Sílvia Maria Petiz de Sousa **Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: uma experiência com uma turma de 9ºano.**

UMinho|2011

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Cláudia Maria Azevedo Domingues

Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: uma experiência com uma turma de 9ºano.

Outubro de 2011

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Cláudia Maria Azevedo Domingues

Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: uma experiência com uma turma de 9ºano.

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências da Educação
Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Doutora Maria Helena Martinho

Outubro de 2011

Agradecimentos

Aos meus pais pelo exemplo de honestidade intelectual, curiosidade pelo saber e por todo o apoio que sempre me dão.

Ao Pedro pela paciência e apoio em todos os momentos.

Ao Manuel e ao Filipe por terem suportado nestes últimos três anos uma mãe muito ocupada.

À Doutora Helena Martinho pela abertura de espirito revelada ao acolher os caminhos de construção da orientanda.

À direção da escola por todo o apoio prestado ao longo da realização deste estudo.

Aos alunos pela confiança depositada e pelo interesse em aprender.

Resumo

O objetivo deste estudo é o de saber como raciocinaram os alunos de uma turma de 9.º ano em três tarefas de tipo investigativo na disciplina de Matemática, numa experiência que pretendeu criar condições para que desenvolvessem o raciocínio.

Com base numa fundamentação teórica sobre o raciocínio matemático, conduziu-se esta investigação de modo a orientar e apoiar os alunos desde a formulação da conjetura até à prova. No âmbito da prova, surgiram duas questões de investigação: "de que modo o proporcionar aos alunos a descoberta da matemática pode promover o desenvolvimento da noção de prova matemática?", "de que modo a natureza do raciocínio usado na descoberta interfere na produção da prova?".

A metodologia adotada seguiu o modelo de investigação interpretativo de abordagem de interacionismo simbólico de estudo de caso. O caso é a turma constituída por 19 alunos, 15 raparigas e 4 rapazes. Para aprofundar a compreensão do caso, agregaram-se 4 alunos como subcasos. Os instrumentos de recolha de dados foram vários: a observação, os registos escritos em forma de notas da professora, os registos escritos dos alunos, o questionário, as entrevista semiestruturadas, as gravações áudio e vídeo das aulas em que os alunos fizeram investigações matemáticas.

Com este estudo foi possível concluir que os alunos raciocinaram seguindo os padrões de raciocínio identificados na educação matemática e compreender que a aplicação da metodologia de investigação na aula de matemática promoveu a necessidade de provar. Pelo facto de se ter em linha de conta a natureza dos raciocínios realizados, emergiu uma relação entre a natureza do raciocínio usado na descoberta e a forma de produzir a prova.

Palavras-chave:

Raciocínio matemático; Prova; Padrões de raciocínio; Tarefas de investigação.

Abstract

This study's objective is discovering how ninth grade students reasoned during three mathematical open tasks destined to promote reasoning comprehension and development.

Based on mathematical reasoning theoretical principals, this study was conducted in order to guide and support students from conjecturing to proof. While studying proof two other research questions arose: "In what ways promoting mathematical discovery can enhance the development of mathematical proof notion?", "In what ways can the nature of the reasoning used in discovery interfere on proof production?".

Adopted methodology followed the interpretative investigation model approach on study case symbolic interactionism. Study case object is a 19 students class with 15 girls and 4 boys. In order to best understand the case 4 students were chosen as sub-case. Data collection instruments comprised observation, teacher written logs, students written logs, questionnaires, semi structured interviews and audio and video recordings of the classes were mathematical open tasks occurred.

This study allowed finding that students reasoned according to patterns identified by mathematical education research, and understanding that proofing necessity is promoted by mathematical open tasks class methodology. By considering performed reasoning's nature a relation emerged between reasoning nature and prof production.

Keywords:

Mathematical reasoning; Proof; Reasoning patterns; Open tasks.

Índice

Índice de figuras:

Índice de tabelas:

1. Introdução

O presente estudo assenta em dois pressupostos quanto ao ensino e à aprendizagem da matemática. Um desses pressupostos, relativo à aprendizagem, é a importância dada à compreensão da matemática, em detrimento da mecanização de procedimentos. O aluno, no desempenho da função de descobrir a estrutura matemática das situações que investiga, tem oportunidade de aprender movido pela curiosidade. O outro pressuposto diz respeito à metodologia da descoberta ou de investigação, como é usual designar em Portugal, por ser a mais adequada para proporcionar uma atividade emancipadora através de propostas de tarefas com carater aberto e com nível de desafio cognitivo elevado.

A perspetiva acima explanada teve na devida conta a literatura de autores portugueses relacionada com investigações matemáticas (e.g. Brocardo, 2001; Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003, Ponte & Matos, 1998, Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998), que, por ter sido absorvida antes do presente estudo, foi pouco citada. Todavia, foi nessa literatura que a professora encontrou grande apoio desde o ano 2000, através da Associação de Professores de Matemática, para compreender quais os desafios que se colocam quer ao professor quer ao aluno, na implementação dessa metodologia na aula de matemática.

Questões de investigação e categorias de análise

O objetivo do estudo é o de saber como raciocinam os alunos de uma turma de 9.º ano em três tarefas de tipo investigativo na disciplina de Matemática numa experiência que pretendeu criar condições para que desenvolvessem o raciocínio. A principal questão de investigação é "Como raciocinam os alunos quando descobrem matemática?".

No sentido de cumprir esse objetivo, a análise da atividade dos alunos foi realizada tendo em conta os aspetos psicológicos de raciocínio, assim como os aspetos sociais de acordo com o interacionismo simbólico: o aluno desenvolve o seu sentido pessoal à medida que participa na negociação das normas sociais na sala de aula (Yackel & Cobb, 1998).

O raciocínio dos alunos foi analisado em duas etapas desde a formulação da conjetura até à generalização; e desde a justificação até à prova. A separação do raciocínio em duas etapas justifica-se pelo facto de os alunos darem por concluída a descoberta quando acreditam na sua conjetura. Para chegar à prova é necessário que o aluno seja incentivado a justificar as suas conjeturas e também a prová-las com métodos válidos.

O raciocínio matemático é classificado pela sua natureza ou pelos processos de raciocínio. Os processos de raciocínio, de quem faz matemática, englobam formular conjeturas, testá-las, reformular as conjeturas, generalizar e provar.

Neste estudo, conjetura e generalização foram distinguidas da seguinte forma: conjetura é uma afirmação em que o aluno acredita, mas sobre a qual ainda mantém alguma dúvida; generalização é a afirmação que o aluno testou e da qual está razoavelmente convencido. A prova formal é neste estudo designada por demonstração. Por prova entende-se, neste estudo, de acordo com Stylianides e Stylianides (2008), um argumento matemático que usa afirmações verdadeiras e válidas sem mais justificações e aceites pela comunidade turma, aplica formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e conhecidas (dentro do alcance conceptual) da comunidade turma, e comunica através de formas de expressão (modos de representação de argumentos) adequadas e conhecidas (dentro do alcance conceptual) da comunidade turma.

Ao centrar a aula de matemática no desenvolvimento de processos de raciocínio, o ensino da prova emergiu, o que, segundo Hanna (1996), é natural acontecer num ambiente de aprendizagem de uma matemática com significado, em que os alunos são solicitados a explicar e a justificar as suas afirmações.

Assim, durante o estudo emergiram outras duas questões incluídas na questão principal:

- De que modo o proporcionar aos alunos a descoberta da matemática pode promover o desenvolvimento da noção de prova matemática?
- De que modo a natureza do raciocínio usado na descoberta interfere na produção da prova?

Metodologia

A metodologia do estudo seguiu o modelo de investigação interpretativo de abordagem de interacionismo simbólico com uma estratégia de investigação de estudo de caso. O caso é a turma, constituída por 15 alunas e 4 alunos, com quatro subcasos. O estudo teve a duração de dois anos: em que no ano letivo 2009/10, a investigadora e simultaneamente professora recolheu os dados, trabalhou-os à luz da literatura citada e explicita-os na presente dissertação. Os instrumentos de recolha de dados foram vários:

a observação, os registos escritos em forma de notas da professora, os registos escritos dos alunos, o questionário, as entrevistas semiestruturadas; as gravações áudio e vídeo das aulas em que os alunos fizeram investigações matemáticas. As investigações matemáticas foram aplicadas entre o mês de janeiro e o mês de maio. As tarefas inserem-se em temas matemáticos diferentes, pelo que não é possível acompanhar, ao longo do estudo, os progressos realizados ao nível da aprendizagem dos conhecimentos matemáticos. A opção de realizar investigações matemáticas em diferentes temas deve-se às circunstâncias do contexto educativo em que o estudo foi realizado: uma escola básica e secundária, que não estava abrangida pelo programa atual, e uma turma a terminar o terceiro ciclo num ensino centrado nos conteúdos.

Durante o primeiro período, as normas sociomatemáticas foram definidas relativamente aos métodos de trabalho na sala de aula e à necessidade de justificar todas as afirmações realizadas. A partir do segundo período, aplicaram-se três atividades de investigação no intuito de captar o raciocínio dos alunos quando investigaram em pequeno grupo e na discussão com todo o grupo.

Pertinência do estudo

A temática do raciocínio é fundamental para que os alunos compreendam a matemática e desenvolvam autonomia na resolução de situações problemáticas. Contribuiu também para esta escolha o facto de o programa atual do ensino básico enfatizar a transversalidade da capacidade do raciocínio matemático na aula de matemática a par das capacidades de comunicação e de resolução de problemas.

Serve o presente estudo para relatar uma experiência sobre os processos de raciocínio dos alunos, sem perder de vista a natureza dos raciocínios envolvidos, desde a formulação da conjetura até à prova.

Estrutura do estudo

Este estudo é apresentado em três partes: a fundamentação teórica, a parte empírica e as conclusões do estudo.

A fundamentação teórica constitui a primeira parte e está organizada em dois capítulos: capítulo 2 – Perspetivas do raciocínio na educação matemática; capítulo 3 – O raciocínio matemático. O capítulo dois corresponde à fundamentação que permite compreender as questões relacionadas com o raciocínio na educação matemática assim como as suas controvérsias. O capítulo 3 centra-se na descrição dos processos de raciocínio desde a formulação da conjetura à prova.

A parte empírica constitui a segunda parte do estudo e compreende o capítulo 4 – Metodologia e o capítulo 5 – Apresentação e discussão dos resultados do caso turma. No capítulo da Metodologia descrevem-se, ao longo das várias subsecções as Opções Metodológicas, a Recolha de dados, a Análise de dados e o Percurso do estudo. O capítulo da apresentação e discussão de dados é composto pelas seguintes subsecções: caraterização do caso turma, o raciocínio matemático na realização das três tarefas propostas, síntese global e subcasos.

Na terceira parte do estudo, capítulo 6 das conclusões, são respondidas as questões de investigação em paralelo com a fundamentação teórica apresentada.

I – Fundamentação Teórica

Por influência das ideias de Polya e de Lakatos, foi possível, na Educação Matemática, transpor para a sala de aula a atividade de descobrir a matemática. Nesta metodologia o aluno foi colocado no papel de matemático e o professor no papel de orientador da atividade. Neste estudo tentou pôr-se em prática a metodologia referida, para que o aluno compreenda a estrutura da matemática.

A educação matemática tem vindo a refletir sobre a melhor forma de desenvolver o raciocínio dos alunos contextualizando esse desenvolvimento na evolução histórica da própria matemática. Para que se compreendam as atuais perspetivas da educação matemática, é apresentada no capítulo 2 um enquadramento teórico sobre o assunto. O capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica do raciocínio matemático nas seguintes subsecções: a classificação do raciocínio matemático pela sua natureza e a descrição dos processos de raciocínio.

2. Perspetivas do raciocínio na educação matemática

A prova organizada como um sistema axiomático e dedutivo remonta aos antigos gregos, os quais transformaram a matemática empírica dos babilónios e egípcios numa ciência demonstrativa (Harel & Sowder, 2007; Stylianou, Blanton, & Knuth, 2009).

O legado deixado por Euclides (360 a.C. — 295 a.C.), no que diz respeito à geometria euclidiana apresentada na sua obra *Os elementos*, influenciou a forma de ensinar a prova matemática, essencialmente na área da geometria. Só no século XIX se associou a prova a outras áreas, tais como a aritmética e a álgebra. A prova está, por isso, historicamente associada ao raciocínio dedutivo, característico da matemática formal (Stylianou, Blanton, & Knuth, 2009).

Polya (1968) salienta o contraste entre a prova apresentada no seu produto final como puramente demonstrativa e o processo de chegar à prova, que ele compara a qualquer outro processo de produzir conhecimento.

Imre Lakatos (1922-1974), na sua obra *Proofs and Refutations*, escrita nos anos 60 e publicada em 1976, contesta a atitude formalista vigente que vê a Matemática como um mero sistema formal, considerando que essa visão não permite o desenvolvimento da própria Matemática (Davis & Hersh, 1981; Hersh, 1999). Nessa obra, Lakatos expõe uma visão da Matemática que se desenvolve através de um processo crítico e de um apuramento contínuo em que tanto os enunciados como as provas estão sujeitos a um processo de revisão (Davis & Hersh, 1981; Molina, 2001). Lakatos assume, assim, que a matemática encarada como um processo de crescimento e de descoberta é falível, é questionável e admite o erro (Davis & Hersh, 1981).

De acordo com Lerman (1998), a visão formalista que vê a matemática como a ciência da certeza apresenta o conhecimento matemático como uma construção dedutiva e acumulativa. Esta visão pode implicar uma forma de ensinar behaviorista e, consequentemente, uma aprendizagem baseada na aquisição de algoritmos pré-concebidos que são aprendidos ouvindo, memorizando e praticando. Se assim for os alunos ficarão com uma visão muito limitada e imperfeita da natureza da Matemática (Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado 1998; Schoenfeld, 1992; Borasi & Siegel, 1996). Contudo, se a matemática for vista como questionável, a construção do conhecimento matemático gera conhecimento continuo que permitirá aos alunos fazer, compreender e usar o conhecimento matemático de forma flexível (Schoenfeld, 1992). As exigências respeitantes à sociedade atual são um argumento forte para defender essa forma de trabalho indispensável à flexibilidade do conhecimento e ao desenvolvimento de capacidades matemáticas que permitam ao indivíduo uma ação resolutiva sobre os seus próprios problemas (Lerman, 1998; Love, 1998).

Tradicionalmente é consensual para matemáticos, filósofos e educadores matemáticos que a principal função de provar é a de permitir estabelecer a verdade de uma afirmação matemática (Hanna & Barbeau, 2010). Tendo em conta a grande dificuldade dos alunos (e.g., Balacheff, 1987, 1988, 2010; De Villiers, 1999; Hanna & Jahnke, 1996; Harel & Sowder, 2007) em fazer a referida prova e em compreender a sua importância por não lhe atribuírem utilidade, De Villiers (1999) procurou outras funções da prova matemática, para além da função tradicionalmente aceite, que pudessem ser utilizadas na aula tornando a prova uma atividade mais significativa. Propõe, então, fruto da sua investigação outras funções para a prova: explicação – proporcionando interiorização da razão pela qual é verdade; sistematização – organização dos resultados num sistema dedutivo de axiomas, principais conceitos e teoremas; descoberta – descoberta ou invenção de novos resultados; comunicação – transmissão de conhecimento matemático; desafio Intelectual – a autorrealização proveniente da construção de uma prova.

Assim, a educação matemática tem vindo a distinguir a prova como produto do processo criativo matemático (a demonstração) da prova como processo. Enquanto a

---

primeira serve sobretudo o propósito de estabelecer a verdade de uma afirmação matemática, a segunda tem a função de fazer sentido e a função de desenvolver a compreensão matemática (Schoenfeld, 2009; Hanna & Barbeau, 2010). Nesta perspetiva de prova como processo, Hanna e Jahnke (1996) salientam a importância dos professores se concentrarem na comunicação do significado da prova, em detrimento da derivação formal da mesma. Para isso, os professores necessitam de selecionar provas e formas de provar adequadas ao desenvolvimento da compreensão.

Tall (1999) chamou a atenção para a importância de tomar em consideração o desenvolvimento cognitivo dos alunos no que diz respeito à forma de apresentação da prova. Sugere que os educadores matemáticos usem diferentes tipos de provas de acordo com o respetivo desenvolvimento dos alunos e refere a importância de que a forma de apresentação da prova tenha significado para eles.

Segundo Douek e Scali (2000) e de acordo com a sua definição de argumentação como a conexão lógica de um ou mais argumentos (linguísticos, numéricos ou pictóricos), a argumentação tem um papel crucial na atividade matemática, pois intervém no processo de conjetura e prova como um componente substancial nesse processo.

As diferentes investigações sobre a atividade de provar na sala de aula podem ser distinguidas, segundo Reid e Knipping (2010), de acordo com o tipo de processo ser um processo psicológico de raciocínio ou ser um processo social (tipo de discurso). No caso da prova formal (demonstração), o tipo de raciocínio só pode ser dedutivo e, apesar dos processos psicológicos não serem diretamente observáveis, sabe-se que ela pode ser descrita como tendo uma estrutura rigorosa de um cálculo cuja organização consiste num encadeamento de uma série de passos dedutivos ou de inferências (Reid & Knipping, 2010; Tanguay, 2006). Provar, como referem Reid e Knipping (2010), pode referir-se a um processo de raciocínio de outra natureza que não dedutiva, cujo interesse não reside na natureza dos raciocínios, mas antes na sua função de compreensão e de verificação da verdade de uma afirmação.

Provar tornou-se um processo social na sala de aula, segundo Duval (1999), quando foram tomadas em linha de conta as interações entre os alunos, introduzidas pelas dinâmicas do trabalho de grupo por Balacheff. As formas de discurso coletivas com determinadas caraterísticas são designadas por argumentação. Segundo Krummheuer (1995), a argumentação consiste num fenómeno social que ocorre quando os indivíduos cooperam e tentam ajustar as suas intenções e interpretações apresentando verbalmente a lógica das suas ações. Assim, a argumentação, segundo este autor, diz respeito às interações na sala de aula com a intenção de explicar o raciocínio, distinguindo-se da argumentação aristotélica cujo objetivo é convencer uma audiência. Outro aspeto muito importante, referido pelo mesmo autor, consiste no facto de numa argumentação os argumentos não serem analíticos como numa demonstração. Toulmin (2008) classifica estes argumentos de substanciais em vez de lógicos.

A temática da argumentação é recente, pois, como refere Duval (1999), até à década de setenta, no século XX, dava -se muita importância à lógica matemática, sobretudo à implicação, e era relativizado o papel da linguagem no desenvolvimento do raciocínio "proposicional" (operações formais). As investigações realizadas mostraram que o ensino da lógica nem promoveu nos alunos a capacidade de demonstrar nem desenvolveu o gosto pela demonstração (De Villiers, 1999).

É de salientar o facto de a argumentação, por ser um fenómeno social, estar dependente da comunidade em que ocorre, implicando que a aceitação do que se entende por argumentos válidos seja definida pela respetiva comunidade (Reid & Knipping, 2010).

Há, contudo, uma preocupação, por parte de alguns investigadores, com o facto de a argumentação poder constituir um obstáculo à aprendizagem da demonstração. De acordo com Stylianou, Blanton e Knuth (2009), a prova ao longo da escolaridade tem por objetivo incentivar o uso de argumentos lógicos ao serem usadas as ferramentas matemáticas ao alcance do aluno. Porém, Stylianides e Stylianides (2009) afirmam haver ainda pouca investigação sobre como os professores podem ajudar os alunos a desenvolver a compreensão da prova matemática ao longo da escolaridade de forma coerente.

A preocupação de Duval (1999) reside nas formas de raciocínio que escapam aos contornos lógicos e normativos e que surgem espontaneamente logo que exista oportunidade para argumentar com alguém. Acrescenta o referido autor que argumento é algo que se apresenta ou se usa para justificar ou refutar uma proposição e que toma o valor de uma justificação quando alguém pergunta porque é que aceita ou rejeita essa proposição. Na comparação do processo do raciocínio argumentativo com o raciocínio dedutivo, Duval (1990) salienta que o raciocínio dedutivo, quando comparado com outra forma de discurso, toma em linha de conta o valor epistémico das proposições, enquanto a argumentação privilegia os passos de raciocínio sem referência a regras e toma em consideração o conteúdo das proposições.

As etapas necessárias para provar formalmente (demonstrar) são, segundo Healy e Hoyles (1998) as seguintes: selecionar informação (os dados), selecionar quais são as propriedades matemáticas conhecidas ou que podem ser assumidas e quais são as que têm de ser deduzidas e, finalmente, organizar as transformações necessárias para inferir um segundo conjunto de propriedades a partir do primeiro numa sequência completa e coerente.

Mariotti (2006) analisa a posição de Duval e afirma que nela existe uma rutura entre argumentação e demonstração, pela diferença existente entre o nível semântico e teórico da afirmação, baseando-se no facto de ao nível teórico não haver dependência do valor epistémico mas apenas dependência da validade. Na mesma linha de pensamento de Duval, o investigador Balacheff (1999, 2010) também considera a argumentação como um obstáculo à aprendizagem da demonstração, afirmando que o aluno que mostrou eficiência na sua competência argumentativa oferece resistência à aprendizagem da demonstração quando se depara com o problema de em matemática não se argumentar, mas sim se demonstrar. Balacheff (2010) afirma que o aluno para aprender a demonstrar tem de ultrapassar este obstáculo necessitando de passar de uma posição prática para uma posição teórica. Segundo Balacheff (1987) na prova formal a linguagem é uma ferramenta para realizar deduções lógicas e não um meio de comunicação. Acrescenta ainda que essa linguagem funcional exige: uma descontextualização do objeto em causa para uma classe de objetos; uma despersonalização desconectando a ação de quem a fez e também de quem tem de ser independente; e uma rutura das ações no tempo para passar para as relações e operações.

Pedemonte (2001) investigou sobre o tipo de argumentação que permite a construção lógica de uma cadeia dedutiva, concluindo que numa argumentação abdutiva é necessário reverter a sua estrutura e no caso da argumentação indutiva isso só é possível se a argumentação for baseada no exemplo genérico.

Simultaneamente outros investigadores em educação matemática procuram a melhor forma de desenvolver nos alunos a capacidade de apresentar uma prova formal, como, por exemplo, a investigação de Tanguay (2006) centrada no desenvolvimento de estratégias de organização e encadeamento dos raciocínios.

No entanto, sabe-se que as dificuldades em demonstrar estão também associadas à falta de desenvolvimento do raciocínio dedutivo, como mostra um estudo, realizado em Inglaterra, sobre as concepções que os alunos têm da prova. Verificou-se, então, que os alunos, mesmo após seis anos a seguir um currículo com abordagem à prova, foram incapazes de usar raciocínio dedutivo nos seus argumentos e que a maioria confiava em argumentos empíricos (Healy & Hoyles, 1998).

O processo de prova com enfoque na função de explicar porque é que uma afirmação é verdadeira ou falsa promove a compreensão e a função de justificar promove a convicção. Estas duas funções da prova envolvem os alunos numa atividade matemática que faz sentido (Stylianides & Stylianides, 2009).

Stylianides e Stylianides (2008) consideram que um argumento válido para ser qualificado de prova usa raciocínio dedutivo, esclarecem que esse uso não está relacionado com o ser formal ou informal e exemplificam com três diferentes formas válidas de apresentar uma prova: linguagem pictórica, linguagem verbal e linguagem algébrica. Os autores consideram o raciocínio dedutivo associado às necessárias inferências lógicas com base num determinado conjunto de premissas, tais como as regras de inferência lógicas, designadas por Modus Ponens - fundação da prova directa - e Modus Tollens - fundação da prova indireta. Definem, assim, prova matemática como um argumento matemático que usa afirmações verdadeiras e válidas sem mais justificações e aceites pela comunidade turma, que aplica formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e conhecidas (dentro do alcance conceptual) da comunidade turma e que comunica através de formas de expressão (modos de representação de argumentos) adequadas e conhecidas (dentro do alcance conceptual) da comunidade turma.

De acordo com esta definição de prova, argumentos empíricos não podem contar como prova por serem modos inválidos de argumentação, enquanto argumentos dedutivos são formas válidas de argumentação.

3. O raciocínio matemático

O raciocínio matemático pode ser distinguido pela sua natureza ou pela descrição de um processo. Quanto à natureza o raciocínio é aqui classificado de forma clássica como: indutivo, dedutivo, abdutivo e por analogia. Relativamente aos processos de raciocínio a descrição é aqui realizada do ponto de vista da atividade do matemático quando descobre matemática investigando-a. A finalidade do matemático é a de descobrir e provar as suas descobertas.

3.1 Os processos de raciocínio

Como refere Dreyfus (1991), o processo de aprendizagem pela descoberta é uma forma eficiente de aprender matemática devido aos aspetos psicológicos individuais envolvidos no processo de descoberta, com destaque para a intensidade da atenção e o sentimento de realização e de sucesso. O autor apresenta como mais valia inerente ao processo de descoberta o desenvolvimento dos processos de raciocínio. O recurso a processos matemáticos complexos permite ao aluno uma maior aproximação à verdadeira prática do matemático desenvolvendo a sua experiência e a sua autonomia e consolidando conceitos específicos e ideias matemáticas (Ponte & Matos, 1998; Ponte, 2005).

Várias descrições do processo de descoberta têm sido feitas por diferentes autores, tais como o *processo* indutivo por Polya (1968), as *Provas e refutações* por Lakatos (1999),o *pensar matematicamente* por Mason, Burton, e Stacey (1985), o *processo de experimentação* por De Villiers (2003) e o *processo de investigação* por Ponte, Brocardo, e Oliveira (2003). Todas estas descrições têm em comum o facto de descreverem um processo que permite uma envolvência activa promovendo a descoberta aliada a uma compreensão da Matemática (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003; Mason et al., 1985; Polya, 1968).

O processo de descoberta consiste na formulação de conjeturas e na tentativa de validação das conjeturas formuladas, processo este que segue, geralmente, um caminho em “zig-zag” entre tentativas de provar a veracidade das afirmações e a descoberta de contraexemplos que refutam essas mesmas afirmações passando por um processo de refinamento antes de voltarem a ser sujeitas a novas tentativas de prova (Lakatos, 1999; Stylianides & Al-Murani, 2010). Nesta perspetiva de descoberta, os alunos geram, na comunidade turma, novo conhecimento ao articular todos os tipos de raciocínio, contribuindo assim para o desenvolvimento de competências demonstrativas (Oliveira, 2002).

Na tentativa de descrever o processo de descoberta, encontram-se as contribuições pormenorizadas de Lakatos (1999) apresentado em *Proofs e Refutations*, de Polya (1968) na obra *Mathematics and Plausible Reasoning* e de Mason et al. (1985) no livro *Thinking Mathematically*.

Polya (1968), na sua obra *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*, propõe ao leitor a aprendizagem do raciocínio plausível através dos exemplos que apresenta e analisa. Desta forma o processo de fazer Matemática é comparado com todos os outros processos de produzir conhecimento e Polya (1968) reclama um lugar para a invenção matemática na aprendizagem através da possibilidade de fazer inferências plausíveis. Essas inferências designadas por conjeturas são proferidas como afirmações gerais que o sujeito pensa ser verdade.

Mason et al. (1985), na obra *Thinking Mathematically*, propõem aos leitores aprenderem pela experiência de fazer Matemática desde a formulação da conjetura à sua generalização e respetiva justificação. Esta obra aborda o processo de desenvolvimento do pensamento matemático, influenciada pelas ideias de George Polya, mas incorpora a novidade de apoiar o leitor na progressão do desenvolvimento do seu pensamento pela tomada de consciência desse processo promovendo a reflexão. Afirmam, ainda, que a eficiência do pensamento matemático de cada um depende de três fatores: a competência no uso do processo de investigação matemática; a capacidade de lidar com os estados emocionais e psicológicos e de saber aproveitá-los de forma vantajosa; a compreensão do conteúdo matemático e da área a que está a ser aplicado. Em suma, três tipos de envolvimento são necessários: físico, emocional e intelectual. Consideram os mesmos autores que a resolução das questões/situações apresentadas ocorre ao longo de três fases diferentes: entrada, ataque e revisão. Por *entrada* entende-se a fase inicial que ocorre quando o indivíduo é colocado perante uma questão matemática. A *entrada* consiste na apropriação de uma questão matemática, a partir do momento em que se é confrontado com essa questão, seguindo-se uma formulação mais precisa para decidir o que se quer fazer e como se vai começar a registar. A *entrada* é uma preparação para a fase seguinte: o *ataque*. Esta fase é, geralmente, a mais demorada e termina quando a questão está solucionada, o que depende dos processos de conjeturar e justificar. Durante o *ataque* diferentes planos podem ser experimentados o que muitas vezes vem acompanhado de impasses e descobertas. Depois do *ataque* não se deve esquecer a fase de *revisão*, pois ela permite melhorar e expandir as capacidades de pensamento alargando o âmbito da solução a um contexto mais amplo. Esta fase de *revisão* consiste em rever os cálculos, os argumentos, as consequências das conjeturas estabelecidas e a questão proposta; em refletir sobre as ideias chave e o raciocínio seguido melhorando a experiência matemática; e em expandir o pensamento através da profunda compreensão proporcionada pela reflexão e pelo questionamento num âmbito mais alargado.

A atividade de provar através da metodologia da descoberta será descrita pelos processos de raciocínio que ocorrem em duas fases distintas: o ciclo desde a formulação de conjeturas até à produção de generalizações que podem não estar matematicamente provadas; e a justificação das generalizações produzidas até à prova em que será descrito o percurso necessário para orientar o aluno a construir um argumento geral, adequado à comunidade turma, que valide, convença e explique a conjetura formulada sujeitando-a a um sucessivo questionamento e processo de revisão.

Da formulação da conjetura à generalização

O diagrama cíclico de Mason et al. (1985), na figura 1, é representativo do processo de conjeturar, a saber: formular conjeturas, testá-las com diferentes exemplos, tentar refutá-las com casos especiais (contraexemplos) e usá-las para fazer previsões. Ao verificar se a conjetura serve para mais casos, ela começa a ganhar um sentido do porque é que está certa ou de que modo se deve modificar, neste caso segue-se a (re)formulação de uma nova conjetura.

Este processo de descoberta exige que certas capacidades sejam desenvolvidas. De facto, perante uma investigação, é preciso que se aprenda a observar o que é fixo, que se varie uma condição de cada vez e que se atente ao efeito da mudança até o compreender. Qualquer que seja o nível, aprender a ser um bom investigador implica aprender a ver para além das aparências à procura de conexões lógicas (Goldenberg, 1999).

A generalização é o processo matemático fundamental na formulação de conjeturas sendo necessário reconhecer um padrão ou fazer uma analogia, como afirmam Mason et al. (1985). Estes autores salientam que a matemática é rica em padrões e que em contacto com a investigação matemática essa expectativa de encontrar padrões aumenta.

Generalizar é definido por Polya (1968) como o ato de passar da consideração de um dado conjunto de objetos para um conjunto maior que contém os primeiros. Esse ato envolve a perceção de aspetos comuns (regularidades) a muitos exemplos, ao mesmo tempo que é capaz de ignorar outros aspetos (Mason et al., 1985; Polya, 1968). Para Dreyfus (1991), generalizar é derivar ou induzir do particular, para identificar semelhanças e para expandir domínios de validade.

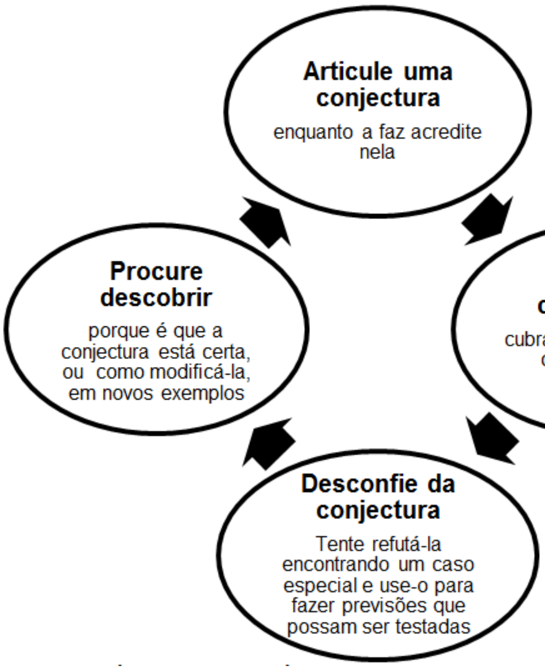


Figura 1 – Processo de conjeturar de Mason, Burton, e Stacey (1985, p.64)

Na tentativa de reconhecer o padrão inerente aos dados de um problema/situação particularizar permite interpretar a questão através de exemplos concretos ao mesmo tempo que as evidências para a generalização são reunidas (Mason et al., 1985; Polya, 1968). Este processo é indutivo, pois parte do particular para o geral.

Particularizar serve o duplo objetivo de perceber com o que se está a lidar, tornando a questão significativa para si próprio e de, simultaneamente fazer emergir o padrão subjacente dos dados (Mason et al., 1985). Na tentativa de articular o padrão emergente produz-se uma conjetura, conjetura essa que será suportada ou refutada através de mais particularização, isto é, testando novos casos particulares.

Mason et al. (1985) referem as diferentes formas de particularização ao longo da atividade matemática: escolher exemplos ao acaso é uma boa forma de começar a revelar os componentes da situação, permitindo fazer conjeturas informadas; escolher exemplos de forma sistemática aumenta a probabilidade de sucesso de encontrar padrões e prepara terreno para a generalização; e, finalmente, escolher exemplos de forma mais elaborada usando casos especiais, permite testar a generalização. Este teste à generalização segue um caminho do geral para o particular usando assim um raciocínio dedutivo (Reid & Knipping, 2010).

Stylianides e Silver (2009) definem padrão como uma relação matemática geral que se ajusta aos dados e salientam que a capacidade de reconhecer o padrão depende, também de o tipo de padrão ser definido ou apenas plausível. Esta classificação, segundo os autores, de o padrão ser ou não definido de forma única, implica que na tentativa de generalização de um padrão *definido* haja evidências para a conclusão enquanto num padrão *plausível* a seleção de um padrão possível não obedece a critérios matemáticos. A seleção do padrão depende da experiência matemática que se tem, por isso é natural que alunos do terceiro ciclo procurem, nos padrões numéricos, relações lineares por serem aquelas que mais são trabalhadas. Para desenvolver a capacidade de notar, em vez de fornecer aos alunos regras de cálculo para determinar a expressão geral é mais importante que eles consigam notar a estrutura subjacente que lhes permite generalizar (Mason et al., 1985; Stylianides & Silver, 2009; Orton & Orton, 1999). O método baseado no cálculo da diferença entre termos consecutivos numéricos, segundo Orton e Orton (1999), é recursivo não levando de forma natural a uma fórmula algébrica e tal como focam Stylianides e Silver (2009) o método de generalização deve ser feito em ligação com a estrutura matemática da tarefa e não, apenas, através da estrutura numérica.

Harel (2008) distingue dois processos de generalização sendo o primeiro empírico e o segundo dedutivo: generalização de padrão de resultados (GPR) e generalização de padrão do processo (GPP) respetivamente. Exemplifica o autor citado que provar por GPR a generalização da sequência 2, 4, 8, … é 2^n se faz pela consistência dos resultados com a fórmula; e que provar por GPP se faz demonstrando que o processo gerador desta sequência é a multiplicação repetida por 2. Neste último caso, a generalização foca-se na perceção da estrutura subjacente aos dados e não em cada um dos casos.

O poder de generalização, segundo Mason et al. (1985), pode ser melhorado simultaneamente pelo aumento da expectativa de encontrar o padrão e pelo desenvolvimento do conhecimento e da experiência matemática. Durante este processo, estes autores aconselham: a registar todas as conjeturas formuladas, pois é natural que seja necessário revisitá-las mais tarde devido ao caracter cíclico do processo de conjeturar; a alterar as condições da conjetura para realçar o que interessa; a não acreditar na conjetura depois de formulada, mas a tratá-la como uma afirmação que necessita de verificação e de justificação; e a introduzir símbolos na conjetura para ampliar o seu âmbito de validade.

A conjetura pode surgir por *analogia* quando se tenta resumir o aspeto em que há semelhança total ou parcial com outras situações ou questões já exploradas, pelo que a experiência matemática de cada pessoa é importante. Polya (2004) coloca a hipótese de que a maioria das conjeturas são formuladas por analogia e, a ser assim, todo o tipo de analogias podem ter um importante papel na descoberta da solução de uma qualquer situação problemática. Depois, as conjeturas serão confirmadas ou não pela experiência e pelo raciocínio rigoroso. Essas conjeturas, afirma Polya, quando comparadas com os factos, podem necessitar de ser modificadas, adquirindo-se desse modo experiência que possibilitará, ao longo do tempo, fazer uma distinção de quais são as conjeturas que falham e quais são as conjeturas que se tornam verdadeiras.

Segundo Reid e Knipping (2010), a particularização para testar a conjetura é um tipo simples de raciocínio dedutivo em que se geram casos específicos a partir da conjetura. Quanto mais casos se verificam mais convicção gera, apesar de em termos probabilísticos não fazer qualquer sentido. A confiança só é completa caso se teste toda a população e isso só é possível caso a população seja finita. Se a população é infinita por mais casos que testemos continuamos a ter 0% da população. Ou seja, aumentou-se a confiança na conjetura mas ela não está provada. Tem-se apenas uma descrição dos factos limitada pela experiência e a esperança de que essa descrição se aplique para além dos limites da experiência efetuada (Polya, 1968).

A reorganização dos dados reunidos pode ser crucial permitindo reorganizar o pensamento (Mason et al., 1985). Há, então, dois tipos de dados recolhidos, os testados antes de formular a conjetura e os testados depois da formulação da conjetura: os primeiros formam a conjetura e os segundos suportam-na. Os dois tipos de dados estabelecem contacto entre a conjetura e os factos (Mason et al., 1985; Polya, 1968).

As conjeturas são sujeitas a sucessivos testes para averiguar a sua veracidade. No caso de as conjeturas formuladas serem refutadas é necessário voltar atrás e tentar encontrar regularidades que levem a novas conjeturas formuladas com base em toda a evidência experimental à disposição. Se ao testar mais um caso especial, como refere Polya (1968) se encontra concordância com a lei conjeturada, a conjetura ganha autoridade com essa verificação começando-se a ver uma razão para a lei geral, uma espécie de explicação que vai fortalecer a confiança na conjetura. Os casos particulares que refutam uma conjetura funcionam como contraexemplos por mostrarem que uma conjetura é falsa (Watson & Mason, 2008). Lakatos (1999) apresenta, na discussão da conjetura de Euler, o uso de contraexemplos, a que chamou de locais e de globais, durante o processo de prova (*proof)* de uma conjetura. Segundo Molina (2001), Lakatos denomina de *prova* um argumento que decompõe as conjeturas primitivas em subconjeturas ou lemas[1] e não no sentido de garantia da verdade (Molina, 2001). Durante este processo, Lakatos (1999) define que a função de um contraexemplo local é fazer uma crítica à *prova* e não à conjetura primitiva, enquanto a função de um contraexemplo global é uma crítica à conjetura primitiva. Segundo De Villiers (2003) o contraexemplo global verifica a premissa inicial, mas não a conclusão, colocando em causa a validade da afirmação, enquanto o contraexemplo local ou heurístico, como lhe chama, não é inconsistente com a conjetura, desafiando um passo do raciocínio lógico ou apenas aspetos do domínio de validade da proposição. Em suma, a apresentação de contraexemplos pode ter várias implicações: a redefinição do conceito, a restrição do âmbito de aplicação da conjetura ou, ainda, a identificação de uma falha num passo do raciocínio do processo de prova (Watson & Mason, 2008). Em todos estes casos os contraexemplos propiciam e estimulam a ampliação do conhecimento.

O esquema apresentado por Davis e Hersh (1981) do modelo simplificado de Lakatos, figura 1, da heurística da descoberta matemática mostra o efeito do tipo de contraexemplo no processo de conjeturar e de provar uma conjetura. Observe-se, na figura 2, que em resultado de um contraexemplo global apenas a conjetura primitiva é afetada, enquanto em resultado de um contraexemplo local a prova é reexaminada e identifica-se uma subconjetura que é refutada e que permite melhorar a conjetura primitiva incorporando as condições necessárias (Molina, 2001).

De Villiers (2010) apresenta as diferentes funções do processo de experimentação, mas sem qualquer ordem específica: *conjeturar* – ciclo de procurar um padrão por indução, generalizar; *verificação* – obter certeza acerca da verdade ou validade de uma afirmação ou conjetura; *refutação global* – desaprovar uma afirmação falsa gerando um contraexemplo; *refutação heurística* – reformular, refinar ou polir uma afirmação verdadeira através de contraexemplos locais; *compreensão* – compreender o significado

[1] Lemas: conclusão de outras demonstrações que são invocados como factos conhecidos (Delmas-Rigoutsos & Lalement, 2000)

de uma proposição, do conceito ou da definição ou como auxílio na descoberta da prova.

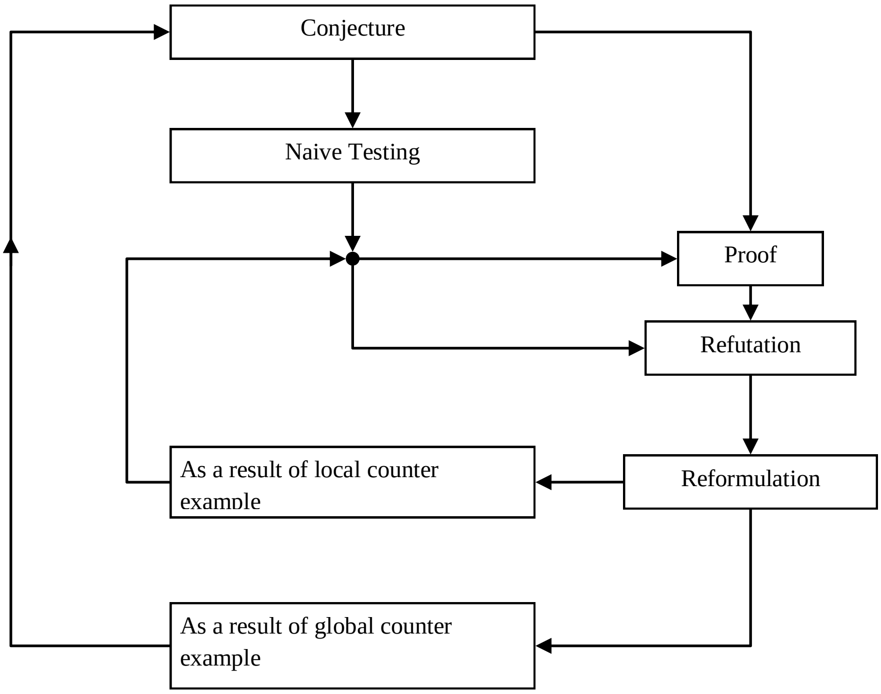


Figura 2 – Modelo da descoberta de Lakatos de Davis e Hersh (1981, p.292)

Em Lakatos (1999) na análise da conjetura de Euler, o processo de reformulação de conjeturas só aconteceu quando não houve rendição. Isto é, a conjetura de Euler sobre os poliedros foi sendo reformulada barrando as exceções, restringindo o domínio das conjeturas e/ou o conceito de poliedro. Face a uma conjetura, declarar apenas que ela é falsa fecha o caminho da descoberta impossibilitando a progressão (Molina, 2001).

No processo de generalização subjacente à formulação e reformulação de conjeturas, o raciocínio indutivo e a analogia são os tipos de raciocínio usados para generalizar quando com base na particularização e observação dos dados produzidos se encontram regularidades e se traduzem essas regularidades por uma afirmação geral que, enquanto não estiver matematicamente provada, é uma conjetura.

No entanto, De Villiers (1999) ao exemplificar a função de descoberta da prova mostra como pode ocorrer uma generalização com base num raciocínio dedutivo. Nesse exemplo que apresenta da exploração da união dos pontos médios de um papagaio num *software* geométrico dinâmico, uma pessoa pode convencer-se da conjetura de que o novo quadrilátero obtido seja um retângulo através do arrastamento dos vértices do papagaio, mas a observação não transmite qualquer explicação de porque é que isso acontece. No entanto, na tentativa de provar o resultado de forma dedutiva, como refere De Villiers, surge como característica essencial do quadrilátero original o facto de ter diagonais perpendiculares tornando secundário o facto de ter os lados adjacentes congruentes. Este facto permite generalizar o resultado para qualquer quadrilátero com diagonais perpendiculares sem seguir o método de verificação empírica da hipótese original. É assim possível descobrir novos resultados através da tentativa de provar e encontram-se, na história da matemática, exemplos de descoberta através da forma dedutiva (De Villiers, 1999).

A convicção é, geramente, um pre-requisito para procurar a prova, como afirma De Villiers (2010), pelo que só se vai dispender tempo a provar quando se estiver razoavelmente convencido.

Balacheff (1987) considerou quatro níveis hierárquicos de desenvolvimento cognitivo da prova de acordo com a forma como os alunos se convencem da validade de uma afirmação ou solução que produzem: empirismo naïf, experiência crucial, exemplo genérico e experiência conceptual. Segundo o autor esta hierarquia está relacionada com a classificação em provas pragmáticas ou conceptuais conforme correspondem a uma posição prática ou teórica. As provas pragmáticas são efetuadas pelo aluno para estabelecer a validade de uma proposição imbuída pelas características do acontecimento que a constituiu; e as provas conceptuais não fazem referência à ação, são apresentadas com linguagem relativa às propriedades dos objetos e às relações entre eles. Balacheff acrescenta ser entre o *exemplo genérico* e a *experiência conceptual* que ocorre a passagem da prova pragmática para a prova conceptual. O autor explica que esta passagem é feita através da linguagem em que, inicialmente são feitas referências temporais e referências à ação concreta. Depois deste primeiro passo de distanciamento para descrever a ação, a passagem para a prova conceptual exige a referência apenas às qualidades genéricas da situação. No entanto, alerta que para decidir qual o nível de prova é necessário conhecer o processo de produção da prova pois as caraterísticas da linguagem não são suficientes para decidir qual o nível de prova. De seguida descreve-se cada um dos níveis de prova de Balacheff em que os dois primeiros, esclarece o autor, correspondem a prova, apenas, na perspetiva de quem as faz. O *empirismo naïf* consiste em validar a veracidade de uma afirmação através da observação de um pequeno número de casos. A *experiência crucial* é um procedimento de validação de uma afirmação na qual o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização para todos os casos e conclui através de um caso que considera particular. Assim, a *experiência crucial* consiste em provocar um acontecimento que, se resultar para aquele caso, resulta para todos. Este procedimento é fundamentalmente empírico e distingue-se do *empirismo naïf* por se colocar o problema da generalização e por se ter definido outro modo de decidir. O *exemplo genérico* envolve tornar explícitas as razões da sua validade através da realização de operações ou transformações sobre um objeto presente não por ele mesmo, mas como representante característico de uma classe de indivíduos. A *experiência conceptual* invoca a ação por interiorização da mesma e distancia-se de qualquer representante particular. Requer que a justificação, a base de validação da afirmação, esteja incluída na análise das propriedades dos objetos em questão. Essas propriedades não são evidenciadas por casos particulares, mas de forma genérica.

Existem conexões, segundo Balacheff (1987) entre o nível de *empirismo naïf* e o nível de *experiência crucial* assim como entre o nível de *exemplo genérico* e a *experiência conceptual*. Uma conclusão importante, a que Balacheff chegou, foi a de que se a experiência crucial é muitas vezes alcançada pela necessidade de assegurar a generalidade da conjetura validada por *empirismo naïf* e que o nível de *experiência crucial* pode manter-se mesmo após a passagem para a prova conceptual, sobretudo se a prova foi fundada com base no exemplo genérico. A passagem do *exemplo genérico* para a *experiência conceptual* exige uma construção cognitiva em que é necessário decidir qual o carater genérico do exemplo empregue.

Tal como refere Miyazaki (2000), estabelecer níveis de prova permite aos professores diagnosticar o nível de cada aluno e estabelecer metas mais apropriadas para orientar os alunos na passagem de um nível para o outro.

Após o processo cíclico de conjeturar chega-se a uma generalização, com grau de aceitação razoável, aceite pelo próprio, mas que terá de ser matematicamente provada. De seguida descreve-se o processo que conduz da generalização à justificação e prova, processo esse que está interligado (Garuti, Boero, & Lemut, 1998).

Da justificação à prova

Após o processo de conjeturar, as afirmações produzidas são generalizações que trazem consigo a convicção de veracidade por quem as produziu. Para provar é necessário sentir a necessidade de convencer outros ou ter a noção de que se pode estar enganado. Assim sendo, provar exige a capacidade de questionar mesmo o que parece óbvio e esta atitude de questionamento é parte integrante da atitude de pensar matematicamente (Mason, 1998; Mason et al., 1985). Há que ser crítico e formular conjeturas sobre o "porquê", seguindo o normal processo de conjeturar, em três diferentes fases com grau de dificuldade crescente, referidas por Mason et al. (1985), a saber: convence-te a ti próprio; convence um amigo; convence um inimigo. Os autores afirmam que convencer um amigo obriga a exteriorizar as razões pelas quais se está convencido, mas a necessidade de convencer alguém que não acredita faz rever todo o processo e questionar as afirmações conjeturadas desenvolvendo as conjeturas. Este processo de revisão implica tomar consciência do mesmo e, se, ao fazê-lo, houver reflexão, torna-se possível generalizar os métodos usados chegando à compreensão da questão. Segundo Mason et al. (1985), ser capaz de reflectir requer a capacidade de perceber, reconhecer, articular e assimilar.

As crianças, refere Mason (1998), têm a capacidade de adquirir um estado de certeza com grande facilidade passando rapidamente à generalização. Para lidar com isso, acrescenta, é necessário trabalhar no sentido de perceber que essa generalização pode não ser válida, que tem de ser testada e que é necessário procurar argumentos, para que os outros fiquem convencidos. Se uma conjetura resistiu a vários testes, a forte convicção de que ela é verdadeira permanece até que se encontre um contraexemplo que a refute ou que se prove a sua veracidade. Durante este processo de teste, a compreensão ou justificação da conjetura pode surgir quando se observam os casos especiais, por exemplo, nos casos em que o padrão dos dados é o espelho do padrão da situação e em que ao analisá-los sobressai um padrão que contribui para a compreensão da questão. Exemplos disso são os problemas de contagem em que o padrão da situação se traduz no padrão numérico (Mason et al., 1985; Polya, 1968). Noutros casos acontece a conjetura atingir um elevado grau de confiança sem se ter chegado a uma explicação satisfatória do porque é que é verdade, tornando-se necessário fazer a ligação entre a conjetura e os dados revendo deste modo todo o processo de conjeturar. Torna-se necessário voltar atrás e tentar perceber porque é que algumas conjeturas foram refutadas. Esta acção de voltar atrás e rever tem por base uma atitude de questionamento e reflexão e como refere Goldenberg (1999) o questionamento constitui um passo avançado, uma vez que é preciso ter ideias para as poder rever e relacionar. Acrescenta que a função de questionamento permite aprofundar e/ou redefinir a definição, ou o domínio ou as restrições do facto matemático.

Relativamente ao processo de questionamento, Mason et al. (1985) relacionam-no com a capacidade de reparar/observar *(notice)*. Os autores descrevem essa capacidade como o ato de produzir um comentário ou pensamento acerca de uma mudança que subtilmente foi apercebida e que provoca um questionamento. Explanam que as coisas em que cada pessoa repara dependem de muitos factores, tais como experiência, interesses, conhecimento e o actual estado psicológico. O ato de reparar pode ser melhorado pelo desejo de observar melhor e pelo registo daquilo que foi observado. No entanto, os autores alertam para o facto de as questões terem de surgir como resultado de uma acção interior que ocorre algures entre o fluxo de conversa interior e a estimulação exterior. Referem que a alternativa a esta atitude de questionamento é aceitar tudo como está, fazer tudo para evitar a incerteza, aceitar as coisas sem desafio, sem perguntar porquê ou como.

Assim, justificar está relacionado com o processo de ganhar convicção da verdade da conjetura e com a revelação de uma estrutura ou relação subjacente que liga o que se sabe ao que se quer saber. A exposição dessa ligação será o argumento (Mason et al., 1985; Polya, 1968; De Villiers, 1999).

Boero, Douek, e Ferrari (2008) realçam a importância de a atividade de construção da prova implicar uma ligação funcional entre a atividade argumentativa necessária para compreender a afirmação produzida (conjetura) e para reconhecer a sua plausibilidade. Um argumento a favor da importância dessa ligação funcional é a constatação de Garuti, Boero, e Lemut (1998), de que, na situação de produzir uma prova, partindo da conjetura aceite pela comunidade turma, os alunos que não participaram na construção dessa conjetura encontraram as mesmas dificuldades que é costume encontrar quando se lhes pede para produzir uma prova de uma afirmação que não produziram. Concluíram, assim, que a existência de unidade cognitiva entre a fase de conjeturar e a fase da construção da prova é um argumento a favor da promoção de atividades de descoberta na sala de aula, para que os alunos sintam a necessidade de reorganizar os argumentos formulados coerentemente e com encadeamento lógico produzindo deste modo a prova.

Existe unidade cognitiva, segundo Mariotti (2006), quando no processo de formulação de conjetura a justificação emerge e ao provar se interligam os argumentos produzidos de forma coerente numa cadeia lógica. Nem sempre tal acontece, tendo os investigadores chamado de falha à distância entre os argumentos produzidos no processo de conjeturar e os argumentos produzidos no processo de prova. Se na descoberta houver unidade cognitiva entre a fase de conjetura e a posterior validação pode ser promovida a necessidade de provar (Garuti, Boero, & Lemut, 1998), já que a prova tem potencial para promover a compreensão e a convicção constituindo uma oportunidade para os alunos tomarem consciência das limitações dos argumentos empíricos como métodos de validação das generalizações matemáticas (Stylianides, 2009). Os alunos tendem a formular ou a aceitar argumentos empíricos como prova de generalizações matemáticas mesmo quando esses argumentos não proporcionam evidência pela verificação de ser verdade em todos os casos de um subconjunto de elementos do domínio da generalização (Stylianides & Stylianides, 2009).

Hanna (1996) defende a ideia de que o ambiente certo para ensinar a prova promovendo a compreensão é aquele que se foca numa aprendizagem de uma matemática com significado explicando os conceitos e em que se pede aos alunos que justifiquem as suas descobertas e afirmações. É, no entanto, necessário que os alunos desenvolvam certas capacidades essenciais à prova, as quais foram sintetizadas por Stylianides e Stylianides (2008), como as seguintes: a capacidade de reconhecer que uma prova garante a verdade para todos os elementos do domínio coberto pela prova, mas que não a garante para elementos fora do domínio; a de reconhecer a necessidade de provar, pelo que deve compreender o papel das assunções (por exemplo, definições, axiomas,…) que estão na base de um argumento matemático ou de uma prova; a de usar diferentes formas de raciocínio, tais como o raciocínio indutivo, o raciocínio por analogia e o raciocínio dedutivo.

A planificação de sequências de instrução com vista a que o aluno sinta uma necessidade intelectual de aprender métodos seguros de validação pode ser uma forma de ensinar a prova, tal como relatam Stylianides (2009) e Stylianides e Stylianides (2009). Um exemplo de uma sequência de aprendizagem da prova, apresentada por estes autores, é constituída por quatro problemas: no primeiro, os alunos exploram e encontram um padrão numérico que traduzem por uma fórmula, mas que validam com a verificação de alguns casos; no segundo, os alunos identificam um padrão que só serve para os primeiros casos gerando-se um conflito cognitivo que promove a progressão para um novo estádio que corresponde a validar através de alguns casos especiais; no terceiro, instala-se, nos alunos, um segundo conflito cognitivo, o que provoca a necessidade de conhecer métodos seguros de validação. A noção de prova matemática foi introduzida, voltando ao problema um, através da construção da explicação genérica do processo que levou à escrita daquela fórmula. Desse modo foi introduzida a função explicativa da prova. Salienta-se aqui o facto de terem chegado a uma expressão simbólica e no entanto, quando se lhes perguntou, por que é que aquela expressão provava, os alunos recorreram a casos específicos revelando estarem no nível de empirismo *naïf*. O conflito cognitivo é, assim, instalado a partir de contraexemplos para expandir os espaços de exemplos pessoais para validação desenvolvendo, em paralelo, os esquemas de justificação dos alunos (Stylianides & Stylianides, 2009).

Para que o professor planifique com a intencionalidade de promover a prova deve conhecer diferentes tipos de tarefas de prova para que não enfatize no seu ensino apenas as que conhece e também para que saiba qual o tipo de atividade matemática que cada uma das tarefas despoleta (Stylianides & Ball, 2008). A Tabela 1 apresenta essa relação.

Tabela 1 – Tipo de tarefas de prova e a atividade de prova (Stylianides & Ball, 2008)

	ATIVIDADE DE PROVA	
Número de casos envolvidos	**Verificação**	**Refutação**
Múltiplos casos	➢ Enumeração sistemática de todos os casos sendo possível ➢ Argumento geral que cubra todos os casos	➢ Enumeração estratégica de casos ➢ Construção de um contraexemplo ➢ Desenvolvimento de um argumento por redução ao absurdo
Infinitos casos	➢ Argumento geral que cubra todos os casos	➢ Construção de um contraexemplo ➢ Desenvolvimento de um argumento por redução ao absurdo

Reid e Knipping (2010) classificaram os argumentos de acordo com o tipo de representatividade envolvida nos exemplos. Agruparam os argumentos em quatro tipos apresentados na Tabela 2: argumentos *empiricos* são aqueles que usam exemplos específicos, mas não representam uma classe geral não sendo por isso considerados representativos; argumentos *genéricos* são aqueles em que os exemplos específicos são usados como representativos; argumentos *simbólicos* são aqueles em que as palavras e os símbolos são representativos; e argumentos *formais* são aqueles em que os simbolos e as palavras são usados sem representarem coisa nenhuma. Alguns argumentos estão entre uma classificação e outra, como, por exemplo os argumentos *entre os argumentos empiricos e genéricos*. Estes argumentos ao contrário dos argumentos empíricos são aceites como prova pela comunidade matemática em duas situações: quando todos os exemplos de um conjunto finito são verificados e satisfazem a proposição – *Prova por exaustão* – e quando um exemplo é verificado e refuta a proposição – *refutação por contraexemplo*.

As provas *genéricas* usam exemplos para representar uma classe mais ampla e a sua designação provém da forma que o argumento toma: numérico, concreto, pictórico, situacionais.

Tabela 2 – Classificação de argumentos de Reid e Knipping (2010, p.131)

CATEGORIA	SUBCATEGORIAS
Argumentos *Empíricos*: **Exemplos usados não representativos**	Enumeração simples Estender um padrão Experiência crucial casos Esquema de prova percetual
Entre o E*mpírico* e o *Genérico*	Prova por exaustão Contraexemplo
Argumentos G*enéricos*: **Exemplos representativos**	Exemplo genérico numérico Exemplo genérico concreto Exemplo genérico pictorial Exemplo genérico situacional
Entre o *Genérico* e o *Simbólico*	Argumentos geométricos
Argumentos *Simbólicos:* **Palavras e símbolos representativos**	Narrativos Simbólicos
Entre o *Simbólico* e o *Formal*	Manipulativos
Argumentos *Formais* **Símbolos não representativos**	

Provas simbólicas com palavras e símbolos representativos são as provas que a maioria dos alunos e professores consideram corretas matematicamente. Neste tipo de prova cada símbolo representa alguma coisa e, no caso de haver manipulação de uma expressão algébrica, a expressão inicial e a final significam alguma coisa enquanto as expressões intermédias podem incluir termos que não são representativos. Muitas das deduções algébricas envolvem facilidade de manipulação algébrica em vez de dedução lógica.

Pretende-se que o aluno aprenda modos válidos de argumentação, tais como o princípio matemático de indução, o de contraposição da regra de equivalência e o de construção de contraexemplos (Stylianides & Ball, 2008).

Reid e Knipping (2010) clarificam que o princípio de indução matemática é baseado em raciocínio dedutivo e não indutivo, uma vez que, apesar de ser um raciocínio por recorrência que usa casos específicos, refere o quinto axioma de Peano: regra que permite a dedução de uma regra geral a partir de casos específicos.

Com base nas investigações realizadas na educação matemática Reid e Knipping (2010) sintetizaram os raciocínios que ocorrem durante a atividade matemática em cinco padrões de raciocínio, definidos como combinações de atos de raciocínio realizados individualmente ou em pequeno grupo durante essa atividade: padrão de *verificação científica* (*rendição*, *exception* e *monster barring*),padrão de *dedução-conjetura-teste*; padrão de *análise da Prova*.

O padrão de raciocínio que Reid e Knipping (2010) denominam de verificação científica segue a sequência de observar um padrão, conjeturar, submeter a teste cíclico, generalizar, deduzir e distingue-se do padrão de raciocínio dedução-conjetura-teste cíclico por iniciar com a observação de um padrão e não por uma dedução. Este último padrão de raciocínio atribui, assim, um caracter exploratório ao raciocínio dedutivo, o que tradicionalmente não é usual. Os autores explicam que, na sala de aula, pode acontecer que os alunos por raciocínio dedutivo transformem um conhecimento implicíto num conhecimento explícito através da sua explanação.

No padrão de raciocínio de verificação científica surgem outros dois padrões quando ao testar uma conjetura surge um contraexemplo: o padrão de rendição ou o padrão de *exception* e *monster Barring*. A *rendição* dá-se no caso de o contraexemplo resultar na negação da conjetura: observar o padrão, conjeturar, submeter a teste cíclico, encontrar um contraexemplo, negar a conjetura. No caso de se rejeitar o contraexemplo duas situações podem ocorrer: o contraexemplo é rejeitado por ser considerado um caso especial (*Monster barring*) sem permitir que a conjetura tenha excepções ou a conjetura é reformulada de forma a excluir esses contraexemplos (*Exception Barring*). O outro padrão de raciocínio é o de *análise da prova* em que há uma falha no raciocínio e para a localizar se faz a revisão da conclusão. Segundo Reid e Knipping (2010), o padrão de *análise da prova* é o processo de provas e refutações que ocorre na atividade matemática designado de “proof-analysis” por Lakatos.

Reparar nestes padrões de raciocínio ao analisar a atividade matemática exige distinguir os diferentes tipos de raciocínio: indutivo, dedutivo, abdutivo e por analogia.

3.2 A natureza do raciocínio matemático

O raciocínio dedutivo teve origem na matemática grega, na qual a prova era obtida por um esquema dedutivo e axiomático, devendo-se aos gregos a criação da matemática como ciência racional (Harel & Sowder, 2007; Nápoles, 2000). No entanto, Aristóteles já considerava os dois tipos de raciocínio, o indutivo e o dedutivo, tendo-se dedicado ao estudo dos raciocínios dedutivos elementares que designou de silogismos e que foram a base do raciocínio sistemático até à época do Renascimento (Cohen & Manion, 1990; Nápoles, 2000). O facto de o silogismo se ter deixado de relacionar com a observação e com a experiência diminuiu a sua eficácia. E é no século XVII que Francis Bacon critica o modelo em vigor, propondo o modelo do raciocínio indutivo por meio do qual uma afirmação baseada no estudo de um número de casos individuais deve levar a uma hipótese e finalmente a uma generalização (Cohen & Manion, 1990). Segundo Oliveira (2002), pela indução baconiana através de uma só experiência pode ser induzido um determinado facto. Consequentemente, afirmam Cohen e Manion (1990), a ciência deixou de considerar a lógica e a autoridade como meios absolutos que conduzem à prova, passando estas a constituir fontes de hipóteses acerca do mundo e dos seus fenómenos.

Em termos de tipo de raciocínio, Polya (1968) distingue o raciocínio plausível, usado no processo de descoberta da prova, do raciocínio demonstrativo, usado na prova enquanto produto do processo criativo matemático. Refere, ainda, que a prova matemática aparece como puramente dedutiva, mas que ela é descoberta por raciocínio plausível, através de conjeturas.

Polya (1968) refere as vantagens da indução no processo de aprendizagem:

> Induction results in adapting our mind to the facts. When we compare our ideas with the observations, there may be agreement or disagreement. If there is agreement, we feel more confident of our ideas; if there is disagreement, we modify our ideas. After repeated modification our ideas may fit the facts somewhat better. Our first ideas about any new subject

> are almost bound to be wrong, at least in part; the inductive process give us a chance to correct them, to adapt them to reality. (p.55)

O autor acrescenta que essa adaptação mental é feita em paralelo com a adaptação da linguagem verbal, o que permite mudar a terminologia matemática e clarificar os conceitos. Foca, ainda, a utilidade do processo indutivo na situação, que por vezes ocorre na investigação matemática, de perante a formulação de um teorema, haver necessidade de lhe dar um significado mais preciso de modo a clarificá-lo. Também De Villiers (2003) considera que a exploração de conjeturas e de resultados de forma experimental contribui para melhor compreender o significado proposicional de um teorema.

Polya (1954) afirma no prefácio da sua obra *Induction and Analogy in Mathematics* (volume I) que a matemática oferece uma excelente oportunidade para aprender o raciocínio dedutivo e que o currículo da matemática escolar oferece uma grande oportunidade para aprender o raciocínio plausível. Compara o raciocínio dedutivo com o raciocínio plausível e conclui que o raciocínio dedutivo é seguro, é definitivo, segue códigos rígidos e não está sujeito a controvérsias e que o raciocínio plausível é controverso e provisório. Distingue-os, ainda, por no raciocínio dedutivo ser primordial distinguir uma prova de um palpite e no raciocínio plausível ser primordial distinguir entre um e outro palpite em termos de razoabilidade. O raciocínio indutivo é um caso particular do raciocínio plausível, e, segundo Polya (1968), é por indução que se chega da observação à conjetura.

Segundo Reid e Knipping (2010), identificaram-se, na investigação em educação matemática, três tipos de raciocínios como os mais importantes para ensinar e aprender a prova: o dedutivo, o indutivo, e a analogia. Estes autores propõem distinguir os diferentes raciocínios pelo modo como usam casos (observação específica contida numa condição), regras (proposição geral que afirma que se uma condição ocorre a outra também ocorre) e resultados (observação específica similar a um caso mas referindo-se a uma condição que depende de outra ligada por uma regra). Por condição os autores entendem a descrição de um atributo de alguma coisa ou uma relação entre atributos. Esta estrutura é a mesma dos silogismos, a qual envolve uma regra e um caso chegando a um resultado (o mesmo que duas premissas e uma conclusão). O mais usado em matemática é o silogismo condicional, cuja estrutura em lógica matemática é a da implicação (Nápoles, 2000).

No raciocínio dedutivo, um caso e uma regra implicam um resultado e no tipo de silogismo condicional há duas figuras: "Modus Ponens" (MP) ou "afirmação do antecedente" e "Modus Tollens" (MT) ou "negação do consequente". No silogismo MP, o mais usado por ser mais intuitivo, se numa premissa em forma de implicação o antecedente é verdadeiro, infere-se que o consequente também é verdadeiro. No silogismo MT, se numa premissa em forma de implicação a negação do consequente é verdadeira, ou seja, se se provar que o consequente é falso, infere-se que o antecedente também o é. Nos silogismos tipo "Modus Ponens", muitas vezes o caso também é uma regra geral ficando-se, então, com duas regras gerais, mas, quando o caso não é uma regra geral, então a dedução é uma particularização da regra (Reid & Knipping, 2010). De facto, uma dedução pode ir do geral para o particular ou do geral para o geral (Nápoles, 2000).

Tradicionalmente considera-se que o raciocínio dedutivo não conduz a novo conhecimento por toda a informação estar já contida nas premissas. Contudo, Reid e Knipping (2010) salientam que na sala de aula se encontram exemplos de raciocínio dedutivo com a função de explicar e mesmo de explorar. Estes autores, argumentam que os alunos podem experienciar a descoberta ao tornar algo que sabem implicitamente em conhecimento explicito. Salientam também o facto de uma particularização poder ser um raciocínio dedutivo quando uma afirmação geral se testa por particularização.

No raciocínio indutivo, um caso e um resultado (ou muitos casos similares associados com muitos resultados similares) levam a uma regra. Neste raciocínio parte-se de casos particulares e concluem-se regras gerais; usa-se o que se sabe para concluir sobre algo que não se sabe; todavia, o que se conclui é apenas provável e não é certo. Como refere Nápoles (2000), o raciocínio indutivo pode ser representado por um paralogismo (silogismo errado) condicional, no qual o grau de verosomilhança do antecedente aumenta quando aumenta o número de consequências sem nunca se chegar à certeza mas apenas à conjetura.

No raciocínio abdutivo um resultado e uma regra levam a um caso. Este raciocínio é o reverso do raciocínio dedutivo e o seu ponto de partida dá-se através de um caso surpreendente.

O raciocínio por *analogia* é definido por Polya (1968; 2004) como a perceção de aspetos semelhantes entre situações. O mesmo autor refere que as analogias atravessam todo o nosso pensamento. Reid e Knipping (2010) apontam algumas características importantes do raciocínio por analogia, a saber: a possível confusão com uma generalização seguida de uma particularização; a possibilidade de ser usado para explorar e para explicar em matemática; a semelhança com a forma do raciocínio dedutivo implicando a dificuldade de os distinguir

Os alunos, quando colocados perante um desafio que os faça sentir a necessidade de descobrir, investigam a matemática e geram novo conhecimento pondo em ação todo o tipo de pensamento inferencial e não apenas o dedutivo (Oliveira, 2002).

II – Parte empírica

4. Metodologia

Nas secções seguintes serão fundamentadas as opções metodológicas efetuadas relativamente à investigação realizada, assim como os procedimentos realizados na recolha de dados e na análise dos dados.

4.1 Opções metodológicas

As opções metodológicas dizem respeito ao paradigma de investigação de acordo com as questões e objetivos do estudo, à selecção da perspectiva mais adequada e à estratégia de investigação.

Selecção do paradigma de investigação

Ao planear uma investigação é necessário pensar em que paradigma a mesma se insere pelo facto de essa escolha condicionar toda a orientação do estudo. Esse condicionalismo decorre da própria definição de paradigma de Bogdan e Biklen (1994), como "…um conjunto aberto de asserções, conceitos ou proposições logicamente relacionados e que orientam o pensamento e a investigação." (p.52). Os dois paradigmas, segundo Almeida e Freire (2007), que estão na base da caracterização de um modelo de investigação, na área da educação, são o paradigma empírico-analítico, muitas vezes designado como quantitativo, positivista e experimental e o paradigma humanista-interpretativo, também designado como qualitativo e naturalista. O primeiro, de corrente positivista, assenta na crença de que a investigação só é credível através do método experimental com o objetivo de explicar, predizer e controlar os fenómenos estabelecendo relações causais (Almeida & Freire, 2007; Boavida & Amado, 2008). A segunda, anti-positivista, baseia-se na perspectiva *fenomenológica* que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), é uma teoria em que se faz uso de um conjunto de asserções tendo em conta o significado e interacções que os sujeitos atribuem às coisas, enfatizando a componente subjectiva do comportamento das pessoas. Esta pespectiva teve origem na ideia de que a relação entre a perceção dos objetos e os objetos não é passiva, pois o objecto é definido pela consciência humana através da experiência (Denzin & Lincoln, 1994).

O paradigma interpretativo incorpora a complexidade da realidade do fenómeno a estudar não reduzindo essa complexidade ao estudo de uma parte desse fenómeno e aceita que o conhecimento dessa realidade é interpretado pelo investigador que, tal como os sujeitos investigados, tem as suas ideias e valores (Lüdke & André, 1986). Aplicando esta perspectiva a esta investigação, os aspetos que interferem na forma como os alunos raciocinam, assim como os seus raciocínios, serão interpretados pela investigadora na tentativa de compreender, de forma contextualizada, o fenómeno do raciocínio destes alunos na aula de matemática.

A designação mais comum para o tipo de investigação realizada na perspetiva interpretativa é de investigação qualitativa, por ser este o termo que designa o tipo de metodologia privilegiado neste tipo de investigação. Bogdan e Biklen (1994) apresentam como características da investigação qualitativa: (i) os dados serem recolhidos no seu ambiente natural e o investigador ser o instrumento principal; (ii) o carácter descritivo da investigação qualitativa; (iii) o interesse ser mais centrado no processo do que simplesmente nos resultados ou produtos; (iv) a análise dos dados ser realizada de forma indutiva; (v) a especial importância dada ao significado.

Inserida na perspectiva *fenomenológica* a abordagem designada por *interaccionismo* simbólico vê o ser humano como um criador de símbolos pelo facto de este construir e modificar a sua experiência e o significado que atribui às coisas através da interpretação e da interação social (Bogdan & Biklen, 1994). Nesta perspectiva, de forma sucinta, e com base em Cohen e Manion (1994), o enfoque não é no individuo imbuído das suas caracteristicas, nem no aspeto social que causa o seu comportamento, mas na natureza da interação entre as pessoas. Esta perspectiva tem, assim, em conta a transformação do ser humano e da sociedade através da interação, pelo que não se centra no individuo mas na atividade humana (Cohen & Manion, 1994). O ser humano, como explica Cohen e Manion (1994), é uma entidade dinâmica de interação cíclica cujo ciclo diz respeito à ação, perceção, interpretação e nova ação.

Os principais pressupostos do interacionismo simbólico, são de acordo com Ponte (2006): a experiência humana mediada pela interpretação, os sentidos atribuídos como produto da interação social entre os seres humanos, os sentidos produzidos e modificados por cada pessoa através de um processo interpretativo.

De acordo com estes pressupostos os alunos são entidades dinâmicas cujas ações devem ser interpretadas num contexto de interações complexas.

Esta forma de investigar, como afirmam Bogdan e Biklen (1994), centrou a investigação na interpretação e na escrita, atribuindo ao investigador o papel de intérprete. Os processos pelos quais o investigador vai conduzir a investigação dependem da estratégia utilizada. Seguidamente, será apresentada a estratégia seleccionada na presente investigação.

A estratégia de investigação

No âmbito de uma investigação de carácter qualitativo há diferentes estratégias de pesquisa e a primeira e mais importante condição para decidir por uma delas é, segundo Yin (2005), a identificação do tipo de questão de pesquisa. De acordo com Yin há ainda outros dois critérios para decidir qual a estratégia adequada: a abrangência de controle sobre eventos comportamentais e o grau de enfoque em acontecimentos atuais ou históricos. O estudo de caso será, então, a estratégia definida quando as questões são do tipo "Como?", "Porquê?" e/ou "o quê?", e, para além disso, no caso da investigação se debruçar sobre a atualidade e sem controlar os comportamentos.

Para Stake (2009), "O estudo de caso é o estudo da particularidade e complexidade de um único caso, conseguindo compreender a sua atividade no âmbito de circunstâncias importantes" (p.11). Também Yin (2005) enfatiza a importância dada ao contexto quando define um estudo de caso como uma investigação empírica em que se "investiga um fenómeno contemporâneo dentro do seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenómeno e o contexto não estão claramente definidos" (p.33).

Yin (2005) refere que os estudos de caso, tal como outras estratégias, podem ser exploratórios, explicativos e descritivos. No entanto, como afirma Ponte (2006), um estudo de caso tem sempre um carácter fortemente descritivo mesmo que tenha outros propósitos para além de descrever o caso. Tal como Ponte (2006) refere, o estudo de caso não é um tipo de investigação mais apropriado para estudar situações de intervenção conduzidas pelo próprio investigador pelo facto de ser difícil manter o distanciamento necessário. Todavia o autor expõe alguns exemplos de estudos de caso em que os investigadores conduzem experiências na sua prática profissional, sendo o caso não a experiência no seu todo mas uma unidade dentro dessa experiência. Ponte salienta a necessidade de o investigador, quando opta por essa estratégia, ter o cuidado de usar estratégias de distanciamento eficazes.

Esta investigação em particular consiste na condução, pela própria professora, de uma experiência de desenvolvimento do raciocínio matemático através da implementação de um ambiente de descoberta da matemática na sala de aula. A unidade de análise, o caso, são os alunos da turma em geral e alguns alunos em particular visando proporcionar um entendimento mais aprofundado dos efeitos da experiência.

Na realização de um estudo de caso este pode ser único, caso haja apenas um contexto a ser estudado, ou múltiplo, se houver vários contextos estudados para serem comparados (Yin, 2005). Neste estudo o contexto é único e diz respeito à unidade de análise dos alunos de uma turma de 9.ºano cuja escolha da investigadora se deveu, apenas, ao facto de ser uma turma de 3.º ciclo.

Um estudo de caso é, segundo Yin (2005), um estudo de caso incorporado quando dentro do caso único se dá atenção a uma ou a várias subunidades de análise a que chama unidades incorporadas. Ponte (2006) denomina as subunidades de análise como subcasos. Neste estudo optou-se por realizar um estudo de caso único holístico em que a turma constituiu a unidade de análise e depois se incorporaram quatro subcasos, 4 alunos, para melhor fazer sobressair as particularidades do caso.

A seleção desses alunos foi feita à medida que o estudo decorria, mas não se abandonou em nenhuma etapa do projeto, a análise holística do caso. Os alunos selecionados como subcasos foram aqueles que poderiam dar uma ideia mais enriquecedora desta investigação, pois, segundo Stake (2009), um dos critérios para a selecção dos subcasos deverá ser o de maximixar o que se pode aprender. Assim sendo, a seleção de casos na turma foi realizada tendo em conta a seguinte questão: quais são aqueles que ajudam a compreender melhor como raciocinam os alunos.

A investigadora como professora

Para realizar a investigação compreendendo o caso era necessário observar *in loco*. Havia, no entanto, duas formas de o fazer: ou a professora analisava a sua turma e passava a ser professora e investigadora em simultâneo ou fazia a investigação numa turma de um colega da escola com compatibilidade de horário. Esta segunda opção acarretava alguns problemas: todos os colegas eram seus desconhecidos, convencê-los a aceitar poderia ser um processo complexo e o risco de não adesão às metodologias adoptadas, dentro de um quadro de promoção de autonomia matemática dos alunos, podia inviabilizar o estudo. Devido a estes possíveis constrangimentos, a professora decidiu protagonizar ambos os papéis.

Levantava-se a questão de qual deveria ser o grau de participação da investigadora no estudo, grau esse que pode ser definido dentro de um intervalo contínuo que vai desde o ser só observador sem qualquer participação, até o observador com envolvimento total na realidade (Bogdan & Biklen, 1994; Lüdke & André, 1986).

A opção de ser professora e simultaneamente investigadora parece apontar no sentido do envolvimento total, mas há, no entanto, fronteiras que podem ser definidas. Essas fronteiras são percepcionadas pela pessoa em cada momento e de acordo com as funções que desempenha. Com efeito, no contexto de sala de aula pode haver momentos em que seja só professora, outros em que seja professora e investigadora, e nenhuns momentos em que seja só investigadora. O grau de envolvimento da investigadora pode variar de acordo com o tipo de atividade que está a decorrer nunca se situando nos extremos do intervalo de grau de participação. No entanto, como referem Bogdan e Biklen (1994), a tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode ser díficil. Salienta-se que a professora como orientadora de atividades que dão primazia à autonomia dos alunos já se deparou, ao longo da sua atividade profissional, com essa dificuldade de equilibrio e com as consequências de ter optado pela intervenção ou pela passividade. Era, então, possível antever algumas dificuldades nesta representação dupla de papéis com características diferentes. Por um lado, o papel de professor tem em comum com o de investigador, o facto de ambos recolherem dados, fazerem registos, usarem esses registos para perceber os alunos, mas, como referem Bogdan e Biklen (1994), "…o investigador pode devotar-se à investigação de alma e coração" enquanto o professor tem outras preocupações e aspetos a prestar atenção dentro e fora do contexto de sala de aula. Consequentemente o investigador professor terá de autoregular a sua ação através de um distanciamento da sua ação como professor. Esse distanciamento poderá ser conseguido recorrendo à gravação audio e video uma vez que esses registos tornam possível rever a ação distanciada no tempo e como elemento externo à mesma. Por sua vez esse distanciamento permite controlar o efeito de o investigador ser também sujeito da investigação por ser ele o instrumento de recolha de dados tal como chama a atenção Bogdan e Biklen (1994). Este aspeto será referido mais à frente na subsecção de critérios de qualidade de um estudo, mais propriamente na validade interna.

Questões éticas

A ética coloca questões muito importantes a não descurar numa investigação. Uma investigação em que o objeto de estudo é a aprendizagem e o comportamento dos seres humanos, como refere Tuckman (2000), não pode esquecer os direitos das pessoas envolvidas: o direito à não participação; o direito ao anonimato; o direito à confidencialidade; o direito de poder contar com o sentido de responsabilidade do investigador. Quanto ao caso particular da investigação qualitativa Bogdan e BiKlen (1994) apresentam as propostas relativas a um código deontológico para os investigadores qualitativos: as identidades dos sujeitos devem ser protegidas; o anonimato deve contemplar não só o material escrito mas também os relatos verbais; o investigador não deve revelar a terceiros informações sobre os seus sujeitos; os sujeitos devem ser tratados respeitosamente e de modo a obter a sua cooperação na investigação; os sujeitos devem ser informados sobre os objetivos da investigação e o seu consentimento obtido; os investigadores não devem mentir aos sujeitos nem registar conversas ou imagens com gravadores escondidos; ao negociar a autorização o investigador deve ser claro e explícito com todos os intervenientes e deve respeitá-lo até à conclusão do estudo; ao escrever os resultados deve ser autêntico pois confecionar ou distorcer dados constitui o "pecado mortal" do cientista.

Critérios de qualidade

Para aferir da credibilidade de um estudo, os testes de qualidade propostos para pesquisas sociais empíricas, na qual se inserem os estudos de caso, são, de acordo com Yin (2005), os seguintes: validade do constructo, validade interna, validade externa e fiabilidade.

A *validade do constructo* ou validade conceptual diz respeito ao estabelecimento de medidas que mostrem que as decisões tomadas relativas à análise dos conceitos envolvidos são eficazes e adequadas. A forma de o mostrar depende de o investigador identificar e fundamentar, através de diferentes fontes, os conceitos envolvidos estabelecendo critérios de análise desses conceitos que mostrem ser adequados ao conceito em questão (Yin, 2005; Ponte, 2006). Isto é, por exemplo, no que diz respeito à análise do raciocínio matemático dos alunos durante a atividade matemática tem de existir uma fundamentação teórica sobre o raciocínio cujos critérios de análise têm de estar em concordância com essa fundamentação. É também importante estabelecer um encadeamento de evidências e discutir os rascunhos do relatório com outra pessoa (Yin, 2005). Nesta investigação a discussão do relatório será feita com o orientador de mestrado.

A existência de *validade interna* está relacionada com o facto de a realidade apresentada estar de acordo com a própria realidade existente (Ponte, 2006), ou seja, tem a ver com a preocupação do grau de subjetividade que os dados podem conter.

Como refere Bogdan e Biklen (1994) o investigador qualitativo não é ingénuo, pois tem consciência de que os dados recolhidos têm a influência do observador, logo têm uma carga subjectiva. No entanto, a partir da componente reflexiva do investigador é possível diminuir essa carga subjectiva se as asserções do investigador forem sendo comparadas com os dados e modificadas caso não coincidam com as suas. Esse risco de subjetividade pode ser diminuído através de alguns cuidados: prolongar o tempo de recolha de dados no ambiente natural do estudo recolhendo uma quantidade considerável de dados; diminuir o teor interpretativo do investigador através do confronto deste com essas interpretações de cada vez que revê o aglomerado de dados; o investigador tenta descrever as várias dimensões da situação em estudo pois sabe que ela é complexa (Bogdan & Biklen, 1994). A estratégia de gravar em audio e video permitiu: completar a informação recolhida por observação direta no campo; diminuir o teor subjetivo da interpretação dos dados pelos aspetos, já referidos, de as gravações proporcionarem a revisão da ação sempre que se quiser e no papel de observador externo; saber quando e como a sua participação influenciou as acções dos alunos para depois interpretar as acções dos participantes tendo essa influência em linha de conta.

A existência de *validade externa* relaciona-se com a possibilidade de generalização, ou seja, ser possível aplicar as conclusões a outros locais e sujeitos diferentes (Bogdan & Biklen, 1994). Como afirma Stake (2009), há generalizações nos estudos de caso de dimensão micro mas também pode acontecer do estudo de caso modificar generalizações macro. No entanto, como explica McMillan e Schumacher (1997), estas generalizações não são generalizações estatísticas, referindo-se antes à possibilidade da extensão das descobertas. Refere ser possível melhorar essas possibilidades através da descrição detalhada dos diferentes componentes do estudo: adequada descrição no estudo; o papel do investigador; a seleção dos participantes; o contexto social; as estratégias de recolha de dados; as estratégias de análise de dados; narrativas autênticas; descrição do que diferencia o objeto de estudo; os conceitos-chave do estudo; explicações alternativas; e outros critérios acrescentados após o estudo concluído.

A *fiabilidade* do estudo está associada, segundo Yin (2005), à ideia de que se um outro investigador seguisse os mesmos procedimentos e realizasse um mesmo estudo de caso chegaria às mesmas conclusões. Bogdan e Biklen (1994) discordam da posição de que se o estudo fosse replicado devia ser possível chegar às mesmas conclusões, pois a posição do investigador e a sua formação influenciam de certa forma os resultados. A melhor forma de tornar o estudo confiável é, segundo Yin (2005), conduzir a pesquisa como se pudesse haver uma auditoria a qualquer momento. Uma forma de o conseguir é detalhar todo o processo da forma mais completa possível sendo a lista de McMillan e Schumacher (1997), apresentada acima, um possível guião.

A secção seguinte descreve os processos de recolha de dados neste estudo sendo os dados "os materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar" (Bogdan & Biklen, 1994, p.149).

4.2 Recolha de dados

A investigadora recolheu dados ao longo de um ano letivo por considerar necessário um tempo prolongado para observar o desenvolvimento do raciocínio matemático e ser esse o maior intervalo de tempo de que dispunha com a turma.

O processo de recolha de dados teve início na primeira aula em que conheceu os alunos. Logo nessa aula foi possível recolher dados que são impressionistas por serem recolhidos informalmente à medida que se começava a familiarizar com o caso (Stake, 2009). Muitos destes dados impressionistas ficam registados na memória do investigador e vão, paulatinamente, formando a imagem que o investigador tem do sujeito, outros são registadas por escrito. Os instrumentos de recolha de dados foram variados desde a observação aos registos escritos em forma de notas da professora, aos registos escritos dos alunos, ao questionário, à entrevista semiestruturada e às gravações áudio/vídeo das aulas em que os alunos fizeram investigações matemáticas.

Observação participante

Ora, como referem Bogdan e Biklen (1994), o investigador para interpretar a realidade necessita interagir com os alunos, pelo que o método da observação participante é, nesta situação, o mais indicado. Para Yin (2005) a observação participante promove duas oportunidades importantes: facilita o acesso ao campo de estudo pelo facto de haver maior proximidade com os sujeitos investigados e permite perceber o estudo por dentro.

A observação foi realizada durante as aulas e, também, em situações informais durante as visitas de estudo ou no recinto escolar. Resumindo, sempre que a professora estava com os alunos recolhia informações sobre os alunos e sobre as interacções entre eles. O foco de observação nas aulas variava: houve aulas em que a observação incidiu sobre aspetos psicológicos dos alunos e outras em que o foco foi a forma como os alunos, individualmente ou em grupo, realizavam atividades matemáticas.

Foram gravadas em formato vídeo as aulas em que os alunos realizaram investigações matemáticas por uma câmara de filmar fixa. Esta gravava toda a sala e a sua importância resumia-se ao facto de gravar os momentos de aula de discussão com toda a turma. Efetuaram-se gravações áudio das entrevistas e dos trabalhos de cada grupo de alunos durante a realização de atividades de investigação. Todas as gravações foram transcritas para formato de texto.

Notas de campo

As *notas de campo* são de acordo com Bogdan e Biklen (1994)

> o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo. (p. 150)

Acrescenta que estas devem ser detalhadas e descritivas e que não devem basear-se nas suposições acerca do meio (Bogdan & Biklen, 1994). Um investigador qualitativo experiente descreve as suas observações com detalhe e distingue nesse texto as suas reflexões por ser a parte do texto em que faz inferências e ou comentários. As notas reflexivas permitem ao investigador dar conta do efeito do observador podendo assim controlar esse efeito. As notas de campo da investigadora deste estudo, ainda amadora, foram descritivas mas não detalhadas e contêm partes reflexivas. As descrições diziam respeito, por exemplo, aos procedimentos utilizados, às reações dos alunos, a comentários seus e a interpretações suas daquela altura, que mais tarde se modificaram. Estas notas eram escritas após a observação e em processador de texto.

O questionário

Foi aplicado, no final do primeiro período, um questionário aos alunos da turma com vários intuitos: o de saber quais as perceções dos alunos face às metodologias usadas na aula de matemática; o de proporcionar a reflexão em torno de certas questões, tornando-as aos olhos dos alunos mais explícitas; o de medir o desfasamento entre as perceções da professora e as deles, isto é, se a intencionalidade do trabalho que estava a ser desenvolvido na sala de aula estava a ser efetiva ou não.

As perguntas do questionário foram planificadas de acordo com a identificação das características a investigar e a sua formulação teve em conta os objetivos gerais das perguntas e o tipo de perguntas mais adequado (Hill & Hill, 2002). O questionário contém perguntas fechadas e abertas para permitir obter informação quantitativa e ao mesmo tempo qualitativa que permitam interpretar as respostas dos alunos. As perguntas deste questionário foram formuladas como neutras por serem as mais adequadas para medir opiniões, atitudes ou satisfações, como referem Hill e Hill (2002). Optou-se por uma escala nominal, igual para todo o questionário, e mutuamente exclusiva com quatro categorias: Concordo totalmente, Concordo, Discordo e Discordo totalmente. O questionário foi validado por dois professores da Universidade do Minho e encontra-se no anexo 3.

Produções dos alunos

As produções dos alunos consistiam nos registos escritos que os mesmos efetuavam em diferentes situações: os registos feitos durante a atividade matemática, os relatórios escritos efetuados individualmente após a realização de uma tarefa, as respostas ao questionário aplicado, ou o registo de uma opinião como foi o caso da redação pedida pela professora sobre "Como é para ti uma aula de matemática".

Estas produções juntamente com as observações e transcrições das gravações permitiram reconstituir e interpretar os dados.

Entrevistas

Neste estudo a entrevista foi usada conjuntamente com os outros instrumentos de recolha de dados e foi realizada informalmente, pois os alunos e a professora eram já "próximos" na altura em que estas foram realizadas –final do ano letivo. Segundo Bogdan e Biklen(1994) as entrevistas podem variar quanto ao grau de estruturação. Neste estudo usou-se o tipo de entrevista semiestruturada realizada como uma conversa fluida com questões pensadas e registadas num guião que o investigador usou para conseguir obter as informações pretendidas. Contudo Bogdan e Biklen(1994) apontam o facto de este tipo de entrevista permitir obter dados comparáveis mas não dar oportunidade a perceber como é que os entrevistados estruturam os tópicos que estão a ser discutidos.

Foram realizadas e gravadas em formato audio entrevistas a quatro alunos da turma. O guião de entrevista (anexo 7) foi útil, pois quando a conversa se desviava muito dos tópicos da investigação o guião ajudou a re-orientar a conversa de forma natural. Os alunos mostraram-se contentes por serem entrevistados, mas no início estavam um pouco nervosos com a situação. No entanto, com o decurso da conversa esqueceram os constrangimentos.

As questões da entrevista abrangiam sobre vários aspetos. Quanto à atividade matemática, as questões diziam respeito a como se sentiam quando realizavam as investigações, como descreviam esse tipo de atividades, se achavam ser vantajoso trabalhar dessa forma, e se tinham noção das diferenças entre atividade de investigação/exercícios/problemas. No que concerne aos processos de raciocínio as questões colocaram-se sobre o que era uma conjetura e como é que uma conjetura se tornava uma lei geral. Quanto à aula de matemática as questões centraram-se em pedir que descrevessem os aspetos que diferenciavam as aulas de matemática actuais comparativamente às dos outros anos e o que pensavam sobre trabalhar em grupo. Havia também no guião, uma questão sobre quais os aspetos em que consideravam ter progredido e outra sobre como se sentiram ao fazer parte do estudo.

4.3 Análise de dados

A reconstituição de como foi feita a análise dos dados ao longo do estudo apoiou-se no diário da investigadora e na comparação das diferentes versões de documentos de análise produzidos e alterados posteriormente.

O diário começou a ser redigido a 6 de Agosto de 2010 altura em que o ano letivo tinha terminado assim como a azáfama dos trabalhos de escola. A investigadora registou nesse diário os seus pensamentos e asserções acerca da investigação tornando possível fazer algum controlo sobre o próprio investigador e sobre a investigação a partir da data referida no que se refere ao nível da fundamentação teórica procurada, da metodologia e da análise dos dados do estudo.

Com base nesses registos compreende-se que o estudo teve dois níveis de análise: um a mais curto prazo, mais superficial, para planificar as acções consecutivas do estudo; e um outro nível de análise a médio e longo prazo, mais aprofundado.

Os primeiros dados a serem analisados, logo no primeiro período, foram os dados sobre a conceção que os alunos tinham da aula de matemática e as manifestações por palavras ou atos que permitiam interpretar o ambiente natural da aula. Estes dados foram recolhidos por observação e pelo questionário realizado no início do ano sobre a opinião dos alunos acerca da disciplina de matemática e da aula de matemática. As interpretações dos dados foram sendo feitas, mas não foram consideradas incontestáveis pela investigadora. Ao longo do estudo foram confirmadas umas e refutadas outras interpretações a partir de novos dados recolhidos no decurso do ano.

A análise dos dados recolhidos na realização das três investigações matemáticas foi mais morosa pois foi preciso, primeiro, transcrever todos os diálogos dos grupos de trabalho e das discussões com toda a turma.

Através da revisão de literatura sobre raciocínio matemático a investigadora estabelecera como categoria de análise o processo de conjeturar subdividido em formulação e teste de conjeturas. Após a realização de cada tarefa de investigação a investigadora ouvia e via as gravações, áudio e vídeo, de forma superficial, procurava fundamentos teóricos para as interpretar e planificava as ações seguintes do estudo tendo em conta a fundamentação teórica das variáveis introduzidas pela análise. Este processo de análise, que designou de superficial, decorreu ao longo de todo o processo de recolha de dados: o ano letivo 2009/10. A figura 3 esquematiza esse processo de análise superficial que ocorreu durante a fase de recolha de dados.

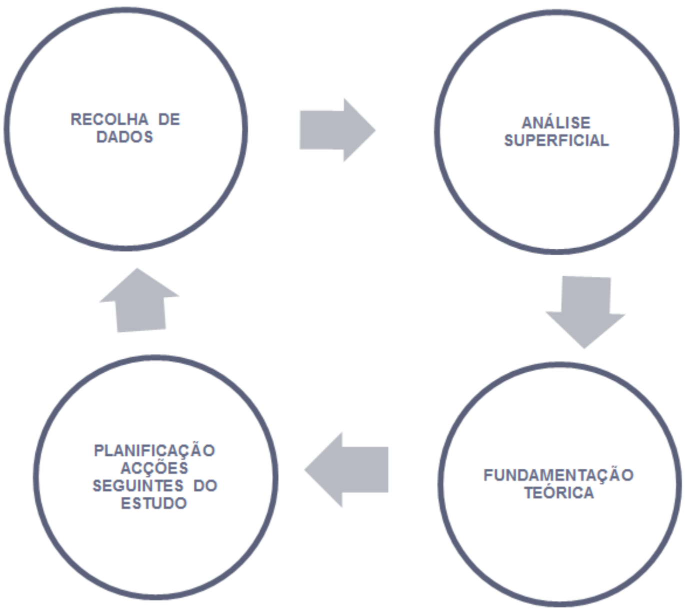


Figura 3 – Ciclo básico de análise dos dados (curto-prazo)

A etapa de planificação das ações seguintes do estudo contava com dois tipos de planificação: processos de raciocínio e tema matemático. O estudo pretendia desenvolver o raciocínio matemático, mas as tarefas continham dois níveis de planificação respeitantes ao processo de raciocínio e ao tema que estava a ser lecionado naquele momento. Assim, era também necessário aprofundar quais as dificuldades principais inerentes ao tema matemático em questão. A experiência de ensino-aprendizagem da professora foi aqui fundamental.

Ao mesmo tempo que decorria o processo de análise superficial de dados também decorria a análise mais aprofundada da primeira aula da primeira tarefa em Janeiro de 2010. Essa análise alongou-se até quase ao final do estudo por envolver a compreensão do processo de conjeturar dos alunos nos diferentes grupos de trabalho. Os alunos seguiram caminhos imprevistos e bloquearam também de formas imprevistas. A continuação desta aula deu-se um mês depois, em Fevereiro, o que permitiu à professora procurar fundamentos teóricos para tentar perceber o processo de conjetura mais profundamente. Conseguiu assim, encontrar vias para orientar os alunos na continuação da investigação respeitando o trabalho que tinha sido efetuado até ao momento. No tempo que decorreu até à planificação da tarefa seguinte a investigadora transcreveu a primeira aula da primeira tarefa e fez a primeira versão de interpretação dos dados segundo as categorias definidas. As versões de análise dessa primeira aula foram muitas, sendo a primeira versão uma descrição cronológica do trabalho desenvolvido pelos alunos grupo a grupo. Partindo deste primeiro documento procurou, no trabalho de cada grupo, separar a fase inicial, antes de iniciarem a investigação, da fase de investigação propriamente dita. A fase de investigação focou-se no processo de conjeturar tentando perceber como os diferentes grupos estabeleciam conjeturas, como as registavam, como as refutavam e de que forma avançavam na descoberta depois de refutarem uma conjetura. Depois de perceber como cada grupo lidava com este processo iniciou-se o processo de comparação entre os diferentes grupos e para isso tabelou as diferentes conjeturas formuladas e os contraexemplos que as refutaram. Dessa comparação, começaram a surgir alguns padrões e também algumas diferenças subtis cujo significado era, ainda, desconhecido da investigadora. Para conseguir aprofundar a análise surgiu a necessidade de romper com a lógica cronológica e com a sequencialidade dos trabalhos em cada grupo agrupando os raciocínios por tipo de conjeturas formuladas: primeiro as conjeturas que só se verificavam em dois ou três casos pelo que eram refutadas e depois aquela conjeturas em que o domínio de validação era vasto mas que não se verificavam para todos os casos. No entanto, a análise realizada através desta comparação pareceu à investigadora insuficiente, pois continuava sem conseguir analisar os recuos e avanços que os alunos faziam na aceitação e refutação da conjetura entremeados com outras conjeturas. Só mais tarde, e através de uma leitura mais atenta da descrição do estudo de caso de Lakatos (1999), é que a investigadora compreendeu que o que estava implícito era o processo de reformulação da conjetura barrando as exceções que surgiam. Este processo aplicado ao raciocínio dos alunos e aos caminhos que seguiram foi bastante complexo. A investigadora teve de reconstituir essa reformulação da conjetura colocando-se no papel dos alunos, limitada ao caminho que cada grupo seguiu, para conseguir perceber o processo de raciocínio que ocorreu e como se podia a partir do trabalho deles reformular as conjeturas. Essa interpretação do trabalho dos grupos, teve em linha de conta as características dos alunos para perceber o que diziam e interpretar as suas acções e interacções com os colegas. O uso de esquemas foi importante para ajudar a organizar o processo de reformulação da conjetura de cada grupo permitindo identificar as diferenças existentes de grupo para grupo. Encontrava-se neste ponto de análise quando se deparou com os padrões de raciocínio matemático sintetizados em Reid e Knipping (2010). Este encontro permitiu que a investigadora se sentisse mais segura validando internamente a análise que tinha efetuado. A investigadora tem no entanto consciência da mais-valia de compreensão do processo que efetuou para chegar a essa descoberta. A análise da tarefa foi, então, revista de acordo com esses padrões de raciocínio. Ao longo desta análise, cada vez mais aprofundada, as categorias de análise do processo de conjeturar foram sendo reformuladas de acordo com as descobertas que fazia.

Ultrapassado o obstáculo de interpretação do processo de conjeturar da primeira tarefa a análise desse processo nas outras duas tarefas foi mais fácil até porque a análise da primeira tarefa tinha permitido aprofundar a compreensão do processo de conjeturar. No entanto as razões dessa maior facilidade não residiram apenas nesse facto, mas, também, por os alunos nas tarefas seguintes terem um maior apoio para raciocinar pois ambas permitiam, ao contrário da primeira tarefa, usar esquemas representativos dos objetos matemáticos. A complexidade de análise passou a dizer respeito ao processo, também complexo, de *justificação e prova*.

A análise da primeira tarefa no que dizia respeito ao processo de provar foi realizada com base nos critérios estabelecidos pelo trabalho que havia desenvolvido até ao momento: a necessidade de questionamento e os níveis de prova de Balacheff (1987). Essa análise superficial levantou a seguinte questão: porque é que não foi possível provar apesar das tentativas da professora em fazê-lo com toda a turma? A procura da resposta a esta questão levou a nova revisão de literatura verificando a investigadora não ter ainda suficiente fundamentação teórica sobre o assunto. A revisão de literatura alertou a investigadora para a importância de promover nos alunos a necessidade de provar e também para o facto de a prova ser facilitada quando a justificação da conjetura emerge durante o processo de conjeturar.

Quando planificou a segunda tarefa, em Abril de 2010, estas questões da prova tinham já sofrido uma revisão teórica, durante a análise superficial. Assim a planificação da segunda tarefa foi feita visando o desenvolvimento da prova. Depois a análise superficial da segunda tarefa revelou uma discrepância entre as tentativas de prova após uma exploração essencialmente indutiva e o processo de prova sem recurso à indução. Depois da aplicação da segunda tarefa e análise superficial da mesma a professora temeu que os alunos, fruto das experiências vividas, pudessem ficar com a ideia de que não se prova quando se explora indutivamente. Assim, a planificação da terceira tarefa pretendia dar oportunidade aos alunos de perceber como provar no caso de uma investigação realizada pelo processo indutivo. Era, então, preciso uma tarefa em que os alunos conjeturassem pela particularização e fosse possível construir uma prova matemática com a função de compreender revendo todo processo de conjetura. Aplicou a terceira tarefa em Maio de 2010. Para analisar as duas últimas tarefas de forma mais aprofundada foi necessário estabelecer novas categorias de análise do processo de prova o que foi conseguido após este processo de análise referido. Assim, as categorias existentes foram reformuladas e foi acrescentado a categoria *construção da prova com toda a turma*.

Com as categorias assim definidas as três tarefas foram reanalisadas de acordo com os mesmos de forma mais aprofundada.

Categorias de análise do raciocínio matemático

Em cada uma das etapas do raciocínio matemático as categorias finais de análise do raciocínio foram, então, as seguintes:

I. Da conjetura à generalização:

i) Processo de conjeturar

Forma como os alunos formulam uma conjetura, como a testam e como a reformulam de acordo com os testes realizados e com os contraexemplos que surgem e generalizam

ii) Nível de aceitação da generalização

Forma como os alunos aceitam a conjetura como válida de acordo com o nível de prova de Balacheff (1987).

iii) Natureza dos raciocínios usados/ Padrões de raciocínio

II. Da justificação à prova:

(i) Questionamento

(ii) Construção da prova com toda a turma

Outra categoria transversal a todas estas é o conhecimento matemático dos alunos, por estar sempre envolvido e condicionar os raciocínios realizados Este processo de análise foi aplicado a toda a turma organizada em grupos de trabalho cuja constituição variou.

Para confirmar alguns dos resultados do estudo a professora, no final do estudo entrevistou quatro alunos para obter mais informação. Os alunos entrevistados foram a Isa, a Liliana, a Maria e o Miguel. Deste modo, estas entrevistas complementaram o estudo com alguma informação sobre a perceção dos alunos acerca desta experiência. O ideal teria sido entrevistar todos, mas esse procedimento envolvia muito tempo.

Dessa análise sobressaíram alguns alunos pelas suas manifestações peculiares durante o estudo relativamente aos seguintes critérios:

(i) tipo de reacção à ênfase no raciocínio;

(ii) efeitos dessa ênfase na sua aprendizagem;

(iii) efeitos desse ênfase na sua motivação

Seleccionaram-se, então, quatro alunos para constituirem subcasos pelas diferentes manifestações nos critérios acabados de referir. Depois foi feita uma análise mais aprofundada e individualizada do percurso de cada um dos casos de acordo com as categorias de análise do estudo.

4.4 O percurso do estudo

A professora havia sido colocada, pela primeira vez, naquela escola no concurso de professores de 2009. Em Julho de 2009, em reunião de secção, fez-se uma previsão da distribuição de serviço para o ano letivo 2009/10 em que a professora teria turmas do ensino secundário. A escola era básica e secundária, mas de ensino básico tinha, nesse ano, apenas três turmas de 9.º ano. Explicou aos colegas a necessidade de levar avante o seu projeto de investigação numa turma de 3.º ciclo, mas nada se alterou. Preocupada, dirigiu-se à direção e explicou as suas necessidades e motivos. Receberam bem a ideia e orientaram-na para fazer um requerimento por escrito ao diretor, afirmando que este considerava importante que os professores progredissem na sua formação. De facto, o pedido foi atendido e foi atribuída à professora uma turma de 9.º ano.

O contexto de ensino e a escola

Logo na primeira reunião da secção de Matemática os professores foram informados do facto de a escola ter obtido aprovação do seu projeto no âmbito do Plano de Ação da Matemática, elaborado para o triénio de 2009/2012, promovido pelo Ministério Educação e pela Direção Regional Educação do Norte no concurso acionado pela Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Nesse projeto definiram estratégias de intervenção entre as quais constava que a área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado no 9.º ano seria atribuída à disciplina de Matemática sendo lecionada pelo respetivo professor de Matemática em conjunto com outro professor de Matemática ou professor de uma área afim ou professor de Língua Portuguesa para "…promover atividades diferenciadas, desenvolver competências e aplicar conteúdos" (Secção, 2009). Cada um das três turmas de 9.º ano foi atribuída a um professor diferente de Matemática para que a equipa de trabalho fosse mais diversificada e decidiu-se formar três pares diferentes de professores de Matemática a lecionar Estudo Acompanhado. Portanto o Estudo acompanhado foi atribuído ao respetivo professor de Matemática em conjunto com um dos outros três professores de Matemática de 9º ano.

O Plano de Matemática integrava escolas com o novo programa de Matemática e outras, como era o caso da escola em que ocorreu este estudo, com o programa anterior pelo facto desta escola não se ter candidatado à generalização do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Nas reuniões do Plano de Matemática discutia-se e trabalhava-se com o novo programa e as escolas que ainda não estavam com o novo programa aplicavam, se quisessem, as atividades sugeridas pela professora acompanhante. As três professoras com turma de 9.ºano frequentaram as reuniões do plano de Matemática e aplicaram as atividades sugeridas reunindo para refletir sobre a forma como as atividades decorriam.

No ano letivo em que decorreu a recolha de dados deste estudo, ano 2009/2010, as instalações da escola consistiam num bloco com os serviços principais e três blocos de salas de aula com 2 pisos separados por escadas. As turmas tinham aulas em diferentes salas de acordo com o seu horário e as salas estavam organizadas em filas de carteiras de dois. A escola iniciou durante esse ano letivo as obras de requalificação do seu parque escolar.

O acesso ao campo

Faltava o consentimento para recolher os dados, pelo que se fez um requerimento a pedir (anexo 1) à direção para realizar o estudo e logo que foi aceite informaram-se os alunos oralmente explicando-lhes as intenções e procedimentos. Entretanto, redigiu um pedido aos encarregados de educação (EE), no anexo 2, o qual foi entregue pela diretora de turma. Os alunos reagiram de forma normal, fazendo muitas perguntas, às quais a investigadora respondeu honestamente percebendo que estavam receosos com a possível exposição dos seus atos. Depois de lhes garantir o anonimato e a segurança da sua imagem, concordaram em participar no estudo. Os EE assinaram o pedido de consentimento, tendo tido, a partir desse momento, e sem grandes dificuldades, acesso ao campo do estudo. A confiança que os EE depositaram na realização do estudo deveu-se à confiança que têm na direção da escola vista como muito cuidadosa e responsável para com os seus alunos.

O estudo a desenvolver era sobre o raciocínio matemático, pelo que se iniciou, então, a procura de fundamentação teórica sobre o tema. A investigadora lia, desde o ano 2000, com entusiasmo a literatura publicada pela Associação de Professores de Matemática (APM) sobre investigações matemáticas, e já tinha implementado tarefas do tipo exploratório. Sabia, no entanto, que a implementação de tarefas do tipo investigativo necessitava de um ambiente de aprendizagem adequado, aspeto essencial para captar o raciocínio matemático dos alunos.

A preparação da investigação

A preparação da investigação foi feita durante o primeiro período e a investigação propriamente dita iniciou-se no início do primeiro período.

Para captar os raciocínios dos alunos a investigadora necessitou de compreender as normas sociomatemáticas da sala de aula a que os alunos estavam habituados.

As normas sociomatemáticas são, segundo Yackel e Cobb (1998), as normas sociais da aula de matemática. Essas normas definem o que é matematicamente aceite na aula de matemática e são estabelecidas pelos participantes da aula. Assim, durante o primeiro período a investigadora recolheu e interpretou os dados que pudessem ser inibidores da captação do raciocínio matemático ou do desenvolvimento desse mesmo raciocínio. Concluiu que a atividade matemática dos alunos era realizada, sobretudo, em trabalho individual e que a comunicação matemática não era privilegiada no desenvolvimento dessa mesma atividade

Logo na primeira aula, os alunos escreveram o que era para eles uma aula de matemática. Essa descrição pode ser sintetizada da seguinte forma: o professor explicava os conteúdos e eles aplicavam-nos através de exercícios. A investigadora recolheu outros dados relativos à forma como os alunos resolviam e discutiam a resolução de tarefas fechadas. Essas tarefas foram efetuadas em grupo, e foi exigido aos alunos a justificação dos seus raciocínios. Desta análise foi possível compreender que os alunos se desinteressavam da atividade quando chegavam à solução, revelando sobrevalorizarem a solução em detrimento do processo de justificação do raciocínio seguido.

Da análise dos dados referidos a investigadora pôde, ainda, concluir, haver alunos na turma que constituíam uma autoridade na turma e que quando estavam presentes num grupo os colegas seguiam os seus pareceres sem se questionarem.

A investigadora teve em linha de conta ao longo do estudo três aspetos que considerou fundamentais: negociar normas de trabalho individual e coletivo; otimizar a capacidade de trabalho de cada aluno através da gestão da constituição dos grupos de trabalho; proporcionar na aula de matemática atividades abertas de forma a promover a discussão dos raciocínios.

No que diz respeito às normas de trabalho a professora estabeleceu com os alunos novas formas de trabalho que foram resumidas num guião de métodos de trabalho na aula (anexo 4) e entregues a cada aluno com o compromisso de serem aplicadas a partir do início do segundo período. Relativamente à gestão dos grupos de trabalho a constituição dos mesmos foi decidida na planificação de cada uma das tarefas.

No último dia de aulas do primeiro período a investigadora aplicou o questionário (já referido na subsecção recolha de dados da metodologia) aos alunos e quando se iniciou o segundo período discutiu os resultados do questionário com a turma.

Quanto às atividades a investigadora optou por implementar tarefas de investigação.

As tarefas de investigação

A turma alvo não estava a trabalhar com o novo programa de matemática, pelo que a lógica de ensino continuava a ser centrada nos conteúdos. Romper com essa lógica comportava um risco muito grande, pelo que a opção consistiu em implementar tarefas de investigação, dentro dos temas que estavam a ser estudados, planificadas de acordo com dois objetivos principais: desenvolver a compreensão e a conexão de conhecimentos fundamentais para o tema que estava a ser trabalhado e de acordo com os diagnósticos realizados pela professora; e permitirem desenvolver os processos de raciocínio matemático de acordo com o fio condutor da investigação.

Uma tarefa de investigação é caracterizada, segundo Ponte (2005), pelo elevado grau de desafio e por ter uma estrutura aberta. O autor alerta para o nível de desafio depender do nível de conhecimentos que o aluno possui para desenvolver a tarefa, e também de outros fatores como, por exemplo, a forma de apresentação da tarefa por parte do professor e como ela é apreendida pelos alunos. A investigação de Stein e Smith (1998) mostra como tarefas de nível cognitivo elevado podem baixar esse mesmo nível na passagem da fase de apresentação para a fase de implementação.

A investigadora optou por aplicar as tarefas em diferentes áreas temáticas proporcionando, assim, uma ação mais prolongada no tempo. Esta opção condicionou que as tarefas fossem independentes em vez de serem partes constituintes de uma sequência de aprendizagem.

As tarefas de investigação foram implementadas na sala de aula seguindo a seguinte estrutura: apresentação da tarefa, concretização do trabalho em pequeno grupo com orientação do professor e momentos de discussão com toda a turma.

Assim, no segundo e terceiros períodos os alunos realizaram três atividades de investigação que envolveram um número infinito de casos. A primeira é uma tarefa de investigação que consta do caderno de propostas de trabalho sobre números da publicação *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* da Associação de Professores de Matemática (APM) e as outras duas tarefas foram planificadas propositadamente para este estudo.

Na Tabela 3 sumariam-se as principais características das tarefas implementadas. Os critérios de seleção da primeira tarefa de investigação foram a integração na temática do número, permitindo desenvolver o sentido do número e proporcionar, formular e generalizar conjeturas.

Tabela 3 – Características das tarefas de investigação planificadas

	Tarefas de investigação		
Características	**Tarefa 1**	**Tarefa 2**	**Tarefa 3**
Nome	À procura de dízimas finitas	A área de um retângulo especial	Polígonos convexos e os seus ângulos
Tema	Números e cálculo	Álgebra	Geometria
Unidade	“Números reais. Inequações”	Equações de 2º grau	Circunferência e polígonos. Rotações.
Objetivos de conteúdo	Compreender as frações decimais	Compreender o caso notável diferença de quadrados	Compreender como calcular a soma da amplitude dos ângulos internos de qualquer polígono convexo
Processos de raciocínio	Reconhecer padrões Conjeturar Generalizar	Reconhecer padrões Conjeturar Generalizar Construção de prova	Reconhecer padrões Conjeturar Generalizar Construção de prova
Apoio	Máquina de calcular	Esquema	Propriedade dos ângulos internos de um triângulo

A segunda tarefa de investigação foi planificada com a preocupação de promover a necessidade de justificar e de provar matematicamente dentro do tema que estava a ser lecionado “Equações de 2º grau”. Assim, a professora planificou uma sequência de aprendizagem sobre os casos notáveis, com conexão da geometria, composta por quatro tarefas em que apenas uma delas era de investigação (anexo 6). Os alunos revelavam total ou quase total incompreensão no desenvolvimento dos casos notáveis. Para eles os casos notáveis não faziam sentido, e tratavam-nos como um caso de multiplicação como todos os outros. Afirmavam não haver necessidade em sabê-los e mostravam desinteresse em aplicá-los ou em compreendê-los. Assim, as tentativas de explicação algébrica das regras apenas despoletavam um pouco de interesse nos melhores alunos. Por essa razão quando se lecionou a unidade “Equações de 2º grau” a professora resolveu investir na compreensão dos casos notáveis via geométrica. Decidiu, também, aproveitar para criar tarefas que envolvessem sequências por duas razões: colmatar as dificuldades diagnosticadas na perceção de regularidades e contribuir para o desenvolvimento das capacidades de generalização. Criou-se, então, duas tarefas com uso de sequências para o caso notável quadrado do binómio: uma para $(a+b)^2$ e outra para $(a-b)^2$. Para o caso notável diferença de quadrados elaborou-se uma tarefa de investigação sem indicação de ser um caso notável. Esta tarefa pedia, de forma explícita, para provar confrontando os alunos com a situação de prova. Em contraste com a tarefa anterior e, também, por se ter trabalhado a perceção de regularidades e as suas expressões gerais, alguns alunos provaram sem recorrer à particularização. Esta tarefa foi muito importante para lhes dar o significado de prova e lhes mostrar que nem sempre é necessário particularizar.

Após a aplicação desta tarefa em que foi possível provar através de uma relação algébrica, neste caso uma igualdade, deu ideia aos alunos de que por usarem expressões algébricas provavam. Era preciso, então, resolver a questão levantada na primeira tarefa: no caso de se seguir um percurso indutivo como provar para todos os casos?

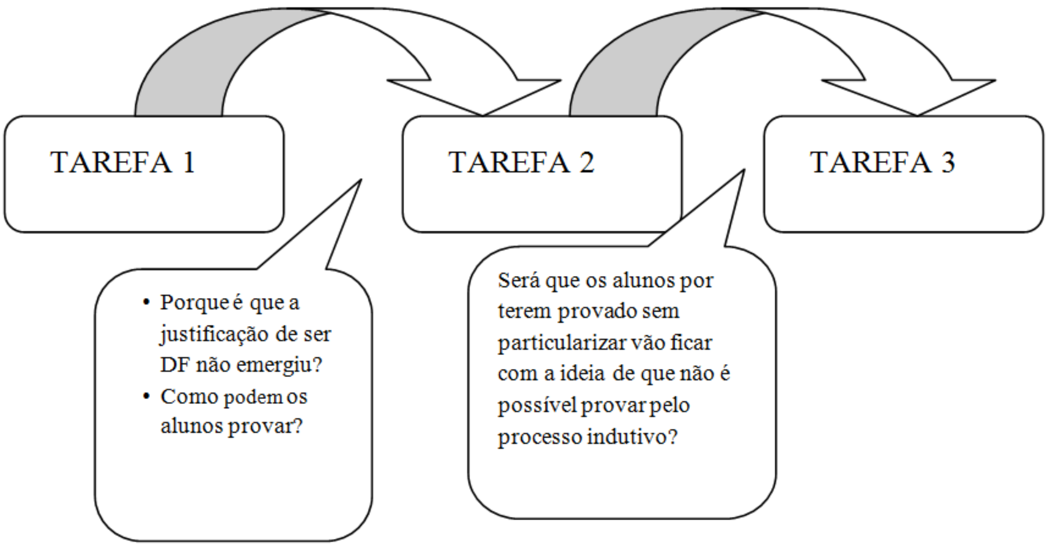


Figura 4 – Questões emergentes que interferiram na planificação da tarefa seguinte

A planificação da terceira tarefa teve, então, esse propósito de voltar a colocar o problema de provar para todos os casos quando seguem um processo indutivo. A aplicação da terceira tarefa teve alguns constrangimentos devido a os alunos apenas terem aula de matemática nesse dia e depois de uma visita de estudo. Estavam barulhentos e chegaram tarde, pelo que o tempo de aula foi mais reduzido, cerca de 40 minutos. A discussão foi realizada a 3 de Maio.

Na figura 4 sintetizam-se as principais questões que surgiram na análise de cada uma das tarefas e que foram importantes na planificação da tarefa seguinte.

Na próxima seção serão apresentados e discutidos os resultados do estudo.

5. Apresentação e discussão dos resultados do caso turma

Esta seção divide-se em duas partes: *A turma* e as *As tarefas propostas*. Na subsecção *A turma,* apresenta-se o contexto educativo em que a turma estava inserida e a aula de Matemática. Na subsecção *As tarefas propostas* apresentam-se e discutem-se os resultados relativos à atividade matemática dos alunos na realização de três tarefas de investigação centrada nas categorias de análise do raciocínio. Finalmente a terceira subsecção *Síntese global e subcasos* sintetiza os resultados do estudo complementando-os com os subcasos de quatro alunos selecionados de acordo com os critérios já explicados na subsecção *Opções metodológicas* da seção da *Metodologia*.

5.1 Caraterização do caso turma

As turmas de 9.º ano tinham, por semana, duas aulas de 90 minutos cada e uma aula de 90 minutos de Estudo acompanhado.

Apesar das obras, o ambiente escolar era tranquilo e organizado e os alunos abrangidos por esta investigação orgulhavam-se disso. Comentavam o choque sentido quando ingressaram nesta escola, no 7.º ano, e como eram chamados a atenção sempre que não tratavam com respeito qualquer elemento daquela comunidade educativa. Reinava o bom ambiente entre funcionários, alunos e professores. A manifestação de preocupação com os alunos e a tentativa de os responsabilizar era muito frequente tanto por parte dos funcionários como por parte dos professores.

A turma de 9.º ano atribuída à professora investigadora era composta por 19 alunos em que, apenas, 4 alunos eram rapazes. Estes alunos estavam juntos desde o sétimo ano, com exceção das alunas Gabriela, Joana e Isabel que entraram para a turma no oitavo ano. Ao longo do ciclo alguns elementos mais problemáticos saíram da turma. No conselho de turma havia professores que os vinham a acompanhar desde o 7ºano. A diretora de turma de 7º ano orgulhava-se do trabalho feito deixando claro que tinham dado muito trabalho mas que o resultado tinha valido a pena.

O documento do projeto referente ao Plano de Ação da Matemática (Seção, 2009) revela a existência de progressão nos resultados destes alunos do 7.º ano para o 8º ano: 32% de níveis 2 baixaram para 5% e 40% de níveis 3 aumentaram para 67% mantendo-se em 28% os níveis superiores a 3.

Ainda nesse documento caracteriza-se a área geográfica de proveniência destes alunos como uma área de acentuadas dificuldades económicas e em que existe um acentuado atraso nos índices de escolarização da sua população. Na maioria das famílias o índice de escolarização dos filhos é superior ao dos seus progenitores.

Dos 19 alunos desta turma dois alunos tiveram retenções no seu percurso escolar: o Miguel com uma retenção no 4.ºano e a Joana no 1.º e no 7.ºanos. A Joana estava fora da escolaridade obrigatória, com 16 anos. A média de idades dos alunos é de 14 anos.

Relativamente ao nível socioeconómico doze destes alunos tinham escalão A ou B o que revela a existência de dificuldades económicas. A maioria dos progenitores trabalhava por conta de outrem e metade deles tinham completado o 1.º ou o 2.º ciclo enquanto os restantes tinham completado o 3º ciclo com exceção de uma mãe que tinha completado o 12º ano. A maioria dos alunos afirmou não ter ajuda dos seus progenitores no estudo e recorrer habitualmente aos irmãos ou a outros familiares.

Quanto à disciplina de Matemática apenas três alunos a apontaram como disciplina favorita. No entanto, todos consideraram que a disciplina de Matemática é importante e apenas o António afirmou não gostar de matemática. Quatro alunos referiram gostarem mais ou menos: Isa, Francisca, Isabel e Joana. Esta turma teve professores de Matemática diferentes em cada um dos anos ao longo do 3º ciclo. A primeira aula em que a professora investigadora contactou com estes alunos ficou impressionada com o seu bom comportamento e sobretudo, pela forma afetuosa como falavam dos seus professores. Em conversa sobre aspetos das aulas de Matemática, a aluna Maria manifestou agrado pelas aulas de Matemática e encarou a questão como uma crítica à sua professora do ano anterior. A professora investigadora explicou que quando se referia às aulas de Matemática estava a comentar aspetos gerais de qualquer aula para que compreendessem quais as mudanças que acompanhavam o novo programa e as implicações dessas mudanças na forma como decorre a aprendizagem nas aulas de matemática. Nessa primeira aula os alunos escreveram, a pedido da professora, o que era para eles uma aula de matemática. Desses registos sobressai o tipo de aula em que o professor explica, os alunos ouvem e depois fazem exercícios de aplicação.

Nas aulas com a turma vivia-se um ambiente em que o professor era o detentor da autoridade de conhecimento e entre os alunos era reconhecida autoridade à Maria e depois às suas colegas Rita e Beatriz.

A turma, em geral, sabia cumprir o papel do aluno numa aula centrada no professor: ouviam, pediam a palavra quando não percebiam, passavam tudo para o caderno organizadamente, realizavam as tarefas pedidas dentro dos requisitos enunciados.

De facto os alunos estavam habituados a trabalhar sobretudo individualmente num tipo de ensino em que ouviam a explicação do professor e faziam exercícios. Consequentemente a aprendizagem estava centrada na aplicação de procedimentos e a justificação de ideias matemáticas era algo com que não estavam familiarizados.

A turma era heterogénea relativamente aos resultados na disciplina de matemática, mas é possível dividi-la em grupos distintos. Um grupo de três alunas com bons resultados e gosto pela disciplina: a Maria, a Rita e a Beatriz. Nesse grupo a aluna Maria destacava-se como sendo a que obtinha melhores resultados. A Maria trabalhava com muita honestidade, não competia com os colegas e não revelava qualquer necessidade de protagonismo. Sabia cooperar com todos e resolvia os problemas na turma. A Beatriz era muito interessada e participativa. A sua forma de raciocinar intrigava a professora, pois era muito original nas abordagens que fazia na resolução dos problemas matemáticos. Dedicava-se muito aos estudos e tinha bons resultados.

Depois um segundo grupo de duas alunas, a Liliana e a Paula, eram alunas muito trabalhadoras e empenhadas. A Liliana era muito metódica e calma. Gostava de ter tempo para pensar e colocar as suas dúvidas. Com autoestima baixa não se considerava boa aluna e dizia não gostar das investigações. A Paula era uma aluna razoável que se esforçava muito e tinha dificuldade em fazer conexões entre as aprendizagens.

O Manuel e a Rosa eram alunos com bom desempenho mas pouco participativos. O Manuel era um aluno com uma forma de pensar e ser muito particular e com um enorme sentido de humor. Sempre que dizia uma graça fazia-o com o ar mais sério do mundo. A Rosa raciocinava bem, mas falava muito pouco. A professora só conseguia saber como ela raciocinava se fosse à beira dela ver o que estava a fazer.

Os restantes alunos apresentavam maiores dificuldades na disciplina de Matemática, mas as alunas com maiores dificuldades eram a Gabriela, a Joana, a Isabel e a Mariana. Estas alunas eram alheadas da aula de matemática e tinham muita dificuldade em pensar. A Joana era muito orgulhosa não se sentindo bem por ter dificuldades de aprendizagem. Ela afastava os professores que a queriam ajudar. A Gabriela tinha dificuldades ao nível do primeiro ciclo, mas como era preguiçosa era difícil ajudá-la. A Isabel era muito calada e também tinha muitas dificuldades a matemática. Quando a professora lhe explicava ficava com a sensação de que a aluna não se interessava por aprender. A Mariana era uma aluna com dificuldades, insegura e um pouco posta de lado pelas colegas.

A Isa era uma aluna com dificuldades, mas muito cumpridora, empenhada e responsável. Tinha consciência das suas dificuldades e tentava superá-las através de muita concentração na aula e da ajuda das suas colegas melhores alunas.

Os alunos Sofia, Antónia, Francisca, Miguel, Paulo e Daniela eram muito inseguros pelo que participavam pouco, nunca arriscando dizer asneira. A Sofia preferia esconder-se a assumir as suas dificuldades. Apoiava-se nos outros como forma de disfarçar e não resolvia as suas lacunas. A Antónia raciocinava bem na resolução de problemas que exigiam estratégias de cálculo, mas não se empenhava o suficiente. A Francisca era muito bem-humorada e quando não percebia resmungava. Esta aluna desde o primeiro período que tinha vindo a tornar-se cada vez mais participativa e dizia gostar muito das aulas de matemática. Tinha dificuldades, mas estava a trabalhar cada vez mais. O Miguel era excelente em cálculo mental e era fã do *jogo 24*. Este aluno revelou-se um bom estratega nos Jogos matemáticos tendo participado no Campeonato Nacional. No entanto, o Miguel não conseguia realizar alguns raciocínios abstratos mostrando-se muito preso ao concreto. O Miguel era muito afetivo e carente. O Paulo era um aluno que gostava de se exibir prejudicando por vezes o funcionamento da aula. Era preciso saber lidar com ele, chamando-o à responsabilidade. Tinha algumas dificuldades à disciplina e a sua desconcentração não ajudava. O Manuel, o Miguel e o Paulo eram grandes amigos. O António era um aluno muito distraído, muito comunicativo, desorganizado e simpático. Ele e os outros três rapazes da turma não se juntavam muito.

Logo nas primeiras atividades realizadas com a turma a professora observou que os alunos que participavam eram sempre os mesmos e que esses alunos representavam na turma uma certa autoridade matemática incontestada. Aos poucos a professora foi tomando consciência desse facto e foi-se apercebendo de que isso a incomodava porque os outros alunos não estavam a desenvolver as suas ideias matemáticas.

Os resultados do questionário realizado no final do primeiro período revelaram que a maioria dos alunos considerava ser muito importante na sua aprendizagem (concordando totalmente por ordem percentual decrescente): *Ouvir atentamente o professor*, seguido de *Resolver exercícios, Realizar atividades em grupo* e *Discutir as atividades com toda a turma.* Quanto ao *Redigir relatórios escritos das atividades desenvolvidas s*alienta-se o facto de a maioria concordar mas não totalmente com a importância dessa atividade na sua aprendizagem. Ressalta também o facto de haver um aluno que discorda com ser muito importante na sua aprendizagem trabalhar em grupo e redigir relatórios escritos. Pela leitura das justificações dadas, relativamente à resposta que deram sobre a importância de trabalhar em grupo, todos os alunos, com exceção de uma resposta de discordância por preferir trabalhar individualmente, consideram que aprendem com os colegas novos métodos e formas de pensar e referem também ser importante para se esclarecerem, tal como é referido nesta resposta: "porque em grupo estamos a discutir ideias sobre vários assuntos e isso é bom pois às vezes as ideias que temos não estão corretas".

Quanto à questão *Discutir atividades na turma* as respostas revelam uma grande aceitação e gosto por fazê-lo salientando as interações como enriquecedoras do trabalho individual. Há contudo duas justificações que sobressaem pela reflexão sobre a complexidade da comunicação oral dos raciocínios e pela preocupação com a avaliação referente a dois aspetos a classificação obtida e a evolução conseguida.

> -É uma estratégia de aprendizagem interessante que nos permite, tal como nos trabalhos de grupo, discutir ideias. No entanto, não é algo fácil. Fazer com que nos compreendam não é simples.
>
> -A partir daqui pratico as apresentações orais que contam para nota e melhoro até aquilo que sabia.

Relativamente às justificações sobre ouvir atentamente o professor os alunos mostram respeitar o professor vendo-o como uma autoridade no saber.

> -Porque muitas coisas que os professores dizem e não escrevem é importante.
>
> -É importante ouvir isso pois eles mais do que nós são especializados para isso e é importante captar a sua explicação.

A maioria dos alunos mostra não perceber a utilidade de fazer relatórios escritos das atividades realizadas o que revela não terem noção da importância da reflexão na sua aprendizagem.

No que concerne à constituição dos grupos colocou-se a questão relativa a em qual das situações raciocinam mais: se quando estão com colegas com mais facilidade na compreensão da matemática, com a mesma facilidade ou com menos facilidade. As respostas dos alunos revelaram ser mais consensual na turma raciocinarem mais quando o grupo é constituído por alunos com o mesmo nível de compreensão matemática.

Na questão colocada sobre se naquele ano estava a haver uma maior exigência em justificar ideias matemáticas os resultados revelam que todos os alunos consideram haver, este ano, uma maior exigência em justificar as suas ideias matemáticas. A divisão das respostas entre *concordo totalmente* e *concordo* podem residir num sentir essa exigência de forma mais ou menos acentuada.

Uma conclusão importante é a valorização que fazem das atividades coletivas pela partilha e pelo debate de ideias matemáticas. Outra conclusão, também importante, é o de considerarem que raciocinam mais se estiverem em grupos equilibrados relativamente às capacidades de compreensão da matemática.

Da análise global dos resultados deste questionário conclui-se que, até ao final do primeiro período, estes alunos tinham mostrado abertura às novas metodologias de sala de aula. Esta abertura dos alunos é coerente com a confiança depositada na sabedoria do professor, pois se ele defende estes métodos os alunos acreditam que vale a pena. A investigadora sentiu-se ainda mais motivada para prosseguir com a investigação pelo facto de os alunos mostrarem abertura à mudança.

Estas conclusões influenciaram a planificação do trabalho de sala de aula a partir do segundo período: novas formas de trabalho foram resumidas num guião de métodos de trabalho na aula (anexo 4) e a constituição dos grupos de trabalho foi variando na procura de os tornar equilibrados promovendo maior exigência de raciocínio para todos.

As tarefas de investigação foram propostas a partir de Janeiro de 2011 iniciando-se a recolha de dados mais intensiva sobre o raciocínio matemático na descoberta.

5.2 O raciocínio matemático na realização das tarefas propostas

As três tarefas propostas pretendiam ser de investigação. Em todas elas o domínio é infinito e enquanto a primeira lida com números fracionários com o apoio da calculadora, a segunda trata de uma relação entre áreas de retângulos com o apoio de um esquema e a terceira é sobre polígonos convexos remetendo para a representação de polígonos como forma de *entrar* na tarefa.

Na primeira tarefa a atividade dos alunos centrou-se no processo desde a formulação de conjeturas até à produção de generalizações. O enunciado da segunda e da terceira tarefa pediam de forma mais explícita para provar.

Tarefa 1 "À procura de dízimas finitas"

Esta tarefa foi aplicada em duas aulas, que são aqui analisadas separadamente. A primeira decorreu a sete de Janeiro e a segunda aula a quatro de Fevereiro. O intervalo de tempo entre as duas aulas deveu-se à preparação e à aplicação do teste intermédio nacional. O enunciado da tarefa é o apresentado na figura 5.

À PROCURA DE DÍZIMAS FINITAS

1. A fracção $\frac{1}{25}$ dá origem a uma dízima finita e a fracção $\frac{1}{3}$ a uma dízima infinita.

- Indica outras fracções da forma $\frac{1}{n}$ que correspondam a dízimas finitas.
- Quais são as fracções que dão origem a dízimas finitas.
- Apresenta as tuas conjecturas.

2. Investiga se as tuas conjecturas se verificam igualmente com outros numeradores

Actividade da brochura da APM: "Matemática para Todos: investigações na sala de aula" caderno "Números e Regularidades: propostas de trabalho"

Figura 5 – Enunciado tarefa 1 "À procura de Dízimas Finitas"

A constituição dos grupos de trabalho foi a que consta na Tabela 4, tendo sido elaborada com vista a proporcionar uma boa interação entre os elementos do grupo para que todos raciocinassem. Como se pode ver na Tabela 4, escolheu-se para designar o grupo o nome do elemento mais ativo no grupo.

Tabela 4 – Constituição dos grupos na tarefa "À procura de dízimas finitas"

Designação do grupo	Elementos constituintes de cada grupo			
Grupo da Isa	Isa	Isabel	Gabriela	Joana
Grupo do António	António	Daniela	Sofia	Rosa
Grupo da Maria	Paulo	Maria	Beatriz	
Grupo da Liliana	Liliana	Manuel	Paula	Francisca
Grupo da Rita	Antónia	Rita	Miguel	Mariana

Primeira aula

Os alunos contactaram, através desta tarefa, com o processo de descoberta e foram desafiados a investigar. Como não estavam habituados, inicialmente estranharam que uma tarefa pudesse ser tão complexa, pois estavam habituados aos exercícios cuja resolução é mais breve e com um menor grau de desafio. No entanto, os alunos foram persistentes e estiveram na primeira aula 90 minutos a pensar e sem desistir. A professora sentiu dificuldades em orientar os grupos ao tentar seguir os diferentes raciocínios.

O objetivo da tarefa era o de descobrir a estrutura matemática das frações $\frac{1}{n}$ que são DF. Essa estrutura está relacionada com o facto de os denominadores serem divisores das potências de base 10. A professora esperava que os alunos iniciassem a investigação pela exploração das frações decimais de numerador um e ficou surpreendida pelo facto de os alunos não mobilizarem esse conhecimento. O conceito de fração decimal e a sua relação com o tipo de dízima que representa, foi revisto no dia quatro de Janeiro (três dias antes da implementação desta tarefa). Nessa aula foi revisto o que era uma fração decimal, a propósito da classificação de dízimas, e exemplificou-se com alguns casos como se pode ver pelo caderno da Liliana na figura 6. Ainda nessa mesma aula foi revista a passagem de fração decimal a dízima e vice-versa.

No entanto, a professora não os reorientou para seguirem esse caminho, por recear bloquear a atividade matemática dos alunos.

Ao implementar a tarefa na aula, a professora explicou aos alunos que iam fazer uma investigação sobre dízimas e que a iam realizar em grupo. Referiu que para investigar era necessário fazer experiências e registá-las. Insistiu na importância de testar as conjeturas explorando os dados e reformulando as conjeturas sempre que necessário.

Nesta tarefa pedia-se, primeiro para os alunos indicarem frações com numerador um que fossem dízimas finitas (DF) e depois, propunha-se aos alunos que investigassem quais as frações $\frac{1}{n}$ que eram DF.

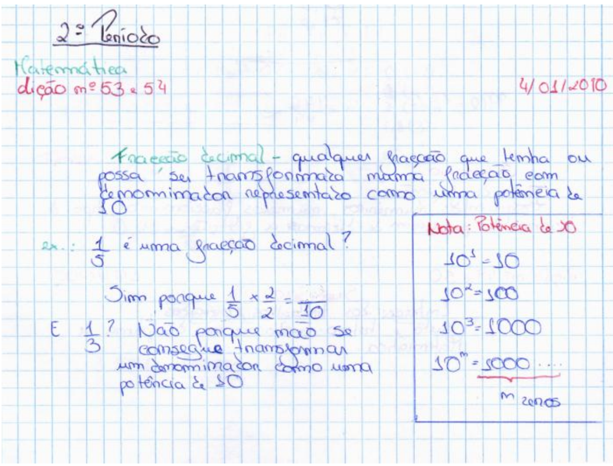


Figura 6 – Extrato do caderno da Liliana da aula de 4 de Janeiro

Os alunos, em pequeno grupo, iniciaram o trabalho pela leitura do enunciado e discutiram entre si o significado do mesmo. Ao fazê-lo confrontaram os seus conhecimentos com os dos restantes elementos do grupo. No caso desta tarefa o conceito de dízima e a sua classificação eram os conhecimentos matemáticos em foco. Pode-se ver pelo diálogo transcrito como os alunos em pequeno grupo se esclareceram mutuamente precisando as designações de dízima finita e infinita assim como o seu significado.

> **Liliana:** Quando é dízima finita dá por exemplo 3, 333333… isso é infinita; quando der… Por exemplo, 1/25 dá 0,04 é uma dízima finita, porque acaba no 4. Não tem mais números para além do quatro.
> **Paula:** Se não acabasse no quatro era infinita.
> **Manuel**: Isto é infinita…
> **Liliana**: Dízimas finitas: são aquelas que têm um fim.
> **Paula**: Que não têm período.

Este processo foi demorado o que revela precisarem de tempo para se apropriarem dos conceitos e da linguagem matemática.

Para responder à primeira questão, os alunos, em grupo, recolheram alguns exemplos de dízimas finitas (DF) com a máquina de calcular e registaram-nos nas suas folhas de trabalho. Os alunos usaram a máquina de calcular como ferramenta de cálculo sem qualquer indicação da professora. Salienta-se o facto de não ocorrer a nenhum aluno fazer a operação de divisão usando o respetivo algoritmo. A figura 7 é um exemplo da recolha de dados efetuada por um dos grupos.

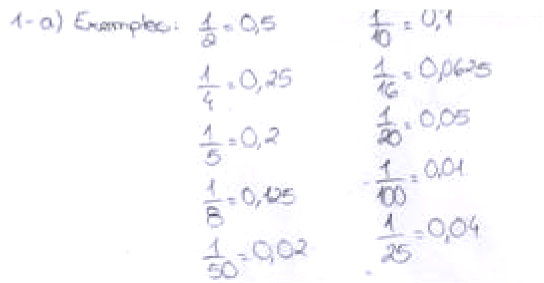


Figura 7 – Recolha de dados de um dos grupos

Os alunos procuraram ainda outras frações que correspondessem a DF e registaram esses casos. Perante a questão de “Quais são as frações que dão origem a DF?” houve diferentes reações e gerou-se discussão no seio dos grupos sobre a interpretação da mesma. Dois dos grupos identificaram com alguma facilidade a questão como referente ao conjunto dos números naturais enquanto os restantes consideraram o conjunto dos seus exemplos de DF. O grupo da Rita tentou primeiro clarificar o significado de $\frac{1}{n}$. No diálogo transcrito a Rita questionou-se sobre se n poderia tomar qualquer valor e a Antónia confirma.

> **Rita**: Agora diz: “Quais são as frações que dão origem a dízimas finitas?” É daquelas que se a dividir… isto pode ser um número qualquer? – pergunta Rita apontando para o denominador n.
> **Antónia**: Sim.
> **Rita**: Até pode ser um a dividir por 999. E é daquelas que dão, dessas de um a dividir por qualquer número temos que dizer quais são finitas.

Através desta clarificação as alunas apercebem-se de que haverá muitas frações naquelas condições e que escrevê-las todas dará muito trabalho. Este espanto está bem patente na exclamação de Antónia “–Fogo e vamos escrever todas?”.

Surgiu, então, a necessidade de as descrever pelas suas características dando início ao processo de investigação das propriedades que as caracterizam.

Os alunos não estão habituados a atividades tão complexas e de imediato chamam a professora na esperança de haver alguma salvação para tão árduo trabalho. A professora tenta orientá-los para a descoberta como se pode ler nas suas palavras na transcrição seguinte:

> **Prof**: Depois apresentam as conjeturas: conjeturas de quê? Quais são, como é que são as frações que dão dízimas finitas. Vão ter que descobrir quais são as que dão.

A professora ao referir o *como* remeteu-os para a procura de características comuns. De facto para os alunos conseguirem identificar *quais são* têm primeiro de saber como são, o que neste caso depende de conhecer as propriedades das frações com numerador 1 e denominador n que são DF. Depois desta orientação a aluna Antónia confirma com a professora se é mesmo para as escrever todas. Quando a professora refere que é para as descrever todas genericamente, a Rita associa o *genericamente* à descoberta de uma regra e em grupo iniciam a procura.

> **Antónia**: Ih stora, vamos ter que descobrir todas, todas, todas?
> **Prof**: Genericamente.
> **Rita**: Uma regra.

A investigação propriamente dita iniciou-se após todos os grupos estarem convencidos que precisavam de partir para a descoberta com o objetivo de identificar o conjunto de frações $\frac{1}{n}$ que originam DF.

Da conjetura à generalização

Esta foi a primeira tarefa do tipo investigativo pelo que sobressaíram as dificuldades inerentes a quem investiga pela primeira vez, tais como: não se sentir seguro para avançar sem apoio, não saber como se processa uma investigação, não ter os sentidos despertos para procurar padrões, não registar todo o trabalho e não estar a contar com uma tarefa de tão árduo trabalho.

Partindo da observação dos dados obtidos por particularização, os alunos formularam conjeturas que constituíram tentativas de generalização das regularidades encontradas.

As primeiras tentativas de generalização foram formuladas com base nas propriedades que sobressaíam dos poucos dados listados como, por exemplo, os dados apresentados na figura 7. Os alunos fizeram analogias entre as propriedades desses casos particulares e as propriedades que conhecem dos números. As propriedades ser número primo, ser número par, ou ser múltiplo de um certo número foram as primeiras conjeturas a serem testadas.

Pela análise do trabalho inicial nos grupos sobressaíram algumas características do seu processo de conjeturar, tais como, a forma como formularam os enunciados das conjeturas; a forma como testaram a conjetura e a forma como interpretaram o resultado desses testes.

A formulação das conjeturas foi feita na forma interrogativa, talvez por influência da orientação da professora quando lhes disse para colocarem as questões na sua folha de registo. Os alunos não mostraram ter dificuldades na forma de escrever as conjeturas nem na forma de as refutar através de contraexemplos. A figura 8 tem um exemplo que mostra isso.

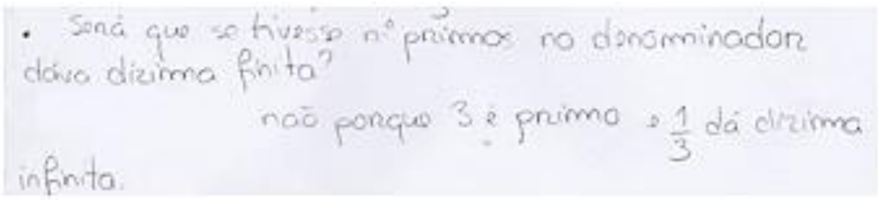


Figura 8 – Registo da conjetura de denominadores serem números primos

As questões de linguagem oral e escrita, na formulação de conjeturas, revelaram uma passagem coerente de uma para a outra como se verifica, por exemplo, na formulação da conjetura apresentada na figura 9. A Liliana formulou a conjetura restringindo os denominadores a números pares e na passagem para a forma escrita o grupo da Liliana acrescentou o quantificador *só* ficando bem clara essa restrição.

> **Liliana**: Será que dízimas finitas são aquelas que têm denominador par?

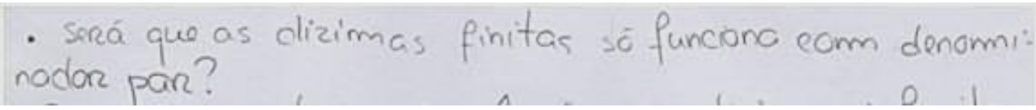


Figura 9 – Registo da conjetura formulada pelo grupo da Liliana

Também o grupo da Isa afirmou que há denominadores que são pares, mas que há exceções à regra. Primeiro observaram os casos registados (denominador 2 a 9) concluindo que daqueles denominadores só o denominador 6 não era DF, mas depois a Isa quando refere que são quase sempre pares não referiu as exceções. Talvez ao formular a conjetura com o *quase sempre* tenha duvidado de que aquela fosse a única exceção como se percebe pelo diálogo entre elas em que a Isa não acaba a última frase.

> **Isa**: Deixa ver aqui uma coisa. Aqui se reparares 1 sobre 2 é DF e 2 é par, 8 também é par, 10 também é par, só este [o 6] não é par. É o único caso [dos registados].
> **Joana**: Os pares quase sempre são finitas. Faz um sobre 28. Dá infinita.
> **Isa**: As frações que dão DF quase sempre são números pares à excepção de…

Na forma escrita registaram a conjetura dando a noção de possibilidade através do *pode* – figura 10.

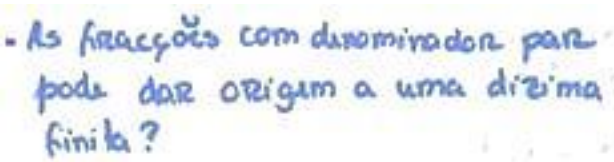


Figura 10 – Registo da conjetura formulada pelo grupo da Isa

Os diferentes grupos respeitaram o enunciado na interpretação do resultado do teste da conjetura. O grupo da Liliana refutou a conjetura com o contraexemplo 5 como se pode ver na figura 11, apesar de se terem enganado ao registar escrevendo infinita em vez de finita.

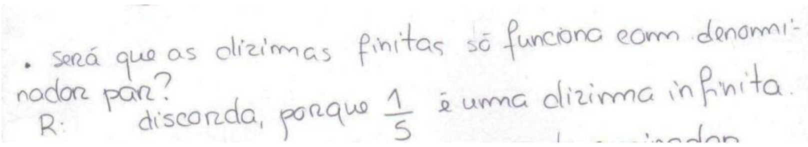


Figura 11 – Registo do teste à conjetura do grupo da Liliana

O grupo da Isa também respeitou o enunciado da conjetura no teste realizado, pois não refutou a conjetura apesar de se observar no registo da figura 12 terem escrito a resposta "não" seguida de "nem todas".

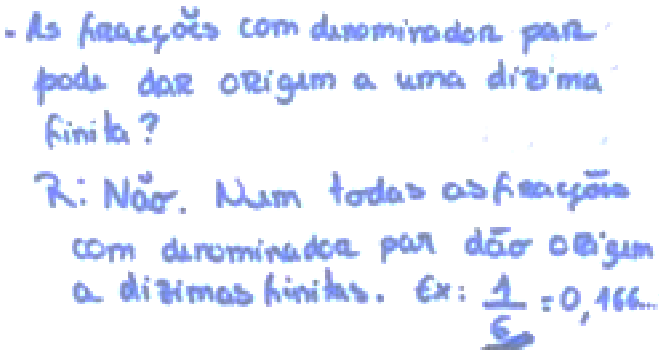


Figura 12 – Registo do teste à conjetura do grupo da Isa

Inicialmente, os alunos usaram muito o padrão de raciocínio de rendição, em que após a observação de um padrão, formulavam uma conjetura, testavam-na e face a um contraexemplo negavam-na. Este procedimento deveu-se à expetativa de que uma única propriedade caraterizasse as DF impossibilitando a descoberta de outras caraterísticas para os denominadores. O raciocínio a seguir descrito mostra como a rendição pode ser improdutiva no processo de descoberta.

O grupo da Maria conjeturou sobre os denominadores serem múltiplos de 5 ou serem pares, enquanto observam a sua lista de particularizações na refutada que originam DF.

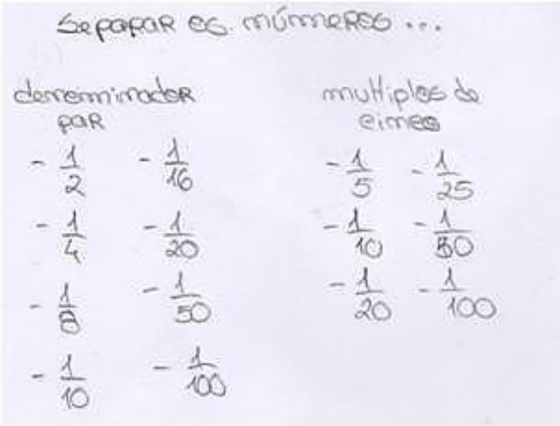


Figura 13 – Dados grupo maria ser par ou múltiplo de 5

> **Maria**: Em alguns [dos casos que são DF] o denominador é múltiplo de 5 e nos outros os denominadores são pares.
> **Beatriz**: Múltiplos de 5: 5, 10, …
> **Maria**: 1 sobre 15 também dá DI.

A conjetura foi registada por escrito como relativa apenas aos múltiplos de 5 e foi refutada com o número 15 como se pode observar na figura 14. O enunciado da conjetura apenas permite a resposta não, porque de facto não são todos múltiplos de 5. No entanto, o contraexemplo da fração com denominador 15 alerta para a reformulação da conjetura definindo-a no conjunto dos denominadores múltiplos de 5 que originam DF. Este exemplo mostra que estes alunos não estão despertos para os efeitos de um contraexemplo, o que é natural sendo a primeira vez que investigam.

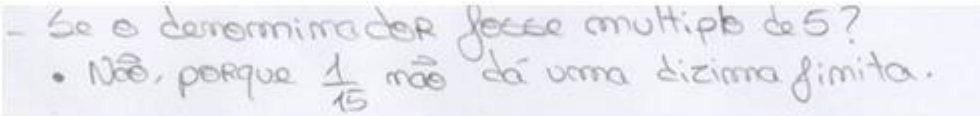


Figura 14 – Registo da conjetura de múltiplos de 5

Alguns grupos identificaram similaridades no algarismo das unidades dos denominadores. Num dos grupos testaram potências de 10, mas caracterizaram os números potências de 10 por terminarem em zero e ao fazê-lo consideraram os múltiplos de 10. Esta conjetura nem chegou a ser registada pois foi refutada com o contraexemplo da fração de denominador 30. Este raciocínio de rendição não permitiu a reformulação da conjetura.

As primeiras conjeturas refutadas pelos alunos encontram-se na tabela 5.

Tabela 5 – As primeiras conjeturas formuladas e refutadas

Conjeturas refutadas	Contraexemplos
Será que se tivesse número primo no denominador dava DF?	n=3
Será que as DF só funciona com denominador par?	n=6
Se o denominador fosse múltiplo de cinco?	n=15
Se o denominador terminar em zero?	n=30

Após esta primeira abordagem os alunos começaram a sentir cada vez mais dificuldade em avançar e a chamar mais a professora. Esta tentou mostrar-lhes, como se relata a seguir, que deviam fazer refutações locais às suas conjeturas restringindo o domínio de validade da conjetura enunciada. Primeiro a professora orientou os grupos para a reformulação de conjeturas sensibilizando-os para o facto de poder haver diferentes explicações para as frações que são DF. Este processo exige a capacidade de passar do conjunto de todas as frações $\frac{1}{n}$ a que correspondem dízimas finitas para subconjuntos a partir das suas características comuns.

Verificou-se que a reformulação das conjeturas só aconteceu de forma espontânea, curiosamente, em dois dos grupos de trabalho: grupo da Isa e grupo do António. A reformulação da conjetura foi feita restringindo o conjunto de aplicação da conjetura. A seguir descreve-se a forma como este grupo o fez.

O grupo da Isa aceitou a possibilidade de haver outras caraterísticas dos denominadores pares que originavam DF. Esta atitude de procurar outras hipóteses sem colocar de lado a primeira hipótese revela uma capacidade de questionamento e de aceitação de diferentes hipóteses. É curioso notar que o grupo da Isa era constituído por alunas com dificuldades a matemática e a Joana era dois anos mais velha que a maioria dos alunos por ter duas retenções no seu percurso escolar.

O grupo da Isa ao procurar outros denominadores que não originavam DF encontrou regularidades em denominadores que originavam DI: denominadores com algarismo das unidades 9 ou 7. Apesar de conjeturarem noutro conjunto, que não era o pedido, este caminho poderia levar as alunas à descoberta por exclusão de partes. Era, no entanto, um caminho mais difícil.

Quando encontraram um padrão generalizaram formulando as respetivas conjeturas:

> **Isa:** Eu descobri uma coisa! 1 sobre 10 dá finita e 1/9 dá infinita. Quando o 10 é finita o detrás é Infinita.
> (…)
> **Gabriela**: Todos os [denominadores] 9,19,29,39 dão DI.
> **Joana**: Podemos pôr isso.
> **Isa**: Todos os números cujo denominador… Todas as frações cujo denominador tenha o algarismo 9.

A conjetura formulada, figura 15, foi enunciada como restrita ao caso do denominador ter algarismo das unidades 9, deixando em aberto a possibilidade de haver outros casos. A generalização foi feita após realizarem os testes que consideraram suficientes para se convencerem. Este grupo foi aquele que revelou ter noção de que, por mais casos que comprovassem, podia haver algum que falhasse. Estas alunas demoraram mais tempo do que os seus colegas a convencer-se da veracidade da afirmação. Concretizaram para valores até à ordem das centenas, de forma sistemática, e mostraram ter noção de que apesar da verificação de muitos casos podia surgir um contraexemplo.

> **Isa**: É verdade sim senhora. Fiz do 1 até ao cento e tal e dá tudo infinito.
> **Joana**: E se depois do 200 já não dá?
> **Isabel**: Pois [faz mais experiências na máquina]… Dá.
> **Joana**: Continua a dar? E [na ordem dos] 300?
> **Gabriela**: 329
> **Isabel**: Pode haver números que pelo meio possam dar DF.
> (…)
> **Joana e Isabel**: 9,19,29,39,49,59,69,79,89,99,109,119,129…dá tudo DI
> (…)
> **Isa**: Fizemos até 100 e tentámos alguns: 300, 400.

Depois dos testes realizados, registam a sua generalização.

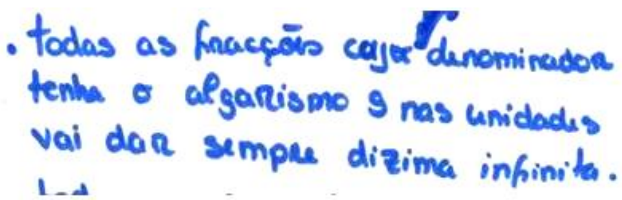

• todas as fracções cujo denominador
tenha o algarismo 9 nas unidades
vai dar sempre dizima infinita.

Figura 15 – Registo da generalização do denominador ter algarismo das unidades 9

O processo de conjeturar seguido por estas alunas até fazerem esta generalização está esquematizado na figura17, onde se mostra a reformulação da conjetura 1 na conjetura 2 através dos testes realizados e a formulação da conjeturas 3 e respetiva generalização através dos exemplos testados.

As alunas continuaram a investigação dentro da mesma linha de pensamento e descobriram a mesma propriedade para o algarismo das unidades 7. Fizeram testes sistemáticos até à ordem das centenas sem encontrar qualquer contraexemplo e prosseguiram questionando-se se seria sempre assim como se pode ler no diálogo transcrito.

> **Isa**: É como no 7.
> **Joana**: Faz 107 Um sobre 7,17,27,37,47,57,67,77 Também é.
> No outro foste até quanto?
> **Isa**: Até 100.

E registaram outra generalização similar à primeira, mas agora para o algarismo das unidades 7, como se pode ver na figura 16.

As alunas procuraram nas terminações dos números alguma similaridade provocada pelas regularidades das potências tal como exemplificado, por Davis e Hersh (1981), numa investigação sobre a teoria dos números em que os alunos conjeturam e reformulam as suas conjeturas fazendo analogias entre as terminações dos números e as suas propriedades.

Este grupo de alunas fez novas descobertas e o processo de descoberta enquadra-se no padrão de raciocínio de *Verificação Científica*, pois foi pela observação de um padrão que formularam conjeturas e através dos testes reformularam-nas, generalizando para todos os casos naquelas condições.

O nível de prova das alunas situa-se entre o nível de *empirismo naïf* e a *experiência crucial*, porque, apesar de as alunas não terem testado um caso especial, elas colocaram o problema da generalização.

Quando as alunas apresentam estas generalizações à turma a professora questiona a turma sobre se a generalização está provada e explica, então, que para provar que a generalização é válida através de exemplos era preciso testá-los todos e para provar que a conjetura é falsa basta descobrir um contraexemplo.

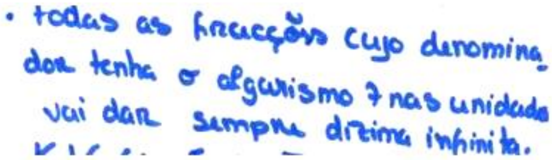


Figura 16 – Registo da generalização do denominador ter algarismo das unidades 7

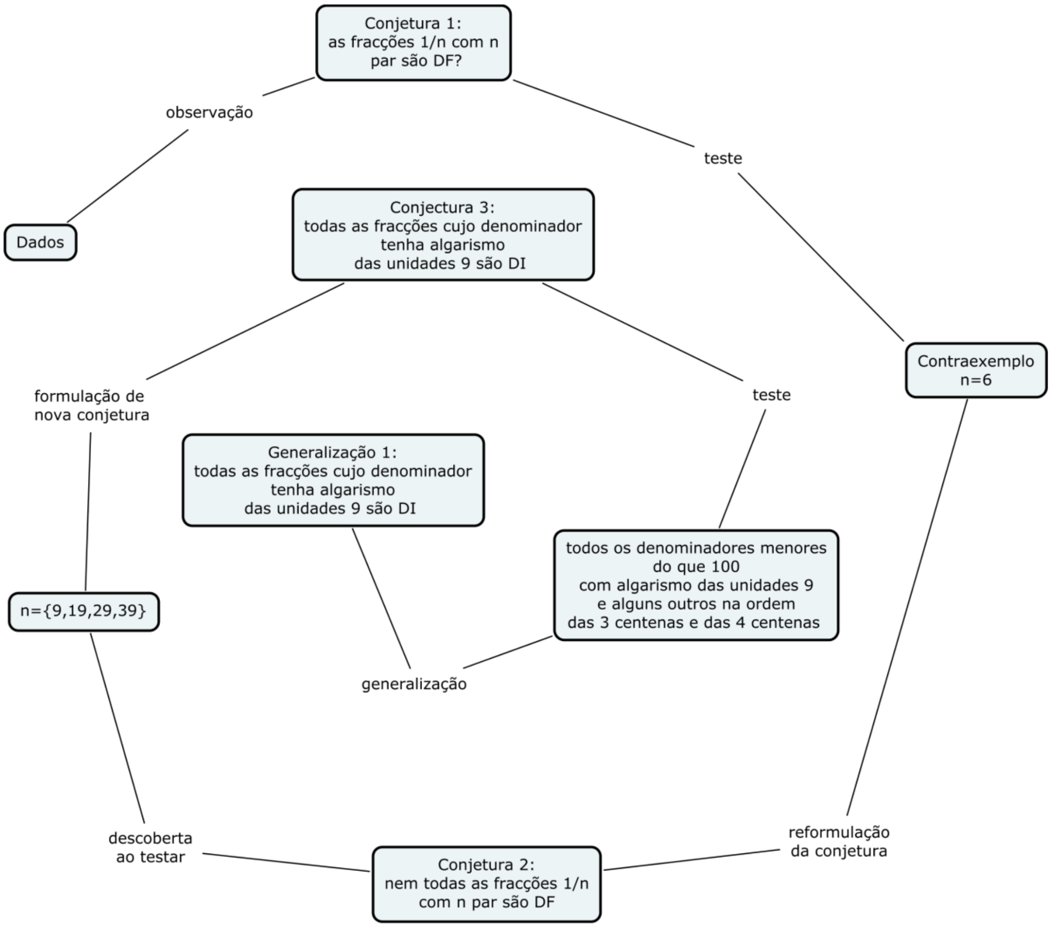


Figura 17 – Esquema do processo de conjeturar do grupo da Isa

O grupo do António reformulou a conjetura, da relação de dobro entre denominadores, encontrada a partir da observação das particularizações que tinham feito.

António dialoga com a professora sobre a relação de dobro que encontrou.

António: mmm… Por exemplo aqui, stora: 5,10 dobro.
Prof: Já estás a procurar uma relação.
António: 4,8 dobro.

E outros elementos do grupo começaram a observar casos em que se verificava essa relação:

> **Sofia:** Olha esta: 10,20.
> …
> **António**: Já sei, já sei, já sei… um meio, [o] dobro [de um meio] um quarto, [o] dobro [de um quarto] um oito avo. Depois um quinto, [o dobro de um quinto] um décimo, o dobro [de um décimo] um vinte [avos].

Entusiasmado o António quer testar com outras que não estão registadas na folha de registo (figura 18).

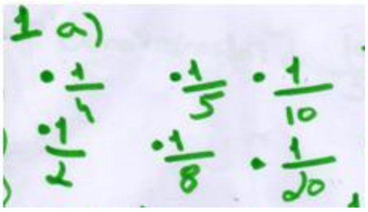


Figura 18 – Recolha de dados do grupo do António

> **António**: Então faz um que seja dízima finita para ver se nós temos aqui.

O diálogo da Daniela com os elementos do seu grupo mostra como ela testou a conjetura com um exemplo que origina DI e como percebeu que pode estabelecer a mesma relação relativamente às DI: se um denominador n origina uma fração $\frac{1}{n}$ DI então uma fração cujo denominador dobrou também origina uma fração DI.

> **Daniela**: Um sexto não dá… eu acho que o teu pensamento está direito porque o dobro de três é seis. Seis é [dízima] infinita.
> **António**: Não te esqueças que tem de ter um em cima.
> **Daniela**: Sim e tem, na mesma. É o dobro. Um sobre três e se fizeres o dobro é um sobre seis e é dízima infinita.

A confiança na conjetura saiu reforçada ao ser verificada no conjunto das DI. A conjetura não foi formulada por escrito, mas sim os casos particulares relacionados pelo dobro como se apresenta na figura 19.

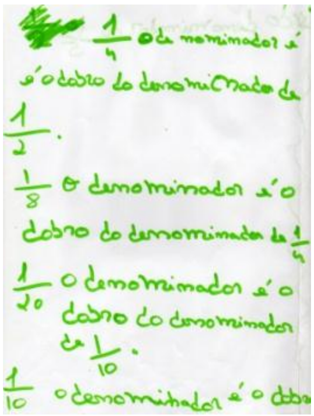


Figura 19 – Registo do grupo do António de dobro entre denominadores

O processo de formulação e reformulação das conjeturas encontra-se esquematizado na figura 20. Os alunos testaram a conjetura e foram capazes de a reformular generalizando-a ao conjunto das dízimas racionais. No entanto, esta generalização é feita com base num único teste.

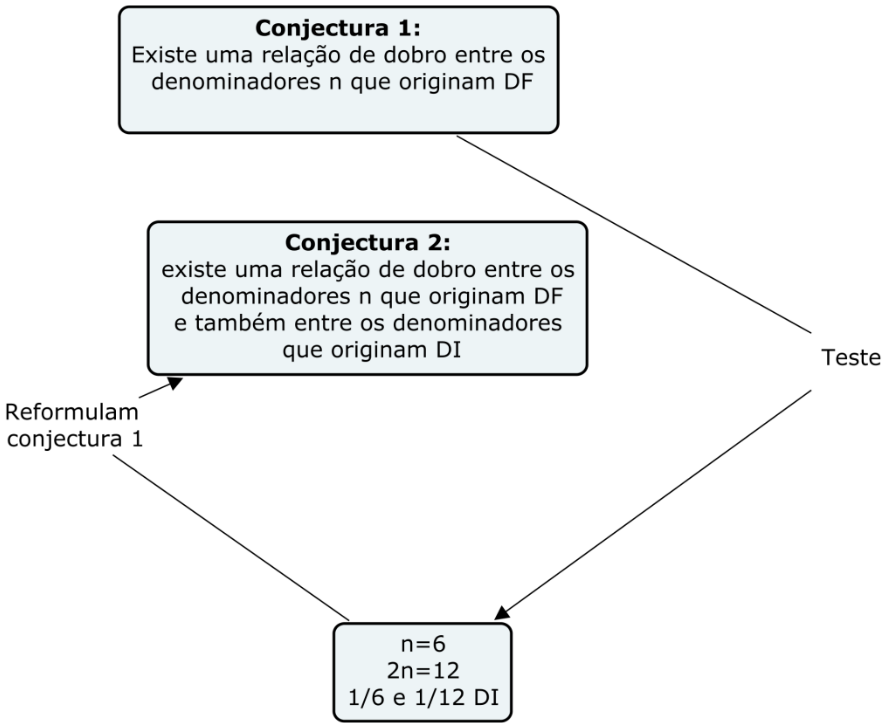


Figura 20 – Reformulação da conjetura no Grupo do António

O facto de os grupos não reformularem as conjeturas provocou um impasse no trabalho dos alunos. A professora tentou ajudar todos os grupos, com exceção do grupo da Liliana, a reformular a conjetura continuando a investigação no sentido de descobrirem as particularidades daqueles casos.

O grupo da Liliana não tinha conjeturado sobre relações de dobro e tentavam encontrar outras regularidades nos denominadores, mas não conseguiram encontrar nenhuma regularidade. As tentativas de orientação da professora não mudaram os caminhos de descoberta dos alunos deste grupo, verificando-se que desenvolviam os seus raciocínios até ao fim. Esta atitude revela coerência e autonomia na descoberta.

Mostra-se a seguir como os alunos reformularam a conjetura do dobro para a conjetura das potências de dois através da orientação dada pela professora a generalizar por GPP promovendo assim o desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

A relação estabelecida pelo grupo do António entre os denominadores é uma relação recorrente como se percebe pelo diálogo com a professora:

> **António**: Nós fizemos já estas, mas fomos por tentativas: um meio e depois foi um quarto e o denominador de um quarto é o dobro do denominador de um meio, um oito avos o denominador é o dobro de um quarto, depois aqui um vinte avos o denominador é o dobro do denominador deste.

Para saírem da relação recorrente de dobro, a professora orientou-os para observarem o processo de formação dos diferentes termos da sequência, a fim de encontrarem as propriedades que caracterizavam os denominadores em foco.

A relação de dobro foi estabelecida em duas diferentes sequências de denominadores: uma com primeiro termo dois e a outra com primeiro termo cinco. A professora orientou-os no sentido de observarem apenas a sequência com primeiro termo dois com vista a que descobrissem que correspondiam às potências de dois. Para isso, enfatizou o facto de o número par 6 não pertencer à sequência, para que caracterizassem aqueles denominadores por outra propriedade que não apenas a de serem números pares.

> **Prof**: O que é que estes números têm de especial? 2, 4, 8 e estavam a dizer que não passa pelo seis.
> **António**: São pares.
> **Prof**: Ele [0 6] não está aqui.
> **António**: Porque são potências: 2 elevado a 2, …

O processo de conjetura pode ser resumido pelo esquema apresentado na figura 21 em que a reformulação foi feita com ajuda da professora incentivando-os a observar o processo gerado pela multiplicação sucessiva pelo fator 2, ou seja, a generalizar por GPP.

O aluno António explica ao grupo que aquelas frações têm um denominador que pode ser escrito como potência de 2, mas enuncia a conjetura como uma equivalência.

> **António**: As dízimas finitas são aquelas em que a base da potência é dois.
> **Rosa**: O denominador.
> **António**: A base do expoente, a base da potência. Por exemplo, 2 elevado a 10 é 1024; um sobre 1024 vai dar uma dízima finita; não há nenhum período aqui.

Esta reformulação da conjetura, formulada como uma equivalência, barrou todos os denominadores que não são potências de 2. Face a esta afirmação, os colegas questionaram-se sobre outros denominadores que originam DF, tais como as frações 1/5 e 1/10. O António reafirma a sua conjetura em conjunto com um contraexemplo que põe em causa a sua conjetura.

> **António**: As dízimas finitas são aquelas cuja potência a sua base é 2 e para um quinto não dá.

Para continuar a descoberta era necessário resolver a questão dos contraexemplos e a professora incentivou-os a procurarem outros denominadores relacionados com o 5. Ou tratavam os contraexemplos como casos especiais ou os excluíam reformulando a conjetura.

> **Prof:** E porque não testam mais algumas?
> **António:** Já testamos dois elevado a 10, um sobre 1024. Mas um quinto não dá.
> **Prof:** Tentem encontrar outras relacionadas com as de um quinto.

Continuaram a procurar múltiplos de 5 iniciando um novo processo de conjeturar a partir da conjetura 1. Quando lhes surgiu o denominador 25 notaram, com surpresa, que origina DF e que não é o dobro de outro denominador.

Sofia: Porque olha 25 não é o dobro.
António: Não é o dobro?
Daniela: Mas 1 sobre 25 é uma DF.
Sofia: Podemos é esquecermo-nos deste e passamos para este.
Daniela: Não nos podemos esquecer porque tem que ser uma regra geral.

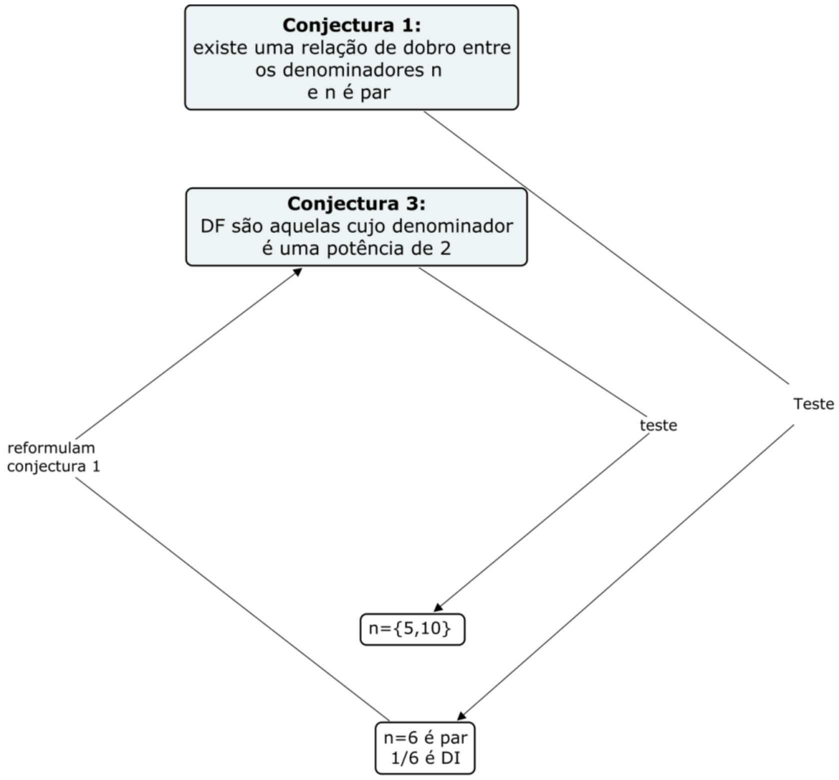


Figura 21 – Reformulação da conjetura do dobro no grupo do António

A Sofia propôs ignorar o contraexemplo 25 por ser especial, tal como descrito no padrão de raciocínio *Monster Barring*, mas a Daniela não concordou por querer uma regra que incluísse todos os casos.

O grupo da Rita não chegou à relação de dobro entre denominadores por exploração, mas apropriou-se da conjetura do grupo do António por ouvirem a formulação da conjetura. A professora descobriu isso posteriormente nas gravações. O grupo da Rita chamou a professora e esta questionou os elementos do grupo sobre o cálculo sucessivo que eles estavam a efetuar e eles conseguiram identificá-lo como sendo uma multiplicação por 2. Quando questionados sobre como escrever essa operação sucessiva, lembraram-se de potências, mas continuaram sem saber como registar:

> **Prof**: Pois, mas é sempre x2x2x2…
> **Rita**: É uma potência. Como é que se explica isso?
> **Prof**: Como é que tu achas?
> **Antónia e Rita**: Não sabemos explicar.
> **Prof**: Agora já devem saber (depois de se ter discutido a questão de multiplicar sucessivamente por 2).
> **Antónia**: É potência de 2.

Referiram que vão organizar as ideias para depois escrever a conjetura. Testaram mais alguns expoentes para as potências de 2 e registaram a seguinte conjetura ilustrada na figura 22: "Qualquer fração em que o denominador seja uma potência de 2 o seu resultado dá uma dízima finita."

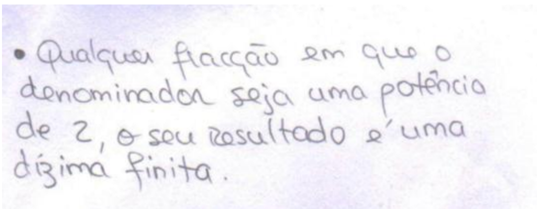


Figura 22 – Registo da conjetura de denominadores serem potências de 2 no grupo da Rita

Esta conjetura é formulada de forma diferente das outras porque não exclui outras possibilidades para que os denominadores originem DF. Esta conjetura restringe o domínio dos números naturais, uma vez que define dentro do conjunto de todos os denominadores um subconjunto, potências de 2, contido no primeiro.

O grupo da Maria reparou numa relação de dobro no conjunto dos denominadores pares que são DF. Observando os registos do grupo apresentados na figura 13 chegaram à conclusão de que o dobro do denominador da fração a que corresponde uma DF também é uma DF.

> **Maria**: Se for o dobro dá de certeza, mas também tem de dar com outros números. Mas o que têm de anormal?
> Estas terminam em 5 e estas em zero. Se multiplicarmos por este dá este, e este também dá e o 10 dá 20. Se as frações pares… nas frações cujo denominador é par. Nós vimos que nas pares se este dobrar vai dar o próximo mas 5 e assim já não…

Os alunos registaram a conjetura, constante na figura 23, não a tendo refutado. Salienta-se o facto de os alunos estarem a trabalhar num conjunto de denominadores pares que correspondem a frações de numerador um que são DF e na conjetura escreverem apenas denominadores pares. O domínio da conjetura foi alterado na formulação escrita.

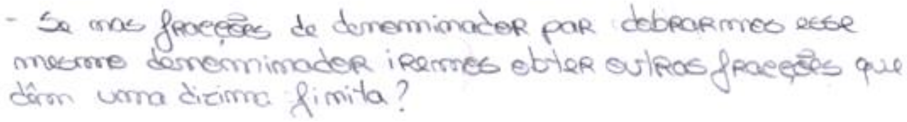

- Se nas frações de denominador par dobrarmos esse mesmo denominador iremos obter outras frações que dêm uma dizima finita?

Figura 23 – Registo da conjetura do Gr. Maria sobre relação de dobro

Esta conjetura permitiria identificar os denominadores, potências de 2, se reformulassem a conjetura para o domínio das DF. Para isso, o uso de um diagrama de Venn permitiria que os alunos observassem as relações entre os dois conjuntos de denominadores que são DF: o conjunto dos denominadores pares e o conjunto dos múltiplos de 5. A professora tentou que reparassem nos dobros começando no denominador 2:

> **Prof**. Então começando pelo dois o que é que está a acontecer ao número? Conseguimos saber qual era o próximo? Até aqui estão todas relacionadas [apontando para a fração 1/8 da lista em que estavam escritas ½, 1/4 e 1/8 seguidas de 1/10] e agora passava para qual?
> **Maria**: Passava para 16. E se fizéssemos mais também dava que já estivemos a ver.
> **Beatriz**: Mas não dava para todas [as frações].
> **Prof**: A regra pode não ter o mesmo enunciado para todas as relações. Vocês estão a encontrar aqui uma cadeia que pode ter uma explicação.
> **Maria**: Um a dividir por uma potência de 2 dá sempre finita.

A conjetura que Maria formulou e que não foi registada é restrita à sequência de frações ½, ¼, 1/8, …

A professora proporcionou um momento de discussão com toda a turma para partilharem as explorações que já tinham feito nos grupos e para se reformular a conjetura do dobro com toda a turma com vista a compreenderem como continuar a descoberta.

António ofereceu-se para ir ao quadro expor como chegou à sua conjetura mostrando como conjeturaram com base em poucos casos referindo-se a esse reduzido número de casos como sendo “tudo”.

> **António**: Nós fizemos 6 frações < ½, ¼, 1/8, 1/5,1/10, e 1/20> e vimos que ¼ é o dobro de ½: o denominador era o dobro do denominador… depois 1/8 é o dobro de ¼. Depois 1/20 é o dobro de 1/10. E depois 1/10 é o dobro de 1/5. Como tudo era o dobro íamos fazer em potência.
> **Liliana**: E o 8?
> **Outros**: É o 16.
> **António**: Mas nós não fizemos 16, vimos que era tudo o dobro e pusemos em potência.
> **Prof**: Como se lembraram da potência?
> **António**: Vimos que o denominador fazia parte da potência com base 2: 2 elevado a 2, 4; 2 elevado a 3, oito. Só 1/5 não encaixa aqui.

A professora espera reações dos alunos e como não há, repete a afirmação do António.

> **Prof**: O resto encaixa tudo…?

Quando o António diz que só 1/5 não segue a mesma lei coloca-se o problema de domínio da sua conjetura. De facto o domínio da conjetura que ele enunciou é para todos os denominadores naturais e assim a conjetura é refutada pelo denominador 5. A aluna Rita apresenta a conjetura do seu grupo, figura 22, afirmando que é igual. Ninguém, no grupo, identificou a diferença entre o enunciado das duas conjeturas (figura 24).

Na discussão com toda a turma sobre as conjeturas a que tinham chegado foram confrontadas as duas formas de escrever a conjetura sobre denominadores potências de dois. Quando a professora referiu as diferenças na formulação verificou-se que os alunos não estavam despertos para essas diferenças.

De facto enquanto a conjetura do António afirma que a investigação está terminada pois formula a conjetura dizendo que as DF “são aquelas” cujo denominador é uma potência de 2 a conjetura da Rita deixa em aberto a existência de outras possibilidades para caraterizar o denominador.

Conjectura do António:
As dízimas finitas são aquelas em que a base da potência é dois.
Conjectura da Rita:
Qualquer fracção em que o seu denominador seja uma potência de 2 o seu resultado é uma Dízima Finita.

Figura 24 – Duas diferentes conjeturas de potências de 2

A professora apercebendo-se que os alunos mostraram surpresa inicia uma exploração que possa tornar o enunciado mais claro:

> **Prof**: Que vos parece? O que é que isto quer dizer? Outra vez Rita devagar.
> **Rita**: Qualquer fração em que o seu denominador seja uma potência de 2 o seu resultado é uma Dízima Finita.
> **Prof**: O que é que isto quer dizer? Qualquer fração:
> Se eu representar $\frac{1}{n}$ como qualquer fração em que o seu denominador – estamos a fixar numerador como 1 – seja uma potência de 2… como é que eu escrevo aqui uma potência de 2?

Traduziu-se para linguagem simbólica para ajudar a tornar a questão mais geral, mas muitos alunos tinham dificuldades em trabalhar com letras e nesta situação de atribuir uma letra ao expoente os alunos propuseram a letra *n* que já havia sido atribuída ao denominador no enunciado $\frac{1}{n}$. A professora lembra-lhes esse facto e pede para atribuírem outra letra à variável.

> **Liliana**: elevado a…
> **Prof**: Quanto?
> **Rita**: Quatro.
> **Prof**: A qualquer coisa, não concretizes, genericamente.
> **Vários**: n
> **Prof**: Mas n já está aqui (apontando para o denominador de $\frac{1}{n}$).
> **Outros**: x
> **Prof**: x então. $\frac{1}{2^x}$ dão sempre DF, dizem elas. Que vos parece? Onde estão aqui essas…

Os alunos identificam os denominadores potências de 2 e a professora chama a atenção para o facto da sequência encontrada estar intercalada na sequência de denominadores que originam DF quando ordenados por ordem crescente, figura 25.

$$\mathbf{\frac{1}{2}}\quad \frac{1}{3}\quad \mathbf{\frac{1}{4}}\quad \mathbf{\frac{1}{5}}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{7}\quad \mathbf{\frac{1}{8}}\quad \frac{1}{9}\quad \mathbf{\frac{1}{10}}\quad \frac{1}{11}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{13}\quad \frac{1}{14}\quad \frac{1}{15}\quad \mathbf{\frac{1}{16}}\quad \frac{1}{17}\quad \frac{1}{18}\quad \frac{1}{19}\quad \mathbf{\frac{1}{20}}\quad \ldots$$

Figura 25 – Frações ordenadas por ordem crescente

Prof: Há aqui uma sequência, a tal sequência que está no meio da vossa, que… Terá aquela explicação? Poderá ter aquela explicação ou não? O que acham?
Liliana: E o 5?
Prof: 0 5? 0 5 está nesta regra?
Vários: Não.
Prof: É potência de 2 o 5?
António: Não, mas essa regra dá para todos os que eles disseram.
Prof: Dá para aqueles…
António: Em que o denominador é potência de 2.
Prof: E dá para todas as frações que dão DF?
António: Isso já não.
Prof: Então, podem continuar a investigar. Descobrimos uma parte…

A reformulação de uma conjetura foi realizada com toda a turma partindo da descoberta de uma propriedade comum aos denominadores relacionados pelo dobro a partir do denominador 2 restringindo-se, assim, o domínio da conjetura a potências de 2.

Quando o grupo de Rita, grupo que chegou à conjetura das potências de base 2, já na parte final da aula, se focou nos números terminados em 5 e em zero, a Rita colocou a hipótese de serem potências de base 5:

Rita: Ahhhhhhhhhh! É a mesma coisa só que com potências de 5. Eureka. Boa! Não sei se dá, por isso temos de experimentar.
Mariana: Escreve, escreve, escreve!
Rita: 1 a dividir por 5 dá. 1 a dividir por 15, não dá. É potência…
Mariana: Mas tem de ser potência de 5.
Rita: 5 elevado a 3. Vamos começar: 5 elevado a 1 dá; 5 elevado a 2 dá, 5 elevado a 3 dá, 5 elevado a qualquer coisa. Nós depois os números que derem temos de fazer 1 a dividir por esses números. Chegámos a uma conclusão brilhante.

Esta conjetura parece surgir por analogia com a anterior, uma vez que a Rita reparou que o processo de formação é semelhante ao das potências de 2.

Registaram na sua folha a nova conjetura como se ilustra na figura 26.

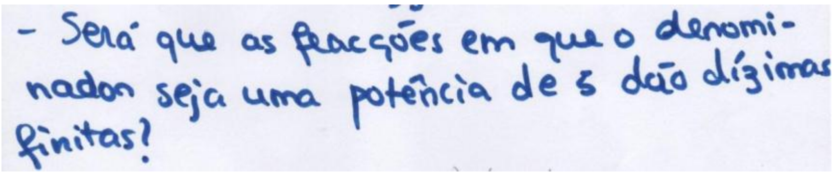

- Será que as fracções em que o denominador seja uma potência de 5 dão dízimas finitas?

Figura 26 – Conjetura de potências de base 5 do grupo da Rita

Sentiam-se confiantes e a professora incentivou-os a continuar a investigação procurando outros denominadores.

O grupo do António continuou a investigação tentando perceber o que se passava com os denominadores relacionados com o denominador 5 e experimentaram os denominadores 15 e 115 que dão DI. Depois experimentaram os denominadores 25 e 125 cujas frações originam DF e formularam a conjetura de o algarismo das dezenas ser 2 implicar obter-se uma DF. No final desta primeira aula, eles apresentaram a sua conjetura assim como as razões que os levaram a formulá-la. A conjetura é refutada pelo Paulo com o contraexemplo 325 mesmo no final da aula. Renderam-se, de novo, perdendo a oportunidade de procurar o que havia de especial nestes denominadores que terminavam em 25 e davam DF. De qualquer forma já estavam a procurar uma conjetura apenas para aqueles casos, o que revela a aceitação de diferentes possibilidades. O trabalho deste grupo foi dificultado por não registarem os dados de forma organizada e fazerem os encadeamentos lógicos apenas oralmente.

Segue-se a análise do processo da *justificação à prova* inerente ao processo de descoberta vai ser analisado de seguida.

Da justificação à prova

Após a produção de generalizações pelos grupos a professora proporcionou a discussão na turma para partilharem e discutirem os raciocínios dos diferentes grupos. As conjeturas não refutadas são as listadas na tabela 6 e não houve por parte dos alunos a preocupação em relacionar as conjeturas com a justificação de ao dividir o numerador um por aqueles denominadores dar DF ou DI.

Verificou-se que os alunos não se questionavam mostrando uma atitude de aceitação perante os factos. Exemplos disso são: o quererem chegar a uma regra que explique tudo; não reformularem conjeturas; e o aceitarem as conjeturas sem quererem saber porquê.

Tabela 6 – Conjeturas não refutadas

CONJETURAS NÃO REFUTADAS
As frações com denominador dobro de um número par são DF
As frações com denominador dobro de uma DF são DF e as frações com denominador dobro de uma DI são DI
Um a dividir por uma potência de 2 dá sempre DF
Frações com denominador com algarismo das unidades 9 ou 7 são DI
Qualquer fração em que o denominador seja uma potência de 5 é uma DF

A construção da prova ficou adiada para a segunda aula, pois até àquele momento ainda não fazia sentido para os alunos falar de prova.

A professora decidiu continuar com a investigação numa outra aula, pois parecia-lhe que estava ali muito material importante para analisar. Assim, ocorreu uma segunda aula, planificada com base nos diagnósticos realizados na primeira aula, para os alunos continuarem a descobrir respeitando os raciocínios já realizados pelos alunos.

Segunda aula:

A análise da primeira aula permitiu diagnosticar relativamente ao conhecimento matemático: a falta de sentido do número de todos os alunos relativamente: à operação de divisão; ao conceito de fração decimal; às regularidades de potências de 2 e de 5; ao conhecimento de que todas as potências de uma base são múltiplas dessa base, mas que o inverso não se verifica. Quanto à dificuldade de encontrar as regularidades em sequências de potências de uma certa base, destaca-se que ao longo da sua escolaridade está previsto trabalharem sobretudo com sequências de relação aditiva, progressões aritméticas e não geométricas. A procura de muitas frações, realizada com máquina de calcular, escondeu o processo da divisão. Nesta investigação os alunos não usaram o conhecimento (por não o terem) de que a divisão na nossa numeração, de base 10, por números divisores das potências de base 10 representa dízimas finitas.

Quanto ao processo de raciocinar os alunos apresentaram as seguintes dificuldades: em registar e organizar os dados; em identificar regularidades; em percecionar as regularidades; em generalizar; em reformular as conjeturas quando encontravam um contraexemplo; falta de capacidade de questionamento.

O raciocínio da turma enquadrou-se no padrão de raciocínio de verificação científica. O raciocínio de rendição foi o mais frequente, todavia ocorreu também, durante o processo, o barramento de exceções (*exception barring*) na reformulação da conjetura de dobro e o *Monster barring* quando a Sofia propôs ignorarem um contraexemplo.

O intervalo de tempo ente a primeira e a segunda aula teve a duração de um mês. Face aos diagnósticos realizados a professora optou por sugerir aos alunos a decomposição dos denominadores em fatores primos. Essa opção tinha a vantagem de aprofundar o conhecimento dos números e facilitar encontrar as regularidades. Com os denominadores decompostos em fatores primos e com o exemplo da primeira conjetura reformulada em turma sobre potências de dois, previa-se que os alunos conseguissem prosseguir com a investigação.

Na segunda aula, após ter sido feita uma análise aos registos da primeira aula, a professora conversou com os alunos sobre os aspetos que deviam ser melhorados, tais como a necessidade de registar todos os dados e de os organizar de forma a poderem observá-los sempre que necessário. A professora fez uma analogia entre o trabalho de investigação matemática e o de um detetive para que percebessem que o encadeamento do raciocínio necessita de um suporte de registo para observação dos dados. A orientação dada no sentido de como recolherem e organizarem os dados para sustentarem as suas conjeturas promoveu a organização dos registos.

Os alunos do grupo do António fizeram poucos registos na sua folha e a professora usa esse exemplo para que percebam que se não deixam provas do trabalho efetuado prejudicam o desenvolvimento do trabalho assim como a sua avaliação.

> **Prof**: O que se passa por exemplo com o grupo do António? Se eu não tivesse gravado não saberia que eles fizeram conjeturas interessantes, porque não escreveram quase nada no papel. Têm de registar.

A falta de registo e organização dos dados dificultou o processo de encontrar regularidades, pelo que a professora sugeriu como forma de organizar os dados a organização em tabelas. Nesta aula os alunos melhoraram a organização dos dados através da orientação para registarem tudo e separarem os dados em tabelas que relacionassem as características a observar. Depois de relembrar o processo que ocorreu até chegarem à generalização não provada de que as frações cujos denominadores fossem potências de 2 eram DF os alunos retomaram o trabalho em grupo.

> **Prof:** O que eu queria hoje era que vocês continuassem mas organizando os vossos dados. Se não estiverem a conseguir descobrir nada podem recolher mais dados e registar para que descubram outras relações. Para explorar têm de registar.

Propôs, então, aos alunos que continuassem a investigação usando a decomposição dos denominadores em fatores primos. Esta estratégia visava conhecer melhor as propriedades dos números e melhorar a perceção de regularidades.

O retomar da investigação deu-se pela consulta dos registos do trabalho já efetuado na primeira aula. Os grupos que mostraram mais dificuldades em retomar a investigação foram o grupo do António e o grupo da Liliana. No primeiro a dificuldade deveu-se à falta de registo na primeira aula e, no segundo, à dificuldade em retomar a investigação, pelo facto de não terem chegado à conjetura do dobro por exploração em pequeno grupo. A conjetura a que a turma tinha chegado, na primeira aula: as frações 1/n são DF quando os denominadores são potências de 2.

A experiência da formulação da conjetura sobre potências de dois permitiu-lhes fazer analogias com os denominadores múltiplos de 5 que originavam DF.

A professora elaborou um resumo, no anexo 4, que entregou aos alunos com a conjetura a que chegaram da potência de 2, no qual os dados estavam organizados em tabela e com os denominadores decompostos em fatores primos. Na folha que lhes entregou estava escrito o teorema fundamental da aritmética que tinha por objetivo que observassem os denominadores pelas suas propriedades fundamentais (Nogueira, Nápoles, Monteiro, Rodrigues, & Carreira, 2004).

Para ajudar o grupo do António, a professora forneceu a folha (anexo 5) para fazer o ponto de situação e depois orientou na forma de organizar os dados.

Os outros grupos iniciaram a investigação relembrando o que já tinham feito consultando a folha de registos da aula anterior.

Da conjetura à generalização

O processo de formulação de conjeturas tornou-se mais simples depois de saberem que as propriedades dos denominadores que fazem com que as frações em estudo sejam DF estão relacionadas com potências.

Os diferentes grupos usaram tabelas para organizarem os dados e procuraram regularidades nos denominadores escritos como produto de números primos.

Houve evidências de a maioria dos grupos terem melhorado a capacidade de "notar" conseguindo percecionar padrões e formular conjeturas passando do vasto conjunto de denominadores para o conjunto de denominadores que origina DF e, dentro deste, para subconjuntos que constituem sequências diferentes.

O processo de procura de regularidades não foi fácil para o grupo do António. Quando observavam a sua tabela com alguns números decompostos em fatores primos, a Daniela dá sinais de estar a reparar em alguma coisa, mas não consegue identificar.

> **Daniela**: Stora...nós chegamos a uma conclusão: o 5 é 5 uma vez, depois o 10 é 2x5 que dá o 10, o 20 é $2^2 \times 5$ e 25 é 5^2… Por isso tem que ter alguma coisa aqui.

A professora apercebeu-se da dificuldade em descobrir o que havia de comum e orientou-os no sentido de compararem o que há de comum entre as várias expressões de forma a descobrirem a regularidade.

> **Prof**: E o que têm em comum?
> **Todos**: o 5.
> **Prof**: Umas têm só o 5 e as outras?
> **Todos**: o 2.

Depois desta ajuda a Rosa conseguiu descrever a regularidade

> **Rosa**: 5 vezes [uma] potência de 2.

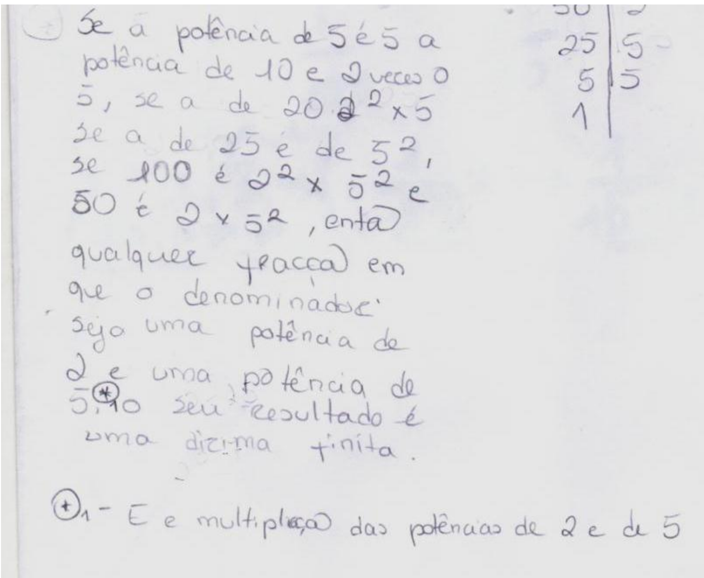
Este grupo registou, então, na sua folha a conjetura assim como os dados em que se apoiaram para a formular – figura 27.

A generalização realizada pelo grupo do António foi feita com base em poucos exemplos revelando um nível de prova de *empirismo naïf*.

O grupo da Liliana continuou a investigação listando os denominadores múltiplos de 5, figura 28, e, ao procurar alguma relação entre os denominadores que eram DF, a aluna Liliana estabeleceu outra conjetura: "Aqui dá 0, 2… Oh, espera e se nós puséssemos como nas potências de dois: $5^1 = 5;\ 5^2 = 25;\ 5^3 = 125, \ldots$ ".

Esta conjetura parece ter sido formulada por analogia baseada no facto de, no outro caso, ter resultado. O grupo prossegue a exploração tentando ganhar convicção na conjetura (ver figura 29).

Esta analogia surgiu, tal como no grupo da Rita na primeira aula, não por identificação dos denominadores com as potências de 5, mas porque no outro caso resultou.

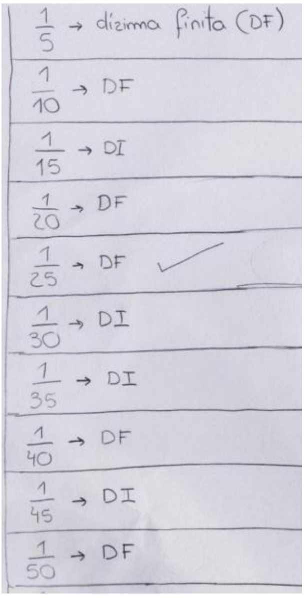

Se a potência de 5 é 5 a potência de 10 e 2 vezes o 5, se a de 20 2² x 5 se a de 25 é de 5², se 100 é 2² x 5² e 50 é 2 x 5², então qualquer fracção em que o denominador seja uma potência de 2 e uma potência de 5 (*)1 o seu resultado é uma dízima finita.

(*)1 - E multiplicação das potências de 2 e de 5

50	2
25	5
5	5
1	

Figura 27 – Conjetura do grupo do António aula 2

A Paula registou na folha as potências de 5, com expoente de 1 até 3, depois as introduzir como denominador. Testaram mais um expoente, o 4, e verificaram que 1/625 também é DF (figura 29).


$\frac{1}{5}$ → dízima finita (DF)

$\frac{1}{10}$ → DF

$\frac{1}{15}$ → DI

$\frac{1}{20}$ → DF

$\frac{1}{25}$ → DF ✓

$\frac{1}{30}$ → DI

$\frac{1}{35}$ → DI

$\frac{1}{40}$ → DF

$\frac{1}{45}$ → DI

$\frac{1}{50}$ → DF

Figura 28 – Organização dos dados do grupo da Liliana aula 2

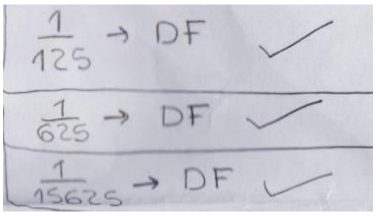


Figura 29 – Teste à conjetura potências de 5

Afirmaram, então, ter encontrado uma regra:

> **Paula**: Então já encontrámos uma regra.
> **Manuel**: A sério?
> **Paula**: Claro que encontramos: potências de 5.

Mais cuidadosa a aluna Liliana testou mais algumas potências de 5: expoente 5, 6 e 9. Estas particularizações são testes à generalização. Depois as duas alunas concluem:

> **Liliana e Paula**: Regra: as potências de 5 dão DF. No entanto há exceções.

Registaram exatamente isso na sua folha (figura 30)

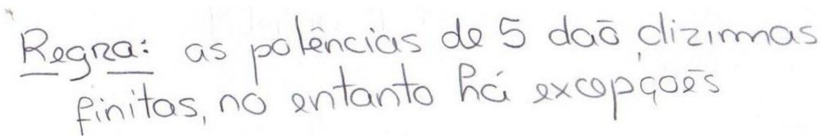


Figura 30 – Generalização potências de 5 grupo Liliana aula 2

Consideraram exceções a esta regra os outros denominadores que não são potências de 5 mas que são DF. Apesar de terem escrito a conjetura como uma implicação o facto de referirem que são exceções mostra que continuaram a achar que devia ser uma equivalência.

A generalização da conjetura de os denominadores serem potências de base 5 foi validada pelo grupo da Liliana testando mais alguns expoentes: 5, 6 e 9.

Seguiram a pista da sequência 5, 10, 20, 40, 80, … e depois prosseguiram com a exploração da sequência 25, 50, 100 … a partir da decomposição em fatores primos, figura 31, procurando regularidades.

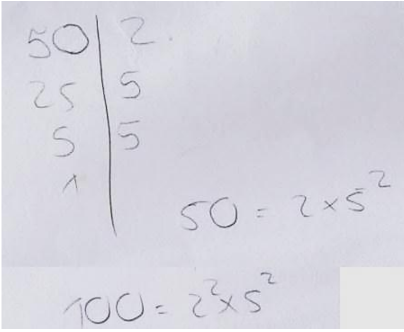


Figura 31 – Decomposição de denominadores

Liliana: Encontrei uma regra, olha, imagina…
Paula: É somar 5?
Liliana: Não, mas ainda falta o 25 e o 50 de resto dá para todos 5x2=10; 10x2=20; 20x2=40.

A Liliana estava a observar duas cadeias diferentes relacionadas com relação de dobro entre dois denominadores consecutivos, tal como já tinha sido discutido na primeira aula. A professora orientou os alunos para decomporem estes números em fatores primos, fazendo-os sair da relação recursiva, e eles registaram na sua folha duas leis de formações diferentes para a sequência 5, 10, 20, 40, 80… (ver figura 32). A primeira é recursiva, $2n$,em que n é o valor do termo anterior, e a segunda, 5×2^n em que n corresponde à ordem do termo, foi elaborada com base na decomposição em fatores primos.

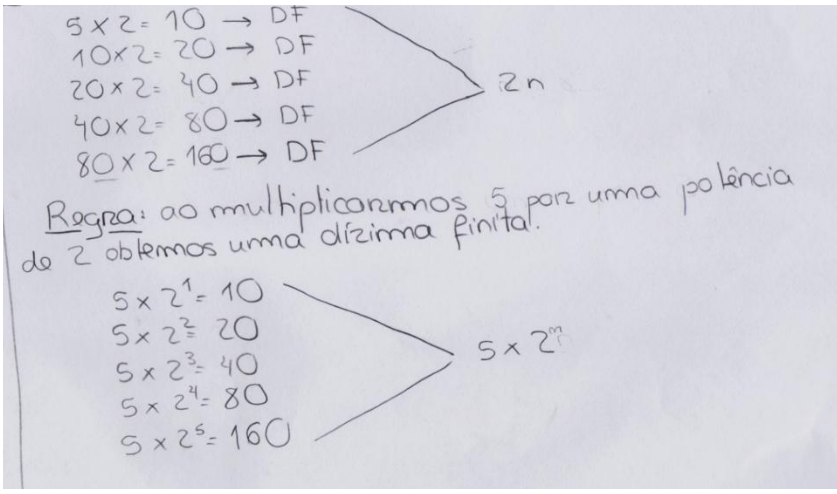


Figura 32 – Leis de formação diferentes para o grupo Liliana aula 2

A generalização da relação recursiva gerou uma discussão no seio grupo reveladora da dificuldade na escrita de expressões com letras. O Manuel discordou do raciocínio das colegas, questionando a expressão $2n$ e argumentando que se começa no 5 não devia estar na expressão um 2. De facto, considerarem $2n$ como expressão geral fazia sentido se a diferença entre denominadores consecutivos fosse 2 e não quando a razão entre denominadores consecutivos é 2. Mas as colegas explicaram que escrevem 2 por ser o dobro do número que substituem, ou seja n representa na expressão o termo anterior. Tal como referem Ponte, Branco, e Matos (2009) a abordagem recursiva não permite relacionar cada denominador com a sua ordem traduzindo de forma errada a expressão geral.

Manuel: Não, não é.
Paula: Sim, é multiplicar 2 pelo número que tu queres, não é qualquer um.
Manuel: Não! Era os múltiplos de 5: 5x2 que ía dar isto, então não é?
Liliana: Ah?
Paula: Mas n te esqueças que tu não começas…
Manuel: Mas ela começou no 5.
Liliana: Porque é o 5 que é o principal.
Manuel: Então porque é que está ali o 2?
Paula: Porque é este o dobro deste número
Liliana: Imagina que o n é 5, estás a ver?
Paula: Agora tens de multiplicar 2x5= 10 e 10 é DF. Percebeste?

As alunas ignoraram os protestos do Manuel e não compararam as duas expressões que escreveram para ver se são equivalentes. A Paula inicia uma comparação entre as duas expressões, mas não acaba o raciocínio parecendo estar confusa.

Paula: Então aqui pode ser 5x2…$2n$ mas n é potência de 2.

A introdução da linguagem simbólica nas conjeturas traduz uma evolução no processo de descoberta dos alunos, ampliando o âmbito de validade da conjetura formulada tal como refere Mason et al. (1985). No entanto, o uso da simbologia não faz com que esteja provado até porque era necessário que associada à simbologia estivesse um argumento genérico que provasse ser assim para todos os casos, tal como refere Stylianides (2009).

Prosseguiram com a exploração da sequência 25, 50, 100, … a partir da decomposição em fatores primos procurando regularidades.

Liliana: Agora aqui…só falta o 25 e o 50 para descobrirmos todas.
Paula: 50 dá 2×5^2.
(…)
Paula: E o 100? Até pode ser que dê esta regra e a potência se altere.
Liliana: Já reparaste Paula que à medida que o número fica maior vai aumentando a potência de 2?
Paula: Mas a de 5 mantém-se.
Liliana: Mas a de 2 vai aumentando 1.

Os alunos estavam a caminho de formular uma outra conjetura baseada em que a potência de 5 se mantinha e a potência de 2 aumentava uma unidade ($5^2 \times 2^{n-1}$) quando experimentaram o denominador 250, que note-se não fazer parte da sequência que estão a estudar, chegando à expressão 2×5^3. Observem-se os registos da figura 33.

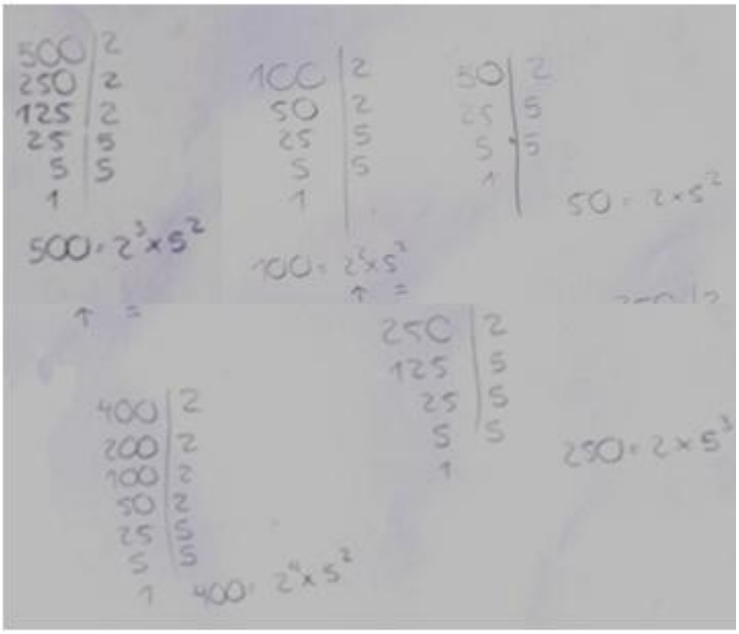


Figura 33 – Registo de denominadores fatores primos grupo Liliana aula 2

Liliana: Foi a potência de 5 que aumentou não foi a de 2.

Com base neste exemplo os alunos consideraram que a sua conjetura foi refutada. Iam render-se, negando a conjetura com base no contraexemplo 250.

Liliana: Então a nossa regra foi com o caneco.
Manuel: Foi pelo cano abaixo.

O grupo da Liliana realizou um raciocínio de análise da prova quando pensou ter encontrado um contraexemplo à conjetura e os alunos, em vez de se renderem, reanalisaram todo o processo formulando uma conjetura mais abrangente.

> **Paula**: Mas o 5 aumentou.
> **Liliana**: Mas nós estávamos a ver que o 2 aumentava e o 5 mantinha.

As alunas colocaram uma série de hipóteses disparatadas.

> **Liliana**: Paula! E se for todos os números que têm 50 aumenta o 5 e o 2 mantém?
> **Paula**: E se com 2 zeros o 5 mantém e o 2 aumenta 1.
> **Liliana**: 50. Se repararmos o 5 é que vai aumentar e o 2 mantém-se, mas se for com 2 zeros isto aumenta e o 5 mantém-se.

Decompuseram em fatores primos outros denominadores da sequência que estavam a considerar, incluindo agora o 500 (decomposto de forma errada na figura 33) que se insere na sequência 125, 250, 500, … Acabaram por formular uma conjetura mais geral, representada na figura 34. Este processo denota uma revisão dos dados e reanálise da situação em que não chegam a encontrar a falha no raciocínio efetuado e descobrem um padrão mais abrangente. Esta reanálise que a Liliana fez é uma espécie de *análise de prova* pois fez uma revisão do processo que lhe permitiu reformular o raciocínio para todos aqueles casos.

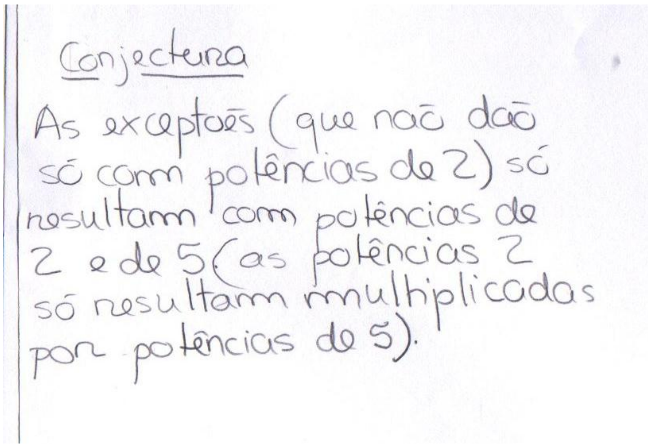
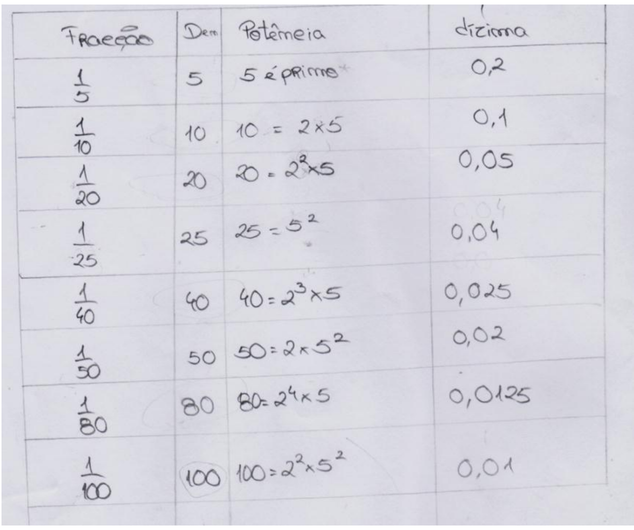


Figura 34 – Conjetura final do grupo Liliana na segunda aula

Esta conjetura referiu-se aos denominadores potências de 5, potências de 2 ou ao produto de potências de 2 por potências de 5.

No grupo da Maria identificaram os denominadores que faltavam, mas não se esqueceram de nenhum até 100: 5, 10, 20, 25, 40, 50, 80,100. Decompuseram-nos em fatores primos e organizaram a tabela (figura 35) até ao denominador 100.

No grupo da Maria identificaram os denominadores que faltam, mas não se esquecem de nenhum até 100: 5, 10, 20, 25, 40, 50, 80,100. Não há, no entanto, qualquer questionamento sobre se estes denominadores são suficientes e ou se haverá outras que não tenham esta explicação. A validação das conjeturas neste grupo foi feita por *empirismo naïf* tal como na primeira aula desta tarefa.



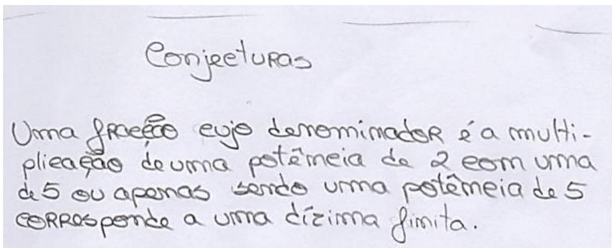
Fração	Den	Potência	dízima
$\frac{1}{5}$	5	5 é primo	0,2
$\frac{1}{10}$	10	$10 = 2\times5$	0,1
$\frac{1}{20}$	20	$20 = 2^2\times5$	0,05
$\frac{1}{25}$	25	$25 = 5^2$	0,04
$\frac{1}{40}$	40	$40 = 2^3\times5$	0,025
$\frac{1}{50}$	50	$50 = 2\times5^2$	0,02
$\frac{1}{80}$	80	$80 = 2^4\times5$	0,0125
$\frac{1}{100}$	100	$100 = 2^2\times5^2$	0,01

Figura 35 – Registo de dados grupo Maria aula 2

Estabeleceram, então, a conjetura para acrescentar à conjetura de os denominadores serem potências de 2:

> Uma fração cujo denominador é a multiplicação entre uma potência de 5 com uma potência de 2 ou apenas uma potência de 5 corresponde a uma DF.

Na folha fizeram o seguinte registo que consta na figura 36.

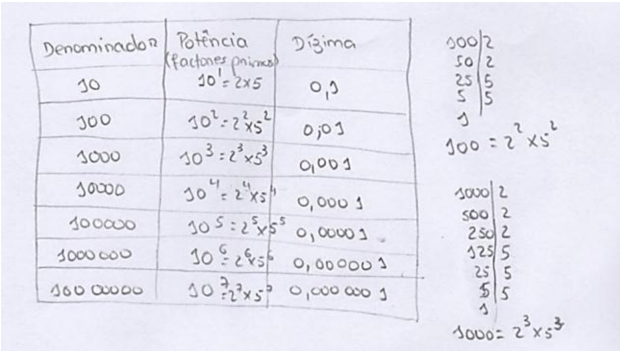


Conjeturas

Uma fração cujo denominador é a multi-plicação de uma potência de 2 com uma de 5 ou apenas sendo uma potência de 5 corresponde a uma dízima finita.

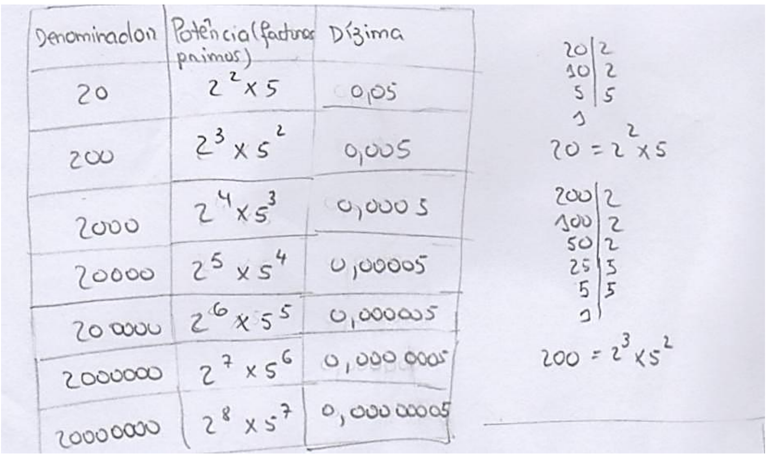
Figura 36 – Conjetura final grupo Maria aula 2

O único grupo que já tinha conjeturado sobre os denominadores potências de 5 na primeira aula, o grupo da Rita, decidiu particularizar para potências de 10, figura 37, e de seguida para o dobro das potências de 10, figura 38.



Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
10	$10^1 = 2\times5$	0,1
100	$10^2 = 2^2\times5^2$	0,01
1000	$10^3 = 2^3\times5^3$	0,001
10000	$10^4 = 2^4\times5^4$	0,000 1
100000	$10^5 = 2^5\times5^5$	0,00001
1000 000	$10^6 = 2^6\times5^6$	0,00000 1
100 00000	$10^7 = 2^7\times5^7$	0,000 000 1

Figura 37 – Tabela de denominadores potências de 10 grupo Rita segunda aula



Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
20	$2^2\times5$	0,05
200	$2^3\times5^2$	0,005
2000	$2^4\times5^3$	0,0005
20000	$2^5\times5^4$	0,00005
20 0000	$2^6\times5^5$	0,000005
2000000	$2^7\times5^6$	0,000 0005
20000000	$2^8\times5^7$	0,000 00005

Figura 38 – Tabela de denominadores dobro de potências de 10 grupo Rita

Estabeleceram, então, a conjetura sobre as potências de dez como se pode ver na figura 39.

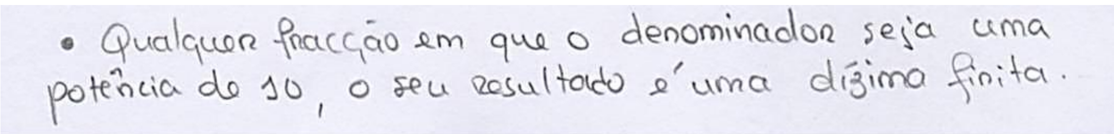
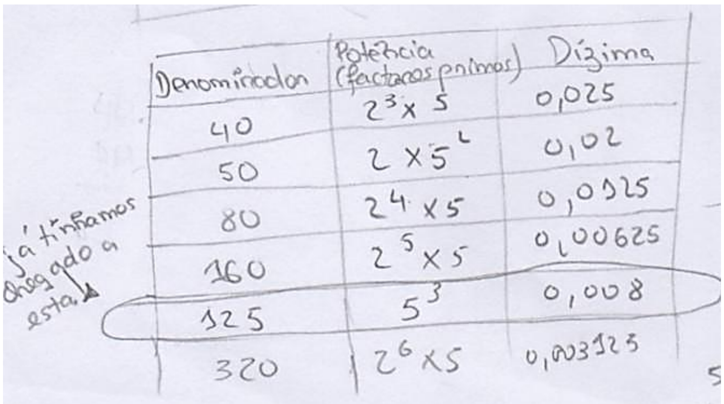


Figura 39 – Conjetura sobre potências de 10 do grupo da Rita aula 2

A professora pediu-lhes para se concentrarem nos denominadores que faltava observar indicando-lhes que estão a avançar muitos denominadores. Iniciaram, então, uma busca sistemática a partir do número 30, pois até 30 já tinham testado todas os que correspondiam a DF: 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25. De entre estes os denominadores 2, 4, 8, 16… pertencem à conjetura das potências de 2 e os denominadores 5 e 25 são potências de 5; o 10 é uma potência de 10 e o 20 está na tabela que fizeram de dobros dos denominadores potências de 10.

> **Rita**: Quais é que faltam?
> **Miguel e Mariana**: 42 não é, 48 não, 52 não, 56 não, 57 não, 58 não,59 não, 60 não, 61 não 62 não, 63 não, 64 sim, 65 não, 66 não, 67 não, 68 não, 69 não…80 sim…
> **Miguel**: Não saio daqui tão cedo. *Ó* stora isto está mau: um a um?
> **Rita**: Como vamos fazer isto?
> **Prof**: Se já o tivessem feito…! Investigar é isso, é preciso explorar.

Chegaram à conclusão que o próximo denominador não explicado é o denominador 40 e continuaram a procurar outros denominadores que pudessem ter escapado registando-os noutra tabela:



Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
40	$2^3 \times 5$	0,025
50	2×5^2	0,02
80	$2^4 \times 5$	0,0125
160	$2^5 \times 5$	0,00625
125	5^3	0,008
320	$2^6 \times 5$	0,003125

Figura 40 – Organização de outros denominadores grupo Rita aula 2

Observaram as suas tabelas, figura 37 e figura 38, reparando que nas potências de 10 os expoentes da base 2 e da base 5 são iguais, enquanto no dobro das potências de 10 os expoentes da base 2 são superiores em uma unidade relativamente à base 5. Na outra tabela, figura 40, aparecem outras relações entre os expoentes das duas bases, mas não procuraram qualquer explicação para o facto.

A partir destes dados conjeturaram e não houve qualquer discussão no grupo sobre se estes dados eram suficientes ou não. Estabeleceram, então, a generalização registada na figura 41.

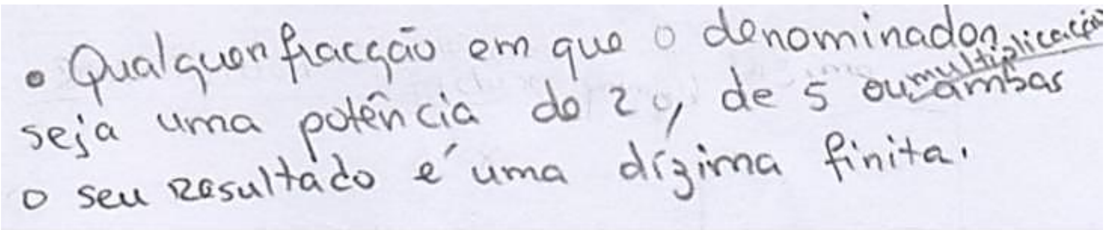


Figura 41 – Generalização final grupo Rita aula 2

Ao lado da generalização final constam várias expressões gerais na figura 42 para traduzir os denominadores que originam DF.

Estas expressões mostram as diferentes relações que os alunos identificaram entre os expoentes da potência de base 2 e da base 5. O caso de potências de 5 não apareceu, talvez por já o terem registado na aula anterior. Esta tentativa de abarcar todos os casos do produto de potências de base dois e de base cinco mostra que se aperceberam da possibilidade dos expoentes serem diferentes e das diferentes relações existentes entre eles. Faltou escrever a expressão do produto de qualquer potência de dois por qualquer potência de cinco necessitando usar duas variáveis: $2^a \times 5^b, a \ e \ b \ \in \mathbb{N}$.

No grupo da Rita apesar de também validarem as conjeturas revelando, inicialmente, um *empirismo naïf*, após a professora lhes dizer que estavam a testar denominadores deixando muitos por testar eles começaram a fazer um trabalho mais sistemático. Curiosamente traduziram as suas descobertas em linguagem simbólica dando um carácter mais geral às suas conjeturas.

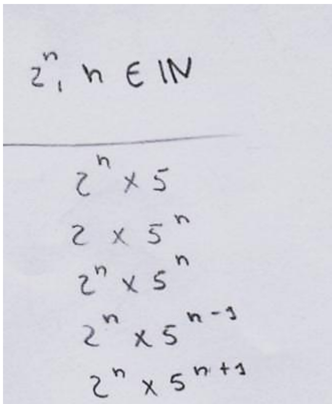


Figura 42 – Expressões gerais generalizações grupo Rita aula 2

O grupo da Liliana fez uma descoberta interessante descobrindo regularidades nas potências enquanto espera que os outros grupos concluam:

> **Liliana**: Já reparaste que as potências de 5 dão sempre 5 e as com 2 dá "coiso". Juntamente com a outra regra as excepções dão os números pares multiplicam-se sempre por 5 e os números impares só dão com potências de 5.
> **Paula**: Olha este é ímpar mas este que multiplicado por 2 dá par.

Observaram que as potências de 5 resultam num número cujo algarismo das unidades é 5, que as potências de 2 dão números pares e que quando são multiplicadas por 5 também dá número par. Este grupo partilhou essa descoberta quando apresentou as suas conjeturas à turma.

As relações encontradas entre os diferentes denominadores foram traduzidas por alguns alunos (Liliana, Paula e Rita) através de expressões algébricas e permitiu que os alunos fizessem conexões sobre os números e as suas regularidades, melhorando o sentido do número e o pensamento algébrico.

A organização dos dados em tabelas ajudou os alunos a encontrar regularidades para generalizar. Os testes que fizeram às suas conjeturas revelaram um maior cuidado ao nível de se certificarem da validade da sua afirmação. Contudo os testes realizados foram limitados pelas capacidades da máquina de calcular.

Da justificação à prova

As generalizações não provadas são as registadas na Tabela 7.

Tabela 7 – Conjeturas não refutadas na segunda aula

CONJETURAS NÃO REFUTADAS SEGUNDA AULA
As frações de denominador potências de 5 dão DF
As frações com denominadores com potências de 2 multiplicadas por potências de 5 dão DF
Qualquer fração em que o denominador seja uma potência de 10, o seu resultado é uma DF
Quando os denominadores são dobro das potências de 10 dão DF
Uma fração cujo denominador é a multiplicação de uma potência de 2, uma potência de 5 ou uma multiplicação de uma potência de 2 com uma potência de 5 corresponde a uma DF
As potências de 5 resultam num número ímpar e que as potências de 2 resultam num número par e que quando multiplicam potências de 2 por potências de 5 o resultado é par

Verificou-se que os alunos não se questionaram sobre qual seria a explicação lógica convincente para aquela conjetura. Contudo, se os alunos souberem que há explicações lógicas que explicam o porquê das afirmações matemáticas é natural que comecem a procurar essas explicações.

A descoberta da paridade do produto de dois fatores descoberto pela Liliana e pela Paula é um exemplo do desenvolvimento da capacidade de encontrar padrões e também da atitude de procurar uma explicação lógica para um facto matemático. As alunas revelaram uma atitude de questionamento no processo de descoberta sobre a paridade do produto de acordo com a paridade dos fatores. Quando partilharam as suas conjeturas com a turma explicaram-lhes essa descoberta.

> Aquela parte do ímpar e par foi depois de chegarmos às conclusões todas: como o 5 é ímpar vai dar números que são ímpares e aqui ao multiplicar por potências de 2, como 2 é par, vai dar números pares.

Esta descoberta surgiu da observação dos dados e é uma descoberta básica sobre os números que foi importante para as alunas. Elas compreenderam qual era a causa de alguns denominadores que originam DF serem ímpares e quiseram partilhar essa descoberta com os colegas.

A professora questionou dois grupos, por estarem mais adiantados, sobre a compreensão das explicações a que chegaram e os alunos em pequeno grupo pensaram um pouco sobre o assunto tendo registado o seguinte:

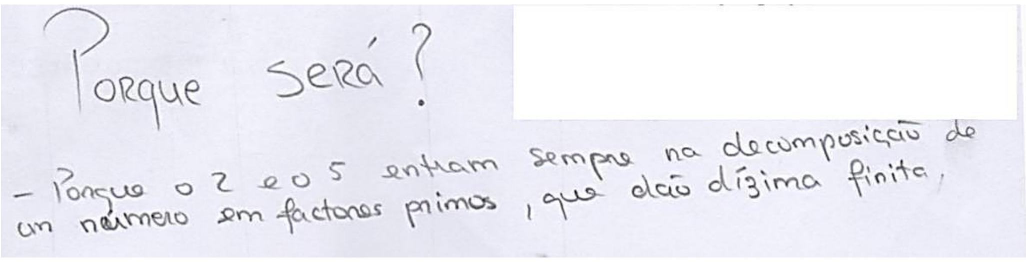


Figura 43 – Justificação do grupo da Rita

A resposta registada, figura 43, não é uma justificação, mas apenas a constatação de um facto. Faltava a compreensão da presença do 2 e do 5 e a relação com o conceito de fração decimal.

No grupo da Maria a professora incentivou-os a dividir recorrendo ao algoritmo para observarem o que acontece na divisão entre 1 e qualquer denominador que origina uma DI ou que origina uma DF. Os alunos tentaram dividir 1 por 40 e não conseguem chamando a professora para os ensinar a dividir por um divisor com dois algarismos.

> **Maria**: Ai dividir! Já não sei. Muito menos com 2 números.
> **Beatriz**: Faz na máquina.
> **Maria**: Não que eu quero saber quantos zeros dá aqui. Stora venha cá que ninguém consegue dividir 1 por 40, não sabemos fazer estas contas de dividir.

A professora fez com eles a divisão, explicando a lógica do algoritmo. Depois de os ajudar a relembrar o algoritmo fizeram outras divisões e acabaram por concluir que quando o dividendo 1, neste caso, é menor que o divisor usa-se como dividendo uma potência de 10 que seja maior ou igual ao divisor e que só os fatores 2 e 5 dividem as potências de 10. Este grupo escreveu uma justificação incompleta:

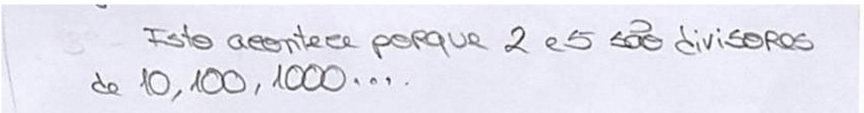

Isto acontece porque 2 e 5 são divisores
de 10, 100, 1000...

Figura 44 – Justificação do grupo da Maria

Os alunos procuraram durante muito tempo as características dos denominadores referidos sem controlar o que se passava com a divisão. Consequentemente, houve uma falha entre o processo de conjetura e o processo de prova. Era possível colmatar esta falha revendo todo o processo de conjetura e fazendo as ligações necessárias entre a estrutura matemática e as descobertas realizadas. Acontece que a professora sentiu que psicologicamente não era possível fazer a turma passar por esse processo, pois a tarefa tinha-os saturado. Este facto é evidente no final da segunda aula em que o António critica, com humor, o facto de a professora perguntar o porquê de tudo comparando a professora com o seu irmão mais novo.

A professora tentou orientar todos os alunos da turma para a questão da confiança na conjetura final, mas não encontrou recetividade por parte deles. Colocou a questão da justificação, tal como fez com os outros dois grupos: porque é que os denominadores da fração 1/n a que correspondem DF são potências de 2, potências de 5 ou o produto de potências de 2 por potências de 5? Nesse momento houve uma gargalhada geral e comentários do tipo "parece o meu irmão sempre a perguntar porquê". Esta reação revela que não estavam habituados a questionar os conhecimentos matemáticos e a procurar explicações para os mesmos.

Esta segunda aula contribuiu para clarificar alguns aspetos menos compreendidos sobre potências de base 2 e de base 5 o que foi conseguido através da decomposição dos denominadores em fatores primos.

Após a análise da atividade dos alunos na realização desta tarefa várias questões surgiram à investigadora sobre a prova:

i) Porque é que a justificação não surgiu no processo de conjeturar?

ii) Como podem os alunos provar quando o processo de exploração é essencialmente indutivo?

Tarefa 2 “A área de um retângulo especial”

Esta tarefa, figura 45, foi aplicada na aula de 2 de Março e fez parte da sequência de aprendizagem planificada para explorarem os casos notáveis da multiplicação do ponto de vista geométrico (ver anexo 6). As outras tarefas da sequência de aprendizagem envolviam sequências pictóricas por duas razões: colmatar as dificuldades diagnosticadas na procura de padrões e contribuir para o desenvolvimento de capacidades de generalização. A sequência de figuras foi traduzida pelos alunos numa sequência algébrica e por fim numa expressão geral algébrica para o caso notável do quadrado do binómio. Este processo de generalização envolveu manipulação algébrica permitindo aos alunos compreender alguns aspetos algébricos.

A área de um rectângulo especial

Um quadrado transforma-se num rectângulo não quadrado quando o seu comprimento cresce e a sua largura decresce o mesmo número de unidades de medida.

Investiga qual é a relação entre a área desse novo rectângulo e a área do quadrado inicial.

Prova essa relação para qualquer quadrado que se transforme em rectângulo nas condições indicadas.

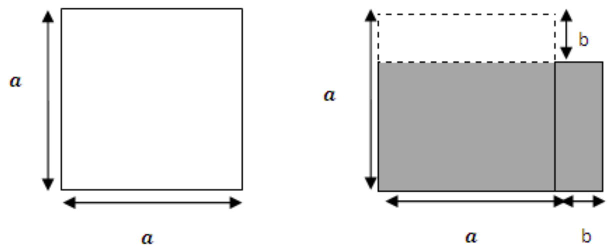


Figura 45 – Enunciado da tarefa “A área de um retângulo especial”

A constituição dos grupos de trabalho foi a que consta na tabela 8. A professora juntou no mesmo grupo os três amigos (Paulo, Manuel e Miguel) na esperança de que os três estivessem mais à vontade e trabalhassem melhor. Pretendia também testar o Paulo e ver se ele tinha melhorado a sua capacidade de concentração. Juntou a Rita no grupo da Maria pois nesse grupo ela não seria intolerante com ninguém. Juntou também a Paula a esse grupo, separando-a da Liliana para ver como trabalhavam uma sem a outra.

Tabela 8 – Constituição dos grupos de trabalho da tarefa "A área de um retângulo especial"

Designação do grupo	Elementos constituintes de cada grupo			
Grupo da Isa	Isa	Isabel	Rosa	Antónia
Grupo do António	António	Daniela	Francisca	
Grupo da Maria	Rita	Maria	Beatriz	Paula
Grupo da Liliana	Liliana	Sofia	Gabriela	
Grupo do Manuel	Manuel	Miguel	Paulo	

O enunciado da tarefa foi distribuído pelos grupos sem qualquer introdução e os alunos começaram a pensar na relação das áreas das duas figuras intuindo que as áreas eram iguais. À medida que os alunos pensaram melhor, sobre essa primeira conjetura, começaram a duvidar dessa ideia e sentiram a necessidade de investigar.

Da conjetura à generalização

Os alunos estiveram mais à vontade com o processo de descoberta. Formularam conjeturas e procuraram evidências para as mesmas, recorrendo menos ao professor, autoridade externa, e baseando-se mais nas suas próprias ações.

Todos os grupos formularam a primeira conjetura de que as áreas do quadrado e do retângulo são iguais. Articularam esta conjetura por visualização da figura e não por particularização como se pode perceber pelo exemplo do diálogo de um dos grupos.

No grupo do Manuel manipularam a figura mentalmente e concluem que as áreas são iguais.

> **Manuel**: olha aqui diz que: este quadrado vai-se transformar neste retângulo. Que o que cresce aqui …
> **Paulo**: O que está a mais aqui vai passar para o lado…
> **Manuel**: o que decresce aqui é o mesmo número de unidades. Podemos dizer que este bocado que está aqui passa para o lado direito, por isso dá a mesma área.

Os grupos, depois de concluírem que as áreas eram iguais, iniciaram o trabalho de registo da sua conclusão e é ao fazê-lo que se instala a dúvida. A dúvida poderá ter sido gerada pelo desenvolvimento da expressão não bater certo com o que estavam a dizer ou por observarem a figura mais atentamente. A identificação da necessidade de investigar deu-se através da dúvida de as áreas serem ou não iguais.

No grupo da Maria quando começaram a escrever dão-se conta que, afinal, as áreas não são iguais:

> **Maria**: Área do quadrado é a^2. A área do retângulo (a-b)(a+b)… não fica igual.
> **Beatriz**: Pois não, a do retângulo é menor.
> **Maria**: Não pode ser, não fica igual.
> **Paula**: Falta esta altura.

O Manuel mostra dúvida e o Paulo apoia-se na figura para mostrar que são iguais.

> **Paulo:** Aqui vai ser a vezes a.
> **Manuel**: Vai ser a menos b vezes a mais b. Acho que não vai dar a mesma coisa…
> **Paulo**: Vai vai Manuel, porque esta medida é deste e vai desaparecer daqui e vai ficar aqui.

A reação dos alunos perante a dúvida é a de explorar em vez de chamar o professor. Esta atitude revela maior autonomia e capacidade de descoberta.

Os alunos mostraram-se mais críticos ao prosseguirem com a exploração contra a sua primeira intuição de as áreas serem iguais. As estratégias escolhidas, nos diferentes grupos, para explorar a situação e chegar a consenso sobre a relação entre as áreas das figuras foram as seguintes: particularização, manipulação algébrica sem relacionar com as áreas, cálculo das áreas parciais das figuras usando medidas genéricas e manipulação mental da figura. Todas as estratégias utilizadas fizeram emergir a compreensão da situação com exceção do raciocínio de manipulação algébrica sem relação com as áreas da figura.

O grupo do António particularizou para um caso a=4 e b=2, mas só a Daniela viu que as áreas eram diferentes. Durante a discussão continuaram divididos por terem errado os cálculos. Na fase de discussão com a turma corrigiram os erros e chegaram, então, à conclusão de que naquele caso concreto as áreas diferiam de 4 unidades. Este grupo trabalhou pouco distraindo-se imenso. O António esteve constantemente desconcentrado e as chamadas de atenção não surtiram grande efeito. O António queria que a professora fosse discutir com ele o problema. Esta atitude confirmou a ideia da professora de que o António se sente mais estimulado a discutir com a professora.

O grupo do Manuel também particularizou, mas chegaram a uma conclusão dentro do grupo.

> **Paulo**: Olha dá medidas a isto. Este lado é 2. Daqui aqui vai ser 2 e daqui aqui vai ser 1. (2-1)*(2+1) dá 3.

A particularização para a medida do lado mostrou-lhes que as áreas do retângulo e do quadrado não são iguais.

> **Miguel**: Não sei porquê mas acho que estamos a fazer mal. (…) Mas eu acho que aqui não é 1, porque isto não é metade.

O Miguel não viu o desenho como um esquema representativo da situação esperando que ele traduza visualmente as concretizações das medidas. O Paulo discutiu com ele a medida das partes em termos de relações, mas o Miguel continua a dizer que não pode ser.

Particularizaram de novo atribuindo o valor 3 à medida do lado quadrado e 1 para o valor de b como se pode ver na figura 46.

> **Manuel:** 3-1=2, 3+1=4 dá 8 e aqui vai dar 9. Não vai ser a mesma área.

Chamaram a professora e explicaram-lhe o raciocínio realizado até àquele momento:

> **Manuel:** Stora nós estávamos a pensar assim …achamos que este bocadinho que tirou aqui e meteu aqui é a mesma área.
> **Prof:** E como é que podem saber se é igual ou não?
> **Paulo:** Estamos a dar medidas.

Os alunos mostraram à professora a particularização de que resultou 9 para a área do quadrado e o 8 para a área do retângulo.

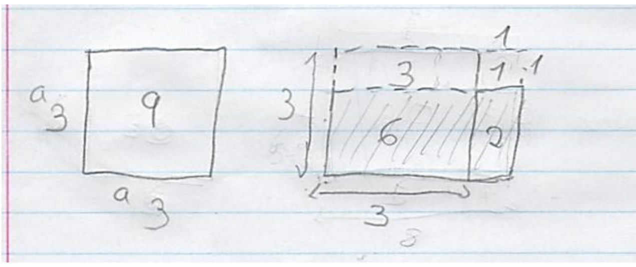


Figura 46 – Particularização de medidas pelo grupo do Manuel

O grupo do Manuel particularizou para três casos e ficou convencido. Aliás para eles bastava um, mas a professora mostrou desconfiança e incentivou-os a fazer outras particularizações.

> **Prof**: Então não é igual? Pensem melhor.

Os alunos continuaram a explorar e argumentaram entre si porque é que as áreas não são iguais:

> **Manuel**: Não pode ser.
> **Paulo**: Ai, não pode ser porque este é maior.
> **Miguel:** Que burros. Isto pode ser x, esta medida.

Miguel atribuiu uma letra ao valor do lado, o que traduz um esforço de abstração da medida. No entanto fixa o valor de b em 1 e não consegue ver o valor de x como variável.

> **Manuel:** Não, mas olha esta largura é a mesma que daqui aqui.
> **Paulo:** Mas o comprimento aqui é que não é o mesmo.
> **Manuel:** Pois não, mas a largura vai ser a mesma.
> **Miguel**: Porque nós vamos tirar este daqui e era o mesmo que este daqui aqui ao fundo, por isso a este vamos tirar 1. Acho que já estou a perceber.
> **Paulo**: Não, vamos ter que tirar este lado, tirar este quadrado.
> **Manuel**: não, vamos tirar 1 unidade… ou o quadrado.
> **Paulo**: É 1 porque 1x1 é 1. Tu não sabes as medidas daqui aqui.
> **Miguel**: Eu meti aqui x porque não sei as medidas daqui aqui.

O Manuel tentou explicar a partir do caso geral, mas depois resolveu concretizar ou por ter dificuldades algébricas ou para que o Miguel perceba.

Manuel: Já temos aqui as medidas, não é por nada, aqui é b. b vezes b é b ao quadrado. Depois este retângulo é a vezes b … é melhor meter números.

O Miguel não percebeu para que é que os colegas querem tirar a área do quadrado, o que revela não ter percebido que se pretende uma relação entre as duas áreas. As afirmações de Miguel mostram que a sua preocupação é apenas determinar a área do quadrado e a área do retângulo e não relacioná-las.

Miguel: Temos duas áreas.
(…)
Miguel: Basta somar isto com isto. Isto aqui está de fora.
(…)
Miguel: Basta somares esta área com esta e já está. Estais a complicar o exercício.
Paulo: Tens de tirar este e este.
Miguel: Para quê?
(…)
Miguel: Espera aí, Mas tu não tiveste o trabalho de tirar a. A área é só deste coiso e a área é só deste e somas este com este.
Paulo: E dá 8. Ao tempo que já fizemos isso.

Os colegas não perceberam qual era a dificuldade do Miguel, pelo que fica difícil entenderem-se.

A professora apercebendo-se que só tinham feito um caso disse-lhes: “Só experimentaram num caso, não foi?”. Os alunos fizeram, então, outra concretização para $a = 5$ e $b = 1$ o que resultou na área do quadrado 25 e do retângulo 24.

Manuel: Olha tens esta área. Têm de ser diferentes os números. (desenha) vamos fazer mais um. Área 25. 5 - 1 dá 4 que é este lado aqui. 4 x4 é 16. 1 x 4 é 4.
Paulo: x 5 Manuel.
Manuel: Não este lado é 1. Ok, enganei-me.
Paulo: 5 x 4 dá 20. 5 -- 1 dá 4 e 4 x 5 dá 20. Aqui dá 4. Agora aqui é 20 + 4=24 e ali é 25. Vamos tirar 1.

Chamaram a professora para lhe mostrar que o raciocínio continuava a ser válido e a professora dá conta que eles fixaram o valor de b em uma unidade.

Paulo: Ó stora, pode chegar cá.
Manuel: Ó stora, fizemos aqui outro quadrado e deu 25 e 24. (Bate uma palma) É outra vez 1.

A professora orientou-os a procurar outros casos e os alunos antes de atribuírem outro valor a b discutiram entre eles sobre os efeitos dessa mudança.

> **Prof**: Fixaram o b como 1? Experimentem com outro b . Não devem ficar presos num caso, porque pode dar para um caso e não dar para outro.
> **Paulo**: Agora já não vai dar.
> **Manuel**: Vai vai.

Esta dica foi importante pois parece que Paulo pensava que o b só podia ser 1 unidade. Depois fizeram mais um caso com $a = 6$ e $b = 2$ e o trabalho de equipa permitiu que fizessem uma conjetura sobre os efeitos da variação do valor de b na situação. Ao fazê-lo começaram a compreender de forma mais geral que era a área do quadrado de lado b que mudava.

> **Paulo**: Se fizeres com 2 vai ser menos 2. Não vai ser 4. Vai ser 2x2, vai dar 4.
> **Manuel**: E prontos, é o mesmo raciocínio, ouve lá. Vamos estar sempre a tirar a área deste. Vamos tirar 4. Se for 2 vamos tirar 4. Se aqui for 6, lado 6 e aqui vai ser na mesma: vamos tirar este bocadinho e vamos metê-lo aqui. 2 e aqui 2. Agora 6-1=5 e…
> **Paulo**: 6 x 6 é 36 e 6 x 5 é30 ou 5 x 6 é 30.
> **Miguel**: Ei dá um a mais pelas minhas contas. Aqui tens de fazer 6 - 2.
> **Paulo**: 6 x 2 dá 12 e aqui 2 x 2 dá 4

Os erros de cálculo poderiam ter inviabilizado a investigação, mas as boas capacidades de cálculo do Miguel permitiram refazer o raciocínio após as correções.

> **Miguel**: Estais a fazer mal Aqui não é 6 menos 2? Que dá 4 e 6 vezes 4 é 24.
> **Manuel**: Então 6 x 4 é 24 ; 2 x 4 dá 8. 24 - 8? Este mais este 32 e 36 - 4 dá 32.
> Teatcher. Uhuhuh! Vai dar a mesma coisa. Aqui metemos 6 e depois deste lado metemos 2 e vai dar a mesma coisa: este dá 36 e aqui é 36 - 4 é 32.
> **Prof**: Então qual é a conclusão?
> **Manuel**: A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar este quadrado.
> **Paulo**: A área daquele quadradinho.

Este grupo modificou a sua conjetura de as áreas serem iguais para a conjetura de a área do quadrado ser igual à do retângulo tirando um quadradinho. Mas não explicaram de forma genérica qual é a medida desse quadradinho.

Colocou-se nesse momento a questão de provar para todos os casos, caso a caso, por exaustão, mas é impossível porque há infinitas medidas possíveis. Era então necessário produzir um argumento geral que cobrisse todos os casos – exemplo genérico. Estes alunos encontravam-se no nível de *empirismo naïf*, pois aceitaram as conjeturas como verdadeiras para um reduzido número de casos.

A professora tentou que eles refizessem o raciocínio, mas no exemplo genérico através do uso de letras. Para isso orientou-os passo por passo:

> **Prof**: Se usarem letras o que estão a tirar?
> **Manuel**: Diga, stora?
> **Paulo**: Estávamos a tirar o b.
> **Prof**: Usando b a letra. Um quadrado de lado b tem área?... Se fosse 2 era 2 ao quadrado se fosse 3 era 3 ao quadrado, e se fosse b era…
> **Manuel**: b ao quadrado.
> **Prof**: Conseguem fazer uma expressão?

Os alunos mostraram alguma dificuldade e vão construindo a expressão algébrica de acordo com as orientações:

> **Manuel**: É $a-1$.
> **Prof**: Usa a letra b.
> **Manuel**: $a-b$. Ai não.
> **Prof**: Sim $a-b$ é o lado.
> **Manuel**: é $(a-b)$ ao quadrado.
> **Paulo**: Porquê ao quadrado?
> **Prof**: Este lado é?
> **Manuel**: $a-b$.
> **Prof**: E este?
> **Manuel:** É $a+b$.
> **Prof:** Então como fica a área?
> **Manuel:** É $a-b$ mais…
> **Prof:** Então escrevam
> **Prof:** somam-se os lados para calcular a área?
> **Manuel:** Não, é vezes.
> **Prof:** Multiplica-se comprimento pela largura, não é?
> **Paulo:** x $(a+b)$.
> **Prof: E**ntão vai dar?
> **Manuel:** vai dar um resultado e ao resultado vamos tirar o quadrado.
> **Prof:** E este resultado tem a ver com esse quadrado?
> **Manuel:** Sim.
> **Prof:** E como é a área dele com letras?
> **Manuel:** É $a \times a = a^2$.
> **Miguel**: E como fazemos $a \times b$?
> **Paulo**: Fica ab.

Prof: Então fica igual…
Manuel: Igual a $a^2 - b^2$.
Prof: Os vossos casos concretos são desta expressão.

Esta construção da expressão *a posteriori* não terá o mesmo valor cognitivo que a construção das relações realizadas por eles. Mas a professora considerou que valia a pena tentar refazer o raciocínio com as medidas representadas por medidas genéricas.

O raciocínio destes alunos encaixa no padrão de raciocínio de verificação científica, uma vez que as particularizações que fizeram os levaram a ver um padrão, depois articularam uma conjetura, testaram-na com outros exemplos e generalizaram (na perspetiva dos alunos).

O grupo da Isa tentou chegar à relação entre as áreas por manipulação algébrica sem relação com as áreas, mas como cometeram uma série de erros algébricos, detetados na fase de discussão, não conseguiram chegar à relação.

No grupo da Liliana iniciaram a investigação pelo cálculo da área dos dois retângulos e como esta estratégia não as ajudou, até porque continha erros, tentaram chegar à relação por visualização e encaixe do retângulo sobrante do quadrado. Usaram, então, as duas estratégias: cálculo das áreas parciais das figuras usando medidas genéricas e por manipulação mental da figura.

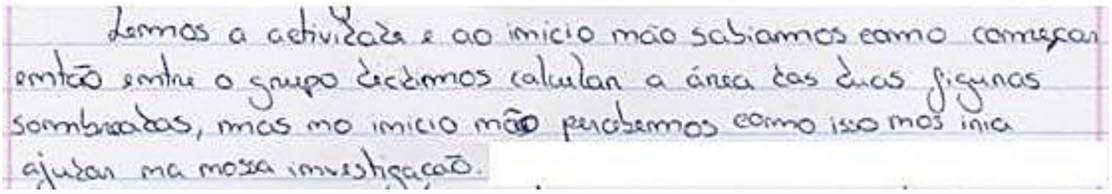

Lemos a actividade e ao inicio não sabiamos como começar então entre o grupo decidimos calcular a área das duas figuras sombreadas, mas no inicio não percebemos como isso nos iria ajudar na nossa investigação.

Figura 47 – Extrato relatório Liliana

Fizeram o cálculo algébrico das áreas dos dois retângulos 1 e 2, da figura 48, que compõem o retângulo de lados com comprimento $a - b$ e $a + b$.

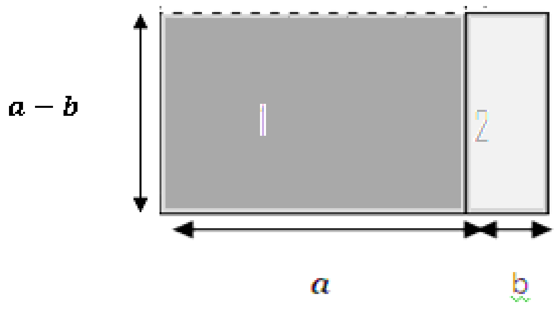
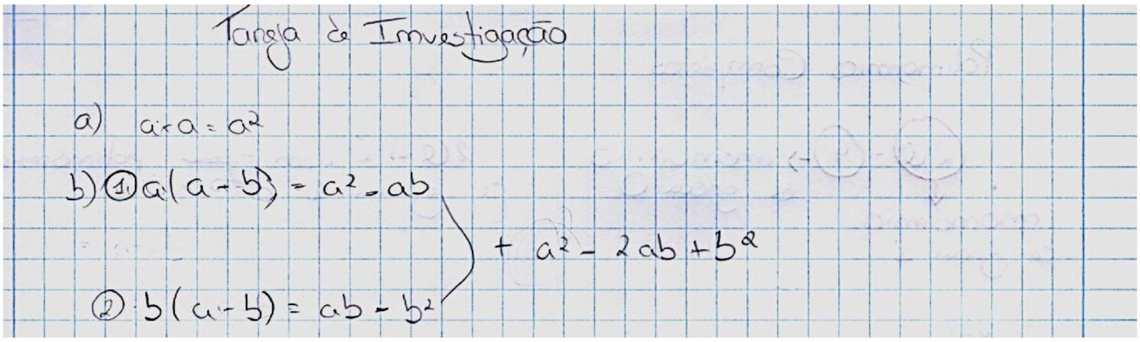


Figura 48 – Retângulo dividido em duas partes

No entanto, quando calcularam a área total, soma das áreas 1 e 2, erraram na expressão do resultado da adição das duas expressões da área como se observa na figura 49 em que no resultado de $a^2 - ab + ab - b^2$ escreveram $a^2 - 2ab + b^2$em vez de $a^2 - b^2$.


Tarefa de Investigação

a) $a \times a = a^2$

b) 1. $a(a-b) = a^2 - ab$

2. $b(a-b) = ab - b^2$

$+\ a^2 - 2ab + b^2$

Figura 49 – Registo das expressões das áreas parciais grupo Liliana

Como esse resultado errado não ajudou a que compreendessem a relação entre as áreas das duas figuras seguiram outra estratégia, proposta pela Sofia, e com base na observação do esquema como explicado no extrato do relatório da Liliana, figura 50.

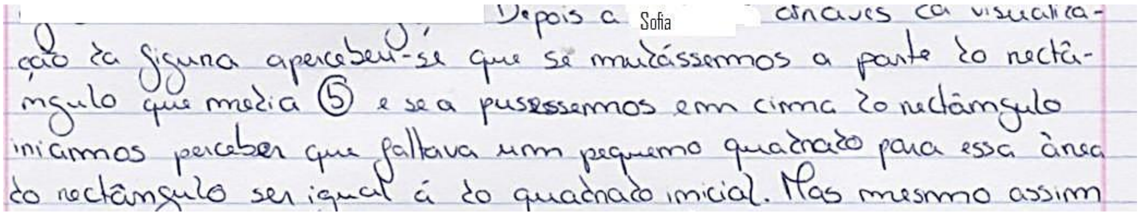

Depois a Sofia através da visualização da figura apercebeu-se que se mudássemos a parte do rectângulo que media 5 e se a puséssemos em cima do rectângulo iniciamos perceber que faltava um pequeno quadrado para essa área do rectângulo ser igual á do quadrado inicial. Mas mesmo assim

Figura 50 – Extrato do relatório da Liliana

O grupo da Liliana chegou a um argumento geral, mas para se convencerem particularizaram. No seu relatório Liliana explica que confirmaram este resultado com medidas concretas como se pode ler na figura 51.

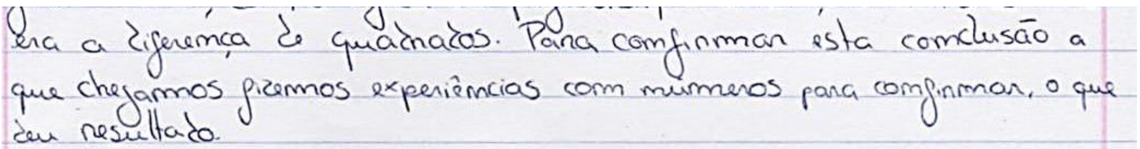

era a diferença de quadrados. Para confirmar esta conclusão a que chegamos fizemos experiências com números para confirmar, o que deu resultado.

Figura 51 – Extrato relatório Liliana

Nos registos encontra-se, apenas, uma experiência de concretização para a=5 e b=2.

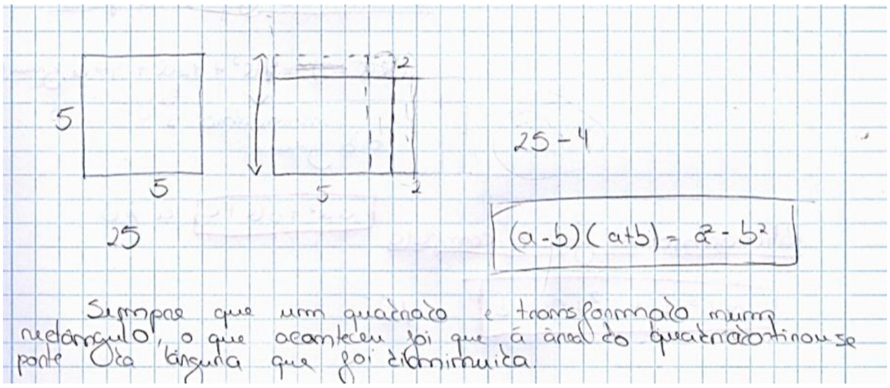


Figura 52 – Esquemas e anotações do grupo da Liliana

Esta particularização é feita como um teste à generalização constituindo por isso um raciocínio dedutivo. Esta ação é uma forma de verificação que revela um nível de experiência crucial, pois pretende assegurar a generalidade da conjetura como refere Balacheff (1987).

Este grupo explicou à turma a relação entre as áreas mostrando que visualmente sobra a área do quadrado com base num esquema que desenhou.

> **Liliana**: Nós calculámos esta área que dava a^2 e depois para vermos a diferença fizemos por letras: colocamos esta parte ali em cima e sobrava b. [refere-se a quadrado lado b].

As alunas fizeram inferências sobre as relações entre as medidas das figuras e ao manipularem visualmente as partes da figura chegaram à conclusão de que a área do quadrado inicial excede a área do retângulo em b^2.

Contudo chegar à expressão algébrica correta não significa que tenham provado, a não ser que haja uma explicação lógica geral a acompanhar a fórmula. Nesse caso, poder-se-á aceitar o argumento como prova segundo a classificação de Stylianides (2009). No relatório não está explícita a compreensão de que a área do quadrado sobrante é b^2. No entanto estas alunas ao particularizarem o que supostamente seria o seu exemplo genérico (representativo de todos os casos) revelaram não o aceitarem como genérico.

O grupo da Maria seguiu a estratégia de manipulação mental da figura com medidas genéricas. As alunas discutiram o que bastaria para indicar a relação entre as duas áreas. Põem a hipótese de apenas as compararem dizendo que é menor ou maior mas parece-lhes insuficiente.

> **Maria:** Temos que dizer qual é a relação. A área do retângulo…
> **Rita**: É menor que a área do quadrado.
> **Paula**: É só para dizer isso? É para dizer qual é a relação. E vamos só dizer que é menor? A área do retângulo é menor do que a área do quadrado.

As alunas refletiram sobre o enunciado e deram conta que está lá a palavra “provar”. Mostraram-se, no entanto, confusas com a introdução desta palavra.

A questão colocada pela Maria e pela Rita sobre o que significa provar, mostra o efeito da experiência da tarefa anterior em que se falou de prova, mas não se provou. Esta segunda tarefa provocou um conflito na noção de prova pelo facto de na tarefa anterior terem particularizado e generalizado apenas com base nos exemplos.

. A resposta da professora, distinguindo prova de particularização, deu-lhes segurança para continuar o percurso que intuíram.

A Rita sabia que para provar precisava de uma relação genérica, mas não sabia qual o caminho a seguir para o fazer. Na experiência da tarefa anterior os alunos seguiram o raciocínio indutivo em que se foram convencendo caso a caso e Rita questiona-se se aqui terá de fazer o mesmo.

> **Rita**: E agora prova essa relação para qualquer quadrado... Agora é uma coisa geral. Temos se calhar que pensar noutros quadrados e ver que vai ser sempre assim.

Também Maria coloca a hipótese de fazer alguns casos e depois formular uma conjetura.

> **Maria:** Podemos fazer alguns e depois escrever uma conjetura. Então?

As alunas não conseguem avançar sem esclarecerem a sua dúvida sobre o que é “provar” e chamaram a professora. A pergunta que Maria faz traduz de forma clara que existe a dúvida de que a prova tenha de ser obtida por indução.

Maria: Stora? É para provarmos, como assim? Ou substituir os valores?

A professora explica a diferença entre concretizar e provar, aproveitando para dar a dimensão de explicação à prova.

Prof: Têm que explicar e conseguir provar que dá para todos. Quando a gente usa valores estamos a dizer que dá para aquele caso. Isso é concretizar.

As alunas continuaram o seu trabalho colocando de lado a ideia de particularizar. A Rita revê o raciocínio com o grupo.

Beatriz: Vai ficar um retângulo, pois um bocado é mais pequeno que o outro. Quando tirarmos uma parte deste quadrado é uma parte de um lado igual, por isso não vai ficar a mesma área.

Tiveram, no entanto, dificuldades em decidir qual a estratégia a seguir e discutem em termos de manipulação da figura. Neste diálogo das alunas percebe-se como a forma de apresentar o raciocínio envolve decisões mais complexas do que podia parecer à primeira vista.

Maria: Como vamos fazer?
Rita: Só se pusermos que a área do retângulo novo vai ser igual: pomos este total menos uma parte que se vai tirar aqui. Agora se pusermos este igual a este é porque não vai ser igual.

Decidiram colocar as medidas genéricas a acompanhar os esquemas e foram interpretando essas expressões algébricas com a figura. Este processo permitiu-lhes reorganizar o pensamento e analisar as propriedades da figura. É a necessidade de mostrar o seu raciocínio que as motiva a provar.

Maria: Se desenharmos esta parte acrescentada fica até aqui e esta largura é b e aqui é b também.
Rita: Esta vai ser igual a esta daqui até ao fim.
Maria: Pronto. O outro quadrado é igual a este, mas não é este [todo]. Ele é até aqui. (Maria aponta para o quadrado não preenchido). b^2. $a^2 - b^2$ é a área dele todo.
Rita: A área deste todo é qualquer coisa desta menos as partes que se tiram.
Maria: O que é que acham?
Paula: É uma hipótese. Vamos tentar.

> **Maria**: Texto ou cálculo? Cálculo! Expressões. Depois podemos pôr em fórmula para se perceber.

A Rita formulou a conjetura "A área do retângulo feito a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma porção". Nesta conjetura faltou definir porção.

> **Beatriz**: A área do retângulo…
> **Maria**: Mas a área do retângulo em que, se é uma regra geral, em que a largura…
> **Rita**: A área o retângulo feito a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma porção.

As alunas preocuparam-se com a fase de discussão com toda a turma por ser preciso convencê-los e decidiram fazer um esquema para que os outros percebessem melhor.

> **Beatriz**: Menos uma parte.
> **Rita**: Um lado do retângulo. Depois pomos um desenhinho. Lembras-te do esquema que a Liliana fez? Podíamos fazer um esquema desses para as pessoas perceberem melhor.

Relativamente ao desenvolvimento do raciocínio surgem ideias contrárias: a Rita quer chegar ao retângulo a partir do quadrado e a Maria quer chegar ao quadrado a partir do retângulo.

> **Maria**: É a construção do quadrado a partir das partes do retângulo. Sim, tu ao fazeres isto e pores ali estás a construir o quadrado com as partes do retângulo.
> **Rita**: Ao pôr isto aqui vai ser preciso, então. Aqui estamos a dizer que não é, mas é. Ao pormos esta parte daqui para aqui vai ficar até aqui e vai ser preciso isto.
> **Maria**: Mas estamos a fazer o raciocínio ao contrário. A área do retângulo a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma parte que não fica preenchida se construirmos o quadrado inicial com as partes do retângulo. É uma confusão.
> **Rita**: Mais valia não fazer por escrito e fazermos em desenhos.

Decidem fazer por desenhos e Paula dá a ideia de fazer um esquema dinâmico.

> **Paula**: Eu tive uma ideia. Esta parte aqui e queremos pôr esta peça aqui, fazemos uma seta daqui para aqui e depois fazemos um igual a este mas com esta peça pintada.

O esquema que as alunas fizeram está representado na figura 53 em que partindo do retângulo mostraram o que faltava no quadrado.

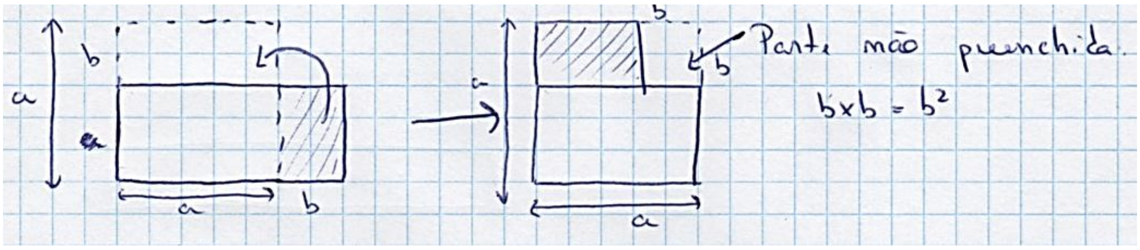


Figura 53 – Esquema do grupo da Maria da relação entre as áreas

Para além do esquema as alunas concluíram que a relação entre as áreas pode ser traduzida por $(a-b)\ (a+b) = a^2 - b^2$.

> **Maria**: E agora que conclusão podemos tirar daqui?
> Que $(a-b) \times (a+b)$ é igual a…
> **Rita**: $a^2 - b^2$.

Mostraram a conclusão à professora.

> **Maria**: Isto foi a 1ª parte: esta parte deslocámos para aqui, a tentar construir o quadrado, e faltou um bocadinho então vimos que (a-b)x (a+b)=a^2-b^2

O raciocínio desenvolvido pelas alunas foi um raciocínio do tipo dedutivo uma vez que selecionaram a informação relevante da situação, relacionaram as medidas das formas da figura com as respetivas áreas e fizeram inferências sobre as relações entre as áreas. Pode-se considerar que provaram para todos os casos, pois o seu esquema dinâmico mostra as transformações necessárias para inferir a conclusão sem qualquer recurso a exemplos particulares, mas de forma genérica (figura 51). O nível de prova situa-se ao nível da experiência conceptual. Esta afirmação baseia-se na apresentação da prova e no processo de descoberta seguido pelas alunas.

Da justificação à prova

Muitos alunos mostraram confiar nos argumentos empíricos para validar conjeturas enquanto outros progrediram relativamente à noção de prova.

Os alunos que particularizaram convenceram-se com muita facilidade o que pode dever-se aos esquemas que acompanharam os raciocínios e à falta de noção de prova. A professora tentou que procurassem mais casos mostrando desconfiança nas conjeturas que os alunos formularam e alertou-os para o perigo de os casos não serem variados.

A fase de discussão foi muito importante como síntese e partilha dos diferentes raciocínios confrontando os alunos que usaram um processo empírico e não provaram com o processo de prova. Este confronto provocou a discussão em torno da noção de prova.

A professora chamou os grupos para apresentarem os raciocínios realizados, começando pelo grupo da Isa, que tinha desenvolvido um trabalho de manipulação algébrica sem significado, e de seguida por aqueles grupos que tinham feito generalizações a partir da particularização de alguns casos: grupo do António e grupo do Manuel. O grupo da Liliana e o grupo da Maria ficaram para o final por não usarem raciocínios indutivos.

O grupo da Isa começou por apresentar relações algébricas e quando a professora começou a questionar sobre como tinham chegado às expressões elas responderam que tinha sido pelo desenvolvimento das expressões sem apoio no esquema. Corrigiram-se em turma os erros de manipulação algébrica fazendo conexões entre as expressões algébricas e a situação. Contudo, este processo foi lento e sinuoso não ajudando a compreender a relação entre as áreas das figuras.

Saliente-se o facto de, nesta tarefa, as dificuldades de manipulação algébrica só terem surgido quando os alunos manipularam expressões sem conexão com a figura como foi o caso do grupo da Isa.

O grupo do António apresentou o seu raciocínio que consistia na verificação de um só caso e com erros de cálculo. Os alunos refizeram no quadro os cálculos corrigindo-os.

> **Daniela:** Nós só tínhamos chegado mais ou menos àquela conclusão só que não conseguimos fazer mais nada então estabelecemos números para as letras. Por exemplo $a = 4$ e $b = 2$. A área daquele é 16. Concluímos que diminuiu 4.

Francisca: A área do quadrado é 16 e depois $a - b$ é 4 - 2 dá 2 e 4x2 dá 8 e a área do rect é 4. Então 8+4 é 12. …A diferença entre os 2 é 4.

Nesse momento o Paulo criticou o grupo que estava a apresentar por só ter experimentado um caso.

Paulo: E só puseste esses resultados?
Daniela: Se fizéssemos outros números provavelmente….
Paulo e Miguel: Provavelmente! Devias ter feito.
Manuel: Nós fizemos.

O grupo do Manuel achou que era insuficiente um só caso quando eles apenas tinham feito para três casos.

A conclusão do grupo da Daniela cingiu-se a dizer que "a medida diminuiu".

A professora questiona o grupo da Daniela no sentido de explicitarem a relação para qualquer quadrado naquelas condições. Gera-se então um diálogo entre a professora e os alunos onde é enfatizada a necessidade de passar para o caso geral.

Prof: Quanto diminuiu, genericamente?
Daniela: 4.
Prof: nesse caso 4.
Paulo: Depende, pode diminuir 2 ou 3 ou 5.
Prof: Se quisermos falar genericamente. Quanto diminuiu?

O António responde metade, o Paulo responde b e a Beatriz, aluna do grupo da Maria, responde b^2.

A professora reformula a questão de forma a apresentá-la de forma completa:

Prof: Nesse diminuiu 4, esse é um caso concreto. Mas no exemplo genérico quando temos um quadrado e aumentamos o comprimento b e diminuímos a largura b quanto diminuí a área?
Beatriz: b^2.

A professora pede à Beatriz para mostrar o significado de b^2.

Prof: E onde está?
Beatriz: É o quadrado que está por cima… posso ir lá.

A Beatriz foi ao quadro e aponta para o quadrado pequeno de lado b.

A professora voltou a referir que não se prova com casos particulares e que é preciso provar para todos colocando a questão "como é que podemos falar de todos os casos?". Nessa altura alguns alunos respondem "com letras" e a professora reforça essa ideia dizendo "porque as letras podem tomar qualquer valor".

A professora chamou o grupo da Liliana e esta tentou mostrar o seu raciocínio, mas os colegas não entenderam muito bem o seu esquema.

> **Liliana**: Nós calculámos esta área que dava a ao quadrado e depois para vermos a diferença fizemos por letras: colocamos esta parte ali em cima e sobrava b <refere-se a quadrado de lado b >.
> **Miguel**: Como sabias que sobrava aquele quadrado? Não tinhas medidas!
> **Liliana**: Porque sabemos que aqui tem $a - b$.

A colega de grupo da Liliana, Sofia fez outro esquema e explicou:

> **Sofia:** Porque nós basicamente passamos este para aqui <fez o mesmo esquema>. Tiramos esta parte e passamos para aqui e ao desenhar vê-se que sobra este quadrado.
> **Manuel:** Não percebo.

Os alunos do grupo do Manuel não estavam a compreender porque eles precisaram de casos concretos para ver. A Maria prontifica-se a ajudar e vai ao quadro explicar:

> **Maria:** Este retângulo aqui é o mesmo que este. Já toda a gente percebeu porque é que sobra esta parte, não já?

O grupo da Maria foi o último grupo a apresentar o seu trabalho por a professora ter estabelecido uma ordem desde os trabalhos mais incompletos ao mais completo, para que todos tivessem oportunidade de comunicar e melhorar.

A Maria assegurou-se, primeiro, que todos tinham identificado os retângulos iguais nas duas figuras (figura 54) com lados a e $a - b$.

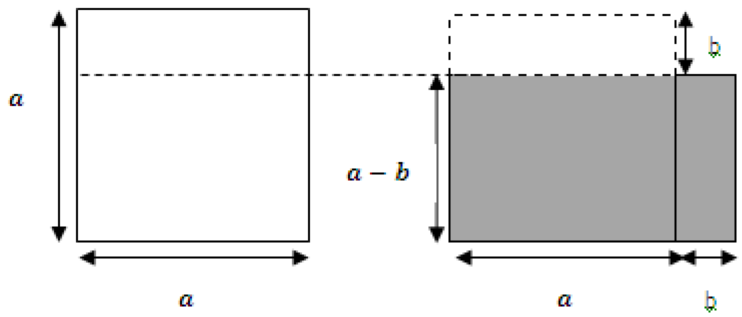


Figura 54 – Esquema auxiliar comunicação da Maria

Paulo: Sim porque é o b.
Manuel: Como é que sabes que é o b?
Prof: Acho que o Manuel não está a perceber porque é que dizes que os retângulos são iguais. O que é que vos convenceu que são iguais?
(…)

Rita: Então cresceu b decresceu b e por isso o que tem para o lado é o mesmo.

A Maria apontou para os lados de medida a depois para o lado de medida b e depois perguntou-lhes qual seria a medida da altura do retângulo.

Maria: Isto é a, isto é b e isto aqui é o quê? (…)$a - b$.

E prosseguiu com a sua explicação:

Maria: Se aqui é $a - b$ aqui é? Quanto é? (…)b.
Se pusermos isto aqui (girando) quanto é que vai ocupar?
(…)
$a - b$.
E isto é quanto? É b. Pronto.
O que vocês fizeram com números nós fizemos com letras. Conclusão o que podemos dizer? Conclusão final: A área do retângulo é igual a $a^2 - b^2$.

O Manuel pede uma explicação particular à Ana e a professora diz-lhe que pode ir explicar-lhe. O Manuel volta a perguntar-lhe como pode ela pensar sem medidas concretas.

Maria: Estou a fazer supostamente, se medisses, medias aqui e era b.
Ok? Então aqui em cima vai ser b também.
(…)

Queres q explique outra vez. Nós não medimos.
Manuel: Pois, não tinhas medidas.

O Miguel confessa que também não consegue perceber.

O problema do Miguel parece diferente do problema do Manuel. O Miguel não consegue observar uma figura como um exemplo genérico. Para ele um desenho tem que representar realmente o que lá está. O Manuel não parece ter este problema, mas não consegue raciocinar com as letras como representantes genéricos de números.

A descoberta facilitou a prova no grupo da Maria, pois ao descobrirem as relações entre as medidas e as áreas a prova estava ao seu alcance desde que organizassem o raciocínio. As alunas foram capazes de o fazer e a decisão de partir do quadrado e mostrar a relação das áreas ao transformar-se num retângulo ou fazer ao contrário é particularmente interessante do ponto de vista organizativo do raciocínio.

Conclui-se que nesta tarefa o processo de conjetura à generalização trouxe consigo a justificação o que facilitou a construção coletiva da prova. Os alunos que fizeram raciocínios dedutivos conseguiram fazê-lo depois de compreenderem toda a situação centrando-se depois nos aspetos que interessavam para provar. No entanto, os alunos que validaram as suas conjeturas com casos particulares não foram capazes de provar para o exemplo genérico, mostrando alguma dificuldade em passar do concreto ao abstrato.

Nesta tarefa os alunos usaram expressões com variáveis na prova, e há por esse facto alguma probabilidade de que os alunos tenham atribuído ficado com a ideia de que a prova tem de usar simbologia matemática.

Tarefa 3 “Ângulos internos de qualquer polígono convexo”

Esta tarefa foi aplicada a 29 de Abril na unidade “Circunferência e polígonos: rotações”. A descoberta de como se pode calcular o valor da soma de todos os ângulos internos de um qualquer polígono usando triângulos é um conteúdo da unidade referida. A discussão das conjeturas dos alunos foi feita na aula seguinte a 3 de Maio.

O enunciado foi escrito no quadro:

> Descobre como calcular o valor da soma de todos os ângulos internos de qualquer polígono convexo a partir do número de lados.
>
> **Sugestão**: Recorre à divisão do polígono em triângulos e usa o conhecimento de que a amplitude dos ângulos internos do triângulo é 180º.

A constituição dos grupos nesta tarefa foi a que consta da Tabela 9.

Tabela 9 – Constituição dos grupos na tarefa “Polígonos convexos e os seus ângulos”

Designação do grupo	Elementos constituintes de cada grupo			
Grupo da Isa	Isa	Joana	Gabriela	Isabel
Grupo da Maria	António	Maria	Rosa	Sofia
Grupo do Miguel	Miguel	Francisca	Daniela	Mariana
Grupo da Liliana	Liliana	Paula	Antónia	Manuel
Grupo da Rita	Rita	Beatriz	Paulo	

Com a aplicação desta tarefa pretendia-se que os alunos estabelecessem uma relação entre o número de lados do polígono e o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos com auxílio da propriedade da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ser de 180º. Para efeitos do estudo interessava a exploração após dividirem a figura em triângulos de forma a usarem o valor da soma de todos os ângulos internos do triângulo. Interessava que procurassem o padrão da relação entre o número de lados e o número de triângulos necessários para calcular a soma dos ângulos todos do polígono. Do ponto de vista do desenvolvimento da noção de prova esta tarefa tinha em vista que vivenciassem um processo de prova a partir de uma exploração essencialmente indutiva.

Para conseguir orientar os alunos neste processo de prova a professora tentou deslocar o foco para a discussão revendo todo o processo seguido desde a formulação da conjetura à generalização e apoiando os alunos na sequência lógica de todo o processo.

No entanto, a professora sabia por experiência que é muito importante a compreensão dessa estratégia para que compreendam a relação. Por isso a professora deixou-os discutir em pequeno grupo a forma de aproveitarem a sugestão de usar triângulos.

Da conjetura à generalização

Nesta tarefa os alunos foram desenhando polígonos convexos e questionaram-se sobre como saber qual era a soma da amplitude de todos os seus ângulos. A sugestão dada pela professora de usar triângulos partira do pressuposto de essa propriedade ser aceite como válida para todos os alunos.

A professora pensou, inicialmente, que a dificuldade dos alunos consistiria em perceber como utilizar aquela pista. Mas surgiu, em dois dos grupos, a dificuldade de perceber que se podia saber o valor da soma sem recorrer ao valor de cada um. Por este motivo não estavam a conseguir usar a soma dos ângulos internos do triângulo nem a decompor o polígono. De facto se essa propriedade estivesse interiorizada eles podiam mobilizá-la fazendo uso dela nesta tarefa e podiam dispensar, assim, saber o valor de amplitude de cada ângulo. Aconteceu, no entanto, que os alunos sentiram a necessidade de medir revelando não saber que o valor da soma dos ângulos internos dos triângulos é de 180º. Houve dois grupos que sentiram essa necessidade de medir para avançar na exploração: o grupo do Miguel e o grupo da Isa. Naquela altura a professora não refletiu sobre estas verbalizações dos alunos. No entanto, foi uma oportunidade perdida de recuperação de uma lacuna de conhecimento. Estes diagnósticos são muito importantes, mas nem sempre se toma consciência deles na situação.

O grupo do Miguel começou por estudar casos particulares do triângulo preocupando-se com a medida de cada ângulo. Saber o valor da soma de todos os ângulos não podia passar por outra estratégia que não fosse a de saber quanto media cada um dos ângulos. Envolveram-se em discussões de medidas dos ângulos desenhados e só no final da aula, depois de alguma orientação por parte da professora, começaram a pensar em polígonos com mais de três lados e a pensar como podiam dividi-los em triângulos para aproveitar a informação da soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo ser 180º. Primeiro pensaram em desenhar um triângulo equilátero porque distribuindo os 180º por três dava 60º. Mas desenhar um triângulo equilátero para o Miguel, era desenhar com exatidão e não tinham transferidor. Só a Daniela não partilhou as mesmas preocupações e revelou perceber que o que discutiam não interessava para a questão. Pois segundo ela era preciso ter em conta o número de lados do polígono.

O Miguel e a Francisca estavam preocupados com a medida da amplitude de cada ângulo e a Daniela não conseguiu demovê-los a descentrarem-se desse problema e acabaram também por ficar a discutir a medida dos ângulos dos triângulos desenhados. A incapacidade do Miguel em desenhar uma figura que represente um qualquer elemento de uma classe fez com que o grupo não tivesse tempo para chegar a qualquer descoberta. A professora orientou-os para desenhar um outro polígono com mais de três lados, mas eles não foram capazes de sair daquela discussão. Quando finalmente chegaram a acordo sobre o desenho do triângulo dividiram-no em outros triângulos e quando a professora viu os desenhos questionou-os:

> **Prof:** Estão a dividir o triângulo em dois triângulos e a utilizar casos particulares de triângulos. Em que é que isso ajuda a descobrir a soma da amplitude dos ângulos para qualquer polígono?

A professora desenhou um polígono com 5 lados para exemplificar um qualquer polígono.

> **Miguel:** Então o melhor é pôr os triângulos na gaveta.

Finalmente começaram a pensar em como dividir o triângulo e a Mariana fez uma sugestão que partilhou com a professora:

> **Mariana:** Como sabemos que o interno mais o externo é 180 se fizermos 180 em todos e 180/2 dá o interno.
> **Prof:** Quando divides por 2 estás a partir a meio, em duas partes iguais, estás a distribuir igualmente.

Esta oportunidade de confrontar, neste caso, a aluna, com aquilo que ela sabe não aconteceria provavelmente em situação de aula com toda a turma porque estes alunos mais fracos não participavam. Este procedimento de dividir por dois sem compreensão do significado de o fazer revela uma atividade matemática sem sentido.

O grupo da Isa desenhou polígonos com mais de três lados e decompôs a figura em triângulos sem que fosse possível descobrir a soma dos ângulos internos do polígono. A ideia delas é medir cada ângulo interno dos diferentes triângulos para depois os somarem. Dessa forma a decomposição em triângulos não tinha qualquer utilidade. Tal como fez a Mariana dividiram por dois os ângulos a amplitude de uma das partes de um ângulo independentemente de ser metade ou não. Chamaram a professora e esta aproveitou para reforçar o objetivo da investigação.

> **Isa:** Ó stora, nós podemos medir?
> **Joana:** Para saber as amplitudes?
> **Prof:** Querem descobrir a soma dos ângulos internos. E conseguem? Então expliquem lá.
> **Isa:** Neste aqui dividimos aqui para saber este.

A professora dá conta que com a decomposição que fizeram não é possível aproveitar a soma dos ângulos dos triângulos.

> **Prof:** Tu sabes que este mais este e este dão 180. Este ângulo não é ângulo interno da figura. Têm que arranjar maneira de conseguir usar os triângulos para descobrir a soma de todos os ângulos internos. Com essa decomposição não dá.

A professora deixou-as a trabalhar para voltar mais tarde. Continuaram presos à ideia de medir os ângulos e a decomposição deles não faz qualquer sentido. Resolveram desenhar um hexágono irregular e a professora perguntou quantos lados tinha. A Gabriela diz que tem 6 e determinou a amplitude de cada ângulo interno do hexágono fazendo 180:6.

> **Gabriela:** 180:6.
> **Isa:** Num polígono de 6 a soma de todos é 180º?

A pergunta da Isa vem no seguimento do raciocínio da Gabriela e denota que não faz ideia de qualquer relação entre a soma dos ângulos internos de polígonos. Ao responder à Isa a professora orienta-as no uso dos triângulos que decompõem o polígono apontando para os ângulos internos de cada triângulo pertencentes ao ângulo do polígono.

Prof: De cada triângulo. Agora têm de descobrir…
Isa: Sim, mas do polígono?
Prof: Descobre. Este mais este dá 180. Este, mais este, mais este, quanto dá?
Isa: 180.
Prof: E este, mais este, mais este?
Isa: 180.
Prof: E este, mais este, mais este?
Isa: 180.
Prof: Estes bocadinhos não pertencem todos aos ângulos internos do polígono?
Isa: Mas como é que vamos saber…?

A professora usa as letras que as alunas colocaram no seu esquema para voltar a explicar.

Prof: não querem saber de cada um querem saber a soma deles todos. Não há uma maneira? Usando os triângulos… vamos devagarinho. a+b+c quanto dá?

Nessa altura a Isa responde à professora, mas depois volta à ideia de querer saber o valor de cada ângulo.

Isa: 180. Multiplicamos 180x4
Joana: 180 x 4 dá 720.
Isa: 720 a dividir por 6.

A Gabriela apercebe-se disso mas diz isso de forma muito ténue, não provocando qualquer reação no grupo, pois a Joana continua a querer dividir o total pelo número de ângulos.

Gabriela: eu acho que a gente está calculando o todo sem estas separações, não?
Joana: Ó stora deu 720 a dividir pelos 6 lados dá 120.
Prof: Porque é que estão a dividir expliquem-me. Deu 720, não foi? Estão a distribuir 720 por todos de forma igual? Ninguém vos pede o valor de um deles. São todos diferentes! Só podiam fazer isso se fossem todos iguais.
A soma deles todos dá 720.E se tivesse outro número de lados? Por exemplo 5 lados?
Joana: 180x5.
Isa: não é x 5 é vezes as figuras em que nós dividimos. Imagina 1,2,3,4,5 lados. Dividíamos aqui.
Tânia: 180x3.
Joana: 540.
Tânia: Neste caso dava 540.

Conseguiram perceber depois de se descentrarem do valor da amplitude de cada ângulo. Entretanto apercebem-se da existência de uma relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos. Não chegaram, no entanto, a generalizar e entretanto acaba o tempo de aula.

Os outros três grupos conseguiram usar a sugestão de dividir o polígono em triângulos de forma a que os ângulos internos dos triângulos formem os ângulos do polígono.

O grupo da Liliana iniciou a investigação considerando polígonos côncavos e a professora disse-lhes que só estavam a estudar os convexos explicando-lhes as diferenças entre os dois tipos de polígonos. Depois disso iniciaram a investigação. Desenharam polígonos com mais de três lados e dividiram em triângulos. Nas primeiras divisões em triângulos os ângulos dos triângulos não coincidiam com os ângulos das figuras, como por exemplo o polígono que desenharam na figura 55. A professora chamou-os a atenção para esse facto e a partir daí eles decompuseram o polígono de forma a que os ângulos coincidissem.

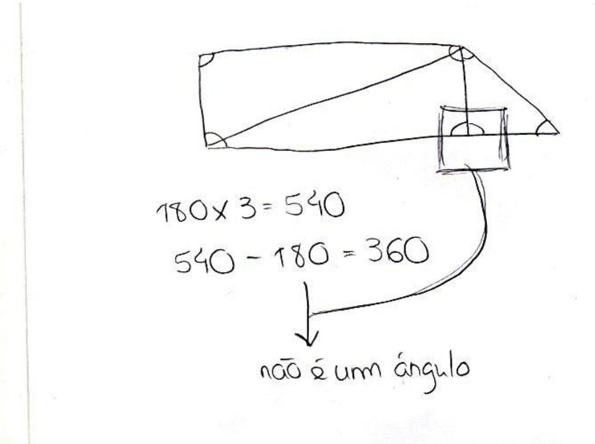


Figura 55 – Decomposição de um quadrilátero em triângulos grupo Liliana

Desenharam um hexágono, figura 56, e desta vez fazem uma decomposição em triângulos em que os ângulos dos triângulos coincidiam com os ângulos do hexágono.

Prof: Vamos ver: quanto somam os ângulos internos deste triângulo?
Manuel: 180.
Prof: E deste?
Manuel:180.
Prof: E isso permite calcular a soma dos ângulos internos da figura?

> **Manuel:** Sim, depois somamos estes todos… Eles vão dar sempre 180, por isso 180 vezes 4.
> **Liliana:** Neste [hexágono] vai dar 720 é 180x4. Neste [quadrilátero] temos que tirar estes dois ângulos porque não fazem parte do quadrilátero e dão 180. Porque este não é um ângulo (interno). Dá 540-180 =360.

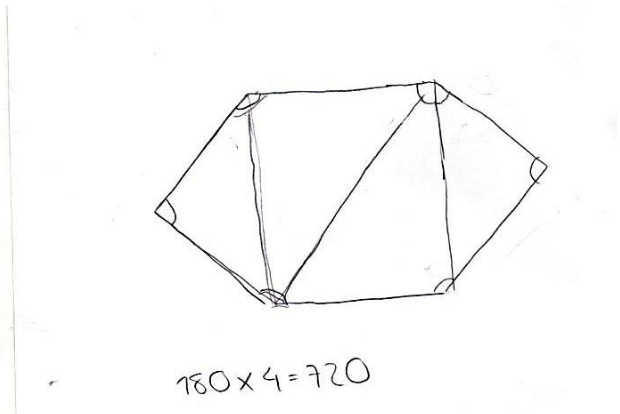


Figura 56 – Decomposição do hexágono em triângulos grupo Liliana

Desenharam um pentágono, que não está na sua folha de registo, e calcularam a soma dos seus ângulos internos. A Liliana percepcionou um padrão: cada vez que o polígono aumenta um lado a soma dos seus ângulos aumenta 180º.

> **Prof:** Já descobriram? Dá 540 no pentágono? Descobriram outros?
> **Liliana:** Á medida que os lados vão aumentando aumenta 180. No triângulo 180º, no quadrilátero +180, no pentágono 540 faz 360+180, então no hexágono sabemos que tem de dar 720.

A Paula conjetura que a soma dos ângulos internos do polígono é obtida pelo produto entre 180 e o número de lados.

> **Paula:** 540+180 não é? 180 vezes o número de lados.
> **Liliana:** À medida que aumentamos os lados aumenta 180. O triângulo 180º, aumentamos um lado mais 180º, mais um lado mais 180º. Faz 720º+180º.

O grupo regista na sua folha, figura 57, o resultado da soma dos ângulos internos da particularização feita para os casos de polígonos com 3 lados, 4 lados, 5 lados e 6 lados. Fizeram a previsão de acordo com o seu padrão, para 7 lados e 8 lados.

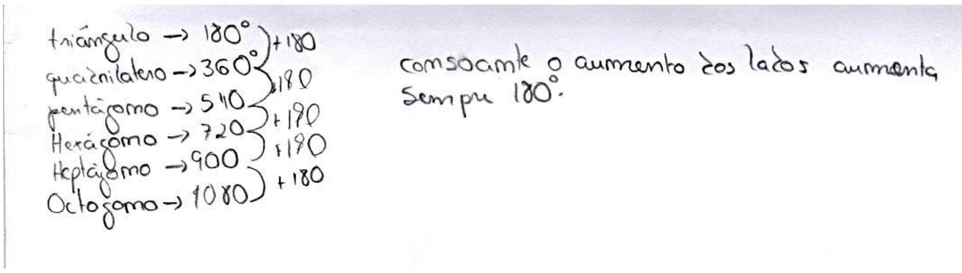


Figura 57 – O padrão da soma dos ângulos internos de polígonos grupo Liliana

A Liliana chegou a uma conjetura recursiva em que a diferença entre dois termos consecutivos é de 180º. A Paula formulou outra conjetura: o produto de 180º pelo número de lados do polígono dá o valor da soma da amplitude de todos os ângulos. No entanto a conjetura que aparece registada é a da Liliana, porque a Paula não convenceu o grupo a pensar sobre a conjetura que ela formulou.

O grupo da Rita pensou primeiro no que sabiam do assunto:

> **Rita:** O número de lados é igual ao número de ângulos e sabemos que a amplitude do ângulo interno mais a amplitude do ângulo externo dá 180º. Agora temos que pensar.
> **Beatriz:** Temos aqui duas condições.
> **Rita e Beatriz:** Num sistema!

As alunas estavam a pensar resolver a situação analiticamente. Quando a professora de dirigiu para toda turma sugerindo usar triângulos a Rita mostra surpresa pelo facto de considerar que a figura "é uma figura mistério…" Pensaram, então, em fazer esquemas para explorar a situação.

> **Beatriz:** Só se experimentarmos com figuras aqui ao lado.

A Rita não gostava de particularizar vendo nisso uma perda de tempo. Discutem a sugestão dada relativamente a usar triângulos e não estão nada contentes com a ideia. Decidem desenhar várias figuras.

> **Beatriz:** só se experimentarmos com figuras aqui ao lado.
> **Rita:** Pode ser.

A Rita quer fazer de duas formas uma a partir dos casos concretos e outra de forma dedutiva, mas ainda não sabe como o fazer. Ao desenhar um polígono pentagonal a Rita desenhou um polígono côncavo pelo que a Beatriz lhe disse que tinha de ser convexo. Depois decompuseram o pentágono convexo em triângulos e a Beatriz questiona o propósito de fazerem essa decomposição. A Rita sabe porquê, mas não consegue estabelecer uma relação entre a amplitude da soma dos ângulos internos do polígono e o número de lados. Chamaram a professora e esta fez perguntas ao grupo e pediu-lhes para observarem bem o desenho que fizeram. As perguntas que a professora fez servem apenas para rever as propriedades que interessam observar.

> **Rita**: Ó stora.
> **Beatriz:** Aqui como é que relacionamos a amplitude [dos ângulos internos] do triângulo com os ângulos?
> **Prof:** Tu não sabes qual é a amplitude do triângulo?
> **Beatriz:** Sim…
> **Rita:** Mas acho que assim não é uma boa maneira.
> **Prof:** Não?
> **Rita:** Nós sabemos que a soma dos ângulos internos do triângulo tem de dar 180.
> **Prof:** E então? …olhem bem para o desenho.
> **Rita:** Ah. Podia ser o número de triângulos …
> **Prof:** Falem entre vocês.

A professora afastou-se para os deixar pensar, pois a ajuda que tinha dado surtiu o efeito desejado de as pôr a raciocinar. A Rita conseguiu estabelecer uma relação entre o número de triângulos e a amplitude da soma dos ângulos internos de um polígono.

> **Rita:** Podia ser a decomposição da figura em triângulos, multiplicávamos 180 pelo número de triângulos que a figura decompusesse. Estás a perceber?

A Beatriz colocou a questão da confirmação da conjetura. Pensaram em confirmar com um quadrado por conhecerem o valor da soma da amplitude dos seus ângulos internos.

> **Beatriz:** Descobre uma forma de calcular…mas agora temos de confirmar. Desenhamos uma figura direitinha e medimos os ângulos.
> **Rita:** Ah? Desenhamos um quadrado que é mais fácil, por exemplo?
> **Beatriz:** Mas o quadrado já sabemos que é 90 graus. 90+90 180 e 180+180 dá 360. Está comprovado até.

A comprovação da conjetura para o quadrado deu-lhes uma maior confiança na conjetura. Partilharam a sua descoberta com a professora a qual relembrou que se pretendia uma relação com o número de lados e para qualquer polígono convexo.

> **Rita:** Ó stora, nós já vimos que se decompusermos uma figura em triângulos multiplicamos a soma que é 180 pelo número de triângulos e dá a medida da amplitude dos ângulos internos da figura.
> **Prof:** O que querem é descobrir uma forma de calcular isso quando sabem o número de lados. Aqui eram 4 triângulos e aqui eram 2 triângulos. São casos concretos e agora para qualquer número de lados?

Rita atribuiu uma letra para o número de lados e pensa em escrever uma conjetura, mas ainda não repararam na relação existente entre o número de lados e o número de triângulos. A Rita acabou por estabelecer uma relação entre o número de triângulos que decompõe a figura e a soma da amplitude dos seus ângulos como sendo $180n$ em que n passou a ser o número de triângulos.

> **Rita:** Isto não dá. Com o que fizemos temos que chegar a algum sítio. Isto vai ter que ser os 180 vão ter que estar metidos, mas como é que numa figura sabemos o número de triângulos? Vai ser qualquer coisa igual a 180 vezes n e n temos que dizer o que é que é n. Sendo n o número de triângulos inscritos na figura. Espera a amplitude da figura vai ser $180n$.

As alunas experimentam a relação no hexágono e o Paulo, que esteve distraído, pergunta porque é que estão a multiplicar por 4.

> **Beatriz:** pelo número mínimo de triângulos.
> **Rita**: a amplitude de todos os ângulos internos da figura será igual a 180xn sendo n o número mínimo de triângulos na figura. Stora!...veja a nossa conjetura: primeiro começa aqui e depois é que vai para aqui.

A professora não se apercebeu da mudança de significado da letra ne pensa ser o número de lados. Quando a professora revê todo o raciocínio deles explica-lhes que a relação a que chegaram não entra com o número de lados. De repente a Beatriz vê o padrão e a Rita generaliza.

> **Beatriz:** ah, já sei. Aqui tem 4 e 4-2 dá 2 triângulos, aqui tem 6 e aqui dá 4 triangulos.
> **Rita:** 6-2, mas sendo n o número de triângulos mínimo.
> **Prof:** pois mas queremos a partir do número de lados
> **Rita:** Pois. Então como é que é ?...$180(n-2)$.

As alunas usam agora a mesma letra n para simbolizar outra variável e a professora tenta clarificar o assunto.

Prof: então esse n já não é o número de triângulos. O que é o n? Chamaram n ao número de triângulos mas vocês queriam partir do número de lados.
Rita: então a amplitude dos ângulos internos da figura é igual a $180(n-2)$. Mas a stora disse que…
Beatriz: … que é o número de $lados - 2$.

A questão do significado da letra não parece ter qualquer importância para as alunas e a professora só queria que elas decidissem o que significava o n afinal.

No grupo da Maria, esta iniciou muito rapidamente a investigação e os seus colegas mergulharam na investigação sem se aperceberem do alcance das assunções que ela fez.

Maria: começando por um triângulo sabemos que a soma é 180, certo?
Rosa: certo. Se fizéssemos os ângulos externos?

A Maria estava a desenhar um quadrilátero e o António tentou perceber o que ela estava a fazer.

Maria: porque por exemplo… nós aqui temos de saber uma forma de calcular a soma da amplitude dos ângulos internos quando sabes o número de lados. Sabes, por exemplo, que tem 4 lados.
António: e se tentasses fazer, tipo…? Um polígono tem que ser com quantos lados?
Maria: tens que saber para qualquer um, tens um com x …com 6 lados.

Os alunos a partir daqui começaram a conjeturar sobre as possíveis relações entre número de lados e o valor da soma da amplitude dos ângulos.

Maria: quando é um triangulo tem 3 lados e dá 180º, quando acrescentamos mais um triangulo fica um quadrilátero seria 360, porque vamos sempre dividir um quadrilátero em 2 triângulos

Experimentaram decompor em triângulos várias figuras poligonais, mas não conseguem encontrar o padrão porque há um erro que não detetaram. A professora dá conta que o erro se deve à forma como decompõem as figuras em triângulos.

Maria: Estamos a dividir todas as figuras em triângulos, stora. Não encontramos nenhuma regularidade. Aqui tem 6 lados e conseguimos dividir em 4.
Prof: E aqui quantos lados tem?
Maria: 5 e conseguimos dividir em 4.

Prof: 5? Esta decomposição dá para saber os ângulos internos do polígono?
António: Sabemos que a soma dos ângulos dos triângulos é 180º.
Prof: Mas então quando eu for somar os ângulos destes triângulos estou a juntar este com este com este…este ângulo é interno?

Só nesse momento é que tiveram consciência de como tinham de fazer para decompor uma figura em triângulos de forma a aproveitar o conhecimento de que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º. Maria compreende como tem de unir os vértices do polígono mas não refere mais nenhuma condição para o fazer. No entanto, o António ainda não compreendeu a forma de decompor as figuras em triângulos como se percebe quando ele diz que ainda é possível decompor a figura em mais triângulos.

António: mas tu ainda podes fazer mais triângulos aí.
Maria: eu sei, mas nós queremos saber o mínimo, que é para saber…
Rosa: os ângulos têm que ser internos

Esta explicação não deve ter sido suficiente para o António perceber como se deve decompor a figura e porquê, mas não pede explicações. Entretanto a Rosa identifica o padrão.

Maria: este, este e este…*nice*. Então já chegamos a uma conclusão. Que é quando é… o número de lados… o número de triângulos em que vamos dividir vai ser…
Rosa: menos 2.

Maria procura confirmar a conjetura com o eneágono. Este caso serviu para a Maria se convencer. Foi um caso especial que verificou a conjetura. Depois dessa verificação Maria diz a afirmação como uma generalização.

Maria: Ah! Descobrimos que num polígono o número de triângulos em que o podemos dividir é menos 2 que o número de lados.
…
Maria: vamos tentar fazer uma fórmula. Nós sabemos que o número de lados 2 menos n … não. É $n-2$. Sabemos por exemplo que o número de lados menos 2 é o número de triângulos.
Rosa: é $n-2$: número de triângulos.
Sofia: Então n é o número de lados
Rosa: sim n é o número de lados. E t é o número de triângulos.
Maria: 4-2=2= t; 2 triângulos significa 2x180=360. Sabemos que a soma da amplitude dos ângulos internos… Chegamos a uma conclusãaaao!!!!
Rosa: mas espera se for aqui 6

Maria: menos 2 vezes 180. Porque 180 é…
Rosa: sim eu sei
Maria: é não é? É! Stora podia chegar aqui, se faz favor.

A aula de discussão, aula a seguir a esta, seria para discutirem as conclusões de cada grupo e chegarem a uma prova.

Os alunos conjeturaram sobre como determinar a soma da amplitude dos ângulos internos de polígonos convexos com base na perceção do padrão que emergiu através da particularização. As conjeturas foram formuladas com base na estrutura dos dados levando à compreensão dessa mesma estrutura. Assim, neste caso, a conjetura trouxe consigo a compreensão. Quanto à convicção, todos os alunos se convenceram com poucos casos, podendo afirmar-se que se encontram no nível de prova de *empirismo naïf*: No grupo da Liliana testaram 3 casos e fizeram duas previsões; no grupo da Rita particularizaram para 3 casos e usaram o caso do quadrado para confirmar; e no grupo da Maria particularizaram para 3 casos. Contudo, no grupo da Maria particularizaram para 9 lados considerando este caso especial como no nível de prova da experiência crucial. Claro que nesta tarefa desenhar polígonos com muitos lados começa a ser cada vez mais complicado. O que levanta o problema de como provar que a conjetura é válida para qualquer polígono convexo e exclui o uso de um esquema.

Da justificação à prova

A discussão em grupo turma pretendia levar os alunos a sentir a necessidade de provar encontrando uma forma de o fazer. Para isso convinha rever todo o processo garantindo que todos tinham oportunidade de refletir sobre os raciocínios realizados.

A professora explicou à turma que iam discutir as conjeturas a que tinham chegado. Escreveu o enunciado da tarefa no quadro e explicou ter ouvido as gravações, ter lido os registos e ter-se apercebido de que alguns grupos tiveram mais dificuldade em pôr em prática a sugestão de usar a decomposição em triângulos do que outros. Mesmo nos grupos em que conseguiram avançar a professora percecionou que alguns alunos não chegaram a problematizar esta questão de como decompor a figura.

Prof: Quem quer explicar de que forma é que a sugestão ajudou?
Liliana: Se nós dividirmos a figura em triângulos sabemos que cada triângulo que nós medimos a soma dos seus ângulos é 180º.
Prof: Mas não depende da forma como eu divido? Há muitas maneiras de dividir a figura em triângulos, e então quem quer explicar como

dividir? Eu numa figura… Vocês não experimentaram formas de dividir em triângulos? E só havia uma forma?
Daniela: Não.
Liliana: Mas sabíamos que quando dividíssemos em triângulos o ângulo ía dar sempre 180º.
Miguel: Se for um triângulo isósceles é fácil.
Maria: Ó stora dividimos em triângulos de forma…se soubéssemos os ângulos desse triângulos, a soma deles, íamos saber os ângulos da figura e tínhamos de unir os vértices

O Miguel sugeriu começar por um triângulo surgindo a oportunidade de ajudar o Miguel a perceber que muitas vezes se utiliza um desenho como uma representação de uma classe de objetos. Através de representação de triângulos como esquemas, a professora mostra ao Miguel que não pode assumir que o triângulo tem propriedades especiais, por que ele não está representado à escala e apenas representa um triângulo qualquer.

A Maria vai ao quadro explicar como raciocinou o seu grupo. Desenhou um pentágono e alguém se riu por achar que devia ser regular.

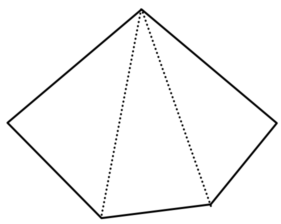


Figura 58 – Pentágono da Maria

A professora decidiu fazer o papel de cética para obrigar a que a Maria explique o que faz em vez de assumir as inferências como certas.

Maria: Não é suposto ser uma coisa regular.
Prof: Está dividido em triângulos?
Vários: Sim.
Prof: Assim também está.

A professora desenhou um segmento de reta a intersectar as linhas que a Maria tinha desenhado dividindo a figura em mais triângulos. Os alunos reagiram, mas tiveram dificuldades em justificar porque não concordaram com a decomposição feita pela da professora.

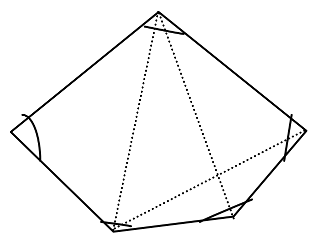


Figura 59 – Esquema de um pentágono decomposto pela professora

Vários: Eiiiii!!
Prof: Não está? 1 triangulo, 2, 3,4,5…
Rita: No mínimo.
Maria: Queremos saber este ângulo, este, este , este e este e ao dividir essa parte aqui não ía dar jeito nenhum.

A Rita disse que tinha de ser o número mínimo de triângulos e a Maria afirmou que aquela decomposição da professora não dava jeito. A professora questionou-a sobre "para que é que tinha de dar jeito" e finalmente ouviu-se uma razão proferida pelo António para o facto.

Prof: Não ía dar jeito nenhum para quê?
Miguel: Está a complicar.
António: Aqueles ângulos interiores não pertencem à figura…
Prof: Ah!
António: A Maria dividiu em três e a stora dividiu a meio. Aqueles ângulos que a stora dividiu agora não pertencem aos ângulos interiores do polígono.

Depois de terem expressado qual era o problema da decomposição feita, já podiam definir a condição a que os ângulos do triângulo devem obedecer para se poder usar a sugestão.

Prof: Então como é que eu devo dividir a figura?
Daniela: Como ela dividiu.
Prof: E como se tem de fazer?
António: De forma a que os ângulos interiores dos triângulos também sejam os ângulos interiores….
Prof: Os ângulos internos.
António: Internos do polígono

O António ficou contente por ter conseguido fazer-se entender e a professora aproveitou para dar um reforço positivo a toda a turma.

> **António**: Ei stora eu cheguei lá!!
> **Prof:** Eu ando a ouvir as gravações e estão cada vez melhores. Vocês já repararam que me chamam para me dizer o que estão a fazer e é ao dizer-me que descobrem…o que é que se passa? Eu acho que vocês no grupo não tentam explicar uns aos outros e quando veem a necessidade de me explicar a mim vão fazer o esforço e faz-se luz. Porquê? Porque estão a verbalizar o raciocínio!
> Se vocês no grupo explicassem uns aos outros descobriam. Fiquei a pensar sobre isso…
> **Miguel:** a professora pensa muito na nossa turma!

Já não era a primeira vez que eles se espantavam pelo interesse que a professora manifestava pela forma como eles pensavam.

Era altura de discutirem as conjeturas revendo-as e fazendo a conexão com a estrutura matemática da situação.

A exploração realizada para saberem como aproveitar a sugestão dada pela professora não era a exploração principal da tarefa. No entanto, constituiu um obstáculo aos alunos que ainda não tinham aceitado essa propriedade como válida. A professora não sabia, porque era professora deles pela primeira vez.

> **Prof:** Isto ainda não é a conjetura isto é apenas a forma de aproveitarem a pista que vos dei. Quem não chegou aqui não conseguiu avançar, porque não percebeu de que forma é que esta pista ajudava.

Depois de discutirem essa pista tentando convencer todos os alunos da validade e da importância que ela tem nesta tarefa passou-se para a revisão dos raciocínios relativos à soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo.

> **Prof:** agora vamos devagar. Maria marca aí os ângulos todos dos triângulos que estão a dividir a figura. E agora o que é que esses ângulos têm a ver com o que nós queremos? Miguel já percebeste?
> **Miguel**: já.
> **Prof**: Agora juntando estes ângulos todos temos a soma dos ângulos internos do polígono. Depois de perceberem a pista tinham de relacionar a amplitude da soma dos ângulos internos do triângulo com a amplitude dos ângulos de qualquer polígono convexo. De um heptágono, de um octógono…eu digo assim tem 12 lados e temos de saber qual é o valor da soma dos seus ângulos internos. Quem quer falar?
> **Liliana**: 180º a multiplicar pelo número de lados.

A professora particularizou com a intenção de fazer com que os alunos deem significado a uma fórmula ou teorema. Contudo essa estratégia pode ser interpretada como uma verificação empírica da conjetura apesar de não ser essa a intenção.

> **Prof:** 180º a multiplicar pelo número de lados. Então aqui é 180 vezes 1,2,3,4, 5. Vou escrever S de soma da amplitude dos ângulos internos daquele pentágono. S é 180 vezes 5. É verdade? É 180x5?
> **Vários:** não.
> **Daniela:** vezes 3.
> **Prof:** vezes 3 Daniela? Porquê?
> **Daniela:** porque são 3 triângulos, pelo número de triângulos que dividimos a figura…

A professora dirigiu-se à Liliana questionando-a sobre a sua afirmação aplicada àquele caso ser a multiplicar por 5.

> **Prof:** porque dizes vezes 5? 180º é: este ângulo, mais este e mais este.

Miguel aproveitou para tentar perceber melhor o significado do valor da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º.

> **Miguel:** Como é que é stora?
> **Prof:** Num triângulo este bocadinho, mais este mais este dá 180 e agora sei que este bocadinho mais este mais este dá 180 e este mais este mais este também dá 180.Então como é que calculo a soma?
> **Mariana:** É 180 a multiplicar pelo nº de triângulos.
> **Prof:** Liliana achas que sim? …

Depois de terem revisto, de novo, o significado do procedimento adotado, a professora voltou à revisão dos raciocínios.

> **Prof:** A investigação está concluída?
> **Miguel:** Não.
> **Prof:** Porquê? O que queríamos?
> **Beatriz:** Falta relacionar os lados.
> **Prof:** Falta relacionar com o número de lados. Eu digo assim: um polígono tem 12 lados e vocês tinham de dizer quanto era a soma de todos os ângulos.

A Mariana disse que se dividia o polígono e a professora refez a questão de modo a que pensassem em como saber sem desenhar.

Mariana: Temos de dividir o polígono.
Prof: E se o polígono tiver 18 lados? Vais desenhar um polígono de 18 lados? Queremos saber para qualquer um, não queremos andar a desenhar. Queremos saber genericamente como é que se faz.

Rita e Maria estavam com o dedo no ar.

Prof: Rita?
Rita: É 180 vezes o número de lados menos 2. Menos 2 porque tem que se multiplicar pelo número de triângulos inscritos na figura, mas o número mínimo que se pode inscrever na figura.

Esta conjetura devia ser explicada a toda a turma de forma a que se percebesse o processo que seguiram para lá chegaram.

Prof: Como é que chegaram aí? Quadro! Como é que chegaram a essa conclusão?
Beatriz: Ó stora nós pelas figuras reparamos que o número de triangulos era sempre menos 2 do que o número de lados. Como ali tem 5 lados e só tem 3 triângulos…

A professora queria que elas apresentassem todos os casos que elas usaram e não só um exemplo. Convinha que todos vissem o padrão.

Prof: Esse é um caso. Posso me basear só nesse? Este chega para saber que é assim?... Miguel, se eu fizer só para este já posso concluir que é menos 2?
Vários: Não.

A Rita desenhou no quadro outro polígono.

Prof: Esse quantos lados tem?
Rita: tem 6 lados e aqui tem 4 triângulos. E nós fizemos sempre e fizemos mais…
Prof: Escreve aí se não te importas? 6 lados 4 triângulos…. Já temos dois casos em que a conjetura bate certo. Chegam dois para acreditar que é assim?
Vários: não

Depois a Rita desenhou um hexágono e um quadrilátero no quadro para continuar a explicar.

Rita: nós primeiro desenhamos vários polígonos e vimos que o número de triângulos inscritos na figura eram menos 2 do que o número de lados: aqui tem 6 lados e são 4 triângulos, aqui tem 4 lados e são 2 triângulos. E depois então vimos que 180 a multiplicar pelo número de lados menos 2 em que isto (lados-2) vai dar o número de triângulos inscritos da figura e ía dar a amplitude dos ângulos da figura.
Prof: Isso é uma conjetura ou já está provado?

A Rita sentiu-se confrontada com a insistência e defendeu a convicção na sua conjetura dizendo que fizeram outros casos. No entanto muitos alunos afirmaram que a conjetura não estava provada.

Rita: e depois nós tentamos mais polígonos mas não fizemos aqui (na folha) e dava certo, pelo menos.
Prof: mas então é uma conjetura ou já está provado?
Nuno: está provado.
Outros: conjetura.

A professora confirma que ainda é uma conjetura apesar da verificação em alguns casos.

Prof: é uma conjetura eles só fizeram alguns casos. É impossível fazê-los todos. Eu posso ter n lados num polígono. Então $180(n-2)$ que vos parece? Faz sentido? Sim ou não? Toda a gente concorda? Então se um polígono tivesse 10 lados em quantos triângulos o dividia?
Vários: 8.
Prof: quanto era então a soma da amplitude dos ângulos internos do polígono?
Muitos: 180x8.
Miguel: 180x8? Não dá para acreditar.
Prof: Para provar que é assim temos de justificar que esta conjetura é verdade para todos os polígonos: que temos sempre $n-2$triângulos. O resto é fácil de justificar porque 180 é a amplitude dos ângulos de cada triângulo. Mas como vamos provar que é sempre $n-2$?

O António ficou com a ideia de que provar tem de ser feita algebricamente.

António: temos que fazer com letras.

Na tarefa anterior havia uma maior facilidade em provar com letras porque era possível traduzir as áreas por uma relação de igualdade. Nesta situação parecia mais complicado para os alunos chegarem a uma expressão em que o número de triângulos mais dois era igual ao número de lados do polígono. Todavia era possível pela lógica de construção do polígono compreender porque é que tal acontecia.

Prof: Eu consigo com letras provar que é sempre l-2? Mas ela já fez com letras. Pode ser com…
Vários: palavras
Prof: como é que podemos provar que é sempre o número de lados menos dois? Olhem para a figura e pensem. Como é que podemos provar isso? Temos que encontrar um argumento que mostre que dá sempre. Pensem e digam coisas.

O António perante estas questões mantinha-se sempre mais interessado na aula, gostando de argumentar e descobrir. Mas mostrava que às vezes ficava baralhado com o facto de andarmos a descobrir o que já estava descoberto.

António: stora nós estamos a descobrir coisas?

Esta pergunta do António é muito curiosa.

Liliana: porquê menos dois…

A Rita fez vários polígonos no quadro e mostrou que nesses casos há sempre menos dois triângulos do que lados. A Francisca confessou continuar sem perceber como se chegou à expressão, o que se pode dever ao facto de ela não ter participado na formulação desta conjetura. A professora mostrou de novo o processo.

Francisca: não percebo o $180 \times (n-2)$. Não percebo. A Maria pode explicar-me?
Prof: Pode.
Maria: eles fizeram várias figuras e viram que consoante o número de lados os triângulos iam ser menos 2, certo? Toda a gente chegou até aí.

A professora dando conta que havia alunos que não tinham percebido voltou a rever o processo.

Prof: eu vou fazer aqui outra vez (desenho um polígono). Vejam o processo: divido de forma a que os angulos internos pertençam a estes ângulos (do polígono): 1 triangulo, 2 triângulos, 3 triângulos e 4 triângulos. Quantos lados tinha o polígono?
Vários: 6
Prof: Quantos triângulos?
Vários: 4
Prof: Deu dois a menos; 6-2=4; ao experimentarem em várias figuras :4 lados 2 triângulos, 6 lados 4 triângulos, …
Francisca: ahhhhhh.

Mais uma vez surge a dificuldade dos alunos repararem num padrão, por isso, a professora refere que é preciso organizar os dados de forma a vê-los todos para assim procurar um padrão.

A Daniela, aluna dos mesmo grupo da Francisca e do Miguel, questionou porque é que a Rita afirmava ser o número mínimo de triângulos e a Rita explicou.

> **Rita:** Isto pode-se dividir em mais triângulos.
> **Prof:** Posso arranjar aqui outros triângulos, mas esses não me interessam porque vão ter ângulos que não pertencem aos ângulos internos da figura.
> **Daniela:** Mas podíamos fazer menos triângulos. Podia não dividir em 4, podia dividir…

A Daniela achou que ainda era possível decompor o polígono num número menor de triângulos e a professora mostrou-lhe, apagando uma das linhas, que se o fizer não fica só com triângulos. Este grupo não explorou e agora precisa de tempo para refletir sobre as questões. Essa necessidade reflete um progresso, porque a Daniela não costumava saber questionar-se. Dizia apenas não percebo nada ou tenho dificuldades em tudo. A forma como se questionou sobre o que é ser número mínimo nesta situação revela estar a raciocinar e a organizar o seu pensamento em torno do que é dito na situação.

> **Prof:** Não porque se eu não dividir aqui este não é um triângulo. Tem 1,2,3,4 lados está aqui um quadrilátero.
> **Daniela:** Mas se tirar uma outra do meio.
> **Beatriz:** Não dá Daniela.
> **Prof:** Podes arranjar outra maneira de dividir, mas se eu não puser uma destas linhas não fico só com triângulos.

O António sugeriu outra forma de decompor que consistia e começar por outro vértice e a professora aproveitou para lhes mostrar que ficavam com o mesmo número de triângulos

> **António:** Em vez de ser desse lado, de outro ângulo.
> **Prof:** Ah, sim eu podia ter partido deste vértice, por exemplo. Mas isso tanto faz, vamos ver se não dá igual. Se eu começar deste continuo a ter 4 triângulos. 6 lados 4 triângulos. Posso escolher o vértice que quiser.

Após estes esclarecimentos importantes, que não ocorreram no seio dos grupos, voltou-se à questão da prova. Saliente-se que esta discussão pormenorizada com revisão dos processos e com os alunos interessados neles não foi possível nas outras tarefas.

Prof: E agora? Como provamos que para qualquer polígono temos $n-2$ triângulos, sendo n o número de lados. O que é que neste processo faz com que ao desenhar só haja n-2 triângulos?
António: mmmmmmmmm
Mariana: Porque não deve haver nenhum polígono que só tenha um triângulo.
Prof: há o triangulo.
Beatriz: Porque estamos a unir quatro. Aqui no triângulo 4 tem dois lados da figura
Prof: Podes vir cá, se faz favor? Senta-te Rita.

Entretanto o Miguel insistia poder decompor um triângulo em dois triângulos. A professora respondeu ao Miguel e exemplificou com um desenho no quadro.

Miguel: Ó stora um triângulo dá para dividir em dois.
Prof: Não consegues dividir em 2 sem arranjar mais ângulos lá dentro, tu queres que os ângulos pertençam ao polígono.
Miguel: Sim sim, pois.

O António deu um pulo e disse já ter percebido porquê. Estava ansioso por falar. A professora pediu-lhe que esperasse que a Beatriz acabasse.

António: Já percebi.
Prof: então espera aí deixa a Beatriz falar.
Beatriz: por exemplo aqui.

A Beatriz apontou para o hexágono desenhado no quadro e decomposto em quatro triângulos.

Prof: Sim. Diz lá.
Beatriz: Temos 2 lados da figura e apenas um triângulo e aqui também temos 2 lados da figura e aqui estamos a unir 2 lados ao vértice que sobra daí os 4 triângulos.
António: Eu ía dizer outra coisa…
Prof: Como é que explicas isso para um qualquer, Beatriz?

A Beatriz aproveitou o quadrilátero desenhado no quadro.

Beatriz: neste por exemplo, estamos a unir 2 lados: 2 lados 1: 2 lados: outro triangulo, 2 triângulos. Aqui [no mesmo] 2 lados da figura 1 triângulo, aqui 2 lados 1 triângulo. Agora este: nós queremos dividir em triângulos e estão 2 triângulos…A Maria está a dizer que não justifica. No meu entender como usamos 2 lados da figura para fazer 1 triângulo estamos a diminuir o número de lados no número de triângulos.
Prof: consegues escrever isso de alguma maneira? Estás a partir de uma figura genérica, tens n lados e agora estás a dizer que…
Beatriz: Juntamos 2 lados e só dá 1 triângulo.
Prof: consegues ir mais longe com isso?
Beatriz: …
Prof: vai pensar um bocadinho

A Beatriz não conseguiu explicar de forma clara o que ela conseguiu visualizar: num polígono com n lados há 2 triângulos que usam dois lados da figura cada um e todos os outros triângulos só partilham 1 lado com o polígono pelo que o número de triângulos é n-2. A figura 60 pretende mostrar que os dois triângulos sombreados são os únicos que partilham 2 lados com o polígono enquanto os outros triângulos só partilham 1 lado com o polígono.

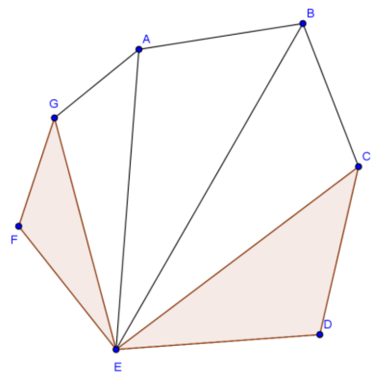


Figura 60 – Polígono exemplo para a generalização da Beatriz

O António deu outra explicação que parece a mais simples para que todos os alunos acompanhem o raciocínio.

António: Eu vi, reparei, que escolhe-se um vértice e faz-se triângulos com todos os vértices menos com 2 e aqueles 2 ângulos ao lado não se ligam ao fazer um triângulo e talvez seja por isso que vão ser menos 2 triângulos.

O António está a descrever um processo que não se refere a um caso particular. Todas as relações são descritas de forma genérica. A professora incentiva a que o António registe o que disse, explicando ser importante que todos sigam o raciocínio. O

António hesita em escrever e a professora tira apontamentos do que ele diz para depois reverem em conjunto com toda a turma. Quando o António repete o raciocínio explica desenhando ao mesmo tempo.

A Liliana não notou qualquer diferença entre a explicação da Rita e a do António. Isso quer dizer que para ela a explicação dos casos específicos é a mesma que a explicação do caso geral.

> **Liliana:** Ó stora e não é o mesmo que a Rita esteve a fazer?
> **Prof:** a Rita, o grupo dela, fez uma conjetura que parece estar correta, mas só está provado quando eu conseguir mostrar que é verdade para qualquer polígono. Imagina que um polígono tem 101 lados. Como mostras que desta forma o decompões em 99 triângulos? Tens que partir para uma justificação que durante o processo de construção te garanta que em qualquer polígono vais ter sempre menos 2 triângulos. Tínhamos uma conjetura e isto já é uma prova.
> **António:** em qualquer polígono é impossível fazer um triângulo com os 2 ângulos ao lado, não se consegue.
> **Prof:** estão convencidos?
> **Vários:** sim.
> **Miguel:** não.
> **António**: a única linha que liga um ângulo ao outro é esta. Eu não posso fazer, chegar aqui e fazer isto.

O Miguel é natural que não esteja convencido, pois o Miguel tem dificuldades em interpretar uma figura como um caso genérico. Logo a prova não está ainda ao alcance do Miguel.

Esta prova não foi compreendida por todos mas proporcionou uma experiência de prova após a exploração por indução através de um argumento geral.

A formulação de uma prova foi possível através de um argumento, neste caso verbal, que explicou porque se teria sempre um decréscimo de 2 triângulos relativamente ao número de lados. É certo que apenas dois alunos foram capazes de tentar formular um tal argumento, mas todos foram expostos a este processo. Esse argumento é genérico pois é representativo do que ocorre quando se divide um qualquer polígono convexo em triângulos cujos ângulos internos pertencem aos ângulos dos polígonos.

Os processos de raciocínio da turma serão sintetizados de seguida e de acordo com as categorias de análise do raciocínio matemático, mas de uma forma mais global.

5.3 Síntese global e subcasos

O raciocínio matemático na descoberta envolveu todo o processo desde a identificação de uma situação matemática a trabalhar até à prova dessas mesmas descobertas. Neste estudo o objetivo foi o de perceber como os alunos raciocinaram ao longo desse processo. É claro que três tarefas são insuficientes para que os alunos aprendam a raciocinar, mas ao experimentarem descobrir matemática estão a desenvolver o raciocínio.

Na preparação da investigação, como já foi referido na secção de metodologia, foram considerados fundamentais para o desenvolvimento desta experiência três aspetos: estabelecer normas de trabalho individual e coletivo; otimizar a capacidade de trabalho de cada aluno através da gestão da constituição dos grupos de trabalho; e proporcionar na aula de matemática atividades abertas de forma a promover a discussão dos raciocínios.

As normas de trabalho estabelecidas ao nível do trabalho do pequeno grupo foram compreendidas pelos alunos. Os grupos de trabalho, na generalidade, funcionaram bem. Houve uma maior dificuldade em cumprir as normas de trabalho com o grupo turma. Inicialmente os alunos sentiam a necessidade de se dirigirem ao professor em vez de falarem para todos e não havia uma verdadeira interação entre todos os presentes. Estes aspetos foram melhorando, mas no final do estudo ainda persistiam algumas dificuldades a esse nível.

A recolha de dados sobre o raciocínio dos alunos quando trabalhavam em grupo permitiu que a investigadora se apercebesse da forma como os alunos interagiam uns com os outros. De acordo com esses dados a investigadora geriu os grupos de trabalho por forma a criar as melhores condições para que cada aluno desenvolvesse o seu raciocínio matemático. Os grupos de trabalho nas três tarefas são os listados na tabela 10.

A investigadora percebeu que cada aluno só exprimia os seus raciocínios se não estivesse com um colega reconhecido por si como uma "autoridade", pelo que passou a juntar, alunos com um nível semelhante de conhecimento matemático.

Para alguns alunos esta estratégia foi fundamental pois passaram a desempenhar um papel mais ativo durante a atividade matemática. Os alunos nessa situação foram os seguintes: Manuel, Miguel, Joana, Isabel, Isa e Gabriela. Apenas na segunda tarefa em que a Joana faltou é que a Isabel, a Isa e a Gabriela não ficaram juntas e voltaram a silenciar por estarem com elementos com melhor desempenho do que elas a matemática.

O Manuel não era levado a sério pelas raparigas do seu grupo, dado que habitualmente mantinha o mesmo registo de fala quando brincava ou falava. Ao mudar o Manuel para um grupo com os seus amigos este teve mais espaço para partilhar os seus raciocínios.

O Miguel participou muito pouco na primeira tarefa tendo a investigadora inicialmente ficado convencida que a causa do silêncio do Miguel se devia à presença do gravador. Mais tarde, a investigadora percebeu que era um problema de interação com os elementos do grupo e quando o juntou com outros elementos o Miguel passou a participar ativamente e a esclarecer as suas dúvidas.

Ao longo das atividades sobressaíram pela passividade alguns alunos, pelo facto de participarem pouco em qualquer grupo em que estivessem. Os alunos que se enquadraram nesse perfil foram a Sofia e a Mariana. A participação destas alunas era apenas de circunstância. As duas alunas eram inseguras, tinham receio da exposição e mantinham-se numa posição de defesa sem conseguirem lidar com o erro.

A entrevista do Miguel revelou a importância que teve para ele o acompanhamento a nível psicológico realizado ao longo do ano. O Miguel referiu como foi importante para ele estar num grupo em que se sentisse bem, pois caso contrário não participava. O Miguel acrescentou que quando trabalhava com os alunos melhores, como a Rita, não sentia necessidade de pensar.

> **Miguel:** No grupo da Rita foi diferente. Tem uma maneira de pensar mais avançada. É aquilo e aquilo e está tudo certo e então nem me dou ao trabalho de pensar.

O Miguel referiu, também, na entrevista como os elogios da professora às suas capacidades o motivaram para a disciplina.

O caso das alunas Isa, Gabriela, Joana e Isabel também é revelador da importância da gestão dos grupos de trabalho. Estas alunas tinham um desempenho fraco na disciplina e conseguiram raciocinar quando ficaram juntas no mesmo grupo. Na entrevista realizada à Isa quando a professora/investigadora a questionou sobre qual foi o grupo em que se sentiu melhor ela respondeu ter sido no grupo constituído pelas alunas Isabel, a Gabriela e a Joana. A professora pediu-lhe para esclarecer essa afirmação e a Isa respondeu: “Porque acho que temos todas a mesma forma de pensar.

Somos assim um bocado fechadas e então ajudou-nos a falar.” A conversa sobre o assunto continuou e a Isa explicou como não conseguia acompanhar a atividade matemática realizada no grupo quando estava com alunos melhores. A Isa achava que a maioria dos seus colegas sabiam mais matemática do que ela, pelo que a professora a colocou em grupos com elementos com um nível semelhante ao nível dos seus conhecimentos matemáticos.

Tabela 10 – Variação da formação dos grupos de trabalho nas três tarefas

Elementos constituintes dos grupos		
Tarefa 1 “À procura de dízimas finitas”	Tarefa 2 “A área de um retângulo especial”	Tarefa 3 “Ângulos internos de um polígono Convexo”
Isa, Isabel, Gabriela, Joana	**Isa**, Isabel, Rosa, Antónia	**Isa**, Joana, Gabriela, Isabel
António, Daniela Sofia Rosa	**António**, Daniela, Francisca, (Mariana-faltou)	António, **Maria**, Rosa, Sofia
Paulo, **Maria,** Beatriz	Rita, **Maria**, Beatriz, Paula	**Miguel,** Francisca, Daniela, Mariana
Liliana,Manuel, Paula, Francisca (faltou na 2ª aula)	**Liliana**, Sofia, Gabriela, (Joana–faltou)	**Liliana**, Paula, Antónia, Manuel
Antónia, **Rita,** Miguel, Mariana	**Manuel**, Miguel, Paulo	**Rita**, Beatriz, Paulo

*Os nomes a negrito são aqueles que deram a designação ao grupo na respetiva tarefa

O trabalho que foi desenvolvido em termos de monitorização do trabalho de grupo, ao longo de todo o ano, permitiu a progressão dos alunos relativamente ao desenvolvimento das capacidades para trabalhar em grupo.

A metodologia de investigação proporcionou aos alunos a oportunidade de explorar em pequeno grupo e partilharem/ discutirem em turma os seus raciocínios. A envolvência dos alunos na aula de matemática, durante a realização de tarefas de investigação, em nada se comparou à forma passiva, como muitos dos alunos, anteriormente estavam numa aula. Infelizmente, não é possível afirmar que todos estiveram tão envolvidos como se gostaria, mas é indiscutível que todos estiveram mais envolvidos. O António tinha sido o único aluno a afirmar no início do ano que não gostava de matemática como já foi referido na subsecção 5.1 Caraterização do caso turma). Ao longo desta experiência mudou de ideias e afirmou várias vezes que assim gostava das aulas, referindo-se à dinâmica da metodologia de investigação na aula de matemática.

No decorrer da realização das investigações matemáticas aconteceu de, por vezes, as lacunas de conhecimento dos alunos impossibilitarem que raciocinassem. Como o tema matemático da tarefa variou não é possível seguir, ao longo do estudo, o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos em paralelo com o desenvolvimento do raciocínio. Contudo, as dificuldades dos alunos, diagnosticadas ao longo do estudo, foram alvo de atenção da professora durante as aulas de matemática no decorrer da lecionação das respetivas unidades temáticas.

De modo a que o leitor fique com uma visão global do estudo será realizada uma síntese da atividade matemática dos alunos segundo as categorias de análise do raciocínio matemático.

Da conjetura à generalização

A segunda e a terceira tarefas davam algum apoio ao aluno para explorar. Esse apoio da segunda tarefa consistia na representação geométrica do objeto matemático permitindo visualizar relações. Na primeira tarefa o único apoio foi o uso da máquina de calcular.

Processo de conjeturar

Na primeira tarefa, "À procura de dízimas finitas", a exploração em pequeno grupo foi dominante no tempo global da tarefa. Depois da longa e árdua experiência de investigação, na primeira tarefa, nas outras tarefas os alunos aceitaram facilmente investigar.

Relativamente ao número de particularizações registadas verificou-se que os alunos registaram poucos casos. Pensaram em mais casos, mas não os registaram. Por exemplo, na primeira tarefa, experimentaram muitos denominadores na máquina de calcular que não foram registados. Verificou-se também que os alunos não organizaram os casos. Só através da orientação da professora, na segunda aula, é que particularizaram de forma mais sistemática e organizada. Na terceira tarefa o facto de terem de desenhar polígonos cada vez com um maior número de lados constituiu um obstáculo à particularização.

A falta de registo prejudicou a formulação de conjeturas, pois para percecionar o padrão é necessário observar e desenvolver a capacidade reparar. Sobressai ao longo da atividade matemática descrita que os alunos tiveram mais facilidade em encontrar o padrão dos dados na segunda aula da primeira tarefa "À procura de dízimas finitas" e na segunda tarefa "Um retângulo especial". Analisando a forma como os alunos procuraram o padrão da situação em todas as tarefas verifica-se que, nas duas tarefas mencionadas, os alunos registaram os dados ficando com uma base de observação dos mesmos. Conclui-se, assim, que o problema da procura de padrões está relacionado com a falta de registo organizado dos dados. Salienta-se que, na segunda aula, da primeira tarefa, foi a professora que introduziu uma organização em forma de tabela e, na segunda tarefa, o esquema de apoio do enunciado permitia que desenhassem por cópia do modelo para cada uma das concretizações realizadas. Nas outras tarefas, os alunos encontraram o padrão dos dados quando a professora foi aos grupos e os questionou sobre quais eram os dados. Os alunos para responderem à professora reviram os dados e encontraram o padrão. Estes factos apontam para a hipótese de os alunos não possuírem no seu "stock" formas variadas de representação que possam ser mobilizadas de forma autónoma em cada situação.

Depois de encontrarem o padrão, os alunos tinham de estabelecer uma relação geral (uma conjetura) e é possível ver, ao longo da atividade, o esforço por eles dispendido e, como geralmente a verbalização da relação através de casos concretos precedeu a chegada à relação geral.

A generalização na segunda aula da primeira tarefa foi realizada de forma mais cuidadosa a partir da observação de muitos dados, organizados em tabelas, e alguns alunos escreveram expressões algébricas para traduzir as relações gerais. Essas relações foram traduzidas com facilidade a partir da observação do número decomposto em fatores primos. Nesse caso, a tradução da lei geral é diretamente observável. O grupo da Liliana na segunda aula da primeira tarefa escreve uma expressão algébrica diferente para a mesma sequência em que os em termos estão representados pelo seu valor ou pela relação de um termo com o seguinte (ver figura 33). Escreveram de forma errada a expressão geral da sequência 10, 20, 40, 80, … como $2n$, em que n representava o termo anterior não conseguindo expressar uma relação geral apenas dependente do processo de formação. Os alunos não compararam as duas expressões. uma das expressões é recursiva e a outra é a tradução do padrão realçado pela decomposição em fatores primos. Este facto revela, para além de dificuldades algébricas, dificuldades em relacionar os diferentes termos de uma sequência pela sua lei de formação.

Verificou-se que os alunos não tiveram dificuldades em formular conjeturas nem em refutá-las cada vez que surgiu um contraexemplo. A consequência da facilidade com que este processo ocorreu, começou a tornar-se evidente quando foram refutadas conjeturas que enunciavam propriedades que pertenciam aos denominadores daquelas frações que originavam DF. Por exemplo, a conjetura formulada “as frações DF têm o denominador par” foi refutada com o contraexemplo denominador 6 que não é do domínio dos denominadores DF.

Quanto à formulação lógica do enunciado da conjetura, os alunos usaram equivalências o que traduz pensarem que a regra que encontrassem serviria para todos os casos. A Rita formula a conjetura de potências de 2 como uma implicação, denotando perceber que pode haver outras regras. Quando confrontados com as diferenças entre as duas formulações os alunos não reagem. Há no entanto, evidências de modificação das formulações subsequentes.

Na formulação das conjeturas o domínio de aplicação das mesmas foi na maioria das vezes respeitado, mas por vezes o domínio não foi referido na conjetura. Curiosamente foi o grupo da Maria, na primeira tarefa, ignorou o domínio de aplicação da conjetura. A hipótese de que apenas o tivessem ignorado na forma escrita, mas que soubessem qual é o domínio de aplicação, é refutada quando foram buscar um caso (denominador 15) fora do domínio dos denominadores que originam DF para verificar. Na segunda aula esse aspeto melhorou, pois os alunos ao fazer uma particularização mais sistemática já só registaram denominadores que originavam DF.

Foi preciso que os alunos reformulassem as conjeturas e para isso tiveram de deixar de as formular como equivalências. Os enunciados escritos das conjeturas traduziram de forma coerente o pensamento dos alunos através do uso adequado de quantificadores nas frases e das operações lógicas de implicação e de equivalência. Quando, na primeira tarefa, a professora colocou duas conjeturas em confronto, em que uma está formulada como uma equivalência e a outra como uma implicação, pretendia tornar evidente as diferenças entre as duas operações insistindo na lógica da frase. Depois deste episódio não voltaram a surgir conjeturas escritas como equivalências. Conclui-se que as formulações de equivalências não eram um problema de não saber lógica matemática, pois traduziram corretamente a ideia, dos alunos, de que haveria uma única lei a descobrir.

Para além do aspeto da formulação da conjetura tinham de aprender a restringir o domínio da conjetura barrando as exceções que surgiam. Por exemplo, a propriedade de os denominadores serem potência de 2 mantinha a propriedade de ser par e barrava outros números pares tal como o referido contraexemplo 6. No entanto este processo requeria conhecer as regularidades das potências, neste caso, de base 2 ou conseguir percecionar o processo de gerar cada termo e traduzi-lo por uma expressão geral. Os alunos não conheciam as regularidades das potências de base 2 e a professora ajudou-os a generalizar através da observação do processo de formação dos termos da sequência.

A função dos contraexemplos reveste-se de grande importância no processo de conjeturar e os alunos não estavam despertos para essas funções o que é natural, uma vez que é a primeira vez que investigam. Nos testes realizados às conjeturas através de contraexemplos a função destes foi o de refutar e de restringir o âmbito de aplicação da conjetura através de reformulação.

Nível de prova

Verificou-se que, de uma forma geral, na primeira tarefa os alunos generalizavam com demasiada facilidade sem explorarem o suficiente e também que cada vez que surgia um contraexemplo abandonavam a conjetura. Apenas as alunas do grupo da Isa revelaram um nível de prova mais avançado do que o nível de *empirismo naïf* testando mais casos e mostrando dúvidas quanto à veracidade da conjetura. O erro cometido no processo de conjeturar criou a necessidade de comprovar muitos casos.

Na segunda tarefa o nível de prova de todos os grupos continuou a ser de *empirismo naïf* exceto o do grupo da Liliana e do grupo da Maria. No grupo da Liliana o nível de prova foi o *exemplo genérico* e *experiência crucial*. Os dois níveis de prova coexistiram, pois as alunas sentem necessidade de verificar a generalização com mais um caso. O grupo da Maria nesta tarefa, manteve-se no nível da *experiência conceptual*.

Na terceira tarefa o nível de prova de muitos alunos ainda se mantém no nível de *empirismo naïf*, mas o grupo da Maria está no nível de experiência crucial, porque verificaram um caso especial.

Natureza dos raciocínios e padrões de raciocínio

Na primeira tarefa, os raciocínios envolvidos na fase de exploração foram, sobretudo indutivos. Só houve raciocínio dedutivo na ação de os alunos particularizarem a partir de uma relação geral. Houve também analogias relativamente à formulação da conjetura de potências de 5 como análoga à conjetura de potências de 2.

Os raciocínios da maioria dos alunos, na primeira tarefa, enquadraram-se inicialmente no padrão de verificação científica de rendição, de barramento de exceções e de *monster barring*. Ainda na primeira tarefa ocorre o raciocínio de análise da prova quando os alunos se enganam e depois reanalisam todo o raciocínio para encontrar o erro e descobrem uma lei geral.

Na segunda tarefa, os raciocínios dos grupos foram, maioritariamente, de verificação científica. No entanto, no grupo da Liliana e no grupo da Maria os raciocínios realizados enquadraram-se no padrão de raciocínio: dedução – conjetura - teste cíclico. No grupo da Maria as alunas conjeturaram com base nas relações gerais entre as áreas chegando a uma generalização provada matematicamente por elas.

Na terceira tarefa os raciocínios foram indutivos e enquadraram-se no padrão de verificação científica.

Da justificação à prova

O nível de prova dos alunos no início do estudo era de *empirismo naïf*

Ao longo das três investigações a prova foi-se tornando mais explícita e foi sendo promovida a ideia de que não se prova através de argumentos empíricos.

Questionamento

No processo de conjeturar da primeira tarefa, a justificação não acompanhou o processo, pelas razões já referidas de a investigação se ter afastado da estrutura matemática da fração. Na primeira tarefa na discussão com toda a turma chegou-se à descoberta de quais os denominadores das frações $\frac{1}{n}$ a que correspondiam DF sem qualquer justificação para o facto. A professora tinha incentivado alguns grupos a pensar sobre a justificação recorrendo ao algoritmo da divisão, mas foi no final da segunda aula e não ficaram a compreender. A justificação de ser DF não tinha emergido nos seus raciocínios por a exploração se ter afastado da estrutura matemática da fração. Em vez disso os alunos tinham procurado as caraterísticas apenas dos denominadores da fração. Este aspeto provocou uma rutura entre o processo de conjeturar e o processo de provar, o que prejudicou o desenvolvimento da noção de prova dos alunos.

Durante a discussão a professora explicitou, mais do que uma vez, a necessidade de provar por exaustão todos os casos e referiu que para provar que uma afirmação é falsa basta um contraexemplo.

Na segunda tarefa “A área de um retângulo especial” houve a preocupação de que fosse possível os alunos provarem, o que dependia da tarefa propiciar unidade cognitiva entre o processo de conjetura e processo de prova. Para isso a justificação tinha de emergir no processo de conjetura. Assim, a segunda tarefa fez parte de uma sequência de tarefas em que a manipulação algébrica de expressões com variáveis foi trabalhada por forma a melhorar as lacunas existentes de manipulação de expressões algébricas assim como melhorar as capacidades de generalização. A maioria dos alunos, nesta segunda tarefa, formulou uma primeira conjetura com base na observação da figura do enunciado e depois iniciou a exploração particularizando. A partir da análise dessas particularizações reformularam a conjetura. A forma como aceitaram a sua conjetura como válida confirmou que os alunos achavam que se provava com base em argumentos empíricos e que provar dependia do número de casos verificados.

As alunas Maria, Rita, Beatriz, Paula e Liliana, Sofia e Gabriela provaram sem recorrer à particularização. Em vez disso trabalharam com as medidas genéricas atribuídas no esquema do enunciado da tarefa. Estas alunas durante o trabalho em grupo chegaram à prova. Assim, quando se chegou à fase de construção da prova com a turma elas puderam auxiliar no processo.

Construção da prova

Na primeira tarefa não foi possível construir a prova coletivamente pelo facto, já referido, de não haver unidade cognitiva entre os argumentos produzidos na fase de exploração e a subsequente fase de justificação e prova. A professora percebeu que psicologicamente os alunos não reuniam condições para rever todo o processo e fazer a ligação da conjetura com a estrutura matemática das frações $\frac{1}{n}$.

As questões emergentes que resultaram da implementação da primeira tarefa diziam respeito a tentar perceber o que tinha provocado a rutura entre um processo e outro e de que forma é que os alunos podiam provar uma generalização que provinha de uma exploração indutiva.

Na segunda tarefa o grupo da Maria prova a generalização, pelo facto de no processo de conjetura emergirem todas as justificações necessárias para a prova.

Na fase de discussão, a professora quis deixar bem claro o que se entendia por provar dizendo que é preciso provar para todos os casos. Mas quando coloca a questão à turma sobre como é que podem provar os alunos respondem “com letras” e a professora, referindo-se àquela tarefa, justifica esse facto dizendo “porque as letras podem tomar qualquer valor”. A professora fez, sem querer, passar a ideia de que foi possível provar por se ter usado expressões com variáveis. Nesta tarefa a prova para todos os casos foi elaborada com base num esquema dinâmico em que as medidas são genéricas e não há qualquer alusão a casos particulares.

Refletindo sobre o desenvolvimento da prova a investigadora apercebe-se da necessidade de mostrar aos alunos que é possível provar quando se explora um problema por processos indutivos. A investigadora planificou, então, uma terceira tarefa que remeta para uma exploração indutiva que permitisse construir coletivamente a prova. Aconteceu, porém, que vários fatores prejudicaram as intenções da investigadora: o facto de os alunos terem uma visita de estudo no único dia possível para realizar a investigação e a sugestão dada pela professora para tornar mais breve o processo de conjetura não ser do conhecimento de alguns alunos. No entanto, foi possível gerir estes constrangimentos através de atribuir menos tempo para os grupos explorarem e fazer uma discussão mais aprofundada revendo todo o processo de conjetura. Nesta tarefa, por ser geométrica, a justificação facilmente emergiu do processo de conjetura. Na discussão em turma pretendia-se, então, chegar à prova.

Contudo, verificou-se que na terceira tarefa houve muitos alunos que não chegaram a compreender porque é que o número de lados excede em duas unidades o número de triângulos que decompunham a figura. Este facto deveu-se aos atrasos provocados pelas lacunas de conhecimento de alguns grupos prejudicando a exploração e também devido à limitação de representação, no papel, de polígonos com um elevado número de lados. Na fase de discussão a professora provocou os alunos para explicitarem os seus raciocínios e os justificarem. Deste modo foi possível rever todo o processo de conjetura fazendo a ligação com a estrutura matemática da situação.

Para isso a professora teve de se esforçar bastante para conseguir provocar a discussão. Os alunos estavam convencidos da veracidade da generalização feita e foi-lhes explicado que só estava provado se a acompanhar a generalização houvesse um argumento genérico que explicasse que aquela conjetura era verdade para todos os casos. Para conseguir que os alunos avançassem no sentido de provar, a professora optou por fazer o papel de cética argumentando contra as hipóteses colocadas. Ao fazer isto os alunos começaram a defender-se e a explicitar raciocínios que ainda não tinham sido verbalizados, como por exemplo, em que condições é que decompor os polígonos em triângulos era profícuo na situação. A prova foi apresentada na forma de um argumento narrativo genérico.

A construção coletiva da prova foi difícil, pois só a Beatriz e o António conseguiram distanciar-se dos casos concretos e falar de um polígono convexo genérico e das razões de veracidade do padrão reconhecido. No entanto, todos os alunos contactaram com o processo de prova.

Com vista a aprofundar a visão do leitor serão apresentados os resultados do estudo relativamente a quatro alunos complementando os resultados do caso com uma perspetiva individual e psicológica do aluno.

As evidências do raciocínio dos alunos encontram-se na seção anterior de apresentação e discussão dos resultados da turma.

Os subcasos

Os quatro alunos que aqui vão ser referidos são: O António, a Rita, a Liliana e a Maria.

O António

Este aluno passou a gostar da disciplina de matemática devido à possibilidade de desenvolver argumentações. A sua baixa autoestima relativamente em relação à disciplina de matemática explica porque é que o António se mostrou espantado por ter conseguido raciocinar. As suas expressões de espanto documentadas na secção de resultados do estudo são evidências desse facto.

O António esteve bastante envolvido na realização da primeira tarefa, mas a investigadora percebeu que ele dependia da professora para se manter a raciocinar. No final da primeira aula a professora tinha sintetizado os aspetos que os grupos precisavam de melhorar. A professora foi explícita nas críticas ao trabalho do grupo do António no que respeita à falta de registos e capacidade de tomar em consideração o trabalho anterior organizando os raciocínios.

O António foi o aluno que revelou uma maior ligeireza a generalizar como se mostra na secção anterior em que o aluno generalizou sem se apoiar em registos e com base em poucos dados. A capacidade do António de percecionar aspetos comuns aliada à sua capacidade de comunicação oral fazia com que ele não sentisse necessidade de registar e generalizasse com ligeireza.

Propositadamente, na segunda tarefa a professora deu-lhe menos atenção para verificar se o aluno tinha melhorado esses aspetos. Verificou-se que o aluno se desconcentrou com muita facilidade conversando sobre outras coisas. Concluiu-se que o António não melhorou as suas capacidades de registo e que a sua concentração era conseguida mantendo um diálogo constante sobre os raciocínios realizados. Isto, porque as capacidades de comunicação oral e o encadeamento de raciocínios do António eram bastante bons. O aluno sintetizava as ideias com alguma facilidade e mantinha um discurso lógico. Estas caraterísticas faziam com que o aluno desse menos importância aos registos escritos e estivesse sempre ansioso por discutir, sobretudo com a professora. A investigadora teve, então, a ideia de o juntar com a Maria, na terceira tarefa, com o objetivo de o manter mais concentrado. Na verdade, durante a terceira tarefa e apesar de os alunos terem acabado de chegar de uma visita de estudo, o António manteve-se mais concentrado. Analisando a forma como o António trabalhou no grupo, tornou-se claro que ele cooperou no trabalho de grupo raciocinando em conjunto.

A fase de discussão com toda a turma era a fase em que o António sobressaía. Mesmo que não tivesse estado muito concentrado na fase de conjeturar conseguia contextualizar-se rapidamente e raciocinar com base nos argumentos apresentados por quem estivesse a apresentar. A sua facilidade em comunicar de forma sucinta as relações a que chegava permitiam-lhe rapidamente estruturar uma justificação genérica.

Na fase de discussão ele refere-se aos poucos exemplos que o grupo trabalhou como sendo muitos. Ou seja, ele achava que chegavam.

Na discussão da terceira tarefa é o António que traduz oralmente a condição necessária para que se possa aproveitar a decomposição de um qualquer polígono convexo em triângulos: “[deve-se decompor o polígono] de forma a que os ângulos interiores dos triângulos também sejam os ângulos interiores do polígono.”

Na construção da prova com toda a turma o António na primeira tarefa ri-se por a professora lhes perguntar qual a explicação para a conjetura formulada. Na segunda tarefa esteve desconcentrado e na terceira tarefa ele consegue provar. Analisando a prova que o António fez percebe-se que a sua facilidade em ver relações gerais lhe permitem verbalizar raciocínios rapidamente. Estão aqui envolvidas duas capacidades: notar relações e comunicar essas relações. Segundo Balacheff (1987) a passagem da prova pragmática para a conceptual faz-se através da linguagem. Quando o António verbaliza o seu raciocínio fá-lo de forma geral. Não há qualquer indicação de se estar a referir a exemplos particulares. Ele explica que se escolhe um vértice da figura e que se formam triângulos ao unir cada dois vértices, mas que não é possível formar triângulos com os dois lados adjacentes ao vértice escolhido. Em contraste, a Beatriz não foi capaz de explicar distanciando-se dos casos particulares.

Concluiu-se que o António raciocina melhor em discurso interativo com os outros, ou seja, promove o seu raciocínio através de argumentação. O António ambicionava ser advogado e quando falava sobre essa profissão relacionava-a com argumentação. Concluiu-se que António raciocina melhor quando tem de defender um ponto de vista.

A Rita

Na primeira aula da primeira tarefa os alunos do seu grupo não eram alunos em que a Rita confiasse do ponto de vista da matemática. Por consequência, enquanto procuravam sem conseguir encontrar regularidades, a Rita foi bastante intolerante com os seus colegas de grupo. Trabalhava bem em conjunto desde que confiasse nos conhecimentos matemáticos dos colegas com quem trabalhava. A professora nas outras tarefas colocou a Rita em grupos em que ela pudesse progredir e deixar os outros progredir. Na segunda e na terceira tarefa esteve sempre acompanhada pelo menos com mais uma das suas amigas com quem trabalhava bem.

Na primeira tarefa a Rita teve dificuldade em aceitar o ter de particularizar, mas acaba por aceitar e acaba por fazer uma particularização, em conjunto com o seu grupo, bastante sistemática e organizada.

Na segunda tarefa a Rita, em sintonia com a Maria, questionou-se sobre se para provar seria preciso particularizar e ficou bastante satisfeita por saber que a particularização não faz necessariamente parte do processo de prova. Ao longo do estudo a investigadora foi percebendo que a exploração indutiva era para a Rita uma grande maçada e que ela tentava sempre pensar de forma algébrica. É curioso que na terceira tarefa a Rita sintetizou a informação em duas condições e tentou resolver a situação através de um sistema de equações. A Rita disse assim: “O número de lados é igual ao número de triângulos e sabemos que a amplitude do ângulo interno mais a amplitude do ângulo externo dá 180º... Um sistema!”. Mesmo quando a Rita percebeu que precisava de fazer concretizações propôs fazer das duas formas: algebricamente resolvendo o sistema e usando casos de polígonos concretos. A professora não incentivou a Rita a explorar o sistema, apesar de poder ter interesse ver como a aluna prosseguiria, porque o objetivo, naquele momento, era dar-lhe oportunidade para ficar a saber como provar nas situações em que a resolução fosse uma exploração indutiva. A professora conversou com a Rita sobre estas questões explicando-lhe que, quando não se sabe por onde começar a investigar a concretização é valiosa, pois ajuda a perceber o que está em causa fornecendo pistas para continuar.

Na segunda tarefa a Rita mostrou preocupação com a forma como iria explicar à turma de forma que os outros compreendessem. Essa preocupação, segundo Yackel e

Cobb (1998), envolve assumir a explicação como objeto de reflexão o que revela uma compreensão mais profunda do que é uma explicação. Parece haver sinais de que após a primeira tarefa a Rita tenha começado a preocupar-se um pouco mais com os colegas.

Na terceira tarefa a aluna mostrou-se irritada na fase de discussão por a professora pôr em causa a sua generalização chamando-lhe ainda conjetura. Em sua defesa, a Rita disse que já tinham experimentado outros casos. Neste momento ficou claro que a Rita não sabia como provar após uma exploração indutiva.

A Rita era impaciente e muitas vezes precipitava-se na resolução de situações matemáticas pela vontade de *atacar* logo a situação sem ponderar o suficiente. A professora aconselhou a Rita a ter mais calma e a analisar melhor a situação, pois o caminho pelo qual se decide iniciar a investigação pode ser determinante para conseguir obter sucesso. Para colmatar este problema a Rita contava com a ponderação da Maria e da Beatriz. Estas três alunas formaram uma verdadeira equipa de trabalho pois as três juntas completaram-se.

A Liliana

A Liliana foi afirmando ao longo do tempo do estudo não gostar de fazer investigações. No entanto, a Liliana esforçou-se sempre muito na exploração das tarefas. A investigadora entrevistou-a para compreender melhor o caso da Liliana. A investigadora começa por lhe pedir para identificar as diferenças entre as aulas de matemática naquele ano e as dos outros anos e a resposta da Liliana foi a seguinte:

> Percebemos como é que se relacionavam as coisas, não foi só dar fórmulas e nós tínhamos que escrever… Sim, este ano percebi as fórmulas e de onde é que aquilo vinha.

Depois, curiosamente, quando a investigadora lhe pergunta se gostou de fazer as investigações a Liliana diz não saber responder e depois acrescenta que não tem um raciocínio rápido. A investigadora mostra-se surpreendida com o "rápido", porque de facto a Liliana aproveitou sempre bem o tempo para raciocinar sem ser preciso andar a espicaçá-la para esse efeito. A Liliana afirma que os outros têm um raciocínio mais rápido. Esta entrevista veio corroborar a interpretação da investigadora de que a aluna tem uma autoestima baixa relativamente à matemática. A Liliana acaba por dizer que o problema das investigações é o começarem do nada. Ao distinguir exercício de atividade de investigação a Liliana refere o seguinte:

> Temos o enunciado e resolvê-lo de acordo.

> As investigações partimos do nada, ou seja, somos nós próprios a criar o exercício e a fazer as perguntas " porquê? Porquê isto, porquê aquilo?" e temos que chegar às respostas, ou seja, nós somos uma espécie de professores… Fazemos os enunciados e temos de responder.

A Liliana explica que a vantagem de realizar as investigações em grupo reside em dar ideias e discuti-las em pequeno grupo. Considera também ter melhorado muito o seu raciocínio devido à realização de atividades de investigação.

O trabalho da Liliana foi sempre um trabalho muito sério e desenvolvido com cuidado. Pensava muito bem nas afirmações que fazia e fazia um trabalho reflexivo. Verificou-se, porém, que a maior preocupação dela era em conseguir resolver a situação problemática que tinha em mãos, pois não conseguiu descentrar a sua atenção desse aspeto. A Liliana trabalhou muito com a Paula, pois entendiam-se e cooperavam muito bem.

A Liliana respeita o seu próprio processo de aprender, pois ela não vai atrás de uma pista que não compreenda. Na primeira aula da primeira tarefa o grupo dela foi o único grupo que trabalhou de acordo com os seus próprios raciocínios, sem seguir desvios vindos do exterior do grupo. Quando descobriram a particularidade dos denominadores no domínio das DF serem pares ou ímpares, estavam a observar os dados com atenção e iniciaram autonomamente uma exploração. Este facto é indicador de desenvolvimento de autonomia e questionamento.

A Liliana aprendeu a explorar as situações, a formular conjeturas e a testá-las. Melhorou também a perceção de padrões, mas geralmente estabelecia relações recursivas. O seu nível de prova está no nível de *empirismo naïf* pois ela considera que por particularização se prova. Aliás, na entrevista ela considera que uma conjetura está provada.

Conclui-se que provar não é importante para a Liliana, ela não sente necessidade de provar. Está voltada para o desenvolvimento dos raciocínios para chegar às soluções e essas, para ela, não precisam de prova.

A Maria

A Maria tem uma boa capacidade de aprendizagem e também compreende as intenções educativas. A professora costumava dizer que ela refletia aquilo que os professores ensinassem.

Nesta experiência as capacidades da Maria permitiram-lhe simultaneamente perceber como se investiga e captar a intencionalidade didática da prova. A investigadora confirmou essa perceção na entrevista feita.

Quanto à exploração da primeira tarefa, Maria revela algumas capacidades de investigadora. Fez algumas observações relativamente ao enunciado se referir a $\frac{1}{n}$ afirmando que a razão de o numerador estar fixo em 1 é para facilitar a investigação do que acontece quando o denominador n varia. Revela consciência de ser mais fácil observar a variação de um parâmetro se os outros estiverem fixos. Refere também outro aspeto importante: a organização dos dados por ordem para facilitar a investigação.

Durante a investigação, Maria decidiu explorar frações cujo numerador não é 1, experimentando os mesmos denominadores para numerador 2. Este passo parece ser uma tentativa de confirmação de que os resultados da investigação não dependiam dos numeradores. Ao fazê-lo, verificou que com exceção dos casos em que o numerador é igual ao denominador as frações representavam também dízimas finitas. Testou o caso de o numerador ser 2 e verificou que vai dar com os mesmos números exceto com o próprio. Quando a aluna Maria faz esta mudança de numerador ela está a tentar generalizar para o caso das frações m/n e a particularizar para o caso 2/n ou a fazer analogia entre 1/n e 2/n como representado na figura 61.

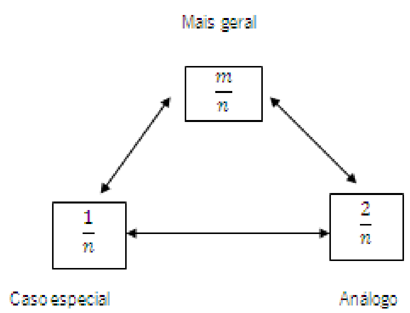


Figura 61 – Generalização, particularização e analogia com base em Polya (1968, p.15)

Considerando o processo de generalização de mudança do caso concreto do numerador 1 para 2 rumo a um qualquer numerador seria: $\frac{1}{n} \rightarrow \frac{2}{n} \rightarrow \frac{m}{n}$. Mas Maria não conseguiu extrair daqui qualquer conclusão porque ainda não descobrira que características têm as frações $\frac{1}{n}$. Assim, este passo acaba por servir, apenas, para a convencer que quando descobrisse as características de n que fazem com que $\frac{1}{n}$ seja DF, terá descoberto também para $\frac{2}{n}$. Continuou a fazer outras explorações dentro do domínio genérico $\frac{m}{n}$ conjeturando sobre aquelas cujo denominador é múltiplo do numerador. Esta exploração para as frações mais gerais $\frac{m}{n}$ denotou preocupação em perceber o contexto global em que se insere a tarefa.

Quando entrevistada, Maria confessa a sua desconfiança inicial face às tarefas do tipo investigativo.

> **Maria:** Muitas, principalmente nas atividades e assim que nós fizemos, nos outros anos não fazíamos nada e até ficamos um bocado no inicio: ei, “ o que nós vamos fazer? “, mas agora já é, percebi que é melhor assim, fazer as atividades mas…

A investigadora questiona-a sobre quais são as razões que a levam a afirmar ser melhor assim.

> **Prof**: E porquê? Porque é que é melhor assim?
> **Maria**: Porque assim nós percebemos como é que chegamos às coisas, nos outros anos estávamos habituados a fórmulas e outras coisas e nós nem sequer nos perguntávamos porque é que aquilo era assim. Era assim e ponto final… Agora já, já olhamos para aquilo e perguntámos:“ Porque é que assim?”; “ Porque é que isto é isto e porque é que isto dá isto?”.
> Quando nos outros anos nós praticamente as aulas passávamos a fazer exercícios. E era disso que fazíamos mas agora acho que melhorou e vê-se pelas notas dos outros alunos.

A Maria está a falar sobre o questionamento, capacidade fundamental para compreender e aprender. É através do tipo de questionamento que ela descreve que a pessoa vai conseguir observar para encontrar pistas que a levem a definir uma estratégia de resolução. Relembre-se que a aluna devido ao respeito e carinho que tinha pelos seus professores anteriores, custou-lhe a aceitar que pudesse haver outro método de aprendizagem mais eficaz. Ainda no primeiro período a Maria tinha sido confrontada com a prova das Olimpíadas Portuguesas de Matemática e tinha ficado surpreendida com o nível de desafio dos problemas propostos. Aqueles problemas tinham-lhe dado uma primeira ideia de que saber matemática era muito mais do que fazer exercícios. A Maria continuou a explicar as limitações da resolução de exercícios, contrapondo que depois de investigar sabe quais são as razões de resolver os exercícios através deste ou daquele procedimento.

A investigadora perguntou à Maria qual a sua opinião relativamente aos grupos de trabalho. Ela explicou que geralmente trabalhava sozinha e quando trabalhava em grupo era com as amigas: Rita, Beatriz, Rafaela e Liliana. A investigadora perguntou-lhe a opinião sobre a variação da constituição dos grupos.

> **Prof**: E vês alguma vantagem em se diversificar os grupos? Em ir mudando de elementos?
> **Maria**: Sim, porque também, por exemplo termos elementos mais fortes e elementos mais fracos dá para ajudar e depende também das personalidades das pessoas, como é que trabalham em grupo…

Relativamente a ter tido grupos diferentes na realização das tarefas a Maria revela estar mais habituada a trabalhar sozinha.

> **Maria**: Bom, trabalhei com toda a gente e pode-se dizer que vi como é que as pessoas trabalham em grupo. É que eu normalmente trabalho sozinha…

Na entrevista percebe-se que a Maria gostava mais de trabalhar individualmente, porque não gosta que a interrompam no seu raciocínio. Isto porque, para raciocinar Maria não precisava de explicitar o seu raciocínio oralmente. Ao contrário, por exemplo, do António ela não precisava de argumentar com alguém para manter o seu raciocínio lógico. Fá-lo interiormente. Na entrevista, Maria refere que quando trabalha com outras pessoas que não as amigas se irrita por ter de trabalhar mais devagar.

> **Maria:** Quando é com outros alunos talvez façamos mais devagar e às vezes estou com pressa de fazer as coisas e irrito-me, mas… e quando eu ‘tou a escrever alguma coisa e ‘tou a meio do raciocínio e as pessoas interrompem-me e dizem: “ Que é que ‘tás a fazer? Que é que ‘tás a fazer? “. Eu perco-me mas depois lá paro e não gosto, isso é a qualquer disciplina, eu estar a meio do exercício e dizem “ Maria! “ e interrompem-me, não gosto que, ó stora, que me interrompam, porque depois tenho que recomeçar, tenho que ler tudo o que fiz para continuar.

Mais uma vez se percebe que a Maria segue um processo de raciocínio interior e individual, quando diz que quando a interrompem necessita de rever todo o raciocínio realizado para recomeçar.

Quanto ao que pensa ser uma conjetura a Maria explica:

> **Maria:** É uma teoria, é por exemplo nós termos um problema, uma atividade e termos que chegar a uma… uma hipótese… uma hipótese para o que nos perguntam… É mais ou menos isso.

A professora perguntou à Maria o que é preciso para que uma conjetura seja uma lei geral e ela responde: “ É provar para todos os casos…”.

Quando na segunda tarefa e após o seu grupo se questionar sobre o que é provar a Maria prova por dedução. Na primeira e na terceira tarefa a exploração da situação foi indutiva. Na primeira tarefa a justificação foi um pouco trabalhada no seio do seu grupo e na terceira tarefa a Maria não se juntou à discussão. Mais tarde, quando a professora lhe perguntou porque não discutiu, Maria explicou que só sentia necessidade de falar se fosse acrescentar algo de importante e como os colegas conseguiram provar. De facto Maria nunca se precipitava, contribuindo para a discussão se houvesse necessidade.

Quando a professora perguntou se a Maria se lembrava de alguma conjetura, durante as atividades realizadas, que tivessem sido provadas, a aluna respondeu que todas as atividades que fizeram já estavam provadas. Também o António referiu durante a discussão de uma das atividades: “Estamos a descobrir alguma coisa, nós? “ Ambos os alunos estavam a pôr em causa a necessidade de provar algo que já está provado. A professora não chegou a responder a esta questão e a investigadora também não, na certeza de que o fará, na sessão combinada com os alunos, para lhes apresentar este estudo. Nessa altura, a professora irá explicitar quais são as razões pedagógicas e didáticas da importância de aprenderem a descobrir e a provar as suas descobertas.

6. Conclusões

Neste capítulo foram enquadrados os resultados empíricos do estudo na fundamentação teórica apresentada. Como já foi referido, o principal objetivo deste estudo consistiu em saber como raciocinam os alunos de uma turma de 9.º ano na atividade matemática realizada.

Ao longo do estudo os alunos foram apoiados pela professora e investigadora relativamente aos fatores psicológicos, referidos por Mason et al. (1985), envolvidos nos processos de mudança na aula de matemática. As mudanças necessárias na aula de matemática foram conseguidas através da explicitação aos alunos das razões didáticas que presidiam à experiência em curso.

O trabalho de grupo foi uma forma de trabalho muito importante nesta metodologia por permitir que os alunos desenvolvessem raciocínios mais complexos em conjunto. Verificou-se, no entanto, que a constituição dos grupos afeta a prestação dos alunos. A professora esteve atenta aos indicadores de os alunos não estarem a desenvolver o raciocínio e tentou otimizar a constituição dos grupos em colaboração com os alunos.

Relativamente ao raciocínio matemático dos alunos, verificou-se uma maior facilidade em raciocinar durante o processo de conjetura do que no processo de prova. Isso deve-se ao facto de os alunos não conhecerem uma matemática que se compreende e cuja justificação se relaciona com a sua estrutura. Para além disso, a prova era algo que nada lhes dizia.

A valorização da justificação é algo que depende do desenvolvimento de capacidades de questionamento, do espírito crítico e da reflexão, como refere Mason et al. (1985). Assim sendo, torna-se claro que um estudo de tão curta duração dificilmente pode provocar mudanças profundas em processos tão complexos.

Para responder à questão principal de como raciocinaram os alunos deste estudo, serão apresentadas as conclusões relativamente às duas etapas principais: *da conjetura à generalização* e *da justificação à prova*.

Os alunos não estavam habituados a investigar e esta experiência colocou-os no papel de investigadores. Para investigarem tiveram de ultrapassar o obstáculo de descodificação do enunciado da tarefa proposta e de experimentar estratégias desenvolvidas em grupo. O seu papel de alunos foi alterado e o papel do professor deixou de ser aquele que lhes dá as respostas. Os alunos, neste novo papel, tiveram a oportunidade de desenvolver a sua experiência matemática e a sua autonomia (Ponte & Matos, 1998; Ponte, 2005).

Em todas as tarefas, os alunos iniciaram o trabalho de grupo pela discussão do enunciado e trocaram ideias sobre o que se pretendia, esclarecendo os conceitos necessários à compreensão da tarefa. Esta etapa é muito importante e corresponde à *entrada* na designação de Mason et al. (1985), fase em que os alunos se apropriam da situação com a qual são confrontados.

Constatou-se que, quando os alunos em grupo não fazem esta primeira abordagem de esclarecimento das ideias subjacentes, o trabalho fica comprometido. Esta situação é análoga aos casos em que o professor explica o que se vai fazer e o aluno não compreende ou não presta atenção. Um exemplo deste facto aconteceu no grupo da Maria quando a decomposição do polígono em triângulos, de forma a que todos os ângulos internos do triângulo pertençam aos ângulos do polígono, foi assumida sem explorarem devidamente a questão, o que provocou que ninguém no grupo soubesse explicitar o porquê daquela decomposição.

A exploração da situação é iniciada quando o enunciado remeteu os alunos para investigar algo, iniciando-se, então, o *ataque*, fase que depende dos processos de conjeturar e de justificar, como referem Mason et al. (1985).

O processo de conjetura dos alunos revelou a importância de, no processo de conjeturar, particularizar ao acaso e de ir refinando essa particularização, procurando os casos especiais por forma a testar a conjetura e a não fazer generalizações baseadas em perceções pouco fundamentadas (Mason et al., 1985; Mason, 1998). A particularização dos alunos foi realizada ao acaso, mas verificou-se que foi possível oreintá-los no sentido de fazerem uma particularização mais sistemática. No entanto, o registo e organização dos dados é fundamental nesse processo, sendo evidente que os alunos tiveram dificuldades em realizar essas ações. Conclui-se que o facto de os alunos, na primeira aula da primeira tarefa, não terem conseguido prosseguir com a investigação criou a necessidade de fazerem uma particularização mais sistemática e organizada. Contudo, este processo necessita ser incentivado a longo prazo, pois, como refere Goldenberg (1999), para ser um bom investigador é preciso ver para além das aparências à procura de conexões lógicas. Assim, são fundamentais neste processo a experiência matemática e a capacidade de questionamento.

Reid e Knipping (2010) chamam a atenção para o facto da particularização quando realizada como um teste à conjetura constituir um raciocínio dedutivo, uma vez que a conjetura é formulada por generalização e se está a particularizar para gerar exemplos.

A formulação da conjetura foi feita com base em raciocínios de natureza diferente: indutivos, por analogia e dedutivos. Nos casos em que ao investigar os alunos particularizaram e procuraram o padrão dos dados a conjetura foi formulada por indução ou por analogia. A conjetura foi formulada por dedução, apenas no grupo da Maria, pela análise das relações entre as áreas dos quadriláteros.

A generalização reveste-se de extrema importância no processo de conjeturar. Verificou-se que os alunos tiveram muitas dificuldades em percecionar relações gerais. Revelaram uma maior facilidade em reparar nas relações entre termos consecutivos de uma sequência, o que implica uma visão restrita do padrão vendo, apenas, o que acontece de um termo para o outro. Aliada a esta dificuldade, está a falta de registos organizados prejudicando ainda mais as hipóteses de reparar no padrão.

O desenvolvimento do processo de generalização dos alunos foi favorecido pelo contacto com os padrões inerentes à estrutura da matemática e pelo desenvolvimento de experiência matemática (Mason et al., 1999). A capacidade de reparar está relacionada, segundo o autor citado, pela capacidade de questionar. Constatou-se, durante toda a atividade matemática, como é importante a capacidade de questionamento em todo o processo de pensar matematicamente. Para progredir na investigação das propriedades matemáticas dos objetos que interessam na situação é preciso observar atentamente e questionar para além das evidências. Conclui-se, assim, que a exposição a atividades de investigação, em grupo, permitiu aos alunos aprender a discutir a situação e depois a explorá-la, aspeto tão importante para desenvolver o raciocínio em vez de se renderem ao insucesso da matemática.

O processo de conjeturar dos alunos enquadrou-se nos padrões descritos por Reid e Knipping (2010). O raciocínio espontâneo da maioria dos alunos enquadrou-se no padrão de raciocínio de verificação científica de *rendição* em que as primeiras conjeturas formuladas tinham sido abandonadas face ao primeiro contraexemplo surgido. Conclui-se que este processo de rendição se deveu, para além da inexperiência em investigar e à falta de questionamento, ao facto de os alunos esperarem que a generalização seja a mesma para todos os casos. A rendição resulta de não haver averiguação da causa da existência do contraexemplo, impossibilitando assim a descoberta das propriedades matemáticas envolvidas. Os outros padrões de verificação científica surgiram na tentativa de reformulação de conjeturas.

A reformulação de conjeturas é uma especificidade complexa do processo de conjeturar, pois é necessário questionar profundamente os resultados obtidos e ao mesmo tempo analisar de forma cuidada as implicações desses resultados. A função dos contraexemplos é fundamental neste processo e existem diferentes implicações no processo de conjeturar (Watson & Mason, 2008). Os alunos ao encontrarem contraexemplos deviam ter analisado as implicações desses casos no processo de conjeturar sendo para isso necessário confrontar todo o processo já desenvolvido. Na atividade descrita a função do contraexemplo foi a de restringir o domínio de aplicação da conjetura. Rever toda a atividade que haviam desenvolvido era muito importante, como descrevem Mason et al. (1985) quando se referem à etapa de *revisão.* Verificou-se que os alunos sentiram necessidade de fazer essa revisão, apenas na situação de identificar um erro ou um raciocínio que não era compatível com o processo seguido. Este procedimento de revisão levou os alunos a descobrir algo mais.

No final do processo de conjetura averiguou-se de que forma os alunos se tinham convencido da sua conjetura através dos níveis de prova de Balacheff (1987). Os alunos revelaram aceitar argumentos empiricos como prova das suas conjeturas tal como referem Stylianides e Stylianides (2009). No entanto houve situações em que a prova surgiu sem recurso aos argumentos empiricos. A análise do nível de prova dos alunos revelou não haver consistência entre os níveis diagnosticados de uma tarefa para a outra. Quando a investigadora se questionou sobre esse facto, relacionou o nível de prova com o tipo de raciocínio usado na exploração e elencou outra questão: "De que modo a natureza do raciocínio usado na descoberta interfere na produção da prova?"

Refletindo sobre o assunto e revendo todos os aspetos do estudo, verificou-se a existência dos seguintes níveis de prova, sem orientação da professora: o nível de *empirismo naïf* esteve sempre presente em todas as tarefas em que os alunos seguiram o método indutivo e ocasionalmente surgiu o nível da *experiência crucial*. Surgiram níveis de *exemplos genéricos* e de *experiência conceptual* quando os alunos não raciocinaram por indução. A investigadora reparou neste padrão e conjetura o seguinte com base nas ideias de Stylianides: em certos casos, os alunos convencem-se através de argumentos empíricos na situação de explorarem indutivamente por não conhecerem métodos seguros de validação. Parece, contudo, contraditório a esta conjetura, o facto de o grupo da Isa ter revelado um nível de prova de experiência crucial. Mas a Isa revelou que isso aconteceu por se terem enganado e que a necessidade de se certificarem fez com que verificassem mais casos.

Na fase de construção coletiva da prova foi possível, na terceira tarefa, provar após um processo de exploração indutivo fornecendo, assim, aos alunos um método seguro de validação: justificar a conjetura, através das relações existentes na estrutura matemática de um exemplo genérico.

Os padrões de raciocínio dos diferentes grupos enquadram-se no padrão de verificação científica com todas as suas variantes: *rendição*, *exception barring*, e *monster barring*. Houve também casos de raciocínios que se enquadram no padrão de *Análise da prova*, como aconteceu com o raciocínio de verificação do grupo da Isa, que encontrou um lema falso no processo e foi rever e reformular os raciocínios.

No início do estudo constatou-se que os alunos não tinham qualquer noção de prova, mas que ao longo desta experiência a prova se tornou uma necessidade não para validar, mas para convencer os outros. Não sendo suposto ser a professora a dar as respostas, a prova era o único caminho coerente.

A ocorrência de, na primeira tarefa, não se chegar a provar conduziu à constatação da importância de a justificação emergir durante o processo de conjetura. Para que isso aconteça é necessário que o processo de conjeturar não se afaste da estrutura matemática em questão. No caso de haver esse afastamento será necessário para provar rever todo o processo de conjeturar e fazer a ligação entre o que se sabe e o que se quer saber (Mason et. al., 1985). De acordo com Goldenberg (1999) este voltar atrás requer uma atitude de questionamento e reflexão, o que explica a dificuldade que houve em fazê-lo. Concluiu-se assim que na atividade matemática realizada na primeira tarefa não houve unidade cognitiva pelo facto de a justificação não emergir. Esta falha deveu-se, a não existir uma ligação funcional entre os argumentos produzidos no processo de conjeturar e os argumentos necessários à prova (Garuti, Boero, & Lemut, 1998). Apesar desse facto, a professora tentou promover a necessidade de prova, provocando os alunos no sentido de procurarem uma justificação para a descoberta que haviam feito. Através desta provocação a professora pretendia enfatizar o aspeto da compreensão e das razões que explicam a matemática.

Nas outras duas tarefas essa unidade cognitiva existiu, o que permitiu promover a prova. O processo de construção da prova com a turma tentou promover a compreensão de que para provar por métodos indutivos, tal como refere Pedemonte (2001), os argumentos têm de ser baseados no exemplo genérico. No entanto, este processo de ser capaz de passar dos casos concretos para o exemplo genérico requer a capacidade, segundo Balacheff (1987), de se distanciar do objeto matemático através da descrição da ação para depois ser capaz de se restringir apenas às caraterísticas do objeto. Na última tarefa a prova foi apresentada pelo exemplo genérico acompanhada de uma justificação que explicou a ligação entre a conjetura e a estrutura matemática da situação.

A prova produzida pelo grupo da Maria, na segunda tarefa, foi formulada por dedução: analisaram as relações entre as áreas e testaram a conjetura, sem particularização, revendo as relações inferidas. Este processo permitiu-lhes compreender a relação entre as áreas pois no processo de explorar a justificação emergiu de forma clara, tornando possível generalizar para qualquer retângulo naquelas condições. A generalização obtida foi provada matematicamente através do próprio processo de descoberta. Este exemplo enquadra-se na explicação de De Villiers (1999) sobre a função de descoberta da prova.

Concluiu-se que esta experiência provocou nas alunas Maria e Rita um conflito cognitivo entre ter de particularizar ou poder usar o exemplo genérico para continuar a descoberta. A atividade matemática de investigação promoveu nas alunas a necessidade de provar e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

Em resposta à questão formulada "De que modo a natureza do raciocínio usado na descoberta interfere na produção da prova?" concluiu-se que o tipo de raciocínio usado interfere na prova. Se o processo de conjeturar for indutivo para provar é necessário fazer o distanciamento dos casos particulares explicando o porquê da verificação do padrão para todos os casos através da ligação entre a estrutura matemática e a afirmação proferida. Por outro lado, a preocupação de provar para todos os casos promoveu o raciocínio dedutivo.

A outra questão de investigação era a seguinte: "De que modo proporcionar aos alunos a descoberta da matemática pode promover o desenvolvimento da noção de prova matemática?"

Em resposta a esta questão conclui-se que proporcionar a descoberta foi importante para promover a noção de prova sobretudo nos casos em que as tarefas permitiam a existência de unidade cognitiva entre a fase de conjeturar e a fase de prova. Como referem Garuti, Boero, e Lemut (1998), a descoberta dá oportunidade a que se reorganizem os argumentos formulados na fase de conjeturar com encadeamento lógico produzindo a prova. Um outro aspeto importante diz respeito a que na metodologia da descoberta se promove a discussão das conjeturas incentivando os alunos a sentir a necessidade de convencer os outros dos seus raciocínios (Mason et al., 1985). Neste processo é fundamental a orientação do professor no sentido de promover a argumentação matemática.

A noção de prova, no entanto, não chegou a ser explícita para todos os alunos. A Rita e Maria terão compreendido quais os métodos de prova que estão ao seu alcance de acordo com o tipo de raciocínio que usam na exploração. O António ficou a conhecer uma forma de trabalhar matemática em que pode fazer usos das suas capacidades argumentativas. Ao longo do estudo emergiu, para a professora, a necessidade de os alunos provarem e tentou passar essa preocupação aos alunos. Contudo este estudo foi demasiado breve e quando foi planificado não teve em conta todas estas variáveis.

Uma questão didática que pode contribuir para que os alunos pensem que argumentos empíricos provam é o facto de os professores insistirem para que os alunos procurem muitos exemplos, para que tenham uma base de observação para encontrar padrões e generalizarem. Uma outra atitude do professor que também pode contribuir para o mesmo problema é a ação de clarificar um teorema perante os alunos particularizando, como refere Polya (1968).

A investigadora considera ser importante continuar a promover o desenvolvimento da noção de prova em futuras investigações, nomeadamente com a preocupação explícita de desenvolver métodos seguros de validação. Seria interessante investigar sobre a eficácia no desenvolvimento da prova de uma sequência de tarefas planificadas como as descritas em Stylianides e Stylianides (2009).

Como professora esta experiência proporcionou uma aprendizagem e uma reflexão profunda sobre as próprias aulas. A preocupação do desenvolvimento do raciocínio matemático na aula de matemática fez emergir a estrutura da matemática e consequentemente a compreensão da mesma. A professora constatou ter sido um grande desafio compreender e orientar os raciocínios dos alunos, assim como gerir e promover as discussões na aula e matemática.

Pessoalmente este estudo proporcionou conhecer os alunos da turma de uma forma especial e reconhecer o quão gratificante foi trabalhar com eles.

Como investigadora esta experiência permitiu-lhe desenvolver o gosto pela investigação e tornar possível prolongar a investigação sobre a própria prática e sobre a problemática do ensino da matemática.

Referências

Almeida, L. S., & Freire, T. (2007). *Metodologia de Investigação em Psicologia e Educação.* Braga: Psiquilibrios Edições.

Balacheff, N. (1987). Processus de Preuve et situations de validation. (A. J. Bishop, Ed.) *Educational Studies In Mathematics, 18 nº.2,* pp. 147-176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of Proof in Pupil's Practice of School Mathematics. In D. Pimm (Ed.).

Balacheff, N. (1999). Is Argumentation an Obstacle? Invitation to a debate. *Preuve: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.*

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp.115-136). London: Springer.

Boavida, J., & Amado, J. (2008). *Ciências da educação: epistemologia, identidade e perspectivas.* Coimbra: Imprensa da Universidade de coimbra.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 261-295). New york: Routledge.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Borasi, M., & Siegel, R. (1996). Demystifying Mathematics Education trought Inquiry. In P. Ernest, *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education* (pp. 201-214). London: Farmer Press.

Brocardo, J. (2001). *Tese de Doutoramento: As Investigações na Aula de Matemática: um projecto curricular no 8º ano.* Lisboa: APM.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research Methods in Education.* London e New York: Routledge.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Boston: Houghton Mifflin Company Boston.

De Villiers, M. (1999). The role and Function of Proof with Sketchpad. In M. d. Villiers, *Rethinking Proof with Sketchpad.* USA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2003). The Value of Experimentation in Mathematics. *9th National Congress of AMESA*, (pp. 174-185). Cape Town.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-221). London: Springer.

Delmas-Rigoutsos, Y., & Lalement, R. (2000). *A lógica ou a arte de raciocinar.* Lisboa: Instituto Piaget.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of Qualitative Research.* United States of America: Sage publications.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About argumentation and Conceptualisation. *Proceedings of PME- XXIV*, *2*, pp. 249-256. Hiroshima.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-39). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *3*, pp. 195-221.

Duval, R. (1999). Questioning Argumentation. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Novembre/Décembre*.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *PME XXII*, *2*, pp. 345-352.

Goldenberg, P. (1999). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. In P. Abrantes, J. Pnte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *PME20*, (pp. 21-34). Valencia, Spain.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proof as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 85-100). London: Springer.

Hanna, G., & Jahnke, H. (1996). Proof and Prooving. In A. Bishop et al. (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Netherlands: Kluwer Academic Press.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and the Teaching of Proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part I: focus on proving. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40 (3)*, 487-500.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). Justifying and Proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK (research report). (pp. 601 - 613). London: UK: London Institute of Education, University of London.

Hersh, R. (1999). *what is mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press.

Hill, M. M., & Hill, A. (2002). *Investigação por Questionário.* Lisboa: Edições Sílabo.

Knuth, E. J., Choppin, J. M., & Bieda, K. (2009). Middle School Students' Production of Mathematical Justifications. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth, *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K– 16 Perspective* (pp. 153-170). New York: Routledge.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In H. B. Paul Cobb (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakatos, I. (1999). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. United States of America: Bembo.

Lerman, S. (1998). Investigações: Para Onde vamos? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática: textos seleccionados* (pp. 107-115). Lisboa, APM.

Love, E. (1998). Avaliando a Actividade Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática: textos seleccionados* (pp. 89-105). Lisboa: APM.

Lüdke, M., & André, M. E. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.* São Paulo: E.P.U.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Prooving in Mathematics Education. In A. G. (Eds), *Handbook of Research on the Psiychology of Mathematics Education: Paste, Present and Future* (pp. 173-204). UK: Sense Publishers.

Mason, J. (1998). Resolução de Problemas no reino Unido: Problemas Abertos, Fechados e Exploratórios. In P. Abrantes, L. c. Leal, & J. P. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática: textos seleccionados* (pp. 107-115). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* London: Addison-Wesley Publishing Company.

McMillan, J., & Schumacher, S. (1997). *Research in Education: A conceptual introduction.* Nova Iorque: Longman.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 47-68.

Molina, J. A. (2001). Lakatos como Filósofo da Matemática. *Episteme, 13*, 129-153.

Nápoles, S. M. (Ed.). (2000). *A Matemática na Antiguidade: texto baseado em notas das lições de "História do Pensamento Matemático" do Professor José Sebastião e Silva.* Lisboa: SPM.

Nogueira, J. E., Nápoles, S., Monteiro, A., Rodrigues, J. A., & Carreira, M. A. (2004). *Contar e Fazer Contas: Uma introdução à teoria dos números.* Lisboa: Gradiva.

Oliveira, P. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J.P.Ponte, C.Costa, A.I.Rosendo, E.Maia, N.Figueiredo, & A.F.Dionísio (Edits.), *Actividades de investigação na aula de matemática.*

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and Aproach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). London: Cassel.

Pedemonte, B. (2001). *Relation between argumentation and proof im mathematics: cognitive unity or break?* Laboratoire LEIBNITZ, Université Joseph fourier, Grenoble, Italy, Dipartimento di matematica, Universitá di Pisa, Italy. European Research in Mathematics Education II.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. I). Princeton: University Press.

Polya, G. (2004). *How to Solve It.* USA: Princeton.

Ponte, J. P. (2005). O Professor e o Desenvolvimento Curricular. In GTI (Ed.), *Gestão Curricular em Matemática* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Matos, F. (1998). Processos cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. In P. Abrantes, L. Leal, & J. Ponte (Edits.), *Investigar para Aprender Matemática: textos seleccionados* (pp. 107-115). Liisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Oportunidade de Mudança na Matemática do Ensino Básico. In G. -G. Investigação, *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico. In G. G. Investigação (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do ensino Básico* (pp. 11-42). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de Investigações Matemáticas.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional Ministério da Educação.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching.* Netherlands: Sense Publishers.

Schoenfeld, A. (2009). Series Editor's Foreword: the Soul of Mathematics. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth, *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K– 16 Perspective* (pp. xii-xviii). New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillian.

Secção, M. (2009). *Plano de Acção de Matemática.*

Stake, R. E. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Educational studies in Mathematics, 26*, 165-190.

Stylianides, A. (2009). Breaking the equation "empirical argument = proof". *Mathematics Teaching, 213,* 9-14.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal Math Teacher Education*.

Stylianides, A., & Al-Murani, T. (2010). Can a proof and a counterexample coexist? Students' conceptions about the relationship between proof and refutation. *Research in Mathematics Education, 12(1)*, 21-36.

Stylianides, G. J., & Silver, E. A. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth, *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K– 16 Perspective* (pp. 235-249). London : Routledge.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning, 10(2)*, 103-133.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40(3)*, 314-352.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (Edits.). (2009). *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K– 16 Perspective.* New York: Routledge.

Tall, D. (1999). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school Mathematics Education around the World* (pp. 117-136, vol.4). Reston, Virginia: NCTM.

Tanguay, D. (2006). Comprendre la structure déductive en démonstration. *Envol, 134*.

Toulmin, S. E. (2008). *The uses of Argument.* New York: Cambridge University Press.

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de Investigação em Educação.*Lisboa: F. C. Gulbenkian.

Watson, A., & Mason, J. (2008). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples.* New York: Routledge.

Yackel, E., & Cobb, P. (1998). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in Mathematics Education, 27(4)*, 458-477.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização para realizar o estudo

Ex.mo Sr. Director

Cláudia Maria Azevedo Domingues, professora do quadro de nomeação definitiva do grupo 500 desta escola e aluna do 2º ano do mestrado em Ciências da Educação – Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática – vem por este meio solicitar, com vista à elaboração da dissertação de mestrado seguindo uma metodologia de estudo de caso, autorização para desenvolver o estudo sobre raciocínio matemático com os alunos da turma A do 9ºano, recolhendo para o efeito registos escritos e orais dos alunos através de gravação em áudio e vídeo de algumas tarefas aplicadas em sala de aula na disciplina de Matemática e/ou na área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado ao longo do ano lectivo 2009/2010. A professora garante, sob compromisso de honra, o anonimato dos alunos em todo o processo de investigação e de publicação.

Grata pela vossa atenção

17 de Novembro de 2009

A professora,

____

(Cláudia Domingues)

Anexo 2 – Pedido Consentimento Encarregados de Educação

16 de Novembro de 2009
Exmº(ª).Srº(ª).
Encarregado(a) de Educação,

A professora da disciplina de Matemática e de Estudo Acompanhado do seu educando(a), Cláudia Domingues, pretende realizar uma investigação, na turma A do 9º ano, no âmbito da elaboração da dissertação de Mestrado em Ciências da Educação - Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática - da Universidade do Minho. Para isso necessita registar em suporte de vídeo e/ou áudio as actividades matemáticas aplicadas na sala de aula para poder estudar como os alunos as realizam.

Com a convicção de que os alunos beneficiarão com esta experiência e, assumindo o compromisso de preservar o seu anonimato, solicita-se autorização para gravar em áudio e/ou vídeo algumas sessões de trabalho com a turma, realizadas nas aulas de Matemática e/ou de Estudo Acompanhado, ao longo do ano lectivo.

Com os melhores cumprimentos,

A professora,

____
(Cláudia Domingues)

----✂--(recortar e entregar à Professora)-- ---✂--

Eu, ______________________________________Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ________________________________, nº___, da turma A do 9º ano tomei conhecimento do assunto referido no documento entregue ao meu educando pelo(a) Director(a) de Turma ou pela Professora de Matemática (coloque x no □ respectivo):

□ - Autorizo a gravação em vídeo e/ou áudio de aulas da turma

□ - Não autorizo a gravação em vídeo e/ou áudio de aulas da turma

Assinatura do Encarregado(a) de Educação: ___________________________

Anexo 3 – Questionário

INQUÉRITO DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA **2009/2010**

Universidade do Minho
Instituto de Educação e Psicologia

Este questionário é anónimo e tem como objectivo saber a tua opinião sobre alguns aspectos da aula de Matemática neste primeiro período. Não há respostas certas nem erradas.

Lê com atenção todas as questões e responde com clareza e sinceridade.

Assinala a tua resposta preenchendo a bolinha ●.

Se te enganares, risca essa bolinha e marca a que queres assinalar ●.

Lê as afirmações que se seguem com atenção e dá, para cada uma delas, a tua opinião:	**Concordo totalmente**	**Concordo**	**Discordo**	**Discordo totalmente**
1. É muito importante para a minha aprendizagem: **1.1**Realizar **actividades em grupo** **Justifica a tua opção:** ______	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
1.2 Resolver **exercícios** **Justifica a tua opção:** ______	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
1.3 Discutir das actividades da aula com toda a turma **Justifica a tua opção:** ______	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
1.4 Ouvir atentamente a explicação do professor **Justifica a tua opção:** ______	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
1.5 Redigir relatórios do trabalho desenvolvido **Justifica a tua opção:** ______	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
2.No trabalho de grupo tenho maior necessidade de raciocinar quando: **2.1** Estou com colegas com **maior facilidade** em compreender matemática do que eu	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
2.2 Estou com colegas com a **mesma facilidade** em compreender matemática do que eu	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○
2.3 Estou com colegas com **menor facilidade** em compreender matemática do que eu	Concordo totalmente ○	Concordo ○	Discordo ○	Discordo totalmente ○

	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
3. Participo sempre nas **discussões com toda a turma** no decorrer da actividade da aula	○	○	○	○

Justifica a tua opção: ______________________________

	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
4.Este ano, nas aulas de Matemática, **há uma maior exigência no que diz respeito a justificar as minhas ideias matemáticas**	○	○	○	○

	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
5. Os **relatórios escritos** que elaboro, após a realização de actividades matemáticas, ajudam-me a **compreender melhor como pensei**	○	○	○	○

Justifica a tua opção: ______________________________

	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
6.Sinto dificuldade em elaborar **relatórios escritos**	○	○	○	○

Justifica a tua opção: ______________________________

	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
7.Não realizei **relatórios de melhor qualidade** por:	○	○	○	○
Falta de tempo	○	○	○	○
Não tirar apontamentos durante a realização da actividade	○	○	○	○
Dificuldades em comunicar matematicamente	○	○	○	○
Não esclarecer as minhas dúvidas com os colegas de grupo durante a actividade	○	○	○	○

Outra razão: ______________________________

____

	Concordo totalmente	Concordo	Discordo	Discordo totalmente
8.Nas aulas de matemática, raciocino mais quando faço:	○	○	○	○
Relatórios escritos	○	○	○	○
Resolução de problemas	○	○	○	○
Discussão na turma	○	○	○	○
Resolução de exercícios	○	○	○	○
Investigações	○	○	○	○

Muito Obrigada pela tua colaboração.
A professora,
Cláudia Domingues

Anexo 4 – Métodos de trabalho na aula

MÉTODOS DE TRABALHO NA AULA:

- **TRABALHO INDIVIDUAL**
  - tenta interpretar o que te é pedido sem ajuda;
  - segue os teus raciocínios sem te preocupares se está certo;
  - não apagues quando um teu colega diz que está mal;
  -regista tudo o que fazes na forma que entenderes (contas, esquemas, palavras, desenhos,...);
  -quando mudares de estratégia não apagues a anterior;
  -revê as várias estratégias para perceberes o que te levou a mudar de estratégia;
  -quando partilhares com outros colegas explica porque fizeste assim;
  -tenta perceber onde está o erro e toma nota.

- **TRABALHO DE PARES OU GRUPO**
  - depois de ler discutam o que cada um percebeu;
  -discutam as estratégias para começar explicando o raciocínio de cada um;
  -não sigam uma estratégia que não percebem só porque acham que deve ser assim;
  -registem tudo o que fazem nos vossos cadernos;
  -organizem a apresentação à turma;
  -caso seja pedido, façam relatório individual explicando todo o processo de resolução. Este deve ser redigido por palavras próprias e não é para fazer em conjunto.

- **FASE DE DISCUSSÃO COM TODA A TURMA**
  (serve para todos aprenderem uns com os outros diferentes estratégias de resolução e aprender a questionarem-se desenvolvendo o sentido crítico);
  - devem ouvir toda a explicação dos outros colegas;
  -devem questioná-los caso não percebam;
  -devem fazer sugestões indicando o que está mal explicado e pedindo para melhorar;
  -na vossa vez devem ter o cuidado de explicar como chegaram aos resultados de forma a que todos possam compreender como fizeram.

Anexo 5 –Folha de apoio tarefa 1

INVESTIGAÇÃO "À PROCURA DE DÍZIMAS FINITAS"

Primeiro procuraram ver quais as fracções 1/n a que correspondiam dízimas finitas…

$$\mathbf{\frac{1}{2}}\quad \frac{1}{3}\quad \mathbf{\frac{1}{4}}\quad \mathbf{\frac{1}{5}}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{7}\quad \mathbf{\frac{1}{8}}\quad \frac{1}{9}\quad \mathbf{\frac{1}{10}}\quad \frac{1}{11}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{13}\quad \frac{1}{14}\quad \frac{1}{15}\quad \mathbf{\frac{1}{16}}\quad \frac{1}{17}\quad \frac{1}{18}\quad \frac{1}{19}\quad \mathbf{\frac{1}{20}}\quad \cdots$$

Depois relacionaram as fracções a vermelho umas com as outras e procuraram uma regra para essas

$$\mathbf{\frac{1}{2}}\quad \frac{1}{3}\quad \mathbf{\frac{1}{4}}\quad \mathbf{\frac{1}{5}}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{7}\quad \mathbf{\frac{1}{8}}\quad \frac{1}{9}\quad \mathbf{\frac{1}{10}}\quad \frac{1}{11}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{13}\quad \frac{1}{14}\quad \frac{1}{15}\quad \mathbf{\frac{1}{16}}\quad \frac{1}{17}\quad \frac{1}{18}\quad \frac{1}{19}\quad \mathbf{\frac{1}{20}}\quad \cdots$$

ORGANIZANDO A INFORMAÇÃO EM TABELA PARA **MELHOR OBSERVAR**:

Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
2	2^1	0,5
4	2^2	0,25
8	2^3	0,125
16	2^4	0,0625
32	2^5	0,03125
64	2^6	0,015625
…	$2^k, k \in \mathbb{N}$	

Conjectura:

"Qualquer fracção de numerador 1 em que o denominador seja uma potência de dois, o seu resultado é uma dízima finita."

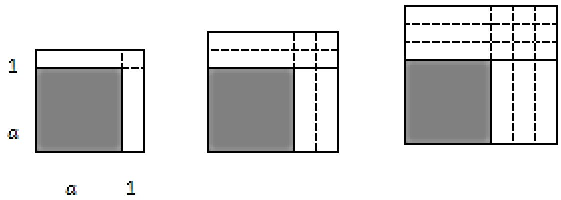
TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA: "Todo o número natural não primo e diferente de 1 pode ser escrito, de uma forma única, como produto de primos."

E AGORA continuem a INVESTIGAR as outras fracções da forma 1/n a que correspondem a dízimas finitas.

Anexo 6 – Tarefa quadrado do binómio

Tarefa 1: Sequências de lados e de áreas

1. Considerem os três primeiros termos de uma sequência:



Respondam às seguintes questões apresentando como pensaram por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

a) Qual é a forma geométrica de cada termo? Justifiquem.

b) Desenhem o quarto termo da sequência apresentada. Expliquem como pensaram.

c) Qual é a medida dos lados do terceiro termo? E do décimo termo?

d) Escrevam o termo geral (termo de ordem n ou n-ésimo termo) da medida do lado.

e) Escrevam o termo geral da área calculada a partir da medida do lado.

f) Escrevam a expressão da área de cada uma das diferentes figuras geométricas que constituem cada um dos três primeiros termos?

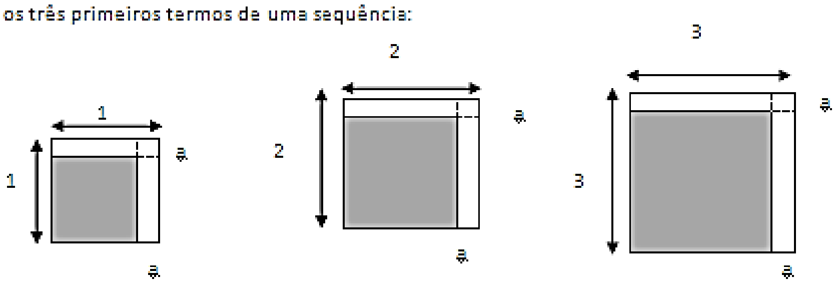
g) Escrevam a expressão da área total de cada um dos três primeiros termos a partir das áreas parciais que escreveram na alínea anterior.

h) Escrevam o termo geral da área total de qualquer termo desta sequência usando as áreas parciais.

i) As expressões que escreveram em e) e em h) que relação têm?

Tarefa 2: Sequências de lados e de áreas

1. Considerem os três primeiros termos de uma sequência:



Respondam às seguintes questões apresentando como pensaram por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

a) Qual é a forma geométrica de cada termo? Justifiquem.

b) Desenhem o quarto termo da sequência apresentada. Expliquem como pensaram.

c) Qual é a medida dos lados da parte sombreada do terceiro termo? E do décimo termo?

d) Escrevam o termo geral (termo de ordem n ou n-ésimo termo) da medida do lado.

e) Qual é a área da parte sombreada de cada um dos três primeiros termos calculada a partir do lado?

f) Escrevam o termo geral da área sombreada calculada a partir da medida do lado.

g) Escrevam a expressão da área da parte não sombreada em cada um dos três primeiros termos

h) Determinem a área total de cada um dos três primeiros termos.

i) Escrevam a expressão da área sombreada de cada um dos três primeiros termos partindo da área total que calcularam na alínea anterior.

j) Escrevam o termo geral da área sombreada de qualquer termo desta sequência partindo da área total

k) Estabeleçam uma relação, para cada termo, entre o lado da parte sombreada e a sua área.

Anexo 7 – Guião entrevista semiestruturada

Responde honestamente e não te preocupes com o que eu possa pensar.

Estou aqui como entrevistadora e não como tua professora.

1. Que diferenças houve, este ano na aula de matemática, relativamente aos outros anos?
2. Gostaste de fazer investigações matemáticas? Como te sentiste?
3. És capaz de descrever como se desenvolve uma atividade de investigação?
4. Consegues explicar o que é *conjetura?*
5. O que é necessário para que uma conjetura se torne uma lei geral?
6. Pensas ser vantajoso para a tua aprendizagem fazer atividades de investigação?
7. Os alunos chamam exercícios a todas as atividades matemáticas. És capaz de distinguir entre exercício, problema e atividade de investigação?
8. Este ano trabalhou-se muito em grupo. O que tens a dizer sobre isso?
9. Quais os aspetos em que consideras ter melhorado ao longo deste ano letivo?
10. Como te sentiste ao fazer parte do estudo da tua professora sobre o raciocínio?
11. Queres fazer algum comentário?