Funcionais aditivos de processos de exclusão

Patrícia Gonçalves
Centro de Matemática da Universidade do Minho
Campus de Gualtar
4710-057 Braga, Portugal
e-mail: `patg@math.uminho.pt`

Resumo: Neste trabalho consideram-se processos de exclusão partindo da medida de Bernoulli produto. Obtém-se o limite em escala de funcionais aditivos, como por exemplo do tempo de ocupação, a partir das flutuações da densidade.

Abstract In this work we consider exclusion processes starting from the Bernoulli product measure. We obtain the scaling limits of additive functionals, as for example the occupation time, from the density fluctuations.

palavras-chave: Processos de exclusão; funcionais aditivos.

keywords: Exclusion processes; additive functionals.

Neste trabalho pretende-se explorar a seguinte questão: dado um processo de Markov a tempo contínuo $(X_t)_{t\geq 0}$ com espaço de estados compacto $\mathcal{E}$ e uma função $f:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ qual o limite em escada do funcional aditivo

$$\int_0^t f(X_s)ds \ \ ?$$

O processo de Markov que se considera é o *processo de exclusão*. Vai-se definir a evolução do processo em $\mathbb{Z}$ e o seu espaço de estados é $\mathcal{E}=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. A dinâmica deste processo pode ser descrita da seguinte forma. Em cada sítio $x\in\mathbb{Z}$, existe um relógio aleatório com distribuição exponencial de parâmetro 1 e independente dos relógios de outros sítios. Cada estado deste processo é uma configuração $X\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, i.e. $X=(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots)$ é um vetor com infinitas coordenadas onde $x_i\in\{0,1\}$ para todo $i\in\mathbb{Z}$. A interpretação física é a seguinte, se para $x\in\mathbb{Z}$, $X(x)=1$ então o sítio x está ocupado com uma partícula, se $X(x)=0$ então o sítio x está vazio. Aqui $X(x)$ representa a entrada do vetor correspondente ao sítio x. Cada partícula movimenta-se como um passeio aleatório, mas sujeito a restrições locais devido ao movimento das restantes partículas. Quando o relógio em x toca, pode acontecer o seguinte. Se não existe partícula em x, então nada acontece e os relógios iniciam uma nova contagem; se existe uma partícula em x ela decide saltar para $x+1$ ou $x-1$ de acordo com $r(\cdot)$ definida abaixo;

mas o salto só ocorre se o sítio está vazio, caso contrário nada acontece - daqui provém o nome processo de exclusão.

Seja $r : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

i) Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < r(X) < \varepsilon_0^{-1}$ para qualquer $X \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. (**Elipticidade**)

ii) Para qualquer $X, Y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, tal que $X(x) = Y(x)$ para $x \neq 0, 1$, então $r(X) = r(Y)$. (**Reversibilidade**)

iii) A função $r(\cdot)$ depende do vetor X apenas num número finito de coordenadas, ou seja, $r(\cdot)$ é uma função *local*.

A dinâmica descrita acima pode ser definida formalmente através de um generador, cujo cerne é o conjunto das funções locais e tem a expressão:

$$\mathcal{L}f(X) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} r(\tau_x X)(f(X^{x,x+1}) - f(X)),$$

onde: $X^{x,x+1}$ é o vetor obtido de X trocando o valor de $X(x)$ pelo valor de $X(x+1)$; τ_x representa a translação espacial por x, ou seja $y \in \mathbb{Z}$ $\tau_x X(y) := X(x+y)$ e $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ é uma função local.

As suas medidas invariantes denotam-se por $\{\nu_\rho : \rho \in [0,1]\}$, onde ν_ρ é a medida de Bernoulli produto com parâmetro $\rho \in [0,1]$ e definida em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Como consequência, sob estas medidas, as variáveis de ocupação $\{X(x) : x \in \mathbb{Z}\}$ são independentes e $\nu_\rho(X : X(x) = 1) = \rho$.

Um dos problemas centrais no estudo deste processo consiste em determinar a sua *equação hidrodinâmica*. A equação hidrodinâmica é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução espaço-temporal da densidade de partículas. Este problema é conhecido na literatura por *limite hidrodinâmico*. Outro problema central, consiste em determinar a equação diferencial parcial estocástica que rege as flutuações da densidade. Para enunciar este último resultado, define-se o campo de flutuações por $\mathcal{Y}_t^n(g) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x\in\mathbb{Z}} g\left(\frac{x}{n}\right)\left(X_{tn^2}(x) - \rho\right)$, onde $g \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ denota o espaço de Schwarz. O dual topológico de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ com respeito ao produto interno de $L^2(\mathbb{R})$ denota-se por $\mathbb{S}'(\mathbb{R})$.

Foi provado em [1], que $\{\mathcal{Y}_t^n : t \in [0,T]\}$ converge em distribuição, com respeito à topologia de Skorohod de $\mathbb{D}([0,T], \mathbb{S}'(\mathbb{R}))$ (o espaço de trajetórias contínuas à direita e com limite à esquerda que tomam valores em $\mathbb{S}'(\mathbb{R})$), quando $n \to +\infty$, para a solução estacionária da equação de *Ornstein-Uhlenbeck* dada por

$$d\mathcal{Y}_t = D(\rho)\partial_x^2 \mathcal{Y}_t dt + \sqrt{2D(\rho)\rho(1-\rho)}\partial_x d\mathcal{B}_t, \tag{1}$$

onde $\mathcal{B}_t$ é o movimento Browniano com valores em $\mathbb{S}'(\mathbb{R})$ e $D(\rho)$ é o chamado *coeficiente de difusão*. Em particular, as trajetórias de $\mathcal{Y}_t$ são contínuas e $\mathcal{Y}_0$ é um campo Gaussiano com variância $\rho(1-\rho)$.

O primeiro resultado que se segue está relacionado com a convergência do funcional aditivo de $\mathcal{Y}_t$. Fixe uma solução estacionária $\{\mathcal{Y}_t : t \in [0,T]\}$ de (1). Para $x \in \mathbb{R}$, seja $i_\varepsilon(x) : y \mapsto \varepsilon^{-1}1_{(0,1]}((y-x)\varepsilon^{-1})$. Para cada $\varepsilon \in (0,1)$, seja $\{\mathcal{Z}_t^\varepsilon : t \in [0,T]\}$ definido por

$$\mathcal{Z}_t^\varepsilon = \int_0^t \mathcal{Y}_s(i_\varepsilon)ds.$$

Então, $\{\mathcal{Z}_t^\varepsilon : t \in [0,T]\}$ converge em distribuição com respeito à topologia uniforme de $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R})$, quando $\varepsilon \to 0$, para o *movimento Browniano fracionário* $\{\mathcal{Z}_t : t \in [0,T]\}$ com expoente de Hurst $H = 3/4$. Note que $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R})$ denota o espaço de trajetórias contínuas que tomam valores em $\mathbb{R}$.

No segundo resultado que se segue, obtém-se o limite em escala de observáveis do processo de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$. Para $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ local, o processo $\{\Gamma_{tn^2}(f) : t \in [0,T]\}$ definido por

$$\Gamma_{tn^2}(f) = \frac{1}{n^{3/2}} \int_0^{tn^2} (f(X_s) - \varphi_f(\rho))ds$$

converge em distribuição com respeito à topologia uniforme de $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R})$, quando $n \to +\infty$, para o processo $\{\varphi'_f(\rho)\mathcal{Z}_t : t \in [0,T]\}$, onde $\{\mathcal{Z}_t : t \in [0,T]\}$ é o processo obtido no limite de $\{\mathcal{Z}_t^\varepsilon : t \in [0,T]\}$ quando $\varepsilon \to 0$. Aqui $\varphi_f(\rho) := E_{\nu_\rho}[f(\eta)]$.

Note-se que as funções locais definidas em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ podem ser classificadas pelo seu grau. Diz-se que uma função local tem grau n se $\varphi_f^j(\tilde\rho)\Big|_{\tilde\rho=\rho} = 0$, para $j = 0, \cdots, n-1$ e $\varphi_f^n(\tilde\rho)\Big|_{\tilde\rho=\rho} \neq 0$. Esta condição é equivalente a dizer que $f(\cdot)$ pode ser escrita como $f(X) = c\prod_{x\in A}(X(x)-\rho)$, onde c é uma constante e $A \subsetneqq \mathbb{Z}$ com $|A| = n$.

Sendo assim, o resultado previamente enunciado, refere que o funcional aditivo para funções de grau 1 converge e o seu limite é identificado. No entanto, para funções com grau $n \geq 2$, o resultado acima refere que o limite é zero. Considerando $f(X) = X(0)$, o funcional $\Gamma_t(f)$ corresponde ao *tempo de ocupação da origem* durante o intervalo de tempo $[0,t]$.

É oportuno referir que o primeiro resultado enunciado acima não se restringe a (1). De facto, considerando a equação de *Burgers estocástica* dada por:

$$d\mathcal{Y}_t = \frac{1}{2}\partial_x^2 \mathcal{Y}_t dt + \left(\partial_x \mathcal{Y}_t\right)^2 dt + \sqrt{\rho(1-\rho)}\partial_x d\mathcal{B}_t \tag{2}$$

pode-se provar o seguinte resultado. Seja $\{\mathcal{Y}_t : t \in [0,T]\}$ uma solução estacionária de (2). Para $\varepsilon > 0$, seja $\tilde{\mathcal{Z}}_t^\varepsilon = \int_0^t \mathcal{Y}_s(i_\varepsilon)ds$. Então, existe $\{\tilde{\mathcal{Z}}_t : t \in [0,T]\}$ tal que, $\{\tilde{\mathcal{Z}}_t^\varepsilon : t \in [0,T]\}$ converge em distribuição com respeito à topologia uniforme de $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{R})$, quando $\varepsilon \to 0$, para $\{\tilde{\mathcal{Z}}_t : t \in [0,T]\}$.

Em [4] apresenta-se a prova dos resultados mencionados acima e em [3] considera-se uma classe geral de modelos partindo da medida de Bernoulli produto, cujas flutuações são regidas por (2). A prova do resultado sobre os funcionais aditivos, assenta no chamado *Príncipio de Boltzmann-Gibbs*. Em [4] prova-se esse Princípio através de um argumento multi-escala introduzido em [2]. Em [5] estende-se esse resultado para dinâmicas e medidas iniciais muito mais gerais.

O argumento multi-escala assenta na seguinte ideia. Primeiro, substitui-se o funcional aditivo de $f(\cdot)$ pelo funcional aditivo da esperança condicional de $f(\cdot)$, com respeito à quantidade de partículas num intervalo com tamanho ℓ. De seguida, substitui-se esse funcional pelo funcional da esperança condicional num intervalo com tamanho 2ℓ e repete-se o argumento. Finalmente, ao fim de m passos, quando o intervalo tem tamanho $2^m\ell$, substitui-se esse funcional pelo funcional da densidade de partículas. Este Princípio é um dos grandes desafios no estudo do comportamento deste tipo de processos.

Referências

[1] C. Chang, "Equilibrium fluctuations of gradient reversible particle systems", Probab. Theory Relat. Fields, Vol. 100, No. 3 (1994), pp. 269-283.

[2] P. Gonçalves, "Central limit theorem for a tagged particle in asymmetric simple exclusion", Stoch. Proc. Appl., Vol. 118, (2008) , pp. 474-502.

[3] P. Gonçalves e M. Jara, "Universality of KPZ equation", disponível em arXiv:1003.4478.

[4] P. Gonçalves e M. Jara, "Scaling limits of additive functionals of interacting particle systems", accepted for publication in Comm. Pure Appl. Math.

[5] P. Gonçalves, M. Jara e S. Sethuraman, "A stochastic Burgers equation from a class of microscopic interactions", disponível em arXiv:1210.0017.