente, se observan las curvas de los espectros de frecuencias propias, para el mismo tipo de modos del modelo, pero con un enlace primero con $\delta=0.50$ cm, luego a 0.75 y 1.00 cm, en color verde (+), azul (representada como ~) y morado (con el símbolo *) correspondientemente.

A diferencia de las ondas flexionales, los modos compresionales tienen un comportamiento lineal, a bajas frecuencias, como función del número de modo. Como se puede ver en la Fig. 4.10, no es muy evidente el surgimiento de las bandas, como fue el caso de las ondas flexionales en el plano y las ondas torsionales.

El hecho de que en los modos flexionales fuera del plano casi no se pueda observar la formación de las bandas prohibidas, es por que este tipo de modos se transportan en dirección perpendicular al plano, justamente en esta dirección el conector tiene una altura fija H (ver Fig. 4.6), es decir, en esta dirección no se varió la geometría del enlace E , y por ende, tampoco son muy perturbadas o moduladas, las ondas mencionadas viajando en esta dirección.

Las frecuencias de los espectros torsionales, para el caso $\delta=11.70$ mm, desarrollaron mejor la estructura de bandas y brechas esperada. Esta se manifiesta por el notable aglutinamiento, en grupos de ocho frecuencias propias, como el caso de lo discutido en la Fig. 4.9.

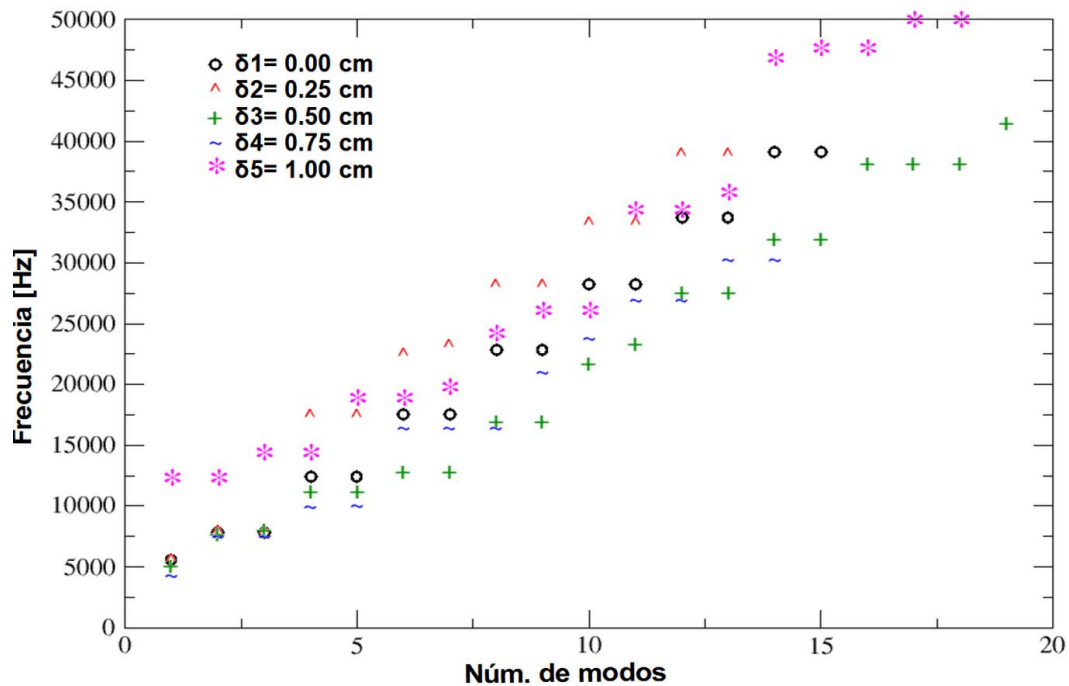


Figura 4.10: Se observan las curvas de frecuencias propias de las ondas compresionales, correspondientes a los cinco modelos estudiados anteriormente. El comportamiento de este tipo de espectros es lineal, en donde se puede ver que aún con una profundidad $\delta=1.00$ cm es similar al modelo con $\delta=0.00$, etcétera. Dicho comportamiento no deja claro el surgimiento de las bandas permitidas o prohibidas.

4.1.5. Patrones estacionarios de los distintos tipos de vibraciones del anillo dentado.

En esta sección mostramos las deformaciones que sufre el diseño de la estructura final, tipo engrane con $\delta=11.70$ mm, cuando vibra en algunos de los cuatro distintos tipos de vibraciones (flexionales dentro y fuera del plano, torsional y compresional) que presenta. Con esto completamos el análisis que se llevo a cabo del sistema e ilustramos, con las imágenes, parte de la cuidadosa y exhaustiva inspección visual, que no deja lugar a duda de como identificar las frecuencias que conforma cada uno de los espectros.

No se reportan todos los modos gráficos ya que los patrones de los diferentes modos son numerosos, es decir, considerando que a cada modelo se le calculó 119 modos propios, multiplicados por los 40 diseños explorados, da un total de 4760 patrones diferentes. Es por eso que en esta sección únicamente se presentan algunos ejemplos de los patrones gráficos para ilustrar los dobletes y también para saber la forma que tienen los modos para una frecuencia seleccionada.

Uno de los primeros dobletes para los modos flexionales dentro y fuera del plano que se encontraron para el mismo modelo con $\delta=11.70$ mm son los que se observan en las Figs. 4.11 y 4.12. En las Figs. 4.11a) y 4.11b), se encontraron a una frecuencia propia F_2 y F_{-2} de 140.83 Hz y 140.89 Hz, respectivamente. En las Figs. 4.11c) y 4.11d) se observa un doblete

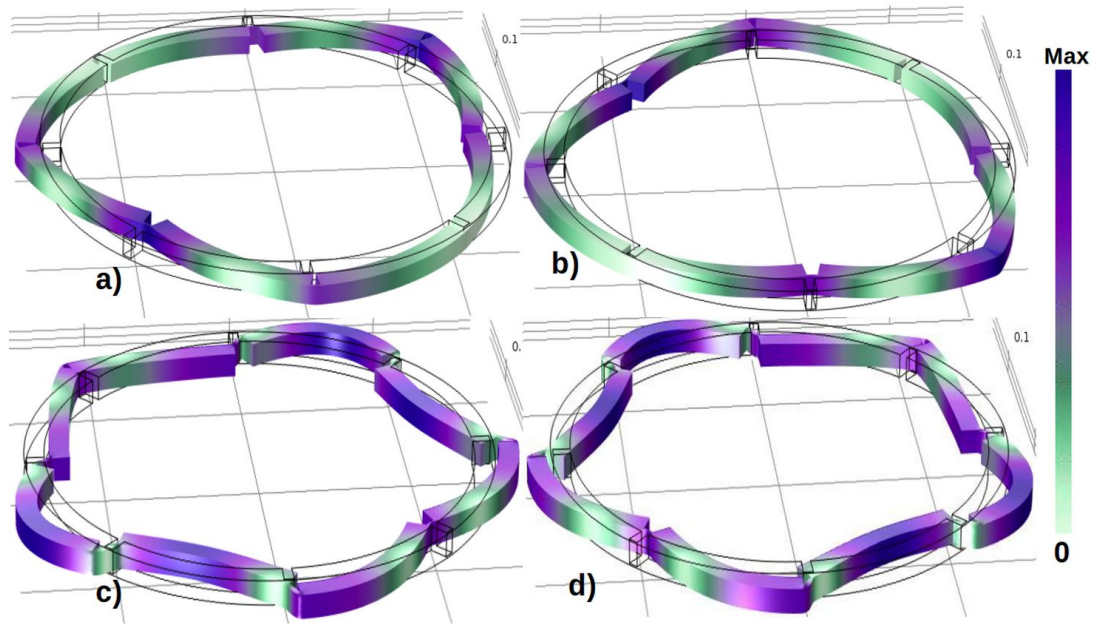


Figura 4.11: Arriba: a) y b) muestran dos de los patrones estacionarios de vibraciones flexionales en el plano del anillo dentado correspondientes a las frecuencias $F_3=140.83$ Hz y $F_{-3}=140.89$ Hz para el modelo final con profundidad $\delta=11.7$ mm. Abajo: c) y d) muestran dos patrones estacionarios de vibraciones flexionales en el plano del anillo dentado correspondientes a las frecuencias $F_6=2073$ Hz y $F_{-6}=2073.70$ Hz para el modelo final con profundidad $\delta=11.70$ mm.

correspondiente a $F_5 = 2073$ Hz y una $F_{-5} = 2073.70$ Hz para el mismo tipo de modos propios. Ambos patrones con F_5 y F_{-5} tienen la misma longitud de onda, que pueden hacerse corresponder mediante una rotación de 45° y están asociados a frecuencias muy similares. Estos dobletes vienen de la simetría circular y no deben confundirse con los dobletes característicos de las vibraciones flexionales. Los patrones de vibración tanto para F_2, F_{-2} y F_5, F_{-5} muestran deformaciones horizontalmente, paralelo al plano del anillo estructurado. Como se ve en la escala de colores en la figura discutida, para el caso del inciso **a) y b)**, se observan seis y doce nodos para el **c) y d)**, que están en color verde y los máximos desplazamientos en azul intenso.

Por su parte, los modos torsionales que provocan rotaciones de un ángulo de torsión Ω del corte transversal cuadrado (A), del engrane respecto al plano, expuesto en la Sección 2.4.3, tiene también frecuencias muy similares que se conoce en la literatura como doblete y es característico de las vibraciones torsionales, por ejemplo, para $F_{\pm 7}$ y $F_{\pm 8}$ (ver Fig. 4.13), muestran deformaciones en un ángulo de torsión $\Omega(\theta, t)$, respecto al plano del anillo con dentadura interna, como se ve en la escala de colores en los incisos de la Fig. 4.13a y la Fig. 4.13a, se observan cuatro nodos en mínimo desplazamiento (entre el color blanco y verde). Para el caso de las Figs. 4.13c y 4.13d los máximos desplazamientos corresponde al azul intenso, región en donde ocurren los modos torsionales.

Los patrones gráficos que aún faltan por exponer son los modos compresionales. En las

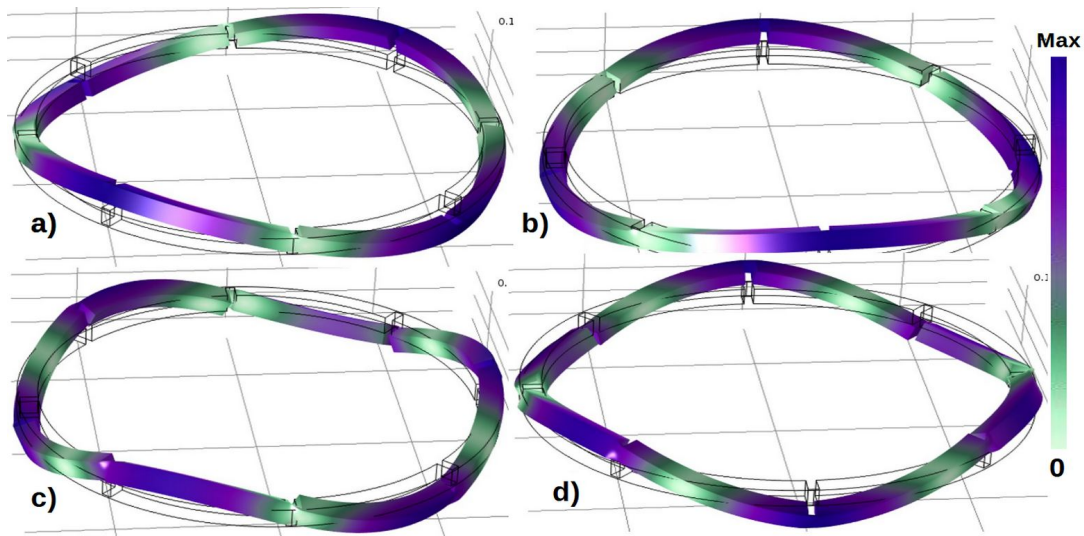


Figura 4.12: Arriba: a), b) muestran dos de los primeros patrones estacionarios de vibraciones flexionales fuera del plano del anillo dentado correspondientes a las frecuencias $F_2=197.68$ Hz y $F_{-2}=197.76$ Hz para el modelo final con profundidad $\delta=11.7$ mm. Note que ambos patrones tienen la misma longitud de onda, de hecho ambos patrones pueden hacerse corresponder mediante una rotación de 45° y están asociados a frecuencias muy similares. Esto es lo que llamamos un doblete y que es característico de las vibraciones flexionales. Abajo, c), d) corresponden a otro doblete cuyas frecuencias son $F_3=681.60$ Hz y $F_{-3}=681.66$ Hz, una vez más ambos patrones estacionarios son equivalentes si se hace una rotación por un ángulo igual a 45° . Estas frecuencias numéricas corresponden al modelo con $\delta=11.7$ mm. Todos los patrones de vibración muestran deformaciones en el eje perpendicular al plano del anillo estructurado. Como se ve en la escala de colores, los nodos están en color verde y los máximos desplazamientos en azul intenso.

Figs. 4.14a–4.14d, se observan un par de dobletes de las ondas compresionales. En estas figuras, puede observarse que en la región de los conectores (escala de colores en azul intenso), el sistema tiende a deformarse más que en la región de las celdas (escala de colores en verde). De acuerdo a la escala de colores en verde, se puede notar que el sistema muestra mínimo desplazamiento respecto al plano, mientras que en la escala de colores en azul intenso, el sistema presenta el máximo desplazamiento. Para estos casos, se observa la mayor transformación de la estructura, precisamente en los conectores, estos están actuando cual si fueran filtros que modulan el transporte de las ondas en los intervalos de frecuencias mencionadas y en otro intervalo de frecuencias ya sea menor o mayor, no se observa el sistema con ese mismo patrón, ya que cada uno de estos es como si fuera una huella dactilar del diseño.

4.1.6. Dinámica paramétrica de los espectros del cristal fonónico

De la Sección 4.1.1 a la Sección 4.1.5, se analizó cada uno de los cuatro espectros de vibraciones del anillo dentado, de ocho celdas unitarias, para cinco valores distintos de la profundidad de la muesca, representada por el parámetro δ . Como resultado de este análisis, se encontró que la estructura mencionada tiene el comportamiento más cercano a un cristal fonónico, para ondas torsionales, cuando $\delta=1.00$ cm. En esta sección mostramos que también

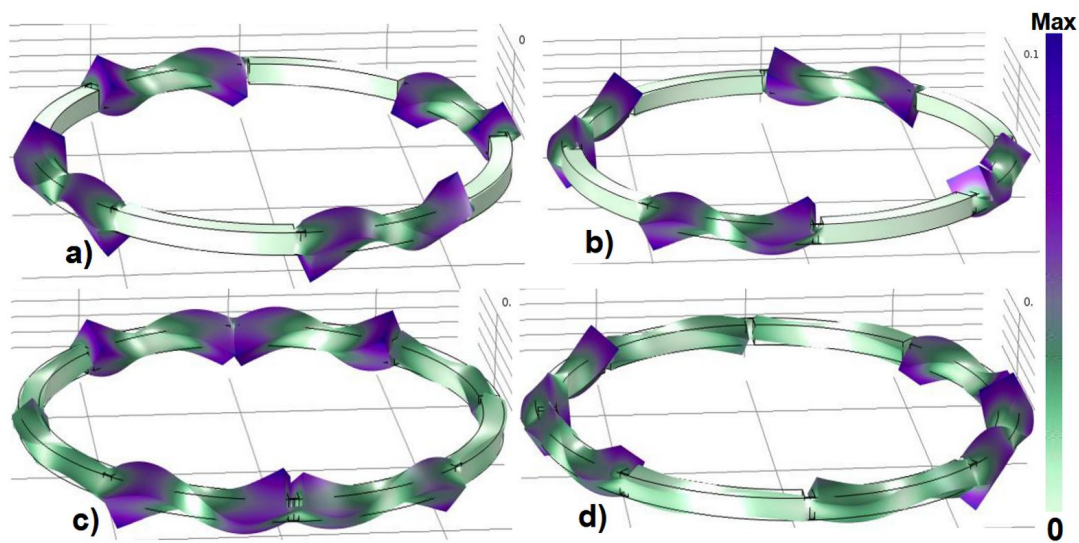


Figura 4.13: Arriba: a) y b) muestran dos de los patrones estacionarios de vibraciones torsionales del anillo dentado correspondientes a las frecuencias $F_7=13148$ Hz y $F_{-7}=13155$ Hz para el modelo final. Abajo: c) y d) muestran dos patrones estacionarios de vibraciones del mismo grupo del anillo dentado correspondientes a las frecuencias $F_8=13236$ Hz y $F_{-8}=13239$ Hz para el mismo modelo con profundidad $\delta=11.7$ mm.

es posible estudiar numéricamente la dinámica del espectro de frecuencia global (este contiene mezcladas las frecuencias de todos los tipos de vibración), del mismo sistema, en función del parámetro relevante, δ . Este análisis global permite dar un seguimiento paramétrico del espectro, donde se puede observar directamente el surgimiento de la estructura de bandas permitidas y prohibidas globales de la estructura, que caracterizan a un cristal fonónico. Para hacer este análisis global, se usaron todos los espectros numéricos globales obtenidos en las últimas tres secciones, para cada uno de los valores indicados en la Tabla 4.1 comenzando en $\delta=0.00$ mm (anillo uniforme) y hasta $\delta=11.70$ mm, a intervalos de 0.30 mm. En total se tienen 40 espectros diferentes, asociados a cada uno de estos valores. La gráfica de la Fig. 4.15, muestra la dinámica espectral global del anillo dentado. Los 40 espectros globales se ven en aumento en el eje de la frecuencia para cada valor de δ , en esta figura se muestra una gráfica saturada de información, que dificulta su análisis. Es por esto que se hace un acercamiento o amplificación de esta imagen en el eje de las frecuencias, que se muestra en la Fig. 4.16, entre 0 Hz y 6.50 kHz. Si se estudia esta figura para $\delta=10.00$ mm se puede ver claramente que existen bandas prohibidas del espectro total. En esta amplificación se observan dos brechas locales, para ilustrar estas, se ha sombreado la región horizontal que va desde R_1 hacia R_2 , ésta se encuentra centrada en aproximadamente 3.70 kHz. Una segunda brecha local más amplia se observa en el área sombreada (L_1 hacia L_2), ubicada entre 4.40 a 5.80 kHz aproximadamente. Al prestar atención en las regiones de los espectros en azul, etiquetadas con D_1 a D_7 , se observan traslapes de grupos de dos familia de modos (ondas flexionales, etcétera), cual si fueran degeneraciones, esta coincidencia en el traslape de los modos, se

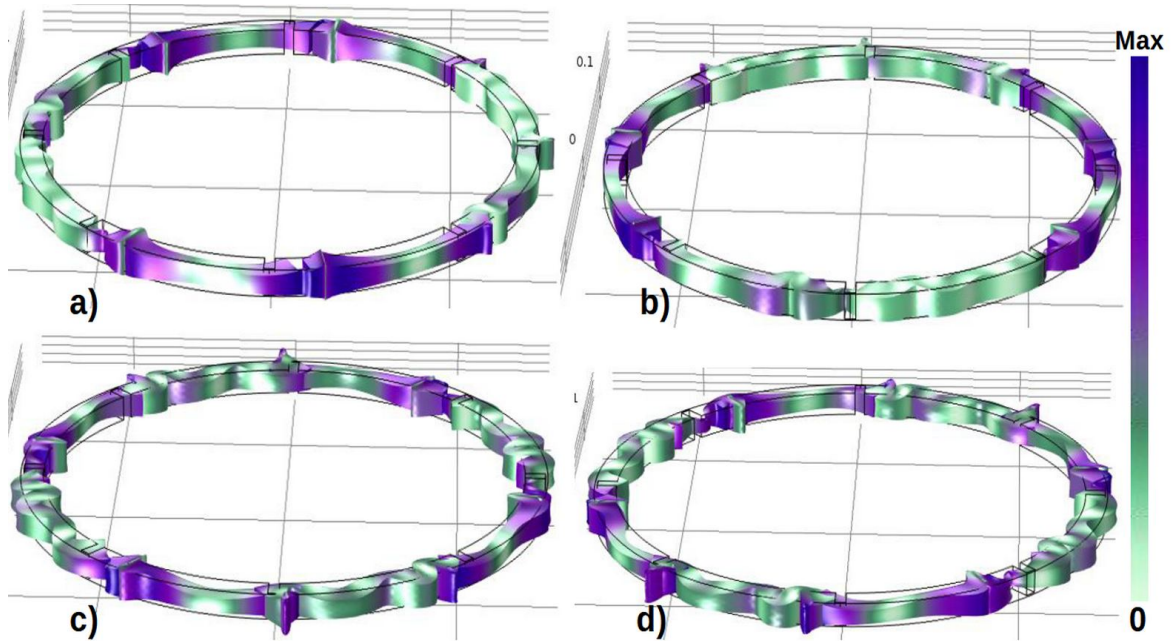


Figura 4.14: En a) y b) se observan dos modos compresionales a $F_7=47061$ Hz y F_{-7} 47061 Hz para el mismo modelo. Abajo: c) y d) se observan el par de dobletes con $F_8= 48185$ Hz y con $F_{-8}=48186$ Hz, estos dos dobletes se obtuvieron con $\delta=11.70$ mm.

le atribuye a la geometría circular y a la sección transversal cuadrada del cristal fonónico circular unidimensional.

En esta misma figura se forman familias de modos, estas son curvas que nacen desde 0 mm y terminan en 11.70 mm. Las dos primeras familias que se observan por debajo de 0.50 kHz están casi juntas aproximadamente de 0 a 4.50 mm, sin embargo después de la profundidad anterior, estos dos grupos de modos se van separando cada vez más a medida que δ crece hasta 11.70 mm. La separación progresiva de estas dos familias describe el aumento local de una banda prohibida del anillo dentado. Si se realiza el análisis anterior para otras familias que aparecen a medida que F_n y δ aumentan, se observa un comportamiento similar a lo discutido para 500 Hz para el surgimiento de las bandas permitidas y prohibidas del cristal fonónico en forma de engrane.

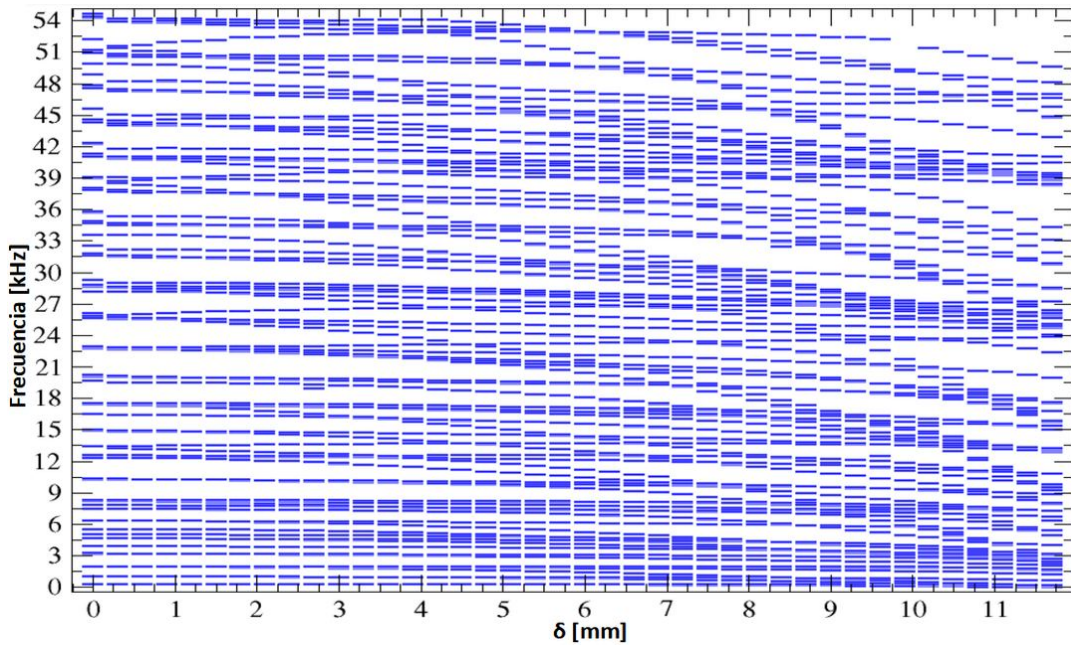


Figura 4.15: Dinámica del espectro global de frecuencias del anillo dentado en función de la profundidad de la muesca o parámetro δ . El espectro (en color azul) para cero centímetros esta centrado en el cero del eje horizontal, dicho espectro crece en el eje vertical a medida que la frecuencia aumenta, esto mismo sucede verticalmente para los siguientes espectros hasta llegar a 11.70 mm. En este espectro global en azul, se observan algunas regiones de color blanco, correspondientes a bandas localmente prohibidas.

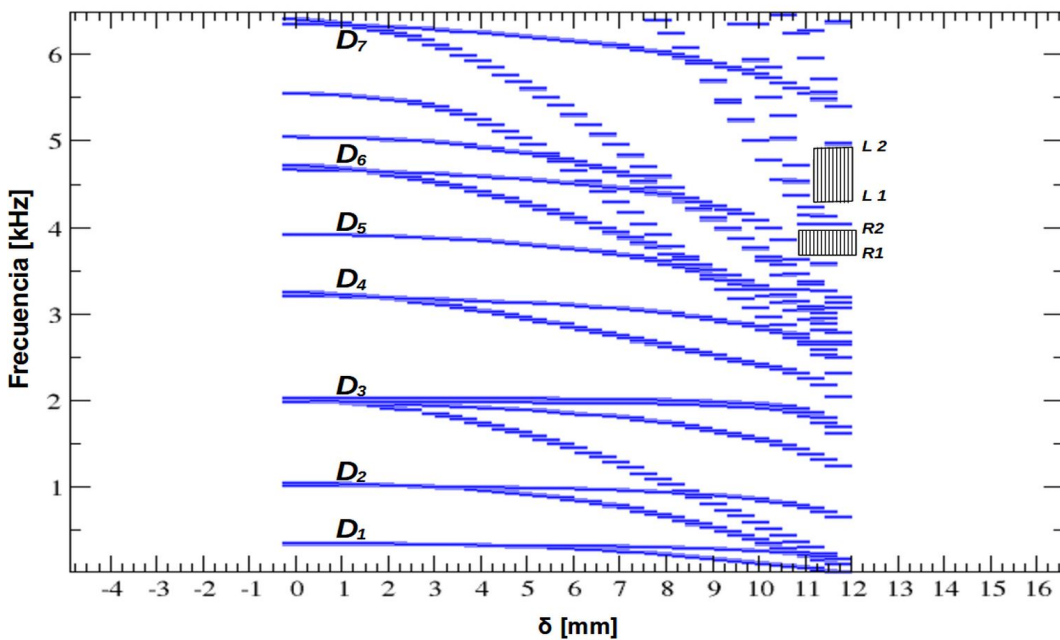


Figura 4.16: Se observa un aumento en la escala de la Fig. 4.15, es una ventana en frecuencia ubicada entre 0 a 6.5 kHz, las degeneraciones producto de la sección transversal cuadrada y la forma circular del sistema son más evidentes en los traslapes en azul que van desde D_1 a D_7 . Con este aumento del espectro global, es posible identificar varias bandas localmente prohibidas (áreas sombreadas en color negro), mismas que también se pueden ver en color blanco entre las familias de espectros de frecuencia propia (en azul).

Capítulo V

Conclusiones y Perspectivas

La presente tesis de investigación se enfocó en encontrar el modelo apropiado de un CFC. Para ello fue necesario diseñar 40 modelos diferentes con sus correspondientes soluciones numéricas y cálculos teóricos y se logro contestar satisfactoriamente la pregunta principal de la presente tesis. En suma, la investigación científica realizada, nos permitió cumplir los objetivos planteados y se llego a las siguientes conclusiones

» Se diseñó por medio de un *software* asistido por computadora una estructura periódica macroscópica en forma de anillo dentado. Esta estructura es un engrane con dentadura interna de ocho dientes que tiene propiedades de un cristal fonónico finito (FPC por sus siglas en ingles) unidimensional principalmente para ondas elásticas torsionales y flexionales en el plano. Se usaron valores de los parámetros elásticos relevantes, correspondientes al aluminio 1100 debido a que es fácil de adquirir en el mercado. Se obtuvieron soluciones numéricas de todas los posibles modos propios de vibración y sus correspondientes espectros de frecuencias en el intervalo de 0 a 55 kHz aproximadamente, usando el *software* COMSOL *Multiphysics*. Esto permitió identificar los siguientes tipos de modos propios:

1. Modos flexionales en el plano
2. Ondas flexionales fuera del plano
3. Modos torsionales
4. Modos compresionales

» Los espectros de frecuencias asociados a los modos tanto flexionales en el plano como torsionales, muestran claramente la estructura de bandas y brechas esperada para un FPC y planteada en la hipótesis de esta investigación.

» Por su parte, los espectros de frecuencias asociados tanto a los modos flexionales fuera del plano como a los modos compresionales, no muestran con claridad la estructura de

bandas y brechas fonónicas en el intervalo estudiado. Por lo que se considera que el sistema no se comporta como FPC para estos tipos de vibraciones. En el caso de las ondas compresionales, es posible que la estructura de bandas y brechas se encuentre más allá del intervalo de frecuencias estudiado. Para las ondas flexionales fuera del plano no aparece un espectro con estructura de bandas debido a que este tipo de vibraciones ocurre en una dirección en la que el sistema no muestra periodicidad, ya que el grosor del mismo es constante.

- » Al finalizar este trabajo, queda claro que las estructuras periódicas macroscópica de materiales semiconductores y conductores, encontrados en la naturaleza y en muchas disciplinas, como en ingeniería mecánica, ingeniería aeronáutica, ingeniería en comunicaciones satelitales, están íntimamente relacionadas con este tipo de estructuras periódicas, por ejemplo en anillos y diversos tipos de engranes, los cuales presentan espectros de frecuencias que conforman niveles de transmisión permitidos y prohibidos, tales modos, es la respuesta que dan estos sistemas al ser perturbados por el desgaste o fatiga del uso cotidiano.

La aplicación práctica que se le puede dar la presente investigación puede ser considerada en diferentes ingenierías como: automotriz, en comunicaciones y aeronáutica, etc. En estas disciplinas están los autos, aviones, naves espaciales y diferentes tipos de motores que dependen de los sistemas de engranes usados para transmitir movimiento lineal y angular para generar potencia mecánica por medio de otros elementos mecánicos, estos engranes son similares al presente trabajo. En este sentido las aplicaciones prácticas que se proponen al término de esta investigación son:

- ⊙ **Para prevenir riesgos**

Los resultados teóricos y numéricos de la presente investigación pueden aplicarse a la prevención de fatiga o deterioro por uso de diferentes tipos de engranes encontrados en ingeniería mecánica, aeronáutica etc. Esto es posible ya que de acuerdo al Capítulo anterior, se encontraron intervalos de frecuencias propias en las que el engrane diseñado presentó un espectro de modos propios permitidos y prohibidos, principalmente para las ondas flexionales en el plano y las ondas torsionales. De manera general el espectro de modos propios permitidos es un intervalo de frecuencia en donde se observa que el sistema tiene mayor desplazamiento y mayor deformación (mayor fatiga), en consecuencia, los fabricantes de estos

sistemas podrían evitar someter los engranes mecánicos a este intervalo de frecuencia de vibración, si no se toman las precauciones correspondientes (como el refuerzo del sistema en estas regiones en específico). Por el contrario, el trabajo más apropiado del engrane, es en el intervalo de frecuencia de modos propios no permitido (bandas prohibidas), que es donde el engrane estaría dando el funcionamiento óptimo, sufriría menos fatiga y en este intervalo de frecuencias también se estaría asegurando que la pieza tenga un mayor tiempo de vida útil.

⊙ **Para control de calidad**

El engrane o anillo con dentadura al interior que se estudió, presentó cuatro familias de ondas de vibración con un espectro de frecuencia propia único, esto se observó en cada uno de los 40 modelos estudiados en este trabajo. Dicho espectro de modos propios son tan específicos para cada diseño, que se podría decir que es la huella dactilar o digital para un engrane en particular. Por lo que, si el sistema cambia en las propiedades elásticas del material o en la forma geométrica, el espectro de modos propios también va a cambiar, porque el espectro de frecuencia es único para un sistema determinado. Esto aplicado al control de calidad, podría ser un método eficiente para saber si una pieza tiene los requerimientos que se le solicitó al fabricante o para saber si la pieza es como el cliente la requiere para alguna aplicación determinada y de esta manera la toma de decisiones para un proyecto podría ser más eficiente y confiable. Esta perspectiva, es más eficiente si se realiza la prueba de calidad con los espectros de las ondas flexionales en el plano y las ondas torsionales, ya que estas son las que muestran con más claridad la aparición de las bandas permitidas y prohibidas.

Referencias

Referencias

- [1] James F. Shackelford. (2007). *Introducción a la Ciencia de Materiales para Ingenieros*. Madrid (España): PEARSON Prentice Hall.
- [2] William F. Smith, Javad Hashemi, PhD. (2004). *Fundamentos de la Ciencia e Ingeniería de Materiales*. Impreso en México: McGraw-Hill Companies.
- [3] Donald A. McQuarrie. (1976). *Statistical Mechanics*. New York Evanston San Francisco London: Ed. Harper and Row.
- [4] P. V. Pavlov. (1987). *Solid State Physics*. Translated from Russian to Spanish by A. Molina García: MIR MOSCOW.
- [5] J. J. Méndez Martínez. (2012). *Solid State Physics*. University of Extremadura, Publications Service: Publications Service U. EX.
- [6] Daniel Malacara Hernández, Brian J. Thompson. (2018). *Fundamentals and Basic Optical Instruments*. Optical Science and Engineering Vol. II. U.S. Government works: by Taylor and Francis Group, LLC.
- [7] Steven H. Simon. (2013). *The Oxford Solid State Basics*. United States of America by Oxford University Press: The oxford.
- [8] Charles Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. Complutense University of Madrid: REVERTÉ, S. A.
- [9] W.D. Callister. (2003). *Introduction to Materials Science and Engineering*. Department of Science and Engineering, University of Otah: Editorial Reverté, S.A.
- [10] David Gevaux. (May 2010). Photonic crystals . *Nature Physics* (Nature Milestone-Photons), 18 - doi : 10.1038 /nmat2655, 1.
- [11] Ralf Wehrspohn, Torsten M. Geppert, A. von Rhein. (December 2006). *Photonic Crystals: Principles and Applications*. Encyclopedia of Materials: Science and TechnologyChapter: Photonic Crystals: Principles and ApplicationsPublisher: Elsevier, DOI: 10.1016/B0-08-043152-6/02021-0, 1-10. 26-04-2021, De ResearchGate Base de datos.

- [12] E. Yablonovitch, T.J. Gmitter, K.M. Leung (1991), Photonic Band Structure: the face-centered-cubic case employing nonspherical atoms *Physical Review Letters* 67 (17): 2295-2298.
- [13] Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., and Djafari-Rouhani, B. (1993). Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites. *Physical Review Letters*, 71(13), 2022–2025. doi:10.1103/physrevlett.71.2022.
- [14] Photonic Lattice. (2013-2019). Photonic Crystal. 01-07-2019, de Japanese Sitio web: <https://www.photonic-lattice.com/en/technology/photoniccrystal/>.
- [15] Deymier, P. A. (Ed.) (2013). *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. Springer Series in Solid-State Sciences Doi:10.1007/978-3-642-31232-8.
- [16] M. Sigalas, E.N. Economou, Band Structure of Elastic Waves in two Dimensional Systems. *Solid State Commun.* 86, 141–143 (1993).
- [17] Aravantinos-Zafiris, N., Sigalas, M. M., Kafesaki, M., and Economou, E. N. (2014). Phononic Crystals and Elastodynamics: Some relevant points. *AIP Advances*, 4(12), 124203. doi:10.1063/1.4904406.
- [18] A. Morales, J. Flores, L. Gutiérrez, y R. A. Méndez Sánchez. (2002). Compressional and Torsional Wave Amplitudes in Rods with Periodic Structure. *Acoustical Society of America*, Vol. 112, No. 5, 1-7.
- [19] A. Díaz-de-Anda, A. Pimentel, J. Flores, A. Morales, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez (2005). Locally Periodic Timoshenko Rod: Experiment and Theory. *Acoustical Society of America*, 117(5), 1-6.
- [20] C. Goffaux, J. P. Vigneron, Theoretical Study of a Tunable Phononic Band Gap System. *Phys. Rev. B* 64, 075118 (2001).
- [21] J. A. Franco-Villafañe, E. Flores-Olmedo, G. Báez, O. Gandarilla-Carrillo and R. A. Méndez-Sánchez. (2012). Acoustic Resonance Spectroscopy for the Advanced undergraduate Laboratory. *EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS*, IOP Science, 33, 2-9.
- [22] A. Arreola-Lucas, G. Báez, F. Cervera, A. Climente, R. A. Méndez-Sánchez and J. Sánchez-Dehesa. (2019). Experimental Evidence of Rainbow Trapping and Bloch Oscillations of Torsional Waves in Chirped Metallic Beams. *SCIENTIFIC REPORTS*, 9:1860, 2-10.
- [23] Arreola Lucas A. (2013) *Mechanical Vibrations in One and Two Dimensions; New Experimental Studies* [PhD thesis]. Metropolitan Autonomous University.

- [24] Millán Gómez, Simón. (2006). *Machining Procedures*. Madrid Spain: Paraninfo.
- [25] Tulio Piovan M. (2004). *Gear Trains, Planetary Reducers and Differentials (Machine Elements)*. National Technological University: Regional Faculty of Bahía Blanca.
- [26] DeLacy, B. G., Miller, O. D., Hsu, C. W., Zander, Z., Lacey, S., Yagloski, R., Joannopoulos, J. D. (2015). Coherent Plasmon-Exciton Coupling in Silver Platelet-J-aggregate Nanocomposites. *Nano Letters*, 15(4), 2588–2593. doi:10.1021/acs.nanolett.5b00157.
- [27] Joannopoulos J D, Meade R D, Winn J D (1995). *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, Princeton.
- [28] Paul E. Tippens. (2001). *Física, Conceptos y Aplicaciones*. Nueva York: McGraw-Hill.
- [29] Griffiths, D. J., and Steinke, C. A. (2001). Waves in locally periodic media. *American Journal of Physics*, 69(2), 137–154. doi:10.1119/1.1308266.
- [30] Sukhovich, A., Jing, L., and Page, J. H. (2008). Negative Refraction and Focusing of Ultrasound in Two-Dimensional Phononic Crystals. *Physical Review B*, 77(1). doi: 10.1103/physrevb.77.014301.
- [31] Yang, S., Page, J. H., Liu, Z., Cowan, M. L., Chan, C. T., and Sheng, P. (2002). Ultrasound Tunneling through 3D Phononic Crystals. *Physical Review Letters*, 88(10). doi:10.1103/physrevlett.88.104301.
- [32] Jose Martinez-Duart, Raul J. Martin-Palmer, Fernando Agullo-Rueda . (2006). *Nanotechnology for Microelectronics and Optoelectronics*. Madrid, Spain: European Materials Research Society Series.
- [33] George Watson. (2000). Introduction to Electronic Band Structure. 05-05-2021, de Silicon, Circuits, and the Digital Revolution Sitio web: <http://www.physics.udel.edu/watson/scen103/colloq2000/bandstructure.html>.
- [34] Manuel Cardona P. Fulde K. von Klitzing R. Merlin H. J. y Queisser H. *Störme; Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*; ISBN 978-3-642-31232-8 (eBook), New York Dordrecht London, 2013.
- [35] John P. McKelvey. (1996). *Solid State and Semiconductor Physics*. Mexico: Limusa Noriega Editores.
- [36] Frederick J. Milford, Robert W. Christy, and John R. Reitz. (Fourth edition). *Fundamentals of Electromagnetic Theory*. United States: Addison - Wesley Iberoamericana.

- [37] Alonso, Marcelo; Finn, Edward J. (1976). *Physical. Fields and Waves*. Madrid: Inter-American Educational Fund.
- [38] Frederick J. Milford, Robert W. Christy, and John R. Reitz. (fifth edition). *Fundamentals of Electromagnetic Theory*. United States: Addison - Wesley Iberoamericana.
- [39] Paul D. Ronney. (2005). *Basics of Mecanical Engineering*. California: Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Southern California.
- [40] Robert L. Mott. (2004). *Diseño de Elementos de Máquina*. Universidad de Dayton: PEARSON.
- [41] A. Rovira Antonio, M. Muños Domínguez. (2015). *Motores de Combustión Interna*. Madrid España: Edición Digital.
- [42] S. A. Reza Zakavat . (2013). *Electrical Enginnering (Concepts and Applications)*. San Franciso New York: Pearson.
- [43] Dan M. Goebel and Ira Katz. (2008). *Fundamentals of Electric Propulsion Ion and Hall Thrusters*. New Jersey: Lon and Hall Thrusters.
- [44] J. P. Den Hartog. (4ta edición). *Mecánica de las Vibraciones*. Nuev York: McGraw Hill Book Company.
- [45] Singiresu S. Rao. (2007). *Vibration of Continuous System*. Hoboken, New Jersey and Published simultaneously in Canada: John Wiley and Sons, Inc. ISBN: 978-0-471-77171- 5.
- [46] Augustus Love. A. (Submitted on 28 Apr 2016). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Cambridge: At the University Press.
- [47] Rao, Singirisi S. (5ta Edition, 2012). *Mechanical vibrations*. University of Miami, Pri-nied in México: Pearson Education; ISBN: 978-607-32-0952-6.
- [48] Roger W. Pryor, PhD. (2011). *Multiphysics Modeling Using COMSOL, A First Principles Approach*. Massachusetts: World Headquarters, Jones and Bartlett Publishers.
- [49] This Documentation and the Programs described herein are furnished under the COM-SOL Software License Agreement (www.comsol.com/comsol-license-agreement) and may be used or copied only under the terms of the license agreement. (1998-2019). *Introduction to COMSOL Multiphysics*. USA: COMSOL.
- [50] COMSOL, Inc. *COMSOL NEWS a Multiphysics Simulation Magazine*. USA, 2012.

- [51] Moreno, Pilar Ariza; Sáez Pérez, Andrés. Finite Element Method, Introduction to ANSYS, 1st Edition. Spain, 1999.
- [52] Inglessis, Pether; Cerrolaza, Miguel. An Introduction to the Method of Contour Elements in Engineering and Applied Science. Caracas, 2003.
- [53] Gandhi, B., Shukla, A. K., and Pandey, G. N. (2017). Design of 1×4 All Optical Splitter Based on 2D Photonic Crystal. *Advances in Optical Science and Engineering*, 551–557. doi:0.1007/978-981-10-3908-9-69.
- [54] O. C. Zienkiew, FRS, R. L. Taylor. (1994). *The Finite Element Method*. Madrid Spain: McGraw-Hill Book Company UK.
- [55] C. Martínez Arnaiz. (1998). *Structural calculation*. Madrid Spain: Higher Technical School of Aeronautical Engineers.
- [56] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. (2001 Vol. 7). *Theory of Elasticity*. Academy of Sciences U.R.S.S .: Reverté S.A.
- [57] Luis Ortiz Berrocal. (1998). *Elasticity*. Madrid Spain: McGraw Hill.
- [58] Xavier Oliver Olivella and Eduardo Car. (2000). *Continuous Media Mechanics For Engineers*. Editions of the Universitat Politècnica de Catalunya, SL: EDUGRAF S.L.
- [59] Manzanares-Martínez, B., Flores, J., Gutiérrez, L., Méndez-Sánchez, R. A., Monsivais, G., Morales, A., and Ramos-Mendieta, F. (2010). Flexural Vibrations of a Rectangular Plate for the Lower Normal Modes. *Journal of Sound and Vibration*, 329(24), 5105–5115. doi:10.1016/j.jsv.2010.06.010.

Apéndices

Apendice A

Ecuaciones de onda para los cuatro tipos de vibración de un anillo uniforme

Para obtener las ecuaciones diferenciales (2.5, 2.11, 2.13, 2.17 y 2.18), que gobiernan los cuatro movimientos de un anillo uniforme, de entrada se hacen las siguientes consideraciones:

- (a) La línea central del anillo en un estado no deformado constituye un círculo completo o un arco de círculo.
- (b) La sección transversal del anillo es constante alrededor del círculo.
- (c) No se introducen restricciones de límite en el anillo (es decir, el borde del sistema se supone libre).

Para recordar de que tipo de sistema se está tratando, se propone un diagrama de cuerpo libre del aro circular, como se observa en la Fig. 1.1, es la representación de las fuerzas de acción $f(\theta, t)$ y $p(\theta, t)$, fuerzas radiales y tangenciales externas, actuando en la dirección que indican las flechas del diagrama, por unidad de longitud, respectivamente. La sección transversal del aro es cuadrada, el corte correspondiente se observa a la izquierda de la misma figura representada con “A”, y explícitamente a la derecha, podemos ver la forma de este diagrama, mediante un cuadrado sombreado. Considerando la misma figura, en la parte $abcd$ del aro circular, ésta es el elemento diferencial de ese sistema, denotado con $d\theta$, dicho $d\theta$ puede estar en cualquier posición angular θ , esto al considerar la uniformidad del sistema, R representa el radio constante del aro, este se medido desde el centro circular, al centro de la vista superior del mismo.

Por la uniformidad del anillo, es suficiente estudiar un elemento diferencia de este. La Fig. 1.2, es el aumento en escala a la parte $abcd$ de la Fig.1.1, aquí se observa a detalle la descripción del elemento $d\theta$.

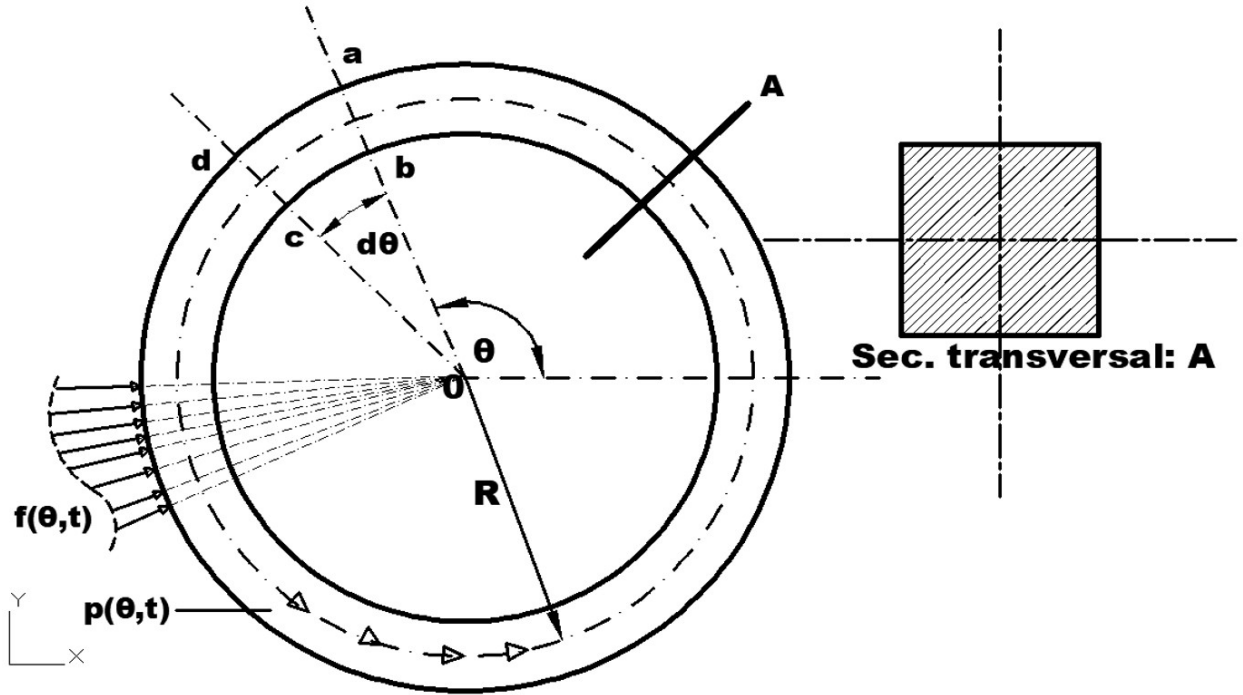


Figura 1.1: Diagrama de cuerpo libre para el aro uniforme, vista superior. A la izquierda de esta Fig. se puede observar la fuerza distribuida $f(\theta, t)$ con flechas en dirección radial hacia el centro del anillo. Se aprecia que el radio R llega hasta la línea punteada, en donde está actuando la fuerza tangencial externa $p(\theta, t)$. El elemento diferencial $d\theta$ corresponde a la sección circunscrita por los puntos $abcd$, y a la derecha de ésta, se encuentra el área “A” de la sección transversal del sistema. Este diagrama se elaboró basado en [44, 45, 46, 47]

En donde,

$M1(\theta, t)$: Es el momento de flexión en el plano que actúa, como se indica en el mismo esquema.

$F(\theta, t)$: La fuerza cortante

$P(\theta, t)$: Fuerza de tracción

u : Es el desplazamiento radial

U : El movimiento actuando radialmente.

Las ecuaciones de movimiento en las direcciones radial y tangencial que actúan sobre el elemento del anillo esquematizado en la Fig.1.2 se expresan como [44, 45, 46, 47]:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} + P + fR = \rho AR \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

y también,

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} - F + pR = \rho AR \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{A.2})$$

Las Eqs. (A.1) y (A.2) son las encargadas de modelar el movimiento en las direcciones radiales y tangenciales. Los términos a la izquierda de estas expresiones, son fuerzas distribuidas cambiantes, estas hacen que el sistema reaccione tanto como sea posible de una

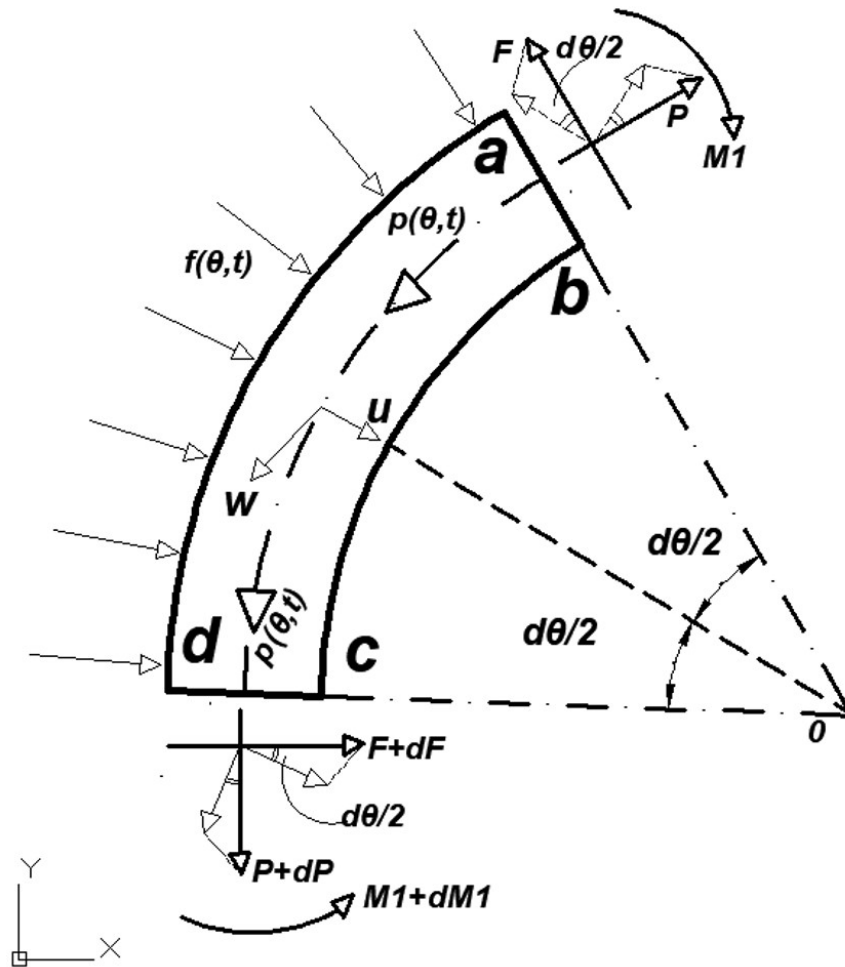


Figura 1.2: Elemento diferencial $d(\theta)$. En esta imagen se observan las fuerzas distribuidas radiales ($f(\theta, t)$), las fuerzas de corte ($F(\theta, t)$), la dirección en que actúa el momento de flexión ($M_1(\theta, t)$), también se observan las fuerzas de tracción ($P(\theta, t)$) y el desplazamiento radial ($u(\theta, t)$).

fuerza externa. En la parte de la derecha de estas relaciones podemos ver que la aceleración que experimenta el sistema es a través de la segunda derivada parcial temporal del movimiento radial ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$) de una determinada masa de dicho sistema, esta masa al parecer no se ve involucrada, pero si tomamos en cuenta la densidad ρ , de las mismas ecuaciones, se puede ver, que la masa del sistema esta participando en dichas expresiones.

Desde la perspectiva de la Fig. 1.1 y Fig. 1.2, no son suficientes para visualizar todas la fuerzas actuando en el aro tridimensional, por lo que, para estudiar el resto del sistema por efecto de otras fuerzas actuantes, es necesario tomar en cuenta la Fig. 1.3, en este esquema es posible observar las fuerzas de reacción de las ecuaciones de movimiento, en la dirección transversal y el momento en el plano medio del anillo (alrededor de un eje normal al plano medio del anillo), en la Fig.1.3, se puede observar las expresiones para ver las fuerzas de corte, la fuerza transversal distribuida externa, la velocidad transversal y el momento de

flexión en el plano, que aparecen en las expresiones (A.3) y (A.4) respectivamente.

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} + qR = \rho AR \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \theta} + FR = 0 \quad (\text{A.4})$$

En donde, $Q(\theta, t)$: Fuerza de corte transversal, la línea de actuación transversal.

$q(\theta, t)$: Es la fuerza transversal distribuida externa en dirección normal al plano medio del anillo y el efecto de esta fuerza se puede percibir en sentido opuesto a $Q(\theta, t)$.

R : Radio del anillo

ρ : Densidad del material del que este hecho el aro

$v(\theta, t)$: Denota el desplazamiento transversal

A : Área de la sección transversal cuadrada del aro

$M_1(\theta, t)$: Es el momento de flexión en el plano

M_2 : Momento de flexión en el anillo con respecto a un eje radial

$M_t(\theta, t)$: Momento de torsión

$F(\theta, t)$: La fuerza cortante

$m_0(\theta, t)$: Torque externo distribuido

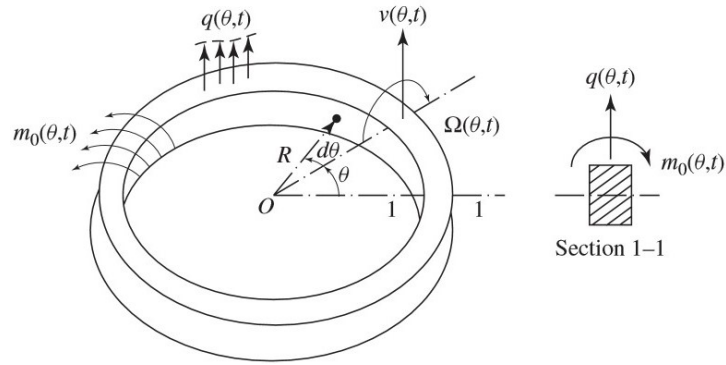
$\Omega(\theta, t)$: Desplazamiento angular o ángulo de torsión

Las expresiones que siguen, corresponden a las ecuaciones de equilibrio del momento dinámico sobre el eje radial y sobre el eje tangencial del elemento del anillo vienen dadas por [44, 45, 46, 47]:

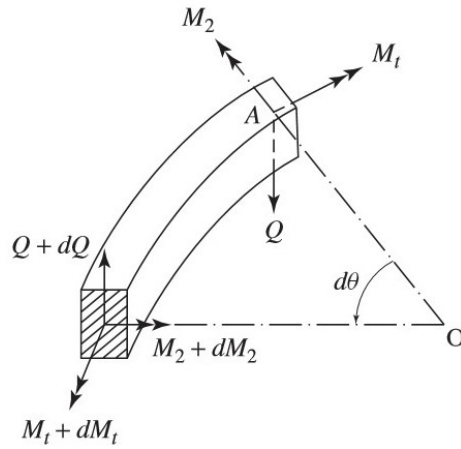
$$\frac{\partial M_2}{\partial \theta} - QR + M_t = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial \theta} - M_2 + m_o R = 0 \quad (\text{A.6})$$

Al presentar las Eqs. (A.1) a la (A.6) y el significado de sus términos es para saber que de estas expresiones se derivan las ecuaciones clásicas que gobiernan los cuatro tipos de movimientos del anillo, estas ecuaciones, son las encargadas de modelar teóricamente en tres dimensiones las vibraciones de un aro sencillo, como el de la Fig. 1.1. Las incógnitas citadas en estas expresiones matemáticas son: $F, P, Q, u, v, U, M_1, M_2, M_t$ y Ω , las últimas dos variables, la podemos ver expresadas en la Fig. 1.3, estas son, el momento de flexión en el plano y el desplazamiento angular de la sección transversal (Ω). Son diez incógnitas que están involucradas para deducir las ecuaciones clásicas que modelan los diferentes modos de vibración de un anillo (Eqs.: (2.5), (2.11), (2.13), y (2.17)), pero como únicamente se cuentan con 6 ecuaciones de onda, no se pueden resolver si no implementando cuatro ecuaciones



(a) Aro circular en perspectiva 3D.



(b) Diferencial de volumen.

Figura 1.3: (a) Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas transversales y (b) Diagrama de cuerpo libre del elemento diferencial de volumen. Tomado de la Ref. [45].

más que deben tener las relaciones de momento y la condición de extensionalidad de la línea central del anillo.

Una de las ecuaciones faltantes, de acuerdo a los autores citados anteriormente, es la Eq. (A.7), esta expresión, modela la deformación en la sección transversal del aro, por efecto de los desplazamientos u y U , en donde la primera actúa de forma radial y la segunda en sentido tangencial, ésta expresión para el movimiento transversal radial u es:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = u \quad (\text{A.7})$$

El momento de flexión M_1 , esta involucrado en la Eq. (A.8), el segundo momento de inercia de área I_1 . En esta ecuación aparece el módulo de Young del material con que este fabricado el anillo E , el radio del aro R y el movimiento transversal radial u .

$$\frac{EI_1}{R^2} \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = M_1 \quad (\text{A.8})$$

Y las dos relaciones faltantes (Eqs. (A.9) y (A.10)), esta involucrado el módulo de rigidez flexional del aro, el cual se define como el producto del módulo de Young y el momento de inercia dos (EI_2). Similarmente encontramos la rigidez torsional GJ , el desplazamiento angular de la sección transversal Ω .

$$\frac{EI_2}{R^2}(R\Omega - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}) = M_2 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{GJ}{R^2}(\frac{dv}{d\theta} + R\frac{d\Omega}{d\theta}) = M_t \quad (\text{A.10})$$

Ahora si se analizan las Eqs. (A.1) - (A.6), se encuentra la ausencia del movimiento transversal $v(\theta, t)$ y el desplazamiento angular de la sección transversal (A), por lo que estas ecuaciones destacan por que en ellas encontramos modelando el desplazamiento radial u y el movimiento radial U , en conjunto estas expresiones representan las vibraciones en el plano del sistema.

En este mismo contexto al analizar las Eqs. (A.7) - (A.10), se encuentra el caso contrario del primer grupo de ecuaciones ya que los movimientos tanto tangencial como radial no están involucrados, pero en cambio los movimientos que están actuando son v y el desplazamiento angular. En resumen, esta segunda clasificación de ecuaciones las cuales representan las vibraciones del anillo en ángulos de 90^0 respecto al plano del mismo sistema se tienen las ondas flexionales fuera del plano (OFFP). En general, en estas expresiones, al acoplarse o desacoplarse (al desaparecer o aparecer una o más variables), dan origen a los diferentes tipos de vibraciones en un aro simple (Fig.1.1): **vibraciones flexionales dentro y fuera del plano, torsionales y compresionales.**

Combinando las Eqs. (A.1), (A.2), (A.4), (A.7) y (A.8), se obtiene una sola ecuación de onda (Eq. (A.11)), esta expresión representa la ecuación clásica del movimiento para las ondas flexionales respecto a un plano imaginario horizontal paralelo al aro. Este movimiento se da en términos del movimiento radial U , en ésta dirección se esta efectuando las vibraciones flexionales en el plano (OFP).

$$\frac{\partial^6 U}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{R^4}{EI_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} - p \right) + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - U \right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$U(\theta, t) = W(\theta)e^{i\omega t} \quad (\text{A.12})$$

En donde,

U : Vibración flexional o movimiento radial
 θ : Ángulo de giro
 R : Radio del anillo
 E : Módulo de Young
 I_1 : Segundo momento de inercia de área de la sección transversal
 f : Fuerza distribuida actuando radialmente
 p : Fuerza tangencial externa
 A : Área de la sección transversal
 ρ : Densidad del material del aro
 t : La variable temporal
 ω : Frecuencia propia
 W : Movimiento tangencial

Para simplificar la Eq. (A.11), se tiene que proponer la Eq. (A.12), por medio de ésta, es posible conocer la relación, para el cálculo teórico de las frecuencias propias (ω_n). La solución a la ecuación clásica que modela las OFFP (Eq. A.11) se trata en el Apéndice B.

Para la deducción de la ecuación diferencial que modela las OFFP, resulta al combinar las Eqs (A.3), (A.5), (A.6), (A.9) y (A.10). El resultado de combinar todas estas ecuaciones, es la expresión clásica que gobierna las OFFP Eq. (A.13). Los términos nuevos que aún no se mencionó es el momento de inercia dos (I_2), la rigidez torsional ($C = GJ$) y el par externo distribuido (m_0), (Ver Fig. 1.3a).

$$\frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\rho AR^4}{EI_2} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) - \frac{\rho AR^4}{C} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) - \frac{R^4}{EI_2} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \right) + \frac{R^4}{C} q + R^3 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{EI_2} \right) \left(\frac{\partial^2 m_0}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{A.13})$$

La simplificación de la Eq. (A.13), se sigue el mismo procedimiento para resolver la ecuación Eq.(A.11), el resultado de esta resolución, es la expresión analítica para calcular las frecuencias propias para las OFFP, ω_n . En donde $n = \pm 2, \pm 3, \dots$ y el momento de inercia dos es I_2 [44, 45, 46, 47].

Para la deducción de la ecuación clásica para modelar las **ondas torsionales** se desprecian los movimientos u y U , la variable mas importante para este caso, es la deformación angular de la sección transversal Ω , para este caso, la Eq. (A.14), es la ecuación de onda que gobierna los modos torsionales del anillo uniforme.

$$\frac{C}{R} \frac{\partial^2 (\Omega)}{\partial \theta^2} - \frac{EI_2}{R} (\Omega) = \rho J \frac{\partial^2 (R\Omega)}{\partial t^2} \quad (\text{A.14})$$

La solución de (A.14), es de la forma (A.12), al combinar estas dos expresiones se llega

a la relación para calcular las frecuencias propias (ω_n), para las **ondas torsionales**. Para esta expresión, los valores de n , son los mismos valores que en las Eqs. (A.11) y (A.13). En donde el momento polar de inercia es J y la rigidez torsional del anillo, C , para resolver la expresión (A.14), es análogo al del Apéndice (B), para resolver la Eq. (A.11) en términos de la frecuencia propia.

En el caso de las **ondas compresionales**, por su interpretación física se puede decir que son aquellas que hacen se estire (hay reducción en la sección transversal del aro) o se contraiga el material (aumenta la sección transversal). Este tipo de ondas se hace presente cuando desaparecen las **vibraciones fuera del plano y las ondas torsionales** Ω . Las expresiones que modelan las **ondas compresionales** son las ecuaciones (A.15) y (A.16). En estas expresiones están involucrados, los movimientos radiales y tangenciales respectivamente. La parte de la izquierda de estas relaciones representan las fuerzas distribuidas, que son las responsables de que el sistema reaccione mediante una fuente de fuerza externa, mientras que a la derecha es apreciada la aceleración del mismo. Al despreciar la fuerza F de estas ecuaciones, se llega a las expresiones que modelan las **ondas compresionales** en términos de u , U y la fuerza tangencial P , a continuación se aprecian las Eqs. (A.15) y (A.16).

$$P = \frac{EA}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - u \right) = \rho AR \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \rho AR \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{A.16})$$

En donde, $P(\theta, t)$ es la fuerza de tracción, ρ , A y R son la densidad, área de la sección transversal y radio del aro, respectivamente. También $u(\theta, t)$ es el movimiento radial transversal y $U(\theta, t)$ el movimiento radial con θ y t la variable angular y el tiempo, respectivamente. La U y u son dos funciones diferentes que tiene que ver cuando se estira y cuando se contrae el material del aro. Se requiere de un sistema de ecuaciones para estudiar las ondas compresionales, debido a que cuando el aro se comprime (alarga) en la dirección angular el aro se ensancha (angosta) en la dirección radial.

Para resolver las Eqs. (A.15) y (A.16), se asume que los movimientos radiales u y U sean de la forma de (A.17) y (A.18). Al combinar éstas expresiones en las Eqs. (A.15) y (A.16), se llega a la Eq. (A.19), correspondiente a las frecuencias propias para las **ondas compresionales** [44, 45].

$$u(\theta, t) = (C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta) e^{i\omega t} \quad (\text{A.17})$$

$$U(\theta, t) = n(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta) e^{i\omega t} \quad (\text{A.18})$$

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2}(1 + n^2) \quad (\text{A.19})$$

$u(\theta, t)$: Desplazamiento transversal radial

$U(\theta, t)$: Movimiento radial

C_1 y C_2 : Constantes

E : El módulo de Young

ω_n : Frecuencia propia

$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \text{ etc.}$

ρ : Densidad del material

R : el radio del anillo

Apendice B

Solución de la ecuación de onda para los modos flexionales en el plano, para un anillo uniforme

Las Eqs. diferenciales o de onda (A.11), (A.13), (A.14), (A.15) y (A.16), que son las ecuaciones de onda clásicas que gobiernan los cuatro modos de vibración para un anillo con sección transversal uniforme (modos flexionales dentro y fuera del plano, torsionales y compresionales). Con las soluciones analíticas de estas expresiones, es posible encontrar las fórmulas para calcular las frecuencias propias, y a través de estas, las cuatro diferentes maneras de vibrar del sistema. Estas ecuaciones clásicas son de hasta sexto orden, como es el caso de la Eq. (A.11). Se toma esta expresión para resolverla y mostrar el camino resolutivo, para resolver las ecuaciones restantes, se recomienda al lector seguir una metodología similar. Para empezar, se reescribe nuevamente la expresión a resolver:

$$\frac{\partial^6 U}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{R^4}{EI_1} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} - p \right) + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - U \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Se propone la Eq. (B.2) con el único fin de simplificar la Eq. (B.1), la expresión (B.2) se escribe a continuación,

$$U(\theta, t) = W(\theta)e^{i\omega t} \quad (\text{B.2})$$

y si se sustituye la Eq. (B.2) en la expresión (B.1) se llega a la expresión (B.3).

$$e^{i\omega t} \frac{d^6 W(\theta)}{d\theta^6} + 2e^{i\omega t} \frac{d^4 W(\theta)}{d\theta^4} + e^{i\omega t} \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - \frac{R^4}{EI_1} \frac{df}{d\theta} - p + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{i\omega t} \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - W(\theta)e^{i\omega t} \right) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Es posible simplificar la Eq. (B.3), si se divide entre $e^{i\omega t}$, y al considerar que los movimientos f y p no están presentes, es decir, valen cero y se llega a la Eq. (B.4).

$$\frac{d^6 W(\theta)}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 W(\theta)}{d\theta^4} + \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{e^{i\omega t}} \frac{\rho A R^4}{E I_1} \frac{d^2}{dt^2} (e^{i\omega t} \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - W(\theta) e^{i\omega t}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ahora se calcula la segunda derivada temporal del cuarto término de la relación (B.4), esto permite llegar a la expresión (B.5). Esta ecuación, aún se puede simplificar mas si concediéramos que i^2 es menos uno y también podemos despreciar la parte exponencial, como está en el numerador y en el denominador, se hace uno. Al hacer los arreglos correspondientes en la Eq. (B.5), se obtiene la expresión (B.6).

$$\frac{d^6 W(\theta)}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 W(\theta)}{d\theta^4} + \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{e^{i\omega t}} \frac{\rho A R^4}{E I_1} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} \left(\frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - W(\theta) \right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d^6 W(\theta)}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 W(\theta)}{d\theta^4} + \frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - \frac{\rho A R^4 \omega^2}{E I_1} \left(\frac{d^2 W(\theta)}{d\theta^2} - W(\theta) \right) = 0 \quad (\text{B.6})$$

La Eq. (B.6) es una expresión con menos términos que la ecuación de onda (B.1), la solución armónica que se propone para la Eq. (B.6) es de la forma (B.7),

$$W(\theta) = C_1 \sin(n\theta + \phi) \quad (\text{B.7})$$

en donde C_1 y ϕ son constantes.

Al sustituir la relación (B.7) en la Eq. (B.6), hacer las derivadas y las manipulaciones correspondientes el polinomio al que se llega es la Eq. (B.8),

$$(\cos \phi \sin(n\theta) + \sin \phi \cos(n\theta))(-n^6 + 2n^4 - n^2 - \frac{\rho A R^4 \omega^2}{E I_1}(-n^2 - 1)) = 0 \quad (\text{B.8})$$

de tal manera que al multiplicar por -1 y despejando ω^2 de la expresión (B.8), se obtiene la expresión analítica para estimar las frecuencias naturales de vibración del sistema ω (Eq. (B.9)), corresponde a los modos **flexionales en el plano**.

$$\omega_n^2 = \frac{E I_1}{\rho A R^4} \left(\frac{n^6 - 2n^4 + n^2}{n^2 + 1} \right) \quad (\text{B.9})$$

En donde,

ω : Frecuencia propia analítica de vibración del anillo

A: Es el área de la sección transversal del aro

ρ : La densidad del material

E : El módulo de Young

I_1 : Denota el segundo momento de inercia de área, alrededor de un eje perpendicular al plano medio del anillo, que pasa a través del centroide, éste se estima con la Eq. (B.10).

$$\iint_A x^2 dA = I_1 \quad (\text{B.10})$$

En la Eq. (B.9), n solo puede tomar los valores $\pm 2, \pm 3, \dots$ etcétera. No se toma en cuenta el valor de $n = \pm 1, 0$, ya que es la oscilación pura del sistema e indetermina la Eq. (B.9), además $n = \pm 1$ esta asociado con el movimiento del cuerpo rígido. La solución de la Eq. (B.10) para llegar a la solución analítica del segundo momento de inercia de área (I_1) se encuentra en el Apéndice C.

Apendice C

Cálculo del segundo momento de inercia de área

En este apartado se resuelve la Eq.(B.10) y se llega a la expresión analítica para el segundo momento de inercia de área. Para resolver la integral doble de la expresión antes mencionada se reescribe nuevamente la Eq.(B.10) como se muestra a continuación.

$$\iint_A x^2 dA = I_1 \quad (\text{C.1})$$

La solución de la Eq. (C.1) es para el anillo uniforme con sección transversal cuadrada. a continuación en la Fig.(3.1), se observa el anillo uniforme y la parte sombreada es la sección transversal correspondiente.

De acuerdo a la sección transversal de la Fig. (3.1), $I_1=I_y = \iint_A x^2 dA$.

En donde,

$dA = dxdy$: Es el elemento diferencial.

Al reescribir la expresión para $I_1 = I_y$, se tiene la Eq.(C.2),

$$I_1 = \iint_A x^2 dA = \iint_A x^2 dxdy. \quad (\text{C.2})$$

El límite inferior de integración es $-0.5H$ y el límite superior es $0.5H$, y se tiene:

$$I_1 = \iint_A x^2 dA = \iint_A x^2 dxdy = \int_{-0,5H}^{0,5H} \int_{-0,5H}^{0,5H} (x^2) dxdy$$

Nótese que en el resultado anterior los límites de integración tanto en x como en y son los mismos ya que la sección transversal del aro uniforme es cuadrada. Al hacer la integrales correspondientes y la evaluación de los limites de integración, la expresión para el segundo momento de inercia de área es la Eq. (C.3).

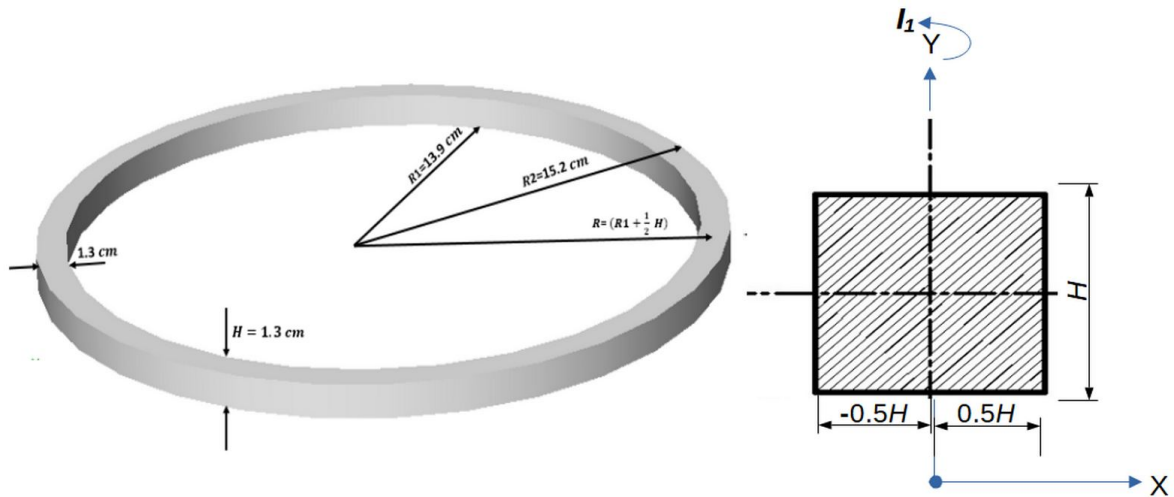


Figura 3.1: A la izquierda de esta figura se observa el aro uniforme con sus dimensiones geométricas (en donde $H=1.3\text{ cm}$ =altura del aro, $R_1=13.9\text{ cm}$ = radio interior, $R_2=15.2\text{ cm}$ = radio exterior y $R=(R_1+0.5H)$ es el radio que va del centro del sistema hasta el valor de $\frac{1}{2}H$) y a la derecha de esta misma se observa la sección transversal sombreada de este sistema. El segundo momento de inercia de área es respecto a un eje perpendicular al plano medio del anillo y que pasa en el centroide.

$$I_1 = \frac{H^4}{12} = \frac{1}{12}H^4 \quad (\text{C.3})$$

Como,

$H=0.013\text{ m}$, al sustituir el valor de H en Eq. (C.3), el valor del momento de inercia es:

$$I_1=2.38008 \times 10^{-9} \text{ m}^4, \text{ respectivamente.}$$

Apendice D

Solución de la ecuación de onda para los modos torsionales en el anillo uniforme

Antes de resolver la ecuación de onda para las ondas torsionales se reescribe la expresión correspondiente (Eq.(D.1)).

$$\frac{C}{R} \frac{\partial^2(\Omega)}{\partial \theta^2} - \frac{EI_2}{R}(\Omega) = \rho JR \frac{\partial^2(\Omega)}{\partial t^2} . \quad (\text{D.1})$$

Para un anillo completo se supone de acuerdo a otros trabajos repostados [44, 45] que en las vibraciones libres están involucradas n longitudes de onda en la circunferencia del sistema. Para simplificar y resolver la Eq. (D.1), se sustituye la Eq. (D.2) en la Eq. (D.1),

$$\Omega(\theta, t) = C_1 \sin(n\theta + \phi) e^{i\omega t} \quad (\text{D.2})$$

Entonces al combinar las expresiones antes mencionadas se obtiene la siguiente expresión (Eq. (D.3)):

$$\frac{C}{R} \frac{d^2}{d\theta^2} \{(C_1 \sin(n\theta + \phi)) e^{i\omega t}\} - \frac{EI_2}{R} \{(C_1 \sin(n\theta + \phi)) e^{i\omega t}\} = \rho JR \frac{d^2}{dt^2} \{C_1 \sin(n\theta + \phi) e^{i\omega t}\} \quad (\text{D.3})$$

De la Eq. (D.3) se calculan las derivadas temporales correspondientes y se llega a la Eq. (D.4).

$$\frac{C}{R} \frac{d^2}{d\theta^2} \{C_1 \sin(n\theta + \phi) e^{i\omega t}\} - \frac{EI_2}{R} \{C_1 \sin(n\theta + \phi)\} + R\omega^2 \rho J C_1 \sin(n\theta + \phi) = 0 \quad (\text{D.4})$$

Para hacer las derivadas respecto a θ de la relación anterior, se usa la identidad de la Eq. (D.5) en la Eq. (D.4) y después de hacer la operaciones de derivación se divide toda la expresión entre C_1 y obtiene la Eq. (D.6).

$$\sin(n\theta + \phi) = \sin(n\theta)\cos(\phi) + \cos(n\theta)\sin(\theta) \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{-Cn^2}{R}\{\cos(\phi)\sin(n\theta) + \sin(\phi)\cos(n\theta)\} - \frac{EI_2}{R}\{\cos(\phi)\sin(n\theta) + \sin(\phi)\cos(n\theta)\} + \\ \omega^2 \rho J R \{\cos(\phi)\sin(n\theta) + \sin(\phi)\cos(n\theta)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Al factorizar y reorganizar términos de la Eq. (D.6) se obtiene la expresión de la Eq. (D.7).

$$\{\cos(\phi)\sin(n\theta) + \sin(\phi)\cos(n\theta)\}\left(\frac{-Cn^2}{R} - \frac{EI_2}{R} + \omega^2 \rho J\right) = 0 \quad (\text{D.7})$$

Finalmente, la Eq. (D.7) se multiplica por -1 y se despeja ω^2 y se obtiene la Eq. (D.8), correspondiente a la ecuación analítica para los modos propios de las ondas torsionales para el aro uniforme.

$$\omega^2 = \frac{Cn^2 + EI_2}{\rho J R^2} \quad (\text{D.8})$$