View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Universidade do Minho: RepositoriUM

# RACIOCÍNIOS DESENVOLVIDOS NA VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Paula Maria Barros
ESTiG – Instituto Politécnico de Bragança
pbarros@ipb.pt

José António Fernandes
CIEd – Universidade do Minho
jfernandes@ ie.uminho.pt

Cláudia Mendes Araújo
Centro de Matemática da Universidade do Minho
clmendes@math.uminho.pt

## Resumo

*Numa investigação sobre o ensino e aprendizagem de álgebra Linear, em que um dos objetivos era identificar os erros e dificuldades sentidos pelos estudantes, propuseram-se algumas questões sobre sistemas de equações lineares a estudantes de engenharia do ensino superior politécnico que frequentavam a unidade curricular álgebra linear e geometria analítica. Neste texto, faz-se uma breve exposição dos resultados obtidos numa das questões em que se pretendia a verificação da solução de um sistema de equações lineares. Concluiu-se que, embora o tema tenha sido estudado no ensino básico/secundário e superior, os estudantes demonstraram ainda dificuldades consideráveis na resolução da tarefa proposta, evidenciando-se, também, o facto de muitos dos que responderam corretamente terem necessidade de resolver o sistema para verificar a solução.*

*Palavras-chave: Sistemas de equações lineares, ensino superior, erros e dificuldades.*

## Introdução

Atualmente começa a surgir a preocupação por parte das instituições do ensino superior, e dos respetivos professores, em perceberem as razões do fracasso de muitos estudantes na área da matemática e em como melhorar o seu desempenho.

No que diz respeito à álgebra Linear, a importância de investigações sobre o seu ensino e aprendizagem centra-se no facto dela se encontrar subjacente a quase todos os domínios da matemática e até mesmo de outras áreas, como as ciências da computação, a engenharia e a física, entre outras. Consequentemente, torna-se imprescindível que aqueles que pretendam trabalhar com as ciências que utilizam a matemática, quer como objeto de estudo quer como instrumento, tenham o domínio dos seus principais conceitos (Coimbra, 2008; Machado, 2004).

Tendo como pano de fundo esta preocupação, partindo do pressuposto que conhecer os erros dos alunos pode ser um bom princípio para o professor conseguir programar um ensino mais eficaz e adequado às suas necessidades (Ferreira & Brumatti, 2009; Godino, Batanero & Font, 2003) e tendo em atenção que a reflexão e discussão sobre os erros pode ser um ponto de partida para os estudantes participarem ativamente na sua superação (Pochulu, 2004), realizou-se um estudo envolvendo estudantes do ensino superior politécnico, com o intuito de responder, entre outras, à seguinte questão: Quais os erros e dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?

Neste texto apresenta-se uma pequena parte dos resultados obtidos para o caso dos sistemas de equações lineares, que têm uma importância fundamental tanto dentro da própria disciplina de matemática como na aplicação a outras ciências, pois diversos problemas requerem a discussão e resolução de sistemas de equações lineares. Essa relevância é reafirmada pela sua presença nos programas oficiais de matemática a partir do terceiro ciclo do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) e pelo aprofundamento do tema em diversos cursos de licenciatura do ensino superior, como é o caso dos cursos de engenharia.

## Investigação sobre dificuldades na resolução de sistemas de equações lineares

Parece ser consensual que a álgebra linear é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000). Particularmente, a partir de diversos trabalhos de investigação, pode concluir-se que no caso dos sistemas de equações lineares existem várias dificuldades relacionadas com a sua aprendizagem nos diferentes níveis de ensino e que, inclusivamente, para muitos estudantes, a solução de um sistema de equações lineares não tem significado.

Pantoja (2008) refere a ausência de significado no estudo de sistemas de equações lineares através do processo de eliminação de Gauss, afirmando que os alunos não compreendem o significado das operações efetuadas com os coeficientes das linhas que compõem o sistema e acabam por operar com as mesmas de forma aleatória até conseguirem escalonar o sistema e encontrar a solução desejada.

Cury e Bisognin (2009) relatam num artigo parte de um teste aplicado a estudantes do 1.º ano que frequentavam disciplinas de matemática em oito instituições gaúchas de ensino superior. O projeto envolveu uma amostra intencional de 368 alunos de cursos de engenharia, arquitetura, ciência da computação, ciências contáveis e licenciatura em matemática. Apresenta-se, a seguir, uma questão do teste:

> O valor de dois carros, do mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é: a) 5.000; b) 13.000; c) 18.000; d) 23.000; e) 41.000. (p. 4)

Esta questão foi escolhida para aprofundar a análise das resoluções escritas dos estudantes de um sistema de equações lineares. Depois de classificar as produções dos estudantes, foram utilizadas ideias sobre o sentido do símbolo e sentido da estrutura para discutir as dificuldades apresentadas.

Em termos quantitativos, esta questão foi a que obteve o maior número de respostas corretas, 63% dos estudantes assinalaram a alternativa correta, 24% indicaram uma opção incorreta e 13% não responderam. Para a análise qualitativa as autoras só consideraram as resoluções que mostravam o desenvolvimento da questão pelo aluno (138 respostas), nas quais os estudantes procuraram representar matematicamente a situação descrita no enunciado e solucioná-la. As autoras apresentaram quatro categorias de classificação das respostas, em que o estudante: A − identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema e apresentou a resposta correta; B − identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema, mas errou alguns detalhes e não apresentou a resposta correta; C − identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, mas não soube resolver o sistema; D − não foi capaz de modelar o problema.

Utilizando estas categorias, as autoras observaram existir 94 resoluções da categoria A, 9 da B, 25 da C e 10 da D. Constataram também que dos 103 estudantes cujas resoluções foram classificadas como A ou B, 67% deles empregaram o método de adição e 33% o método de substituição. Os estudantes cujas resoluções se enquadraram na categoria C parecem ter uma das componentes do sentido do símbolo, reconhecendo a forma apropriada de representar o problema, mas não têm o sentido da estrutura, pois não parecem reconhecer o método adequado de resolução nem as manipulações algébricas possíveis ou utilizáveis. Finalmente, as autoras consideraram evidências claras de falta de sentido da estrutura aquelas resoluções da classe D em que os estudantes tiveram dificuldades em utilizar o princípio multiplicativo para determinar equações equivalentes que adicionadas permitem eliminar termos semelhantes e isolar uma das incógnitas.

Integrado num estudo que se desenrolou em várias fases, Andreoli (2005) analisou as respostas dadas por 15 professores do ensino básico da Argentina a um problema que envolvia o conceito de dependência linear e que se traduzia pelo sistema:

$$\begin{cases} b+c=60 \\ 2b+6c=250 \\ c=2b \end{cases}, \text{ com } b \text{ e } c \text{ números naturais.}$$

No problema solicitava-se a determinação dos valores de $b$ e $c$, e esperava-se que o professor, ao longo do processo de determinação, constatasse que o sistema não tem solução. Foi também solicitado aos professores que alterassem os valores do sistema de modo a torná-lo possível e determinado, e posteriormente pediram-se novas alterações de modo a torná-lo indeterminado.

O estudo mostrou que 7 professores não responderam à pergunta de tornar o sistema possível e indeterminado, possivelmente por não compreenderem a relação de dependência entre as equações e o número de soluções de um sistema linear. A autora concluiu, ainda, através de uma entrevista realizada aos professores, que apenas dois deles trabalhavam a situação de um sistema linear indeterminado com os seus alunos e apenas um as relações de dependência linear entre as equações na resolução de sistemas lineares.

Cutz (2005), num trabalho de investigação em que pretendia estudar a representação geométrica da solução ou soluções de um sistema de equações lineares com duas e três variáveis, assim como a conversão entre a representação geométrica e analítica dos sistemas de equações lineares, delineou uma série de tarefas que foram aplicadas através de uma entrevista a cinco estudantes que recentemente tinham frequentado uma disciplina de álgebra linear.

Na análise das entrevistas, a autora observou a associação de soluções de um sistema de três equações lineares com duas variáveis com o ponto de intersecção de pelo menos duas das retas que representam o sistema, de modo que um sistema de equações que é representado por três retas que se intersectam duas a duas terá três soluções. Os estudantes também consideraram um ponto representado a três dimensões como uma reta, pelo facto de estarem a ter em conta três dimensões; e que quando três planos se intersectam numa linha reta se tem uma solução para o sistema, pois tomam a reta como um objeto e não como um conjunto de pontos, o que indica uma interferência entre os modos de pensamento geométrico e analítico.

Por outro lado, a autora também constatou que existe uma tendência para considerar o conjunto de elementos (retas ou planos) sobrepostos como representando um sistema sem solução, já que os estudantes consideram a solução como o ponto (reta) de interseção dos elementos retas (planos), isto é, esperam ver o ponto (reta) de interseção para determinar o número de soluções do sistema.

Ainda de acordo com a opinião desta autora, fundamentada em trabalhos de investigação sobre sistemas de equações lineares, no ensino tradicional favorecem-se os métodos de resolução na sua forma puramente algorítmica, quer dizer, estes temas são tratados na escola (e nos livros de texto) por meio de regras ou métodos que permitem ao estudante encontrar a solução do sistema deixando de lado o seu significado. Mais ainda, favorece-se o ensino dos sistemas de equações que apresentam solução única em detrimento dos sistemas com infinitas soluções ou que não têm solução, que se abordam de forma superficial ou não se abordam mesmo.

## Metodologia

O estudo dos raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares realizou-se a partir das respostas dadas pelos estudantes a um questionário escrito, assumindo-se como um estudo de natureza fundamentalmente quantitativa e descritiva.

A investigação realizou-se no ano letivo de 2011/2012 e envolveu 239 alunos do ensino superior politécnico inscritos em várias licenciaturas de engenharia e que se encontravam a frequentar a unidade curricular álgebra linear e geometria analítica. A unidade curricular foi lecionada por 3 professoras, uma das quais coautora deste estudo e responsável pela docência em alguns dos cursos, e a sua preparação foi efetuada em equipa, tendo assim todos os alunos tido acesso ao mesmo material de apoio às aulas (apontamentos teóricos e fichas de trabalho).

Nos cursos em causa, a unidade curricular integra o 1.º ano do plano de estudos e inclui o tema sistemas de equações lineares. Neste tema são desenvolvidos os tópicos: discussão e classificação de sistemas de equações lineares; e métodos de resolução de sistemas (método da matriz inversa, método de eliminação de Gauss, método de eliminação de Gauss-Jordan e regra de Cramer).

Em termos da avaliação das aprendizagens, por acordo entre os alunos e as docentes, foi decidido que ao longo do semestre se fariam pequenos trabalhos durante as aulas, consistindo na resolução de algumas questões sobre cada um dos temas lecionados, sendo os sistemas de equações lineares um dos temas em que isso aconteceu. Os alunos foram previamente avisados da realização do trabalho e, aquando da sua resolução, já tinham sido lecionados os conteúdos relativos ao tema.

As questões sobre os sistemas eram 3 e foram dados cerca de 30 minutos aos alunos para a sua resolução durante uma das aulas teóricas. Foram utilizadas quatro versões diferentes pelo facto dos alunos em algumas turmas serem em número considerável e ser importante garantir que a resolução fosse realizada individualmente, tendo cada aluno respondido apenas a uma versão. Neste texto tratam-se apenas as quatro versões de uma das questões do tipo verdadeiro-falso, com justificação da opção escolhida.

Em termos de tratamento e análise de dados, começou-se por classificar as respostas dos alunos com base no recurso a raciocínios válidos e não válidos e, de seguida, definiram-se categorias, estabelecidas *a posteriori*, em cada um desses tipos de raciocínios (Gall, Gall & Borg, 2003). Essas categorias são apresentadas na secção seguinte, aquando da apresentação dos resultados.

## Análise das respostas e raciocínios dos alunos

As quatro versões, da questão, propostas aos alunos e analisadas neste texto, que incidem sobre a verificação das soluções de sistemas homogéneos de equações lineares, são apresentadas na Fig. 1.

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

Versão A (VA). Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

a) $(2,2,-2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Versão B (VB). Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) $(1,-3,4,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Versão C (VC). Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) As soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$ são os vetores da forma $(0,-x_1,x_1)$.

Versão D (VD). Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

a) $(-2,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Fig. 1. As quatro versões da questão propostas aos alunos

Por motivos de simplificação na apresentação dos dados considerar-se-ão as formas abreviadas VA, VB, VC e VD para fazer referência às diferentes versões da tarefa proposta.

Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição dos alunos (em frequência absoluta) segundo a classificação dos raciocínios subjacentes às respostas.

Tabela1. Raciocínios dos alunos nas questões correspondentes às quatro versões da tarefa

| | Versão | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Raciocínios | VA | VB | VC | VD | Total |
| Válidos (respostas corretas) | 18 | 16 | 5 | 27 | 66 |
| Não válidos | 28 | 28 | 43 | 28 | 127 |
| Sem justificação ou não responde | 13 | 14 | 11 | 8 | 46 |
| Total | 59 | 58 | 59 | 63 | 239 |

As respostas corretas baseadas em raciocínios válidos resultaram de três tipos de raciocínios: 1) Substituição das incógnitas pela solução proposta e verificação da obtenção ou não de proposições verdadeiras (35 alunos); 2) Resolução do sistema pelo método da substituição (17 alunos); 3) Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (14 alunos). Nestas respostas incluíram-se também os casos em que foram cometidos erros de cálculo pontuais (erros de adição, troca de sinais,...) que não afetaram a qualidade do raciocínio apresentado.

De notar que a substituição das incógnitas pela solução proposta não foi efetuada de forma correta por qualquer aluno que tenha respondido à VC e mesmo os alunos que responderam corretamente não indicaram o conjunto solução do sistema, limitando-se a resolvê-lo e a indicar que afirmação era falsa. Depreende-se, assim, que na VC as maiores dificuldades dos alunos foram influenciadas pelo facto de as possíveis soluções estarem descritas por uma expressão algébrica envolvendo variáveis.

É de realçar também o número significativo de alunos (31) que resolveu o sistema em vez de substituir diretamente a possível solução, o que denota uma compreensão pouco abrangente do conceito de solução.

Na categoria *sem justificação ou não responde* integraram-se os alunos que responderam apenas verdadeiro/falso sem indicar qualquer justificação ou apresentaram a matriz ampliada do sistema sem qualquer outra resolução ou conclusão.

Analisadas as 127 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, sendo apresentadas na Tabela 2 as mais frequentes, com o propósito de caraterizar os principais erros cometidos.

Tabela 2. Categorização dos raciocínios não válidos

| Raciocínios não válidos | VA | VB | VC | VD | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Incompreensão do significado de sistema homogéneo | 4 | 10 | 6 | 11 | 31 |
| Interpretação incorreta da resolução efetuada | 4 | 1 | 11 | 2 | 18 |
| Comparação do número de incógnitas com o número de equações | – | 7 | 1 | 5 | 13 |
| Solução dada como vetor dos termos independentes | 9 | – | 4 | – | 13 |
| Conceções que envolvem o conceito de determinante | 2 | 2 | 5 | 2 | 11 |
| Incorreções na resolução pelo método de eliminação de Gauss | 4 | – | 3 | – | 7 |
| Enunciado de conceitos ou procedimentos sem os aplicar à situação | – | – | 4 | 2 | 6 |

No raciocínio *incompreensão do significado de sistema homogéneo*, alguns alunos substituíram as soluções no sistema $Ax = b$ (Fig. 2) ou resolveram este sistema em vez do sistema homogéneo $Ax = 0$. Nos casos em que não é concretizado no enunciado o vetor dos termos independentes, inventam um.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (-3) + 0 + 2 = 2 \\ 2(1) + 0 - 2(4) + 2(2) = 0 \\ 3(1) + (-3) - 2(4) + 3(2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Substituindo $(1,-3,4,2)$

$$\begin{cases} 0 = 2 \\ 2 - 8 + 4 = 0 \\ 3 - 3 - 8 + 6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 \\ -2 = 0 \\ -2 = 2 \end{cases}$$

podemos concluir que não é solução do sistema.

Fig. 2. Substituição em $Ax = b$ (VB)

Ainda neste raciocínio, para outros alunos, está implícita ou explícita a ideia de que o sistema só pode ter a solução nula ou alguma incompreensão do que significa solução nula. Obtiveram-se, por exemplo, respostas como: "Falso, um sistema do tipo $Ax = 0$ é um sistema homogéneo. Concluímos, assim, que a solução deste sistema vai dar soluções nulas se o resolvermos" (VA); "Falsa, pois sendo um sistema homogéneo tem pelo menos uma solução nula e $(1,-3,4,2)$ não tem nenhum elemento nulo" (VB); e

falso

a) $Ax = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ix = A^{-1}0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$

Fig. 3. Multiplicação pela matriz inversa (VC)

Nos primeiros exemplos é visível uma tendência para considerar cada coordenada como uma solução e no último caso (Fig. 3) generaliza-se uma resolução que apenas é válida se a matriz dos coeficientes for invertível.

No raciocínio *interpretação incorreta da resolução efetuada* incluíram-se os alunos que resolveram (na totalidade ou quase) de forma mais ou menos adequada o sistema pelo método de eliminação de Gauss (12 alunos, ver Fig. 4), pelo método da substituição (5 alunos, ver Fig. 5 e Fig. 6) ou substituíram as incógnitas pela solução proposta (1 aluno, ver Fig. 7), mas não interpretaram corretamente o resultado obtido ou não mencionaram qualquer resposta referente à veracidade da afirmação feita.

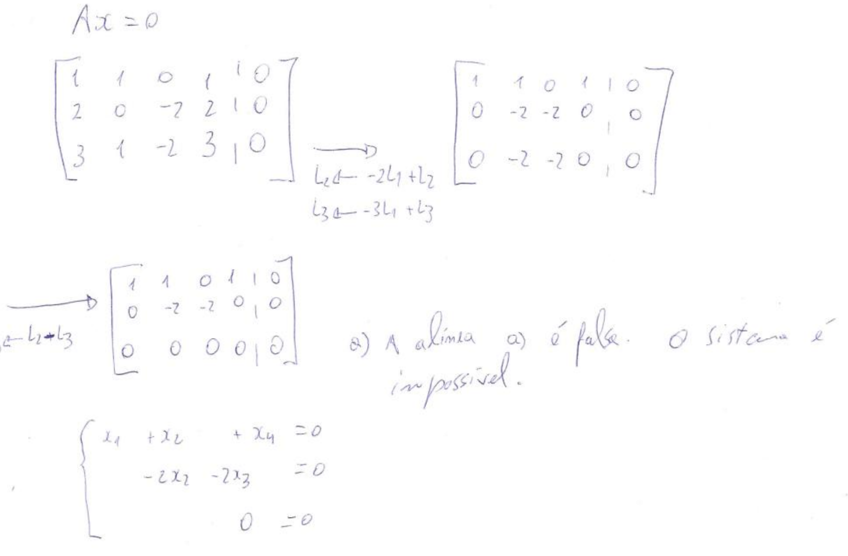


Fig. 4. Método de eliminação de Gauss (VB)

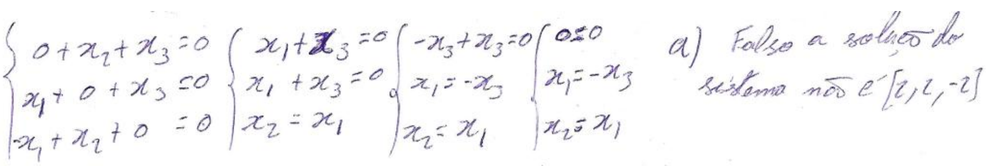


Fig. 5. Método da substituição (VA)

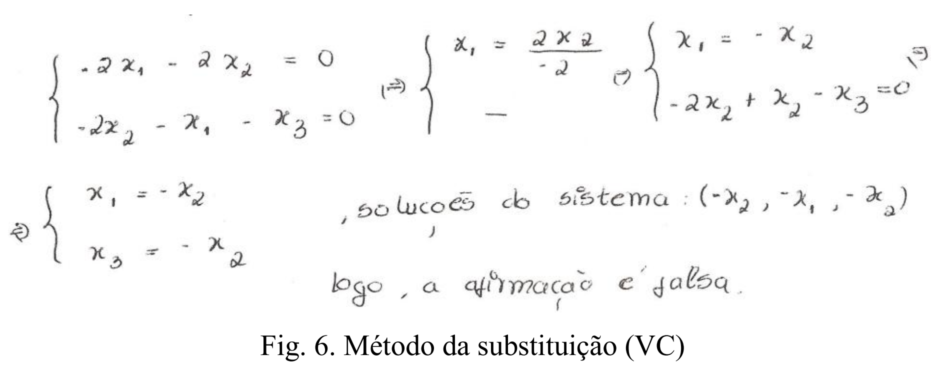


Fig. 6. Método da substituição (VC)

No caso da VA (Fig. 5), o aluno considera que $(2,2,-2)$ não é solução por não ser esse o resultado final que obtém diretamente; no caso da VC (Fig. 6), o aluno, para indicar a segunda coordenada, exprime $x_2$ em função de $x_1$.

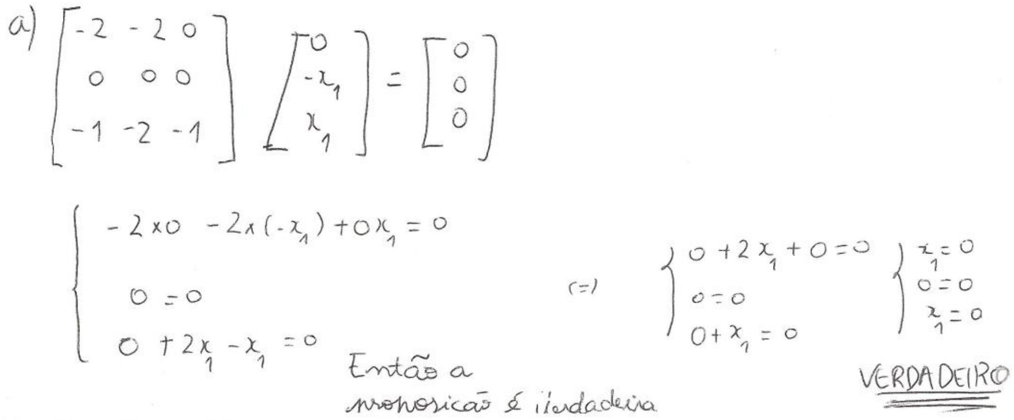


Fig. 7. Substituição das incógnitas pela solução (VC)

Neste raciocínio evidenciou-se existirem dificuldades na interpretação dos valores obtidos e não tanto nos procedimentos de cálculo.

No raciocínio *comparação do número de incógnitas com o número de equações*, os alunos consideram que para ser solução ou para poder resolver o sistema, o número de variáveis tem de ser igual ao número de equações. Assim, perante um sistema com três equações lineares, mencionaram que a solução do sistema tem de pertencer a $P^3$: "Como o sistema é composto por 3 equações só pode ter soluções do tipo $(x, y, z)$, ou seja, com uma solução para cada equação. Como $(1,-3,4,2)$ é do tipo $(x, y, z, w)$, tem quatro soluções, para 3 equações logo é falso" (VB); ou traduzem esse facto ao representar o vetor das incógnitas com dimensão $3\times 1$, quando escrevem o sistema na forma matricial (ver Fig. 8).

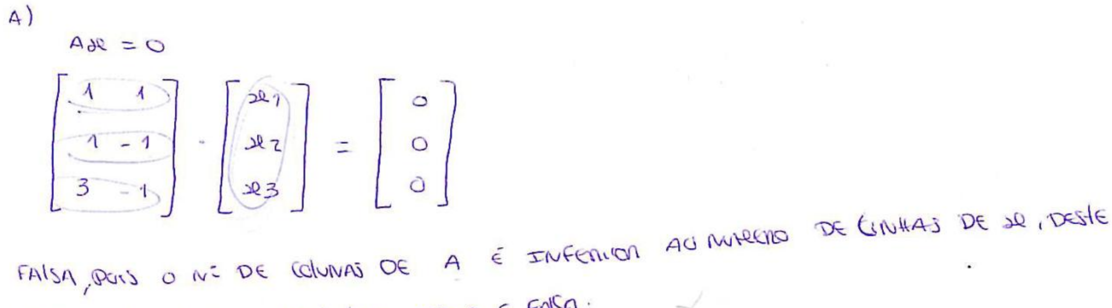


Fig. 8. Escrita do sistema na forma matricial (VD)

De notar que, no exemplo da VB, se evidencia novamente a conceção de que o valor de cada variável corresponde a uma solução do sistema.

No raciocínio *solução dada como vetor dos termos independentes,* os alunos resolvem o sistema $Ax = vetor\ solução$, demonstrando assim uma incompreensão do significado de solução (ver Fig. 9).

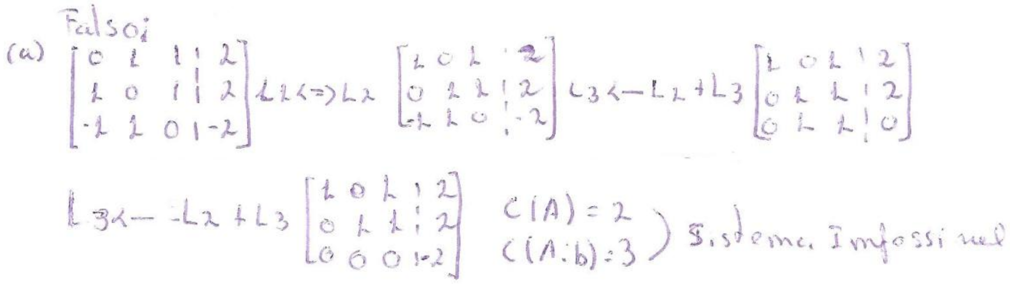


Fig. 9. Solução na coluna dos termos independentes (VA)

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de determinante*, os alunos interpretaram de forma incorreta o resultado do determinante que obtêm, nos casos em que é possível calculá-lo, considerando que o sistema é impossível nos casos em que o determinante é zero: “O determinante é zero, logo o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. Logo é falso” (VA); “$\det(A) = 0$ [com base na existência de uma linha nula]. Logo não tem $A^{-1}$, logo é singular. Logo, o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. A afirmação é falsa” (VC). Noutros casos inventam falsas fórmulas para calcular o determinante da matriz dos coeficientes quando esta não é uma matriz quadrada (ver Fig. 10).

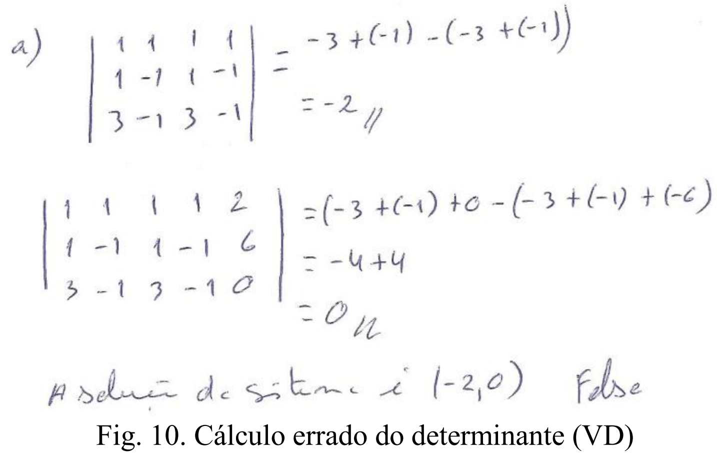


Fig. 10. Cálculo errado do determinante (VD)

Outros ainda fazem alguma referência à dependência das linhas da matriz ampliada do sistema, concluindo por esse facto que o sistema é impossível (ver Fig.11).

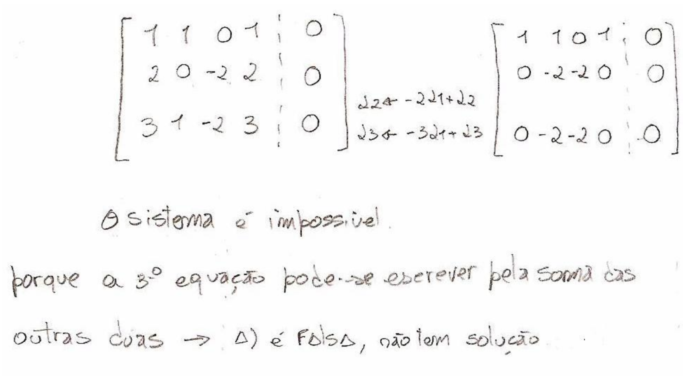

Fig. 11. Análise da dependência das linhas (VB)

No raciocínio *incorreções na resolução pelo método de eliminação de Gauss*, os alunos, ao resolver o sistema, consideram a matriz dos coeficientes em vez da matriz ampliada, não chegando a qualquer conclusão válida, ou aplicam as operações elementares sem critério ou de forma indevida (ver Fig. 12).

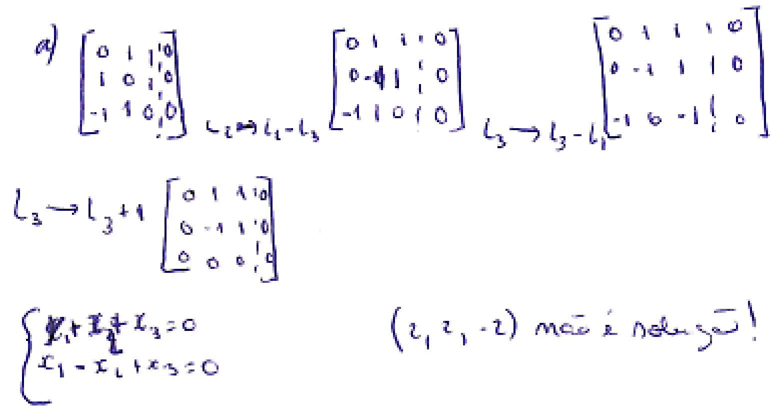

Fig.12. Operações elementares incorretas (VA)

No raciocínio *enunciado de conceitos/procedimentos sem os aplicar à situação*, os alunos recorrem a justificações mencionando eventuais resoluções ou conceitos teóricos sem no entanto apresentar qualquer resolução neles baseada. Por exemplo, “Utilizando o método de Gauss-Jordan e metendo as matrizes em escada é impossível ser $(-2,2)$ a solução” (VB) e “Um sistema homogéneo é sempre possível, logo pode ter duas classificações, sendo essas possível e determinado (uma única solução) e possível indeterminado (infinitas soluções), assim a afirmação é verdadeira” (VC).

Nos outros raciocínios, que não são discriminados neste texto, para além das justificações sem sentido aparente, incorreções de cálculo ou cálculos sem significado ou não concluídos, evidenciam-se ainda conceções erradas diversificadas, como por exemplo: considerar a caraterística de uma matriz como o número de linhas da matriz sem esta estar em escada por linhas; verificar a solução do sistema apenas com base numa das equações e efetuar o produto de matrizes de forma incorreta.

## Conclusões

Perante a análise apresentada verifica-se que, mesmo tendo o tema já sido objeto de estudo no ensino superior, os alunos continuam a manifestar dificuldades consideráveis na verificação das soluções de sistemas de equações lineares.

As dificuldades evidenciadas pelos alunos centram-se mais nos aspetos ligados à interpretação do que na resolução do próprio sistema (Andreoli, 2005; Pantoja, 2008), salientando-se: (1) a necessidade de resolver o sistema para verificar se uma dada sequência é ou não uma sua solução; (2) a não compreensão do significado de solução, considerando, por exemplo, o valor de uma das incógnitas como solução do sistema; (3) o uso de conhecimentos teóricos gerais como justificação, sem os aplicar à situação em estudo; e (4) a invenção de falsas regras para poder determinar certos valores, como aconteceu no caso da determinação de determinantes de matrizes não quadradas.

Muitos estudantes parecem mecanizar os processos de resolução sem compreenderem o significado desses processos, o que pode dever-se a uma abordagem algorítmica sem contemplar a dimensão dos significados, como defende Cutz (2005).

## Referências bibliográficas


Andreoli, D. I. (2005). *Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad* (Tercera fase). Comunicações Científicas y Tecnológicas. Universidade Nacional del Nordeste.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90.* Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Cutz, B. M. (2005) *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*. Dissertação de Mestrado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cury, H. N., & Bisognin, E. (2009). Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. *Bolema*, 33, 1-22.

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Ferreira, D. H., & Brumatti, R. N. (2009). Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. *Horizontes*, 27(1), 51-60.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational Research: An introduction*. Boston: Allyn and Bacon.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Matemáticas y su Didáctica para Maestros — Manual para el Estudiante. Acedido em 29 de julho, 2011, em http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Machado, S. D. (2004). Educação matemática no ensino superior. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 34-46.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Pantoja, L. F. (2008). *A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matematica en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(4).