COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES CONDICIONADAS NO CONTEXTO DE EXTRAÇÃO DE BOLAS DE UM SACO

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

Neste texto apresentam-se alguns resultados de um estudo centrado nas ideias intuitivas de probabilidade condicionada e independência de alunos do 9º ano de escolaridade. Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada e independência, sendo aqui apenas explorada aquela que envolve a comparação de probabilidades na extração sucessiva, com e sem reposição, de duas bolas de dois sacos com quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas. Em termos de resultados, salienta-se que as resoluções dos alunos revelam que estes possuem ideias intuitivas sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência no contexto estudado.

Palavras-chave: probabilidade condicionada; independência; alunos do 9º ano.

Abstract

This paper aims at describing some results of a study about intuitive ideas of conditional probability and independence of pupils attending the 9th grade. In the study participated 310 pupils of the 9th grade, who answered a questionnaire with several tasks on conditional probability and independence. In this paper we explore just one task that involves probability comparisons at drawing two balls, one after other, with and without replacement, from two bags with proportional amounts of white and black balls. In general, the results show that students have intuitive ideas about the concepts of conditional probability and independence in the context studied.

Keywords: conditional probability, independence, 9th grade pupils.

Introdução

As Probabilidades, para além de instrumento para a compreensão e uso de dados, também constituem um tema importante por direito próprio. Borovcnik e Kapadia (2010) destacam a importância das probabilidades em situações variadas: na tomada de decisões das pessoas em situações importantes, como testes médicos, veredictos de júris, investimentos, etc.; na compreensão de qualquer procedimento inferencial de

Estatística; como ferramenta para modelar realidades, tal como acontece na Física; e porque é um assunto interessante por si mesmo e merecedor de estudo.

A aprendizagem de conceitos relacionados com a incerteza deve ser introduzida logo nos primeiros graus de ensino (Falk, Falk & Levin, 1980). Em Portugal, com a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), o seu estudo passou a iniciar-se nos dois últimos anos do 1º ciclo, com a exploração de situações aleatórias que envolvem o conceito de acaso e a utilização do vocabulário próprio para as descrever.

Já no que respeita ao ensino formal de probabilidade condicionada, o NCTM (2003) restringe-o a alunos dos anos 9-12 e os programas de matemática portugueses preveem o ensino dos tópicos de probabilidade condicionada e independência apenas no ensino secundário.

Contudo, são vários os estudos (e.g., Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1999; Tarr & Lannin, 2005; Tarr, 1997; Watson, 1995) que referem que os tópicos de probabilidade condicionada e independência são de facto apropriados para o currículo de matemática do 3º ciclo do ensino básico. Também no estudo desenvolvido por Correia, Fernandes e Contreras (2011), os alunos do 9º ano que participaram no estudo revelaram possuir ideias intuitivas corretas sobre o conceito de probabilidade condicionada, quando os dados são apresentados na forma de tabela.

No mesmo sentido, tendo por propósito avaliar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades no ensino básico, na presente investigação estudam-se as ideias intuitivas de alunos do 9º ano sobre probabilidade condicionada e independência no contexto de seleção ordenada com e sem reposição.

Investigação prévia

A conexão óbvia de probabilidades numéricas com frações e o raciocínio proporcional, leva os investigadores a imaginarem questões que comparem vários cenários, nos quais se altera tanto o número total de casos possíveis como a proporção de resultados favoráveis (Watson, 2005).

Segundo Spinillo (2002), o raciocínio proporcional envolve basicamente dois tipos de relações: relações de primeira ordem e relações de segunda ordem. Suponhamos que pedimos a uma criança que decida em qual de dois sacos A e B, ambos com fichas de duas cores (respetivamente, 3 azuis e 5 amarelas e 3 azuis e 3 amarelas), há maior proporção de fichas azuis. Nesta tarefa, as relações de primeira ordem (em cada saco) podiam ser estabelecidas de duas maneiras: (i) entre o número de fichas azuis e o número total de fichas (relação parte-todo); e (ii) entre o número de fichas azuis e o número de fichas amarelas (relação parte-parte). Estabelecidas as relações de primeira ordem, a criança precisa de as comparar para decidir em qual dos sacos há uma maior proporção de fichas azuis. Esta comparação entre as relações de primeira ordem constitui a relação de segunda ordem.

Green (1983) colocou a mesma questão a alunos do 7º ao 10º ano, mas agora alterando não só o número total de objetos mas também as proporções dos objetos de cada cor: um saco com 12 fichas pretas e 4 brancas e outro com 20 fichas pretas e 20 brancas. As estratégias utilizadas pelos estudantes para responderem (correta ou incorretamente) à questão "De que saco é mais provável extrair uma ficha preta?" foram: (i) escolha do recipiente com mais fichas; (ii) escolha do recipiente com maior número de fichas pretas; (iii) escolha do recipiente em que é maior a diferença entre o número de fichas pretas e o número de fichas brancas; (iv) escolha do recipiente com a maior razão entre o número de fichas pretas e o número de fichas brancas. No presente estudo, relativamente à estratégia (i), introduzimos a expressão "todo-todo" para designar as comparações estabelecidas entre o número total de elementos de dois conjuntos.

Num estudo com 26 alunos do 5º ano, Tarr (1997) observou que, na falta de uma forma standard para representar a probabilidade de um acontecimento, os estudantes são capazes de usar formas inventadas para representações probabilísticas em tarefas de probabilidade condicionada. Três dessas formas foram exibidas antes da instrução e uma durante a instrução, nomeadamente: (i) a descrição da probabilidade de um acontecimento usando o termo *chance* como a unidade de medida da probabilidade, centrando-se na comparação parte-parte, em particular no número de objetos do acontecimento e do seu complementar; (ii) a utilização de frequências relativas, razões ou alguma forma de *vantagens* para descrever a probabilidade de um acontecimento. Essencialmente, estes estudantes fazem comparações parte-parte para determinar se a probabilidade de um acontecimento foi ou não alterada; (iii) a comparação do número de ocorrências do acontecimento pretendido com o número total de resultados possíveis (mas não de uma forma convencional, referindo-se por exemplo a uma de dez hipóteses); e (iv) uma forma “híbrida” de probabilidade numérica, que combina percentagens e razões (observada na avaliação pós-instrução).

Quanto às dificuldades reveladas pelos alunos em situações de probabilidade condicionada destacam-se a predição do acontecimento mais frequentemente observado, sem atender à proporção da população (Shaughnessy, 1992) e o enviesamento de equiprobabilidade, mais especificamente, admitir que acontecimentos com caráter aleatório são por natureza equiprováveis (Lecoutre & Durand, 1988).

Método

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, avaliar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada e independência no contexto de extração de bolas de sacos.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas no meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 1º período do 9º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 2,8; e 78,7% dos alunos não tinham qualquer repetência.

Foi aplicado aos alunos um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía várias tarefas sobre probabilidades, das quais trataremos neste texto apenas aquela que envolve a comparação de probabilidades na extração sucessiva, com e sem reposição, de duas bolas de dois sacos com quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas.

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2º período escolar de 2011/2012. Entretanto, os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano no início do ano letivo (aspetos de linguagem e definições clássica e frequencista de probabilidade), que não faz referência à probabilidade condicionada e à independência.

Comparação de probabilidades condicionadas

Envolvendo a tarefa a comparação de probabilidades condicionadas, na análise das produções dos alunos considerámos os acontecimentos: A_1: "a primeira bola retirada do saco A é branca"; A_2: "a segunda bola retirada do saco A é branca"; B_1: "a primeira bola retirada do saco B é branca"; e B_2: "a segunda bola retirada do saco B é branca".

Tarefa. Considera dois sacos A e B com bolas brancas e bolas pretas.
O saco A tem 10 bolas brancas e 20 bolas pretas.
O saco B tem 100 bolas brancas e 200 bolas pretas.

1. Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica-se que são ambas brancas. Depois de se **colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.
Algum dos seguintes resultados é mais provável?
a) Obter uma bola branca do saco **A**.
b) Obter uma bola branca do saco **B**.
c) É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B.**
Justifica a tua resposta.

2. Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica--se que são ambas brancas. **Sem colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos.
Algum dos seguintes resultados é mais provável?
a) Obter uma bola branca do saco **A**.
b) Obter uma bola branca do saco **B**.
c) É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**.
Justifica a tua resposta.

Assim, na análise efetuada consideram-se as probabilidades condicionadas $P(A_2 \mid A_1)$ e $P(B_2 \mid B_1)$ como sendo as probabilidades dos acontecimentos A_2 e B_2 avaliadas num novo espaço amostral, que resulta do condicionamento da ocorrência dos acontecimentos A_1 e B_1 respetivamente (Hogg & Tanis, 1997).

Considera-se que dois acontecimentos são independentes se a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$ e $P(B_2 \mid B_1) = P(B_2)$. Nesta perspetiva, consideramos a independência como um caso especial de probabilidade condicionada.

Na questão 1, por se tratar de extrações sucessivas com reposição, os acontecimentos associados à primeira e segunda extrações são independentes e na segunda extração os sacos A e B continuam a ter quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas. Na questão 2, por se tratar de extrações sucessivas sem reposição, os acontecimentos associados à primeira e segunda extrações são dependentes e na segunda extração os sacos A e B deixam de ter quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas.

Da Tabela 1 destaca-se a razoável percentagem de alunos que responderam corretamente à questão 1, a diminuição acentuada da percentagem de respostas corretas à questão 2, essencialmente em detrimento da resposta c), e o ligeiro aumento na percentagem de não respostas da questão1 para a questão 2.

Tabela 1 – Distribuição dos alunos (em %) segundo as opções de resposta na tarefa ($n = 310$)

Respostas	Percentagem	
	Questão 1	Questão 2
a) Obter uma bola branca do saco A.	5,8	7,4
b) Obter uma bola branca do saco B.	26,4	48,1*
c) É igualmente provável obter uma bola branca do saco A e do saco B.	66,5*	40,0
Não responde	1,3	4,5
Total	100	100

* Percentagem de respostas corretas.

Da observação da Tabela 2 conclui-se que da questão 1 para a questão 2 há um aumento para mais do dobro no número de alunos (de 21 para 49) que não justificam a opção escolhida.

Tabela 2 – Justificações apresentadas pelos alunos na tarefa

Justificações	Questão 1		Questão 2	
	Frequência	Percentagem	Frequência	Percentagem
Resposta a) ($n_1 = 18$ e $n_2 = 23$)				
1. O saco A tem menos bolas do que o saco B	5	27,8	2	8,7
2. O saco A tem menos bolas pretas do que o saco B	3	16,7	1	4,3
3. A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas é menor no saco A	3	16,7	3	13,1
4. É mais provável tirar uma bola branca do saco A	2	11,1	—	—
5. Razões de probabilidade ou inverso de razões de probabilidade	—	—	9	39,1
6.Outra justificação	3	16,6	3	13,1
Não justifica	2	11,1	5	21,7

Resposta b) ($n_1 = 82$ e $n_2 = 149$)				
7. O saco B tem mais bolas brancas do que o saco A	61	74,4	68	45,6
8. O saco B tem mais bolas do que o saco A	9	11,0	14	9,4
9. Razões de probabilidade ou inverso de razões de probabilidade	3	3,6	36	24,2
10. É mais provável tirar uma bola branca do saco B	2	2,4	5	3,3
11. Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	—	—	7	4,7
12. Outra justificação	4	4,9	4	2,7
Não justifica	3	3,7	15	10,1
Resposta c) ($n_1 = 206$ e $n_2 = 124$)				
13. Os sacos têm quantidades proporcionais de bolas	14	6,8	37	29,8
14. Razões de probabilidade ou inverso de razões de probabilidade	64	31,1	15	12,1
15. Há bolas brancas no saco A e no saco B	29	14,1	17	13,7
16. A probabilidade é igual nos dois sacos A e B	24	11,6	12	9,7
17. Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	51	24,7	9	7,3
18. Outra justificação	8	3,9	5	4,0
Não justifica	16	7,8	29	23,4

Nota. n_1 = Número de alunos que selecionaram cada resposta da questão 1.
n_2 = Número de alunos que selecionaram cada resposta da questão 2.

Em 78% das 532 justificações apresentadas pelos alunos nas questões 1 e 2, são estabelecidas relações em termos de: (i) *todo-todo* (7,2%; justificações: 1 e 8), sendo efetuada uma comparação entre o número total de bolas existentes em cada um dos sacos; (ii) *parte-parte* (62,1%; justificações; 2, 3, 7, 11, 13 e 17), em que é efetuada uma comparação entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no respetivo saco (17,6%) ou compara-se o número de bolas da mesma cor existentes nos dois sacos (44,5%); e (iii) *parte-todo* (30,7%; justificações: 5, 9 e 14), em que a comparação ocorre entre o número de bolas de uma cor e o número total de bolas existentes no respetivo saco.

Para a análise das estratégias dos alunos, inseridas nas três grandes categorias anteriormente definidas, consideram-se os dois conjuntos S_1 e S_2, em que S_1 é a união de dois subconjuntos disjuntos P_1 e B_1 contendo respetivamente elementos do tipo p e elementos do tipo b e S_2 é a união de dois subconjuntos disjuntos P_2 e B_2 contendo respetivamente elementos do tipo p e elementos do tipo b.

Relativamente às relações *todo-todo*, estas ocorrem associadas essencialmente a duas estratégias:

1. *É mais provável extrair um elemento do tipo b do conjunto (S_1 ou S_2) com menor cardinal* (ver Figura 1). Esta estratégia foi utilizada para justificar a opção pela resposta a) e ocorreu na questão 1 (5 alunos) e na questão 2 (2 alunos).

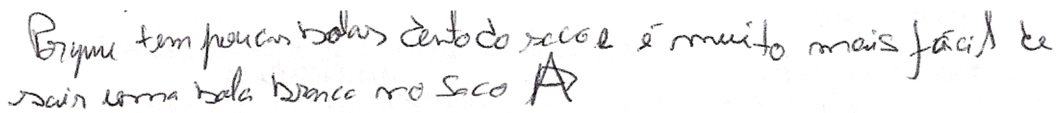
Porque tem poucas bolas dento do saco e é muito mais fácil de sair uma bola branca no Saco A

Figura 1. Justificação do aluno A_{75} na questão 1

2. *É mais provável extrair um elemento do tipo b do conjunto (S_1 ou S_2) com maior cardinal* (ver Figura 2). Esta estratégia foi utilizada para justificar a opção pela resposta b) e ocorreu na questão 1 (9 alunos) e na questão 2 (14 alunos).

Em ambas as estratégias os alunos referem-se exclusivamente ao número de casos possíveis associados a cada um dos conjuntos S_1 ou S_2.

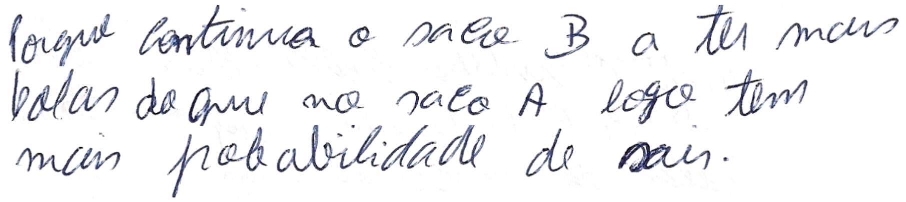
Porque continua o saco B a ter mais bolas do que no saco A logo tem mais pobabilidade de sair.

Figura 2. Justificação do aluno A_{298} na questão 2

Relativamente às relações *parte-parte* estabelecidas pelos alunos, elas ocorreram associadas essencialmente a três estratégias:

1. *É mais provável extrair um elemento do tipo b do conjunto (S_1 ou S_2) em que é menor a diferença $\#P_i - \#B_i$, com $1 \le i \le 2$* (ver Figura 3). Esta estratégia teve uma ocorrência residual (em 6 justificações na tarefa) e só foi utilizada para justificar a opção pela resposta a).

É mais provavel obter uma bola branca no saco A, pois no saco A a diferença entre o numero de bolas pretas e de brancas é de 10 (20 pretas - 10 brancas) e no saco B a diferença é de 100 (200 pretas - 100 brancas). A diferença de bolas pretas e brancas no saco A é menor do que no saco B, logo é mais provável tirar uma bola branca do saco A.

Figura 3. Justificação do aluno A_{84} na questão 1

2. *As justificações são construídas recorrendo a uma espécie de vantagens, isto é, os alunos procuram estabelecer uma comparação entre a vantagem das bolas brancas (casos favoráveis) em relação às bolas pretas (casos desfavoráveis) nos sacos A e B.*

Dependendo da alternativa escolhida, apresentam-se dois cenários distintos.

É mais provável extrair um elemento do tipo b *do conjunto (*S_1 *ou* S_2*) em que é maior a razão* $\#B_i/\#P_i$*, com* $1 \leq i \leq 2$. Esta estratégia foi utilizada por 7 alunos que optaram pela resposta b) na questão 2 (ver Figura 4).

Saco A = $\frac{9}{20}$ = 0,45 = $\boxed{45\%}$

Saco B = $\frac{99}{200}$ = 0,495 = $\boxed{49\%}$ → É mais provável sair uma bola branca no saco B.

Figura 4. Justificação do aluno A_{31} na questão 2

É igualmente provável extrair um elemento do tipo b *de ambos os conjuntos (*S_1 *ou* S_2 *) se* $\#B_1/\#P_1 = \#B_2/\#P_2$. Esta estratégia foi utilizada por 51 alunos que optaram pela resposta c) na questão 1 (ver Figura 5) e por 9 alunos na questão 2.

Saco A = $\frac{10}{20}$ = 0,5 = $\boxed{50\%}$

Saco B = $\frac{100}{200}$ = 0,5 = $\boxed{50\%}$ → mesmos resultados o que significa que a probabilidade é a mesma.

Figura 5. Justificação do aluno A_{31} na questão 1

3. *As justificações envolvem a comparação entre o número de elementos do mesmo tipo que compõem os conjuntos* S_1 *e* S_2. Assim, dependendo dos elementos comparados são desenhados três cenários diferentes.

É mais provável extrair um elemento do tipo b *do conjunto* S_1 *porque* $\#P_1 < \#P_2$. Esta estratégia foi utilizada por 3 alunos na questão 1 e por 1 aluno na questão 2, para justificarem a opção pela resposta a). Os alunos recorrem à comparação entre o número de casos desfavoráveis (número de bolas pretas) ao acontecimento desejado (sair bola branca) (ver Figura 6).

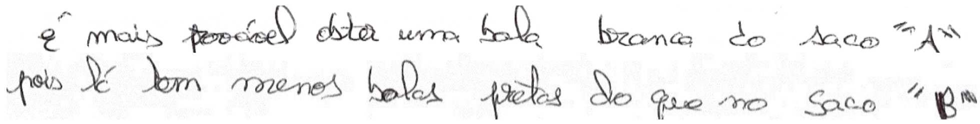
é mais provável obter uma bola branca do saco "A"
pois lá tem menos bolas pretas do que no saco "B"

Figura 6. Justificação do aluno A_{64} na questão 1

É mais provável extrair um elemento do tipo b *do conjunto* S_2 *porque* $\#B_2 > \#B_1$. Esta estratégia foi utilizada por 61 alunos na questão 1 e por 68 alunos na questão 2, para justificarem a opção pela resposta b).

Neste cenário, os alunos recorrem à comparação entre o número de casos favoráveis (número de bolas brancas) ao acontecimento desejado (sair bola branca) (ver Figura 7).

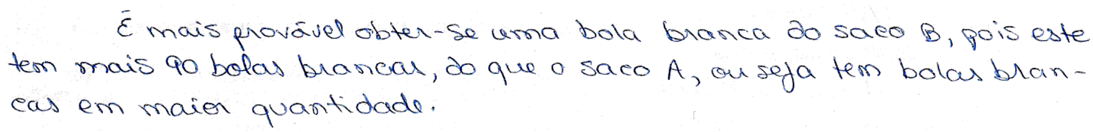
É mais provável obter-se uma bola branca do saco B, pois este
tem mais 90 bolas brancas, do que o saco A, ou seja tem bolas bran-
cas em maior quantidade.

Figura 7. Justificação do aluno A_{50} na questão 1

É igualmente provável extrair um elemento do tipo b *dos conjuntos* S_1 *e* S_2 *porque os dois conjuntos têm quantidades proporcionais de elementos do tipo* b *e do tipo* p (ver Figuras 8 e 9). Esta estratégia foi utilizada por 14 alunos na questão 1 e por 37 alunos na questão 2, para justificarem a opção pela resposta c).

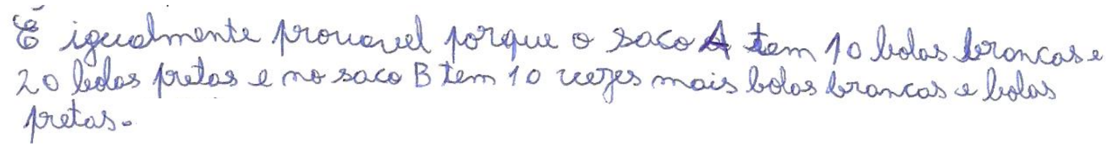
É igualmente provavel porque o saco A tem 10 bolas brancas e
20 bolas pretas e no saco B tem 10 vezes mais bolas brancas e bolas
pretas.

Figura 8. Justificação do aluno A_{245} na questão 1

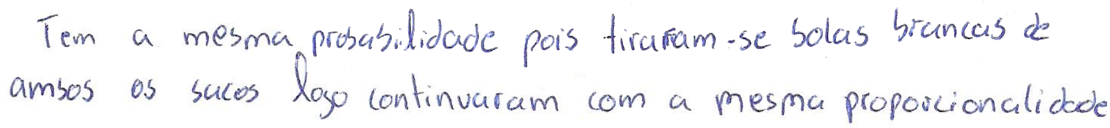
Tem a mesma probabilidade pois tiraram-se bolas brancas de
ambos os sacos logo continuaram com a mesma proporcionalidade

Figura 9. Justificação do aluno A_{167} na questão 2

Quanto às relações *parte-todo* estabelecidas pelos alunos, elas ocorreram associadas à determinação de razões de probabilidade, com recurso ao conceito clássico de probabilidade ou ao inverso de razões de probabilidade, e envolvem quatro cenários distintos: resposta correta e probabilidades corretas; resposta correta e probabilidades incorretas; resposta incorreta e probabilidades corretas; e resposta incorreta e probabilidades incorretas (incluindo o inverso de probabilidades).

Resposta correta e probabilidades corretas (ver Figura 10). Este cenário verificou-se em 73,2% dos casos, sendo que 64 casos ocorreram na questão 1 e 29 casos na questão 2. Os alunos justificam a sua opção com os valores corretos das probabilidades e concluem corretamente que $P(A_2 \mid A_1) = P(B_2 \mid B_1)$ na questão 1 e que $P(A_2 \mid A_1) < P(B_2 \mid B_1)$ na questão 2.

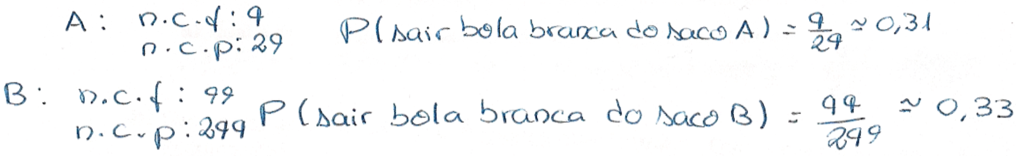

Figura 10. Justificação do aluno A_2 na questão 2

Resposta correta e probabilidades incorretas (ver Figura 11). Este cenário verificou-se em 5,5% dos casos e restringe-se à questão 2. Os alunos justificam a sua opção através de valores incorretos das probabilidades que permitem concluir que $P(A_2 \mid A_1) < P(B_2 \mid B_1)$.

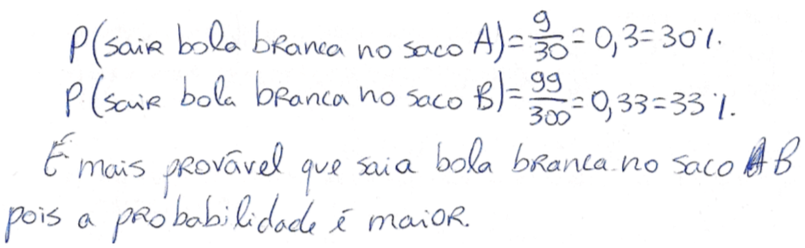

Figura 11. Justificação do aluno A_{96} na questão 2

Resposta incorreta e probabilidades corretas (ver Figura 12). Este cenário verificou-se em 8,7% dos casos, predominando na questão 2. Os alunos justificam as suas opções incorretas recorrendo a valores corretos das probabilidades $P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{3}$ e $P(B_2 \mid B_1) = \frac{1}{3}$ na questão 1 e $P(A_2 \mid A_1) = \frac{9}{29}$ e $P(B_2 \mid B_1) = \frac{99}{299}$ na questão 2. Na questão 1 um aluno assume que $\frac{100}{300} > \frac{10}{30}$ e na questão 2 a opção errada de 10 alunos resulta de considerarem valores arredondados às décimas para as probabilidades pedidas.

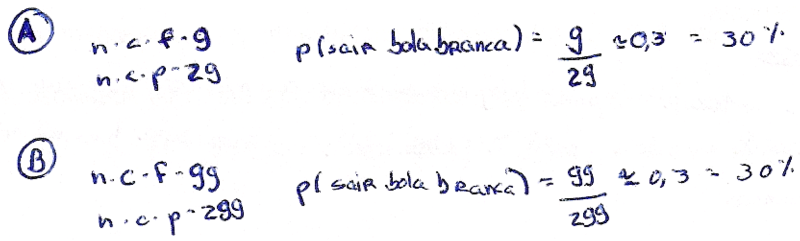

Figura 12. Justificação do aluno A_{17} na questão 2

Resposta incorreta e probabilidades incorretas (incluindo o inverso de probabilidades). Este cenário verificou-se em 12,6% dos casos e ocorreu essencialmente na questão 2. Neste cenário, os alunos optam por uma resposta errada e apresentam razões de probabilidade erradas (75% dos casos) ou o inverso de razões de probabilidade (25% dos casos, ver Figura 13). As probabilidades erradas ocorreram porque os alunos não consideraram a reposição das bolas nos sacos (2 alunos na questão 1), reduziram uma unidade apenas ao número de casos favoráveis mantendo o número de casos possíveis (6 alunos na questão 2), consideraram um número errado de casos favoráveis e de casos possíveis (4 alunos na questão 2) ou consideraram o inverso de uma razão de probabilidade (4 alunos na questão 2).

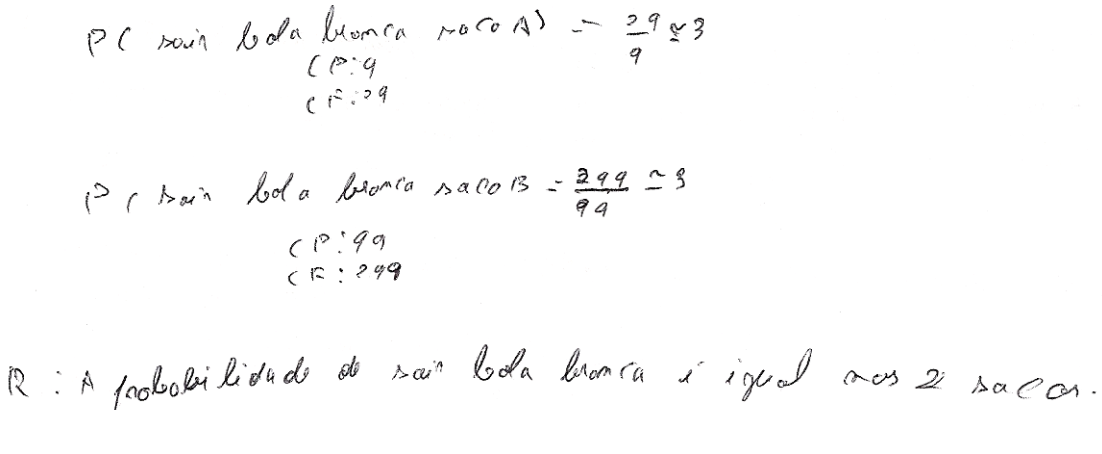

Figura 13. Justificação do aluno A_{111} na questão 2

As restantes 22% das 532 justificações apresentadas pelos alunos nas questões 1 e 2 distribuem-se da seguinte forma: 39,0% revertem para a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade — "se é possível, então é equiprovável" — para justificarem a opção pela resposta c) nas duas questões, com afirmações como as dos alunos A_{157}: "É igualmente provável devido a haver bolas brancas nos dois sacos", A_{170}: "É igual porque pode calhar qualquer coisa" e A_{294}: "Nós não vimos as bolas, tirámos à sorte"; 38,1% são de natureza tautológica; e 22,9% integram a categoria *Outras justificações* por serem desprovidas de sentido na situação apresentada.

Conclusão

De uma maneira geral, os alunos revelaram possuir ideias intuitivas corretas sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência, em contexto de extração de bolas com e sem reposição.

Embora estes alunos já tivessem aprendido a definição clássica de probabilidade, eles aderiram predominantemente a outras estratégias para comparar as duas probabilidades ao estabelecerem sobretudo relações em termos de *todo-todo* e *parte-parte*. Este aspeto enfatiza a persistência das suas ideias para além do ensino (Fernandes, 1990) e a necessidade de as explorar durante a instrução tendo em vista corrigi-las e aumentar a sua eficácia.

A redução acentuada da percentagem de respostas corretas da situação de independência para a situação de dependência deveu-se, essencialmente, a um reconhecimento de proporcionalidade quando tal não acontecia, à utilização de estratégias que não atendem à proporção da população e ao enviesamento de equiprobabilidade. Em situações de comparação de probabilidades em dois sacos com bolas, Fernandes (1999) verificou que o ensino regular não favoreceu a adesão dos alunos ao raciocínio proporcional, consolidando-se claramente o cálculo de probabilidades pela regra de Laplace.

Não obstante, em geral, os alunos controlaram a composição do espaço amostral associado às situações de extração com e sem reposição, o que constitui uma base sólida para a aprendizagem das probabilidades condicionadas (Tarr, 1997).

Globalmente, os resultados do estudo são encorajadores quanto à possibilidade de introduzir estes tópicos no 9.º ano, e em particular o conceito de independência através da definição de probabilidade condicionada. Por outro lado, o estudo das probabilidades na escola deve ser iniciado mais cedo (NCTM, 2003; Shaughnessy, 1992), pois dessa forma poder-se-á obstar à formação de muitas ideias intuitivas incorretas.

Referências bibliográficas

Borovcnik, M. G. & Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. In M. Joubert & P. Andrews (Eds.), Proceedings of the British Congress for Mathematics Education (pp. 41-48). On line: www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4

Correia, P. F., Fernandes, J. A. & Contreras (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Falk, R., Falk, R. & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 181-204.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Hogg, R. V. & Tanis, E. A. (1997). *Probability and statistical inference* (5th ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 487-519.

Lecoutre, M. & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modeles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3), 357-368.

Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica, 15*(3), 475-487.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

Tarr, J. E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International, 49,Z*5055.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

Watson, J. M. (1995). Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, 88, 12-17.