Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Manuela de Castro Costa Oliveira

Introdução ao Conceito de Fracção na Interpretação Quociente: Uma Experiência de Ensino no 1.º Ciclo de Ensino Básico

Janeiro de 2012

Introdução ao Conceito de Fracção na Interpretação Quociente:
Uma Experiência de Ensino no 1.º Ciclo de Ensino Básico

Maria Manuela de Castro Costa Oliveira

UMinho|2012

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Manuela de Castro Costa Oliveira

Introdução ao Conceito de Fracção na Interpretação Quociente: Uma Experiência de Ensino no 1.º Ciclo de Ensino Básico

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Estudos da Criança
Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Professora Doutora Ema Paula Botelho Costa Mamede

Janeiro de 2012

DECLARAÇÃO

Nome: Maria Manuela de Castro Costa Oliveira

Endereço eletrónico: mmcco65@iol.pt

Telefone: 964409992

Número do Bilhete de Identidade: 7445980

Título dissertação: Introdução ao Conceito de Fracção na Interpretação Quociente: Uma Experiência de Ensino no 1.º Ciclo de Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Ema Paula Botelho Costa Mamede

Ano de conclusão: 2012

Designação do Mestrado: Mestrado em Estudos da Criança, Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática

Universidade do Minho, ___/___/______

Assinatura: ____

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Ema Mamede um profundo agradecimento pela partilha de saberes e valioso contributo para a realização desta dissertação.

Aos alunos que participaram neste estudo e aos seus encarregados de educação que com toda a confiança permitiram que fosse possível realizar esta investigação.

Ao meu marido, ao meu filho Dinis e à minha filha Isa, pela paciência e pelas horas em que não pude estar disponível.

À minha irmã Sofia pela preciosa ajuda.

À minha muito cara amiga Adélia Morais pelo constante incentivo e apoio.

Às Professoras Fernanda e Lucília, minhas colegas de trabalho, pela disponibilidade e paciência.

RESUMO

Este estudo pretende perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções a partir da interpretação quociente, na compreensão do conceito de fracção por alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico. O conceito de fracção apresenta-se aos alunos como um dos mais complexos a estudar na área de matemática, sendo gerador de variadas dificuldades. Até muito recentemente, em Portugal o conceito de fracção era introduzido na interpretação parte-todo e trabalhado apenas nos 5.º e 6.º anos. Nesse sentido, procurámos compreender como entendem os alunos a representação de fracções apresentadas na interpretação quociente; como entendem os alunos a ordenação e equivalência de fracções apresentadas nesta interpretação; e como transferem os alunos o conhecimento adquirido na interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo. Desenvolveu-se um estudo de caso com um grupo de oito alunos do 2.º ano de escolaridade que integravam a mesma turma. Utilizou-se uma metodologia qualitativa que resultou numa análise detalhada dos dados recolhidos através de instrumentos de gravação áudio digital e vídeo, de registos escritos dos alunos e das notas de campo da investigadora. Constituiu um episódio de ensino tendo os alunos discutido as suas resoluções e estratégias. O estudo foi desenvolvido em duas fases. Na fase 1, os alunos foram introduzidos ao conceito de fracção na interpretação quociente começando por resolver tarefas de partilha equitativa, seguidas de tarefas de representação e comparação de fracções menores do que a unidade. Nesta fase, os alunos revelaram ter entendido o conceito de fracção na interpretação quociente. Tiveram um bom desempenho no que respeita aos diferentes sistemas de representação, ao significado e à comparação de fracções. A fase 2 consistiu na resolução de tarefas de representação, de identificação de quantidades e de ordenação na interpretação parte-todo.

Os resultados fornecem evidências de que os alunos mais novos são capazes de compreender a representação e ordenação de fracções na interpretação quociente. Reforçam a ideia de que esta é uma interpretação adequada para introduzir as crianças mais novas ao conceito de fracção. Mais ainda, as crianças conseguiram transferir conhecimentos relativamente à representação de fracções, da interpretação quociente para a interpretação parte-todo. O trabalho simultâneo com diversos sistemas de representação na interpretação quociente foi fundamental na forma como as crianças compreenderam o conceito de fracção na interpretação parte-todo.

ABSTRACT

This study aims to understand the effects to start working with fractions from the quotient interpretation, in the understanding the concept of fraction by fundamental school students.

The concept of fraction is presented to students as one of the most complex concepts to study in mathematics, generating many difficulties. Until very recently, in Portugal, the concept were introduced in the part-whole interpretation and it were worked only in 5th and 6th grades.

In this sense, we tried to comprehend how students understand the representation of fractions presented in the quotient interpretation, how students understand the ordering and equivalence of fractions presented in quotient interpretation and how students transfer the knowledge gained of the quotient interpretation for the representation and ordering of fractions in the part-whole interpretation?

The study presented here was developed with a group of eight students of the 2 th grades that belonged to the same class. This case study of qualitative methodology resulted in a detailed analysis of data collected through digital audio and video recording, through the written records of students and through the researcher's field notes. It was an teaching episode in which the students discussed their resolutions and strategies.

This study was developed in two phases. In phase 1, students were introduced to the concept of fraction in the quotient interpretation, starting with equal sharing tasks, followed by tasks of representation and comparison of fractional quotients. In this phase, students showed to have understood the concept of fraction in the quotient interpretation. They had good performance regarding the use of different systems of representation of fractions, the meaning of fractions and comparison of fractional quotients. The second phase consisted in solving tasks of representation, identification of quantities and ordering fractions in the part-whole interpretation

This intervention allowed us to find evidence that younger students are able to understand the representation and ordering of fractions in the quotient interpretation. The results reinforce the idea that this is the most appropriate interpretation to introduce young children to the concept of fraction. Moreover the younger children were able to transfer knowledge about representation of fractions for quotient interpretation to the part-whole interpretation. The simultaneous Work with various systems of representation in the quotient interpretation was crucial in how the children understood the concept of fractions in the part-whole interpretation.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TRANSCRIÇÕES

ÍNDICE DE TABELAS

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

Sendo uma das mais antigas ciências e uma das mais antigas áreas académicas estruturadas, a Matemática continua a merecer um lugar de relevo nos currículos escolares. A matemática constitui uma linguagem que permite a compreensão e a representação do mundo, tornando-se um instrumento para resolver problemas e para prever e controlar as acções realizadas (DGIDC, 2007).

O *National Council of Teachers of Mathematics* (2007), NCTM, salienta a relevância crescente que a Matemática tem na sociedade e nas diversas áreas da actividade humana. A necessidade de ter competência matemática é cada vez maior, num mundo em que os conhecimentos evoluem rapidamente. Para aqueles que se tornam matematicamente competentes abrir-se-ão perspectivas mais produtivas. Por isso, todos os alunos devem ter as oportunidades e ajudas necessárias para aprender uma matemática significativa que compreendam e que sejam capazes de usar na vida quotidiana. Cabe ao professor fazer com que a aprendizagem se torne um processo de construção activo do conhecimento. A aprendizagem de uma matemática compreensiva faz-se pela construção de novos conhecimentos a partir de conhecimentos já adquiridos nas experiências de vida. Mais do que a lógica dos conteúdos ou o sentido que o professor lhes atribui, são essas experiências vividas pelos alunos que dão significado às suas aprendizagens. Para que o aluno se torne um agente activo da sua aprendizagem, devem ser-lhe propostas tarefas concretas que promovam o seu envolvimento e a reflexão sobre as próprias actividades (DEB, 2004).

De acordo com documentos curriculares internacionais (NCTM, 2007) e nacionais (DEB, 2004; SIEMS, 2009) as tarefas propostas pelo professor devem promover uma visão abrangente da actividade matemática, a compreensão dos processos matemáticos e o desenvolvimento do raciocínio matemático. A variedade de tarefas e a forma como são apresentadas e conduzidas é relevante na actividade matemática que o aluno poderá desenvolver (Ponte, 2005). O ensino/aprendizagem da Matemática deve ter como principal objectivo o desenvolvimento das capacidades de análise, de comunicação e de raciocínio para que os alunos se tornem competentes na resolução de problemas, manifestando o gosto e a confiança essenciais para realizar actividades intelectuais (DEB, 2001).

A par da preocupação que a escola deve ter em proporcionar a todos os alunos a oportunidade de explorar uma grande diversidade de situações que exijam raciocínio e sejam adequadas à sua idade intelectual, é necessário valorizar o desenvolvimento progressivo de uma linguagem rigorosa que surgirá da necessidade de expressar ideias de forma não ambígua, tanto na forma oral como na forma escrita. Aliás, a este respeito, o novo Programa de Matemática (DGIDC, 2007) refere como competências transversais, o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, de raciocinar e de comunicar ideias matemáticas. Dar oportunidade aos alunos de comunicar por escrito e oralmente procedimentos, raciocínios, resultados e conclusões, associada à capacidade de resolução de problemas permite uma progressão "… na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem" (p. 45). Há uma emergência de novos conhecimentos, ferramentas e formas de comunicar que permitam usar a matemática na vida quotidiana uma vez que, cada vez mais, a competência matemática é indispensável a nível profissional e social (NCTM, 2007).

A aquisição de competência matemática está directamente dependente das experiências matemáticas a que o indivíduo é exposto ao longo da sua vida. O conhecimento e a compreensão de noções matemáticas são necessários e indispensáveis para que os aspectos fundamentais da actividade matemática possam ser compreendidos. Os conceitos e as noções são necessários para a exploração de situações em que se podem tecer conjecturas e, raciocinando com lógica, experimentar fazer generalizações. É da simbiose entre conhecimentos e exploração de situações que se desenvolve a competência matemática (DEB, 2004; DGIDC, 2007). Ser matematicamente competente exige que se tenha conhecimento dos factos e que se compreendam os conceitos para que se seja capaz de encontrar os procedimentos para chegar às soluções, em diversos e diferentes contextos (NCTM, 2007). A compreensão dos conceitos é facilitadora das aprendizagens na medida em que promove a autonomia dos alunos. Os alunos interessam-se, desde muito cedo, por ideias matemáticas e realizam raciocínios matemáticos, sendo bastante provável que esses primeiros raciocínios envolvam situações numéricas vividas em experiências de contagem

(NCTM, 2007; DEB, 2004). É neste contexto que, a par de outros temas da matemática, se compreende a necessidade de criar situações de sala de aula em que os alunos possam começar a desenvolver a compreensão global dos números e a capacidade de os usar para fazer análises e juízos matemáticos, ou seja desenvolver o sentido de número. Estes são aspectos importantes da competência matemática que podem ser promovidos pela exploração de situações diversificadas (DGIDC, 2007; DEB, 2004).

1.1. Sobre o sentido de número

Monteiro e Mendes (2009) apresentam o sentido de número como a compreensão geral sobre os números e as operações e a capacidade de usar essa compreensão para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias de manipulação dos números e das operações. Com base em Reys, as autoras consideram que o desenvolvimento do sentido de número é transversal a todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática e, como tal, não deve ser encarado como uma unidade didáctica por si só. Deve ser trabalhado ao longo de todo o currículo da matemática.

Os conceitos relacionados com os números estão presentes nos mais variados contextos da vida das pessoas e, por isso, aparecem historicamente como a base dos currículos internacionais da matemática (NCTM, 2007). O mesmo documento salienta que, a aprendizagem dos números e o desenvolvimento do sentido de número devem ser abordados a partir dos conhecimentos intuitivos das crianças, com recurso a diversos materiais concretos para os representar. A aprendizagem dos números e do sentido de número devem evoluir a partir de técnicas de contagem que promovam a criação de relações numéricas no reconhecimento de padrões, do valor posicional e da compreensão das operações quando abordados (NCTM, 2007).

Monteiro e Mendes (2009) consideram que o sentido do número se desenvolve na convivência que as crianças têm com situações que envolvem números, mesmo antes da entrada na escola. Assim, a construção do sentido de número deve ter por base o conhecimento intuitivo das crianças e, nos primeiros anos de escolaridade, os professores devem dar continuidade a esse conhecimento proporcionando, por exemplo, diversas oportunidades para que efectuem contagens, quantifiquem conjuntos e para que compreendam que a ordem de contagem é irrelevante no resultado final. Deste modo, desenvolve-se gradualmente a capacidade de lidar com os números, abandonando progressivamente a concretização e flexibilizando o pensamento numérico noutros contextos (DEB, 2004; NCTM, 2007; DGIDC, 2007).

O desenvolvimento do sentido de número engloba cinco componentes essenciais: a compreensão de que os números são usados em contextos de contagem e cálculo, mas também em contextos de ordenação, localização, identificação; a exploração de relações entre números pela sua decomposição e composição, que permitem escrever um número de diferentes formas; a compreensão do valor relativo dos números; a criação de referenciais numéricos que permitam verificar a razoabilidade de situações através de comparações mentais e a compreensão do efeito das operações sobre os números (DEB, 2004; Serrazina, 2007; NCTM, 2007; Cebola, 2009). Destas cinco componentes relevantes para o desenvolvimento do sentido de número, a compreensão das operações envolve aspectos específicos que influenciam a compreensão de conceitos numéricos mais avançados. Esses aspectos não estão de forma alguma relacionados com a aprendizagem de algoritmos. Antes de usarem os algoritmos convencionais, os alunos devem ser encorajados a desenvolver e explorar as suas estratégias de cálculo. Ao trabalharem estratégias de cálculo em tarefas progressivamente mais complexas e em diversos contextos, os alunos começam a compreender a forma como as operações afectam os números e, consequentemente, a compreender melhor os números inteiros (NCTM, 2007).

Ainda sobre os números inteiros, importa referir que a compreensão do significado das operações relaciona-se essencialmente com o conhecimento das ideias subjacentes a cada operação, dos seus modelos e propriedades, das conexões e relações existentes entre elas e do efeito que cada uma delas tem sobre os números (DEB, 2004; Cebola, 2009). O desenvolvimento do significado das operações deve ser progressivamente aprofundado pelo contacto dos alunos com variadas representações e problemas que permitam explorar as propriedades destas operações e a capacidade de cálculo com números inteiros cada vez maiores (NCTM, 2007). A compreensão do sistema numérico decimal não se esgota com a exploração dos números inteiros. É necessário que o desenvolvimento do sentido de número se alargue dos números inteiros não negativos aos números racionais não negativos.

Da mesma forma que as crianças são encorajadas a explorar situações que promovam a compreensão dos números inteiros, desde os primeiros anos de escolaridade, devem ser encorajadas a compreender e a representar alguns números racionais associados a situações do quotidiano e a problemas reais, expressando-se na linguagem que utilizam diariamente (NCTM, 2007). Diz-se, por definição que, quaisquer que sejam os números inteiros m e *n* com *n* não nulo, $\frac{m}{n}$ é um número racional. O número $\frac{m}{n}$ pode ter como quociente da divisão um número inteiro. Se *m* não for divisível por *n*, o número $\frac{m}{n}$ diz-se número fraccionário. Em ambos os casos, $\frac{m}{n}$ é um número racional (Caraça, 1975). A fracção $\frac{m}{n}$ é uma forma de representação do número racional.

A introdução do estudo dos números racionais, nos primeiros anos de escolaridade, é um forte contributo para a ampliação do conceito de número e, consequentemente, para melhorar a competência matemática ao longo da escolaridade (DEB, 2004). Contudo, o Programa tradicional de Matemática limita o estudo dos números racionais à utilização da notação 1/2 para representar "metade de…" no 2.º ano de escolaridade. No 3.º ano, o trabalho com fracções consistia no reconhecimento das notações 1/3,1/4, 1/5 e 1/10 como o inverso de 3x, 4x, 5x e 10x e as fracções unitárias 1/2, 1/3,1/4 e 1/5 apareciam também, num contexto de equivalência com a divisão por 2, 3, 4 e 5 (DEB, 2004).

O novo Programa de Matemática (DGIDC, 2007) apresenta alterações significativas relativamente ao programa anterior. Neste âmbito sugere que se comece o trabalho com números racionais nos dois primeiros anos a partir de uma abordagem intuitiva de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais. Apela à exploração de fracções com quantidades contínuas e discretas, com recurso a modelos pictóricos e à representação de fracções simples. Deixa para o 3.º e 4.º anos o alargamento do estudo dos racionais com a exploração e resolução de problemas que permitam compreender fracções com diversos significados. Aquele documento introduz ainda a ideia de reconstrução da unidade a partir das suas partes e sugere que se faça "… a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção." (p. 17).

Tendo em conta que o contexto desta dissertação é o primeiro ciclo, o termo "fracção" vai ser usado ao longo de todo o trabalho, de forma abusiva, com o sentido de fracção racional não negativa, uma vez que é com esta interpretação que o termo é também usado no novo Programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Básico.

1.2. Relevância do estudo

A literatura relacionada com a matemática produzida nas últimas décadas evidencia a importância da aprendizagem de fracções nos primeiros anos de escolaridade. Behr, Lest, Post e Silver (1983) consideram que a interiorização de conceitos associados aos números racionais fraccionários promove o desenvolvimento de estruturas mentais essenciais para o desenvolvimento intelectual e fornecem a base fundamental para as operações algébricas. Essas estruturas mentais desenvolvidas com o trabalho de fracções, mesmo que seja informal, são a base para uma aprendizagem mais aprofundada nos anos seguintes (NCTM, 2007).

Indo de encontro a esta ideia, Mamede (2008a) considera o conceito de fracção estruturante de outros conceitos matemáticos, valorizando a criação de oportunidade e a necessidade de dar tempo aos alunos para que o construam correctamente. Esta relevância que agora é dada ao ensino das fracções logo nos primeiros anos de escolaridade, não tem sido partilhada pela escola portuguesa que dá ênfase ao cálculo algorítmico e às regras de procedimentos, desvalorizando a resolução de problemas. Os alunos começam desde o início do trabalho com fracções a evidenciar dificuldades que, muitas vezes, são extensivas a todo o seu percurso escolar (Mamede, 2008a).

Até muito recentemente, o ensino das fracções na escola básica era frequentemente adiado até ao sexto ano de escolaridade. Em Portugal, as abordagens mais comuns fundamentam-se na interpretação *parte-todo*, referenciada a unidades contínuas representadas por modelos circulares ou rectangulares. É com base nesta interpretação que os conceitos de equivalência e de comparação de fracções se desenvolvem. Outras interpretações das fracções como a de *quociente* ou de *razão* são relegadas para segundo plano e raramente exploradas (Monteiro, 2007).

À semelhança do que se faz em Portugal, também nos Estados Unidos e na Inglaterra, a primeira abordagem das fracções é efectuada a partir da interpretação parte-todo e, também nesses países, grande parte dos alunos tem evidenciado dificuldades conceptuais relativamente às fracções (Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade & Bell, 2004; Flores, Samson & Yanik, 2006).

A investigação em educação matemática tem evidenciado várias dificuldades relativamente à aprendizagem das fracções, tanto em aspectos conceptuais como na destreza de cálculo (Mamede, 2008a). Behr, Lesh, Post e Silver (1983) justificam essas dificuldades pela utilização precoce de regras e algoritmos que valorizam os procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos, a falta de modelos para representar os diferentes significados das fracções e a ausência de ligação entre elas. Também Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005) tecem algumas considerações acerca destas dificuldades. Segundo os autores, os professores justificam-nas com a falta de estudo, o que leva a crer que eles próprios não conseguem reconhecer a complexidade intrínseca deste conteúdo, incentivando os alunos a operar com os símbolos sem terem desenvolvido os conceitos inerentes às diversas interpretações das fracções. Na realidade das escolas portuguesas dá-se pouca relevância "a uma didáctica consistente dos fraccionários excepto o ensino repetitivo de técnicas algorítmicas e regras." (Monteiro, 2007, p. 19).

A literatura (Mamede, 2008a, 2008b; Monteiro & Pinto, 2007; NCTM, 2007) aponta os números racionais como sendo difíceis para as crianças. No sentido de ajudar a ultrapassar este obstáculo, as novas orientações curriculares propõem um período mais prolongado de contacto com as fracções na escola. Isto traduz-se num contacto com aspectos relevantes para a compreensão do conceito de fracção a iniciar logo nos primeiros anos de instrução. Iniciar o estudo das fracções nos primeiros anos de escolaridade possibilita ao aluno um contacto mais longo com estes números e, como tal, amplia o seu sentido de número. As alterações curriculares mais recentes exigem um maior conhecimento sobre a forma como os alunos aprendem matemática e particularmente como aprendem as fracções. É da combinação entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico actualizado que o professor pode proporcionar aos alunos uma educação matemática de elevada qualidade (NCTM, 2007; DGIDC, 2007).

É necessário, desde cedo, criar oportunidades para que a criança possa construir um completo conceito de fracção. O domínio completo deste conceito pressupõe que o aluno seja capaz de o compreender nas diferentes interpretações e de o utilizar e traduzir nas diferentes formas de representação. Para isso, o aluno deverá dominar três aspectos que se inter-relacionam; a existência de classes de fracções equivalentes, a ordenação de fracções e existência de diferentes modos de representação da mesma quantidade (Mamede, 2008a).

Até muito recentemente, o estudo dos números racionais no nosso país era iniciado por volta dos 5, 6 anos com os números inteiros. Continuava com representações de números decimais, reforçadas insistentemente ao longo dos últimos anos do 1.º ciclo e só por volta dos 9, 10 anos é que a se iniciava o trabalho com fracções (Monteiro & Pinto, 2007). Em sala de aula, não se valorizava um trabalho propositado das noções intuitivas de metade, de terça parte, etc., que a criança cria nas suas vivências e que lhe conferem um conhecimento informal – conhecimento construído por cada pessoa nas suas experiências de vida (Mack, 1990) – que pode facilitar a aprendizagem das fracções e a compreensão do conceito. A pouca relevância que é dada pela escola ao conhecimento informal, adquirido nas situações do dia-a-dia, esvazia a Matemática formal de significado gerando dificuldades significativas quando, a partir do 5.º ano, os alunos passam a usar símbolos e regras cada vez mais complexas. Os procedimentos que executam, na maior parte das vezes, são desprovidos de sentido (Monteiro, 2007). A exploração dos conhecimentos informais permite que os alunos identifiquem o tipo de situações que originaram a necessidade de criação deste novo conjunto de números contextualizando, desta forma, as novas aprendizagens. O percurso entre a compreensão intuitiva, a capacidade de mobilizar conhecimentos para resolver problemas informalmente e as representações simbólicas desenvolvem-se pela vivência de situações variadas que podem proporcionar todo um conjunto de relações susceptíveis de serem encontradas, quando se trabalha com fracções (Monteiro & Pinto, 2005b). É nesse sentido que NCTM promove o trabalho informal com fracções desde os primeiros anos de escolaridade, considerando importante que até ao 2.º ano as crianças sejam capazes de reconhecer quando é que os objectos são divisíveis em partes iguais e de identificar um certo número de partes de um conjunto de partes iguais ou de uma dada área, sem se centrarem na notação fraccionária. Este trabalho informal com fracções servirá de base para o futuro estudo mais aprofundado sobre fracções (NCTM, 2007).

Também o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) apresenta incentivos no sentido de se iniciar o trabalho com as fracções nos anos iniciais da escolaridade obrigatória, sugerindo uma primeira abordagem a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais. Contudo, limita-se a apresentar ao professor alguns exemplos de concretização envolvendo cada uma destas ideias, mas sem qualquer explicação de como explorar estes conceitos em práticas de sala de aula.

Assim, parece pertinente desenvolver investigação que possa contribuir para aumentar o conhecimento neste âmbito, promovendo, deste modo, a qualidade das práticas de ensino dos professores do 1. Ciclo do Ensino Básico.

1.3. As interpretações de fracção

Vários investigadores têm dedicado muito do seu trabalho à classificação das interpretações possíveis para as fracções. Kieren (1976), tendo por base uma análise lógica do conceito de fracção, foi um o primeiro a propor que este conceito envolvia várias interpretações a que chamou *subconstructos* por considerar que todas elas estão interligadas. Em 1997, depois de algumas reformulações da proposta inicial, o autor propõe quatro interpretações para as fracções; quociente, medida, operador e razão. O autor não apresenta na sua proposta a interpretação *parte-todo,* pois considera que ela é intrínseca a todas as interpretações.

Berh, Harel, Post e Lesh (1993), após vários trabalhos que tinham como referência as ideias iniciais de Kieren, apresentam uma classificação em que colocam a interpretação parte-todo em paralelo com as outras interpretações. Assim, apresentam uma classificação com as interpretações parte-todo, quociente, razão, operador e medida.

Tendo por base a noção de esquema ‘*schema*’ definido como um conjunto de estruturas mentais que articulam os conteúdos aos conceitos, princípios, exemplos e estratégias, Marshall (1993) faz uma classificação em que também distingue cinco situações: interpretação parte-todo que considera um todo contínuo ou discreto; interpretação quociente, resultando de partilha equitativa em que a fracção representa o quociente da divisão; interpretação de medida, em que a fracção 1/b é repetidamente utilizada para medir uma distância; interpretação de razão, em que duas quantidades estão relacionadas uma com a outra e os numerador e denominador representam números distintos um do outro; interpretação de operador em que a fracção é algo que opera sobre um valor para produzir outro valor.

Uma classificação proposta mais recentemente por Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade e Bell (2004) que assenta no conceito de situação apresentada por Vergnaud (1988) contempla quatro significados para as fracções, distinguidos de acordo com o significado dos valores envolvidos na representação e que são: situações parte-todo (referentes à divisão de quantidades contínuas: o denominador representa o número de parte em que o todo foi dividido e o numerador representa as partes tomadas); situações quociente (divisão de quantidades contínuas: o denominador representa o número de recipientes e o numerador representa o número de objectos inteiros a repartir); situações de operador (referente a quantidades discretas: denominador representa o número de subconjuntos em que o todo é dividido e o numerador representa o número de subconjuntos a serem tomados); situações de quantidades intensivas (expressão uma relação proporcional entre o numerador e o denominador que são duas quantidades discretas).

Apesar das diferenças entre as propostas apresentadas pelos vários, em todas é possível identificar as interpretações quociente, parte-todo e operador. O novo Programa de Matemática, e no que respeita ao ensino das fracções, destaca precisamente essas três interpretações para o trabalho com números racionais no 1.º Ciclo. Começa por sugerir que o trabalho com os números racionais se inicie com uma abordagem intuitiva de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, nos dois primeiros anos de escolaridade. A abordagem mais formal deste conceito é proposta para os dois últimos anos do 1.º Ciclo, com o aprofundar do estudo destes números recorrendo a problemas que permitam trabalhar as fracções nas situações quociente, parte-todo e operador (DGIDC, 2007).

Alguma literatura sugere que a primeira abordagem a partir de diferentes interpretações de fracção implica diferentes compreensões do conceito (Mamede, 2008 a; Nunes et al, 2004; Kerslake, 1986). Embora exista pouca investigação sobre o impacto que uma dada interpretação pode ter na aprendizagem e na compreensão das fracções pelos alunos, alguns estudos sugerem uma maior facilidade das crianças em trabalhar as fracções em situação quociente (ver Mamede, 2007; Nunes et al.,2004).

Nunes e colegas (2004) realizaram uma pesquisa em Inglaterra em que entrevistaram 130 crianças de 8 e 9 anos de idade. Pretendiam estudar os desempenhos dos alunos na resolução de problemas de equivalência de fracções em situações quociente e em situações parte-todo. Os problemas referentes às situações quociente envolviam os pares de fracções1/2, 2/4; 1/3, 2/6 e 1/4, 2/8. Os problemas referentes às situações parte-todo envolviam as fracções 2/3, 4/6; 2/3, 6/9 e 2/4, 4/8. O desempenho dos alunos foi muito diferente nos problemas referentes aos dois tipos de situação. Os autores verificaram que apenas 35% dos alunos resolveram correctamente os problemas sobre situações parte-todo, enquanto nas situações quociente a percentagem de sucesso foi de 60%. Estes resultados foram de certa forma surpreendentes na medida em que os alunos tinham iniciado o estudo das fracções com situações de interpretação parte-todo.

Para compreender o raciocínio das crianças sobre a equivalência das fracções em situações quociente, Nunes e colegas (2004) realizaram um novo estudo com 62 alunos de idades compreendidas entre os 7 e os 10 anos, que tinham iniciado o estudo das fracções em situações parte-todo. Os alunos mais velhos também tinham feito algum trabalho com 1/3, nomeadamente tentando dividir uma linha em três segmentos e calculando 1/3 de um número pela divisão por 3, mas nunca em situações práticas. Neste estudo as crianças trabalharam com o investigador em pequenos grupos de 4 e 6 crianças, durante cinco sessões de 50 minutos cada. Cada criança dispunha de uma brochura com um problema por folha que continha três ou quatro tarefas. As crianças resolviam individualmente as tarefas e, posteriormente, apresentavam aos colegas as suas resoluções que eram justificadas e discutidas em grupo. Inicialmente foram dados aos alunos alguns problemas que envolviam situações quociente e foi-lhes ensinado o significado das fracções neste contexto. Só depois foram dados aos alunos problemas que envolviam a equivalência de fracções.

As primeiras observações realizadas mostraram que as crianças tinham um desempenho significativamente melhor nos problemas que envolviam a situação quociente, o que levou os autores a investigar as estratégias usadas nestas situações. Após a análise dos argumentos e estratégias dos alunos, distinguiram quatro categorias: divisão exaustiva e justa – presente em 11 grupos; raciocínio; partição e comparação perceptual; combinação de argumentos; relação entre as partes e o todo e argumentos incompletos.

Os autores consideraram estes resultados bastante surpreendentes na medida em que, tendo iniciado o estudo das fracções por situações de parte-todo, a maioria dos alunos usou estratégias e argumentos que tinham como fundamento a interpretação quociente evidenciando a correspondência entre itens a repartir e os recipientes. Pelos resultados, Nunes et al (2004) referem que a situação quociente aparece muito associada ao conhecimento informal na resolução de problemas sobre equivalência de fracções. Esta ideia vai de encontro aos argumentos apresentados por Streefland (1997) que defende as situações quociente como as que mais se ajustam ao conhecimento informal da criança.

Streefland (1997) sustenta uma abordagem do ensino das fracções a partir de situações de partilha equitativa, por serem uma fonte naturalmente referenciada a situações da realidade do dia-a-dia das crianças. Deixa transparecer a ideia de que facilmente se passa de uma situação para outra quando se trabalha com fracções em situações do quotidiano. Para o autor, uma fracção usada para descrever o resultado de uma partilha equitativa reflecte uma relação parte-todo, pois descreve a parte resultante da partilha. A fracção é entendida como antecipação do resultado de uma partilha equitativa, ou seja, de uma situação quociente. A mudança de discurso quando se faz referência à parte com que cada um fica depois de realizada a operação passa a ser uma relação parte-todo. O processo de matematização destas situações do quotidiano exige, contudo, que se considerem algumas condições importantes, tais como a igualdade ou equivalência das unidades e a partilha exaustiva e equitativa. Esta abordagem permite fazer uma ligação das fracções à divisão de números inteiros, evidenciando uma relação entre duas grandezas do mesmo tipo e tornando mais fácil a comparação de fracções que representem quantidades diferentes ou equivalentes.

Mack (1990) defende uma abordagem das fracções a partir de situações do dia-a-dia, que potenciem os conhecimentos informais que os alunos têm. Considera que esses conhecimentos facilitam a compreensão das fracções em situações de partilha equitativa e que essa compreensão pode facilmente ser transferida para a aprendizagem de símbolos e procedimentos em todas as situações.

Mamede tem vindo também, a realizar estudos com crianças portuguesas, sobre os conhecimentos informais e os efeitos das diferentes interpretações na formação do conceito de fracção pelas crianças (Mamede, 2008a, 2007; Mamede et al., 2005). Os resultados nos diversos estudos sugerem que as crianças possuem conhecimentos informais sobre fracções e que a interpretação em que é feita a primeira abordagem às fracções influencia o modo como as crianças compreende o conceito. Mamede et al (2005) verificaram que o desempenho das crianças bastante jovens (6 e 7 anos) na comparação e ordenação de quantidades representadas por fracções é melhor em situações quociente. Esta evidência parece dar consistência à ideia de que as crianças possuem conhecimentos informais que conseguem envolver com mais eficácia, na resolução de problemas em situação quociente.

Os estudos existentes apontam para uma certa vantagem em iniciar o ensino formal das fracções a partir da partilha equitativa prosseguindo com situações quociente. Contudo, a introdução deste conteúdo no currículo dos primeiros anos de escolaridade vem evidenciar a necessidade de contributos que fundamentem as opções metodológicas mais acertadas e que sejam geradoras de menos dificuldades ao longo da escolaridade. O novo programa apresenta alguns problemas tipo, para cada interpretação que sugere, mas não dá orientação sobre que práticas de sala de aula desenvolver para que o conceito de fracção seja introduzido através de situações de partilha equitativa, integrando o significado quociente e explorando posteriormente outras interpretações. Pouco se sabe ainda sobre o real impacto da introdução do conceito de fracção a crianças do 1.º ciclo, sustentado na interpretação quociente. Este trabalho pretende contribuir para ajudar a colmatar esta falha na investigação portuguesa.

1.4. Problema do estudo

Iniciar e ensinar conceitos relacionados com as fracções continua a ser um desafio para a maioria dos professores que pretendem promover um completo entendimento do conceito e das relações de equivalência e ordenação. Neste contexto, importa desenvolver conhecimentos pedagógicos sobre a forma como se realiza a aprendizagem e a compreensão das fracções por alunos do 1.º ciclo, tentando ajudá-los a superar as dificuldades conceptuais que possam manifestar ao longo da escolaridade. Importa também perceber como desenvolver práticas de sala de aula em que o conceito de fracção é apresentado aos alunos envolvendo diferentes interpretações, de acordo com as indicações referidas no novo Programa (quociente, parte-todo, operador, medida, razão). Apesar deste último documento referir distintas interpretações do conceito de fracção, em nenhum momento apresenta qualquer proposta didáctica orientadora da abordagem destas interpretações em sala de aula. Neste estudo pretendemos perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções a partir da interpretação quociente, na compreensão do conceito de fracção dos alunos do 1.º Ciclo. Para tal, estudo será orientado no sentido de encontrar resposta para as questões de investigação a seguir enunciadas:

a) Como entendem os alunos a representação de fracções apresentadas na interpretação quociente?

b) Como entendem os alunos a ordenação e equivalência de fracções apresentadas na interpretação quociente?

c) Como transferem os alunos o conhecimento adquirido na interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo?

1.5. Sobre a organização deste trabalho

Este trabalho está organizado em capítulos, iniciando-se com o capítulo I em que é apresentada uma introdução ao estudo desenvolvido. Nela apresentam-se considerações gerais importantes para o tema em estudo, analisa-se a relevância do estudo desenvolvido e identifica-se claramente o problema do estudo bem como as questões de investigação a que se procura dar resposta no sentido de resolver o problema. O capítulo termina com um breve resumo sobre a organização desta dissertação.

No capítulo II apresenta-se uma revisão de literatura em que se procura dar uma perspectiva do estado da investigação. Apresenta-se um breve resumo sobre as investigações realizadas no sentido de identificar as dificuldades com o conceito de fracção e sobre a construção desse conceito. É feita ainda, uma análise sobre a compreensão do conceito de fracção e os conhecimentos informais relevantes para as fracções. O capítulo termina com uma revisão sumária sobre o efeito das diferentes interpretações de fracções na compreensão do conceito.

No capítulo III apresentam-se as opções metodológicas justificando-as e faculta-se ao leitor uma ideia sobre a estrutura da investigação desenvolvida. Apresenta-se o design do estudo, caracterizam-se os participantes, descrevem-se as tarefas e os procedimentos. São ainda referidos os instrumentos de recolha de dados e os aspectos valorizados na análise dos dados.

O capítulo IV reporta o estudo realizado com o intuito de dar resposta às questões de investigação: a)Como entendem os alunos a representação de fracções apresentadas na interpretação quociente? b) Como entendem os alunos a ordenação e equivalência de fracções apresentadas na interpretação quociente? c) Como transferem os alunos o conhecimento adquirido na interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo? Este capítulo encerra com a discussão dos resultados à luz d revisão de literatura.

O capítulo V apresentada as conclusões a que o estudo permitiu chegar relativamente às questões de investigação.

Esta dissertação termina com uma secção de anexos que contém os documentos utilizados para o desenvolvimento do estudo documentado neste trabalho.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem como objectivo discutir alguns assuntos relevantes para esta investigação. Está organizado em cinco partes, abordando as dificuldades com o conceito de fracção, a construção do conceito de fracção; a compreensão do conceito, o conhecimento informal relevante para as fracções e as interpretações de fracções na compreensão do conceito.

2.1. Dificuldades com o conceito de fracção

A literatura internacional tem dado evidências da existência de dificuldades conceptuais dos alunos no âmbito das fracções. Vários foram já os estudos desenvolvidos centrados na identificação das dificuldades dos alunos, em distintos níveis de ensino.

Nos anos 70, Hart (1981) desenvolveu um estudo no âmbito do projecto britânico *Concepts in Secondary Mathematics and Science, CSMS,* em que um dos objectivos era identificar dificuldades de alunos de 12 e 13 anos, no trabalho com fracções. As questões envolvidas foram apresentadas por palavras ou diagramas e pretendiam a nomeação de partes e o reconhecimento da expressão *um meio*. Incluíam itens em que a fracção era interpretada como um subconjunto de uma colecção de objectos e como parte de um todo. A autora descreve testes construídos pelo CSMS, em que os problemas envolviam fracções familiares como 1/2, 2/4… e fracções menos familiares como 2/7. A análise dos resultados e estratégias usados pelos alunos demonstraram que as crianças se sentem mais seguras quando se trabalha dentro do conjunto de números inteiros com todas as restrições impostas por eles. O facto de algumas destas restrições não se aplicarem ao conjunto das fracções constitui uma dificuldade para os alunos e dificulta a compreensão do sistema de numeração para além do que é necessário para contar. Apresenta como exemplo uma situação em que se pretendia que a resposta fosse 3÷ 5 e muitos alunos apresentaram a resposta 5÷3, presumivelmente porque estavam condicionados pela ideia de que “5 não cabe em 3”, apenas entre 25% e 30% dos alunos dividiram o número menor pelo maior. Outra dificuldade documentada pela autora relativamente à equivalência de fracções prende-se com o facto de os alunos relacionarem separadamente, numeradores e denominadores. Esta dificuldade tornou-se evidente em casos como $^{2}/_{7} = ?/_{14}$ e $^{2}/_{7} = {}^{10}/_{?}$. Se no primeiro caso algumas crianças conseguiram encontrar a solução, explicando que *'7 com 7 são 14 e, portanto, 2 com 2 seriam quatro'*, no segundo caso foi mais difícil estabelecer esse raciocínio. Uma das respostas encontradas, '$^{2}/_{7} = {}^{10}/_{15}$', era explicada através de uma relação numérica entre o numerador e o denominador de cada fracção: se 7 menos 5 são dois, então era necessário encontrar um número ao qual se subtraíssem 5 e ficassem 10. Para a autora, esta explicação evidencia uma visão da fracção como dois números inteiros que podem ser tratados separadamente. Este raciocínio tem implicações a nível da comparação e ordenação, como se comprova neste estudo, quando 20% das crianças do grupo considera que 5/20 é maior que 1/2. Os resultados desta investigação confirmam dificuldades na compreensão de aspectos lógicos das fracções como a ordenação e equivalência. Hart (1981) apresentou também tarefas que envolviam a representação de quantidades. Verificou que os alunos sombreavam 1/3 de um rectângulo dividido em três partes iguais com facilidade. Contudo, 20% dos alunos não tiveram sucesso quando foi pedido que se rodeasse 1/3 de 12 berlindes. A percentagem de insucesso aumentou para 36% quando se apresentou um hexágono dividido em seis partes iguais e se pediu que sombreassem 2/3 da figura. A investigadora conclui que os alunos têm mais sucesso quando é necessário representar fracções em que o denominador é igual ao número de partes em que o todo é dividido, aumentado o insucesso quando é pedido para representar fracções equivalentes e quando têm de aplicar a divisão a um conjunto discreto (Hart, 1981).

Post (1981), num estudo realizado no âmbito do *National Assessment of Education Processes* (NAEP) com crianças de 9 e 13 anos, chega a resultados semelhantes aos de Hart pois, 62% das crianças de 9 anos consegue sombrear 3/4 de um rectângulo dividido em quatro partes iguais. Contudo, dado um rectângulo dividido em doze partes iguais, com quatro delas sombreadas e colocada a questão "Que fracção da figura está sombreada?", apenas 20% das crianças de 9 anos e 82% das crianças de 13 anos responderam com sucesso. A percentagem de sucesso ainda diminui mais quando, perante um conjunto de oito quadrados, estando três pintados de preto, se pede aos alunos para escreverem a fracção de quadrados pretos. Apenas 12% das crianças de 9 anos e 72% das crianças de 13 anos responde acertadamente.

Os dois estudos evidenciam mais dificuldades na representação de quantidades em situações parte-todo, envolvendo modelos contínuos, quando o denominador das fracções não é igual ao número de partes em que o todo está dividido. As dificuldades foram também mais evidentes na representação de fracções envolvendo quantidades discretas com o sentido de operador.

Kerslake (1986) descreve um outro estudo com crianças britânicas, nos anos 80, a que deu o nome de *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SEMS)*, que pretendia obter mais informações sobre a forma como as crianças pensam nas fracções e investigar três aspectos específicos que emergiram dos resultados da CSMS: ver se as crianças eram capazes de pensar nas fracções como um número ou se elas pensavam que a palavra "número" implicaria somente números inteiros; descobrir que percepção de fracção tinham as crianças e determinar como era compreendida a equivalência. Foram realizadas entrevistas individuais a 23 alunos com idades entre os 12 e 14 anos. As questões eram colocadas oralmente, mas tinham o suporte de alguns cartões onde eram apresentados diagramas, sobre aspectos em causa. Nesta fase do estudo, Kerslake verifica que, maioritariamente, os alunos entendem as fracções como parte-todo quando utilizados modelos geométricos e poucos as interpretam como quociente de uma divisão; os alunos consideram difícil pensar nas fracções como números, o que se verifica principalmente quando têm de os colocar na recta numérica; os alunos reconhecem fracções equivalentes quando são apresentadas em simultâneo com modelos geométricos de sentido parte-todo, mas têm muitas dificuldades em reconhecer a equivalência de fracções quando são apresentadas apenas simbolicamente.

Numa fase posterior do estudo, Kerslake (1986) fez entrevistas a 14 crianças de 13 anos às quais apresentou as questões com reformulações que considerou importantes para verificar a consistência das respostas e colmatar algumas situações imprevistas que surgiram durante a primeira fase do estudo. Num dos problemas apresentados nesta fase, "podemos partilhar equitativamente 3 bolos por cinco pessoas? Existe alguma relação entre essa partilha e 3÷5?". Kerslake verificou que apenas 10 alunos conseguiram realizar correctamente a partilha e chegar à fracção 3/5. Muitos alunos voltaram a evidenciar dificuldades em compreender fracções sem recurso a modelos contínuos e com sentido diferente de parte-todo. Nesta investigação, Kerslake (1986) concluiu que houve evidências significativas para considerar que a única interpretação de fracção em que os alunos se sentiram confortáveis foi na interpretação parte-todo, evidenciando muitas dificuldades em compreender a interpretação quociente. Embora a interpretação quociente seja a base para transformar fracções em decimais, os alunos foram muito relutantes em reconhecer qualquer conexão entre a/b e a÷b. A percepção de fracção como parte-todo parece impedir as crianças de ajustar suas construções mentais à noção de fracção como um número. A maioria das crianças foi capaz de identificar ou construir exemplos simples de fracções equivalentes, mas houve pouca evidência de qualquer capacidade em estabelecer relações entre os diagramas de equivalência e a identificação de equivalência através do raciocínio multiplicativo.

Lesh, Behr e Post (1987) incrementaram um estudo que envolveu milhares de crianças dos Estados Unidos que frequentavam níveis de escolaridade do quarto ao oitavo anos. O estudo foi realizado no âmbito dos projectos *Rational Numbers* (RN) e *Proportional Reasoning (PR),* com o objectivo de identificar dificuldades na representação, ordenação e equivalência de fracções. As conclusões a que os autores chegaram vão de encontro às conclusões de Hart, pois também eles verificaram que os alunos têm algumas dificuldades na representação quando esta envolve o estabelecimento de relação entre a representação verbal e pictórica. As dificuldades estendem-se ao reconhecimento da equivalência principalmente quando estão envolvidas quantidades discretas. Neste estudo verificou-se ainda que os alunos apresentam melhores desempenhos no reconhecimento de fracções equivalentes quando estão envolvidas representações pictóricas referidas a situações parte-todo.

As dificuldades evidenciadas pelos alunos na compreensão do conceito de fracção são bastante conhecidas no meio da investigação matemática (Kerslake, 1986; Nunes & Bryant, 1996). Um incompleto desenvolvimento do conceito de fracção é gerador de um fraco desempenho nas actividades que envolvem os números racionais (Behr et al, 1983). A investigação em educação matemática tem evidenciado que as dificuldades demonstradas pelos alunos relativamente às fracções se manifestam tanto em aspectos conceptuais como na destreza de cálculo (Mamede, 2008a).

Behr et al (1983) encontram alguma justificação para essas dificuldades, nas didácticas usadas para trabalhar este conceito que promovem a utilização precoce de regras e algoritmos, valorizando os procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos. Acrescentam aos factores didácticos a falta de modelos para representar as fracções nos seus diversos significados e na ausência de ligação entre eles. Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005) tecem algumas considerações sobre este assunto. Segundo as autoras, os professores justificam as dificuldades dos alunos no trabalho de fracções com a falta de estudo, o que leva a crer que, eles próprios, não conseguem reconhecer a complexidade intrínseca deste conteúdo. Monteiro (2007) considera que os alunos são incentivados a operar com os símbolos sem terem desenvolvido os conceitos inerentes à compreensão das fracções, o que tem efeitos negativos no trabalho com estes números.

Há ainda autores como Kerslake, Streefland, Lamon, Vamvakoussi & Vosniadou, que dão especial relevância à influência dos conhecimentos prévios sobre números naturais que influem na compreensão dos números racionais. Os estudantes usam de seus conhecimentos de números inteiros para interpretar novas informações sobre os números racionais, o que dá origem a equívocos numerosos relativos tanto aos aspectos relacionados com os conceitos como com as operações e o cálculo. Assim, as dificuldades surgem porque os conhecimentos a serem adquiridos entram em conflito com o que já é conhecido (Kerslake, 1986; Streefland, 1991; Lamon, 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

As conclusões produzidas nas diversas investigações que identificam as dificuldades dos alunos e a necessidade de encontrar novas metodologias e estratégias de abordagem das fracções fazem surgir algumas questões: Porque razão terão os alunos estas dificuldades? Porque será o conceito de fracção tão complexo para os alunos?

2.2. Construção do conceito de fracção

As dificuldades identificadas no trabalho com fracções em estudos realizados levaram alguns autores a considerar a natureza complexa do próprio conceito de fracção como um dos factores a considerar na análise das dificuldades. Vários autores identificam essa complexidade nos diversos significados que a fracção pode assumir e que dependem da situação em que é apresentada (Behr et al, 1983; Nunes, 2008, Streefland, 1997, Vergnaud, 1983).

Lamon (1999) considera que, ao longo de anos, tem sido preocupação da investigação documentar as dificuldades sentidas pelos alunos e demonstrar que é necessário mudar de rumo para que o ensino sirva melhor os estudantes, ajudando-os a ter uma compreensão mais completa das fracções. Segundo a autora, nesta fase de conhecimento das dificuldades dos alunos, é necessário redefinir a investigação. É necessário orientá-la no sentido de encontrar tarefas e métodos de ensino que passam a ter resultados na resolução das dificuldades manifestadas pela maior parte dos alunos. Vários investigadores consideram que é necessário compreender como se formam os conceitos para que se façam opções correctas sobre como os apresentar aos alunos (Vergnaud, 1997; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Nesse sentido, Vamvakoussi e Vosniadou (2004) apresentam uma teoria sobre a formação dos conceitos em que destacam o carácter cumulativo do conhecimento matemático. Argumentam que a natureza particular do conhecimento matemático e seu desenvolvimento não exige mudança radical de conceitos. Forma-se sobretudo pelo enriquecer do conhecimento prévio. No caso do conceito de fracção, e com base nesta teoria, as autoras referem várias investigações em educação matemática que mostram que o conhecimento prévio sobre números naturais influi na compreensão dos números racionais. Os alunos fazem uso dos seus conhecimentos de números inteiros para interpretar novas informações sobre os números racionais. Isto pode dar origem a dificuldades na formação do conceito de fracção, pois as regras e princípios que se aplicam aos números naturais entram em conflito com novas regras e princípios que se aplicam às fracções. É necessário que se processe a alteração de modelos mentais já existentes para rever e modificar os pressupostos causadores de distorção de novas informações. É preciso que os alunos superem as barreiras impostas pelo seu conhecimento dos números naturais para desenvolverem o conceito de fracção através de um ensino sistemático e planeado. Stafylidou e Vosniadou (2004) referem alguns estudos em que se concluiu que existe uma espécie de conflito entre as informações fornecidas pela escola e os conhecimentos informais que as crianças levam das suas experiências do dia-a-dia. Consideram importante não esquecer que muitas das dificuldades manifestadas pelos alunos na compreensão das fracções encontram justificação nos modelos de formação de conceitos de mudança conceptual: o processo de aquisição de conhecimento não é sempre um processo de enriquecimento das estruturas conceptuais já existentes; por vezes a aprendizagem exige a reorganização das estruturas de conhecimento existentes, o que se torna mais difícil e mais demorado do que a aprendizagem realizada por adição de conhecimentos; muitos equívocos dos alunos revelam as suas tentativas para assimilar as novas informações com base nos conhecimentos que possuem nomeadamente em relação aos números inteiros (Stafylidou e Vosniadou, 2004).

A construção do conceito de fracção é um dos aspectos mais relevantes na resolução das dificuldades que os alunos sentem no trabalho com fracções.

2.3. Sobre a compreensão do conceito de fracção

No domínio dos números naturais, Piaget considerou que formação do conceito de número se faz pela conexão entre a relação de equivalência dos termos que os faz pertencer à mesma classe e a relação assimétrica resultante da enumeração ou contagem (Piaget, 1952). Tomando como referência esta teoria, Nunes e colegas (2004) questionam-se sobre a forma como o conceito de fracção é compreendido pelas crianças, tendo em conta que há classes de fracções equivalentes - $^1/_3$, $^2/_6$, $^3/_{9,}$ etc. - e que estas classes podem ser ordenadas - $^1/_3 > {}^1/_4 > {}^1/_5$, etc.

Atribuem as dificuldades na compreensão da equivalência de fracções essencialmente a dois factores: diferentes símbolos que podem representar a mesma quantidade – $^1/_2$, $^3/_6$; o mesmo símbolo pode não representar a mesma quantidade – $^1/_2$ de oito não representa a mesma quantidade que $^1/^2$ de quatro – portanto, não pertencem à mesma classe de fracções equivalentes. Para melhor se compreender essas dificuldades é de grande interesse conhecer e perceber os argumentos apresentados pelas crianças para justificar a relação de equivalência entre duas fracções e que estratégias usam para solucionarem problemas que envolvem equivalência de fracções.

A ordenação de fracções é outro dos aspectos relevantes na compreensão de fracções. Se ordenar números naturais pode ser facilmente conseguido pela percepção ou por contagem, a ordenação de fracções torna-se um processo bastante mais complexo devido às relações assimétricas destes números. A análise destas assimetrias permite identificar três condições a considerar na ordenação de fracções: para denominadores iguais é maior a fracção com maior numerador; para numeradores iguais é maior a fracção com menor denominador e para denominadores e numeradores diferentes deve estabelecer-se uma relação de proporcionalidade para de seguida comparar (Nunes et al, 2004; Mamede, 2008a). A primeira condição parece mais simples, pois sendo iguais os denominadores apenas pode acarretar alguma dificuldade a comparação dos numeradores o que se confunde com o caso da ordenação dos números naturais. A segunda condição revela-se mais difícil por envolver uma relação inversa entre o denominador e a quantidade representada (Nunes et al, 2004). Estabelecer esta relação inversa constitui uma dificuldade pois os alunos tendem a considerar que a fracção com maior denominador é a que representa a quantidade maior (Hart, 1981; Behr & Post, 1992; Kerslake, 1986). A terceira condição reveste-se de maior complexidade do que as duas anteriores. As crianças tendem a considerar apenas o numerador ou o denominador na comparação de fracções deste tipo, por ser difícil relacionar os dois em simultâneo (Nunes et al, 2004). Os autores consideram a existência de uma relação entre a ordenação de fracções e a identificação de fracções equivalentes, pois a comparação de fracções pode levar à conclusão de que não são equivalentes. Também Stafylidou e Vosniadou (2004), relativamente à compreensão das fracções pelas crianças, sugerem elas consideram o denominador ou ao numerador separadamente, s leva a produzir respostas erradas na comparação de fracções.

Também o NCTM (2007) realça a importância da comparação e ordenação na compreensão do conceito de fracções. Sugere a utilização de rectas numéricas paralelas como modelo para representar as fracções que pretende comparar/ordenar. Valoriza este modelo de representação por permitir que o aluno comece a desenvolver a noção de densidade do conjunto dos números racionais. A representação aparece como outro aspecto relevante do conceito de fracção.

Vários autores têm-se debruçado sobre os modelos de representação das fracções como meio facilitador da compreensão deste conceito. Behr et al (1983) refere uma componente do estudo realizado nos Estados Unidos no âmbito do *Rational Numbers Project*, com crianças dos 4.º e 5.ºgraus, que tinha como objectivo perceber em que medida a representação de fracções pode ajudar na compreensão da formação do conceito. Os resultados obtidos demonstraram que as representações apresentadas aos alunos, através de figuras, modelos ou diagramas, podem dar-lhes sugestões confusas e constituir elementos de distracção relativamente ao conteúdo dos enunciados, tornando assim, a resolução dos problemas mais difícil, afectando o desempenho em tarefas com fracções. Contudo, aprendendo a superar a influência dos elementos distractores, as crianças desenvolvem estratégias que tornam o conceito de fracção mais estável.

Behr et al (1983) apresenta um modelo com cinco sistemas de representação de fracções a utilizar em simultâneo e todas como mesmo nível de importância (ver figura 2.1).

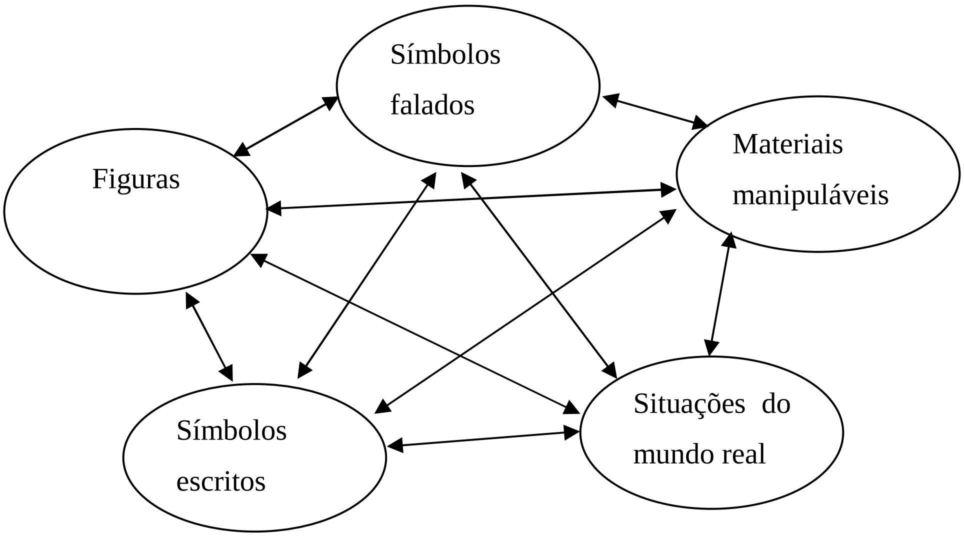


Figura 2.1 - Esquema de representação adaptado de Behr et al (1983)

Neste modelo está implícito um trabalho simultâneo com os vários sistemas de representações a utilizar pelos alunos na resolução de problemas do mundo real. O modelo sugere que as fracções sejam representadas de cinco formas: contextos da vida real, materiais manipulativos, figuras, símbolos verbais e símbolos escritos. Todas estas formas de representação sugerem que a capacidade de fazer representações diversas de uma situação demonstram uma evolução na compreensão, ao mesmo tempo que desenvolve a capacidade de as relacionar entre si.

Mais recentemente, Mamede (2008a) refere a dificuldade dos alunos na articulação e tradução das diferentes formas de representar uma fracção. Destaca a importância de, em situações de sala de aula, existir a preocupação de articular a representação de fracções através de diferentes sistemas e apresenta um modelo simplificado de representação, mas que inclui as formas essenciais de representação: simbólica, pictórica e verbal. A figura 2.2 ilustra esse modelo aplicado à fracção $\frac{1}{3}$.

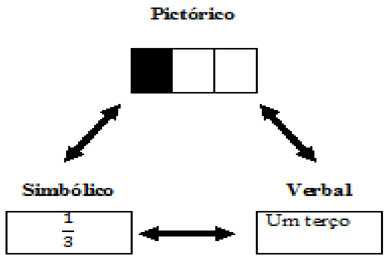
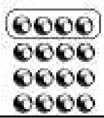


Figura 2.2 - Esquema de representação de fracções apresentado por Mamede (2008a).

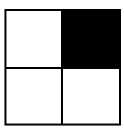
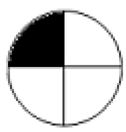
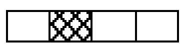
Mamede (2008a) salienta a importância de se trabalharem as representações em simultâneo e interligadas, tanto referidas a situações com quantidades discretas como a situações com quantidades contínuas. A autora apresenta algumas sugestões de modelos de representação para quantidades discretas (A) e contínuas (B), tomando como exemplo a fracção ¼:

Representação de quantidades discretas

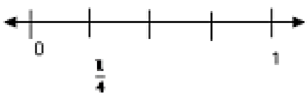
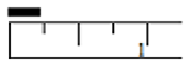
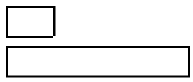
Bolas ou contas	Simbolos	Pessoas	Objectos
			

Representação de quantidades contínuas

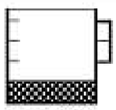
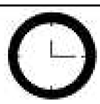
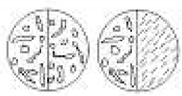
Modelos de Área

Rectangular	Circular	Tira de papel
		

Modelos de comprimento

Recta orientada	Comprimento	Barras cuisenaire
		

Modelos de outras medidas

Volume	Tempo	Metades
		

Comparado com o esquema de representação de fracções de Behr et al (1983), o esquema e as sugestões para representar quantidades contínuas e discretas apresentado por Mamede (2008a) são mais simples e directivos o que os torna funcionais nas práticas de sala de aula por serem facilmente compreendidos pelos professores e, portanto, mais exequíveis em contexto de ensino/aprendizagem. Este modelo pode ser um contributo muito positivo na compreensão das fracções. Nele são apresentados diferentes exemplos de situações do mundo real que podem ser rentabilizadas no trabalho de fracções a partir de situações mais informais, semelhantes às do modelo, em que os alunos podem explorar as fracções a partir de alguns conhecimentos que possuam da sua vida real.

2.4. Conhecimento informal relevante para as fracções

Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), nos estudos que realizaram sobre comprimento e área, debruçaram-se sobre a formação do conceito de fracção com interpretação parte-todo. Estudaram um grupo de crianças dos 3 aos 8 anos que eram colocadas perante situações em que tinham de dividir uma região ou comprimento num dado número de partes iguais. Concluíram que só por volta dos 7 ou 8 anos, no estádio das operações concretas, é que a criança está preparada para construir o conceito de fracção. Neste estádio, compreendem que quantidades contínuas ou discretas permanecem invariáveis em relação a mudanças de forma e de posição. Tendo desenvolvida a noção de conservação de quantidade, a criança consegue compreender a noção de fracção, embora se tenha constatado que a noção de metade é mais facilmente compreendida do que a noção de um quarto e que esta é melhor entendida que a noção de um terço. Mais difícil de serem compreendidas pelas crianças são as noções de quinta e de sexta parte. Para os autores, a formação do conceito de fracção tem ainda por base dois tipos de relação que a criança precisa de estabelecer e compreender: a relação parte-todo, que é intensiva e lógica por ter implícita a ideia de que o todo é maior do que a parte e igual à soma de todas as parte; e a relação parte-parte, que é extensiva e quantificável, uma vez que a parte pode ser tomada como unidade padrão passível de ser comparada com as restantes partes. Piaget et al (1960) sugerem que a formação do conceito de fracção se processa em várias fases e é guiada por esquemas antecipatórios que habilitam as crianças a reorganizar antecipadamente as relações parte-todo e parte-parte necessárias à resolução de problemas de divisão. Piaget e colegas proporcionam uma análise conceptual do conceito de fracção em que identificam sete subconceitos determinantes na compreensão do conceito de fracção e que devem ser inter-relacionados para formar uma única construção mental. Estes sete subconceitos podem ser definidos como a compreensão de sete características que é necessário articular: a existência de um todo que é divisível em partes; a igualdade das partes entre si; a determinação do número de partes em que o todo de ser dividido; a divisão do todo deve ser exaustiva; o estabelecimento de uma relação entre o número de partes do todo e o número de subdivisões; a necessidade de pensar a fracção como parte de um todo e ao mesmo tempo como um todo em si mesma; a compreensão de que a soma das partes é igual ao todo inicial.

Tendo como suporte a análise conceptual do conceito de fracção apresentada por Piaget e colegas (1960), Hiebert e Tonnessen (1978) realizaram um estudo com a principal finalidade de verificar a adequação da teoria de Piaget e colegas a quantidades discretas. Este estudo foi feito através de entrevistas realizadas a nove crianças com idades entre os 5 e os 8 anos, que deveriam dividir equitativamente quantidades contínuas e discretas, por um número de animais sentados à volta de uma mesa. A cada criança foram distribuídas três tarefas, uma ligada a áreas, outra a comprimentos e outra a conjuntos. As fracções envolvidas nas tarefas eram variadas. Duas crianças receberam tarefas relacionadas com metade, três crianças tarefas com terços, três crianças tarefas com quartos e uma criança tarefas com quintos. Os resultados de Hiebert e Tonnessen (1978) demonstram que as quantidades envolvidas originaram dificuldades diferentes. As tarefas que envolviam quantidades discretas foram mais fáceis, – seis dos nove alunos resolveram-nas com sucesso – do que as que envolviam área e comprimento – apenas duas crianças as resolveram com sucesso. Os autores consideram que esta discrepância de resultados se deve ao facto de serem necessários esquemas antecipatórios bem desenvolvidos para resolver, de forma completa e imediata, as tarefas de área e comprimento. Estes esquemas antecipatórios não são tão determinantes na resolução das tarefas que envolvem quantidades discretas, pois as crianças conseguem resolvê-las sem tratar os conjuntos como um todo. Usaram estratégias numéricas básicas (contagem) e a igualdade da divisão foi verificada pelo número de peças atribuídas a cada animal. As estratégias numéricas constituíram um obstáculo à resolução das tarefas que envolviam área e comprimento. Estas exigem a divisão em partes iguais e a antecipação das partes necessárias. É necessário compreender a relação parte-todo e estar familiarizado com medições.

Para Hiebert e Tonnessen (1978) os resultados deste estudo sugerem que os sete subconceitos identificados por Piaget et al (1960) são adequados apenas a situações que envolvem quantidades contínuas, uma vez que, nas tarefas que envolviam quantidades discretas a estratégia de distribuição um-a-um foi usada com igual sucesso para todas as fracções. Relativamente à sequência do desenvolvimento da compreensão das fracções, os autores retiraram conclusões que vão de encontro aos resultados obtidos por Piaget et al (1960) que evidenciaram mais facilidade por parte das crianças em construir os meios e os quartos, do que na construção dos terços. A relação dicotómica que existe na partição em meios e quartos é mais natural do que a partição em terços.

Mais tarde, Correa, Bryant e Nunes (1998) investigaram sobre o desenvolvimento do conceito de divisão em crianças pequenas, tendo realizado dois estudos com o objectivo de analisar se as crianças de 5 aos 8 anos, que conseguem dividir, são capazes de entender a relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo se mantém. Nos dois estudos realizados estavam envolvidas quantidades discretas. O primeiro estudo centrou-se na divisão partitiva (divisão de um conjunto em subconjuntos a atribuir a um número de recipientes conhecido) e estiveram envolvidas 66 crianças com idades entre os 5 e os 8 anos. O segundo estudo centrou-se na divisão quotativa (divisão de um conjunto para descobrir quantos subconjuntos de um tamanho dado é possível formar sendo desconhecido o número de recipientes) e estiveram envolvidas 63 crianças com idades entre os 5 e os 8 anos.

Nos resultados, os investigadores analisaram a correcção das respostas, o tipo de erros das crianças e o tipo de justificação dada. Entre outras conclusões documentadas nestes estudos, as investigadoras salientam as evidências de que mesmo as crianças mais jovens são capazes de compreender a relação inversa entre o divisor e o quociente tanto na divisão partitiva como na quotativa, sendo que 30% das crianças com 6 anos a conseguiram verbalizar e quase metade consegui responder correctamente. Os autores salientaram ainda que esta capacidade melhora com a idade. Os altos níveis de sucesso obtidos relativamente à compreensão de relação inversa entre o divisor e o quociente levaram Correa et al (1998) a considerar que a escola deve aproveitar e valorizar esta capacidade das crianças. O sucesso foi maior nas tarefas de divisão partitiva do que nas de divisão quotativa. Segundo Correa et al (1998) este tipo de divisão envolve a coordenação entre divisão e o conceito de parte-todo, o que parece provar que o trabalho inicial com divisão deve ser baseado num esquema de partilha.

Com o objectivo de descobrir se as crianças transferem a sua compreensão das relações lógicas de quantidades discretas para quantidades contínuas e se os procedimentos utilizados na partilha destas quantidades são muito diferentes, Kornilaki e Nunes (2005) realizaram dois estudos com crianças dos 5 aos 7 anos de idade, que ainda não haviam contactado com a divisão na escola. No primeiro estudo as crianças trabalharam com quantidades contínuas e discretas em situações de divisão partitiva em que o dividendo, o número de recipientes era dado e era pedido que se descobrisse o tamanho relativo do quociente. Sendo fixo o dividendo, houve tarefas com o mesmo divisor e tarefas com divisores diferentes. O objectivo particular deste primeiro estudo era avaliar se as crianças compreendem a relação inversa entre o divisor e o quociente e se a transferiam para a divisão de quantidades contínuas.

Os resultados obtidos demonstram claramente que as crianças usam os princípios de equivalência de fracções tanto em contextos de quantidade contínuas como discretas. Nas tarefas com o mesmo divisor 62% dos de 5 anos, 84% das de 6 anos e todas as de 7 anos responderam com êxito. Nas tarefas com divisores diferentes houve maiores dificuldades em ambos os tipos de quantidades. Analisando as justificações das escolhas dos alunos, as investigadoras verificaram que um terço das crianças com 5 anos, metade das crianças de 6 anos e três quartos das crianças de 7 anos basearam as suas respostas na relação inversa entre o divisor e o quociente. Esta conclusão surpreende na medida em que põe em causa resultados anteriores obtidos por Hiebert e Tonnessen (1978), em que se defendia que a divisão baseada na distribuição um-a-um garantia a igualdade das partes e facilitava o raciocínio sobre a equivalência e a relação inversa na divisão facilitando o trabalho com quantidades discretas. Kornilaki e Nunes (2005) concluem ainda que, a partir dos 5 anos, a maioria das crianças consegue usar o princípio de equivalência e a relação inversa entre o divisor e o quociente na resolução de problemas de partilha de quantidades contínuas e discretas. Esta conclusão é consonante com a de Correa et al (1998) relativamente às quantidades discretas, mas alarga os mesmos princípios às quantidades contínuas e acrescenta que, nessas quantidades, existe uma relação positiva entre a idade e o sucesso. Embora a partilha de quantidades contínuas e discretas se baseie em procedimentos diferentes, a compreensão da equivalência e da relação inversa da divisão de quantidades discretas promove o mesmo raciocínio para as quantidades contínuas.

Com a mesma estrutura do primeiro, o segundo estudo de Kornilaki e Nunes (2005) tinha como objectivo particular avaliar se as conclusões tiradas sobre a compreensão da divisão partitiva podiam ser generalizadas para a divisão quotativa, em que o quociente é o número de recipientes. Tal como no primeiro estudo, as crianças que foram bem sucedidas nas tarefas com quantidades discretas, foram-no também nas tarefas com quantidades contínuas.

A análise dos resultados destes dois estudos de Kornilaki e Nunes (2005) permitem confirmar que as crianças fazem aprendizagens matemáticas consideráveis fora da escola relacionadas com a divisão. Confirmam os resultados de Correa et al (1998) sobre a capacidade que as crianças têm para compreender a relação inversa entre o divisor e o quociente e acrescentam novas evidências que permitem estender essa conclusão às quantidades contínuas. As crianças usam processos de partilha distintos, o que sugere que a compreensão dos efeitos da divisão por um número diferente de recipientes não depende de processos específicos de partilha e podem ser conseguidos através de diferentes caminhos. Kornilaki e Nunes (2005) analisaram os argumentos apresentados pelas crianças para justificarem as suas escolhas que foram organizados em cinco tipos; sem justificação ou matematicamente irrelevante; o mesmo divisor, o mesmo parte recebida; maior o divisor, maior a parte recebida; justificação quantificada com um número; e relação inversa entre o divisor e o quociente.

Verificou-se que a percentagem de crianças que deram justificações referindo a relação inversa entre o divisor e o quociente foi muito semelhante à percentagem de crianças que resolveram com sucesso as tarefas com divisores diferentes com quantidades contínuas e com quantidades discretas. Isto sugere que as respostas dadas às tarefas tiveram como base uma compreensão explícita desse princípio (Kornilaki & Nunes, 2005).

Os estudos descritos são suficientemente vinculativos da ideia de que as crianças são capazes de estabelecer os mesmos raciocínios com quantidades discretas e com quantidades contínuas quando trabalham com fracções em que está envolvida a divisão. Será esta informação importante no desenho das opções metodológicas para uma nova abordagem ao ensino das fracções?

2.5. As interpretações de fracções na compreensão do conceito

Após vários estudos realizados no sentido de identificar e compreender as dificuldades manifestadas pelos alunos no trabalho com fracções e após o reconhecimento da existência de um conhecimento informal relevante para o desenvolvimento do conceito de fracção, tem havido uma crescente preocupação com a natureza do conhecimento das crianças sobre números fraccionários e sobre a abordagem que melhor servirá os alunos (Kieren, 1988).

Behr et al (1983) criticam a visão simplista que a escola apresenta das fracções, em que se valoriza demasiado determinada interpretação, relegando para segundo plano as outras interpretações. Por conseguinte, não são capturadas as várias interpretações que o conceito de fracção encerra, nas situações da vida real. Alertam para a necessidade de aquisição de conhecimentos por parte dos professores para seleccionarem as tarefas mais adequadas ao desenvolvimento da noção de fracção que envolvam as várias interpretações que elas podem ter. Referem também, que essas tarefas devem ter como base situações do dia-a-dia, para que as crianças possam explorar situações informais que lhes permitem trabalhar sentidos das fracções que não são explorados nas situações formais de ensino/aprendizagem. Os professores e elaboradores de currículos precisam estar cientes de que é necessário que estas experiências informais, resultantes das vivências do quotidiano, sejam usadas no desenvolvimento e compreensão do conceito de fracção (Behr et al, 1983).

A prática tradicional de ensino em vários países é a utilização de situações parte-todo para introduzir a linguagem fraccionária e o estudo das fracções (Kerslake, 1986; Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005). Parece haver um pressuposto implícito de que esta é a situação em que a aprendizagem das fracções é mais fácil. No entanto, não há evidência empírica para essa suposição (Mamede, 2009).

Embora o estudo das fracções em situações parte-todo também seja importante para um completo entendimento do conceito de fracção, Lamon (1999) refere estudos que demonstraram que uma abordagem com ênfase na interpretação parte-todo não é suficiente para desenvolver uma compreensão apropriada dos números racionais. Kerslake (1986) lembra que o conceito de fracção é afectado negativamente quando no ensino das fracções se tem como recurso quase exclusivo o modelo parte-todo, constituindo muitas vezes um obstáculo à compreensão da fracção como um número.

Se a abordagem das fracções a partir de situações com interpretação parte-todo tem gerado algumas dúvidas e críticas, a ideia de que uma abordagem com base no conhecimento informal da criança, vivenciado nas situações do quotidiano, pode ser o rumo a seguir no ensino e aprendizagem das fracções, pois tem vindo a ganhar bastantes defensores. Partir de situações do quotidiano para desenvolver conceitos matemáticos é uma visão partilhada por vários autores por permitir uma compreensão intuitiva e por dar significado à actividade matemática (Kieren, 1988; Mack, 1990; Streefland, 1991; Behr et al, 1993; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Esta ideia é reforçada por Smith III (2002) que considera essencial que se crie uma ponte entre os conhecimentos informais que as crianças trazem das suas actividades do dia-a-dia e as actividades promovidas no ensino escolar.

O percurso a fazer entre a compreensão intuitiva, que permite resolver situações informalmente pela mobilização de propriedades matemáticas, e a utilização dos símbolos matemáticos não é linear, pois envolve a vivência de muitas experiências que irão proporcionar o desenvolvimento de um conjunto complexo de relações entre os vários aspectos dos números racionais (Monteiro & Pinto, 2005a). Berh e Post (1988) consideram que, na aprendizagem do conceito de fracção, é importante que a criança tenha experiência física e real de partição para, mais tarde, conseguir abstrair o pensamento.

Kieren (1988) sugere que o conhecimento evolui a partir de potenciais acções do dia-a-dia, associadas a factos concretos da vida das pessoas para um conhecimento mais abstracto, de noções formais em que são usadas estruturas aditivas, multiplicativas e de equivalência em situações quociente. Defende uma abordagem às fracções a partir de situações concretas e informais do quotidiano. Considera que esta abordagem proporciona experiências em que são trabalhadas as várias interpretações das fracções: quociente; operador; medida; razão. Esta abordagem leva a uma maior compreensão e habilitação para a resolução de problemas.

Mack (1990) realizou uma investigação com oito crianças americanas de 11 e 12 anos, com o objectivo de verificar se conseguiam construir um completo conceito de fracção com base nos seus conhecimentos informais. Uma das situações apresentada aos alunos num contexto realista que envolvia pizas consistia em comparar as fracções 1/6 e 1/8. Todas as respostas foram correctas e justificadas com o facto de cada uma das fatias de uma piza dividida em oito partes iguais ser menor que cada uma das seis fatias de uma piza dividida em seis partes iguais. Quando estas mesmas fracções foram apresentadas a cinco estudantes, de forma simbólica e lhes foi pedido que as comparassem, quatro deles não responderam correctamente e justificaram dizendo que “oito é maior que seis” e portanto, “1/8 é maior que 1/6”. Neste estudo, Mack (1990) concluiu que um ensino das fracções a partir da interpretação quociente pode ser facilitado pelos conhecimentos informais se a escola não basear o ensino essencialmente na aprendizagem de símbolos e de procedimentos destituídos de significado para os alunos.

Com o objectivo de compreender em que medida as actividades de sala de aula promovem o desenvolvimento do conhecimento sobre fracções, Empson (1999) realizou um estudo com 17 crianças do primeiro ano, com idades entre os 6 e os 7 anos, que consistiu numa unidade de ensino correspondente a cinco semanas e a 15 sessões dadas pela professora da turma, mas planeadas em conjunto com a investigadora. Através de entrevistas, fizeram uma recolha de informação sobre os conhecimentos informais que as crianças possuíam sobre equivalência de fracções na interpretação quociente e parte-todo e as aulas foram planeadas tendo como ponto de partida esses recursos informais. Os resultados obtidos neste estudo deram indicações de que as crianças apresentam conhecimentos informais sobre fracções. Empson (1999) verificou que esses conhecimentos informais permitem estabelecer relações de equivalência entre quantidades fraccionárias e identificar a relação inversa entre o numerador e o denominador. Todas as crianças começaram a instrução com alguns recursos informais sobre metade, o que lhes permitiu participar em tarefas de ensino sobre fracções. No final das sessões, todas as crianças, excepto uma, exibiram conhecimentos sobre a fracção metade, 16 crianças resolveram todas a tarefas em situações de partilha, metade da turma estava habilitada para resolver novos problemas, 9 crianças resolveram um problema que envolvia uma situação operador com uma fracção unitária, 8 crianças adicionaram duas fracções com denominadores iguais, 10 crianças subtraíram uma fracção de um número inteiro e 8 crianças resolveram um de dois problemas que envolviam raciocínio proporcional.

Com o objectivo de estudar os desempenhos dos alunos na resolução de problemas de equivalência de fracções em situações quociente e em situações parte-todo, Nunes et al (2004) realizaram um estudo em Inglaterra que envolveu 130 crianças de 8 e 9 anos de idade. Os problemas referentes à interpretação quociente envolviam os pares de fracções 1/2, 2/4; 1/3, 2/6 e 1/4, 2/8. Os problemas referentes à interpretação parte-todo envolviam as fracções 2/3, 4/6; 2/3, 6/9 e 2/4, 4/8. O desempenho dos alunos foi muito diferente nos problemas referentes aos dois tipos de interpretação. Os autores verificaram que apenas 35% dos alunos resolveram correctamente os problemas sobre situações parte-todo, enquanto na interpretação quociente a percentagem de sucesso foi de 60%.

Outro estudo realizado pelos mesmos autores, com o objectivo de conhecer as dificuldades das crianças na resolução e explicação de problemas sobre equivalência de fracções na interpretação quociente, envolveu 62 alunos de três escolas, com idades entre os 7 e os 11anos e que tinham iniciado o estudo das fracções na interpretação parte-todo. Os alunos mais velhos também tinham feito algum trabalho com 1/3, nomeadamente tentando dividir uma linha em três segmentos e calculando 1/3 de um número pela divisão por 3, mas nunca em situações práticas. Neste estudo de Nunes et al (2004), as crianças trabalharam com um investigador, em pequenos grupos de 4 a 6 elementos, constituídos aleatoriamente. O estudo foi realizado durante cinco sessões, uma por semana, com a duração de aproximadamente 50 minutos cada. Cada criança dispunha de uma brochura com um problema por folha que continha três ou quatro tarefas. As crianças resolviam individualmente as tarefas e, posteriormente, apresentavam aos colegas as suas resoluções que eram justificadas e discutidas com os colegas. As primeiras observações realizadas mostraram que as crianças tinham um desempenho significativamente melhor nos problemas que envolviam a interpretação quociente, o que levou os autores a investigar as estratégias usadas nestas situações. Após a análise dos argumentos e estratégias dos alunos, conseguiram organizá-los em quatro categorias: divisão exaustiva e justa – presente em 11 grupos; raciocínio escalar – presente em 7 dos 12 grupos de alunos; partição e comparação perceptual – presente em 4 grupos; combinação de argumentos – presente num grupo; relação entre as partes e o todo – presente num grupo e argumentos incompletos – presentes em 3 grupos. Os autores consideraram estes resultados bastante surpreendentes na medida em que, tendo todos os alunos iniciado o estudo das fracções na interpretação parte-todo, a maioria das estratégias e argumentos não se fundamentaram nessa interpretação, sendo muito mais dirigidos para a interpretação quociente, em que muitos dos alunos usam a correspondência entre itens a repartir e recipientes. Pelos resultados, Nunes et al (2004) referem que a situação quociente aparece muito associada ao conhecimento informal na resolução de problemas sobre equivalência de fracções.

Propondo-se analisar o efeito do conhecimento informal das crianças sobre quantidades representadas por fracções na interpretação quociente e parte-todo, Mamede (2007) entrevistou 80 crianças portuguesas com 6 e 7 anos de idade, do primeiro ano de escolaridade de escolas públicas, aleatoriamente distribuídas por dois grupos com igual número. Um grupo resolveu problemas apresentados na interpretação quociente e outro resolveu problemas apresentados na interpretação parte-todo. As crianças resolveram 6 problemas de equivalência e 6 problemas de ordenação de quantidades representadas por fracções. Os resultados sugerem que as crianças obtêm melhores resultados na resolução de problemas de equivalência apresentados na interpretação quociente, pois 40% das crianças de 6 anos e 65% das de 7 anos resolveram correctamente pelo menos dois problemas, sendo que, das crianças que resolveram problemas apresentados na interpretação parte-todo, nenhuma conseguiu resolver correctamente mais de dois problemas. Relativamente aos problemas de ordenação na interpretação quociente, 60% das crianças de 6 anos e 90% das de 7 anos resolveram correctamente mais de dois problemas. No grupo que resolveu problemas de interpretação parte-todo, apenas 20% das crianças de 6 anos obteve mais de 2 respostas correctas e 10% das crianças de 7 anos obteve sucesso em metade dos problemas propostos. Os resultados sugerem um melhor desempenho das crianças na resolução de problemas apresentados na interpretação quociente do que na interpretação parte-todo e que as crianças mais velhas apresentam ainda melhor desempenho do que as crianças mais novas nos problemas de equivalência e ordenação na interpretação quociente. Os resultados sugerem ainda que a compreensão lógica de fracções é afectada pelo tipo de interpretação em que as fracções são apresentadas e que estas afectam também o raciocínio quando é necessário reconhecer a equivalência entre duas quantidades. Os problemas de equivalência parecem apresentar um maior grau de dificuldade do que os problemas de ordenação.

Mamede (2007) continuou a sua investigação com um estudo comparativo, onde pretendia analisar o efeito do conhecimento informal das crianças sobre quantidades representadas por fracções nas interpretações parte-todo e operador. Participaram 80 crianças portuguesas do 1.º ano de escolaridade – 40 que tinham trabalhado problemas apresentados na interpretação parte-todo no estudo anterior e 40 que participavam só neste estudo e iam resolver problemas apresentados na interpretação operador. Foram apresentados, a todas as crianças, 6 problemas de ordenação de quantidades representadas por fracções, na interpretação operador. Neste estudo, 35% das crianças de cada grupo etário teve sucesso em mais de 2 problemas de equivalência na interpretação operador. Na interpretação parte-todo o desempenho destas crianças nos problemas de equivalência foi mais fraco. Nos problemas de ordenação de quantidades, o desempenho foi melhor em situações operador - 45% das crianças de cada grupo etário resolveu correctamente mais de 2 problemas, contra apenas 20% das crianças de 6 anos e 10% das crianças de 7 anos que obtiveram sucesso em mais de 2 problemas, em situações parte-todo.

O estudo sugere que desempenho das crianças dos dois grupos etários na resolução de problemas em situações operador foi melhor do que em situações parte-todo. As situações em que os problemas são apresentados afectam, de forma distinta, a compreensão da equivalência e também a compreensão da ordenação, embora neste caso os efeitos sejam menos evidentes por se tratar de comparar quantidades diferentes (Mamede, 2007).

Um outro estudo realizado por Mamede (2007), mas centrado nos efeitos das diferentes interpretações no conhecimento informal das crianças, analisa um possível efeito de transferência de conhecimentos entre as interpretações. Participaram neste estudo 37 crianças de 6 e 7 anos, que não tinham recebido ensino formal sobre fracções. Foram apresentadas às crianças 6 problemas de equivalência e 6 de ordenação de quantidades representadas por fracções, idênticos aos apresentados nos estudos anteriores para cada uma das interpretações - quociente, parte-todo e operador. Nos problemas de ordenação, o dividendo era constante e foram usadas as mesmas fracções nas diferentes interpretações para se poder comparar o desempenho das crianças.

Nos problemas de equivalência apresentados na interpretação quociente, um grande grupo de 51% das crianças não resolveram correctamente nenhum dos problemas e, um segundo grupo demonstrou ter alguma compreensão da equivalência. Destes, 35% resolveu correctamente metade dos problemas de equivalência. No que respeita aos problemas de ordenação, 48.6% não conseguiram entender a ordenação, 38% resolveu correctamente pelo menos metade dos problemas e 13.5% resolveu correctamente todos os problemas. Os níveis de insucesso foram maiores quando as crianças resolveram problemas nas interpretações parte-todo e operador. Na interpretação parte-todo, apenas 1 criança resolveu correctamente um problema de equivalência e apenas 5% das crianças apresentaram uma resolução correcta para a ordenação de fracções. Na interpretação operador, 2.5% das crianças resolveram um problema de equivalência correctamente e 2.5% das crianças resolveram 2 problemas de ordenação correctamente. Os resultados obtidos neste estudo foram menos positivos do que os resultados dos dois estudos apresentados anteriormente, principalmente no que se refere à resolução dos problemas na interpretação quociente. Contudo, e tendo em conta que não tinham recebido qualquer formação sobre fracções, a autora sugere que algumas crianças usam melhor os seus conhecimentos informais sobre quantidades fraccionárias quando os problemas são apresentados em situações quociente do que quando são apresentados nas interpretações parte-todo ou operador, reforçando a ideia de que o tipo de interpretação tem efeito na resolução de problemas de ordenação e equivalência.

O NCTM (2007) refere que o estudo das diversas interpretações e modelos de fracções; o modo como as fracções se relacionam entre si e com a unidade; e a forma como são representadas, proporcionam aos alunos o desenvolvimento de agilidade na percepção do "tamanho" das fracções recorrendo a pontos de referência como ½. Nesse contexto, prevê-se um maior sucesso na construção do conceito de fracção se, no processo de ensino aprendizagem, forem integradas tarefas e situações em que se explorem as diferentes interpretações das fracções.

A importância de trabalhar um conjunto variado de situações é defendida por Vergnaud (1997) na sua teoria dos campos conceptuais como uma condição para a compreensão dos conceitos matemáticos. Segundo o autor, a formação de um conceito matemático C faz-se em função de três conjuntos, C= (S. I. R.) em que S representa o conjunto das situações que dão significativo e conferem utilidade ao conceito; I representa o conjunto de invariantes operacionais que permitem identificar propriedades e relações entre as situações e R representa o conjunto de representações simbólicas, linguísticas, gestuais ou gráficas. A aplicação da teoria de Vergnaud na compreensão do conceito de fracção, faz-nos considerar o conjunto de todas as situações em que o conceito ganha significado e que serão as diferentes interpretações; o conjunto de invariantes operacionais em que se identificam a ordenação e equivalência; e o conjunto de representações possíveis entre as quais se encontram as representações simbólica, verbal e pictórica.

A compreensão do conceito de fracção exige a compreensão e o domínio das diferentes interpretações e a criação de relações entre essas interpretações (Mamede, 2008a). A compreensão do conceito de fracção é muito complexa e difícil pois alarga significativamente o conhecimento que a criança tem sobre os números (Kieren, 1997; Mamede, 2008a, 2008b).

O novo Programa da Matemática (DGIDC, 2007) sugere que seja desenvolvido um trabalho com fracções a iniciar-se com a partilha equitativa de quantidades contínuas. Refere que os números racionais devem ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fracção nos casos mais simples. Refere ainda que o trabalho mais aprofundado, envolvendo outras interpretações de fracções deve iniciar-se nos dois últimos anos do 1.º ciclo. Este documento alonga-se abordando aspectos sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais representados na sua forma decimal sugerindo ainda, contextos em que devem ser trabalhados, tais como o dinheiro. Sobre a forma como trabalhar as fracções, o documento limita-se a apresentar um exemplo de problema para trabalhar com os alunos em sala de aula nas interpretações quociente, parte-todo e operador. Dado que estas interpretações podem constituir uma novidade para muitos professores do 1.º ciclo, talvez fosse desejável facultar mais informação sobre modos de abordar e explorar estas interpretações em sala de aula, sob pena de ver assim penalizadas as intenções do novo programa em melhorar efectivamente a compreensão do conceito de fracção dos alunos.

Monteiro e Pinto (2007) consideram que, à multiplicidade de significados são inerentes algumas ambiguidades que devem ser exploradas para se transformarem em oportunidades construtivas para os alunos. Apresentam alguns exemplos de situações susceptíveis de criar alguma confusão na compreensão das fracções e que devem ser exploradas: "a fracção 3/5 pode, por exemplo, ser interpretada como 3/5 de um bolo, como razão entre o número de rapazes (3) e de raparigas (5) existentes numa sala de aula, ou como quociente resultante de se dividir 3 chocolates iguais por cinco pessoas." (2007, p.13). Fundamentam-se em investigações feitas para afirmarem que "é na síntese da diversidade de situações e na teia de relações que os alunos vão estabelecendo a partir delas, que o sentido de número racional se vai desenvolvendo." (p.13).

Neste sentido e a respeito da divisão, Nunes (2008) considera a divisão partitiva e quotativa como dois modos diferentes de trabalhar a divisão do todo em partes iguais. O trabalho com a partição facilita a compreensão de que quanto maior for o número de partes em que o todo é dividido, menor é o tamanho das partes. Empiricamente, Nunes (2008) procura estender esta compreensão da divisão de números inteiros aos números racionais. Se as crianças conseguirem desenvolver muito bem o raciocínio sobre a partição que lhes permita rapidamente antecipar o número e o tamanho das partes, conseguirão ordenar as fracções e identificar a equivalência. Contudo e apesar de ser o modelo mais usado para introduzir as fracções às crianças, a divisão do todo em partes iguais é um processo lento que exige a antecipação do número e do tamanho das partes e não produz a compreensão imediata da equivalência ou ordenação das fracções que são imediatamente visualizadas quando se usa o modelo de correspondência. Através da correspondência, as crianças conseguem compreender e aceitar que é possível dividir um número menor por um maior como por exemplo, dois chocolates por quatro meninos. Segundo a autora, há quatro diferenças essenciais entre estes dois modelos: no modelo de correspondência não é necessário relacionar o tamanho do dividendo com o divisor por estarem a estabelecer a correspondência entre entes de naturezas diferentes; o modelo de correspondência permite verificar que diferentes formas de partilha podem ser justas; as crianças percebem com facilidade que quanto maior for o número de recipientes menor é a quantidade que receberão, visualizando a relação inversa entre o divisor e o quociente.

Embora identifique estas diferenças entre a partição e a correspondência, Nunes (2008) considera que ambos os modelos contribuem para a compreensão da equivalência de quantidades, mas o raciocínio implicado é diferente nos dois esquemas de acção. No esquema de partição, a compreensão da equivalência é baseada no raciocínio proporcional inverso (o dobro dos pedaços significa que cada pedaço tem metade do tamanho). No esquema de correspondência, a compreensão da equivalência é baseada no raciocínio proporcional directo (o dobro de barras de chocolate dá para o dobro de recipientes). Nunes e Bryant (2008) conclui que, uma análise exploratória de como as crianças compreendem a equivalência de fracções quando são usados esquemas de acção de partição ou de correspondência em situações de divisão, demonstra que poderia ser muito positiva na identificação de mais diferenças entre eles. Deste modo seria possível concluir que o esquema de correspondência pode, de certo modo, constituir uma transição mais suave entre os números inteiros e os números racionais, pelo menos quando estão envolvidas a ordenação e equivalência de fracções.

Os investigadores são unânimes em afirmar que o conceito de fracção só está totalmente adquirido quando o aluno domina o conceito em todas as interpretações e é capaz de traduzir, raciocinar e resolver problemas em diferentes situações (Mamede, 2008a). Nunes e Bryant (2008) enfatizam a importância de se dar aos alunos oportunidade de progredir na compreensão das fracções aprendendo a usá-las em todas as interpretações. Explorar apenas algumas das interpretações é restringir o desenvolvimento do próprio conceito de fracção. Além da exploração de situações com as várias interpretações nas práticas de sala de aula, interessa perceber qual a melhor dessas interpretações integrarem essas práticas. Muito recentemente, questões como " qual a interpretação que melhor se adequa à introdução do conceito de fracção às crianças?" parecem ter despertado a atenção dos investigadores. Nessa perspectiva, vários autores apontam a interpretação quociente (Streefland, 1997; Nunes & Bryant, 2008; Mamede, 2007; Nunes et al 2008) como ponto de partida mais adequado à introdução do conceito de fracção às crianças para potenciar o seu conhecimento informal. Sobre este assunto, Nunes (2008) argumenta ainda que, as crianças que iniciam o estudo das fracções com a interpretação quociente apresentam mais progressos na compreensão do conceito e na resolução de problemas nas interpretações quociente e parte-todo. As crianças também consideram mais fácil a comparação de fracções na interpretação quociente do que nas outras interpretações, o que sugere que esta percepção dos alunos pode ser o suporte para a aprendizagem dos números racionais. Contudo, em Portugal ainda não existem estudos que ofereçam evidências empíricas sobre o real impacto de uma abordagem de introdução ao conceito de fracção na interpretação quociente, seguida de uma abordagem do conceito na interpretação parte-todo.

Tendo por base a informação documentada na bibliografia consultada, pretendemos, nesta investigação, integrar a interpretação quociente como primeira abordagem ao conceito de fracção por esta ser a que mais se ajusta ao conhecimento informal das crianças. É nosso propósito descrever e analisar os desempenhos e argumentos dos alunos quando são introduzidos ao conceito de fracção utilizando situações quociente, procurando criar uma referência de práticas no âmbito do ensino das fracções, no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

CAPITULO III

METODOLOGIA

O objectivo deste estudo é perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções a partir da interpretação quociente, na compreensão do conceito de fracção dos alunos do 1.º Ciclo. Neste sentido procura-se dar resposta às questões: a) Como entendem os alunos a representação de fracções apresentadas na interpretação quociente? b) Como entendem os alunos a ordenação e equivalência de fracções apresentadas na interpretação quociente? c) Como transferem os alunos o conhecimento adquirido na interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo?

O capítulo está organizado em três partes. A primeira integra as opções metodológicas que inclui o planeamento da investigação, os participantes, as tarefas, a recolha de dados e os procedimentos.

3.1. Opções Metodológicas

Este estudo é realizado numa turma do segundo ano de escolaridade em que a investigadora, é também a professora do grupo de alunos participantes na investigação e é o principal elemento dessa recolha de dados.

As aulas decorrem num ambiente natural para os alunos tendo como linhas condutoras algumas ideias que assentam na teoria sócio-construtivista do conhecimento, a qual tem como principal referência Jean Piaget. Este autor defende que o ser humano não é passivo à influência do meio, respondendo a estímulos externos e agindo sobre eles para construir e organizar o seu próprio conhecimento de forma cada vez mais elaborada e complexa. Nas aulas desta turma, é usual uma prática pedagógica de base construtivista na medida em que o aluno exerce o papel principal no processo de ensino-aprendizagem e é o construtor activo do seu próprio conhecimento. O professor não desempenha o papel de transmissor de conhecimentos, procura simplesmente estimular a autonomia e criar oportunidades para a descoberta e o confronto de ideias (Coll & Solé, 2001). O professor desempenhou o papel de mediador das discussões e de organizador das ideias produzidas pelos alunos. O aluno torna-se activo quando manipula e explora objectos, mas também quando lê, ouve, escuta e dá explicações (Sanchis & Mahfoud, 2010).

Os dados são, portanto, recolhidos em ambiente natural para os alunos, por se processar em situações de sala de aula. Feita a sua descrição, os dados são analisados dando relevância aos processos e aos argumentos. Neste contexto faz sentido desenvolver estudo de caso de metodologia qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

Quanto ao *design* do estudo, a nossa preocupação centra-se principalmente na interpretação, compreensão e explicação dos procedimentos sem pretender controlar os acontecimentos nem manipular as causas do comportamento dos participantes (Yin, 2005). É o estudo de caso que melhor se adapta a esta abordagem.

3.2. *Design* do estudo

O estudo decorreu no final do segundo e no início do terceiro trimestre do ano lectivo 2009/2010, nos meses de Março e Abril num total de 11 sessões de aproximadamente 90 minutos de duração. Desenvolveu-se em duas fases distintas com um intervalo de três semanas. A fase 1 centrou-se na resolução de problemas apresentados na interpretação quociente, pois pretendia-se introduzir o conceito de fracção com esta interpretação. Nesta fase procurou-se dar resposta às duas primeiras questões. A fase 2 centrou-se na resolução de problemas utilizando a interpretação parte-todo, a partir da transferência de conceitos da fase 1, conforme se pretende ilustrar na figura 3.1.

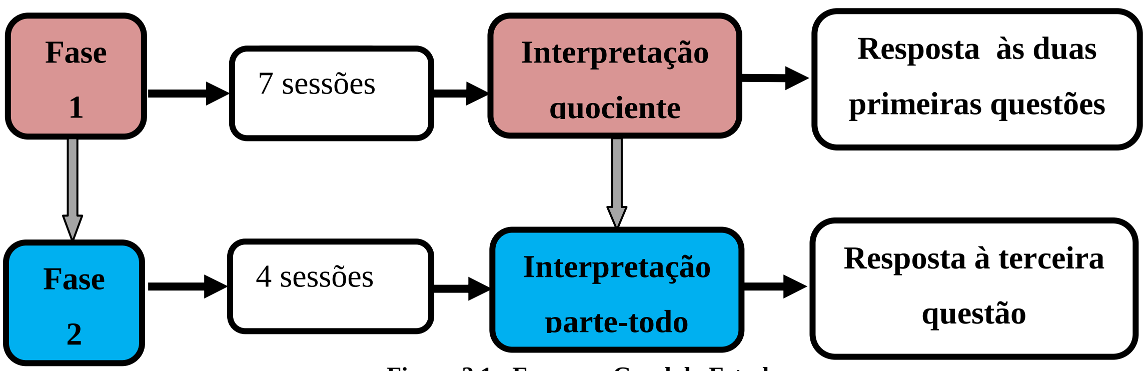


Figura 3.1 - Esquema Geral do Estudo

3.2.1. *Design* da Fase 1

Nas quatro primeiras semanas do mês de Março, decorreu a fase 1 do estudo. Esta fase do estudo foi desenvolvida em sete sessões, duas em cada uma das três primeiras semanas e uma na quarta semana. Na primeira sessão foram trabalhados problemas para explorar a noção de partilha equitativa. Incluiu um momento de ensino sobre representação simbólica de fracções e sobre o significado do numerador e do denominador, na interpretação quociente. Na sessão 2, foram formalmente introduzidas as representações simbólica e verbal de fracções na interpretação quociente. Nas cinco sessões seguintes continuaram a ser trabalhados problemas de representação, envolvendo a representação verbal, simbólica e pictórica, mas foram também introduzidos problemas de comparação, ordenação e equivalência de fracções na interpretação quociente, conforme se procura ilustrar na figura 3.2.

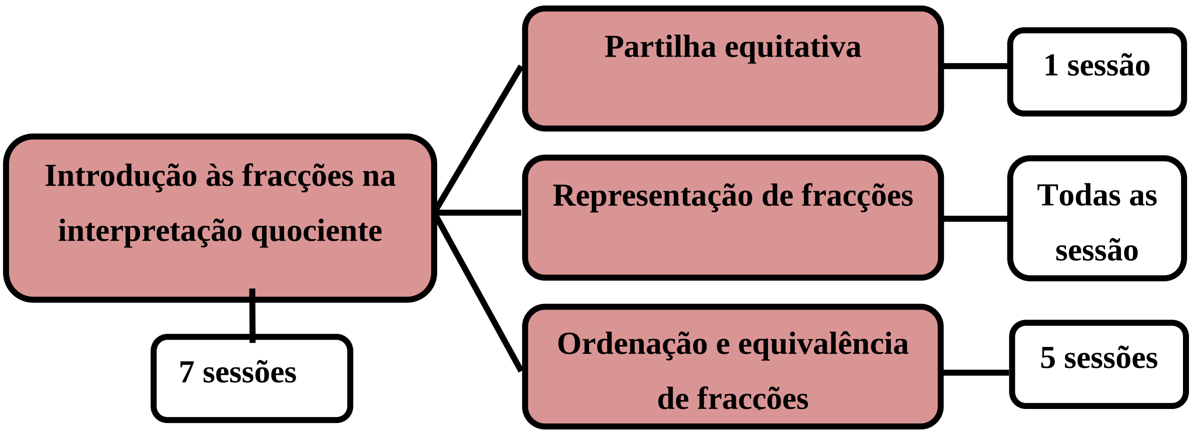


Figura 3.2 - Esquema Geral da Fase 1

A) A sessão de partilha equitativa

A sessão de partilha equitativa teve como propósito discutir a noção de divisão em partes iguais e de criar a necessidade de conhecer outros números além dos inteiros para representar quocientes menores do que 1.

Os alunos resolveram problemas de partilha equitativa que resultavam em quocientes inteiros cada vez menores, até que surgiram problemas em que o quociente era menor do que a unidade. Assim, foram levantadas questões sobre a forma de representar essas quantidades para que fosse reconhecida a necessidade de conhecer outros números além dos naturais.

B) A representação de fracções

Após a discussão e a apresentação de sugestões pelos alunos sobre a forma de representar quantidades inferiores a 1, fez-se uma abordagem à representação simbólica formal de fracções e à sua representação verbal. Estas representações foram retomadas, na segunda sessão, e continuadas nas sessões seguintes.

C) As sessões de comparação de quantidades representadas por fracções

O trabalho de comparação fez-se através da resolução de problemas em que se pretendia que fossem ordenadas quantidades representadas por fracções na interpretação quociente e identificadas, através da comparação, fracções que representassem a mesma quantidade a – equivalência de fracções.

3.2.2. *Design* da Fase 2

A Fase 2 decorreu nas duas últimas semanas de Abril. Desenvolveu-se ao longo de quatro sessões, duas por semana. A primeira das sessões foi dedicada à resolução de problemas na interpretação quociente e as outras três à exploração de problemas na interpretação parte-todo, como ilustra a figura 3.3.

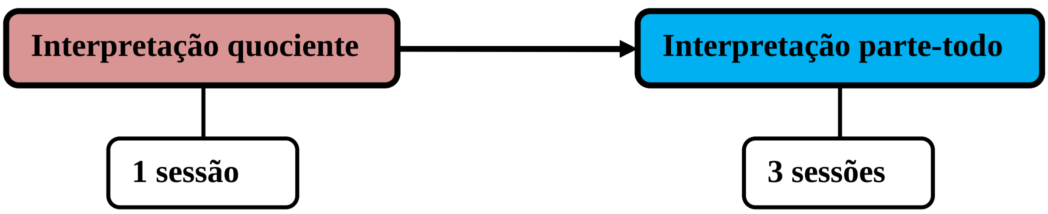


Figura 3.3 - Esquema geral da Fase 2

Tendo em consideração que o intervalo entre as duas fases foi de três semanas, fez-se uma primeira sessão com resolução de problemas na interpretação quociente, com o propósito de verificar se ainda estavam presentes os conceitos e noções trabalhados na Fase, de modo a poderem ser transferidos para a resolução de problemas na interpretação parte-todo. Prosseguiu-se com três sessões de resolução de problemas de interpretação parte-todo, sendo transversal a todas as sessões, a representação de fracções. Na segunda sessão, trabalhou-se a representação simbólica formal e a representação pictórica. Na terceira sessão, explorou-se a representação de quantidades fraccionárias e a identificação do significado dos valores envolvidos nas fracções na interpretação parte-todo, tendo-se ainda abordado a comparação de fracções. Na quarta sessão resolveram-se problemas de representação e construção do todo, dada a fracção na interpretação parte todo. O esquema apresentado na figura 3.4 dá uma ideia geral de como foi organizado o trabalho na interpretação parte-todo.

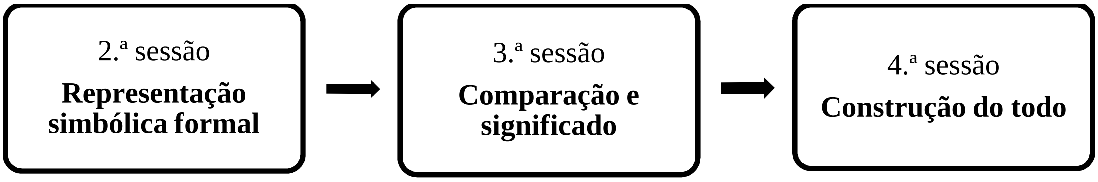


Figura 3.4 - Esquema geral das sessões dedicadas à interpretação parte-todo.

A) A Representação simbólica

A representação simbólica em situação parte-todo foi desenvolvida com o propósito de compreender como eram transferidos os conhecimentos desenvolvidos no trabalho com fracções na situação quociente. Pretendia-se ainda perceber que significado era atribuído ao denominador e ao numerador, a partir dos enunciados apresentados.

B) O todo e as partes na interpretação parte-todo

Esta sessão teve como propósito a representação pictórica de fracções, dado o todo e a fracção; a representação simbólica formal dados a representação pictórica do todo e da parte; a identificação do total de partes do todo; e a atribuição de significado aos denominador e numerador na interpretação parte-todo.

C) Construção do todo

A construção do todo dada a fracção teve o propósito de se procurar compreender que processos usavam os alunos para construir o todo a partir das partes e que necessidade tinham de usar o material manipulativo.

3.3. Participantes

O grupo de participantes do estudo foi seleccionado usando um critério de escolha intencional em que todos os alunos deviam estar a iniciar o 2.º ano de escolaridade. Assim, optou-se por um grupo que constitui um retrato aproximado da classe média portuguesa, que habita na periferia de uma pequena cidade e que apresenta características urbanas, mas que ainda mantém contacto frequente com o meio rural.

A partir de contactos directos estabelecidos apenas por via de círculos de relações profissionais da investigadora, identificou-se uma turma com 10 alunos do 2.º ano de escolaridade, de uma escola pública do distrito de Braga. Todos os participantes têm mais de 7 anos de idade e menos de 8. O seu percurso escolar era comum pois, tinham frequência do ensino pré-escolar no mesmo estabelecimento, com a mesma educadora, foram alunos da mesma professora no 1.º ano de escolaridade e não tinha trabalhado a divisão nem iniciado o estudo das fracções em qualquer contexto formal. As crianças que participaram no estudo são oriundos de um grupo sociocultural baixo e o seu ambiente de convívio habitual é formado essencialmente por pessoas com a baixa escolaridade (6.º ano ou menos). Estes alunos não têm qualquer tipo de apoio pedagógico fora da escola.

Todos os alunos da turma realizaram o total das tarefas propostas neste estudo, mas foram seleccionados apenas oito indivíduos, representativos dos diferentes níveis de desempenho na área da matemática, para que o estudo pudesse abranger a diversidade natural da sala de aula. Os dois alunos que não foram considerados na análise, apresentam dificuldades de aprendizagem identificadas pelos serviços especializados e não se enquadrarem no perfil do estudo.

O grupo dos oito alunos sobre os quais incidiu o estudo apresenta uma certa heterogenia na medida em que é composto por três alunos que apresentam um bom nível de desempenho na área de Matemática; por três alunos que apresentam um nível de desempenho razoável nesta área do saber e, ainda dois alunos que têm um desempenho fraco nesta disciplina. Com esta organização pretende-se descrever como é que alunos com características diferentes constroem o conceito de fracção a partir da interpretação quociente e como transferem este conceito para a interpretação parte-todo.

Para salvaguardar a privacidade dos alunos participantes neste estudo foi-lhes atribuído um nome fictício que será usado em transcrições de diálogos e na descrição dos dados. A selecção deste grupo de alunos no estudo foi autorizada pela direcção do agrupamento de escolas depois de consultados os encarregados de educação que autorizaram a participação dos seus educandos neste estudo.

3.4. As Tarefas

3.4.1.Tarefas exploradas na Fase 1 do estudo – a interpretação quociente

Na fase 1 do estudo foram apresentadas 34 tarefas na interpretação quociente. Neste conjunto estavam incluídos problemas de partilha equitativa, de representação de fracções e de comparação de quantidades representadas por fracções. O guião com todas as actividades implementadas pode ser consultado em Anexos 1 (pp. 185 - 210)

A fase1 do estudo iniciou-se com a exploração de fracções unitárias progredindo para a exploração de fracções não unitárias em todos os tipos de tarefas. A tabela 3.1 apresenta as fracções envolvidas nesta fase do estudo. Procurou-se diversificar as fracções envolvidas tanto nas tarefas de representação como nas de comparação.

TIPO DE TAREFA	FRACÇÕES ENVOLVIDAS
Representação	$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{9}$
Comparação Ordenação	$\frac{1}{2}/\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}/\frac{2}{4}$; $\frac{1}{2}/\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}/\frac{2}{8}$; $\frac{1}{2}/\frac{1}{4}/\frac{1}{3}/\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}/\frac{1}{3}/\frac{1}{4}/\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}/\frac{2}{4}$; $\frac{3}{5}/$ 3 1 , 3
Equivalência	$\frac{1}{2}/\frac{2}{6}$, $\frac{1}{3}/\frac{2}{6}$, $\frac{1}{2}/\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}/\frac{2}{8}$, $\frac{2}{4}/\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}/\frac{3}{9}/\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}/\frac{4}{8}/\frac{1}{2}$,

Tabela 3.1 - Tabela ilustrativa das fracções utilizadas na fase 1 do estudo.

A) Tarefas de representação

As tarefas de partilha equitativa (Anexo 1 - A, pp. 185-186) tinham como propósito abordar e explorar a noção de divisão de quantidades e de partilha equitativa envolvendo quocientes inteiros que os sujeitos já sabiam representar através de um número natural. A figura 3.5 constitui um exemplo de uma tarefa apresentada com este propósito, na aula.

idade.

Figura 3.5 - Exemplo de um problema para explorar a noção de partilha equitativa.

As tarefas envolvendo representação (Anexo1-B, pp. 189 - 193), tinham como propósito a representação do quociente através de uma fracção e a discussão das representações simbólica e verbal. Procurava-se assim explorar a aplicação directa de escrita da fracção (ver figura 3.6), clarificando junto dos alunos qual o significado das magnitudes envolvidas na escrita da fracção. Outros problemas envolviam a representação pictórica de uma fracção num contexto de interpretação quociente, de modo a que se descobrissem os itens a repartir e os recipientes (ver figura 3.7).

Três amigas vão repartir um chocolate entre elas comendo todas, igual quantidade.

Escreve a fracção de chocolate que vai comer cada uma.

Cada menina vai comer

Como será que se lê esta fracção**?**

Figura 3.6 - Exemplo de um problema se representação simbólica e verbal de fracções.

Na festa de anos da Inês, cada menino comeu $\frac{1}{7}$ do bolo. Quantos bolos havia na festa?

Quantos meninos comeram bolo?

Desenha a mesa com os bolos que comeram e, à volta, os meninos que comeram bolo.

Figura 3.7 - Exemplo de problema de representação pictórica.

B) Tarefas de comparação

As tarefas de comparação de quantidades tinham como propósito o reconhecimento de fracções que representassem quantidades diferentes (figura 3.8) explorando a ordenação, mas também a equivalência de fracções (figura 3.9).

Quem come mais piza, cada menino, cada menina ou é igual? Porquê? (Explica a tua resposta.)

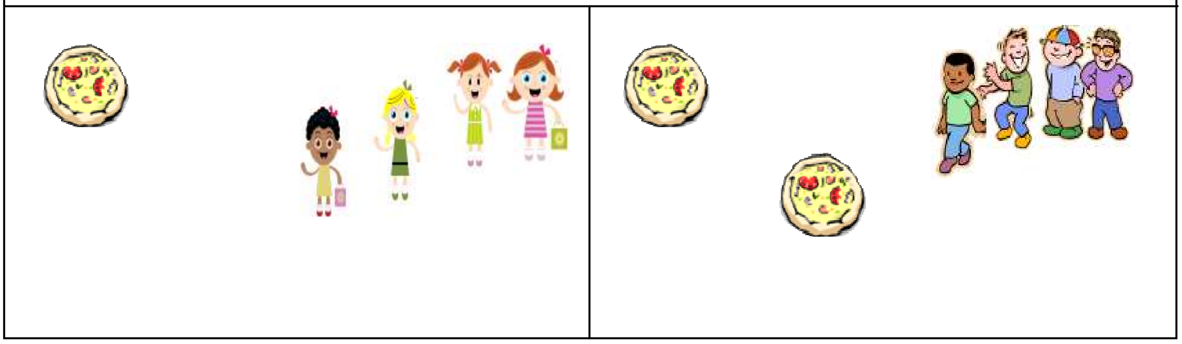
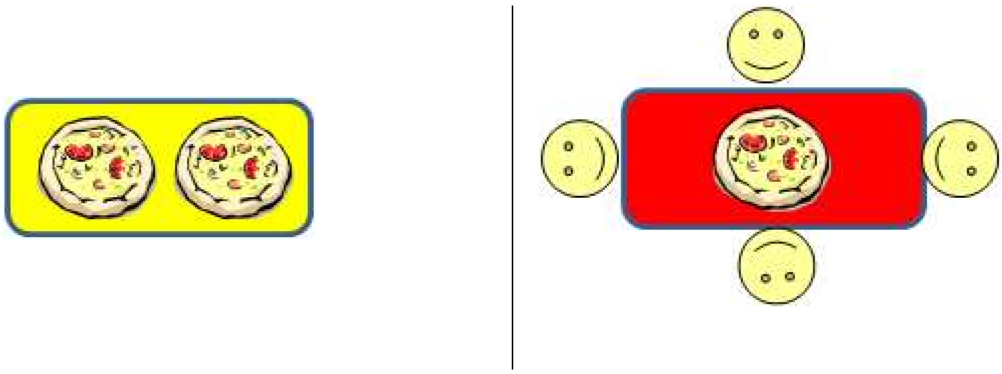


Figura 3.8 - Exemplo de problema de comparação de fracções.

Os meninos da mesa vermelha e os da mesa amarela comeram a mesma quantidade de piza.

Desenha os meninos que estavam na mesa amarela.



Quem come mais, cada menino da mesa amarela, cada menino da mesa vermelha ou é igual? Porquê? Explica como a tua resposta.

Figura 3.9 - Exemplo de problema de equivalência.

Foram ainda explorados problemas em que se pretendia observar os processos de comparação dadas apenas as fracções. A figura 3.10 é um exemplo desse tipo de tarefa.

Coloca o sinal adequado entre as fracções (>, <, =).
Explica a tua resposta. $\qquad \frac{1}{3}$ _ $\frac{2}{6}$ _ $\frac{3}{9}$

Figura 3.10 - Exemplo de problema para comparar e identificar fracções equivalentes.

3.4.2.Tarefas exploradas na fase 2 do estudo – a interpretação parte-todo

As tarefas apresentadas na fase 2 do estudo foram planeadas procurando seguir-se uma sequência que evoluísse da representação simbólica formal de fracções em relação a um todo dado, passando pela identificação do significado dos denominadores e numeradores, e pela comparação das fracções, terminando com a construção do todo dada uma parte.

A) As fracções envolvidas nas tarefas da fase 2 do estudo.

A fase 2 do estudo iniciou-se com a exploração de fracções unitárias, passando-se posteriormente para a exploração de fracções não unitárias. Procurou-se diversificar as fracções incluídas nas várias tarefas a explorar, como se mostra na tabela 3.2.

TIPO DE TAREFA	FRACÇÕES ENVOLVIDAS
Representação	$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{6}; \frac{2}{4}; \frac{4}{6}; \frac{2}{6}; \frac{4}{8}$
Comparação	$\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}$
Identificar o significado	$\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{2}{6}; \frac{4}{6}$
Construção do todo	$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{2}{4},$

Tabela 3.2 - Tabela ilustrativa das fracções utilizadas na fase 2 do estudo.

B) As tarefas de representação

As tarefas de representação tinham como propósito verificar se os alunos transferiam e adequavam os conceitos desenvolvidos na fase 1, para problemas na interpretação parte-todo e se conseguiam descobrir os significados do numerador e do denominador nesta nova interpretação. O tipo de tarefa de representação variou entre tarefas de representação simbólica formal (ver figura 3.11), pictórica e simbólica (ver figura 3.12), identificação do total de partes e das partes tomadas (ver figura 3.13).

A Rita cortou o seu chocolate em duas partes iguais e comeu uma das partes.

Quanto comeu a Rita?

Figura 3.11 - Exemplo de tarefa de representação simbólica apresentada na interpretação parte-todo.

A Maria partiu o seu chocolate em cinco partes iguais. Comeu duas partes.

Pinta a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

A Maria comeu ____ do chocolate.

Figura 3.12 - Exemplo de tarefa de representação pictórica e simbólica na interpretação parte-todo.

A Cátia comeu $\frac{1}{3}$ de uma piza.

Em quantas partes iguais teve de partir a piza? ______________________________

Explica a tua resposta. ____

Figura 3.13 - Exemplo de tarefa de identificação do total de partes e das partes tomadas.

Ainda no âmbito da representação de fracções foram propostas tarefas de identificação do significado do denominador e do numerador, na interpretação parte-todo. Este tipo de tarefa tinha como propósito verificar se os alunos compreendiam a mudança de significado da fracção quando se mudava para a interpretação parte-todo. A figura 3.14 apresenta um exemplo de uma tarefa apresentada com este propósito.

O João tinha um chocolate e partiu-o em cinco partes iguais para dar duas dessas partes ao irmão.

Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que ele deu ao irmão.

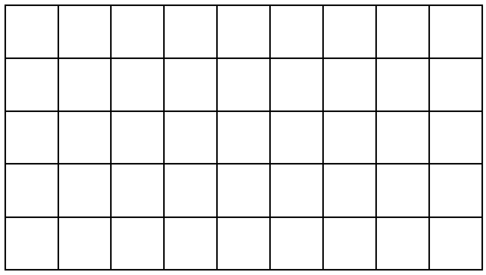
Deu ao irmão ____ do seu chocolate.

Explica porque escreveste essa fracção.

Figura 3.14 - Tarefa de atribuição de significado ao numerador e ao denominador.

As tarefas de representação de fracções na interpretação parte-todo envolveram também a construção do todo a partir da fracção. A construção do todo a partir da fracção foi explorada através de um jogo com material manipulável. Tinha como propósito perceber quais as concepções de todo que os alunos possuíam de uma fracção dada, na interpretação parte-todo. A figura 3.15 apresenta um exemplo de uma tarefa em que se pedia o registo escrito de uma construção em que ½ da figura fosse vermelha.

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-as no quadriculado.



$\frac{1}{2}$ da figura é vermelha.

Figura 3.15 - Exemplo de tarefa de construção do todo, dada a fracção.

C) As tarefas de comparação na interpretação parte-todo

Neste tipo de tarefas solicitava-se aos alunos que comparassem fracções, seleccionando a que representava a maior/menor parte, justificando a sua opção. Nestas tarefas o principal propósito era analisar os argumentos que justificavam a escolha da fracção efectuada. A figura 3.16 ilustra um exemplo de uma tarefa apresentada aos alunos com este propósito.

Rodeia a fracção que representa a parte maior do rectângulo.

Explica a tua escolha.

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4}$

Figura 3.16 - Exemplo de tarefa de comparação de fracções na interpretação parte-todo.

3.5. Procedimentos

O professor/investigador elaborou um guião de tarefas planificadas para as duas Fases do estudo, tendo em conta que as tarefas dedicadas à interpretação quociente seriam em maior número por ser nesta interpretação que os alunos iriam tomar contacto, pela primeira vez, com o conceito de fracção.

Foram apresentadas tarefas em sete sessões dedicadas à interpretação quociente, que constituiu a fase 1 do estudo. Procurou-se seguir uma sequência de conteúdos que levasse os alunos a descobrir, progressivamente, a necessidade de conhecerem outros números de lhes atribuir significado, de usar diferentes formas de os representar, de comparar e de descobrir fracções equivalentes.

A parte do guião dedicada à situação parte-todo, além de incluir menos tarefas, tinha como principal propósito verificar se o processo de transição para esta interpretação das fracções constituiria algum obstáculo para os alunos. O guião era constituído por folhas com tarefas que foram sendo entregues a cada aluno em diferentes momentos das sessões (Anexo 2 - A, pp. 213 - 232). Cada folha do guião continha uma ou várias questões com espaço suficiente para explicar por escrito e/ou com desenhos os raciocínios e argumentos justificativos da resposta dada. Após a entrega de cada folha, o enunciado da tarefa foi apresentado no quadro através de projecção em Power Point (PPT), de modo a que todos pudessem seguir a leitura feita por um dos colegas. Foi dado tempo para que os alunos colocassem questões e dúvidas sobre o enunciado, para assegurar que todos entendiam o que se pretendia. Os alunos respondiam individualmente às questões, apresentando por escrito, não só as respostas, mas também os argumentos que as justificavam. Este processo foi muito natural e não exigiu qualquer adaptação por parte dos alunos, uma vez que esta turma tem como prática frequente, nas aulas de Matemática, justificar e expor por escrito os raciocínios e processos envolvidos na resolução de problemas.

Após a resolução individual de cada tarefa e depois de recolhida a folha da tarefa, seguia-se a apresentação de algumas propostas de resolução dos alunos, para o grupo turma, de forma a proporcionar momentos de discussão das respostas e debate sobre os argumentos usados. Em todas as tarefas foi seguida a sequência descrita e que se ilustra na figura 3.17.

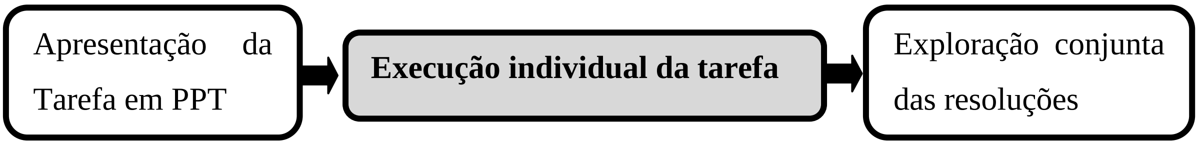


Figura 3.17- Esquema da sequência seguida na resolução de cada tarefa.

O momento de partilha das resoluções, que se fazia após cada tarefa, proporcionou oportunidade para que os alunos pusessem em causa as suas resoluções e identificassem as falhas que tinham cometido nos seus raciocínios. Desenvolveu-se uma importante interacção colectiva, uma vez que a discussão se estendia a todo o grupo que, por vezes, se concentrava junto ao quadro, para debater e comparar os processos e raciocínios. A professora/investigadora também interagia com os alunos nestes momentos de discussão colocando algumas questões orientadoras do raciocínio. Assumiu um papel de destaque na investigação envolvendo-se na aplicação das tarefas e na colocação de questões orientadoras das discussões. Procedeu como um elemento externo na execução das tarefas, recolha, interpretação e descrição dos dados, valorizando sempre a perspectiva, os processos e os argumentos dos alunos. Perante respostas erradas, colocava questões orientadoras de raciocínio que conduzissem o aluno à autocorrecção.

3.6. Recolha de dados

A recolha de dados foi feita em todos os momentos de investigação, pelo investigador que neste estudo foi a professora titular da turma. Os instrumentos usados na recolha de dados foram a gravação áudio digital e vídeo da execução das tarefas e das discussões das resoluções; os registos escritos dos alunos e as notas de campo da investigadora. A diversidade de instrumentos de recolha de dados permitiu reunir diferentes fontes de informação, possibilitando a triangulação dos dados como forma de validar a informação recolhida.

3.7. Análise de dados

Tendo em conta o carácter descritivo desta investigação, a análise de dados tem como fundamento, não só a observação da correcção das respostas dos alunos, mas principalmente a identificação dos processos e argumentos apresentados na resolução das tarefas. Procura-se caracterizar os processos e argumentos dos alunos nas diferentes tarefas na interpretação quociente e perceber que conhecimentos são transferidos da resolução de tarefas na interpretação quociente para a resolução de tarefas na interpretação parte-todo.

CAPITULO IV

ANÁLISE DE DADOS

A descrição de resultados está organizada em duas partes que correspondem às duas fases do estudo. A primeira parte diz respeito aos dados recolhidos na fase 1, em que foi introduzido o conceito de fracção utilizando a interpretação quociente, e a segunda parte analisa os dados recolhidos na fase 2 que corresponde ao trabalho com fracções na interpretação parte-todo.

Na análise dos resultados da fase 1 (ponto 4.1.) têm-se em consideração os procedimentos e os argumentos dos alunos relativamente à partilha equitativa (ponto 4.1.1.) à representação de quocientes fraccionários (ponto 4.1.2.), à representação pictórica, ordenação e equivalência de fracções (ponto 4.1.3.).

Segue-se a análise de resultados da fase 2 (4.2) do estudo que se inicia com uma breve observação sobre a interpretação quociente (4.2.1). São analisados os procedimentos dos alunos relativamente à representação, significado e comparação de fracções na interpretação parte-todo (4.2.2), à aplicação de fracções nesta interpretação (4.2.3 e à exploração da construção do todo (4.2.4). O capítulo termina com a discussão dos resultados (4.3) respectivamente na fase 1 que aborda a interpretação quociente (4.3.1) e na fase 2 que aborda a interpretação parte-todo(4.3.2).

Nesta análise, sempre que forem reproduzidos diálogos passados nas sessões, o professor investigador será identificado pelas letras IP e as intervenções de alunos em simultâneo serão referidas como alunos. São utilizados parênteses rectos sempre que se julgar necessário apresentar ou acrescentar uma explicação relevante para a compreensão de situações descritas.

4.1. Fase 1

4.1.1. Sobre a partilha equitativa

Sessão 1

A 1.ª sessão desta fase teve como objectivo principal colocar aos alunos situações de partilha equitativa para introduzir, na sessão seguinte, a noção de fracção como um número que representa um quociente. Nesta sessão, a intervenção do professor foi mínima, apenas colocando algumas questões ocasionais. Foram propostas quatro tarefas de partilha equitativa (Anexos 1 - A, pp. 185 - 186)

Nas quatro tarefas da sessão 1 pretendia-se observar a forma como os alunos compreendiam a partilha equitativa. Assim, mantendo o mesmo número de recipientes (dois) foi diminuindo o número de itens a repartir de quatro até um. Os alunos deviam explicar como seria feita a partilha e quanto receberia cada um dos recipientes. Na resolução destas tarefas, todos os alunos fizeram a representação pictórica da divisão, fazendo a correspondência entre os itens a repartir e os recipientes. Esta estratégia surgiu por iniciativa dos alunos, não tendo ocorrido qualquer intervenção do professor.

A tarefa 1 envolvia a partilha de quatro bolos por duas amigas. Os alunos fizeram a partilha de forma correcta, apresentando esquemas de partilha variados. As figuras 4.1 e 4.2 apresentam alguns destes exemplos.

Nesta tarefa, seis dos 8 alunos, embora não exprimissem por escrito a noção de metade, apresentam esquemas de distribuição onde está implícita uma certa antecipação do resultado, pois separam exactamente dois bolos para cada menina, sem manifestarem hesitações (ver figura 4.1). Dois dos 8 alunos dão respostas onde está explícita a noção de metade associada à divisão por 2 como mostra a figura 4.2. Nesta tarefa, nenhum dos alunos recorreu ao material concretizador para fazer a partilha.

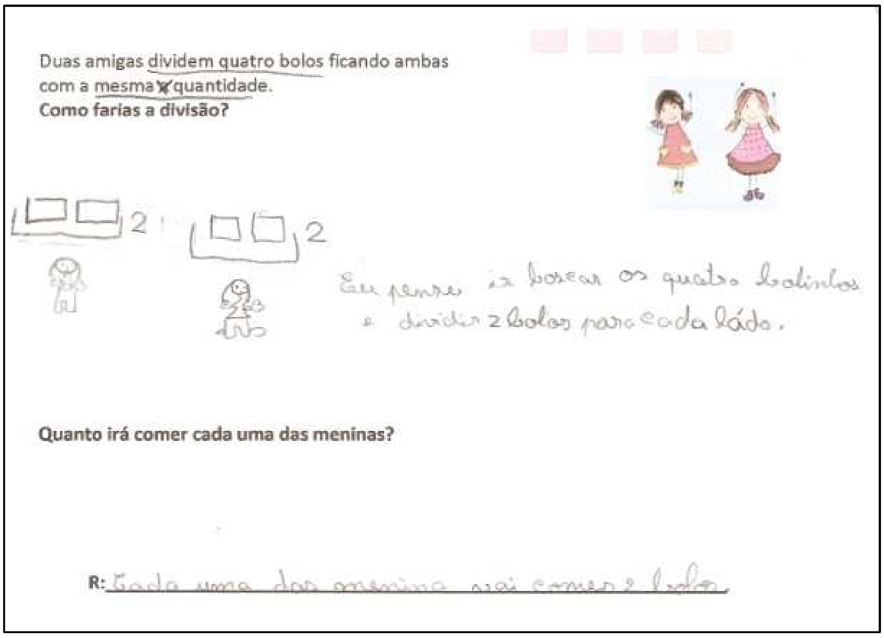


Figura 4.1 - Resolução apresentada pela Bela para a tarefa 1.

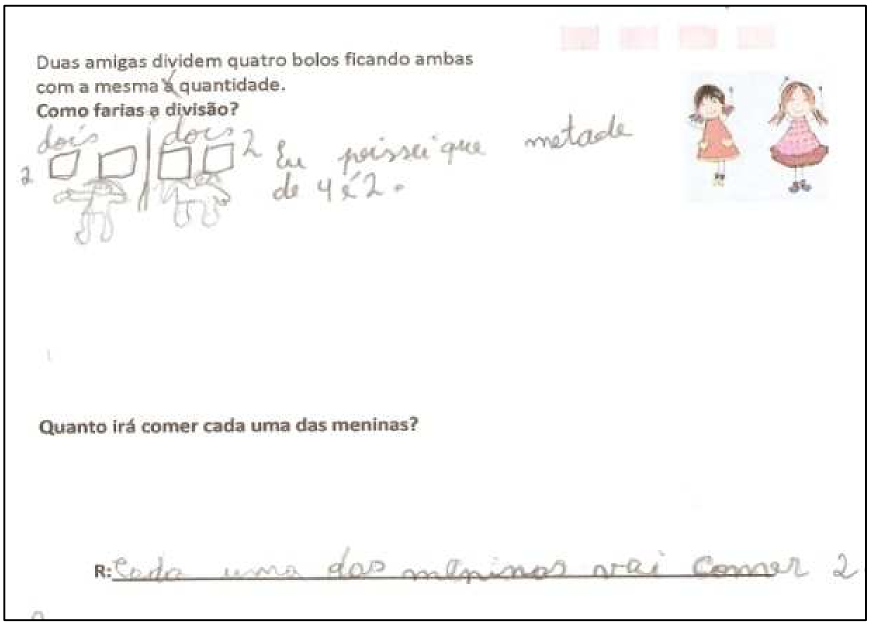


Figura 4.2 - Resolução apresentada pelo Rui para a tarefa 1.

Na tarefa 2, que envolvia a partilha de 3 itens, os procedimentos foram mais variados. Os alunos usaram os materiais disponíveis (rectângulos de papel para simular chocolates) e fizeram várias tentativas para concretizar a distribuição. Embora tivessem uma tesoura para recortar os rectângulos que representavam os bolos, os alunos optaram por retirar um bolo para que a divisão desse um quociente inteiro. Apenas dois alunos continuaram com os três rectângulos, mas não tomavam a iniciativa de cortar um dos rectângulos. Foi necessário relembrar que não podia sobrar nenhum chocolate para que tomassem a iniciativa de cortar. Depois disso, todos os alunos recortaram e representaram no papel a distribuição por iniciativa própria. As figuras 4.3 A e B exemplificam resoluções dos alunos após esta intervenção.

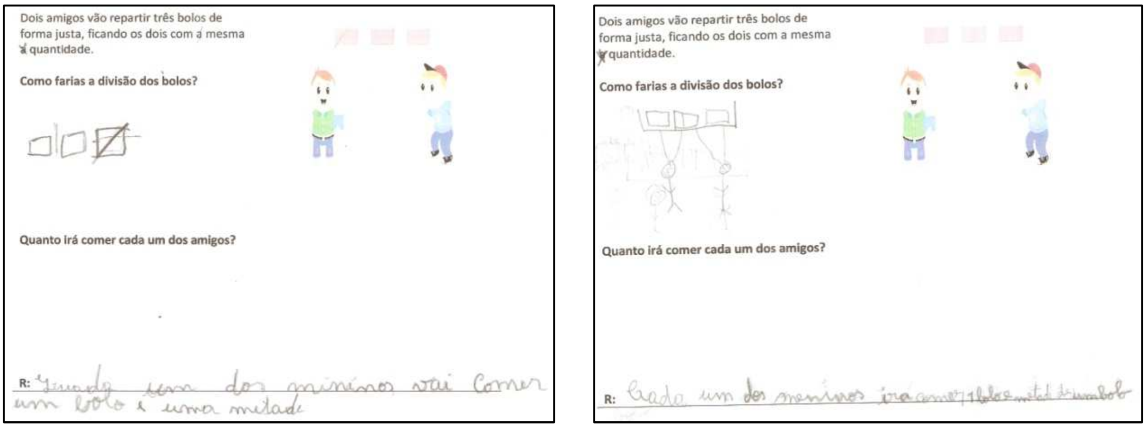


Figura 4.3 A e B - Resolução correcta apresentada pelo João e pelo Rui, para a tarefa2.

Nesta tarefa, 6 alunos apresentaram representações diferentes da partilha de 3 por 2, cortando apenas um chocolate e responderam correctamente (ver figura 4.3 A e B).

Dois alunos cortaram os três chocolates em metades, distribuindo as seis metades. Embora tenham feito uma representação correcta dos chocolates, responderam de forma incorrecta à questão considerando cada fracção, que neste caso era metade, como sendo um bolo (ver figuras 4.4 e 4.5).

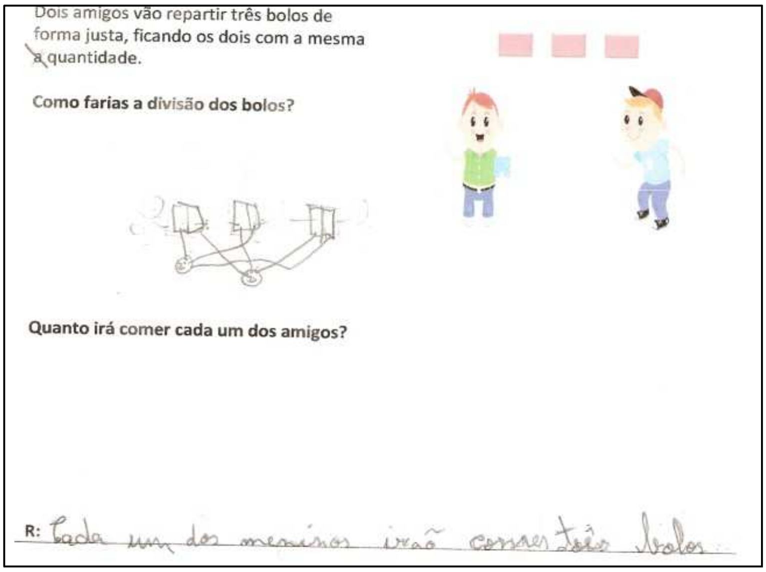


Figura 4.4 - Resposta incorrecta do aluno Mário na tarefa 2.

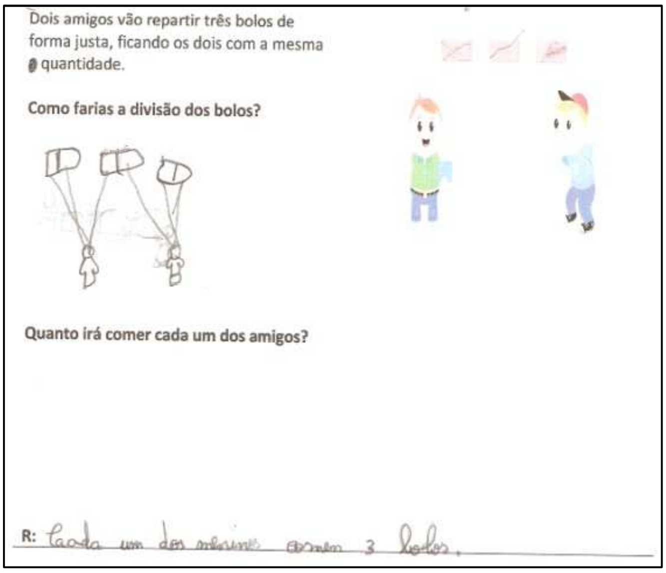


Figura 4.5 - Resposta incorrecta do aluno Gonçalo na tarefa 2.

Esta tarefa suscitou uma discussão interessante entre o professor e a Adélia, que se transcreve a seguir (ver transcrição 4.1).

IP: – Explica como dividiste três chocolates por dois meninos.

Adélia: – Dei um para cada menino…

IP: – Sim…

Adélia: – E sobrava um.

IP: – Sim…

Adélia: – E eu parti um

IP: – Partiste um porquê?

Adélia: – Porque não dava a mesma quantidade quando tinha um …

IP: – E não podias dar esse a um menino?

Adélia: – Podia, mas tinham de ter a mesma quantidade.

IP: – E então não ficavam com a mesma quantidade? ... Se tu desses esse a um dos meninos, não ficavam com a mesma quantidade?

Adélia: – Não…

IP: – Então como é que ficava?

Adélia: – Ficavam "dois com um" e o outro só, ficava com um. [Quer dizer dois chocolates para um menino e um chocolate para um menino]

IP: – Então o que é que tu fizeste?

Adélia – Parti um bolo.

[pega na tesoura e recorta o rectângulo em duas partes iguais]

IP: – Porque é que partiste por este sítio?

Adélia – Porque cada menino tinha de ter uma quantidade… a mesma quantidade.

IP: – Então faz lá. E agora como vais responder à pergunta que diz aí: quanto irá receber cada menino? Como vais responder a essa pergunta?

Adélia: – Cada menino vai comer um e meio bolo…

IP: – Muito bem, um bolo e meio.

Transcrição 4.1 - Diálogo com a Adélia, sobre a divisão de 3 chocolates por 2 crianças.

A tarefa 3 envolvia a divisão de dois chocolates por 2 amigos. Mais uma vez, os alunos optaram por não usar o material concretizador, apesar de estar disponível, e todos responderam correctamente à questão concluindo rapidamente que era um chocolate para cada amigo. A correspondência exacta entre o número de itens a repartir e o número de recipientes foi facilitadora da resolução.

A tarefa 4 foi a primeira em que o número de itens a repartir era inferior ao número de recipientes. Alguns alunos fizeram a representação pictórica da partição e não usaram material concretizador, mas três alunos usaram o material e cortaram o chocolate. Todos usaram a palavra metade para referir o quociente da divisão como evidenciam as respostas apresentadas nas figuras 4.6 e 4.7.

Figura 4.6 - Representação pictórica da partilha de um bolo por dois amigos

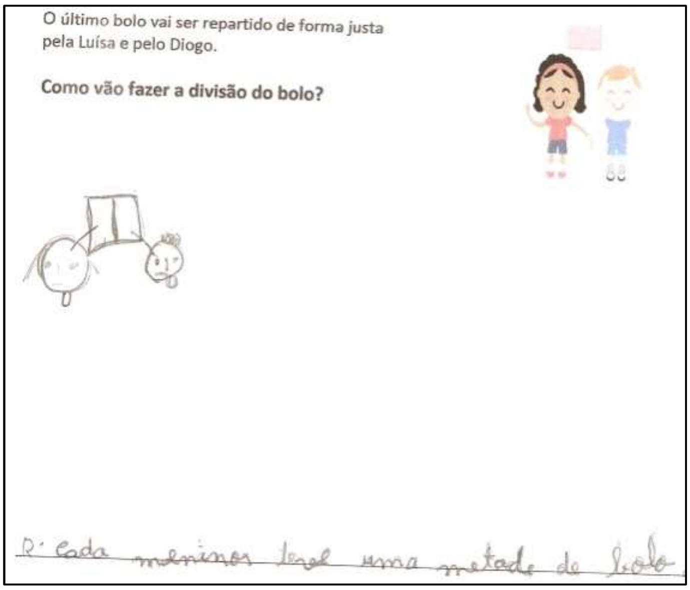


Figura 4.7 - Representação pictórica da partilha de um bolo por dois amigos, efectuada pela Adélia.

Na apresentação das resoluções à turma, gerou-se uma discussão interessante sobre as formas de dividir o rectângulo em duas partes iguais, na medida em que surgiram surpreendentemente, diversas formas de divisão do rectângulo em partes iguais como se pode verificar na transcrição 4.2.

Bela: – Tinha um chocolate e parti-o a meio.

IP: – Partiste-o a meio e depois?...

Bela: – Depois dei a cada menina …

IP: – O quê?

Bela: – A metade do chocolate…

IP: – A metade do chocolate… então cada menina o que é que vai comer?

Bela: – Metade.

IP: – Metade de um chocolate …está dividido o chocolate e ficou metade para cada menina… só há uma maneira de dividir o chocolate?

João: – Não, há duas.

IP: – Há duas?

Alunos: – Não, há três

IP: – Há três? Explica como dividirias o chocolate, Leonel…

Leonel: – Um chocolate e punha assim [faz uma linha na horizontal dividindo o chocolate em duas partes iguais], ficava metade para um…

IP: – E o que é que é assim? Cortavas na…

Leonel: – Na horizontal…

IP: – Cortavas na horizontal, por exemplo…

Leonel: – E dava duas metades para cada uma…

IP: – Duas metades para cada uma?

Leonel: – Sim… uma.

Bela: – Uma metade.

IP: – Uma metade para cada uma …outra maneira de dividir, diz lá Bela.

Bela: – Na horizontal.

IP: – Isso foi o que ele disse…

Bela. – Na vertical…

IP: – Na vertical… e dava o quê?

Bela: – Uma metade para cada uma …

IP: – Ainda haveria outra maneira de cortar?

Leonel: – Sim, sim, cortava-se assim [faz um traço que divide o chocolate na diagonal] na, na …oblíqua.

IP: – Sim, na diagonal.

Leonel: – Na diagonal e dava metade para cada um…

IP: – E esta metade que forma é que tinha?

Bela: – Um triângulo.

IP – E seria maior do que as outras metades…

Alunos: – Não!

Transcrição 4.2 - Discussão sobre a divisão do chocolate em duas partes iguais.

Nesta sessão, em que apenas se trabalhou a partilha equitativa, os trabalhos sugerem que os alunos têm alguns conhecimentos informais sobre metade. Os argumentos apresentados por alguns alunos na tarefa " … reparti metade de quatro.", "eu pensei que metade de 4 é 2" (figura 4.2), demonstram esse conhecimento. Os trabalhos dos alunos sugerem ainda que a forma de representar a partilha tem alguma influência na compreensão da partilha. Na tarefa 2, os alunos que separaram as partes, na representação pictórica da partilha, fazendo a distribuição um a um, a cada recipiente, confundiram metade com um dizendo que cada recipiente comia três bolos (ver figuras 4.4 e 4.5). Os alunos que não separaram as partes na representação, tiveram maior facilidade em compreender que a quantidade que corresponderia a cada recipiente era um bolo e meio (ver figuras 4.3 A e B, p. 64). Estes alunos não usaram o material concretizador o que sugere alguma capacidade de abstracção e o recurso a conhecimentos informais correctos sobre a divisão. Na partição de um bolo por duas crianças todos os alunos usaram a palavra metade para expressar a quantidade que correspondia a cada recipiente o que não aconteceu nas tarefas anteriores. Isto sugere que a noção de metade está muito associada a metade de uma unidade.

4.1.2. Sobre a representação de quocientes fraccionários

Sessão 2

A sessão 2 desta fase teve como objectivo introduzir a representação na forma simbólica e verbal de fracções, na interpretação quociente. Foi iniciada a sessão com uma situação semelhante à última da sessão anterior, em que se pretendia observar as concepções que os alunos possuíam sobre a forma de representar metade. Os alunos quiseram continuar a 'aprender mais números' e foram antecipadas tarefas que eram para a sessão seguinte. Assim, foram resolvidas sete tarefas de representação simbólica e verbal envolvendo as fracções unitárias $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e as fracções não unitárias $\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}$ (Anexos 1- B, pp. 189 - 193). Inicialmente, os alunos tiveram acesso a material manipulável, mas como não o usavam deixou de ser fornecido.

A primeira tarefa propunha a partilha de um chocolate por duas meninas e a representação da quantidade atribuída a cada recipiente por um número. A representação pictórica da divisão foi feita correctamente por todos os alunos que dividiram o chocolate em duas partes iguais e atribuíram uma parte a cada recipiente (ver figura 4.8).

Figura 4.8 - Respostas dadas pelos alunos Selma e João.

Conhecendo apenas os números naturais, a questão "Que número representa esta quantidade?" e à qual não respondeu apenas um aluno, suscitou respostas interessantes. As figuras 4.9 A e B, 4.10 A e B, 4.11 A e B mostram alguns exemplos.

Figuras 4.9 A e B - Respostas dadas pelo João e pelo Leonel.

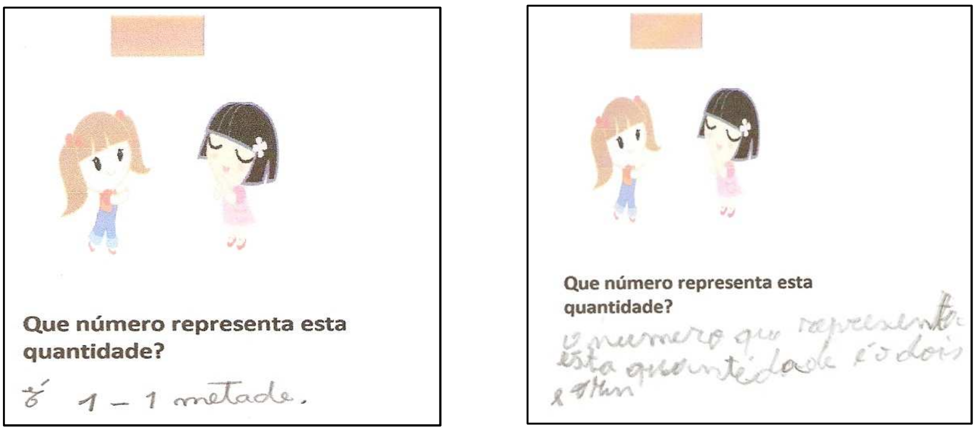


Figura 4.10 A e B - Respostas dadas pela Bela e pelo Rui.

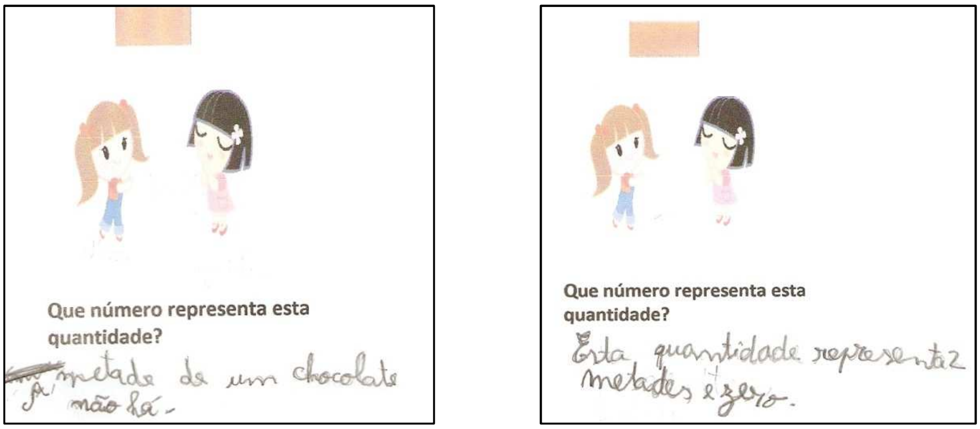


Figura 4.11 A e B - Respostas dadas pelo Gonçalo e pelo Mário.

A análise destas respostas parece sugerir que alguns alunos têm alguma noção de que existem números entre 0 e 1 (ver figuras 4.8, 4.9 A e B), embora não os conheçam. Estas respostas garantem que, para os alunos, não faz qualquer sentido utilizar algum dos números que eles conhecem para representar esta quantidade.

Durante a apresentação das respostas dadas, os alunos foram interrogados no sentido de esclarecerem o seu raciocínio. Assim, questionado sobre o que pretendia dizer com a sua resposta "nós ainda não aprendemos metade de zero e metade de um" (ver figura 4.9 B), o Leonel explicou com muita clareza "nós ainda não aprendemos no meio de zero e de um". Nesta resposta percebe-se que já existe, mesmo que de forma intuitiva, a noção de que existem outros números entre dois inteiros.

Um aluno tentou representar metade através de uma operação fazendo "1-1 metade" (ver figura 4.10 A). Explicou a sua respostas dizendo que "tirava uma metade do bolo", deixando a ideia de que à unidade se retira uma parte a que chama "1 metade". Outro aluno parece querer estabelecer uma relação entre o número de recipientes e o número de itens a repartir quando escreve "o número que representa esta quantidade é o dois e o um" (ver figura 4.10 B). Quando lhe foi pedido para explicar acrescenta "é um chocolate para dois". Outro aluno considera não existir número para representar metade " metade de um chocolate não há" (ver figura 4.11 A) e outro dá uma resposta algo confusa "duas metades e zero chocolates" que explica deixando a ideia de que metade não é um chocolate inteiro (ver figura 4.11 B).

A Selma voltar a ler a sua resposta " Nós ainda não aprendemos números entre 0 e 1". A professora diz que todos estão um pouco certos porque há uns números que ainda não aprenderam e servem para representar quantidades menores que um. Relembrou a situação que estavam a trabalhar (transcrição 4.3).

IP: - Quantos bolos têm para repartir?
Alunos: - Um bolo [a professora escreve no quadro (1bolo)]
IP: - Por quantas crianças se vão repartir esses bolos?
Alunos: - Por duas meninas [a professora escreve no quadro (2 meninas)].
[Seguiu-se um momento em que a professora explica passo a passo como se escreve uma fracção tendo como contexto esta tarefa].

IP: - Primeiro marca-se um traço horizontal que se chama traço de fracção. [Desenha um traço horizontal no quadro.] Em cima do traço coloca-se o número de coisas que há para repartir. Quantas coisas há para repartir aqui?

Alunos: - Uma coisa.

IP: - Que coisa é essa?

Alunos: - Um bolo. [A professora escreve o número 1 no numerador].

IP: - Por baixo do traço horizontal escreve-se o número que representa aqueles por quem se vai repartir. Por quantos se vai repartir um chocolate?

Alunos: - Por duas meninas. [A professora escreve o número 2 no denominador.]

IP: - Então está aqui o número que se lê…

Gonçalo: - doze…

Rui: - Um dois.

Leonel: - Um e meio.

Bela: - Uma metade

IP: - A forma correcta de ler é um meio.

Alunos: - Um meio?! [A leitura do número causou bastante admiração nos alunos.]

[A professora repetiu o significado do numerador e do denominador, assim como a verbalização da fracção, salientando que o número se chamava fracção, e coloca uma questão.]

IP: - Alguém já percebeu o que é uma fracção?

Rui: - É um número.

IP: - O Rui diz que é um número, muito bem.

Leonel: - É por exemplo, se tiver 1 chocolate e 3 meninas é um chocolate e em baixo 3 que é 3 meninas.

IP: - E isso é maior ou menor que um?

Leonel: Mais… não, menor.

[O Leonel volta à leitura da fracção $\frac{1}{2}$ da qual não ficou muito convencido].

Leonel: - Mas, eu nunca ouvi dizer um meio, só ouvi dizer um e meio.

IP: - E achas que é a mesma coisa? Um meio é metade do chocolate e um e meio Rui?

Rui: - Um e meio é um bolo mais meio bolo, é mais.

Transcrição 4.3 - Relato de momento em que foi introduzida a representação simbólica de fracções.

Depois desta explicação partilhada com a turma, foi colocada, oralmente, uma situação em que se mantinha o número de itens (1) e aumentou o número de recipientes para três. Foi pedido aos alunos que sugerissem como se fazia a representação simbólica da quantidade que cada recipiente ia receber. Imediatamente os alunos começaram a repetir as indicações dadas antes pela professora: "escreve-se o traço de fracção, os chocolates em cima e três meninas em baixo". Então foi pedido que fizessem a leitura da fracção. Todos os alunos começaram precipitadamente por dizer que se lia um meio. Contudo, o Leonel afirma com um tom de interrogação que " tem que vir de três" referindo-se ao denominador. Seguem-se várias sugestões de leitura dadas por vários alunos que ouviram a observação do Leonel, das quais se destacam " um trimeio", "um triplo" e "um três". A professora acaba por dizer qual era a leitura correcta das fracções $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Os alunos iniciaram uma série de tarefas de representação em que se pretendia que fizessem a representação simbólica e associassem a representação verbal de algumas fracções unitárias $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e, posteriormente, de algumas fracções não unitárias - $\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}$. Era também pedido que explicassem como tinham chegado à fracção.

A representação simbólica foi mais rapidamente compreendida do que a representação verbal. As figuras 4.12 A e B mostram dois exemplos de representações verbais incorrectas que os alunos fizeram nas duas primeiras tarefas deste tipo.

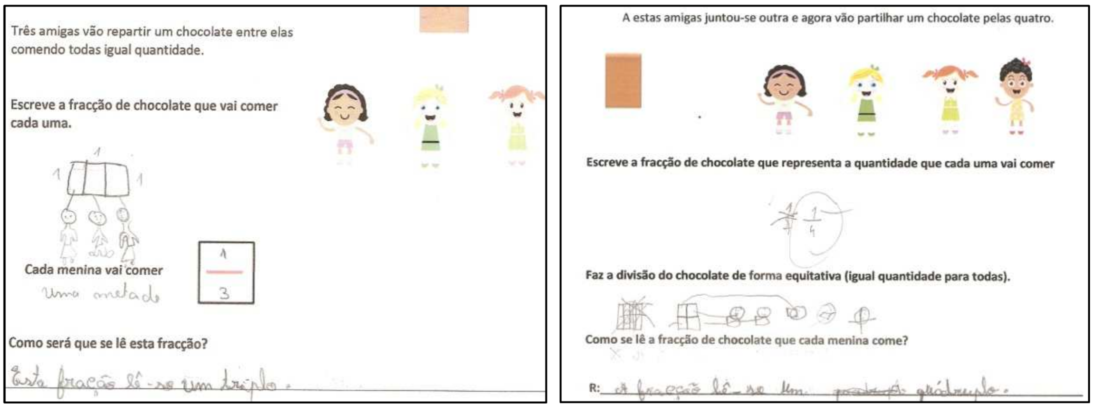


Figura 4.12 A e B - Exemplos de representações verbais incorrectas de $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$.

No início, para o caso de $\frac{1}{3}$, nenhum aluno leu a fracção de forma correcta. Associaram o denominador a palavras que conheciam relacionadas com o algarismo em causa, surgido expressões como “um trimestre”, “um de três” para $\frac{1}{3}$ e “um quádruplo”, “um quartézimo” para $\frac{1}{4}$. As figura 4.12 A e B ilustram bem dois exemplos de representações verbais feitas para respectivamente para as fracções $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ por dois alunos. Na representação verbal da fracção $\frac{1}{5}$, e depois de se ter discutido as respostas dadas para a representação verbal da $\frac{1}{4}$ e de uma aluna ter referido que “o quatro” se lia como nos ordinais, todos os alunos fizeram a leitura correcta, por analogia com esses números.

A representação verbal foi melhorando com o contacto com outras fracções e só foi entendida por todos, quando surgiram as fracções não unitárias. A introdução destas fracções fez com que os alunos percebessem que o número de itens a repartir também pode variar, alterando assim, a designação da fracção.

Segue-se uma tabela que permite observar a evolução dos resultados a nível de representação simbólica e verbal. É possível verificar que, quanto mais tarefas de representação simbólica e verbal eram realizadas, mais alunos as realizavam correctamente. A tabela 4.1 mostra que todos os alunos foram capazes de fazer correctamente a representação simbólica. A representação verbal só foi compreendida depois de discutidas as várias representações erradas das fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ (ver tabela 4.1).

Fracções / Representação	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$
Simbólica	8	8	8	8	8	8	8
Verbal	0	0	3	8	8	8	8

Tabela 4.1 - Número de respostas correctas para representações simbólica e verbal na 2.ª sessão. (N = 8)

Nas tarefas de representação, os alunos começaram por escrever a fracção correspondente ao quociente, mas todos fizeram, também, a representação pictórica da divisão dos itens. As representações variaram na forma de partição dos itens, mas todos estabeleceram uma associação entre a partição e a correspondência. Nas primeiras tarefas que envolviam fracções unitárias, alguns alunos tiveram necessidade de representar a partição dos itens antes de escreverem a fracção, mas outros escreveram a fracção antes de fazerem a divisão. Para a fracção $\frac{1}{3}$, todos os alunos representaram a divisão em partes iguais utilizando um esquema como exemplifica a figura 4.13 A. Com a realização de mais tarefas de representação simbólica, o número de alunos que recorria primeiramente à representação da divisão foi diminuindo. Assim, para a fracção $\frac{1}{4}$, apenas três o fizeram e para a fracção $\frac{1}{5}$, nenhum aluno representou estas divisões antes de fazer a representação simbólica. Isto sugere que os alunos vão melhorando a capacidade de representar fracções na interpretação quociente, sendo capazes de o fazer apenas pelo significado do numerador e do denominador.

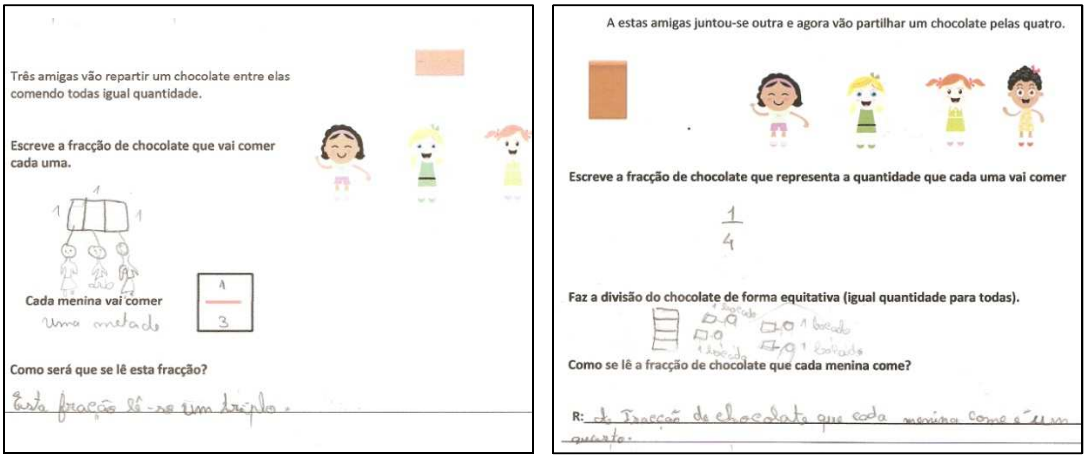


Figura 4.13 A e B - Representação das fracções $^1/_3$ e $^1/_4$ realizadas pela Bela e pela Selma.

Nas tarefas que envolviam fracções não unitárias e como já tinha acontecido com a fracção $\frac{1}{5}$, todos alunos fizeram a representação simbólica antes de levarem a cabo a divisão, o que parece indicar que os alunos são capazes de escrever fracções apenas tendo como referência os significados do numerador e do denominador. A representação da divisão foi realizada apenas quando foi pedida. Relativamente à fracção $\frac{2}{4}$, foram evidentes algumas dificuldades dos alunos tanto no que se refere à representação simbólica (ver figuras 4.14 A e B) como à execução da divisão (ver figuras 4.15A e B).

Essas dificuldades parecem ter sido causadas pela mudança de contexto, em que os itens a repartir passaram a ser de forma circular e os recipientes eram pratos em vez de pessoas. Contudo, os alunos, por iniciativa própria, sem qualquer intervenção da professora, ultrapassaram essas dificuldades e corrigiram os seus procedimentos, o que vem reforçar a importância de apresentar tarefas diversificadas para promover a construção e a compreensão dos conceitos.

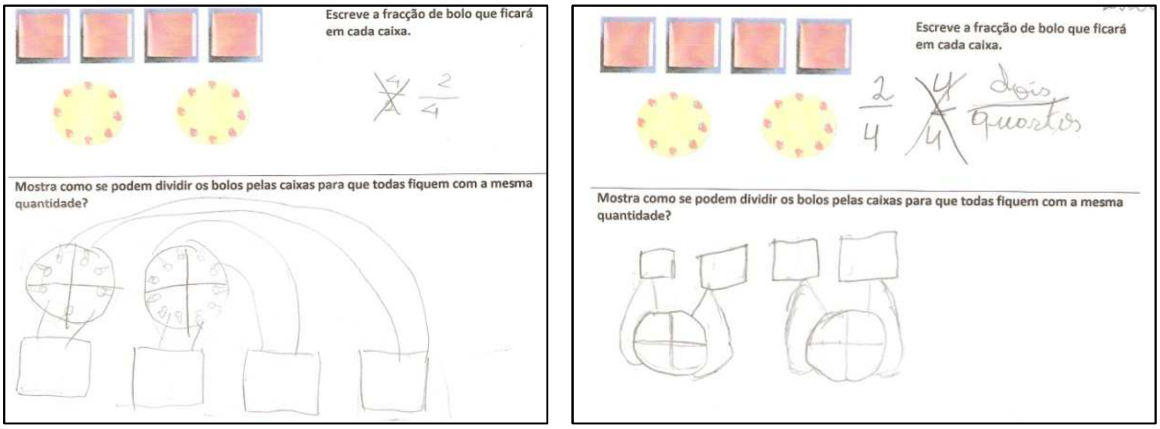


Figura 4.14 A e B - Representação simbólica da fracção $^2/_4$ da Bela e do Rui.

Alguns alunos explicaram o significado dos algarismos envolvidos na fracção (ver figura 4.15 A). Questionado sobre esse facto, o Mário explica que "é preciso, para os outros saberem que em cima são as pizas e em baixo são os pratos" (ver figura 4.15 A). O aluno tentava mostrar que embora não estivesse lá a representação pictórica tinha a certeza de que tinha feito correctamente a representação simbólica da fracção.

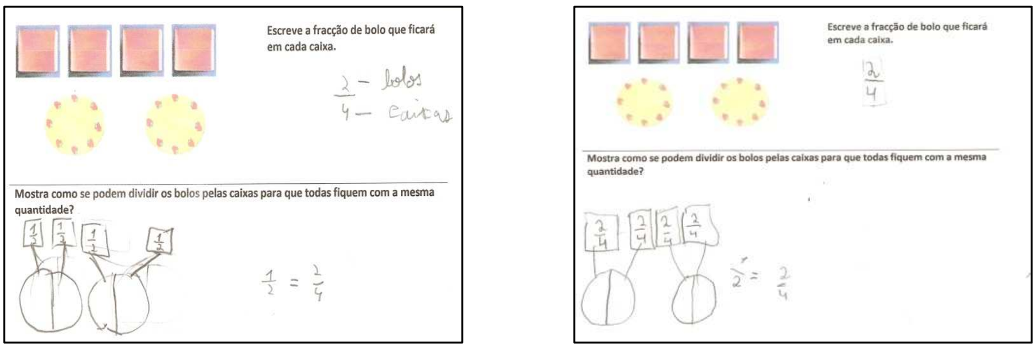


Figura 4.15 A e B - Representação baseada no raciocínio proporcional, efectuada pelo Mário e pelo João.

Na representação pictórica, dois alunos apresentaram uma solução correcta em que dividem cada uma das pizas por dois pratos. Ambos chegam à conclusão de que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (figura 4.15 A e B), embora ainda não se tivessem abordado situações de equivalência de fracções. Estes alunos conseguem fazer a representação simbólica na interpretação quociente e raciocinar proporcionalmente, reconhecendo a equivalência entre as fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$. Numa nova tarefa, os mesmos dois alunos foram capazes de chegar a conclusões correctas perante duas pizas que se apresentavam, no desenho, divididas em partes não congruentes (ver figuras 4.16 A e B).

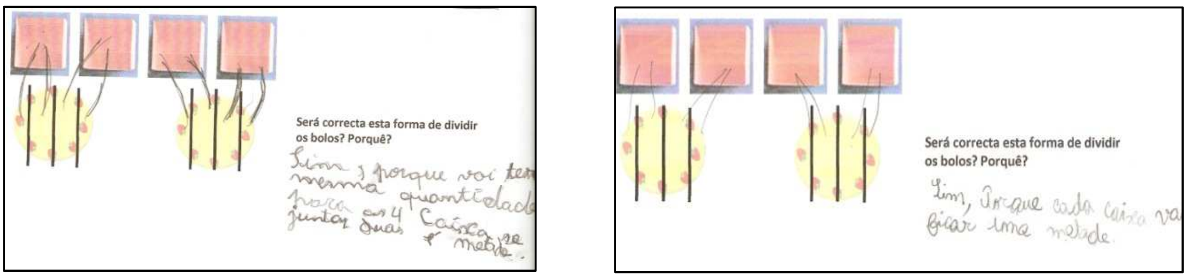


Figura 4.16 A e B- Resoluções do Mário e do João em que identificam uma forma justa de partilhar a piza dividida em partes diferentes.

A forma como representam a correspondência sugere que a referência à noção de metade se sobrepõe à sugestão do desenho que apresenta uma divisão em partes não congruentes (ver figura 4.16 A e B). Os outros seis alunos procederam à distribuição um-a-um e concluíram que a forma de partir a piza estava errada porque os pedaços não eram todos iguais como mostram as figuras 4.17 A e B.

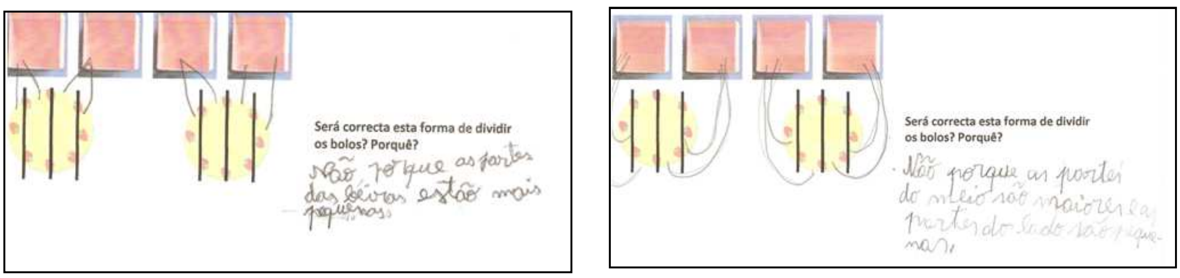


Figura4.17 A e B - Exemplo de argumentos apresentados pelos alunos Rui e Leonel.

Ao contrário do que aconteceu com o Mário e o João (figura 4.16 A e B), estes alunos fizeram a distribuição das partes um-a-um e ficaram condicionados pela forma como o desenho sugeria a divisão. Não foram capazes de estabelecer um raciocínio proporcional ficando condicionados pela forma como a piza estava partida.

Na tarefa que envolvia a fracção $\frac{2}{6}$ e relativamente à representação simbólica e à representação verbal, todos os alunos conseguiram fazê-las sem dificuldades.

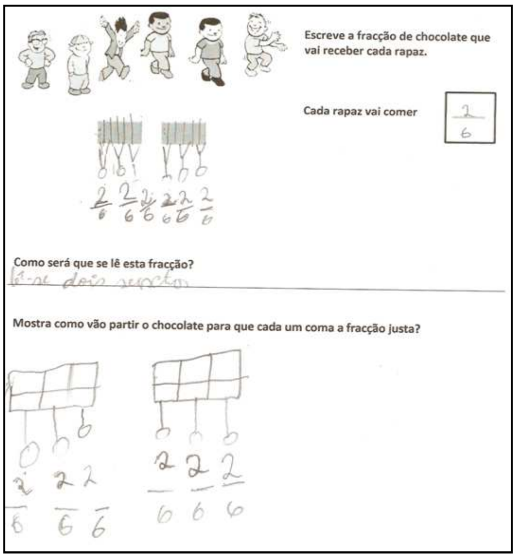


Figura 4.18 - Representação simbólica e verbal seguida de representação pictórica realizada pelo Rui.

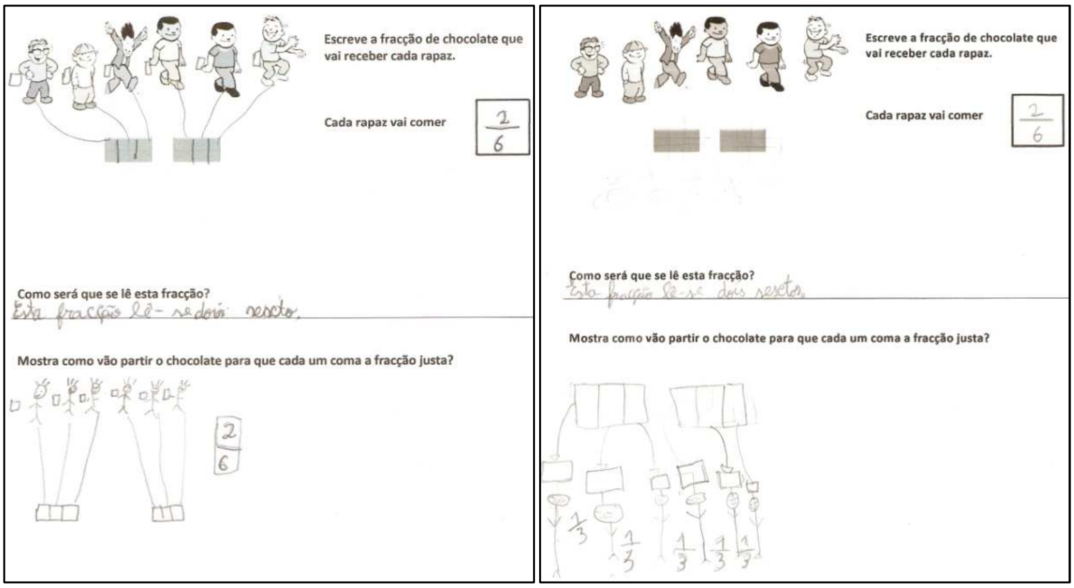


Figura 4.19 A e B - Representação simbólica, verbal e pictórica feita pelo Gonçalo e pelo João.

Na representação da partilha houve algumas variações na apresentação. Apenas um aluno dividiu cada chocolate em seis partes e atribuiu duas a cada recipiente. Isto sugere que a forma de partir o chocolate foi induzida pela fracção previamente escrita, pois o aluno procurou dar duas partes a cada recipiente (ver figura 4.18). Sete alunos dividiram cada chocolate em três partes e fizeram a correspondência um para muitos atribuindo um chocolate para cada três crianças como ilustra a figura 4.19 A. Isto sugere a existência de raciocínio proporcional embora os alunos não consigam ainda identificar a fracção equivalente (ver figura 4.19 B). Sete desses alunos mantiveram a representação simbólica $\frac{2}{6}$ o que sugere que prevaleceu o significado do numerador e do denominador nessa representação como ilustra a figuras 4.19 A. Um dos alunos, que tinha apresentado a representação simbólica $\frac{2}{6}$, ao dividir cada chocolate em 3 partes, fazendo corresponder um chocolate a três recipientes, representou o quociente como $\frac{1}{3}$ (figura 4.19 B). Este procedimento sugere a existência do raciocínio proporcional expresso pela relação um para muitos. Quando os alunos foram apresentar as suas resoluções ao quadro, o João (ver figura 4.19 B) explica o seu raciocínio, como se pode verificar na transcrição 4.4.

IP: – O que quer dizer o dois?

Leonel: – Quer dizer dois bolos…

João: – Dois chocolates.

IP: – E o que quer dizer o seis?

Leonel e Mário: – Seis meninos.

IP: – Muito bem! E não pode querer dizer outra coisa … dois sextos?

Leonel: – Dois sextos…pode querer dizer quanto eles comem

IP: – No desenho, o que quer dizer esses dois sextos?

Leonel: – Quer dizer dois bolos para dois meninos.

Bela: – Quer dizer que são dois chocolates para seis meninos.

[Foi pedido ao Mário, que se encontrava ao lado, para pintasse o que ia comer cada um dos meninos].

IP: – Que número representa essa quantidade?

João – Um meio… (gesticula à procura das palavras certas)

Bela – Uma parte…

João – Um terço

IP: – Porque é que representa um terço?

João – [aponta para o terço pintado de laranja] Porque aqui está uma metade.

[Segue-se uma certa confusão em que alguns alunos contestam a palavra metade].

IP: – Alguém quer ajudar o João… Ele diz que a parte laranja é metade.

Leonel: – É uma parte!

IP: – Sim… e como se chama essa parte?

Bela: – Dois sextos.

João: – Ou um terço!

IP: – Porque é que podes chamar a isso, um terço?

João: – Porque pode ser um chocolate para três meninos.

Transcrição 4.4 - Diálogo e imagem sobre a partilha de dois chocolates por seis meninos.

A professora termina esta discussão clarificando o raciocínio do João "se temos dois chocolates para seis meninos, cada um recebe o mesmo como se tivéssemos um chocolate para três meninos e outro chocolate para três meninos. Portanto, podemos dizer que $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ao contrário do que aconteceu quando o número de recipientes era par, em que apareciam diferentes representações pictóricas da divisão, quando o número de recipientes era impar, os alunos fizeram a representações muito semelhantes. Dividiram cada chocolate num número de partes igual ao número de recipientes atribuindo uma parte de cada chocolate a cada recipiente. Os exemplos que se seguem referem-se a $\frac{2}{7}$ (ver figura 4.20 A e B).

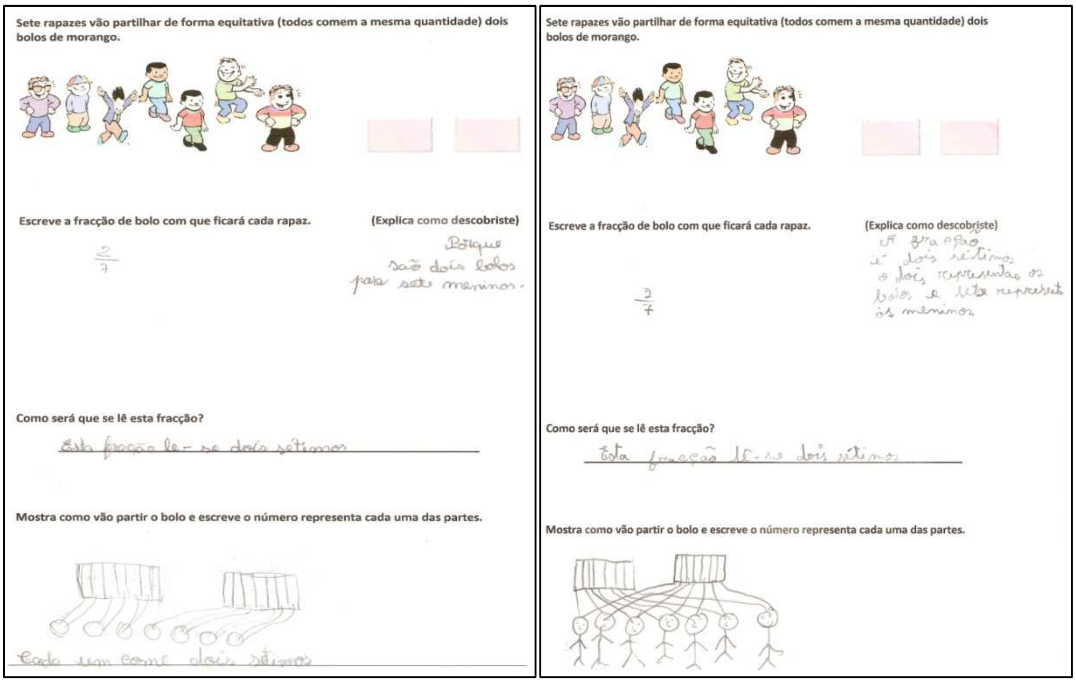


Figura 4.20 A e B - Exemplos de representações da partilha equitativa por um número ímpar de recipientes.

No final da sessão foi sistematizada a representação simbólica e verbal de fracções. O professor questionou os alunos sobre o significado dos números envolvidos nas fracções de forma a salientar que o numerador indicava o número de itens a repartir e o denominador, o número de recipientes.

Os alunos interiorizaram com facilidade a representação simbólica na interpretação quociente. Isto sugere que, a escrita de fracções nesta interpretação não constitui dificuldades para os alunos. Os alunos compreendem o significado do numerador e do denominador na interpretação quociente, apresentando justificações para a representação simbólica efectuada do tipo "…são dois bolos para sete meninos"; "…o dois representa os bolos e o sete representa os meninos" (ver figuras 4.20 A e B). A representação verbal foi mais difícil na medida em que os alunos associam a leitura do denominador a outras palavras do seu vocabulário matemático relacionadas com o número envolvido, lendo por exemplo "um triplo" em vez de um terço. Em duas tarefas foi possível verificar que alguns alunos conseguiram escrever fracções equivalentes às obtidas quando se pediu que escrevessem a quantidade a ser atribuída a cada recipiente (ver figuras 4.15 A e B e 4.19 B; pp. 77, 79). Na primeira situação (ver figuras 4.15 A), os alunos chegam mesmo a representar a igualdade entre as duas fracções equivalentes. A segunda situação (ver figura 4.19 B, p.79) é explicada na transcrição do diálogo da turma pelo aluno que justifica expressão $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Para este aluno dois chocolates para seis meninos pode ser também um chocolate para três meninos (ver transcrição 4.4, p.81), o que sugere a existência de raciocínio proporcional.

4.1.3. Sobre a ordenação e equivalência de fracções e a representação pictórica

Sessões 3, 4, 5, 6 e7

Estas sessões envolveram de forma transversal a representação simbólica, tendo como principal objectivo trabalhar a comparação e ordenação de fracções na interpretação quociente, reconhecendo a equivalência. A representação pictórica de fracções continuava a ser um dos objectivos das tarefas. Os alunos responderam individualmente às tarefas e apresentaram argumentos escritos.

Na sessão 3 foram apresentadas quatro tarefas em que se pretendia que os alunos comparassem fracções que representavam quantidades menores que a unidade com igual numerador e denominador diferente;$\frac{1}{2}/\frac{1}{3}$; $\frac{2}{4}/\frac{2}{6}$; com numerador diferente e igual denominador; $\frac{1}{4}/\frac{2}{4}$; e com numerador e denominador diferentes; $\frac{1}{3}/\frac{2}{6}$ (Anexos 1 - C, pp. 197 - 200).

Na sessão 4 foram apresentadas quatro tarefas (Anexos 1-C, pp. 201 - 201). As duas primeiras tarefas envolviam comparação de fracções equivalentes ($\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$) e as duas últimas envolviam identificação de quantidades dada uma fracção e era pedido ao aluno que fizesse a representação pictórica, após a identificação do significado do numerador e do denominador.

As tarefas das sessões 3 e 4, que envolviam comparação, ordenação, equivalência e representação pictórica de fracções, foram resolvidas com sucesso por todos os alunos. Embora não tenha sido dada nenhuma orientação nesse sentido, todos os alunos começaram por escrever a fracção correspondente ao que cada menino e cada menina iam comer. Após a escrita das fracções, todos fizeram a representação pictórica da divisão das pizas, alguns de forma correcta, outros não. O modelo dos itens a repartir - pizas circulares - tornou a representação da partilha equitativa mais difícil e o processo de comparação baseado na divisão equitativa mais complexo porque os pedaços não eram do mesmo tamanho.

Na comparação de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ todos os alunos se basearam na divisão das pizas e na correspondência para estabelecerem a comparação entre as fracções. A divisão em partes iguais e a correspondência aparecem em simultâneo como ilustra a figura 4.21.

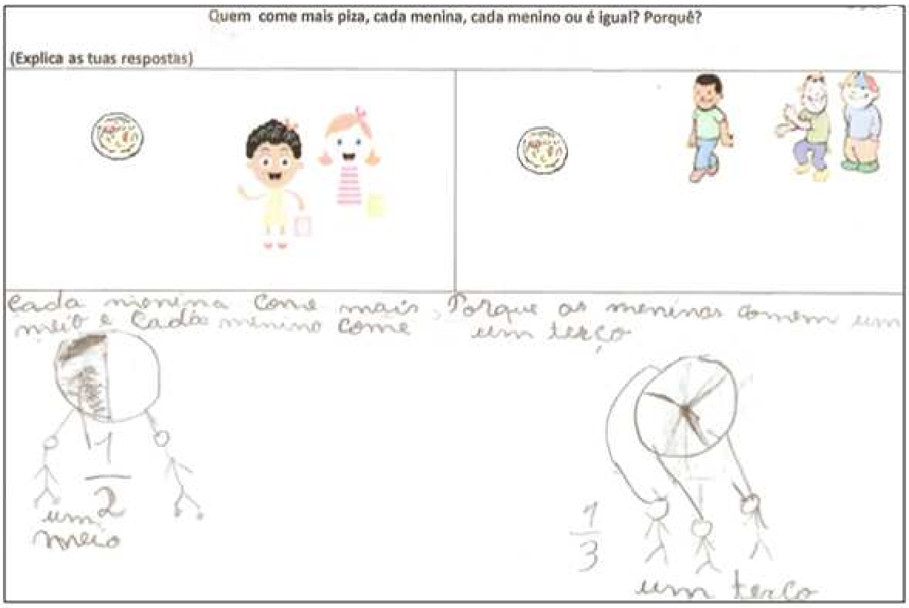


Figura 4.21 - Comparação das fracções $^1/_2$ e $^1/_3$ baseada na partição e na correspondência.

Seis alunos responderam correctamente, concluindo que cada menina comia mais do que cada menino. Desses, cinco basearam-se na representação da partilha, não explicitando a relação inversa entre o numerador e o denominador, como exemplifica a figura 4.21. Uma aluna explicou claramente a relação inversa entre numerador e denominador (Ver figura 4.22) e outra aluna tentou, mas não conseguiu verbalizar totalmente essa relação acabando por não fazer explicitamente a comparação. A aluna não pode fundamentar a ordenação na representação pictórica da divisão da piza, pois não conseguiu fazê-la correctamente (ver figura 4.23).

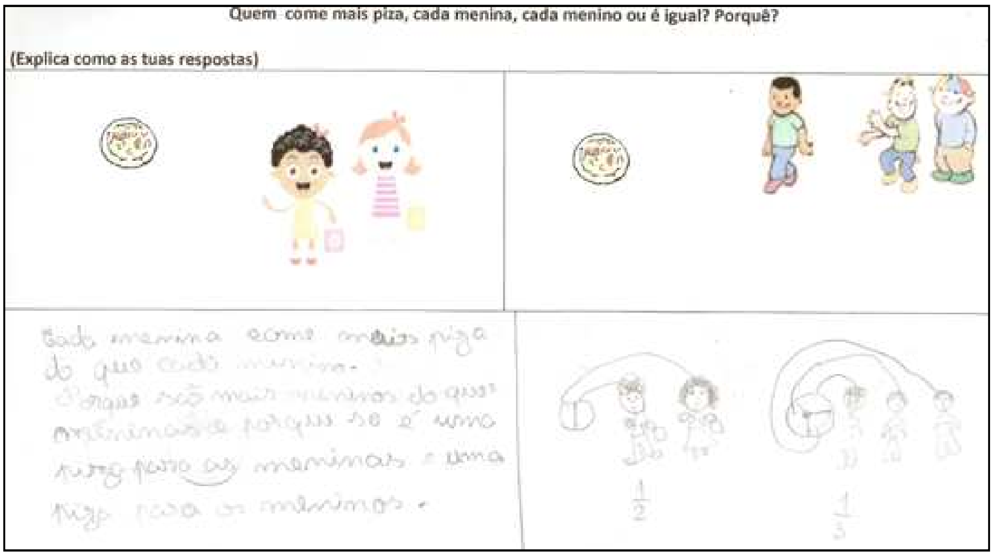


Figura 4.22 - Comparação e ordenação feita pela Bela, com base na relação inversa.

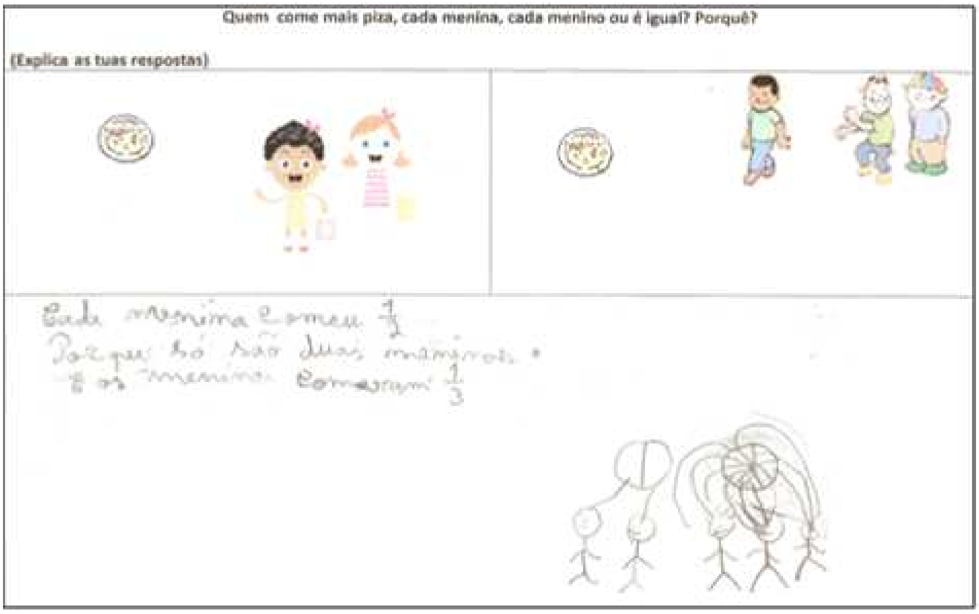


Figura 4.23 - Exemplo em que uma aluna não consegue comparar as fracções.

Uma aluna fez a representação da divisão e baseou a ordenação no número de partes obtidas, em vez de se fundamentar tamanho das partes. Deu uma explicação que sugere dificuldades na compreensão da relação inversa entre o número de partes e o seu tamanho (ver figura 4.24).

Figura 4.24 - Resposta incorrecta dada pela Selma fundamentando-se nas partes resultantes da partilha.

Após a apresentação das respostas à turma e depois de ouvirem a explicação da aluna que justificou a ordenação destas duas fracções na relação inversa entre o numerador e o denominador (figura 4.22; p. 85), todos os alunos concluíram que era "mais fácil de entender" como ela explicara. A compreensão da explicação da relação inversa dada pela colega foi um contributo muito positivo para o reconhecimento dessa relação pelos outros alunos. Nas tarefas seguintes, as crianças começaram a explicar a comparação através da relação inversa, mas não deixaram de fazer a representação da partilha equitativa. Seis alunos apresentam justificações que sugerem que houve compreensão da relação inversa entre o numerador e o denominador como mostra o exemplo da figura 4.25. Os argumentos apresentados pela Bela para justificar a comparação estabelecida, evidenciam a compreensão da relação inversa entre o numerador e o denominador.

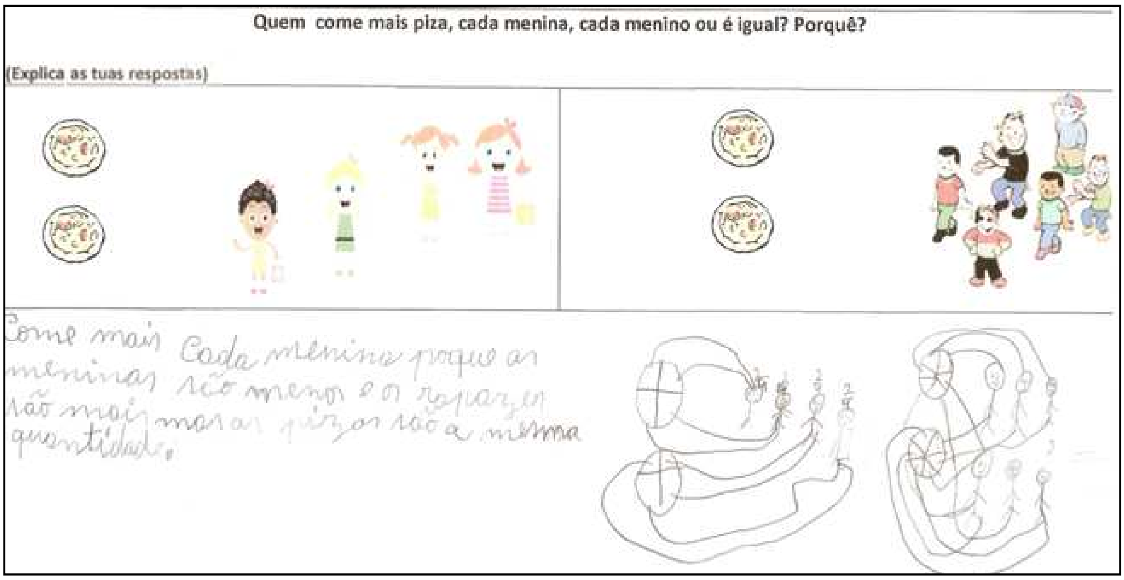


Figura 4.25 - Explicação dada pela Bela para a ordenação de 2/4 e 2/6.

Os outros alunos apresentam tentativas de verbalizar a relação inversa, mas com menos clareza como se pode verificar no exemplo apresentado na figura 4.26.

Figura 4.26 - Exemplo em que o aluno tenta explicar a relação inversa.

Dois alunos apresentaram argumentos baseados no tamanho das partes resultantes da representação da partilha equitativa das pizas exemplificada com a resolução da figura 4.27.

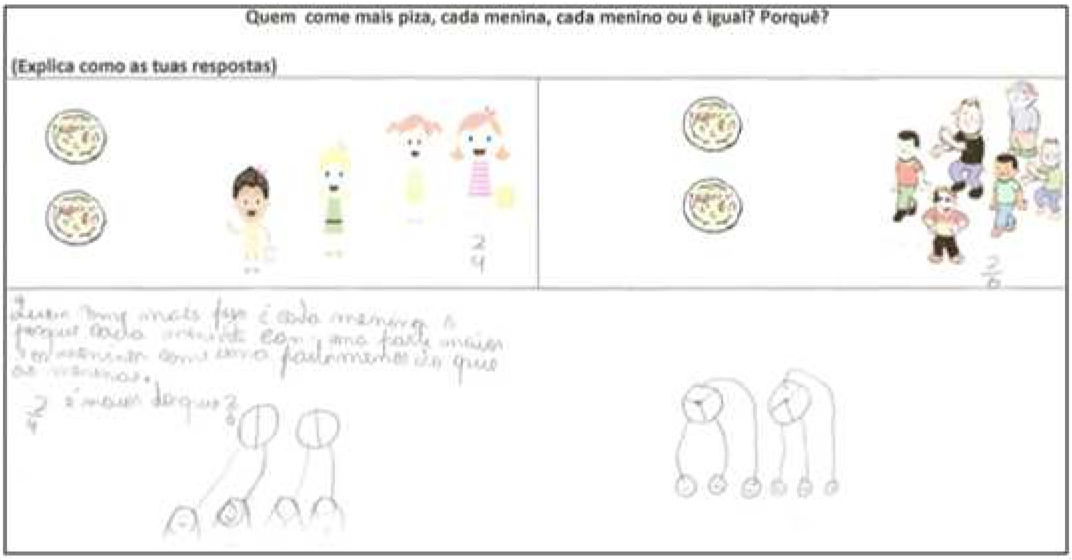


Figura 4.27 - Resposta dada pela Selma em que a ordenação é baseada no tamanho das partes.

A representação da divisão apresentada na figura 4.27 sugere a existência de raciocínio proporcional. Em ambas as situações da tarefa, a aluna antecipa uma relação entre uma piza e o número de itens aos quais vai ser atribuída. Evidenciando a compreensão de que na situação em que há duas pizas para quatro itens, cada uma receberá maior quantidade do que na situação em que há duas pizas para seis. Embora a representação evidencie a compreensão da relação um para muitos, quando verbaliza essa relação, a explicação baseia-se no tamanho das partes resultantes.

Nesta tarefa, todos os alunos fazer a ordenação de forma correcta. As resoluções e argumentos apresentados nos trabalhos escritos dos alunos sugerem que, na comparação de $\frac{2}{4}$ com $\frac{2}{6}$, os alunos compreenderam a relação inversa entre o numerador e o denominador. Dois alunos justificaram a comparação com base no tamanho das partes resultantes da divisão (ver figura 4.27). Estas resoluções evidenciam a compreensão da relação inversa entre o numerador e o denominador como justificação da ordenação. Contudo, os alunos apresentam ainda algumas dificuldades em verbalizar essa relação de forma completa como mostra a figura 4.26.

Na tarefa de comparação das fracções ¼ e $^{2}/_{4}$, quatro alunos fizeram-na correctamente à semelhança do exemplo da figura 4.28. Referiram apenas o numerador para relacionar as duas fracções. Isto sugere que, sendo os denominadores iguais, os alunos compreenderam que a comparação dos numeradores era suficiente para conseguirem ordenar as fracções.

Figura 4.28 - O Mário compreende que para denominadores iguais é maior a fracção com maior numerador.

Quatro alunos basearam a comparação e ordenação na relação inversa (ver figura 4.29) e explicitaram essa relação envolvendo o numerador e o denominador.

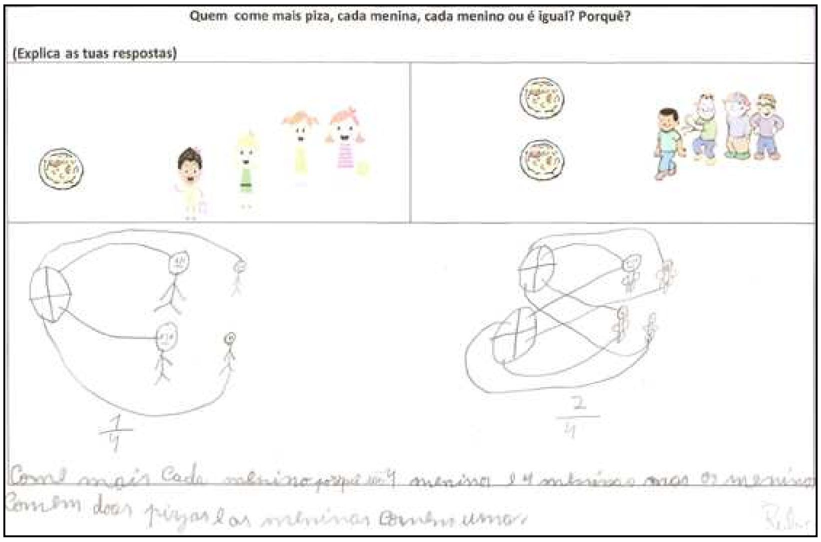


Figura 4.29 - Comparação evidenciando a relação inversa entre o numerador e o denominador.

Na comparação das fracções equivalentes $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, seis alunos dividiram as pizas e justificaram a equivalência demonstrando um raciocínio proporcional, mas necessitaram de fazer a representação pictórica da partilha (ver figura 4.30).

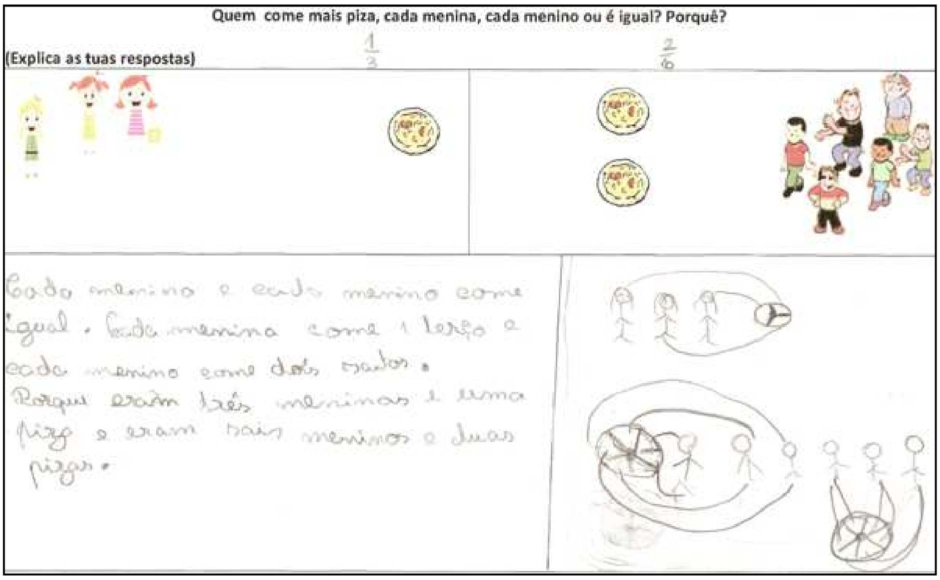


Figura 4.30 - Exemplo do raciocínio proporcional evidenciado na resolução da Bela.

Um aluno não necessitou de fazer a representação dessa partilha para usar o raciocínio proporcional e identificar a equivalência das duas fracções. Enuncia de forma bastante explicita o raciocínio proporcional ao escrever "é uma piza para três meninos nos dois lados" (ver figura 4.31).

Figura 4.31 - Raciocínio proporcional evidente na resposta do João.

Outro aluno não identificou a equivalência das fracções. A sua resposta sugere que o aluno apenas compara os numeradores das fracções e considera maior a fracção com maior numerador (ver figura 4.32).

Figura 4.32 - Resposta incorrecta baseada no número de partes atribuídas a cada recipiente.

Em tarefas anteriores, os alunos que se fundamentaram no número de partes para comparar fracções, não conseguiram fazê-lo com sucesso, acontecendo o mesmo com o aluno que o fez nesta tarefa e que concluiu que $\frac{2}{6}$ é maior que $\frac{1}{3}$ (ver figura 4.32). Tiveram mais sucesso na comparação, os alunos que compreenderam e estabeleceram a relação inversa entre o numerador e o denominador ou recorreram ao raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional esteve também implícito na resolução das tarefas da 4.ª sessão. Todos os alunos conseguiram resolvê-las com êxito mostrando que são capazes de raciocinar com base na proporcionalidade, identificando a relação de equivalência entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ (ver figuras 4.33 e 4.34).

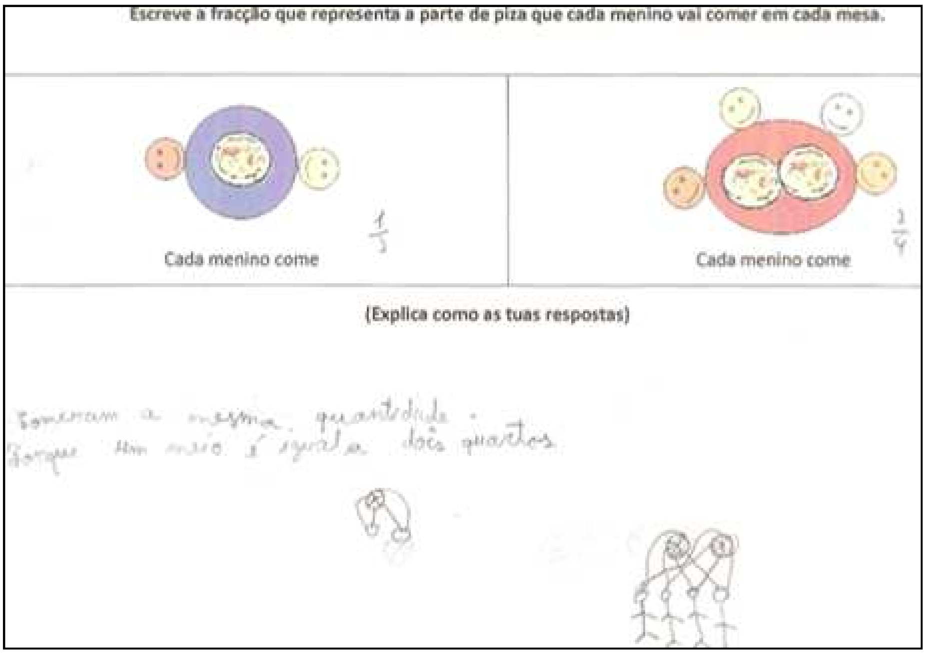


Figura 4.33 - Equivalência identificada pelo Mário.

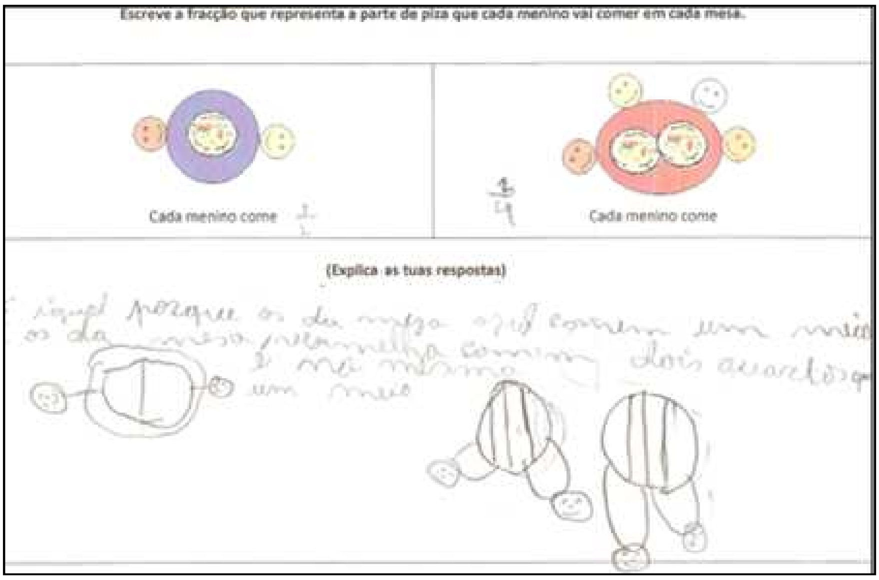


Figura 4.34 - Raciocínio proporcional aplicado na descoberta da fracção equivalente na resposta do Rui.

A figura 4.34 apresenta a resolução de um aluno que, apesar de ter feito a representação da partilha equitativa de forma incorrecta para a fracção $\frac{2}{8}$, consegue comparar as fracções, pois tem a noção de metade como referência. A forma como fez a distribuição das partes mostra que, em ambas as situações, a cada recipiente é atribuída a mesma quantidade de piza. Confrontado com a forma como partiu a piza, o aluno explica-se dizendo ‘comem metade na mesma!’. O mesmo aluno apresenta argumentos escritos que evidenciam o raciocínio proporcional para justificar a equivalência entre as fracções $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$. As figuras 4.35 e 4.36 mostram duas resoluções da mesma tarefa em que era pedido que se identificasse o número de recipientes para que nas duas situações representadas todos comessem a mesma quantidade de piza.

Figura 4.35 - Resposta dada pelo Rui para justificar o número de recipientes para duas pizas.

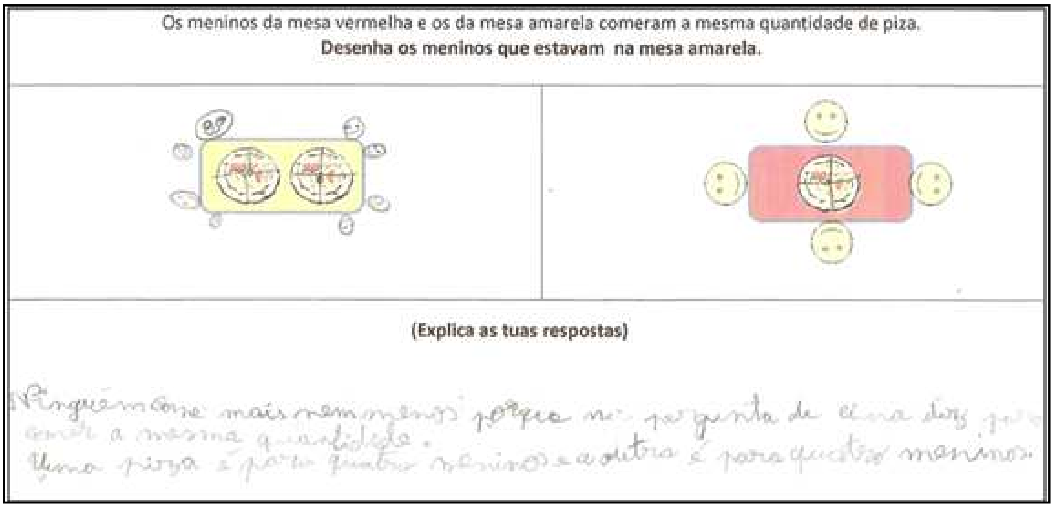


Figura 4.36 - Justificação da equivalência entre as duas fracções dada pelo João.

Todos os alunos foram capazes de desenhar o número de recipientes para que, na mesa amarela, se comesse a mesma quantidade de piza que na mesa vermelha.

Nas duas últimas tarefas da sessão 4, e tendo em conta que este estudo foi desenvolvido numa perspectiva de ensino, pretendia-se perceber se os alunos eram capazes de identificar os itens a repartir e os recipientes, dada uma fracção e um contexto na interpretação quociente. Um dos objectivos era verificar a compreensão do significado das fracções nesta interpretação. Para tal, foram dadas as fracções $\frac{1}{7}$ como sendo a quantidades de bolo comida por cada participante de um aniversário e $\frac{2}{9}$ como sendo a quantidade de piza que cada menino comeu no lanche. Pedia-se que desenhassem os itens e os recipientes em cada situação. Nenhuma das situações constituiu dificuldade para os alunos, o que sugere que neste grupo, todos os alunos compreenderam o significado da representação simbólica e da representação pictórica de fracções, na interpretação quociente como exemplificam as figuras 4.37 A e B.

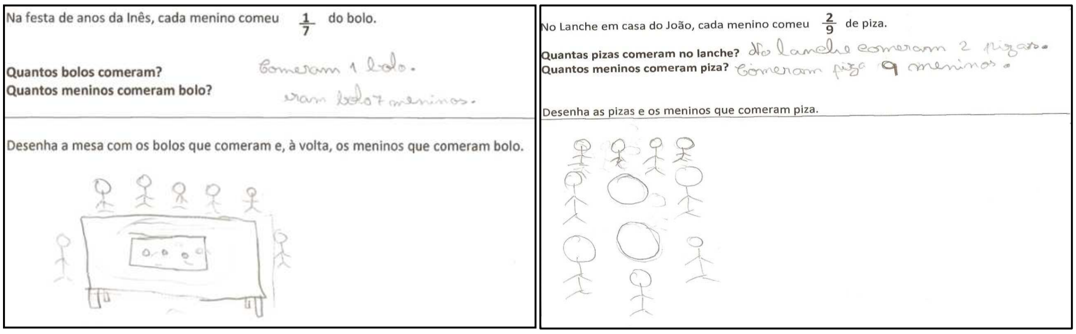


Figura 4.37 A e B - Representação pictórica e significado da fracção 1/7 e 1/9 na interpretação quociente.

Nas sessões 5 e 6 foram propostas seis tarefas de comparação de fracções, mas com estruturas diferentes das propostas nas sessões anteriores (Anexos 1 -C, pp. 203- 207). Nas três primeiras tarefa era dado o enunciado e a respectiva representação pictórica. Os alunos deveriam comparar as fracções apresentando argumentos escritos, ao que se seguia a colocação dos sinais >, <, = entre fracções que escreviam.

Na primeira tarefa pretendia-se que fosse colocado o sinal adequado entre as fracções $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ que representavam o quociente da divisão de uma cartolina por 2, 3, 4 e 5 crianças. Esta tarefa tinha como suporte um desenho representando a cartolina atribuída a grupo de crianças, para cada uma das fracções que era necessário escrever. Todos os alunos compararam correctamente as fracções envolvidas colocando o sinal adequado entre elas como se pode observar no exemplo apresentado nas figuras 4.38 A e B.

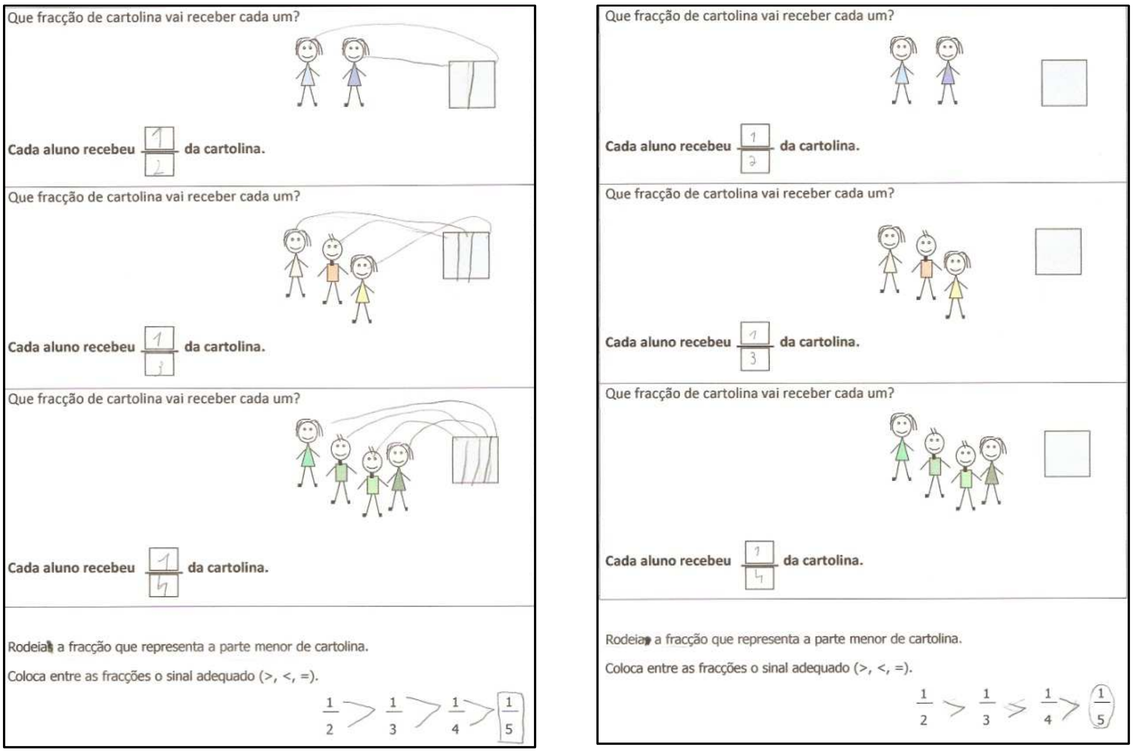
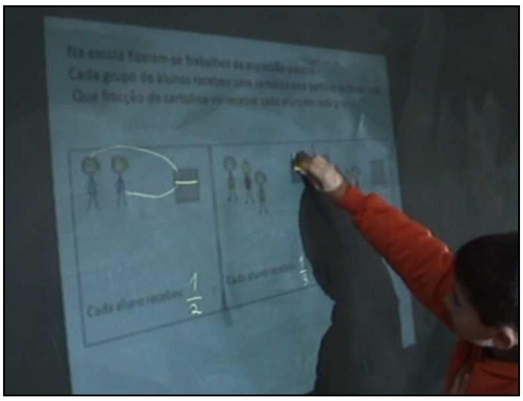


Figura 4.38 A e B - Comparações com e sem recurso à representação pictórica.

Metade dos alunos necessitaram de representar a divisão da cartolina para comparar as fracções e outra metade fez a comparação sem necessitar da representação pictórica. Contudo, nenhum dos alunos manifestou dificuldades em estabelecer a comparação, rodeando também a menor fracção como era pedido e explicaram a sua opção com facilidade. Enquanto o Gonçalo apresentava no quadro a sua proposta de resolução, os outros alunos foram explicando como tinham descoberto a fracção maior (ver transcrição 4.5).

IP: – Então Mário se quisesses ficar com mais cartolina, qual era a fracção que querias?
Mário: – Um meio… é mais que as outras.
IP: – Como descobriste que é mais?
M: – Uma cartolina para dois meninos é mais que uma cartolina para três…



João: – E mais do que para quatro e do que para cinco.

IP: – E que sinal colocaste João?

João: – O sinal maior.

IP: – Maior porquê?

João: – É sempre uma cartolina e há sempre mais meninos. Eram dois, depois três, depois quatro …

Rui: – Professora, o que é menos é um quinto… eu rodeei.

Transcrição 4.5 - Imagem e transcrição de argumentos dos alunos para justificar a comparação $^1/_2$,$^1/_3$, $^1/_4$.

Os alunos identificaram o numerador comum às quatro fracções “É sempre uma cartolina e há sempre mais meninos”, o que lhe facilitou a comparação, pois perceberam que, mantendo-se o número de cartolinas, a fracções menor é a que apresenta o maior número de recipientes. A conversa transcrita sugere que os alunos compreendem que, sendo igual a cartolina a distribuir e aumentando o número de recipientes dos grupos, é menor a quantidade que cada um recebe.

Na comparação das fracções $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, sete dos oito alunos tiveram sucesso e estabeleceram uma relação de proporcionalidade.

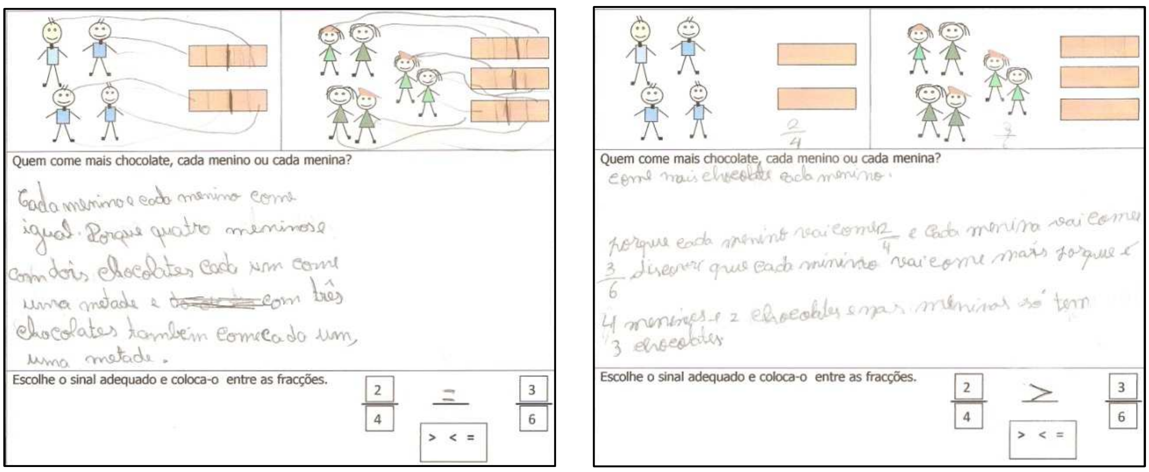


Figura 4.39 A e B- Relação de proporcionalidade na comparação das fracções $^2/_4$ e $^3/_6$ com ordenação correcta e comparação algébrica com ordenação incorrecta.

Na comparação das fracções $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, sete dos oito alunos identificaram a equivalência das duas fracções com base na relação de proporcionalidade. O aluno que errou a comparação entre $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ também não conseguiu reconhecer a equivalência destas duas fracções (ver figura 4.39 B).

Alguns alunos começam a "criar" expressões numéricas para comprovar essa relação proporcional (ver figuras 4.40 e 4.41). Um dos alunos regista os seguintes argumentos para justificar a equivalência: "comem igual porque se partirmos dois sextos ao meio, as partes é o mesmo que um terço" e acrescenta uma tentativa de criar uma expressão numérica para representar os seus argumentos (Figura 4.40). Um outro aluno faz também uma tentativa para criar uma expressão numérica para representar os seus argumentos. Estes dois alunos mostram ter algum raciocínio multiplicativo (Figura 4.40 e 4.41) na medida em que tentam expressar pela adição dos numeradores e denominadores iguais, a equivalência entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$.

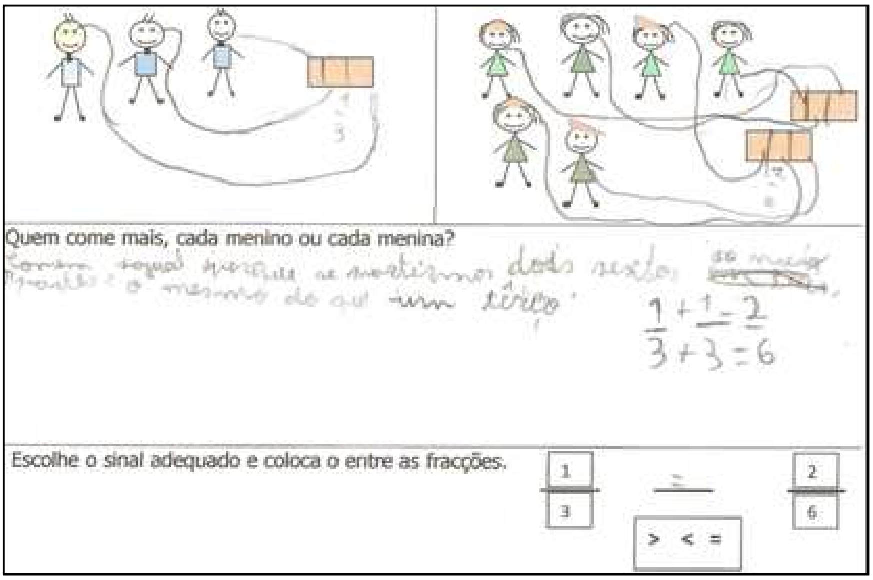


Figura 4.40 - Argumentos que evidenciam o raciocínio multiplicativo na identificação da equivalência.

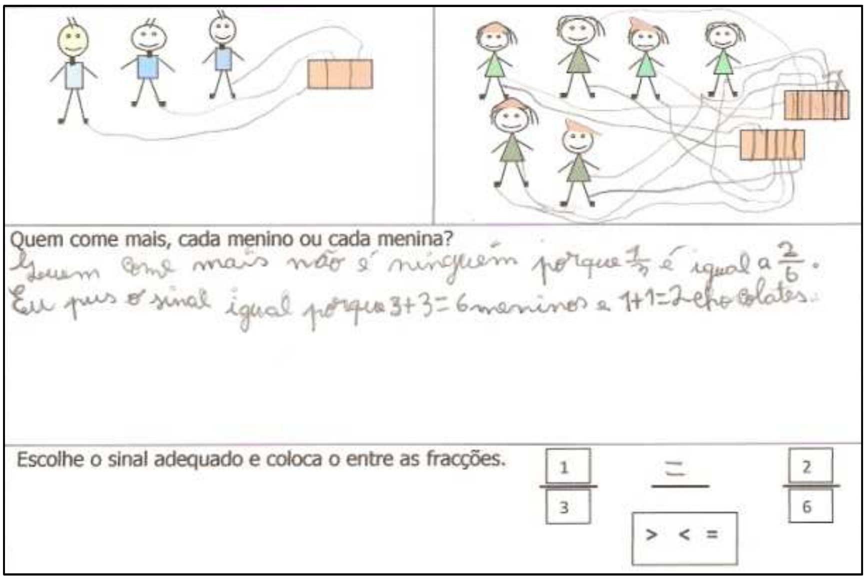


Figura 4.41 - Tentativa de criar uma expressão algébrica para representar os argumentos.

Na comparação de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{9}$ sete alunos estabeleceram uma relação de proporcionalidade entre os itens a repartir e o número de recipientes nas duas fracções. Estes sete alunos apresentam argumentos onde é evidente o recurso à proporcionalidade, na medida em que referem a relação 2 para 3 como sendo maior do que 1 para 3 - ‘Quem come mais chocolate é cada menino da equipa azul porque há dois chocolates e três meninos e três nonos é igual a um terço’; ‘na equipa verde comem um chocolate três meninos e na equipa azul comem 3 meninos dois chocolates’. Os argumentos apresentados são alguns exemplos das justificações em que se torna evidente a capacidade de raciocinar com base no estabelecimento de uma relação de proporcional para ordenar fracções.

Destes sete alunos, seis não necessitaram de representar a divisão para efectuar a ordenação correcta das fracções (ver figuras 4.42 A e B).

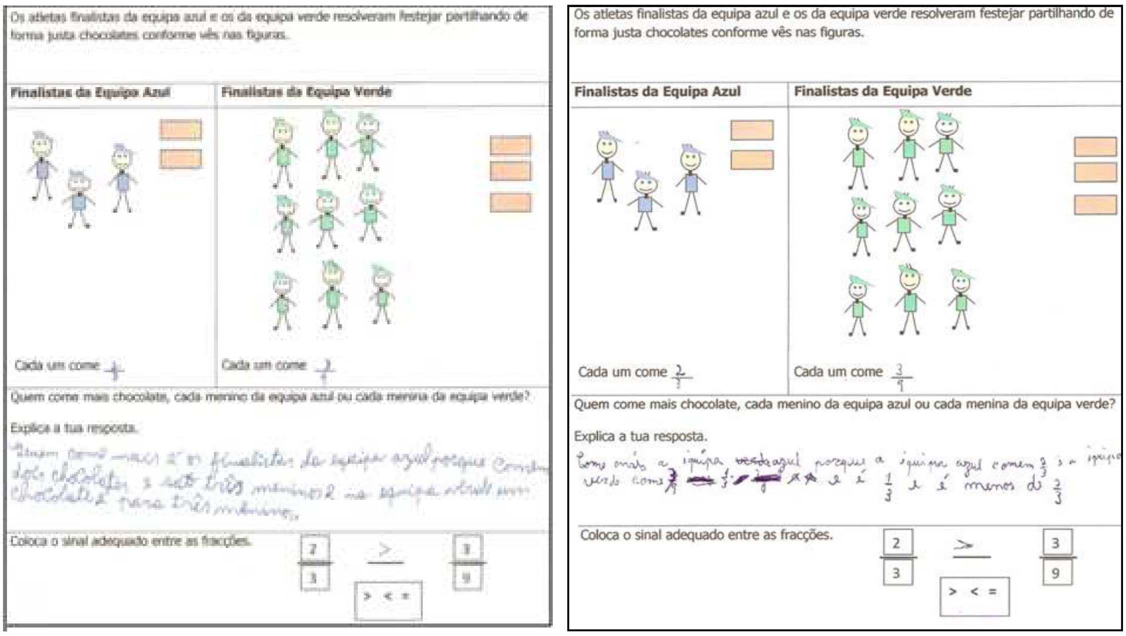


Figura 4.42 A e B - Ordenação efectuada com base no raciocínio proporcional.

Um aluno apresentou argumentos para justificar a ordenação fundamentados no raciocínio proporcional, chegando mesmo a reduzir a fracção $\frac{3}{9}$ à fracção $\frac{1}{3}$, complementando com a explicação '…na equipa verde come $\frac{3}{9}$ e é $\frac{1}{3}$ e é menos de $\frac{2}{3}$' (ver figura 4.42 B). Deste modo, tornou-se mais fácil comparar as duas fracções. Este raciocínio sugere uma boa compreensão da equivalência de fracções e a compreensão de que é mais fácil comparar fracções com o mesmo denominador (ver figuras 4.42 A e B). Torna-se evidente que, quanto mais tarefas de comparação/ordenação os alunos realizam, maior facilidade têm em argumentar com base no raciocínio proporcional.

Na comparação das fracções $^{2}/_{3}$ e $^{2}/_{4}$, assim como das fracções $^{3}/_{5}$ e $^{3}/_{7}$, sete alunos usam argumentos baseados na relação inversa entre o numerador e o denominador para ordenar as fracções como ilustram as figuras 4.43 A e B.

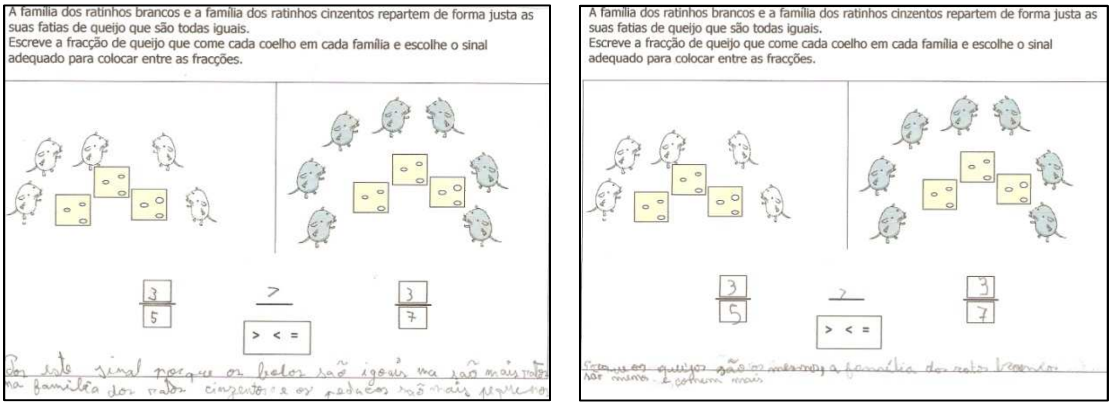


Figura 4.43 A e B- Exemplos de resoluções correctas da ordenação baseada na relação inversa.

A figura 4.44 ilustra o caso de um aluno que apenas compara os denominadores não conseguindo ordenar de forma correcta as fracções. Perante os argumentos escritos que apresentou foi-lhe perguntado como tinha chegado à conclusão de que devia colocar o sinal menor entre as duas fracções. A explicação apresentada mostrou que o aluno compara os denominadores das duas fracções.

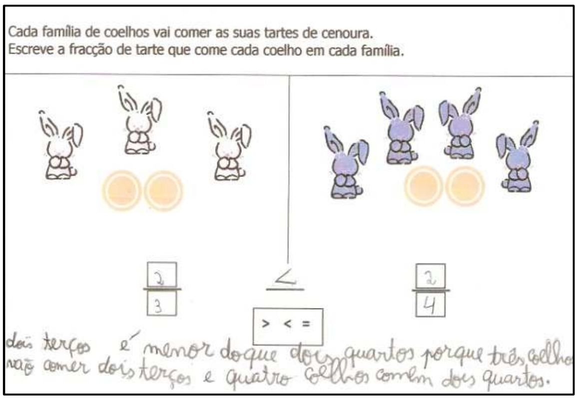


Figura 4.44 - Exemplo de uma resolução incorrecta baseada na comparação dos denominadores.

Este aluno usa o mesmo tipo de argumentos para comparar outras fracções e tem chegado sempre a respostas erradas. As explicações por ele apresentadas, mostram que apenas considera os denominadores, e considera maior a fracção com maior denominador. Isto parece significar que ainda não consegue perceber a relação inversa entre os itens a repartir e o número de recipientes. No quadro, ao apresentar a sua resolução da tarefa não a resolve da mesma forma, mas não está seguro desta resolução e responde às questões com muita insegurança. O diálogo que se segue mostra as dúvidas que tem em relação à tarefa apresentada na figura 4.44 (ver transcrição 4.6).

IP: – Tu disseste que na família dos coelhos brancos comeram…
Gonçalo – Duas tartes… não dois terços
IP: – E na dos coelhinhos azuis comeram…
Gonçalo: – Dois quartos.
IP: – Dois quartos … e que sinal vais por no meio?
Gonçalo – Maior [coloca o sinal maior]
IP: – Agora lê a frase …
Gonçalo: – Dois terços é maior do que dois quartos.
IP: – Muito bem … explica-me porque é que dois terços é maior que dois quartos [Faz uma série de afirmações contraditórias, mas continua confuso]
IP: – Quem come mais, os que comem dois terços ou os que comem dois quartos?
Gonçalo – Os que comem dois quartos … [apontando para o denominador maior]
[O João e o Mário explicaram-lhe que, sendo as mesmas tartes, comem menos os do grupo onde há mais coelhos].

Transcrição 4.6 – Argumentos baseados na comparação dos denominadores que conduziram a ordenação incorrecta.

Na última tarefa da sessão 6 foram dadas as fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ e um contexto que envolvia ratos e queijos. Era pedido aos alunos que representassem, através de um desenho, a situação e que comparassem as fracções, colocando o sinal adequado entre elas. Todos os alunos representaram de forma adequada a situação evidenciando uma boa compreensão do significado da fracção na interpretação quociente. Sete dos oito alunos fizeram uma ordenação correcta das fracções. Contudo, os procedimentos que permitiram a comparação foram variados (ver figuras 4.45 A e B, 4.46 e 4.47). Dois alunos fizeram a correspondência entre itens e recipientes concluindo que na primeira situação cada rato come metade e na segunda come mais de metade como ilustram os exemplos apresentados nas figuras 4.45 A e 4.46. Um aluno conclui que $\frac{1}{2}$ é menor do que $\frac{3}{4}$ porque é igual a dois quartos. Esta explicação evidencia o reconhecimento da equivalência entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ que começam a funcionar como fracções de referência para alguns alunos (ver figura 4.45 B).

Quatro alunos ordenaram as fracções de forma correcta. Contudo os seus argumentos são incompletos. Um dos alunos identifica a fracção menor dizendo que 'são dois ratos e um chocolate'. Não faz referência à quantidade de 'chocolate' que cada um dos três ratos comeria, mas a sua representação pictórica é elucidativa e consegue mostrar que cada dois ratos comeria mais de um chocolate (ver figura 4.47). A relação um para muitos que parece estar na origem da representação, não é verbalizado da forma muito clara.

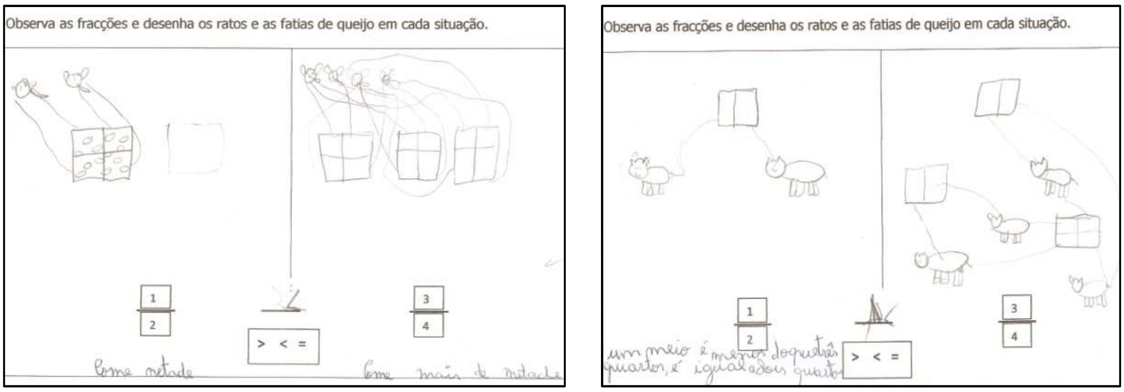


Figura 4.45 A e B - Procedimentos diferentes para comparar 1/2 com 3/4.

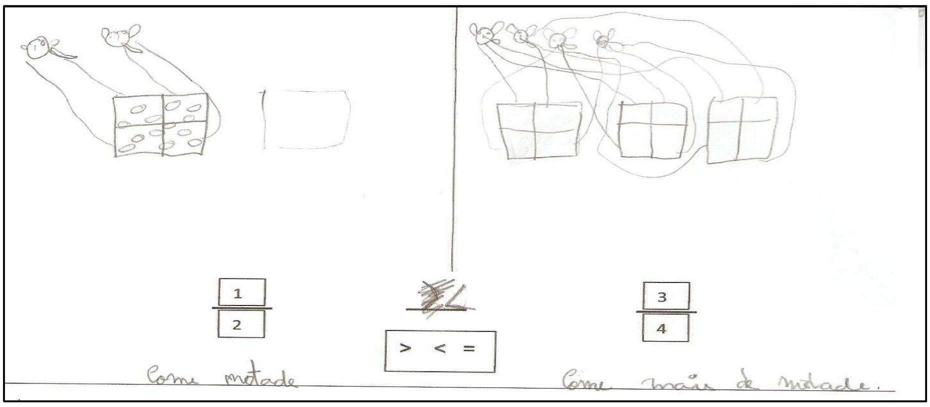


Figura 4.46 - Argumentos baseados no raciocínio proporcional.

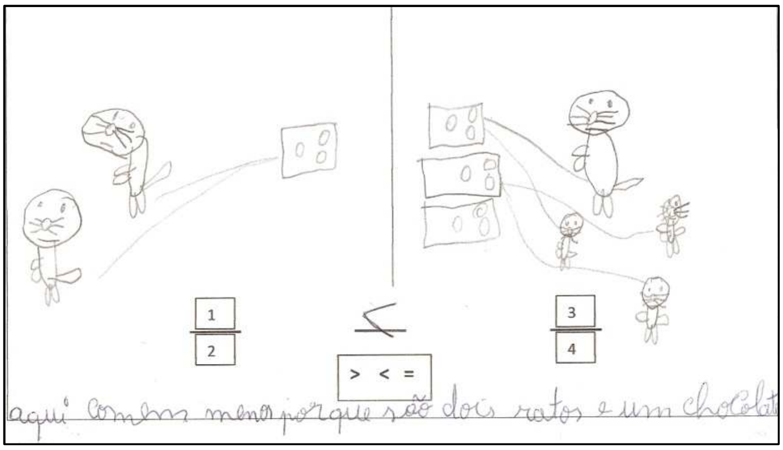


Figura 4.47 - Argumentos baseados na metade como quantidade de referência.

Na sessão 7 foram apresentadas duas tarefas para verificar se as crianças eram capazes de identificar a equivalência de duas fracções e de encontrar uma terceira que fosse equivalente às dadas. Todos os alunos, excepto um, conseguiram reconhecer a equivalência dos pares de fracções, encontrar uma fracção equivalente e apresentar argumentos para sustentar o raciocínio. As figuras 4.48 e 4.49 ilustram exemplos de resoluções dos alunos para tarefas diferentes. Alguns alunos ainda fizeram a representação da partilha equitativa dos itens para reconhecerem a equivalência das fracções (ver figura 4.48). Nessas representações percebe-se que existe segurança nos procedimentos, o que evidencia uma certa capacidade de antecipar o resultado para que a representação pictórica da partilha seja correcta.

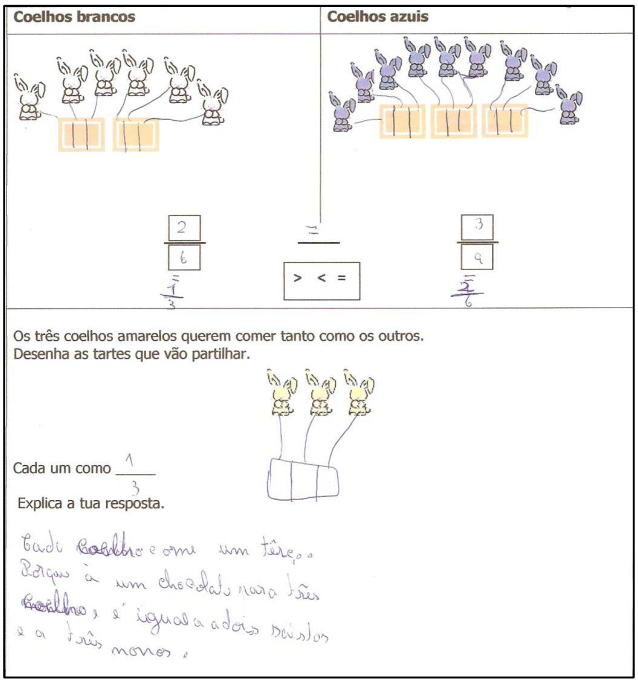


Figura 4.48- Comparação das fracções 2/4 - 3/6 e descoberta de uma nova fracção equivalente.

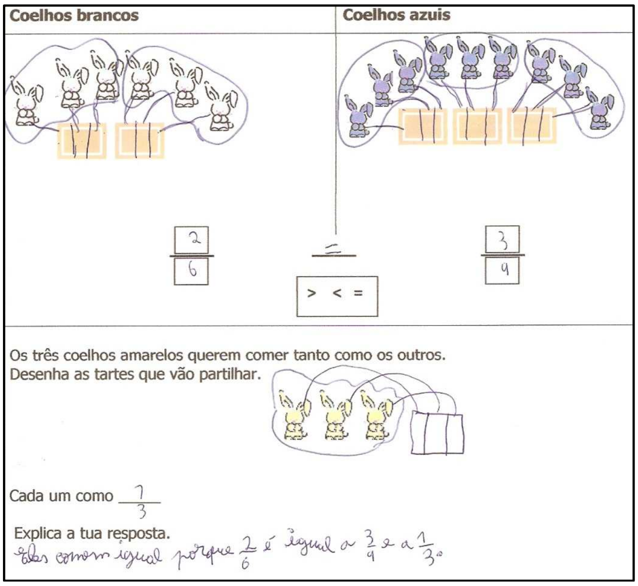


Figura 4.49 - Exemplo de resolução da tarefa de equivalência entre 2/6, 3/9, 1/3.

Alguns alunos começam a fazer esquemas mais complexos para explicar e justificar as suas respostas. A resolução apresentada na figura 4.49 ilustra a correspondência que o aluno fez, agrupando os recipientes a que atribui uma tarte de forma a mostrar que, nas três situações, dá uma tarte para cada três recipientes. Durante a realização destas tarefas tornou-se perceptível a vontade dos alunos em inovar e em criar novos esquemas de representação. Todos os alunos resolveram a tarefa sem fazerem qualquer tipo de representação. Alguns deles voltaram atrás para fazerem a representação pictórica do seu raciocínio depois de lerem a parte do enunciado que pedia que a resposta fosse explicada. Isto torna evidente a facilidade com que este grupo de crianças consegue resolver estes problemas com fracções na interpretação quociente.

Alguns alunos reconheceram a equivalência sem necessitar de concretizar a divisão das tartes. Sem representarem a correspondência, foram capazes identificar a equivalência entre as duas fracções e de descobrir um nova fracção equivalente (ver figura 4.50).

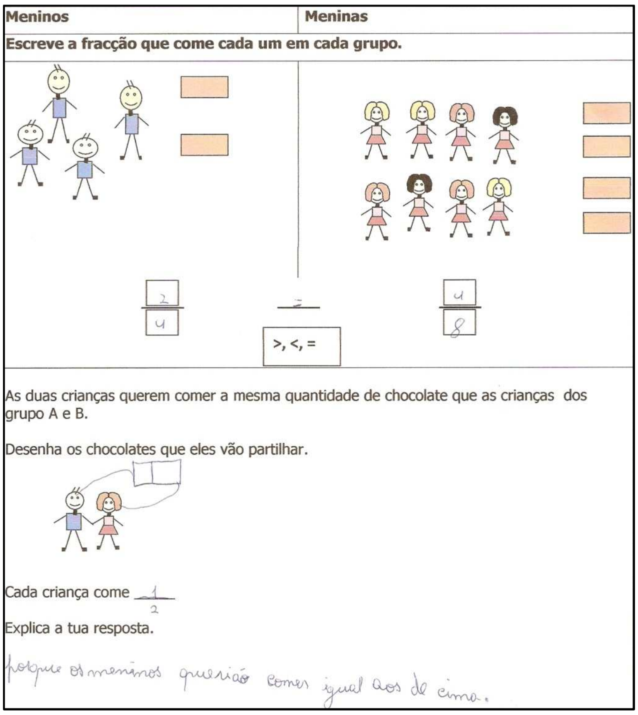


Figura 4.50 - Exemplo de resolução de um aluno que identifica a equivalência sem fazer qualquer tipo de representação pictórica.

Nesta fase do estudo, os alunos já ordenam fracções e reconhecem algumas fracções equivalentes com facilidade e explicam os seus raciocínios com mais clareza, tanto através da representação pictórica como por escrito.

Estes pressupostos foram confirmados na resolução das terceira e quarta tarefas em que apenas foram dadas as fracções para comparar. Nestas tarefas era necessário colocar o sinal adequado entre dois grupos de fracções equivalentes; $\frac{1}{3},\frac{2}{6},\frac{3}{9}$ e $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4},\frac{1}{2}$; e dois grupos de fracções não equivalentes; $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$.

Na resolução da terceira tarefa, que só envolvia fracções equivalentes, os alunos começaram por colocar o sinal comparando e ordenando as fracções e só depois procuravam justificar a escolha através de representações pictóricas das fracções na interpretação quociente. Depois de fazerem as representações pictóricas, alguns alunos verificaram que não tinham usado o sinal adequado e colocaram um novo sinal de acordo com a representação que fizeram. Este tipo de procedimento não foi incentivado pelo professor. Alguns alunos corrigiram o primeiro sinal escolhido, depois de fazerem a representação pictórica.

Nestas duas tarefas apenas um aluno não foi capaz de identificar a equivalência das fracções. Este aluno não conseguiu estabelecer raciocínios proporcionais em nenhum dos casos de identificação de equivalência ao longo do estudo. Todos os outros alunos identificaram a equivalência das fracções dos dois grupos.

Na comparação das fracções $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4},\frac{1}{2}$, todos os alunos que identificaram a equivalência, fizeram a representação pictórica da partilha atribuindo um item a cada 2 meninos como ilustram os exemplos apresentados nas figuras 4.51 e 4.52. A figura 4.51 apresenta uma resolução em que o aluno usa esquemas de representação pictórica diferentes de divisão dos chocolates para cada fracção. Isto parece sugerir uma certa segurança na representação das fracções.

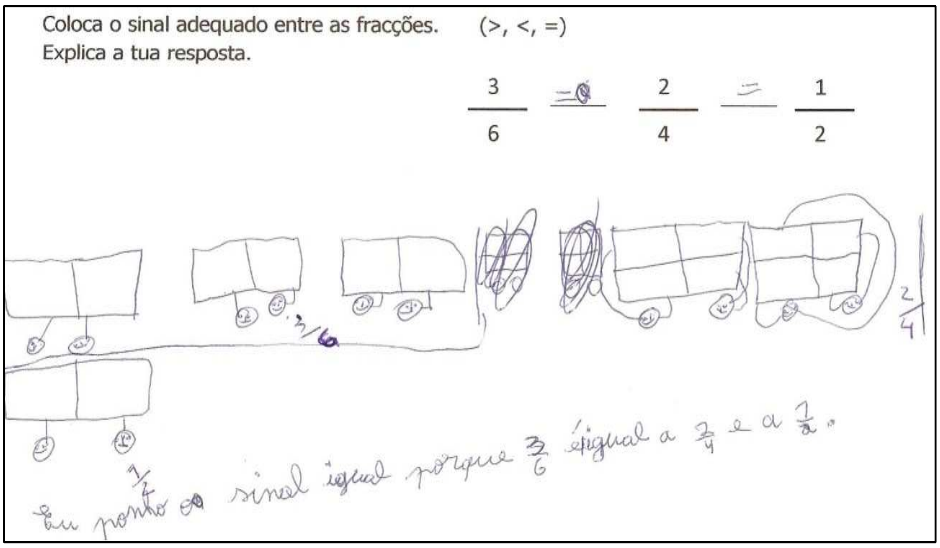


Figura 4.51 - Argumentos baseados na correspondência e representação pictórica evidenciando o raciocínio proporcional.

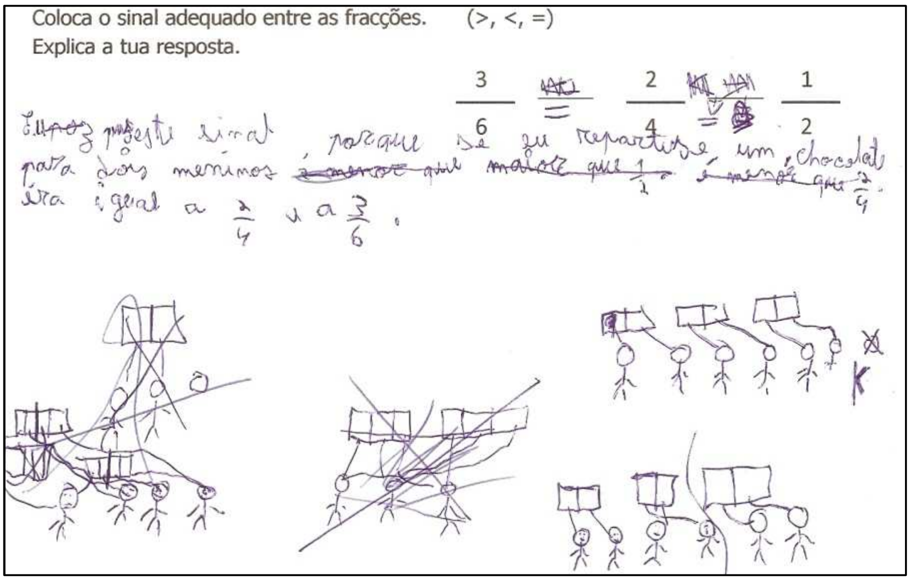


Figura 4.52 - Exemplo elucidativo da dificuldade de verbalização da relação de proporcionalidade evidente na representação pictórica.

Na comparação das fracções $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$, todos fizeram representações pictóricas em que se verifica a correspondência de um chocolate para cada 3 meninos (ver figuras 4.53 e 4.54).

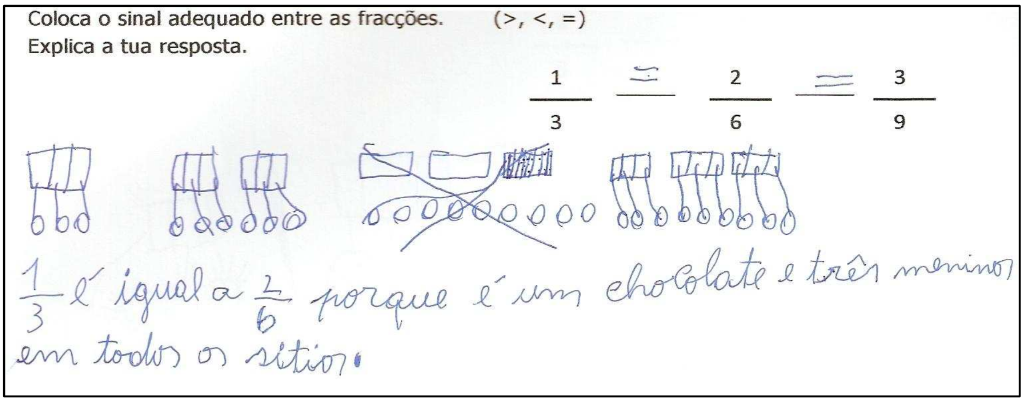


Figura 4.53 - Argumentos baseados no raciocínio proporcional.

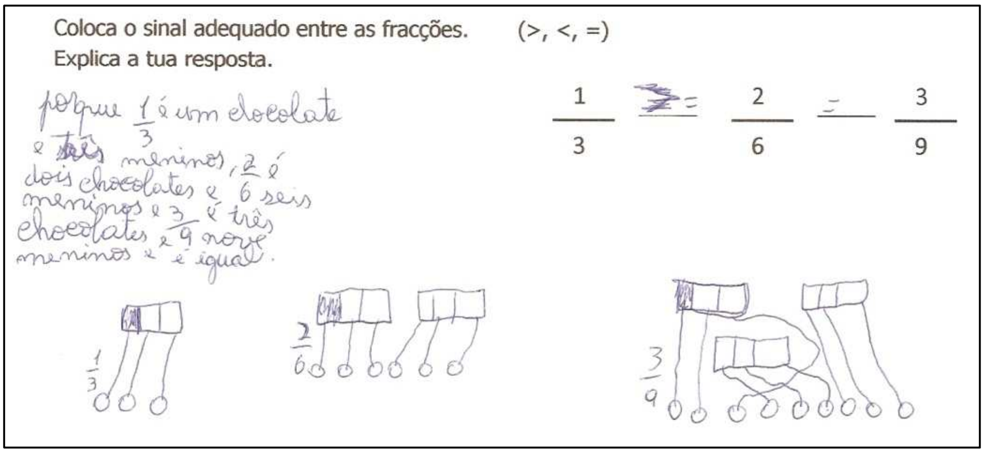


Figura 4.54 - Exemplo elucidativo da dificuldade de verbalização da relação de proporcionalidade evidente na representação pictórica.

Os trabalhos dos alunos evidenciam uma maior dificuldade em verbalizar a relação de proporcionalidade fazendo várias tentativas de escrita dos argumentos, mas as representações pictóricas são bastante elucidativas (ver figuras 4.53 e 4.54.

Na quarta tarefa desta sessão, que envolvia comparação de dois grupos de fracções não equivalentes, sete dos oito alunos fizeram-na com sucesso e recorreram a justificações em que reconhecem a relação inversa entre os numeradores e os denominadores, salientando que para igual número de itens a repartir é maior o quociente em que há menos recipientes e que, para igual número de recipientes, é menor a fracção com menor número de itens a repartir (Figuras 4.55 e 4.56).

Na comparação das fracções não equivalentes $\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5}$, todos os alunos fizeram a ordenação correctamente sem recorrerem à representação pictórica, referindo o facto de os chocolates serem em igual número enquanto o número de recipientes ia aumentando, como ilustra a figura 4.55. Na comparação e ordenação das fracções $\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$, apenas dois alunos fizeram a representação pictórica da partilha para confirmarem a resposta e os argumentos apresentados, mas todos as ordenaram de forma correcta.

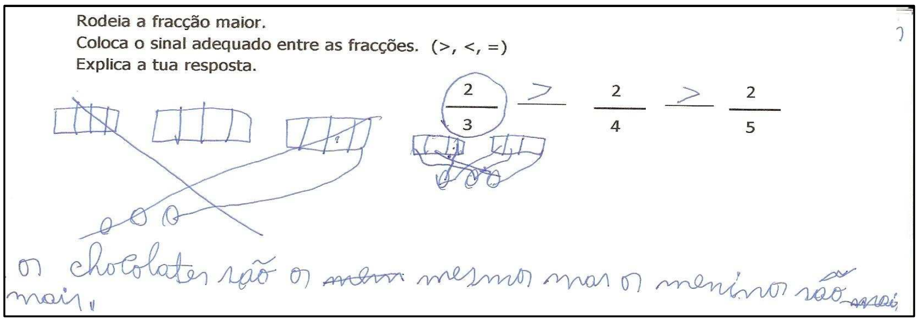


Figura 4.55 - Exemplo de argumentos usados na comparação de fracções com o mesmo numerador.

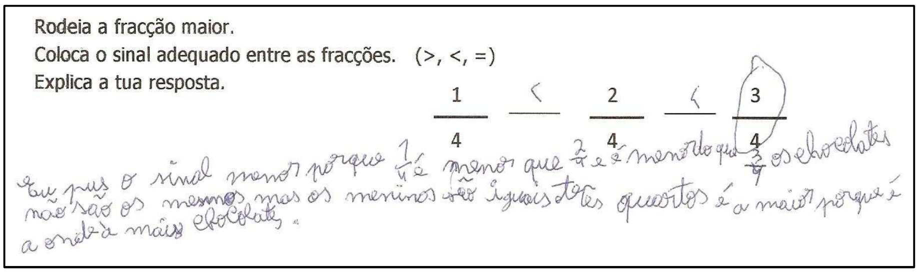


Figura 4.56 - Exemplo de argumentos usados na comparação de fracções com o mesmo denominador

O facto de o denominador ou o numerador das fracções a comparar serem iguais parece ser um elemento facilitador na comparação. O mesmo já se tinha verificado na comparação de fracções com numeradores e denominadores diferentes. Nestas fracções não equivalentes, os alunos manifestaram mais dificuldades em argumentar para justificar a comparação. Foi na comparação deste tipo de fracções (numeradores e denominadores diferentes) que os argumentos foram menos completos e onde se verificaram mais erros de comparação. Os que conseguiram identificar $\frac{2}{4}$ como $\frac{1}{2}$ deram justificações mais completas.

Na tabela 4.2 apresenta-se um resumo que caracteriza o tipo de argumentos e a sua contabilização relativamente aos grupos de fracções comparadas. A azul estão sombreadas as células correspondentes aos argumentos válidos. Os argumentos baseados na relação inversa evidenciam a compreensão de que, quanto maior é o número de recipientes menor é a fracção se for mantido o número de itens a repartir. Os argumentos definidos aqui como percepção/correspondência referem-se às justificações baseadas na representação pictórica da divisão e referem o tamanho das partes resultantes. A referência ao numerador ou ao denominador caracteriza os argumentos em que os alunos apenas justificam a comparação através da comparação de um desses valores. Os argumentos definidos como número de partes são assinalados nos casos em que a comparação é feita apenas com referência a esse aspecto sem ser referido o tamanho das partes resultantes da divisão. Os argumentos caracterizados como relação de proporcionalidade referem-se aos casos em que as justificações têm por base a relação um para muitos, em que os alunos estabelecem raciocínios multiplicativos identificando subconjuntos que distribuem pelos recipientes.

N=8	Argumentos usados na comparação de fracções														
Fracções envolvidas	$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4},\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3},\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4},\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2},\frac{1}{3},$	$\frac{2}{4},\frac{3}{6}$	$\frac{1}{3},\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3},\frac{3}{9}$	$\frac{3}{5},\frac{3}{7}$	$\frac{2}{4},\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2},\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3},\frac{2}{6},$	$\frac{3}{6},\frac{2}{4},$	$\frac{2}{3},\frac{2}{4},$	$\frac{1}{4},\frac{2}{4},$
Relação inversa (válido)	1	6	7	4	8				7	7				7	7
Percepção Correspondência (válido)	5										6				
Referência ao numerador ou ao denominador	2	1	1	4					1		1			1	1
Número de partes		1													
Relação de proporcionalidade						7	7	7				7	7		
Sem justificação ou irrelevante.						1	1	1		1	1	1	1		

Tabela 4.2 - Frequência do tipo de argumentos apresentados na comparação de fracções.

Os argumentos usados pelos alunos para estabelecer comparações, ordenação e reconhecimento da equivalência entre fracções, variaram consoante as fracções em análise. Assim, verificou-se que na comparação de fracções não equivalentes em que o numerador é o um, os alunos baseiam os seus procedimentos predominantemente na relação inversa entre o numerador e o denominador. Nestas situações, os alunos têm facilidade em verbalizar os argumentos que justificam as suas escolhas, apresentando justificações escritas do tipo: "dois terços é maior do que dois quartos porque são menos coelhos e as tartes são iguais". Para este grupo de alunos, tornou-se evidente que havendo o mesmo número de itens a repartir, será maior a quantidade atribuída na situação em que há menos recipientes. Do mesmo modo, os alunos compreenderam que havendo o mesmo número de recipientes, será maior a quantidade atribuída nas situações em que há mais itens a repartir. Na verbalização desse raciocínio os alunos apresentaram argumentos do tipo: 'onde tem um quarto são menos chocolates e onde tem três quartos é mais chocolates e os meninos são os mesmos'.

O uso da representação pictórica da divisão em partes iguais foi sempre usado nas primeiras tarefas e parece ter sido um suporte para a comparação e para a identificação dessa relação inversa. Gradualmente, os alunos foram abandonando essa representação, mas mantiveram a relação inversa entre o dividendo e o divisor como argumento para justificarem a ordenação. Em todas as tarefas que envolveram comparação de fracções não equivalentes com numeradores e denominadores diferentes, os alunos que ordenaram correctamente as fracções apresentaram argumentos em que tomaram como referência a fracção $\frac{1}{2}$. Um deles, que errou quase todas as ordenações, baseou-se na comparação dos denominadores. Outro aluno, que errou apenas duas ordenações usou como justificação o número de partes e não o seu tamanho.

No caso do reconhecimento da equivalência entre fracções, todos os alunos que o conseguiram fazer, estabeleceram uma relação de proporcionalidade entre o número de itens e o número de recipientes. Também nestes casos, os alunos começaram por fazer a representação pictórica da divisão em partes iguais, mas foram, progressivamente, deixando de a fazer, continuando a apresentar argumentos que sugerem o raciocínio proporcional. Nas fracções equivalentes, dois alunos que apresentaram argumentos que sugerem o raciocínio proporcional, fizeram uma tentativa para darem uma explicação algébrica da equivalência, o que sugere a existência de raciocínio multiplicativo, quando escrevem " Quem come mais não é ninguém porque $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{2}{6}$. Eu pus o sinal igual porque 3+3=6 e 1+1=2". Os resultados e os argumentos usados pelos alunos sugerem que tendencialmente usam a relação inversa entre o numerador e o denominador para comparar fracções não equivalentes. A equivalência surgiu muito naturalmente quando alguns alunos constataram que algumas fracções diferentes expressavam a mesma quantidade (ver transcrição 4.3, p. 73). No decorrer do estudo, os alunos tiveram prestações muito boas na identificação das fracções equivalentes propostas, estabelecendo, por vezes, uma relação proporcional entre as fracções envolvidas como explica um aluno na sua linguagem simples "uma piza para quatro pessoas, e outra piza é para outros quatro".

4.2. Fase 2

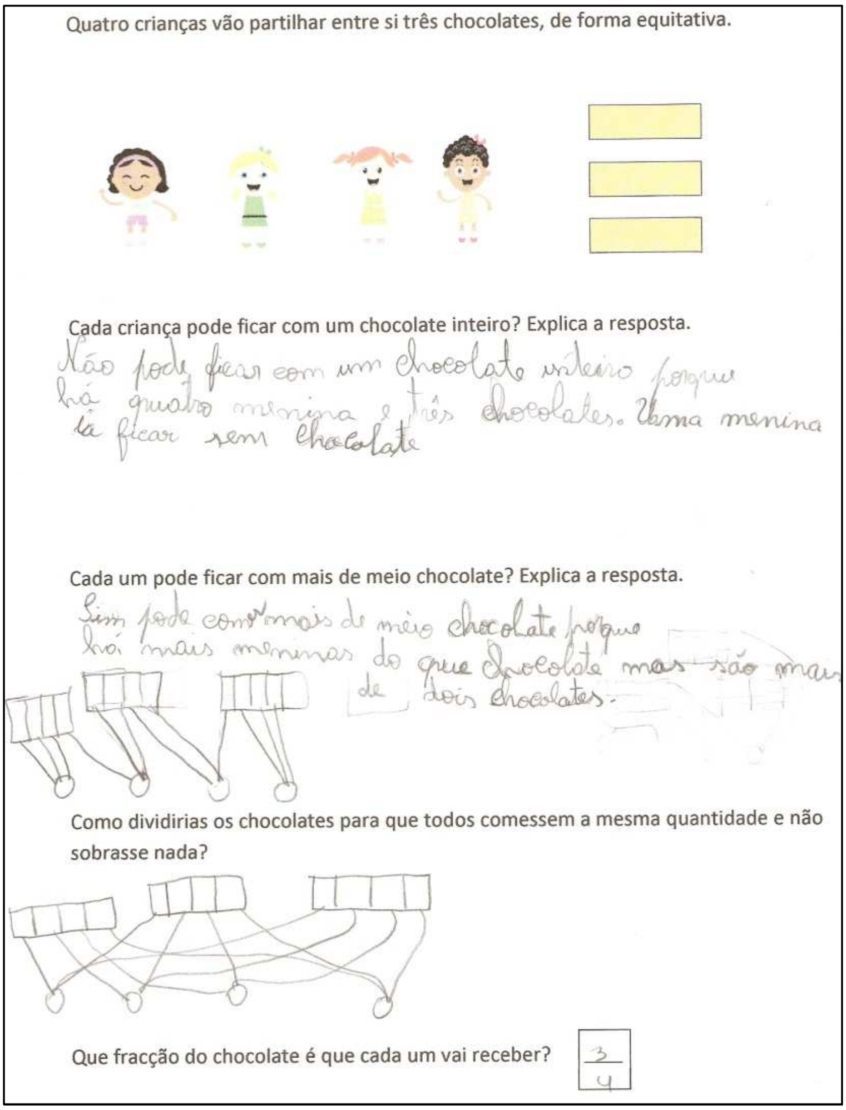
A segunda fase do estudo incidiu sobre tarefas de interpretação parte-todo. Importava nesta fase perceber como transferem os alunos o conhecimento adquirido no trabalho com tarefas de interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo. Tendo em conta que, entre o final da fase 1 e o início da fase 2 tinham passado cerca de três semanas, por ter sido a interrupção de aulas da Páscoa, pareceu-nos conveniente iniciar esta fase com uma sessão em que os alunos realizassem algumas tarefas (Anexos 2 - A, pp. 213 - 214) para relembrar a interpretação quociente trabalhada na fase 1 do estudo. Além desta sessão, a fase 2 incluiu duas sessões em que se trabalhou a representação, significado e comparação de fracções na interpretação parte-todo e uma sessão em que se explorou a construção do todo, dada uma fracção.

4.2.1. Sobre da interpretação quociente

Sessão 1

A 1.ª sessão desta fase teve como objectivo principal verificar se os alunos ainda seriam capazes de resolver problemas simples de identificação de quantidades apresentados na interpretação quociente após três semanas. A primeira tarefa apresentava quatro questões referentes à partilha de três chocolates por quatro amigas e apresentava uma imagem como suporte visual. O professor pediu a um aluno que lesse o enunciado da tarefa para se certificar de que todos os alunos tinham compreendido o que se pretendia e se todos compreendiam que as questões estavam relacionadas com a imagem apresentada.

Relativamente à primeira questão, todos os alunos usaram a correspondência entre itens a repartir e número de recipientes para justificar o facto de não ser possível dar um chocolate a cada criança. As justificações apresentadas variaram na forma, mas o raciocínio tem por base a correspondência entre itens a repartir e recipientes como ilustram as figuras 4.57, 4.58, 4.59 e 4.60.



Quatro crianças vão partilhar entre si três chocolates, de forma equitativa.

Cada criança pode ficar com um chocolate inteiro? Explica a resposta.

Não pode ficar com um chocolate inteiro porque há quatro menina e três chocolates. Uma menina ía ficar sem chocolate

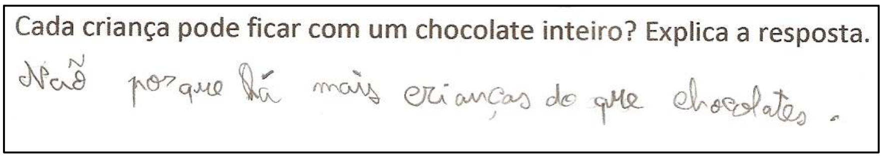
Cada um pode ficar com mais de meio chocolate? Explica a resposta.

Sim pode com mais de meio chocolate porque há mais meninas do que chocolate mas são mais de dois chocolates.

Como dividirias os chocolates para que todos comessem a mesma quantidade e não sobrasse nada?

Que fracção do chocolate é que cada um vai receber? $\frac{3}{4}$

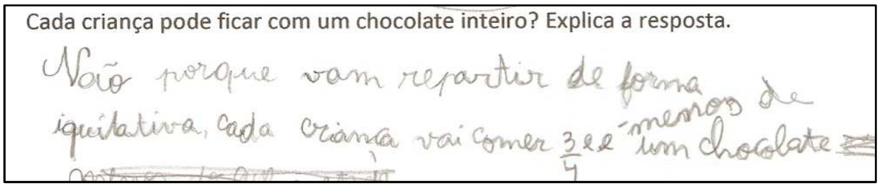
Figura 4.57 - Resposta dada às quatro questões pelo aluno Mário.



Cada criança pode ficar com um chocolate inteiro? Explica a resposta.

Não porque há mais crianças do que chocolates.

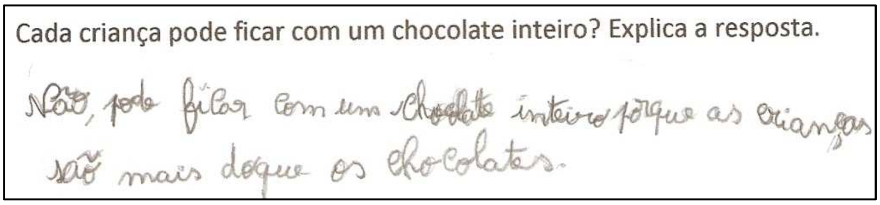
Figura 4.58 - Resposta dada pelo Mário à primeira questão.



Cada criança pode ficar com um chocolate inteiro? Explica a resposta.

Não porque vam repartir de forma iquitativa, cada criança vai comer $\frac{3}{4}$ e menos de um chocolate

Figura 4.59 - Resposta dada pelo Rui à primeira questão.

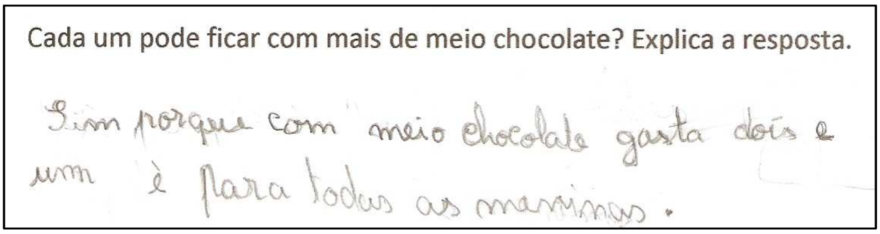


Cada criança pode ficar com um chocolate inteiro? Explica a resposta.

Não, pode ficar com um chocolate inteiro porque as crianças são mais doque os chocolates.

Figura 4.60 - Resposta dada pelo João à primeira questão.

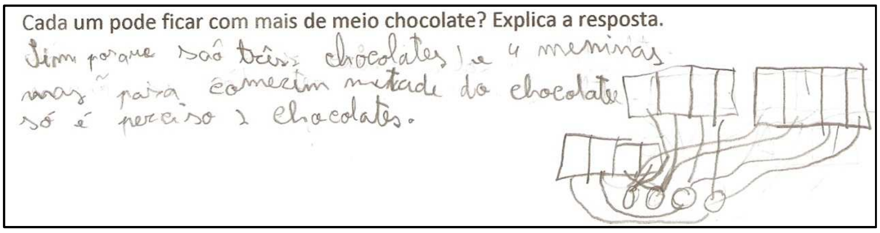
Também na segunda questão, as respostas de sete alunos foram baseadas na correspondência que permitiu verificar que cada criança iria comer mais de meio chocolate. Nem todos os alunos necessitaram de representar a correspondência.



Cada um pode ficar com mais de meio chocolate? Explica a resposta.

Sim porque com meio chocolate gasta dois e um è para todas as meninas.

Figura 4.61- Exemplos de resposta dada pela Bela à primeira questão sem recurso à representação da partilha.



Cada um pode ficar com mais de meio chocolate? Explica a resposta.

Sim porque são três chocolates e 4 meninas mas para comerem metade do chocolate só é preciso 2 chocolates.

Figura 4.62- Exemplo de resposta dada pelo Mário, com recurso à representação pictórica da partilha.

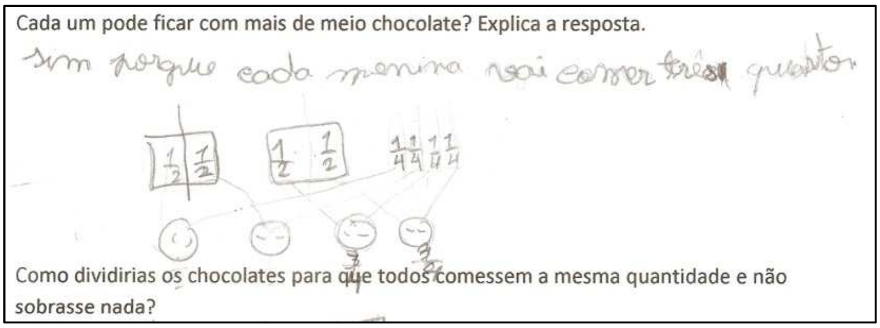


Figura 4.63- Resposta à primeira questão justificada com as representações simbólicas das fracções.

Quatro alunos não apresentaram representação pictórica da partilha, conseguindo explicar o seu raciocínio sem necessidade de representação. A figura 4.61 mostra um exemplo da resolução de um aluno que não necessitou de representação para comparar as fracções. Os outros quatro alunos apresentaram um esquema da partilha semelhante ao exemplo apresentado na figura 4.62, mas um deles justificou a resposta usando também a representação simbólica para mostrar que cada criança podia receber mais de metade de um chocolate (ver figura 4.63).

Na terceira questão em que se pedia para dividir os chocolates de forma justa, surgiram formas diferentes de representar a divisão, o que sugere que os alunos compreenderam que se pode fazer uma partilha justa e equitativa, dividindo de formas diferentes, como ilustra o exemplo apresentado nas figuras 4.64 A e B.

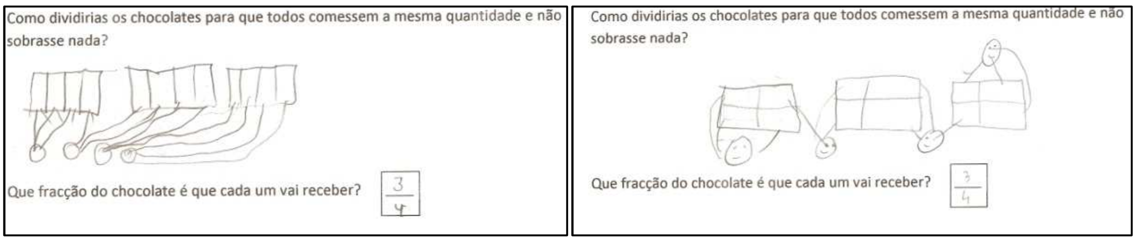


Figura 4.64 A e B - Exemplo de duas representações pictóricas e representação simbólica do quociente.

A segunda tarefa tinha a mesma estrutura da primeira, mas havia dois chocolates para repartir por quatro crianças (ver figura 4.65). As respostas dadas pelos alunos foram semelhantes às da primeira tarefa e todos os alunos foram capazes de responder às questões colocadas. Todos os alunos concluíram que não era possível que cada criança comesse um chocolate inteiro, nem mais de metade de um chocolate. Sete dos oito alunos apresentaram a divisão dos chocolates de forma semelhante à apresentada na figura 4.65 e igualaram $\frac{2}{4}$ a $\frac{1}{2}$, sem ter sido pedido na questão nem ter sido sugerido pelo professor.

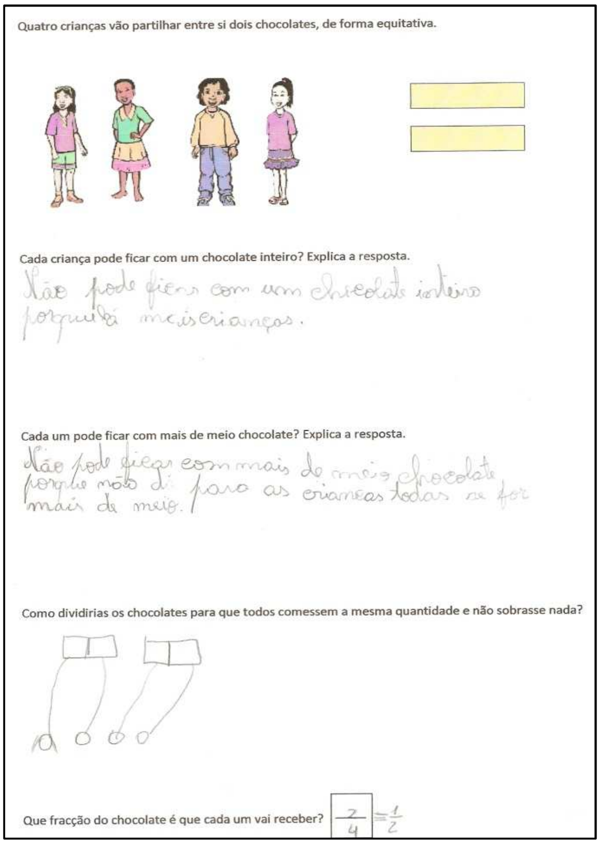


Figura 4.65- Exemplo de respostas dadas para a segunda tarefa.

A divisão dos chocolates pedida na terceira questão (ver figura 4.65) suscitou formas diferentes de dividir os chocolates. Três alunos dividiram cada chocolate em tantas partes como o número de itens e atribuíram duas partes a cada criança (ver figuras 4.66 A). Cinco alunos dividiram cada chocolate em duas partes e atribuíram uma a cada criança (ver figuras 4.66 B). Todos estes alunos igualaram a fracção $\frac{2}{4}$ a $\frac{1}{2}$ como se mostra nos exemplos apresentados nas figuras 4.66 A e B. Esta divisão sugere que houve uma antecipação do resultado e reconhecimento de mais de uma fracção para representar o mesmo quociente.

Figura 4.66 A e B - Exemplos da partilha dos dois chocolates e identificação da equivalência de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

A terceira tarefa desta sessão consistiu na resolução de dois problemas. Pretendia-se verificar se os alunos ainda eram capazes de identificar a relação inversa. Estes problemas acrescentavam a dificuldade de associarem a uma quantidade contínua, o pacote de biscoitos, uma quantidade discreta, os biscoitos. Surpreendentemente, todos os alunos resolveram os dois problemas com bastante facilidade e sem qualquer tipo de ajuda do professor. A figura 4.67 ilustra o trabalho de um dos alunos.

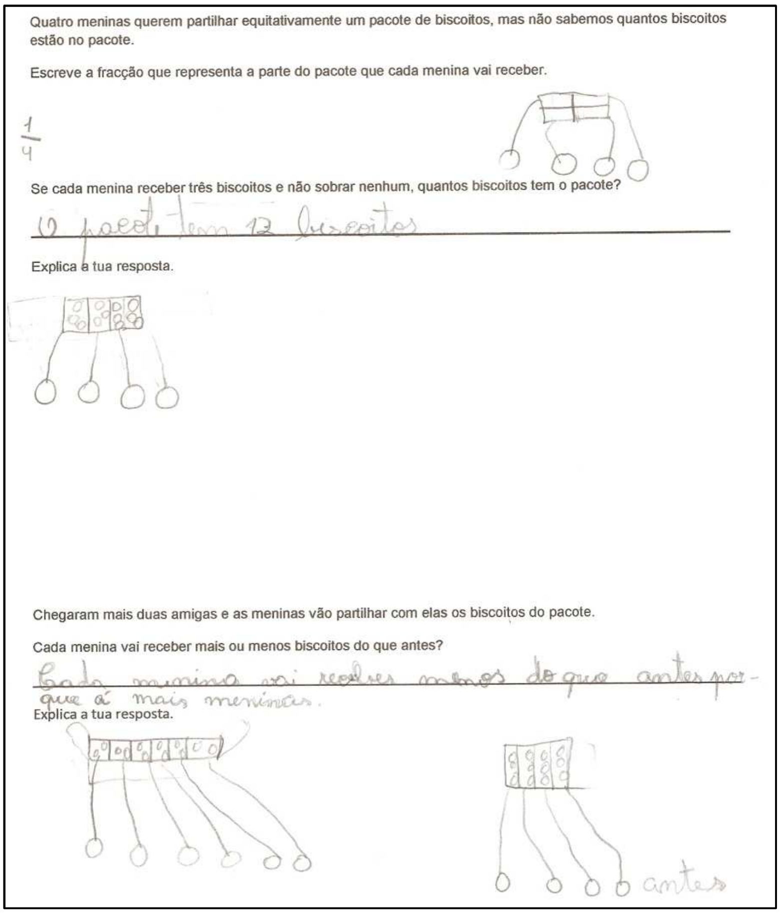
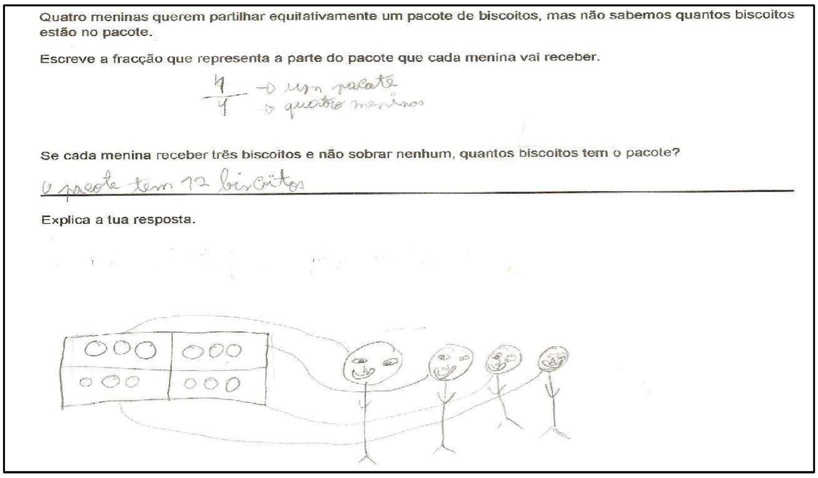


Figura 4.67- Exemplo de resolução dos problemas efectuada pela Selma.

Para resolver os problemas propostos, todos os alunos fizeram a representação simbólica e adoptaram a representação pictórica como estratégia de resolução. Conceberam os seus próprios modelos para descobrirem o total de biscoitos que o pacote teria, estabelecendo uma relação entre o número de recipientes e o número de biscoitos que o pacote continha. São exemplos dessas estratégias as que se podem observar nas figuras 4.67 e 4.68. A escrita da fracção do pacote que cada menina receberia foi interpretada pelos alunos como o quociente da divisão do pacote pelas quatro meninas (ver figura 4.68).



Quatro meninas querem partilhar equitativamente um pacote de biscoitos, mas não sabemos quantos biscoitos estão no pacote.

Escreve a fracção que representa a parte do pacote que cada menina vai receber.

$\frac{1}{4}$ → um pacote → quatro meninas

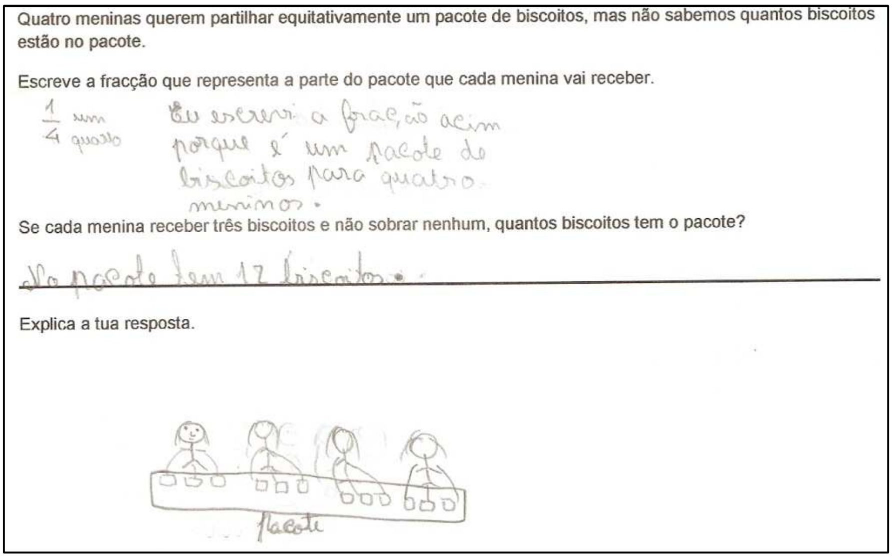
Se cada menina receber três biscoitos e não sobrar nenhum, quantos biscoitos tem o pacote?

o pacote tem 12 biscoitos

Explica a tua resposta.

Figura 4.68 – Fracção representativa do quociente e representação pictórica para explicar a resposta à segunda questão.

Partindo da interpretação quociente, todos os alunos foram capazes de reconstruir o todo (total de biscoitos) distribuindo três a cada recipiente. Deste modo, todos conseguiram descobrir o total de biscoitos contidos no pacote. Os processos usados pelos alunos sugerem uma distribuição baseada na correspondência, mas ao mesmo tempo exigia uma certa antecipação do resultado para saberem em quantas partes estaria dividido o pacote (Ver figuras 4.69). Todos os alunos dividiram o pacote em quatro partes e, dentro de cada parte, foram colocando sucessivamente biscoitos até totalizar 12 efectuando assim a distribuição.


Quatro meninas querem partilhar equitativamente um pacote de biscoitos, mas não sabemos quantos biscoitos estão no pacote.

Escreve a fracção que representa a parte do pacote que cada menina vai receber.

$\frac{1}{4}$ um quarto

Eu escrevi a fração acim porque é um pacote de biscoitos para quatro meninos.

Se cada menina receber três biscoitos e não sobrar nenhum, quantos biscoitos tem o pacote?

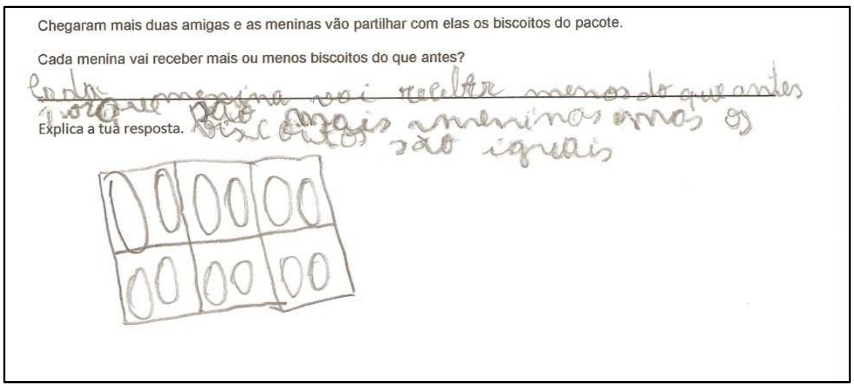
No pacote tem 12 biscoitos.

Explica a tua resposta.

pacote

Figura 4.69- Construção do total dos biscoitos existentes no pacote pela Bela.

No segundo problema, os alunos refizeram a distribuição dos doze biscoitos existentes no pacote, por mais duas meninas, mostrando o seu raciocínio através da representação da distribuição. Quatro alunos concluíram que, sendo seis meninas a partilhar os biscoitos, iriam receber menos tal como é exemplificado pela resolução apresentada na figura 4.70. Além de representarem a nova distribuição, apresentaram argumentos escritos em que reconhecem a relação inversa entre o numerador e o denominador.


Chegaram mais duas amigas e as meninas vão partilhar com elas os biscoitos do pacote.

Cada menina vai receber mais ou menos biscoitos do que antes?

Cada menina vai receber menos do que antes

Explica a tua resposta.

porque são mais meninas mas os biscoitos são iguais

Figura 4.70 - Exemplo de resposta evidenciando a relação inversa entre o numerador e o denominador.

Os outros quatro alunos apenas apresentaram a resposta correcta não apresentando argumentos escritos que verbalizem, de forma clara, a consciência da relação inversa entre o numerador e o denominador como exemplifica a resposta da figura 4.71.

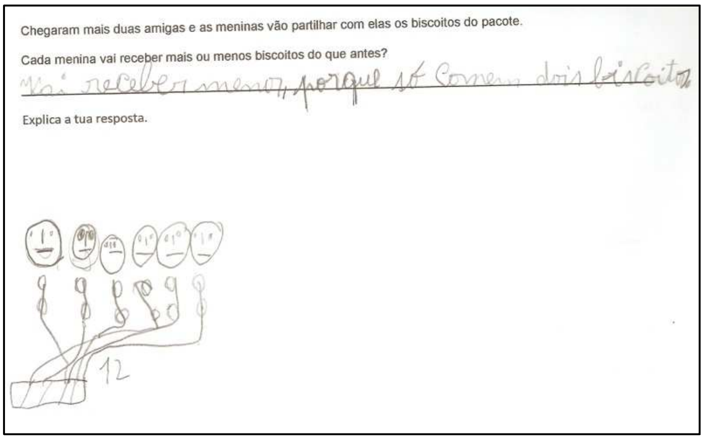


Figura 4.71 - Exemplo de resposta correcta sem explicitar relação inversa entre o numerador e o denominador.

Nesta sessão, os alunos demonstraram que continuavam a perceber os aspectos lógicos das fracções na interpretação quociente e que são capazes de usar os conhecimentos adquiridos na resolução de novos problemas. Os argumentos usados pelos alunos, nesta sessão, sugerem que se desenvolveu uma boa compreensão da representação simbólica e pictórica de fracções na interpretação quociente, sendo capazes de trabalhar a divisão equitativa. Metade dos alunos demonstrou ter ainda presente a compreensão da relação inversa entre o numerador e o denominador, pois foram capazes de explicar que aumentando o número de recipientes, o quociente seria menor. A outra metade dos alunos conseguiu perceber essa relação, mas ainda teve alguma dificuldade em a verbalizar claramente. À semelhança do que se verificou na fase 1 do estudo, também aqui a comparação de fracções em que se mantém o numerador (ou o denominador) é feita, essencialmente, com base na relação inversa como se verifica nas expressões por eles escritas: “Cada menina come menos que antes porque antes havia quatro meninas e agora são seis”; “ cada menina vai comer menos do que antes porque aumentaram as meninas”. Isto conduz os alunos a resoluções maioritariamente correctas.

4.2.2. Sobre representação, significado e comparação de fracções na interpretação parte-todo.

Sessão 2

Nestas sessões foram apresentadas aos alunos várias tarefas em que era pedido para que fizessem representações simbólicas, pictóricas e verbais de fracções na interpretação parte-todo. Apenas uma das tarefas envolvia a comparação de fracções unitárias.

A sessão 2 iniciou-se com a simulação de uma situação que envolvia a interpretação parte-todo. Pegando num rectângulo de papel e desenhando-o no quadro, a professora chama um aluno para junto dela e inicia um diálogo com a turma (ver transcrição 4.7).

IP: – O Mário não gosta muito de chocolate e só vai comer um terço do chocolate…
Rui: – Uma parte…
IP: – …uma parte de quantas partes?
Alunos: – De três.
IP – O Mário vai comer um terço do chocolate quer dizer que ele vai comer uma parte de três…ele tem que partir o chocolate em quantas partes?
Alunos: – Em três.
IP: – [A professora corta o rectângulo em três partes iguais e divide o que está no quadro em três partes]…se eu quiser pintar a parte que ele vai comer, quantas partes pinto?
Várias vozes – duas… uma
IP: – Uma parte… que corresponde a…
Alunos: – Um terço. [A professora escreve a fracção no quadro]
IP: – Nós tínhamos aprendido que o número de cima era o número de chocolates e o número de baixo era o número de meninos … e agora, também quer dizer isso?
Gonçalo – Não
IP: – Que será que quer dizer este 1? [aponta para o numerador]
Alunos – Um chocolate.
IP: – Isso era o que tínhamos aprendido…, mas também quer dizer outra coisa…
Bela: – Uma parte…
IP: – Isso mesmo… uma parte que o Mário vai comer. [Escreve ao lado do 1 o seu significado e os alunos começam imediatamente a dizer o significado do denominador…]

Alunos: – Partida em três partes…

IP: – E o número de baixo…?

Bela, João e Rui: – Partido em três partes.

IP: – Isso mesmo … 3 partes iguais em que o chocolate está partido. [Escreve o significado ao lado do 3]

IP: – Os números agora têm outro significado, não têm?

Bela: – Sim.

[A professora explica novamente]

IP: – Um terço quer dizer que ela pegou no chocolate e o partiu em…

Alunos: – Três partes.

IP: – Três partes … e que…

Bel: – Só comeu uma.

Transcrição 4.7 – Primeira abordar das fracções na situação parte-todo

De seguida a professora desenhou no quadro quatro rectângulos representando "chocolates", um para cada aluno, e pediu aos quatro alunos que pintassem, respectivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ no rectângulo. De seguida deviam escrever e dizer para a turma o significado do numerador e do denominador da fracção neste novo contexto. A imagem seguinte (ver figura 4.72) mostra o esquema resultante da abordagem a esta nova interpretação das fracções, feito pela professora e o momento seguinte, em que os quatro alunos estão no quadro a pintar respectivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ de cada chocolate desenhado pela professora.

Figura 4.72 - Grupo de alunos a representar uma fracção de um chocolate na interpretação parte-todo.

Seguiram-se os outros quatro alunos que foram realizar a mesma tarefa, mas com as fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{6}$. Depois de todos realizarem a tarefa com sucesso, a professora colocou uma questão que originou o diálogo da transcrição 8.

IP: – Qual é que vai comer mais?..o que vai comer duas partes de quatro, o que vai comer duas partes de três…

Bela: – Duas partes de três… porque está repartido em poucas partes… são maiores …

Leonel: – Toda a gente vai comer duas partes.

IP: – E as partes são iguais?

Alunos: – não.

IP: – Quem é que tem as partes mais pequenas?

João e Bela: – É o l. [referindo-se à primeira situação que envolvia a fracção $^{2}/_{6}$]

IP: – É o l porquê?

Alunos: – Porque tem mais partes.

IP: - Então as partes são mais pequenas…

Rui: – Quem tem menos partes é que come mais… [Note-se que o aluno queria referir o maior tamanho das partes quando o chocolate está dividido em menos partes].

Transcrição 4.8 - Diálogo onde foram comparadas fracções em situação parte-todo.

No diálogo entre todos os alunos e o professor ficou evidente a compreensão da relação inversa entre o número de partes e o seu tamanho. Em nenhum momento foi referido o significado da fracção na interpretação quociente. A aula prosseguiu com a apresentação gradual de slides de um Power Point com as tarefas que os alunos teriam de resolver e que também foram fornecidas em suporte de papel (Anexos 2 - B, pp. 217 - 219). Após a resolução de cada tarefa, os alunos apresentavam as suas resoluções, a professora e os colegas colocavam questões e prosseguia-se com a tarefa seguinte se nada mais houvesse a acrescentar.

Na primeira tarefa realizada em suporte de papel era dado o número de partes em que um chocolate devia ser dividido para que uma criança comesse uma das partes e pedia-se a representação simbólica e verbal da parte comida. Sete alunos fizeram correctamente a representação simbólica e verbal, nas duas tarefas e fizeram a representação pictórica da situação. A figura 4.73 mostra como um aluno assiná-la a parte correspondente a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{3}$ com setas.

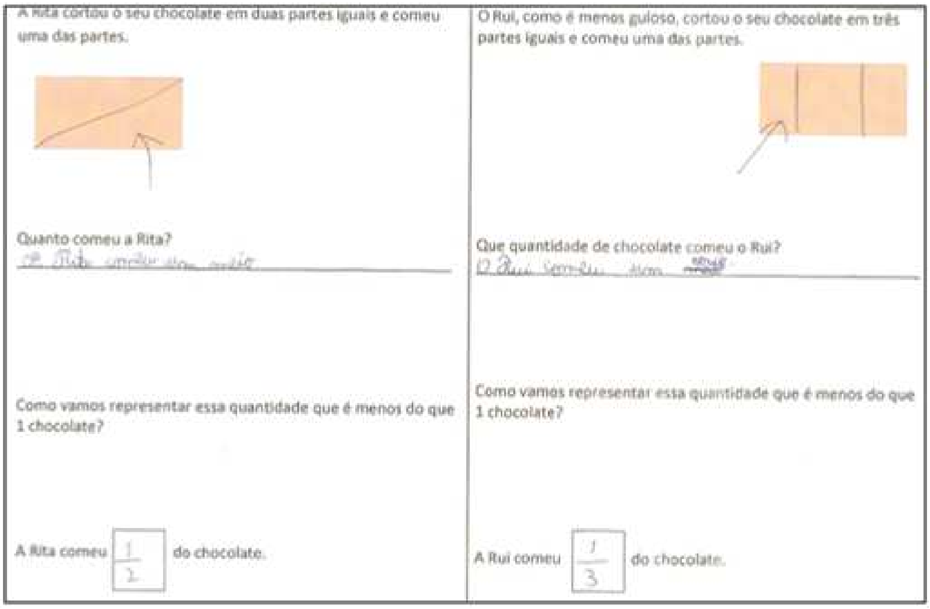


Figura 4.73 – Representação verbal, pictórica e simbólica das fracções $^1/_2$ e $^1/_3$.

Um aluno não conseguiu fazer a representação simbólica correspondente a $\frac{1}{2}$ do chocolate, dizendo que a Rita comeu dois meios. Contudo, procedeu correctamente no caso da fracção $^1/_3$ como ilustra a figura 4.74. Quando foi apresentar a sua resolução aos colegas, os procedimentos foram correctos, o que leva a crer que tenha sido distracção.

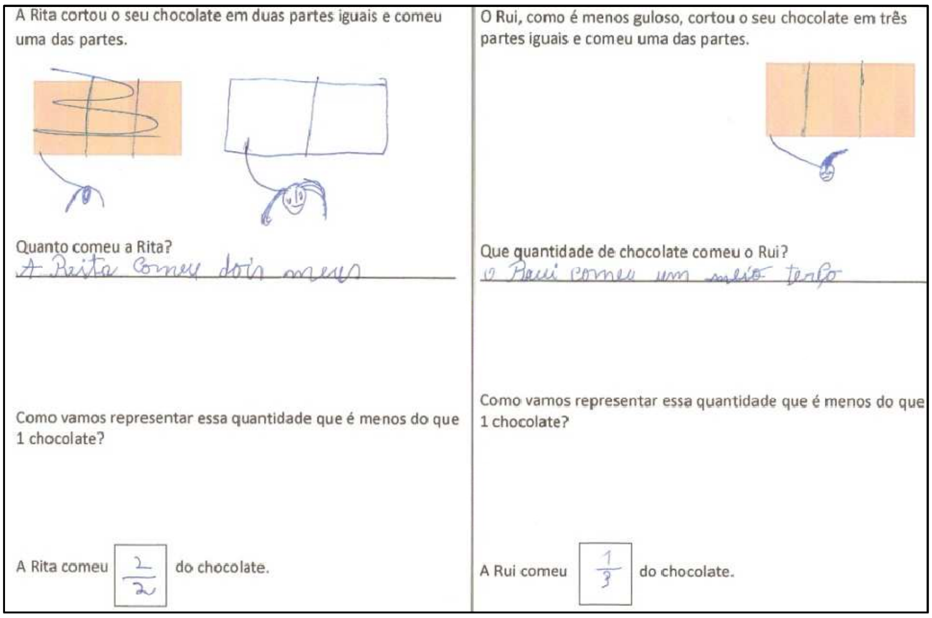
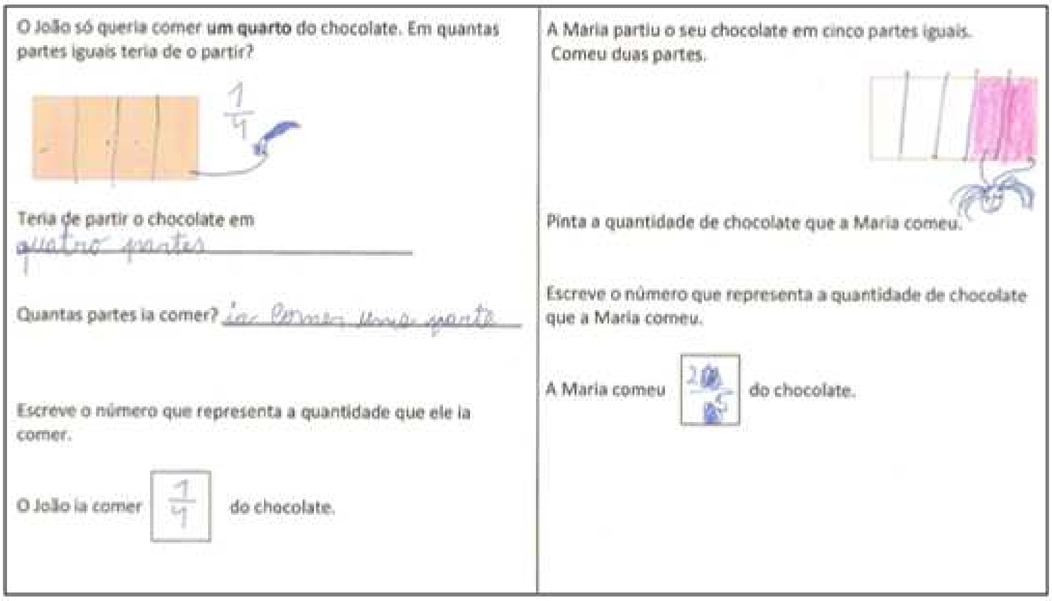


Figura 4.74 - Representação simbólica incorrecta para a primeira situação.

Nesta tarefa todos os alunos assinalaram de forma correcta a parte correspondente a $\frac{1}{2}$, embora usassem esquemas diferentes (ver figuras 4.73 e 4.74). Não houve qualquer tipo de conflito com o significado da fracção na interpretação quociente.

A segunda tarefa envolvia a representação pictórica das fracções $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$. A fracção $\frac{2}{5}$ foi introduzida para verificar se a interpretação quociente das fracções não ia interferir na representação pictórica uma vez que, nesta tarefa, o chocolate não estava desenhado. Também nesta tarefa, os alunos procuraram mostrar, através de uma representação pictórica, a parte tomada. Na figura 4.75, o aluno divide o chocolate em quatro partes e indica uma delas com uma seta que é atribuída ao João. Na figura 4.76, outro aluno sombreia a parte tomada.


O João só queria comer **um quarto** do chocolate. Em quantas partes iguais teria de o partir?

1/4

Teria de partir o chocolate em
quatro partes

Quantas partes ia comer? ia comer uma parte

Escreve o número que representa a quantidade que ele ia comer.

O João ia comer 1/4 do chocolate.

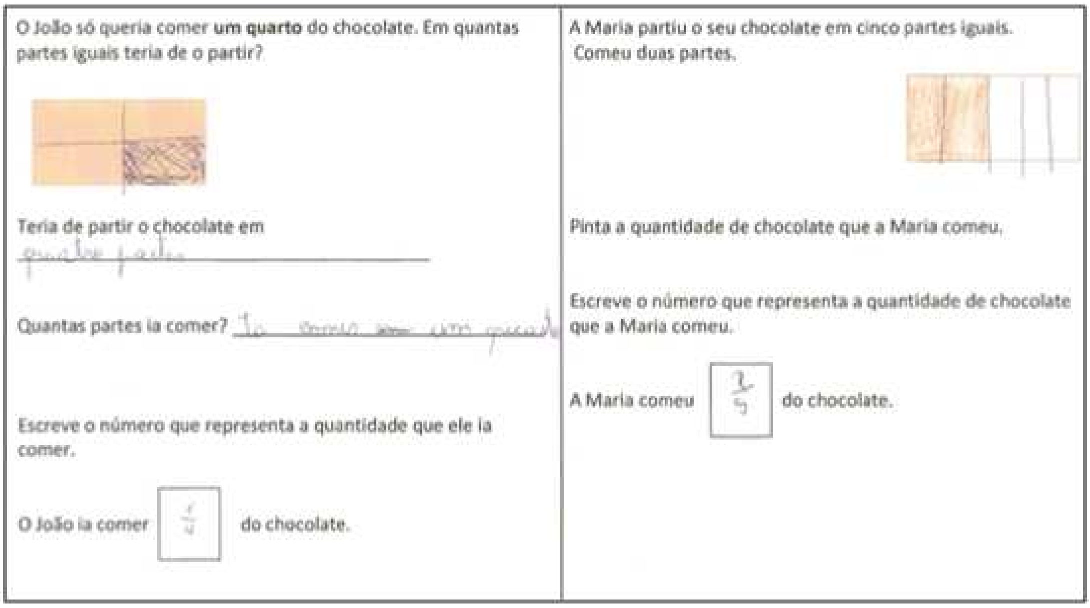
A Maria partiu o seu chocolate em cinco partes iguais.
Comeu duas partes.

Pinta a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

A Maria comeu 2/5 do chocolate.

Figura 4.75 -Exemplo das representações da fracção $^1/_4$ e $^2/_5$.


O João só queria comer **um quarto** do chocolate. Em quantas partes iguais teria de o partir?

Teria de partir o chocolate em
quatro partes

Quantas partes ia comer?

Escreve o número que representa a quantidade que ele ia comer.

O João ia comer 1/4 do chocolate.

A Maria partiu o seu chocolate em cinco partes iguais.
Comeu duas partes.

Pinta a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

A Maria comeu 2/5 do chocolate.

Figura 4.76 - Resolução onde o aluno faz a representação pictórica da parte tomada.

À semelhança do que tinha acontecido na primeira tarefa, todos os alunos fizeram a representação verbal e simbólica correctamente e a representação pictórica sem que tenha sido pedido. No caso da fracção $\frac{2}{5}$ que envolvia duas partes tomadas, todos os alunos fizeram a representação pictórica e simbólica com sucesso e, aparentemente, não houve conflitos com o significado do numerador e do denominador na interpretação quociente.

A terceira tarefa tinha como objectivo identificar e fazer a representação simbólica de cada uma das três partes iguais de uma bandeira seguindo as indicações dadas num pequeno texto (ver figura 4.77) que também foi lido à turma pela professora no início da tarefa.

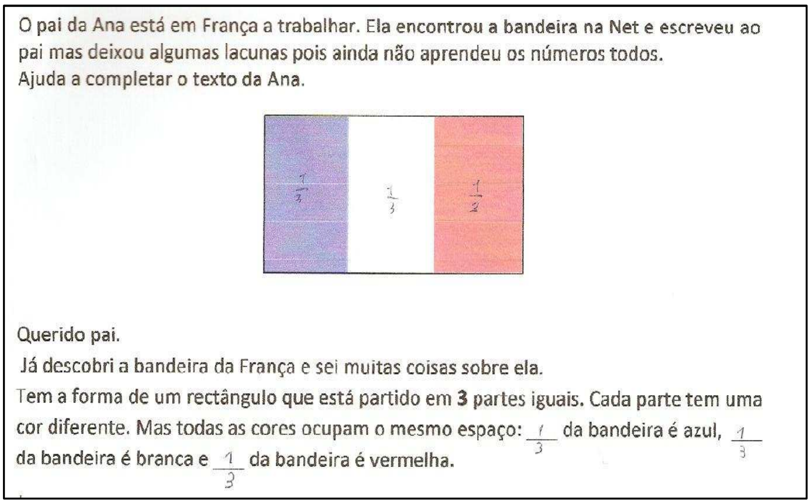


Figura 4.77 - Exemplo de resolução do problema de representação simbólica.

Todos os alunos conseguiram fazer a representação simbólica de cada uma das três partes da bandeira completando o texto sem qualquer dificuldade.

A quarta tarefa tinha como objectivo a representação pictórica de fracções dadas na interpretação parte-todo (ver figura 4.78).

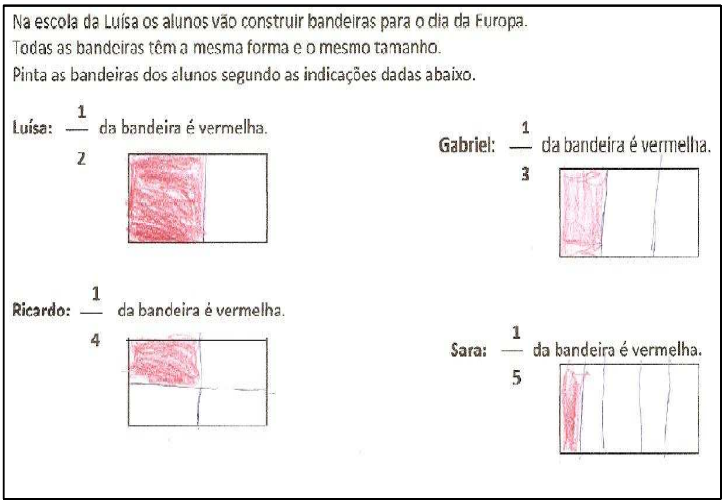


Figura 4.78 - Representação pictórica de fracções em situação parte-todo.

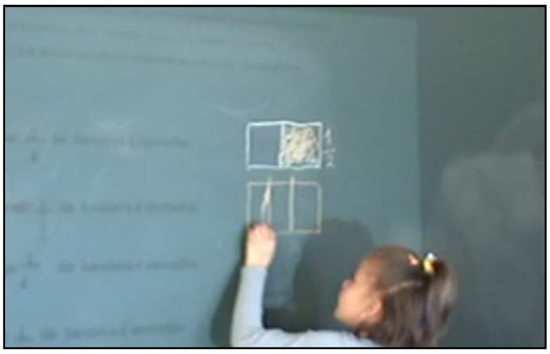
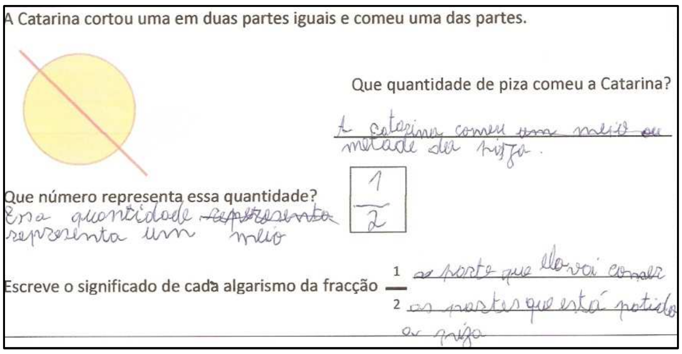


Figura 4.79 - Aluna a mostrar como resolveu a tarefa.

Também nesta tarefa não se evidenciaram dificuldades na representação pictórica das fracções. Todos os alunos procederam à divisão do rectângulo no total correcto de partes e pintaram a fracção unitária, como era pedido. Todos os alunos fizeram correctamente as representações simbólicas, verbais e pictóricas das fracções envolvidas num contexto de interpretação parte-todo. Sempre que foram questionados sobre o significado do numerador e do denominador das fracções nesta nova interpretação, os alunos responderam correctamente.

Na terceira sessão foram propostas tarefas que envolviam representação simbólica e atribuição de significado ao denominador e numerador das fracções, com a introdução de modelos circulares (Anexo 2 - C, pp. 227 - 228). Nas três primeiras tarefas o objectivo era fazer a representação simbólica e verbal e identificar o significado do numerador e do denominador. Todos os alunos responderam correctamente às questões, identificando o significado do denominador e do numerador e apresentando as representações simbólica e verbal correctas como exemplificam as figuras 4.80, 4.81, 4.82 e 4.83.



A Catarina cortou uma em duas partes iguais e comeu uma das partes.

Que quantidade de piza comeu a Catarina?

A catarina comeu um meio ou metade da pizza.

Que número representa essa quantidade?

Esa quantidade ~~representa~~ representa um meio

$\boxed{\frac{1}{2}}$

Escreve o significado de cada algarismo da fracção $\frac{1}{2}$

1 a parte que ela vai comer

2 as partes que está partida a piza

Figura 4.80 - Exemplo de respostas dadas para a primeira tarefa.

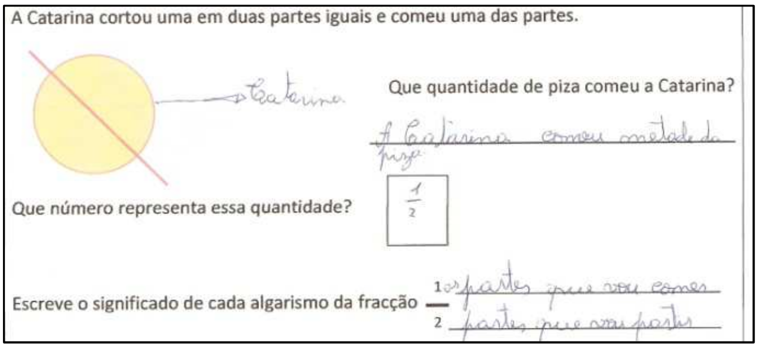


Figura 4.81- Exemplo de resposta dada para a primeira tarefa.

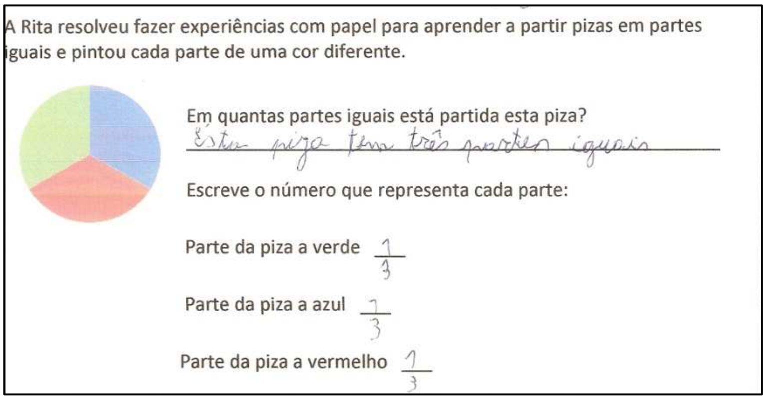


Figura 4.82 - Exemplo de resposta dada à segunda tarefa.

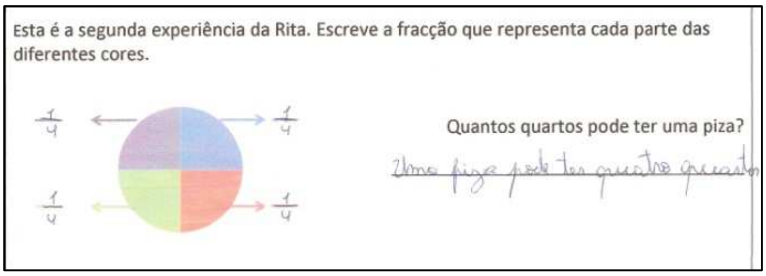
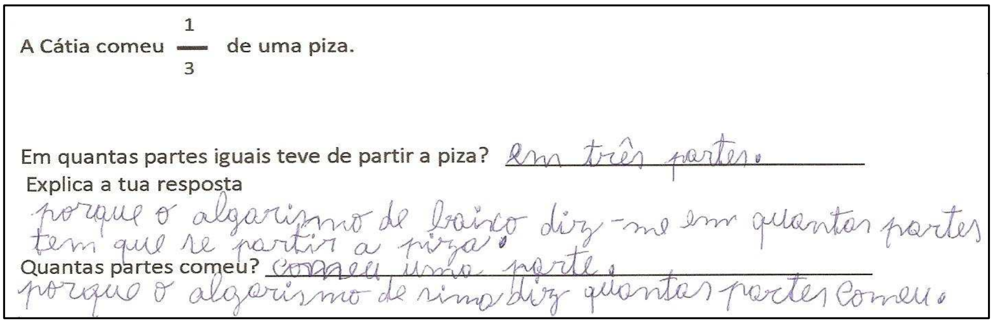


Figura 4.83 - Resposta dada à terceira tarefa.

Nas duas tarefas seguintes, pretendia-se que dada a fracção e o todo, os alunos descobrissem em quantas partes o todo era dividido e quantas partes eram tomadas. Os alunos deviam ainda justificar por escrito as suas respostas. Nas duas primeiras tarefas que envolviam o significado das fracções $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, todos os alunos demonstraram ter compreendido o significado do numerador e do denominador das fracções na interpretação parte-todo, pois todos justificaram com argumentos lógicos e válidos, as suas escolhas (ver figuras 4.84 e 4.85).



A Cátia comeu $\frac{1}{3}$ de uma piza.

Em quantas partes iguais teve de partir a piza? em três partes.

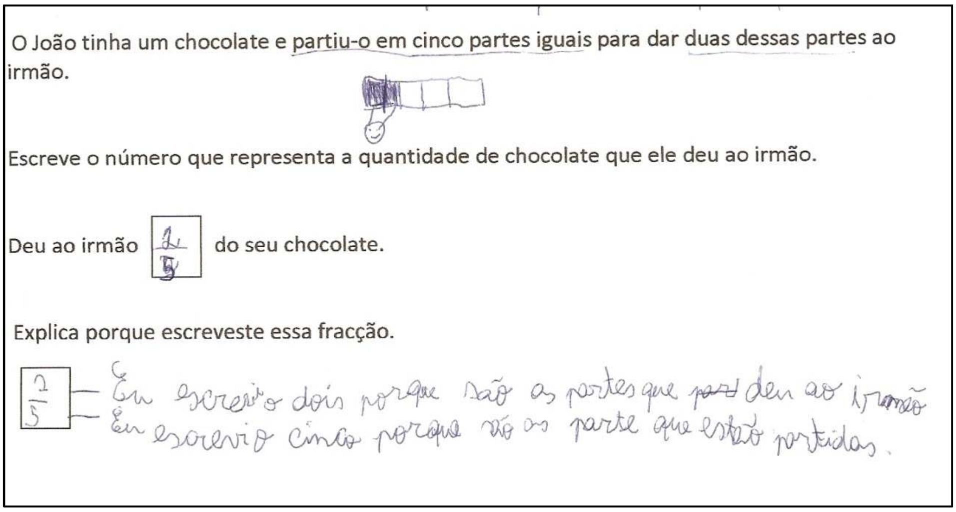
Explica a tua resposta

porque o algarismo de baixo diz-me em quantas partes tem que se partir a piza.

Quantas partes comeu? comeu uma parte.

porque o algarismo de cima diz quantas partes comeu.

Figura 4.84 - Exemplo de atribuição de significado ao denominador e ao numerador da fracção.



O João tinha um chocolate e partiu-o em cinco partes iguais para dar duas dessas partes ao irmão.

Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que ele deu ao irmão.

Deu ao irmão $\frac{2}{5}$ do seu chocolate.

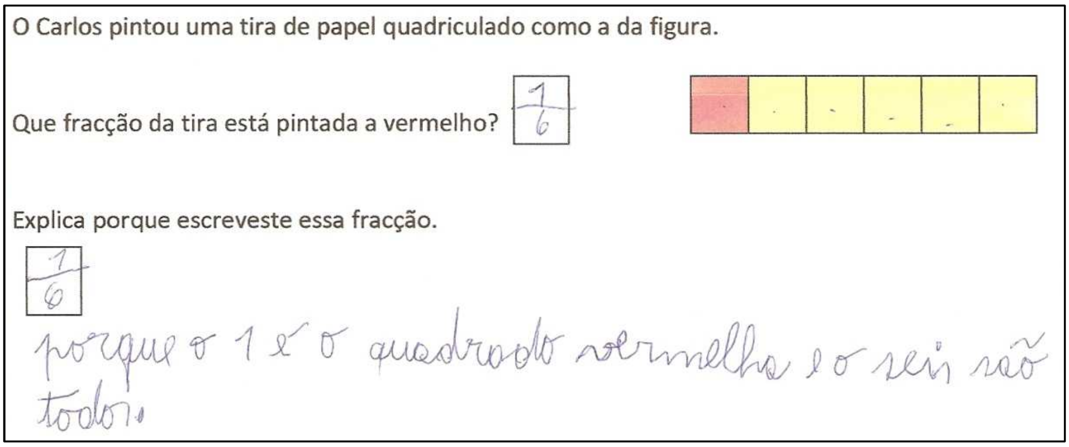
Explica porque escreveste essa fracção.

$\frac{2}{5}$ Eu escrevio dois porque são as partes que ~~pa~~ deu ao irmão

Eu escrevio cinco porque são as parte que estão partidas.

Figura 4.85 - Exemplo de argumentos usados para justificar a representação simbólica da parte tomada.

Nas tarefas de representação simbólica de situações representadas através de uma figura que envolveram a interpretação parte-todo, os alunos não evidenciaram dificuldade. A figura 4.86 ilustra a forma como os alunos entenderam o significado da fracção. Também neste tipo de tarefas não se verificaram quaisquer conflitos com o significado da fracção na interpretação quociente. Todos os alunos escreveram de forma correcta a fracção neste tipo de situações.


O Carlos pintou uma tira de papel quadriculado como a da figura.

Que fracção da tira está pintada a vermelho? $\frac{1}{6}$

Explica porque escreveste essa fracção.

$\frac{1}{6}$

porque o 1 é o quadrado vermelho e o seis são todos.

Figura 4.86 - Exemplo de representação simbólica e explicação do significado, a partir da representação pictórica.

A sétima tarefa envolvia a representação pictórica de fracções de rectângulos e comparação das respectivas fracções. O objectivo principal da tarefa era a identificação da relação inversa entre o número total de partes e o seu tamanho. Todos os alunos identificaram, de forma mais ou menos completa, a relação inversa entre o número de partes em que o todo estava dividido e o seu tamanho, concluindo que a fracção maior era um meio (ver figura 4.87). Os alunos fazem correctamente todas as representações pictóricas das fracções e fazem a comparação, expressando conhecimento da relação inversa entre o número de partes e o seu tamanho.

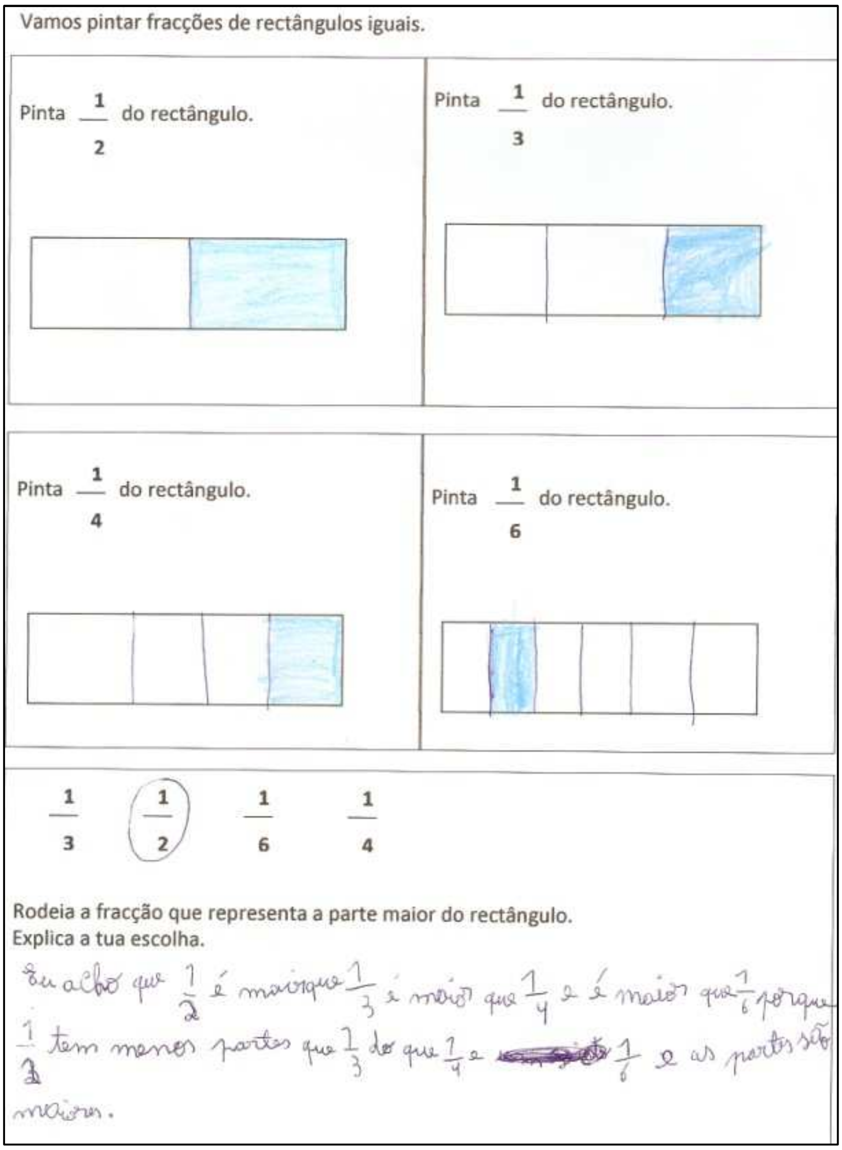
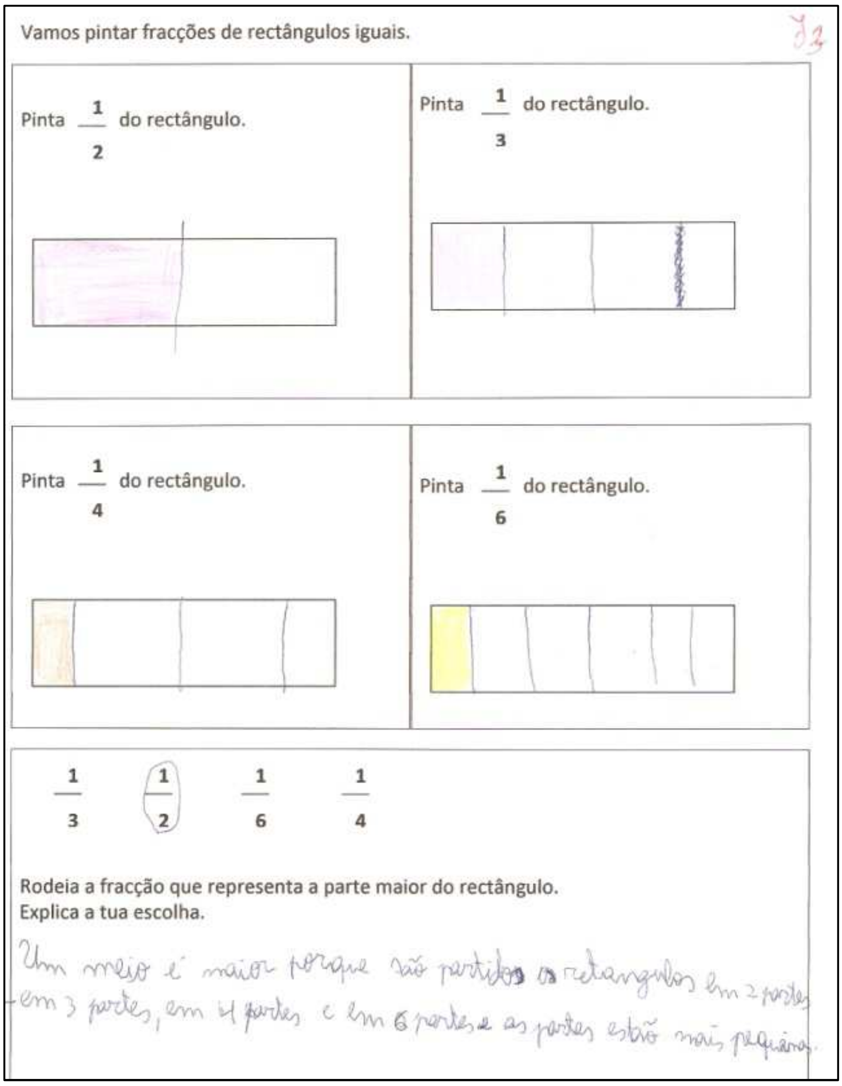


Figura 4.87 - Exemplo de argumentos apresentados na comparação das fracções.

Apesar do tamanho das partes não estar precisamente igual, este aluno explica de forma muito clara a relação inversa entre o número de partes e o seu tamanho para justificar a escolha da fracção $\frac{1}{2}$ como a que representa a parte maior.

Ainda que de forma menos clara do que no exemplo ilustrado pela figura 4.87, a figura 4.88 mostra a explicação do um aluno que evidencia a compreensão da relação inversa entre o número de partes e o seu tamanho ao escrever que, quando vai aumentando o número de partes, elas vão ficando mais pequenas, justificando assim a escolha da fracção $\frac{1}{2}$ como a maior fracção das quatro a comparar.


Vamos pintar fracções de rectângulos iguais.

Pinta $\frac{1}{2}$ do rectângulo.

Pinta $\frac{1}{3}$ do rectângulo.

Pinta $\frac{1}{4}$ do rectângulo.

Pinta $\frac{1}{6}$ do rectângulo.

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$

Rodeia a fracção que representa a parte maior do rectângulo.
Explica a tua escolha.

Um meio é maior porque são partidos os retangulos em 2 partes em 3 partes, em 4 partes e em 6 partes e as partes estão mais pequenas.

Figura 4.88 - Outro exemplo de argumentos apresentados na comparação das fracções.

Como já foi referido antes, os alunos foram capazes de fazer a representação simbólica e pictórica das fracções apresentadas na interpretação parte-todo. Aparentemente, a facilidade com que os alunos resolveram estas tarefas sugere a inexistência de conflitos entre o conceito de fracção na interpretação quociente, onde existem recipientes e objectos, e o conceito de fracção na interpretação parte-todo, onde estão apenas envolvidas partes de um todo. Em nenhum momento as explicações dos alunos referiram a existência de recipientes. Mais ainda, foi com facilidade que, quando questionados oralmente sobre a fracção menor das quatro representadas (ver figura 88) os alunos identificaram $\frac{1}{6}$ como sendo a menor fracção, apresentando justificações como "o rectângulo está partido em seis e uma parte é mais pequena" ; os chocolates são todos iguais e como as partes são muitas cada uma é mais pequena". Estes argumentos manifestam o domínio da relação inversa entre o número de partes e o seu tamanho e, como tal, algum domínio do conceito de fracção. As resoluções da tarefa de comparação de fracções sugerem que os alunos transferiram a compreensão da relação inversa entre o numerador e o denominador das tarefas de interpretação quociente. Essa compreensão permitiu-lhes estabelecer a relação inversa entre o número de partes está dividido e o tamanho de cada parte. A introdução das fracções na interpretação quociente, em que os alunos antecipam o resultado na escrita da fracção parece ter sido um elemento facilitador na compreensão do conceito na interpretação. Streefland (1997) considera que uma fracção representativa de uma divisão reflecte uma relação parte-todo, pois descreve a parte resultante da partilha. A referência verbal à parte atribuída a cada item na interpretação quociente passa a ser uma relação parte-todo. A facilidade com que os alunos compreenderam o novo significado das fracções, foi acompanhada pelo êxito nas tarefas de representação pictórica e simbólica na interpretação parte-todo. A interferência do professor neste processo de aprendizagem do conceito de fracção na interpretação parte-todo foi mínima. Logo na primeira aula, quando foi apresentada a primeira situação da qual se transcreveu o diálogo (ver transcrição 4.7), os alunos descobriram, apenas com alguma orientação, o significado do numerador e do denominador da fracção $\frac{1}{3}$ na interpretação parte-todo. Isto significa que conseguiram fazer a ligação entre o significado da fracção na interpretação quociente e o significado da fracção na interpretação parte-todo.

4.2.3. Aplicando fracções na interpretação parte-todo

Sessão 3 – O caso das pavimentações

Na primeira tarefa eram apresentadas pavimentações de dois quadriláteros diferentes, um trapézio e um paralelogramo, com triângulos verdes e vermelhos. Os alunos tinham de fazer a representação simbólica das partes pavimentadas a verde e a vermelho, nos dois quadriláteros. As figuras 4.89 e 4.90 são exemplos de resoluções apresentadas.

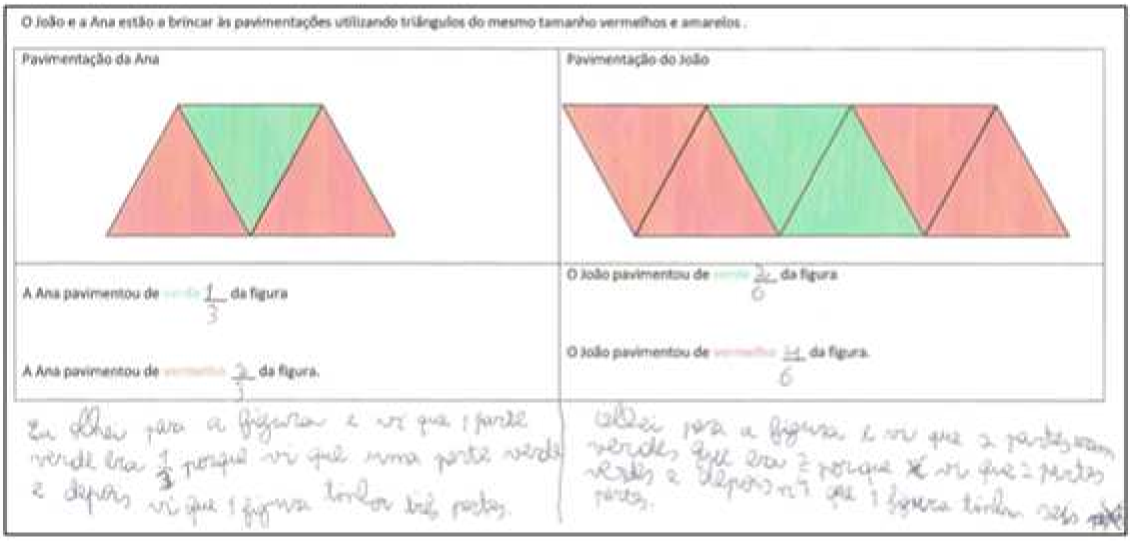


Figura 4.89 - Exemplo de representação simbólica das partes pavimentadas de duas cores diferentes.

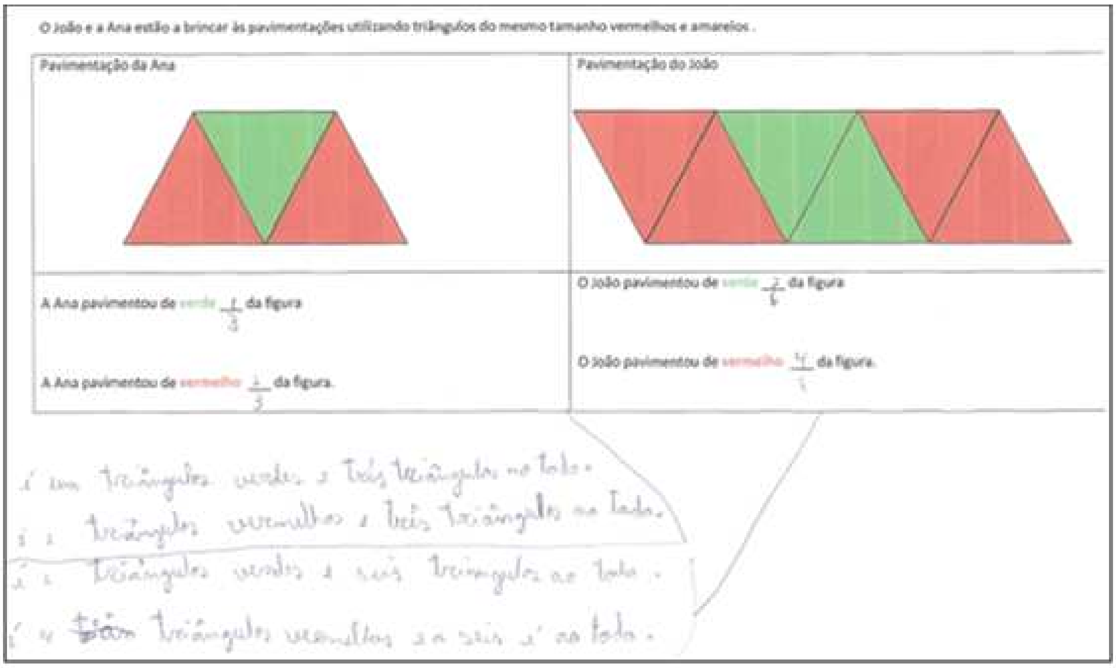


Figura 4.90 - Outro exemplo de explicação dada para a escrita das fracções apresentada pelo Mário.

Todos os alunos fizeram correctamente a representação simbólica das fracções pavimentadas a verde e a vermelho nas duas situações e explicaram correctamente a escrita das quatro fracções. À semelhança das resoluções evidenciadas pelas figuras 4.89 e 4.90, todos os alunos, na explicação apresentada para justificar a representação simbólica, referiram o número total de partes em que a figura estava partida como sendo o denominador e o número de partes da cor a que se referia a fracção como sendo o numerador.

A tarefa que se seguiu consistia na pavimentação de um paralelogramo com triângulos verdes e vermelhos e na representação simbólica das partes pavimentadas a verde e a vermelho. Os procedimentos dos alunos para desenvolver a tarefa foram semelhantes, pois todos usaram os triângulos de cartolina verdes e vermelhos, que tinham sido disponibilizados, para cobrir o quadrilátero. De seguida, desenharam todos os triângulos dentro do quadrilátero e pintaram com a cor do triângulo de cartolina que tinha ocupado esse espaço. Como se pode verificar nas figuras 4.91, 4.92, 4.93 e 4.94, os alunos produziram pavimentações diferentes com fracções distintas de pavimentação a verde e a vermelho. Todos foram capazes de fazer correctamente a representação simbólica das fracções representativas das cores usadas nas suas pavimentações. Apesar de não ser pedido na tarefa, todos os alunos explicaram a escrita das fracções, identificando correctamente o numerador e o denominador à semelhança do que ilustram as figuras 4.91, 4.92, 4.93 e 4.94).

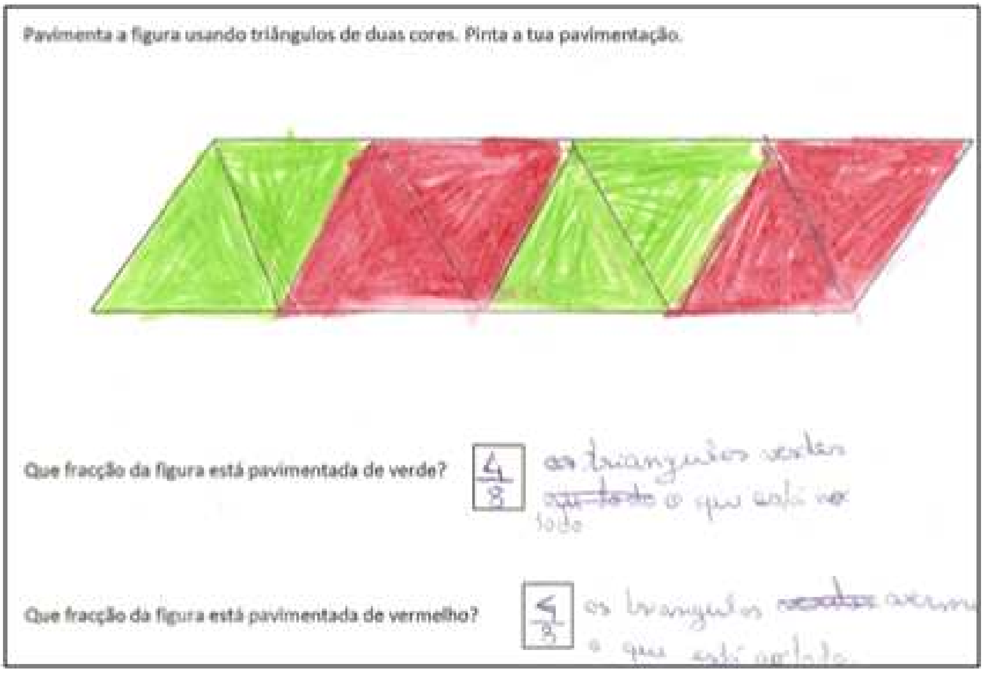


Figura 4.91 - Representação simbólica e significado do numerador e denominador apresentada pela Bela.

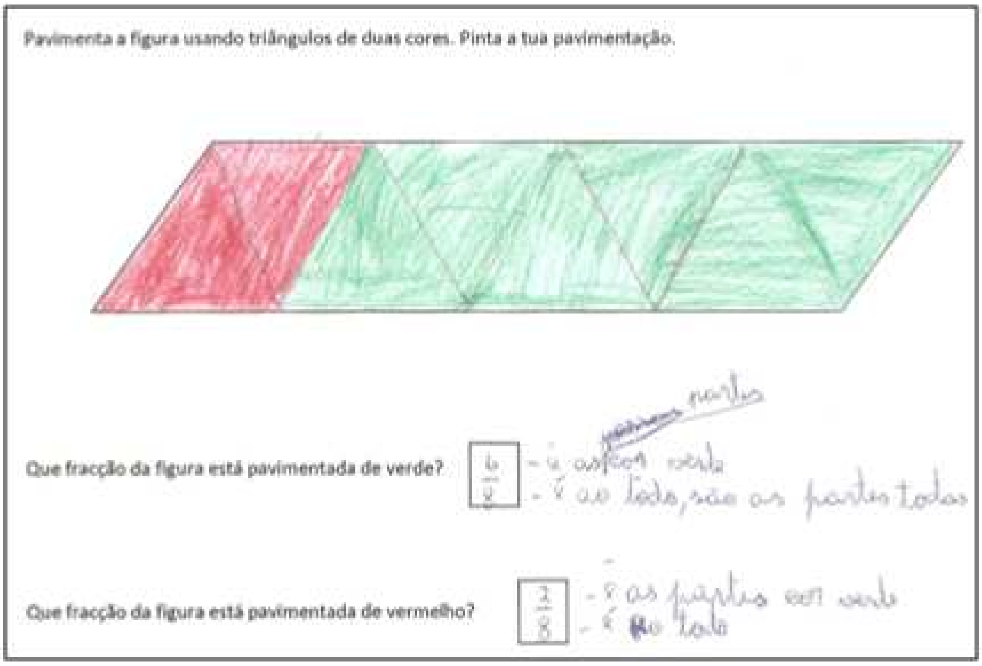


Figura 4.92 - Resolução apresentada pela Selma.

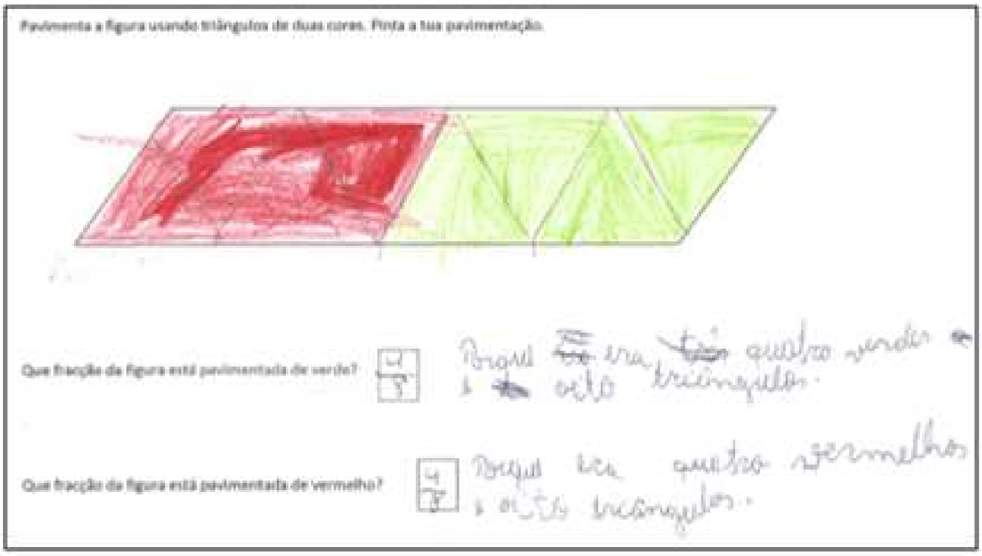


Figura 4.93 - Resolução da tarefa apresentada pelo Rui.

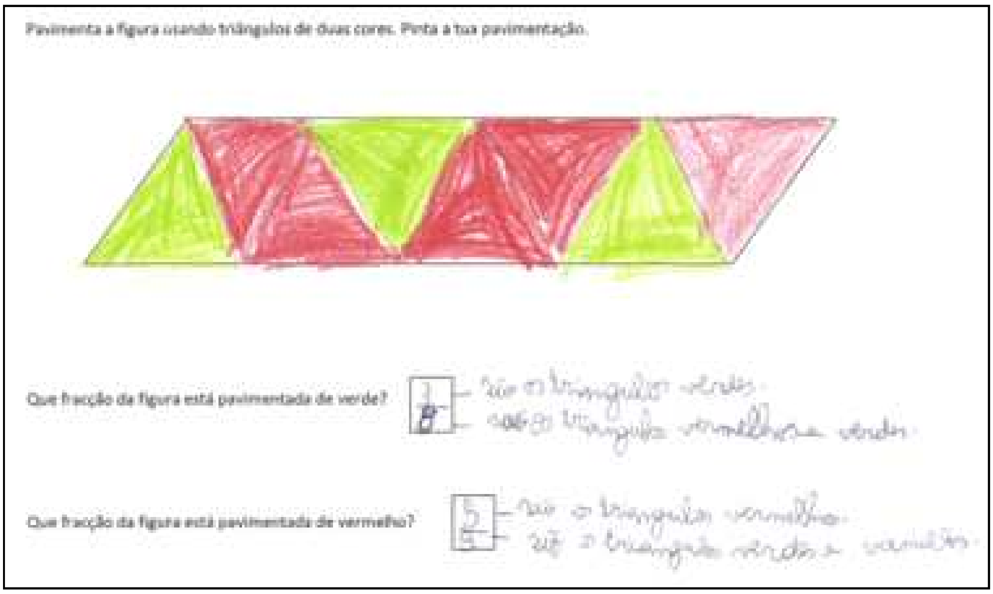


Figura 4.94 - Resolução da tarefa apresentada pelo Gonçalo.

Sendo uma tarefa que permitia mais do que uma solução, as pavimentações resultantes foram diferentes e cada aluno teve de fazer a representação simbólica da sua construção. Todos demonstraram bastante segurança nos seus procedimentos.

Para um mesmo todo surgiram pavimentações em que os alunos representaram pares de fracções diferentes, tais como $\frac{2}{8}/\frac{6}{8}$, $\frac{4}{8}/\frac{4}{8}$, $\frac{3}{8}/\frac{5}{8}$. Alguns alunos colocaram de um lado os triângulos verdes e de outro os triângulos de cor vermelha. Outros alunos, apesar de terem construído pavimentações com triângulos de cor vermelha alternados com triângulos de cor verde, conseguiram representar correctamente a fracção de triângulos de cada cor. Esta facilidade em escrever as fracções neste contexto sugere uma boa compreensão da interpretação parte-todo, que é confirmada pela forma como os alunos expressaram os significados do numerador e do denominador. Apesar das dificuldades na expressão escrita, todos explicaram de forma clara as fracções que escreveram, referindo sempre o total de partes como sendo o numerador e o número de partes tomadas, como sendo o denominador.

4.2.4. Explorando a construção do todo

Sessão 4 - Explorando a construção do todo

Nesta sessão, foram apresentadas cinco tarefas (Anexos 2 - C, pp. 231 - 232) de construção do todo a partir de uma fracção dada. Os enunciados das tarefas continham, respectivamente, as fracções $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}$ que deviam ser a parte da cor pedida. Pretendia-se que os alunos construíssem o todo com quadrados de papel verdes e vermelhos, a partir da fracção dada, sendo que a fracção se referia à parte vermelha. Para cada fracção era dada uma folha de trabalho com malha quadrada, onde os alunos deveriam pintar a construção efectuada. Não foram dadas indicações sobre o número de quadrados que cada fracção representava nem o número de peças que poderiam usar. Portanto, tratava-se de uma tarefa aberta em que os alunos tinham liberdade para efectuar as suas construções. Foi explicado aos alunos o que se pretendia, mas não foram dadas quaisquer orientações indutoras de estratégias de resolução ou de dimensão das partes em que o todo estaria dividido. O Rui perguntou se podia fazer a figura que quisesse ou se tinha que fazer quadrados ou rectângulos. Foi-lhe respondido que podia fazer qualquer tipo de figura desde que respeitasse a indicação da cor da fracção.

A primeira folha de trabalho destinava-se a representar a fracção $\frac{1}{2}$ a vermelho. Os alunos começaram por justapor quadrados de duas cores para formar a figura. Dois alunos, o Rui e o Gonçalo justapuseram um quadrado vermelho a um verde construindo um rectângulo (ver figuras 4.95 A e B). Questionados sobre o número de quadrados seleccionados, o Rui explica que "em baixo está 2 que é duas partes e em cima é um vermelho". O Gonçalo explica que "metade tem de ser vermelho e um é metade do dois". O Rui tinha sido o aluno que perguntou se podia fazer figuras diferentes do quadrado e do rectângulo, mas perante a fracção foi condicionado pelos algarismos nela envolvidos e acaba por construir um rectângulo.

Todos os outros alunos fizeram construções em que a $\frac{1}{2}$ da figura era vermelha. Dois limitaram-se a considerar o quadrado como o tamanho de cada parte como ilustram as figuras 4.95 A e B.

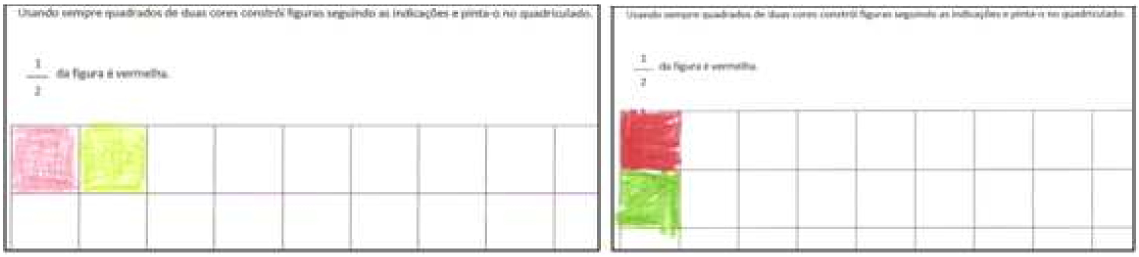
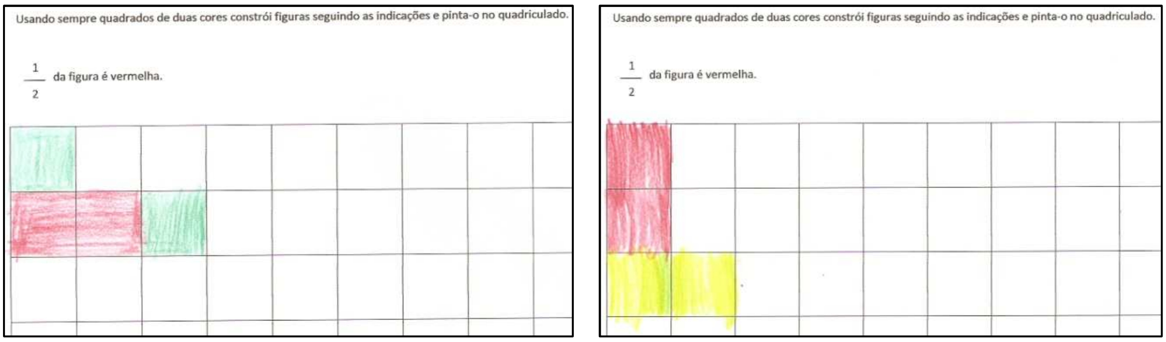
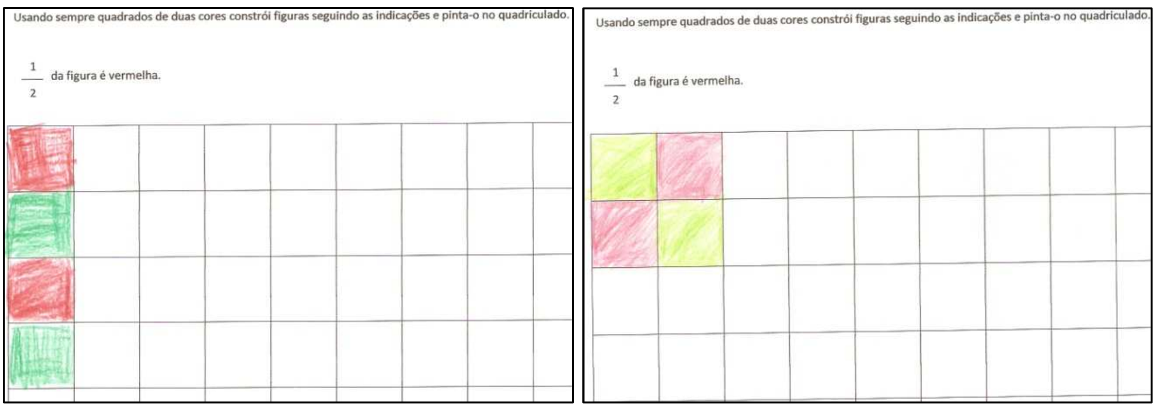


Figura 4.95 A e B - Construção do todo para a fracção 1/2 feitas pelo Gonçalo e pelo Rui.

Seis alunos construíram figuras em que $\frac{1}{2}$ corresponde a dois de quatro quadrados (ver figura 4.96 A e B). Quando foram apresentadas as resoluções, um dos alunos explicou que a sua figura estava correcta (ver figura 4.97 B) porque dois quadrados era metade de quatro e a fracção queria dizer metade.



Figuras 4.96 A e B - Construções da Selma e do Mário em que a fracção corresponde a dois quadrados.



Figuras 4.97 A e B - Figuras construídas pela Adélia e pelo José.

Sendo esta a primeira tarefa de construção do todo, o sucesso de todos os alunos na sua resolução, suscitou algumas expectativas relativamente à forma como construiriam a próxima figura que deveria ter $\frac{1}{3}$ vermelho. Enquanto os alunos tentavam construir a figura com os quadrados de papel, o Leonel começa por pintar a pavimentação, como ilustra a figura 4.98 A, que mais tarde risca para construir a figura 4.98 B, sem ter usado o material. A professora colocou algumas questões ao aluno para o conduzir à análise do trabalho na tentativa de o levar a reconhecer o erro. O diálogo resultante está descrito na transcrição 4.9, que se segue.

IP: – O que significa o 3? [Aponta para o denominador]

Leonel: – O 3 significa os quadrados todos.

IP: – As partes todas… quantas partes tem a tua figura?

Leonel – [Conta os quadrados] …quatro.

IP: – Então, está bem!

Leonel: – Não.

IP: – E o que é que significa o 1?

Leonel: – Significa a parte verde.

IP: – Verde não, que aí não diz para ser um terço verde

Leonel: – As partes vermelhas…

IP: – Então, achas que a tua figura tem um terço vermelho?

Leonel: – Não, tem um quarto

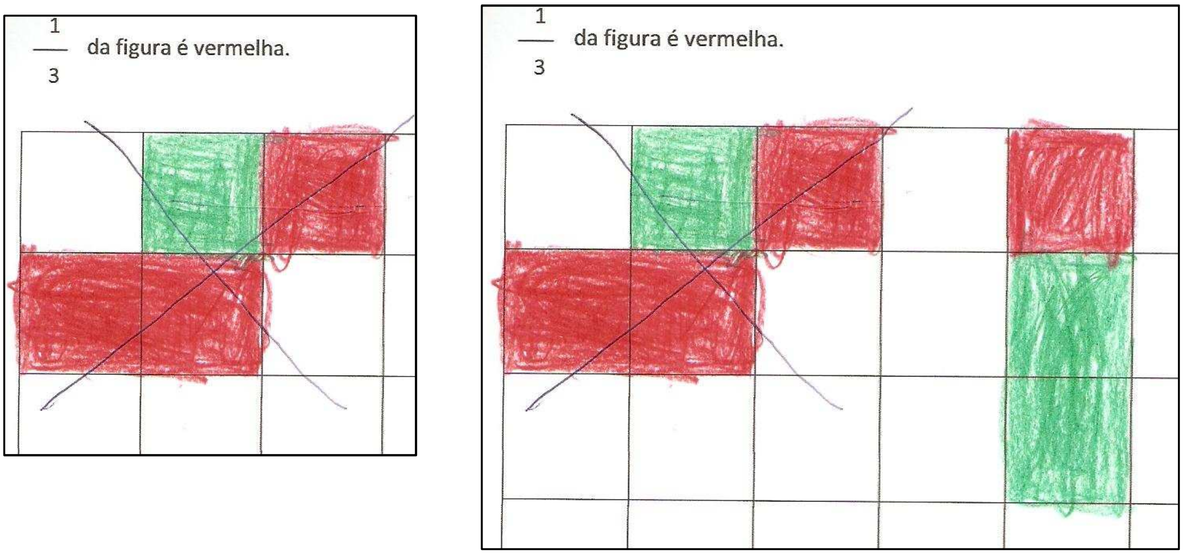
IP: – Um quarto vermelho?

Leonel: – Três quartos.

IP: – Ah. [O aluno corta a figura com um x e inicia a construção de uma nova figura agora com os quadrados de papel]

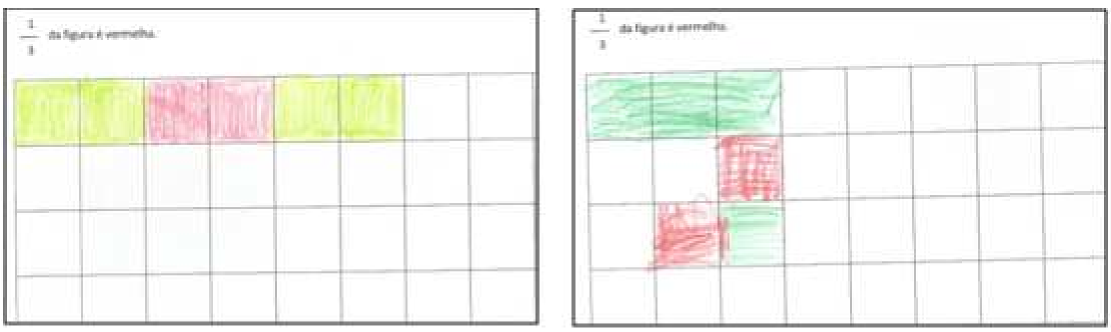
Transcrição 4.9 - Diálogo com o Leonel sobre a sua figura errada.

O aluno em questão, Pega num quadrado vermelho e junta-lhe dois verdes. Desenha a figura no quadriculado (Ver figura 4.98 B).

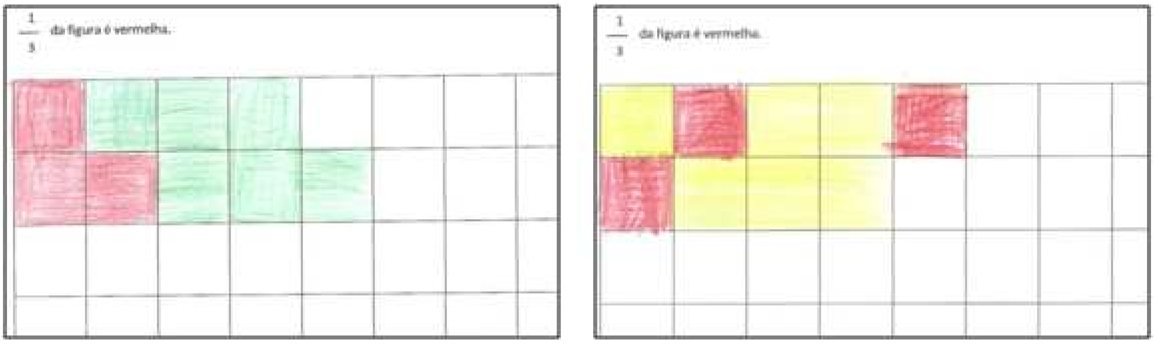


Figuras 4.98 A e B- Figura errada construída pelo Leonel e figura certa junto da errada.

Neste tipo de tarefas, os processos de construção do todo variaram dentro do grupo e sem qualquer orientação da parte do professor. Seis alunos começaram por pegar em alguns quadrados vermelhos e foram colocando igual quantidade de quadrados verdes, três vezes. Por exemplo, a figura 99 A e 99 B mostram o todo resultante de uma construção a partir de dois quadrados vermelhos que os alunos consideram $\frac{1}{3}$ da figura. De seguida, esses alunos pegaram em mais dois subconjuntos de dois elementos verdes e construíram respectivamente as figuras 99 A e 99 B. Dois alunos procederam da mesma forma, mas seleccionaram três quadrados vermelhos para representar a fracção (ver figura 100 A e B).



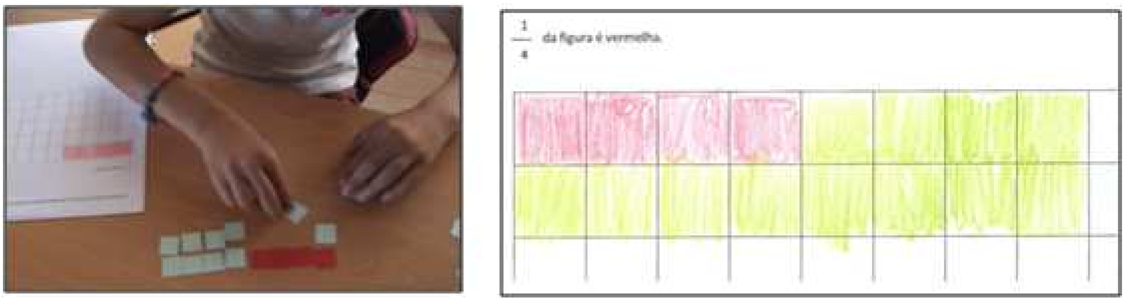
Figuras 4.99 A e B - Duas construções com $^1/_3$ vermelho.



Figuras 4.100 A e B - Construções resultantes da selecção de três quadrados vermelhos para representar $^{1}/_{3}$.

Dois alunos não usaram os quadrados de papel e optaram por pintar directamente a figura. Cada um deles pintou um quadrado vermelho e, de seguida, pintou dois quadrados verdes. As figuras resultantes foram mais simples que nos casos anteriores pois os alunos tomaram cada quadrado como uma parte, não chegando ao nível de considerar uma das partes como um subconjunto não singular ou de perceber que os quadrados correspondentes à fracção em causa podem estar separados.

Seguiu-se a construção do todo para a fracção $\frac{1}{4}$. Verificou-se que os alunos estavam a ganhar mais agilidade nos processos de construção, o que fez com que as pavimentações fossem mais criativas. As figuras 101 A e B mostram uma aluna a colocar o último quarto da construção em que cada subconjunto era composto por quatro quadrados e a respectiva representação da figura no quadriculado.



Figuras 4.101 A e B - Colocação dos quadrados por uma aluna durante o processo de construção.

Antes de colocar este conjunto de quadrados, a professora perguntou se a figura já estava completa, ao que a aluna responde prontamente explicando que ainda faltava uma parte ou seja quatro quadrados.

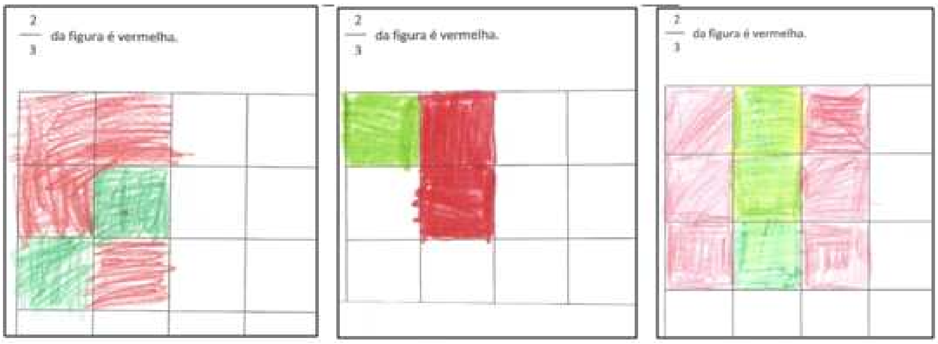
De seguida pega em 4 quadrados verdes que já tinha separado e coloca-os na construção. A professora pergunta porque colocou os quatro quadrados. A aluna responde dizendo que os quatro quadrados "é um quarto que é a parte que ainda faltava". Uma outra aluna, quando questionada sobre a quantidade de quadrados que a sua construção tinha, explica que " tem quatro partes de dois quadrados" (ver figura 102 A e B).

Figuras 4.102 A e B - Aluna construindo o todo a partir da fracção 1/4 e explicando a que correspondia cada grupo de dois quadrados.

Na construção do todo para a fracção $\frac{1}{4}$ apenas um aluno obteve um resultado errado. Inicialmente, tinha pintado uma figura correcta, mas resolveu anular essa representação e fazer uma nova em que viria a representar de forma errada a fracção (ver figura 4.103).

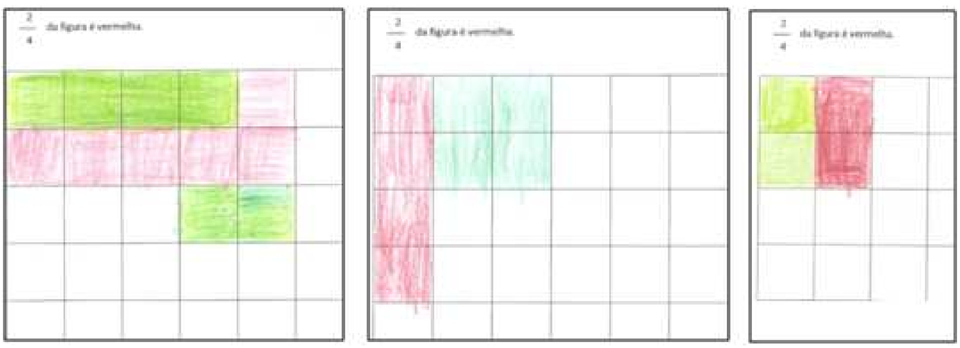
Figura 4.103 - duas tentativas de representação da fracção $^1/_4$.

A construção do todo para as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ foi realizada com sucesso por todos os alunos. De seguida apresentam-se algumas representações de construções efectuadas em que os alunos usam diferentes tamanhos para as partes, produzindo figuras com número de peças diferente (ver figuras104 A, B e C).



Figuras 4.104 A, B e C - Construções de três alunos para a fracção 2/3 vermelho com partes de tamanhos diferentes.

As figuras 105 A, B e C ilustram o nível de compreensão que os alunos atingiram na representação do todo a partir da uma fracção dada. A variedade de construções resultantes, para a mesma situação, revela uma boa compreensão de que uma parte pode ser formada por um conjunto não singular e que os elementos desse subconjunto não têm necessariamente de se encontrar juntos. No decorrer desta actividade e com as discussões das tarefas realizadas, verificou-se que os alunos se iam tornando mais ágeis na construção de figuras. Fizeram tentativas mais complexas do que na primeira tarefa anterior.



Figuras 4.105 A, B e C - Exemplos de construções do todo para a fracção 2/4 vermelho com partes de tamanhos diferentes.

A realização das tarefas de construção do todo a partir de uma fracção dada, permitiu concluir que os alunos conseguem realizar raciocínios multiplicativos. Inicialmente, seis alunos resolveram as tarefas estabelecendo o tamanho do subconjunto correspondente à unidade fraccionária. Depois de definida a unidade, que poderia ser constituída por várias peças, os alunos produziam construções que traduziam correctamente a fracção dada. Isto remete-nos para a discussão do conceito de parte de um todo que pode, por si só, ser constituída por um conjunto singular ou não. Neste último caso, em que a parte é constituída por mais do que um elemento, está envolvida a noção de grupos iguais a considerar na representação da fracção. Para alguns autores (Ver Nunes et al.,2004), este facto posiciona-nos numa nova interpretação do conceito de fracção, a interpretação operador. Exemplos deste fenómeno, em que os alunos completavam a figura com grupos de igual quantidade de quadrados verdes até perfazerem o total de partes são apresentados nas figuras.

4.3. Discussão de resultados

4.3.1. Sobre a fase 1 - Interpretação quociente

A) Representação de fracções

A fase 1 deste estudo tinha por objectivo a introdução do conceito de fracção na interpretação quociente, a alunos de 7 anos. Foram propostas tarefas de representação (pictórica, simbólica e verbal), tarefas de ordenação e de equivalência de quantidades representadas por fracções.

A introdução das fracções na interpretação quociente foi iniciada com algumas experiências de partilha equitativa de um número de itens maior do que o número de recipientes, com o intuito de perceber se alunos de 7 anos eram capazes de fazer essa partilha de forma justa. As primeiras experiências resultavam em quocientes inteiros e não constituíram qualquer tipo de problema para as crianças. Seguiram-se outras tarefas de partilha equitativa em que o quociente era menor que a unidade, sendo a primeira delas a divisão de um chocolate por duas crianças. Surpreendentemente, foi possível verificar que vários alunos demonstravam possuir a consciência de que existem números para representar essas quantidades, utilizando expressões como "Nós ainda não aprendemos números entre 0 e 1" ou ainda "É 1 - uma metade". Foi interessante verificar que nenhum dos alunos procurou um símbolo para representar esta quantidade sendo que todos tentaram explicar que não conheciam números para a representar, tendo usado expressões como: "metade de um chocolate é representada pelo 0 e pelo 1","o número que representa essa quantidade é o dois e o um". O aluno que escreveu a última expressão parece ter reconhecido, na relação entre o número de chocolates a repartir e o número de recipientes, uma forma de representar a quantidade desejada, pois explica-se dizendo "é um chocolate para dois meninos".

Após a discussão na turma destas sugestões, foi introduzida a fracção ½ como forma de representar a metade e explicado aos alunos o significado do denominador e do numerador. Antes mesmo de ter sido apresentada a representação verbal da fracção, alguns alunos começaram a sugerir leituras: "doze", "um dois"; "um e meio"; "uma metade". Isto sugere que os alunos transferem conhecimentos anteriores do número inteiro para novas aprendizagens matemáticas. Este efeito foi já identificado por Kerslake (1986) e Streefland (1991). Também Lamon (1999), Vamvakoussi e Vosniadou (2004) nos trabalhos por eles conduzidos referem esta reacção entre alunos mais velhos, sendo que este aspecto pode ser causador de erros (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) em algumas situações. Depois de apresentada a representação verbal, alguns alunos mostraram a sua surpresa tendo um deles exclamado " Mas eu nunca ouvi um meio, só ouvi dizer um e meio!".

Nas primeiras actividades que envolveram representação verbal de várias fracções unitárias, os alunos apresentaram propostas de leitura. Os alunos usaram os seus conhecimentos sobre designações aplicadas aos números inteiros para apresentarem propostas de leitura das fracções. Propuseram leituras como "um triplo" para $^{1}/_{3}$ ou "um quádruplo" para $^{1}/_{4}$. Contudo, após ter sido dada a leitura, rapidamente assumiram as designações correctas para a representação verbal das fracções não unitárias, mas com denominadores iguais aos das fracções unitárias já trabalhadas. Esta facilidade prende-se com o reconhecimento de uma semelhança na leitura dos denominadores com a designação dos números ordinais. Essa associação foi um elemento facilitador da representação verbal das fracções unitárias e não unitárias. Neste estudo, a transferência que os alunos fizeram da leitura dos ordinais para designarem os denominadores das fracções foi consciente, porque vários alunos referiram a semelhança e salientaram a diferença na leitura da fracção $^{1}/_{2}$ e $^{1}/_{3}$.

Nas tarefas que envolveram representação simbólica e após algumas experiências de representação de fracções na interpretação quociente, todos os alunos envolvidos no estudo conseguiram fazer as representações simbólicas formais correctamente e foram capazes de identificar o significado do numerador e do denominador, nesta interpretação. Esta nova forma de representar quantidades foi rapidamente interiorizada e não pareceu constituir qualquer conflito com a representação simbólica dos números naturais.

Kieren (1988) e Empson (1999) mencionam os conhecimentos informais dos alunos sobre 'metade' como elemento facilitador da compreensão das fracções, na interpretação quociente. No estudo apresentado nesta dissertação, todos os alunos evidenciaram uma compreensão informal de noções como 'metade' associada a parte de uma unidade. Em situações em que o número de itens a dividir era maior do que o número de recipientes, os alunos não usaram a designação metade, o que sugere que a sua noção intuitiva deste conceito está associada a uma quantidade menor do que um.

As tarefas de divisão equitativa apresentadas aos alunos procuravam reproduzir situações do quotidiano, o que parece ter sido determinante nas formas espontâneas de representação pictórica da divisão adoptadas pelos alunos. Alguns alunos, apesar de fazerem primeiro a representação simbólica da fracção, recorreram, nas primeiras tarefas, a representações pictóricas para posteriormente explicarem o resultado obtido. Alguns usaram mesmo esquemas em que cada item era repartido no número de partes igual ao número de recipientes e distribuídos um a um a cada recipiente. Outros alunos fizeram uma representação pictórica em que era evidente a correspondência de um a muitos, sugerindo algum raciocínio proporcional. Por exemplo, na tarefa em que eram repartidos "dois chocolates por seis crianças", fizeram uma representação pictórica que atribuía um chocolate a cada três crianças. Estes alunos, por iniciativa própria, representaram a quantidade que correspondia a cada recipiente com duas fracções equivalentes $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$, demonstrando saber que o mesmo quociente podia ser representado de duas formas diferentes. Nas sessões seguintes, em que se trabalhou a comparação de fracções, foram estes alunos que tiveram mais facilidade em argumentar sobre as comparações que estabeleciam. Também Mamede, Nunes e Bryant (2005), num estudo realizado com oitenta crianças portuguesas de seis e sete anos de idade, referem o uso da correspondência como um elemento facilitador da compreensão das fracções ajudando-as a resolver problemas na interpretação quociente.

No estudo desta dissertação, as crianças de 7 anos foram capazes de trabalhar com diferentes modelos de representação. Utilizaram modelos de representação pictóricos criados de forma espontânea para representarem a partilha equitativa e fizeram a representação simbólica e a representação verbal dos quocientes, o que parece ter contribuído para que, ao longo das sessões, o conceito de fracção se tornasse mais claro e mais sólido. A importância da utilização desta diversidade de representações é já reconhecida na literatura internacional. Behr e colegas (1983) realçam a importância do trabalho com diferentes formas de representação para a compreensão das fracções.

Os trabalhos apresentados pelos alunos deste estudo sugerem que as crianças não têm dificuldades em compreender as representações simbólicas e pictóricas de fracções na interpretação quociente. Mamede, Nunes e Bryant (2005) constataram, no seu estudo, que é na interpretação quociente que as crianças têm mais sucesso e compreendem melhor a representação simbólica de fracções. Nesta interpretação, as fracções envolvem duas variáveis de naturezas diferentes, o numerador que representa o número de itens a repartir e o denominador que representa o número de recipientes. A existência de duas variáveis parece facilitar a utilização da correspondência na resolução de problemas (Nunes et al, 2004).

As representações pictóricas das situações apresentadas neste estudo tornam evidente uma boa compreensão do processo de divisão e da correspondência entre o que vai ser dividido e o número de recipientes.

B) A Comparação de fracções

Na resolução de tarefas de ordenação de fracções apresentadas na interpretação quociente, os alunos evidenciaram uma grande evolução à medida que o trabalho progredia. Inicialmente, a maioria dos alunos recorria à representação pictórica para comparar o tamanho das partes. Quando a representação pictórica era feita com um modelo rectangular, os alunos conseguiam comparar as fracções de forma correcta. Contudo, quando foram introduzidos os modelos circulares, a representação pictórica suscitava algumas dúvidas. Assim, na comparação das fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, referentes a pizas para distribuir respectivamente por meninas e meninos, os argumentos apresentados foram, maioritariamente, baseados na percepção, recaindo fortemente no tamanho das partes. Apenas dois alunos apresentaram argumentos baseados na relação inversa. Um deles explicou que “as meninas comem mais porque é uma piza para duas meninas e os meninos comem menos porque é uma piza para três meninos”. Outro aluno apresentou argumentos em que salienta a igualdade dos numeradores e a diferença dos denominadores “cada menina come mais do que cada menino porque são mais meninos do que meninas e é uma piza para as meninas e uma piza para os meninos”.

Os argumentos apresentados pelos alunos nas tarefas de ordenação de fracções com interpretação quociente foram-se tornando cada vez mais claros. A maioria dos alunos deixou de se fundamentar na representação pictórica da divisão e passou a usar argumentos que assentavam, maioritariamente, na relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o numerador ou o denominador eram iguais. Empson (1999), num estudo realizado com 17 crianças de 6 e 7 anos, verificou que os conhecimentos informais que as crianças possuem, lhes permitem identificar a relação inversa entre o numerador e o denominador. Verificou ainda, que as crianças eram capazes de estabelecer relações de equivalência. No estudo desta dissertação, as crianças também foram capazes de estabelecer relações de equivalência entre fracções e de apresentar argumentos para as justificar. Assim, nas fracções equivalentes muitos dos argumentos apresentados baseavam-se na correspondência de um para muitos. Apenas um aluno não apresentou, neste tipo de fracções, qualquer argumento explicativo da comparação, continuando sempre a fundamentar na percepção sustentada na representação pictórica.

As apresentações das resoluções feitas pelos alunos ao grupo turma foram muito importantes na evolução do tipo de argumentos utilizados. A discussão e comparação de resoluções levaram a que a ordenação de fracções passasse a ser fundamentada na relação inversa, quando as fracções apresentavam numeradores ou denominadores iguais, e na relação de proporcionalidade quando as fracções eram equivalentes. Na comparação de fracções não equivalentes, com numeradores e denominadores diferentes, os alunos tiveram mais dificuldades na expressão dos argumentos, embora a maioria dos alunos tivesse efectuado correctamente a comparação. Nestes casos, os argumentos eram menos claros e mais diferenciados e essencialmente baseados na correspondência, por ser difícil relacionar em simultâneo numeradores e denominadores distintos. As dificuldades em estabelecer comparações entre fracções deste tipo foram, também documentadas no estudo realizado por estudos Nunes e colegas (2004), ainda que o estudo realizado por estes autores tenha sido conduzido com crianças mais velhas (10 anos) e tenha utilizado apenas problemas de equivalência de fracções. O estudo apresentado desta dissertação tem como novo contributo, uma análise sobre a comparação de fracções menores do que a unidade com numeradores e denominadores distintos, efectuada por crianças que estão a contactar pela primeira vez com o conceito de fracção. O nosso estudo sugere também que, após algumas sessões de trabalho com fracções, as crianças conseguem compreender o conceito de fracção quando introduzido na interpretação quociente. São capazes de resolver variados problemas de ordenação e de equivalência de fracções de forma correcta, explicando os seus raciocínios, maioritariamente com argumentos válidos. Empson (1999) identificou um fenómeno semelhante no estudo que realizou com crianças da mesma idade. Concluiu que no final das 15 sessões do seu estudo, pelo menos metade das crianças envolvidas estavam habilitadas para resolver problemas de partilha.

Os alunos manifestaram progressos muito significativos no que se refere à apresentação de argumentos para justificarem a comparação de fracções, o que sugere a compreensão do conceito, culminando numa maior facilidade em reconhecer a relação inversa entre o divisor e o quociente. Neste ponto, os trabalhos dos alunos convergem com as ideias de Nunes (2008). A autora considera que as crianças que iniciam o estudo das fracções na interpretação quociente apresentam mais progressos na compreensão do conceito do que as que iniciam o estudo nas outras interpretações. Também Streefland (1997), Nunes e Bryant (2008) e Mamede (2008) em estudos já realizados, consideram esta interpretação adequada à introdução do conceito de fracção às crianças.

Como já foi referido, os argumentos apresentados pelos alunos na resolução de problemas de equivalência assentaram predominantemente na correspondência um para muitos. Isto sugere que problemas de equivalência de fracções, quando apresentados na interpretação quociente, promovem o desenvolvimento do raciocínio proporcional (Ver Nunes et al., 2004)

4.3.2. Sobre a fase 2 – Interpretação parte-todo

A fase 2 deste estudo incidiu no trabalho com fracções na interpretação parte-todo. Na 1.ª sessão desta fase, foram propostas aos alunos algumas tarefas de fracções na interpretação quociente. O objectivo era verificar se os alunos ainda tinham presentes as aprendizagens realizadas sobre este conteúdo, passadas três semanas em que não houve aulas. Os resultados observados permitiram verificar que continuavam a compreender a representação, a ordenação e a equivalência de fracções nesta interpretação quociente.

As fracções na interpretação parte-todo foram apresentadas através de uma questão que incluía um aluno da turma "O Mário tem uma barra de chocolate, mas só quer comer um terço. Como vai fazer?" Imediatamente houve vários alunos que se propuseram responder. As sugestões passaram todas pela divisão do chocolate em três partes iguais para que o

Mário comesse uma delas. A professora desenhou um rectângulo no quadro para representar a barra de chocolate do Mário, que dividiu em três partes iguais. Esta divisão ocorreu de acordo com as sugestões dos alunos. De seguida, escreveu numa das partes resultantes da divisão da barra de chocolate a fracção $^{1}/_{3}$, que a representava.

A Representação de fracções

Logo nas primeiras situações, foram apresentadas fracções na forma simbólica formal na interpretação parte-todo. Foi pedido aos alunos que efectuassem a representação pictórica das fracções $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$ e das fracções $^{2}/_{3}$, $^{2}/_{4}$, $^{2}/_{5}$, $^{2}/_{6}$ de um chocolate. Verificou-se que todos os alunos assumiram o denominador como o número total de partes em que o todo teria de ser dividido e o numerador como as partes a tomar. A compreensão do significado do denominador e do numerador da fracção, nesta nova interpretação, evidenciada pela correcção das representações pictóricas, foi confirmada pelas explicações apresentadas pelos alunos quando questionados sobre o significado da fracção. Todos os alunos referiam o denominador como o número de partes em que a unidade se encontrava dividida e o numerador como o número de partes tomadas. Aparentemente, os alunos assumiram um novo significado para a fracção nesta nova interpretação. A compreensão da representação pictórica das fracções e do seu significado nesta nova interpretação parece ter sido favorecida pelo trabalho de representação pictórica de partilha equitativa realizado nas primeiras sessões, em que as fracções foram introduzidas através da interpretação quociente. Nestas sessões, os alunos perceberam que a fracção representa uma relação entre itens a repartir e recipientes, mas também a quantidade que cabia a cada recipiente. Deste modo, a representação simbólica, na interpretação parte-todo, foi facilmente compreendida pelos alunos. Todos tiveram óptimos desempenhos nas tarefas de representação simbólica de fracções na interpretação parte-todo. Na representação verbal, salvo um caso em que o aluno apresentou uma representação verbal errada de $^{1}/_{2}$ e de $^{1}/_{3}$ quando realizou a tarefa individualmente, todos os alunos fizeram correctamente as leituras das fracções.

O trabalho intenso de representação bem como a exploração de situações de partilha equitativa, e a abordagem dos aspectos lógicos de fracções, na interpretação quociente, seguidas da exploração de situações de representações de fracções na interpretação parte-todo parece ter resultado positivamente na compreensão do conceito de fracção. Os trabalhos documentados na literatura não apresentam afinidades com aquele aqui desenvolvido. Contudo, Mamede (2007) verificou também este facto num estudo de carácter cognitivo realizado com o propósito de analisar um possível efeito de transferência de conhecimentos entre as interpretações e que envolveu 37 crianças portuguesas de 6 e 7 anos distribuídas por quatro grupos. Três destes grupos foram sujeitos a algumas sessões de trabalho de representação simbólica e de ordenação de fracções, respectivamente, na interpretação quociente, n=10; na interpretação parte-todo, n=10; e na interpretação operador, n=10. O quarto grupo, n=7, sendo de controlo, apenas foi sujeito a uma ligeira intervenção centrada em estruturas multiplicativas. Todos os grupos realizaram um pré-teste e um pós-teste iguais. Mamede concluiu que, relativamente à representação de fracções, houve transferência de aprendizagens entre os grupos que foram introduzidos ao conceito de fracção, respectivamente, nas interpretações parte-todo e operador, mas não aconteceu o mesmo quando tiveram de resolver problemas de representação na interpretação quociente. Por sua vez, no grupo que foi introduzido ao conceito de fracção na interpretação quociente não houve transferência de aprendizagens relacionadas com representação para situações apresentadas na interpretação parte-todo ou operador. Contrariamente ao que Mamede (2007) verificou, no estudo apresentado nesta dissertação parece haver evidências de que os alunos transferiram conhecimentos relativamente à representação simbólica formal da interpretação quociente, na qual foram introduzidos pela primeira vez ao conceito de fracção, para a interpretação parte-todo. No que respeita à ordenação e equivalência de fracções, houve também transferência de conhecimentos na medida em que, as tarefas apresentadas na interpretação parte-todo foram resolvidas e explicadas com sucesso. Os alunos conseguiram identificar a fracção maior entre duas fracções na interpretação parte-todo, tendo com referência algumas fracções como ½ e ¼ . Contudo, importa relembrar que este estudo e o de Mamede são de naturezas distintas, dado que Mamede não desenvolveu a sua investigação em contexto real de sala de aula em que os alunos têm oportunidade de discutir estratégias de resolução.

As tarefas de representação em contexto de pavimentação de superfícies constituíram uma oportunidade de verificar que os alunos tinham compreendido a representação de fracções, na interpretação parte-todo. Nas primeiras tarefas, os alunos preencheram o espaço a pavimentar a seu gosto com triângulos verdes e amarelos e foram capazes de representar o espaço preenchido com cada uma das cores de forma correcta. Também explicaram correctamente o significado do numerador e do denominador sem dificuldades. A construção do todo a partir de uma fracção dada permitiu verificar que os alunos conseguem compreender a relação entre a parte e o todo, ainda que o todo não seja singular. Ao seleccionarem um conjunto não singular para representar uma das partes, que depois era repetido até completar o total das partes mostraram que já são capazes de estabelecer raciocínios multiplicativos, pois conseguiram considerar, mentalmente, grupos com igual número de elementos e olhá-los como se fossem uma parte. Assim, o valor do denominador da fracção determinava o número total de grupos com o mesmo número de elementos a considerar e o valor do numerador determinava o número destes grupos que deviam ser de cor diferente. Este procedimento de representação da fracção como sendo um subconjunto de um conjunto maior que é o todo é entendido por alguns autores (ver Nunes e tal., 2004) como sendo, não a interpretação parte-todo, mas antes a interpretação operador.

O conceito de parte de um todo entendido pelos alunos como um conjunto não singular parece não oferecer grandes dificuldades de compreensão às crianças. Mamede (2007, 2008), em estudos que tem desenvolvido neste âmbito, sublinha que a interpretação em que as fracções são apresentadas afecta a compreensão do conceito pela criança. Mais ainda, a autora argumenta que as interpretações parte-todo e operador como primeira abordagem ao conceito de fracção podem conduzir ao sucesso na representação simbólica formal de fracções, mas não constituem um contexto facilitador da compreensão dos aspectos lógicos (ordenação e equivalência) por não ir de encontro ao conhecimento informal sobre fracções que as crianças desenvolvem nas situações do dia-a-dia. Mamede (2007) salienta que os alunos aos quais o conceito de fracção foi introduzido na interpretação quociente, embora tenha apresentado sucesso na compreensão dos aspectos lógicos e de representação, não fizeram transferência desses conhecimentos para as interpretações parte-todo e operador. Todavia, a autora não incluiu, no seu estudo sobre os efeitos das interpretações na compreensão de fracções, a representação pictórica e o uso de materiais manipuláveis. No estudo aqui apresentado os alunos não só tiveram acesso a material manipulável, como tiveram oportunidade de realizar tarefas em que tinham de efectuar as suas representações pessoais da situação em causa. Mais ainda, aos alunos do estudo aqui descrito foi facultada a oportunidade de discutir e avaliar as suas resoluções, expondo os seus argumentos e melhorando os seus desempenhos nas tarefas seguintes.

Aspectos há a considerar que não foram ainda contemplados em trabalhos prévios e que se revestem de grande importância para a compreensão do conceito de fracção. Behr et al (1983) referem que a capacidade de se fazerem representações diversas de uma mesma situação demonstra uma evolução na compreensão das fracções. Apresenta um modelo com cinco sistemas de representação de fracções: contexto da vida real, materiais manipulativos, figuras, símbolos falados e símbolos escritos. Neste modelo está implícito um trabalho simultâneo com os vários sistemas de representações a utilizar pelos alunos na resolução de problemas do mundo real. Neste estudo, os alunos trabalharam os diferentes tipos de representação na interpretação quociente e, posteriormente na interpretação parte-todo. Partindo de situações do mundo real, resolveram tarefas de representação verbal (símbolos falados), de representação simbólica formal, de representação através de materiais manipuláveis e de representação através de figuras por eles produzidas. Talvez a capacidade de transferir aprendizagens da interpretação quociente para a interpretação parte-todo, demonstrada por estes alunos, esteja relacionada com o trabalho desenvolvido com as diversas formas de representação. Os resultados do estudo aqui presente parecem suscitar a importância de realizar mais estudos centrados no domínio das representações.

O facto do estudo aqui apresentado ter sido uma unidade de ensino, em que o conceito de fracção foi introduzido através de situações de interpretação quociente, parece ter sido um contexto facilitador não só da representação simbólica formal, mas também da transição da interpretação para outra, sem grandes conflitos, nas tarefas propostas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta as conclusões do estudo realizado para se perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções a partir da interpretação quociente, na compreensão do conceito de fracção dos alunos do 1.º Ciclo. Este estudo procurou dar resposta a três questões de investigação: Como entendem os alunos a representação de fracções apresentadas na interpretação quociente? Como entendem os alunos a ordenação e equivalência de fracções apresentadas na interpretação quociente? Como transferem os alunos o conhecimento adquirido na interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo?

O capítulo está organizado em quatro secções: conclusões do estudo, onde se procura dar resposta às questões de investigação; limitações do estudo, onde se relatam dificuldades e identificam constrangimentos na realização deste trabalho; implicações educacionais, onde se enunciam algumas consequências resultantes da introdução do conceito de fracção a alunos do 1.º ciclo, utilizando a interpretação quociente; e recomendações para futuras investigações, onde se apresentam sugestões para a realização de mais estudos neste âmbito.

5.1. Conclusões do estudo

Vários investigadores (ver Streefland, 1997; Nunes & Bryant, 2008; Mamede, 2008) consideram a interpretação quociente a mais adequada para que as crianças iniciem o estudo das fracções, por ir de encontro ao seu conhecimento informal sobre fracções, facilitando assim a compreensão do conceito. Contudo, em Portugal não existem estudos documentados de práticas de sala de aula sobre a introdução do conceito de fracção nessa interpretação, em crianças do 1.º Ciclo.

Nesta dissertação pretende-se apresentar argumentos que permitam perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções, a partir da interpretação quociente, na compreensão do conceito de fracção pelos dos alunos do 1.º Ciclo. Este estudo é bastante pertinente na medida em que, promover um completo entendimento do conceito e das relações de equivalência e ordenação de fracções continua a ser um grande desafio para os professores que iniciam os alunos no processo formal de ensino e aprendizagem das fracções. A par deste desafio torna-se importante desenvolver práticas de sala de aula que documentem experiências em que o conceito de fracção seja apresentado aos alunos do 1.º ciclo, de acordo com as orientações actuais do Programa de Matemática (ver DEB, 2007), envolvendo diferentes interpretações.

Tendo por base a classificação de Nunes et al. (2004) foram apresentadas tarefas centradas na representação pictórica, verbal e simbólica de fracções e de ordenação e equivalência nas interpretações quociente e parte-todo.

5.1.1. Como entendem os alunos a representação de fracções apresentadas na interpretação quociente?

Tendo em vista as questões de investigação às quais se pretende dar resposta, realizou-se um estudo com um grupo de 8 alunos do 2.º ano de escolaridade com idades entre os 7 e 8 anos.

Os alunos envolvidos no estudo resolveram inicialmente tarefas de partilha equitativa em que os quocientes resultantes eram maiores que a unidade. Pretendia-se perceber de que forma os alunos compreendiam a divisão em partes iguais a partir dos conhecimentos informais sobre divisão. Foi possível verificar que todos os alunos envolvidos foram capazes de fazer a representação pictórica da partilha equitativa de forma espontânea e de indicar o quociente como sendo a quantidade que cada recipiente recebia. Seguiram-se algumas tarefas de divisão de um número de itens menor do que o número de recipientes. A primeira tarefa confrontava os alunos com uma situação em que havia um item para repartir por dois recipientes. Os alunos conseguiram fazer a divisão partindo o item num número de partes igual ao número de recipientes. Quando foram questionados sobre a forma como deveriam representar essa quantidade (metade), todos os alunos responderam que não conheciam um número para a representar, tendo alguns justificado que seria um número entre zero e um, havendo mesmo quem argumentasse com expressões do tipo '….' Ou ainda'….'. A professora ensinou então qual era a forma de representar essa quantidade. Os alunos compreenderam facilmente como se construía a representação simbólica da fracção, na interpretação quociente. Após algumas tarefas de representação pictórica, verbal e simbólica na interpretação quociente, a discussão das resoluções na turma tornou-se fundamental para que o significado da fracção, nesta interpretação, fosse compreendido por todos os alunos. Os resultados obtidos nas tarefas de representação verbal, pictórica e simbólica foram surpreendentes, na medida em que todos os alunos compreenderam e aplicaram os vários modelos de representação.

A representação pictórica de fracções na interpretação quociente foi muito espontânea. Todos os alunos foram capazes de usar esse modelo de representação correctamente para descobrirem o quociente fraccionário. A representação simbólica foi também, rapidamente compreendida por todos os alunos, que mostraram ter entendido o significado dos valores envolvidos no numerador e no denominador da fracção, naquela interpretação. Na representação verbal das fracções, os alunos recorreram a conhecimentos prévios sobre números para memorizarem a leitura dos denominadores das fracções, estabelecendo analogias com a leitura dos números ordinais. Rapidamente memorizaram as representações verbais das fracções com denominadores até 10.

Após a resolução das primeiras tarefas, em que foram pedidas representações de fracções através de diversos sistemas (pictórico, simbólico e verbal), todos os alunos foram capazes de os articular e traduzir. O trabalho sistemático e articulado dos diversos modelos de representação parece facilitar a compreensão do significado da fracção na interpretação quociente. Também Berh e colegas (1993) consideram que a representação através de vários sistemas ou modelos facilita a compreensão do conceito de fracção. Relativamente à representação de fracções, este estudo mostra que as crianças são capazes de compreender os diferentes modelos de representação utilizados e de compreender o seu significado na interpretação quociente. As exposições orais feitas pelos alunos das suas resoluções, bem como os seus argumentos escritos permitiram verificar que todos os alunos compreenderam o significado da fracção, nesta interpretação. Compreenderam que ela pode representar uma relação entre o número de itens a repartir e o número de recipientes, bem como a quantidade que cada recipiente recebe (quociente da divisão).

Os alunos foram capazes, não só de fazer a representação simbólica, mas também de compreender a relação que ela expressa e de perceber que a fracção é um número. Os conhecimentos informais dos alunos sobre divisão facilitaram e promoveram a compreensão de que o resultado da partilha de itens por recipientes é uma quantidade e que esta pode ser representada por uma fracção. Esta ideia de que a interpretação quociente potencia a construção do conceito de fracção nas crianças pequenas, está já identificada na literatura (ver Empson, 1999; Mamede, 2007). Também estudos realizados com crianças mais velhas distinguem a interpretação quociente como aquela em que o conceito de fracção é melhor compreendido (ver Mack, 1990; Nunes et al., 2004).

5.1.2. Como entendem os alunos a ordenação e equivalência de fracções apresentadas na interpretação quociente?

As tarefas de ordenação e equivalência de fracções foram resolvidas individualmente e posteriormente discutidas no grupo turma. Os trabalhos produzidos pelos alunos permitem verificar que, na interpretação quociente, os alunos são capazes de comparar fracções e de as ordenar correctamente. Dos 8 alunos, apenas um manifestou algumas dificuldades nas primeiras tarefas de ordenação, mas ultrapassou-as e foi melhorando o seu desempenho nas tarefas seguintes.

Os alunos deste estudo começaram por recorrer à representação pictórica das fracções a ordenar, mas, posteriormente, foram-se libertando dessa representação e passaram a comparar as fracções a partir da representação simbólica. À medida que se iam libertando da necessidade de realizarem a representação pictórica, verificou-se que o tipo de argumentos apresentados para justificarem a ordenação foram-se tornando mais elaborados e rigorosos.

A maioria dos alunos facilmente reconhece a relação inversa entre o divisor e o quociente, nas situações em que as fracções apresentam numeradores iguais. Este fenómeno foi também identificado por Empson (1999), quando analisa os conhecimentos informais sobre a relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo se mantém, e sobre equivalência, de crianças de 6 e 7 anos.

Também Kornilaki e Nunes (2005) que analisaram a compreensão da relação inversa entre o divisor e o quociente, de crianças dos 5 aos 7 anos, chegaram a uma conclusão semelhante, apresentado evidências de que estas compreendem a relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo se mantém. Já antes, Correa et al (1998) tinham identificado em crianças, a capacidade de compreenderem a relação inversa entre o divisor e o quociente quando estavam envolvidas as quantidades discretas, nos casos em que era igual o dividendo.

Neste estudo, foram também resolvidas tarefas de ordenação de fracções com o mesmo denominador. Os alunos não apresentaram qualquer dificuldade na ordenação das fracções propostas e os seus argumentos mostram que compreenderam que, mantendo-se o número de recipientes, quanto mais são os itens a repartir, maior será a fracção. Foi nestas tarefas de ordenação que os alunos menos usaram a representação pictórica para verificarem a ordenação efectuada.

Os alunos tiveram também sucesso na ordenação fracções com numeradores e denominadores diferentes, mas manifestaram algumas dificuldades na elaboração de argumentos que justificassem a ordenação. Nestes casos, começam também por fundamentar a ordenação na percepção visual da representação pictórica, mas posteriormente, os argumentos passaram a ser fundamentados na correspondência ou por referência à fracção $^1/_2$. Nunes et al. (2004) identificaram também esta dificuldade em crianças mais velhas. Segundo os autores, constitui uma dificuldade para as crianças relacionar, em simultâneo, os numeradores e os denominadores das fracções a comparar. Como aconteceu no estudo aqui apresentado, em que os alunos tomaram como referência a fracção $^1/_2$ para compararem fracções com numeradores e denominadores diferentes, também Nunes e colegas (2004) identificam o mesmo fenómeno com os alunos mais velhos. O uso de uma fracção de referência, nomeadamente da fracção $^1/_2$, como estratégia utilizada na ordenação de fracções pode ser compreendido à luz das conclusões de Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), que consideram que a noção de metade é mais facilmente entendida pelas crianças mais novas. Empson (1999) refere também que todas as crianças possuem alguns conhecimentos informais sobre metade e que esses conhecimentos informais permitem estabelecer relações de equivalência entre quantidades fraccionárias.

Os alunos do estudo aqui documentado mostraram ser capazes de perceber que das fracções com numerador igual, era maior a que apresentava o denominador menor e que, nas fracções com denominadores iguais, era maior a que apresentava numerador maior sendo disso evidência os argumentos orais e escritos por eles apresentados.

A facilidade com que os alunos passavam de um sistema de representação simbólica para a representação pictórica de situações que envolviam fracções na interpretação quociente tornou-se um elemento facilitador da ordenação. Sempre que surgiam dúvidas na comparação de fracções, os alunos, com alguma destreza, procuravam fazer a representação pictórica para puderem identificar alguma relação entre o número de itens e os recipientes de cada fracção que lhes permitisse perceber qual das fracções era maior. Numa das situações estudadas por Mack (1990) que consistia em comparar as fracções 1/6 e 1/8 apresentadas num contexto da vida real, todos os alunos responderam correctamente. Contudo, quando era pedido que comparassem as mesmas fracções apresentadas apenas na sua forma simbólica, quatro de cinco alunos responderam de forma errada argumentando que sendo o 8 maior do que o 6, a fracção $^{1}/_{8}$ é maior que $^{1}/_{6}$. No estudo apresentado nesta dissertação, todas as fracções foram apresentadas em contexto da vida real que, a par do trabalho intensivo de representação em diversos sistemas, terá sido um dos factores que determinou os bons resultados obtidos na compreensão das fracções na interpretação quociente e na ordenação de fracções.

No caso de identificação de fracções equivalentes, os resultados obtidos foram muito positivos. Todos os alunos foram capazes de reconhecer fracções equivalentes. Os argumentos apresentados foram fundamentados, maioritariamente, num raciocínio que traduz alguma relação de proporcionalidade. Os alunos identificaram e compreenderam a relação 'um para muitos'. Por exemplo na comparação das fracções $^{2}/_{6}$ e $^{3}/_{9}$ alguns alunos igualaram a primeira fracção a $^{1}/_{3}$ e a segunda a $^{2}/_{6}$, demonstrando terem compreendido que várias fracções podem representar a mesma quantidade. Esta compreensão parece expressar algum raciocínio proporcional.

As crianças conseguiram ter sucesso nas tarefas de ordenação e equivalência apresentadas na interpretação quociente. Realizaram aprendizagens significativas relativamente ao reconhecimento da relação inversa entre o denominador e o quociente, para justificarem a ordenação de fracções de igual numerador. Também no caso de fracções com igual denominador, os alunos não manifestaram dificuldades em compreender que é maior a fracção com maior numerador. No que respeita à equivalência de fracções, os alunos justificam as suas opiniões maioritariamente através do estabelecimento de um raciocínio proporcional que é assente na relação de um para muitos.

Os resultados obtidos no estudo aqui apresentado no que concerne à representação, ordenação e equivalência de fracções na interpretação quociente, foram bastante surpreendentes. Era completamente desconhecida a forma como os alunos iriam reagir à introdução do conceito de fracção na interpretação quociente, quando o seu domínio dos números inteiros estava ainda pouco consolidado. Existem vários estudos em que se verifica um melhor desempenho dos alunos na representação e comparação de fracções na interpretação quociente do que nas outras interpretações, mesmo quando são introduzidos ao conceito na interpretação parte-todo (ver Nunes e tal., 2004). Contudo, a maioria desses estudos foram feitos com crianças mais velhas e nunca num contexto de sala de aula onde os alunos interagem quando apresentam resultados e argumentos, partilham estratégias e melhoram os seus desempenhos a partir dos contributos dos colegas. No presente estudo esteve sempre implícita a necessidade de se realizarem aprendizagens. Desta forma, os resultados obtidos são um sinal de que é possível colocar em prática as alterações apresentadas no novo Programa de Matemática sem grande receio, uma vez que os alunos são capazes de compreender as fracções quando abordadas a partir de situações do seu quotidiano, sustentadas na interpretação quociente. As dificuldades com fracções documentadas na revisão de literatura desta dissertação talvez possam ser minoradas se o trabalho com fracções passar a ser iniciado mais cedo e a partir de situações que tenham significado para os alunos. Kieren, (1988), Mack (1990), Streefland (1991) Behr et al. (1993), Stafylidou e Vosniadou (2004) consideram que as situações do quotidiano são um óptimo contexto para desenvolver conceitos matemáticos pois potenciam os conhecimentos informais. A interpretação quociente parece ser a que mais se adequa aos contextos da vida real e, como tal, parece ser a mais apropriada para introduzir o conceito de fracção (Mack, 1990; Streefland, 1991; Nunes et al, 2004; Mamede, 2007). O estudo aqui apresentado parece sustentar também essa ideia.

5.1.3. Como transferem os alunos o conhecimento adquirido na interpretação quociente para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo?

O novo Programa de Matemática sugere que o trabalho com os números racionais se inicie com uma abordagem intuitiva de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, nos dois primeiros anos de escolaridade. Ainda que não o faça de forma completamente clara, a leitura do documento permite compreender que é a interpretação quociente a indicada para iniciar o estudo das fracções partindo da partilha equitativa. A esta interpretação deve seguir-se o estudo das fracções na interpretação parte-todo com a divisão da unidade em partes iguais. Também Mamede (2007) apresenta argumentos que orientam no mesmo sentido. Para a autora, os conhecimentos informais sobre fracções são usados com melhores resultados quando os problemas são apresentados na interpretação quociente do que quando são apresentados nas interpretações parte-todo ou operador, reforçando a ideia de que o tipo de interpretação tem efeito na resolução de problemas de ordenação e equivalência. Por sua vez Mamede (2007) argumenta que das três interpretações, quociente, parte-todo e operador, esta é a mais difícil de compreender pelos alunos. Na interpretação operador os alunos devem ser capazes de estabelecer raciocínios multiplicativos, o valor do numerador determinava o número de subconjunto de um conjunto maior (ver Nunes e tal., 2004).

Berh e colegas (1983) referem o trabalho com as diferentes interpretações como um dos aspectos primordiais na compreensão do conceito de fracção. Também o novo Programa de Matemática orienta no sentido de se trabalharem as várias interpretações desde os primeiros anos de escolaridade. Sugere que se inicie o trabalho de fracções a partir da exploração de situações de partilha equitativa como forma de introduzir as fracções na interpretação quociente.

Sendo a interpretação operador a que mais dificuldade parece apresentar aos alunos (Mamede, 2007) a opção de prosseguir o estudo das fracções com a interpretação parte-todo constituiu uma opção mais adequada, como evidenciam os resultados do estudo.

As tarefas de representação de fracções na interpretação parte-todo foram introduzidas num contexto conhecido dos alunos, depois de trabalhadas a representação de quantidades e a comparação de fracções na interpretação quociente. Para verificar como os alunos procediam perante uma nova interpretação das fracções, tendo como ponto de partida os conhecimentos resultantes do trabalho com fracções na interpretação quociente, não foi dada nenhuma orientação pelo professor. Foi pedido a cada aluno que fizesse a representação pictórica de algumas fracções, tendo como modelo uma barra de chocolate. Surpreendentemente, todos os alunos representaram correctamente a fracção dada e, quando questionados sobre as suas resoluções, todos os alunos mostraram compreender que o denominador era o número de partes iguais em que o chocolate foi partido e que o numerador correspondia ao número de partes pintadas de cor diferente.

Relativamente à representação pictórica e simbólica de problemas apresentadas na interpretação parte-todo, todos os alunos apresentaram resoluções correctas sem ter sido apresentada qualquer explicação do professor. Não se verificou qualquer conflito ou dificuldade em fazer a representação simbólica de representações pictóricas ou a representação pictórica de fracções apresentadas na sua forma simbólica. Explicitaram de forma consistente o significado correcto do numerador e do denominador**,** referindo as diferenças de significados de uma interpretação para a outra.

O trabalho intensivo de representação, de partilha equitativa e de abordagem aos aspectos lógicos na interpretação quociente parece ter dotado os alunos de ferramentas que lhes permitiram compreender o significado das fracções nesta nova interpretação, sem entrarem em conflito com o significado da fracção na interpretação quociente. Sobre a transferência de conhecimentos sobre fracções entre as diferentes interpretações, Mamede (2007) argumenta que a transferência de conhecimento dos aspectos lógicos e dos aspectos de representação de fracções não ocorre espontânea ou intuitivamente da interpretação quociente para a parte-todo, quando as crianças não são expostas a situações de ensino prolongado. Os resultados obtidos no estudo aqui apresentado não vão de encontro aos obtidos no estudo de Mamede, uma vez que neste caso houve transferência significativa de conhecimentos, no que respeita à representação simbólica formal de fracções da interpretação quociente para a interpretação parte-todo. Convém, contudo, relembrar que os dois estudos são de propósitos e natureza diferentes. O estudo desenvolvido por Mamede procurava identificar as interpretações que melhor se ajustavam ao conhecimento informal de fracções das crianças, tendo-lhes para isso ensinado apenas o essencial para a resolução de tarefas de representação simbólica, ordenação e equivalência. Contrariamente, no estudo aqui documentado, os alunos foram expostos a uma episódio de ensino prolongado e planeado para a sala de aula, em grupo turma, procurando desenvolver um conteúdo curricular. Assim, estes alunos partilharam resoluções, apresentaram e discutiram estratégias e analisaram o seu próprio trabalho efectuado em sala de aula. Estes aspectos contribuíram muito positivamente para que, os alunos envolvidos na investigação aqui apresentada, desenvolvessem um conceito de fracção mais completo.

Na interpretação parte-todo foram apresentadas algumas tarefas de comparação de fracções com igual numerador. Todos os alunos reconheceram a relação inversa entre o número de partes e o tamanho de cada parte. Feita a ordenação correcta e justificada a ordenação, alguns alunos tiveram necessidade de representar a situação para confirmarem a sua resposta através da percepção, recorrendo a modelos pictóricos. Neste estudo, o trabalho com diferentes sistemas de representação permitiu também que os alunos pudessem confirmar os seus raciocínios.

Nas tarefas de pavimentação, em que os alunos fizeram a identificação de quantidades, envolveram envolvendo a representação simbólica e pictórica, na interpretação parte-todo, em tarefas. Nestas tarefas, os alunos revelaram ter desenvolvido algumas capacidades no trabalho com fracções na interpretação quociente que alargaram e adaptaram à interpretação parte-todo. Ao pavimentarem uma superfície limitada por uma linha poligonal fechada, em que a fracção dada devia ter uma cor diferente, os alunos apresentaram resoluções surpreendentes e variadas. Apesar de ser uma superfície igual para todos, a maioria dos alunos construiu figuras distintas das dos colegas resultando. A observação permitiu verificar que o todo resultava da junção de um número de subconjuntos iguais. O total de conjuntos era igual ao denominador e o número de subconjuntos de cor diferente, igual ao numerador.

As resoluções apresentadas pelos alunos permitem verificar que compreenderam o significado das fracções na interpretação parte-todo. Todos os alunos foram capazes de construir a figura que representava o todo a partir de uma fracção dada. Ficou evidente que os alunos compreenderam que, na interpretação parte-todo, o denominador da fracção representa o número total de partes iguais que a figura contém e que o numerador da fracção corresponde ao número dessas partes que devia ter a cor pedida. Mais ainda, os alunos construíram figuras em que a parte ou partes não eram conjuntos singulares. O conceito de parte como um conjunto de elementos não constituiu qualquer dificuldade para a compreensão dos alunos. Parece que estes alunos desenvolveram um conceito de fracção que lhes permite trabalhar a representação de fracções e a identificação de quantidades em várias interpretações. Considerando que para Nunes e colegas (2004), a existência de partes constituídas por grupos com o mesmo número de elementos definem a interpretação operador, os trabalhos apresentados, em que as figuras construídas resultam da junção de grupos iguais que formam o todo, mostram que os alunos estão preparados para continuarem o trabalho com fracções numa nova interpretação. a interpretação operador.

Em suma, relativamente aos aspectos lógicos das fracções, os alunos conseguiram comparar fracções unitárias e não unitárias na interpretação quociente. Desenvolveram alguma capacidade de argumentar com base na relação inversa entre o denominador e o quociente , na comparação de fracções com numeradores iguais. Nas fracções com denominadores iguais, os argumentos justificativos da ordenação eram essencialmente baseado na relação directa entre o número de itens a repartir e o quociente ou seja, sendo os recipientes em igual número, era maior a fracção com maior número de itens. Reconheceram fracções equivalentes, justificando a equivalência através da correspondência um para muitos que lhes permitiu estabelecer um raciocínio de proporcional.

Relativamente a outros estudos realizados na área das fracções e já referidos nesta dissertação (Empson, 1999; Nunes et al, 2004; Mamede, 2007, 2008), este estudo apresenta alguns aspectos inovadores. Foi possível verificar que crianças de 7 anos são capazes de transferir conhecimentos relativamente à representação de fracções da interpretação quociente para a interpretação parte-todo, desde que os alunos compreendam bem o conceito de fracção na interpretação quociente. Nesta compreensão do conceito de fracção na interpretação quociente é importante que o ponto de partida sejam situações de partilha equitativa semelhantes às situações da vida dos alunos. Parece que o trabalho simultâneo de diferentes sistemas de representação influencia positivamente a compreensão do conceito de fracção. A partilha e discussão de estratégias na sala de aula são também um aspecto determinante na compreensão dos conceitos matemáticos e, como tal, das fracções. Neste estudo, as crianças transferiram conhecimentos, relativamente à representação e identificação de quantidades fraccionários da interpretação quociente para a interpretação parte-todo. Relativamente aos aspectos lógicos, a transferência de conhecimentos parece ter existido também, pois as tarefas comparação de fracções apresentadas na interpretação parte-todo foram resolvidas com sucesso. Contudo, o número de tarefas sobre os aspectos lógicos das fracções na interpretação parte-todo resolvidas pelas crianças envolvidas neste estudo não é suficiente para se tirarem conclusões mais definitivas. É possível perceber, a partir dos dados deste estudo, que a interpretação quociente é uma opção válida para que as crianças mais novas iniciem o estudo das fracções. Mais ainda, após o início do estudo das fracções na interpretação quociente, a interpretação parte-todo torna-se mais acessível à compreensão das crianças.

O contexto de sala de aula, em que se desenvolveu este estudo, pode ser uma mais-valia para a investigação e para a prática pedagógica dos professores. Contribui para o preenchimento de uma lacuna da investigação em Matemática, pois não existem estudos nacionais nem internacionais que permitam perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções a partir da interpretação quociente na compreensão do conceito de fracção dos alunos do 1.º Ciclo.

5.2. Implicações educacionais

Na literatura é possível encontrar investigação documentada que orienta no sentido de considerar a interpretação quociente a mais indicada para introduzir as crianças ao conceito de fracção (ver Mack, 1990; Streefland, 1997; Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade & Bell,2004; Mamede, 2007). Os resultados do estudo apresentado nesta dissertação corroboram esta opinião. As resoluções dos alunos, no que se refere à representação, ordenação e equivalência de fracções na interpretação quociente, foram realizadas de forma espontânea partindo dos conhecimentos informais dos alunos. A discussão das suas realizações no grupo turma levou à construção de novos conhecimentos a partir de situações semelhantes às da vida real. Os resultados aqui apresentados sugerem que as crianças são capazes de compreender a representação, a ordenação e a equivalência de fracções na interpretação quociente e que, desta interpretação, transferem conhecimentos para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo.

Neste estudo foi possível verificar que uma primeira abordagem às fracções na interpretação quociente facilita a compreensão dos diferentes sistemas de representação e não levanta obstáculos à compreensão da representação de fracções na interpretação parte-todo. Mais ainda, é possível que os alunos passem da mesma forma natural da interpretação parte-todo para a interpretação operador, pois este estudo apresenta resoluções de uma tarefa na interpretação parte-todo em que os alunos evidenciam um raciocínio multiplicativo próprio da interpretação operador (ver Nunes et al., 2004), onde o denominador de uma fracção representa o número de grupos iguais em que o todo se divide e o numerador o número de grupos a considerar.

O novo Programa de Matemática orienta no sentido de se desenvolverem práticas de sala de aula no 1.º ciclo, em que o conceito de fracção deve ser apresentado aos alunos nas diferentes interpretações. Os dados apresentados neste estudo sugerem que as orientações daquele documento podem ter um impacto positivo na compreensão das fracções e, consequentemente, na diluição das dificuldades dos alunos relativamente à representação, ordenação e equivalência que se têm verificado ao longo do percurso escolar (Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade & Bell, 2004; Flores, Samson & Yanik, 2006; Monteiro, 2007; Mamede, 2008). Este estudo mostra que as crianças mais novas são capazes de trabalhar com fracções e de compreender a representação nas interpretações quociente e parte-todo. Mostra ainda que os aspectos lógicos das fracções na interpretação quociente são compreendidos pelas crianças mais novas quando trabalhados em contextos da vida real e suportados num trabalho de representação de fracções e que é possível passar para a representação e ordenação de fracções na interpretação parte-todo de forma espontânea e sem conflitos com a interpretação quociente. Os resultados deste estudo podem ser vistos como um convite aos professores para seguirem as orientações do novo Programa de Matemática iniciando a abordagem às fracções logo nos primeiros anos de escolaridade, a partir da partilha equitativa e da interpretação quociente. Este estudo deixa um testemunho positivo de que é possível promover a construção do conceito de número racional desde o 2.º ano de escolaridade abordando a representação e os invariantes operacionais sob a forma de fracção.

5.3. Limitações do estudo

Sendo um episódio de ensino, o estudo esteve limitado aos 8 alunos que correspondiam às características necessárias para desenvolver o estudo numa turma de 10 alunos. Assim, uma das limitações está relacionada com a dimensão da amostra. O pequeno número de participantes torna a amostra pouco diversificada tanto pela dimensão como pelo estrato socioeconómico dos participantes que pertenciam todos ao mesmo grupo social.

Outra limitação também relacionada com o facto de o estudo ser aplicado em situação de sala de aula, foi o número limitado de sessões que poderiam ser disponibilizadas para o estudo de fracções sem prejudicar a planificação definido em agrupamento. Deste modo, foi necessário optar por dedicar menos sessões à ordenação e equivalência de fracções na interpretação parte-todo. Portanto, não foi possível trabalhar a ordenação com mais profundidade.

Poderemos considerar também uma limitação a impossibilidade de prosseguirmos com a intervenção na interpretação operador quando o trabalho dos alunos começou a seguir nesse sentido. Contudo, as limitações de tempo impostas pelo cumprimento do programa não permitiriam que se dedicasse mais tempo a um conteúdo que será abordado em anos posteriores do mesmo ciclo.

Convém referir que, sendo o estudo realizado com crianças do 2.º ano de escolaridade, limitamos a investigação ao estudo dos racionais na sua representação em forma de fracção, não a estendendo à representação decimal, como sugere o programa do 1.º ciclo, mas para os anos seguintes do ciclo.

5.4. Recomendações para futuras investigações

A Análise qualitativa das representações e dos argumentos dos alunos para justificarem a ordenação e equivalência de fracções nas interpretações quociente e parte-todo pretendeu perceber os efeitos de iniciar o trabalho com fracções a partir da interpretação quociente, na compreensão do conceito de fracção dos alunos do 1.º ciclo. Os resultados obtidos sugerem que seria importante que outros estudos da mesma natureza se realizassem, em situação de sala de aula, com amostras de maior dimensão e com outros investigadores. Relativamente a introdução do conceito de fracção no 1.º ciclo, a investigação em contexto de sala de aula é muito pertinente e necessária uma vez que, existem poucos estudos desenvolvidos nesse contexto que possam servir de referência aos professores que pretendem melhorar e fundamentar as suas práticas.

O presente estudo incidiu também sobre o efeito da introdução do conceito de fracção na interpretação quociente quando se passa para a interpretação parte-todo. Já existam estudos que orientam no sentido de que a interpretação quociente é mais adequada para introduzir o conceito de fracção por ir de encontro aos conhecimentos informais das crianças (Mack, 1990; Nunes et al, 2004; Mamede, 2007). Contudo, seria interessante fazer um estudo comparativo entre dois grupos sendo um introduzido ao conceito de fracção na interpretação parte-todo passando depois para a interpretação quociente e outro introduzido na interpretação quociente passado depois para a interpretação parte-todo. Registar-se-iam os mesmos resultados nos dois grupos? Seria oportuna a realização de um estudo longitudinal que permitisse fazer uma observação continuada, ao longo dos anos de 1.º ciclo. Deste modo poderiam ser observados os efeitos da introdução ao conceito de fracção na interpretação quociente na compreensão do conceito global de fracção e na capacidade de resolver problemas sobre os aspectos lógicos das fracções nas várias interpretações.

O novo Programa de Matemática realçada a importância de se trabalhar, no 1.º ciclo, a representação pictórica de percentagens relacionando-as com fracções e decimais. Era oportuno que se realiza-se um estudo para verificar qual o efeito para o trabalho com os números racionais de se introduzir os alunos ao conceito de fracção na interpretação quociente.

Finalmente, importava que se realizasse uma réplica deste estudo, com um professor que apresentasse características diferentes e com uma amostra maior constituída por alunos com idades semelhantes para comparar resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching Rational Number and Decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (pp. 190-231). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: MacMillan Publishing Company.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational - Number Concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92 – 127). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323–341.

Behr, M.,. Harel, G, Post, T. & Lesh, R (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis – Emphasis on the Operator Construct. In T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg, *Rational Numbers An integration of Research* (pp.13-47). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associate, Publishers.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação - Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.* Porto: Porto Editora.

Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying Fractions on Number Lines: *Journal for Research in Mathemathics Education*, 19 (3), 215-232.

Caraça, B. J. (1975). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Gráfica Brás Monteiro, Lda. Lisboa.

Carmo, H.& Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação - Guia para auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Coll, C. & Solé, I. (2001). Os professores e a concepção construtivista. In César, C., Elena, M., Teresa, M., Mariana, M., Javier, Isabel, S., & Antoni, Z., *O Construtivismo na Sala de Aula: Novas Perspectivas para a Acção Pedagógica*, pp. 8-27. Porto: Edições ASA.

Correa, J., Bryant, P. & Nunes, T. (1998). *Young Children's Understanding of Division:The Relationship Between Division Terms in Noncomputational task*. Journal of Educational Psycollogy, 90 (2), 321 - 32.

DEB (2001).*Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

DEB (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico — 1.o Ciclo* (4.ª ed). Lisboa: Ministério da Educação.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. Ministério da Educação. Acedido em 12 de Janeiro, 2012, de http://sitio.dgidc.min

Empson, S. (1999). Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Ftractions Concepts in a Frist-Grade Classroom. *Cognition and Instrution*, 17 (3), 283 - 342.

Flores, A., Samson, J. & Yanik, B. (2006). Quotient and Measurement Interpretations of Rational Numbers. *Teaching Children Mathematics*. 13 (1), 34 - 39.

Hart, K. (1981). Fractions. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*, (pp. 66–81). London: John Murray Publishers.

Hart, K. (1989). Fractions: Equivalence and Addition. In D. Johnson (Eds.), *Children's Mathematical Frameworks 8–13*: A Study of Classroom Teaching (pp. 46–75). Windsor: NFER-NELSON Publishing Company Ltd.

Hiebert, J. & Tonnessen, L.H. (1978).Developmentr of Fraction Concept in Two Physical Contexts. An Exploratory Investigation. *Journal for Research in Mathematics Education,* 9, 374-378. (Cataloging of misconceptions)

Hunting, R. (1983). How Children account for Fraction Equivalence. In R. Hreshkowitz (Ed.), *Proceeding of Seventh International Conference for Psychology of Mathematics*

Education (pp. 176-181). Rehovot Israel: Dept of Science Teaching, Weizmann Institute of Science.

Kerslake, D. (1986). Fractions: *Children's Strategies and Errors — A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T. Carpenter, E. Fennema &T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers — An Integration of Research* (pp. 49–84). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development', in J. Hiebert & M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, (pp. 162 - 181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T.E. (1976). On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kornilaki, E. & Nunes, T. (2005). Generalising principles is spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, 20, 388-406.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T.(1987). Rational Number Relations and Propporcions. In C. Javier (Ed*), Problems of representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Cramer, K.., Doerr, H., Post, T. & Zawojewski, J. (2003). Using a Translation Model for a Curriculum Development And Classroom Instruction. In Relations and Propporcions. In Lesh, R., Doerr, H. (Eds*) Beyond Constructivist Model and Modeling*

Perspectivers Mathematics Problem Solving, Learning and of Teaching. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1998). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & J. Behr (Eds*), Number concepts and operations in middle-grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mack, N. (1990). Learning with Understanding: Building on Informal Knowledge. Journal *for Research in Mathematics Education*, 21 (1), 16-32.

Mamede, E. (2008a). "Às voltas com as Fracções". In Ema Mamede (Cood.), *Matemática ao encontro das práticas – 1.º Ciclo*, (pp. 83-92). Braga: Universidade do Minho – Instituto de Estudos da Criança.

Mamede, E. (2008b). Focusing on children's early ideas of fractions. In Bozena Maj, Marta Pytlak & Ewa Swoboda (Eds.), *Supporting Independent thinking through Mathematical Education*, pp. 61-67. Poland, Rzeszów: Nowa Era Publisher.

Mamede, E. (no prelo 2007). A compreensão do conceito de fracção – que papel têm as situações?, Actas do XVIII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática, Angra do Heroísmo.

Mamede, E., Cardoso, P. (2009).Fracções no ensino Básico: problemas do conceito e implicações educacionais. In Gomes, A. (Ed.), *Matemática Elementas Actas do 3.º Encontro*, (pp. 105-125). Barbosa & Xavier, Lda., Artes Gráficas

Mamede, E., Nunes T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 281–288). Melbourne, Australia: PME.

Mamede, ME., Nunes, T. & Bryant, P. (2005). " The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quocient situations". In Chic, H. L. & Vincent, J. L. (Eds). Proceeding of the *29th Conference of de International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3, 281 – 288. Melbourne: PME.

Mamede, E. (2007). The Effects of Situations on Children's Understanding of Fractions. PhD Thesis (unpublishrd thesis), Oxford brookes University. Oxford: OBU.

Marshall, S. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers — An Integration of Research* (pp. 261–288). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Marshall, S. (2001). Assessement of Rational Numbers Understanding: A Schema-Based approach. In T. Carpenter, E. Fennema an T. Romberg (Eds), *Rrational Numbers – Integration of Research*, (pp. 261-2889). Hhillsdale, New Jersey: LEA.

Matos, J. F.& Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso na investigação em Educação Matemática - Problemas actuais. *Quadrante*, Vol. 3, n.º 1, 18-53.

Mendes, Fátima; Monteiro, Cecília. (2009). Números :Ensino e aprendizagem. In Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática, Vila Real.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005a). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14 (1), 89 - 104.

Monteiro, C. (2007). "Dos números Inteiros aos decimais: um percurso complexo, mas possível, no desenvolvimento do sentido de número". In Maria de Lurdes Serrazina (Cood.), *Ensinar e Aprender matemática no 1.º ciclo*, (pp. 19 - 33). Lisboa: Texto Editores.

Monteiro, C., Pinto, H. (2005b). O sentido do número: o caso dos decimais e das fracções. In *Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática*, Caminha (pp. 55-67).

Monteiro, C., Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido de número racional*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Monteiro, C., Pinto, H.& Figueiredo, N. (2005). As fracções e o desenvolvimento do sentido de número racional. *Educação e Matemática*, n.º 84, 47-51. APM

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. (Tradução Portuguesa do original em inglês de 2000). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nunes T & Bryant P, (2008), “Rational Numbers and Intensive Quantities: Challenges and Insights to Pupils’ Implicit Knowledge”, *Anales de Psicología*, 24(2) 262-27.

Nunes, T. (2008). Understanding Rational Numbers. *Conference Proceedings*, 32(3) pp 23 - 52. Linkoeping University, Sweden. Acedido em 12 de Janeiro, 2012, de http://www.ep.liu.se/ecp/032/003/ecp0832003.pdf

Nunes, T., and P. Bryant. (2009). Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. In *Key Understandings in Mathematics Learning*. London: Nuffield Foundation. Available.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud‘s definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris : 28–31, January.

Peter Bryant, Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective. Psychology Press, Lda Publishers, UK.

Piaget, J. (1952). *The Child Conception of Number*- London, IJK: RoutIedge and Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B. e Szeminska, A. (1960). The Child´s conception of geometry. London: RoutIedge and Kegan Paul.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O *professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. (ficheiro pdf)

Post, T. R. (1981), Fractions: Resultats and Implications from National Assessment. *Arithemetic Teacher*. 28 (9) 26 -31.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 18–36.

Sanchis, I. P., Mahfoud, M. (2010). Construtivismo: desdobramentos teóricos e no campo da educação. *Revista Eletrônica de Educação*, São Carlos. 4 (1), p. 18-33. Acedido em 12 de janeiro de 2012 em http://www.reveduc.ufscar.br.

Serrazina, M. L. (Org.) (2007). *Ensinar e aprender Matemática no 1.º ciclo*. Lisboa: Texto Editores

Stafylidou, S., Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction,* 14(5), 503-518.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed?, In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics — An International Perspective* (pp. 347–372). East Sussex: Psychology Press.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction,* 14, 453- 467.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh e M. Landau (eds.), *Acquisiton of mathematics: Concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988) Theorical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education*, Budapest, p. 39-41, 1988

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics — An International Perspective* (pp. 5–28). East Sussex: Psychology Press.

Yin, R.K. (2005). *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.

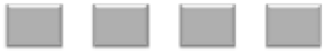
ANEXOS

Anexos 1 - A: Tarefas de partilha equitativa

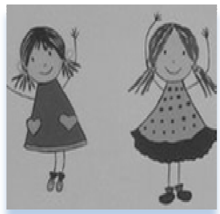
<u>Sessão 1</u>

TAREFA 1

Duas amigas dividem quatro bolos ficando ambas com a mesma a quantidade.



Como farias a divisão?



Quanto irá comer cada uma das meninas?

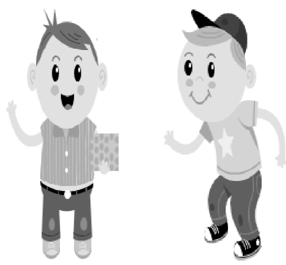
R:____

TAREFA 2

Dois amigos vão repartir três bolos de forma justa, ficando os dois com a mesma a quantidade.

Como farias a divisão dos bolos?

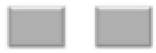
Quanto irá comer cada um dos amigos?



R: ____

TAREFA 3

O João e a Rita vão repartir de forma justa dois bolos.



Quanto irá comer cada um dos meninos?

R:____

TAREFA 4

O último bolo vai ser repartido de forma justa pela Luísa e pelo Diogo.

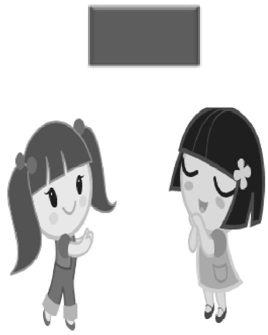
Como vão fazer a divisão do bolo?

Anexos 1 - B: Tarefas de representação de quocientes fraccionários

Sessão 2

TAREFA 1

Duas amigas vão repartir um chocolate entre elas, comendo as duas igual quantidade.



Mostra como vão dividir o chocolate?

Que número representa esta quantidade?

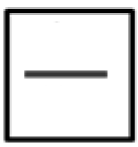
Quanto vai comer cada amiga?

R:____

TAREFA 2

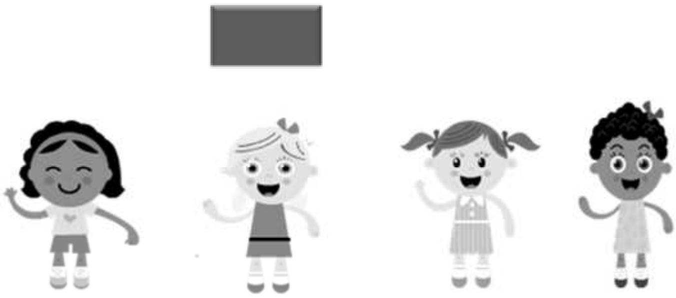
Três amigas vão repartir um chocolate entre elas comendo todas igual quantidade.

Escreve a fracção de chocolate que vai comer cada uma.

Cada menina vai comer 

Como será que se lê esta fracção?____

TAREFA 3



A estas amigas juntou-se outra e agora vão partilhar um chocolate pelas quatro.

Faz a divisão do chocolate.

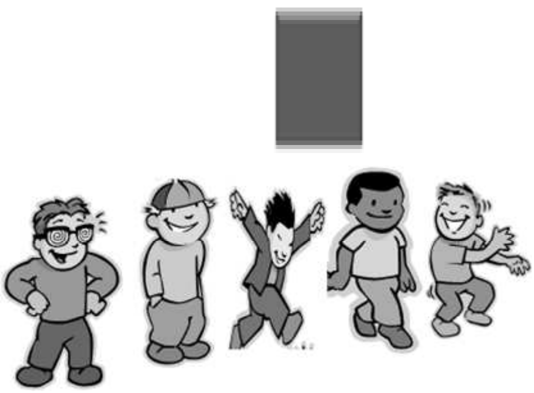
Escreve a fracção de chocolate que cada uma vai comer.

Como se lê esta fracção?

R:____

TAREFA 4

Escreve a fracção de chocolate que vai comer cada rapaz.

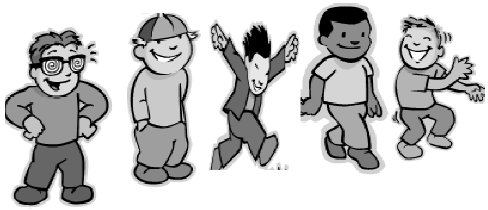


Cada rapaz vai comer $\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

Como será que se lê esta fracção?

R:____

TAREFA 5



Cinco rapazes juntaram-se para repartirem de forma justa um chocolate.

Escreve a fracção de chocolate que vai receber cada rapaz.

Cada rapaz vai comer

Como será que se lê esta fracção? ____

Mostra como vão partir o chocolate para que cada um coma a fracção justa?

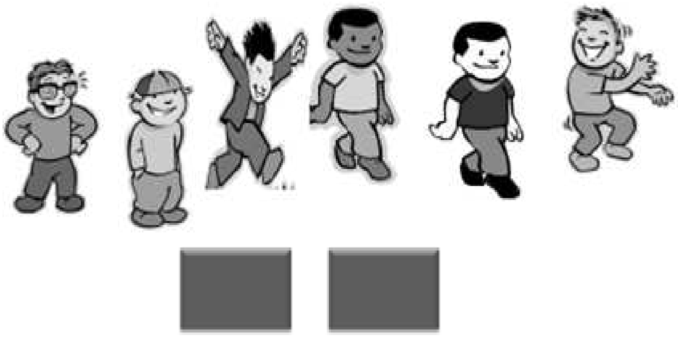
TAREFA 6

Escreve a fracção de bolo que ficará em cada caixa.

Mostra como se podem dividir os bolos pelas caixas para que todas fiquem com a mesma quantidade?

Será correcta esta forma de dividir os bolos? Porquê?

TAREFA 7



Escreve a fracção de chocolate que vai receber cada rapaz.

Cada rapaz vai comer

Como será que se lê esta fracção? ____

Mostra como vão partir o chocolate para que cada um coma a fracção justa?

TAREFA 8

Sete rapazes vão partilhar de forma equitativa (todos comem a mesma quantidade) dois bolos de morango.

Escreve a fracção de bolo com que ficará cada rapaz. (Explica como descobriste)

Como será que se lê esta fracção?____

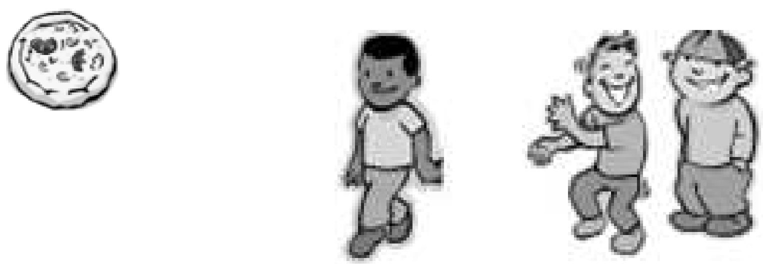
Anexos 1 - C: Tarefas de comparação na interpretação quociente

<u>Sessão 3</u>

TAREFA 1

Quem come mais piza, cada menina, cada menino ou é igual? Porquê?

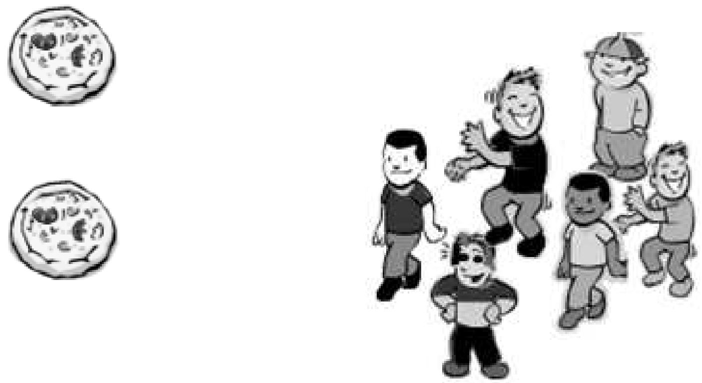
(Explica como as tuas respostas)



TAREFA 2

Quem come mais piza, cada menina, cada menino ou é igual? Porquê?

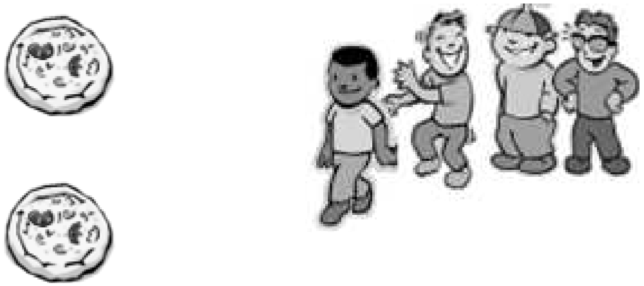
(Explica como as tuas respostas)



TAREFA 3

Quem come mais piza, cada menina, cada menino ou é igual? Porquê?

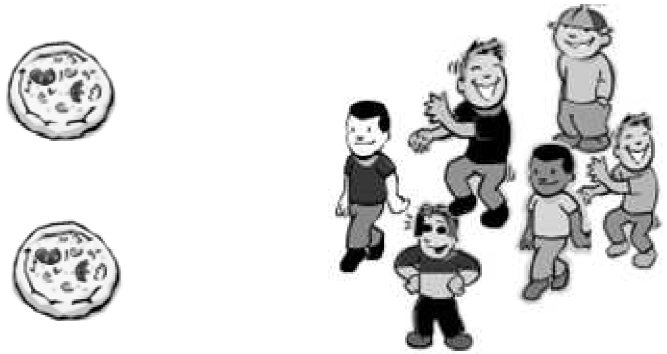
(Explica como as tuas respostas)



TAREFA 4

Quem come mais piza, cada menina, cada menino ou é igual? Porquê?

(Explica como as tuas respostas)

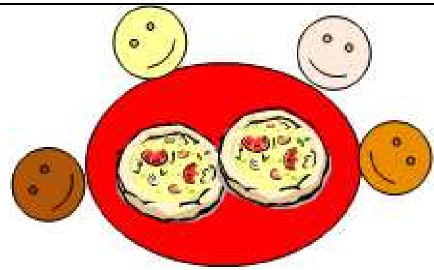
	

<u>**Sessão 4**</u>

TAREFA 1

Escreve a fracção que representa a parte de piza que cada menino vai comer em cada mesa.

Cada menino come



Cada menino come

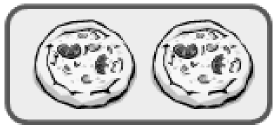
Quem come mais, cada menino da mesa azul, cada menino da mesa vermelha ou é igual? Porquê?

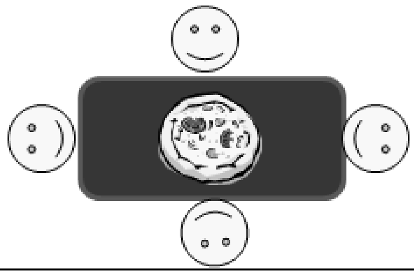
(Explica como as tuas respostas)

TAREFA 2

Os meninos da mesa vermelha e os da mesa amarela comeram a mesma quantidade de piza.

Desenha os meninos que estavam na mesa amarela.





Quem come mais, cada menino da mesa azul, cada menino da mesa vermelha ou é igual? Porquê?

(Explica como as tuas respostas)

TAREFA 3

Na festa de anos da Inês, cada menino comeu $\frac{1}{7}$ o bolo.

Quantos bolos comeram?____

Quantos meninos comeram bolo? _____________________________________

Desenha a mesa com os bolos que comeram e, à volta, os meninos que comeram bolo.

TAREFA 4

No Lanche em casa do João, cada menino comeu $\frac{2}{9}$ de piza.

Quantas pizas comeram no lanche?____

Quantos meninos comeram piza? ____

Desenha as pizas e os meninos que comeram piza.

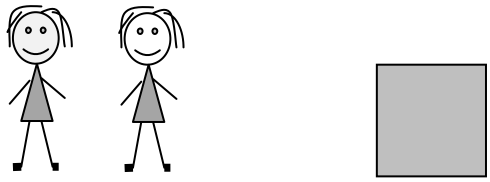
Sessões 5 e 6

TAREFA 1

Na escola fizeram-se trabalhos de expressão plástica. Cada grupo de alunos recebeu uma cartolina para partilhar de forma justa.

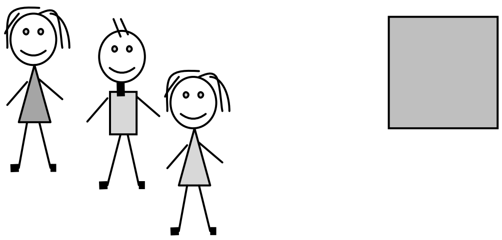
Que fracção de cartolina vai receber cada um?

Cada aluno recebe $\frac{\square}{\square}$ da cartolina.

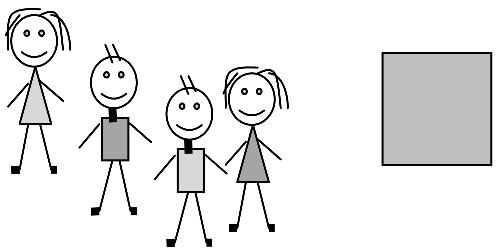


Que fracção de cartolina vai receber cada um?

Cada aluno recebeu $\frac{\square}{\square}$ da cartolina.



Que fracção de cartolina vai receber cada um?



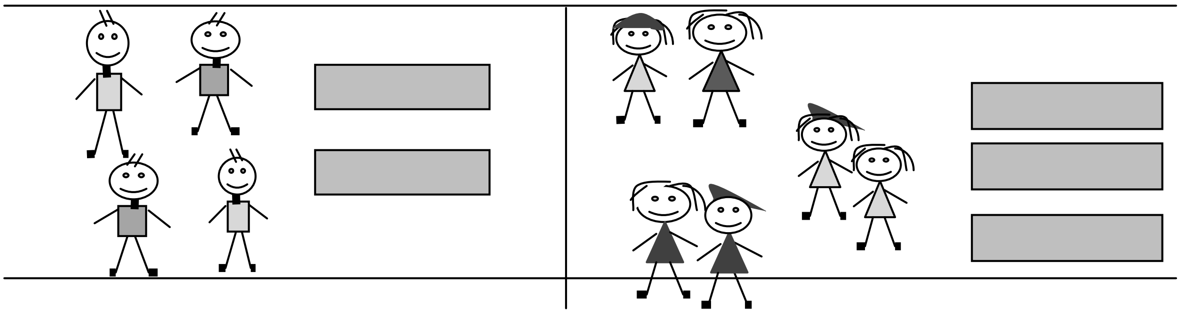
Cada aluno recebeu $\frac{\square}{\square}$ da cartolina.

Rodeias a fracção que representa a parte menor de cartolina.

Coloca entre as fracções o sinal adequado (>, <, =).

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

TAREFA 2



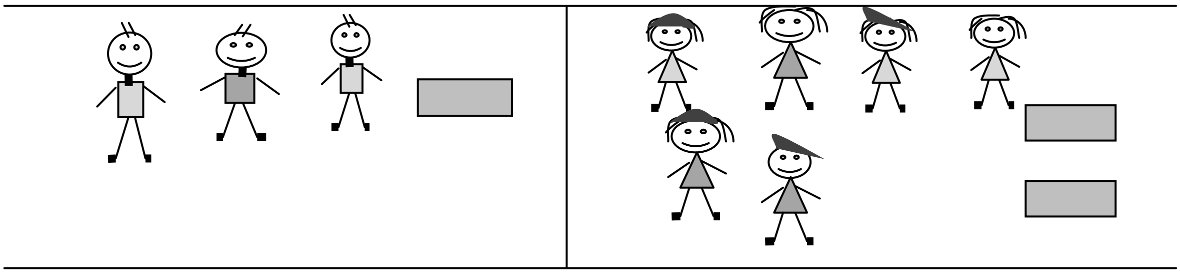
Quem come mais chocolate, cada menino ou cada menina?

Escolhe o sinal adequado e coloca o entre as fracções.

$\frac{2}{4}$ ____ $\frac{3}{6}$

> <

TAREFA 3



Quem come mais, cada menino ou cada menina?

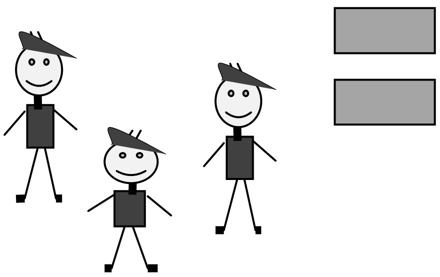
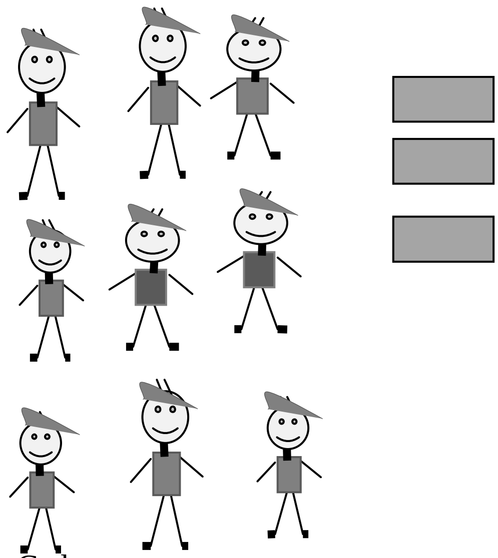
Escolhe o sinal adequado e coloca o entre as fracções.

$\frac{1}{3}$ ____ $\frac{2}{6}$

> <

TAREFA 4

Os atletas finalistas da equipa azul e os da equipa verde resolveram festejar partilhando de forma justa chocolates conforme vês nas figuras.

Finalistas da Equipa Azul	Finalistas da Equipa Verde
	
Cada um come ___	Cada um come___

Quem come mais chocolate, cada menino da equipa azul ou cada menina da equipa verde?

Explica a tua resposta.

Coloca o sinal adequado entre as fracções.

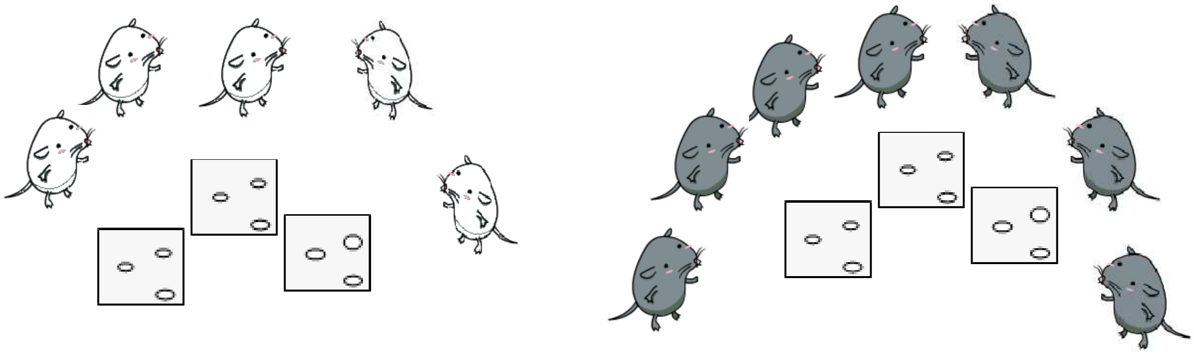
$\frac{2}{3}$ ____ $\frac{3}{9}$

> <

TAREFA 5

A família dos ratinhos brancos e a família dos ratinhos cinzentos repartem de forma justa as suas fatias de queijo que são todas iguais.

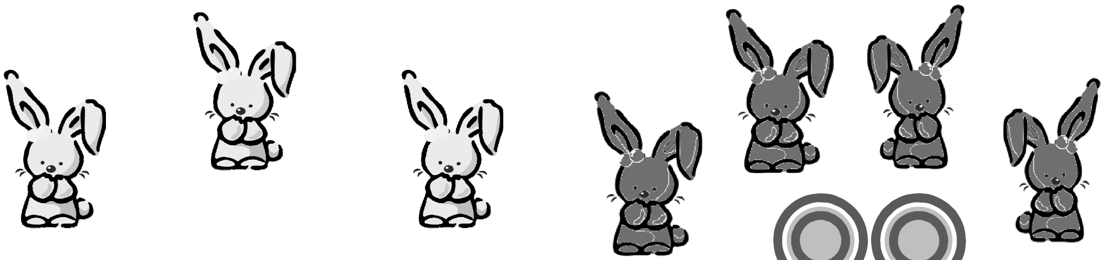
Escreve a fracção de queijo que come cada coelho em cada família e escolhe o sinal adequado para colocar entre as fracções.



TAREFA 6

Cada família de coelhos vai comer as suas tartes de cenoura.

Escreve a fracção de tarte que come cada coelho em cada família.

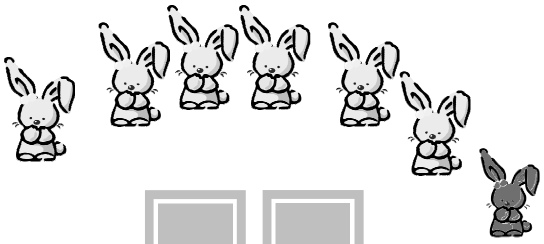
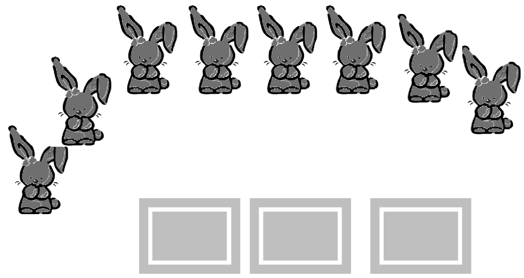


> <

TAREFA 7

Observa as fracções e desenha os ratos e as fatias de queijo em cada situação.

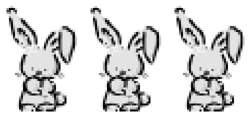
TAREFA 1

Coelhos brancos	Coelhos azuis
	

> <

Os três coelhos amarelos querem comer tanto como os outros.

Desenha as tartes que vão partilhar.



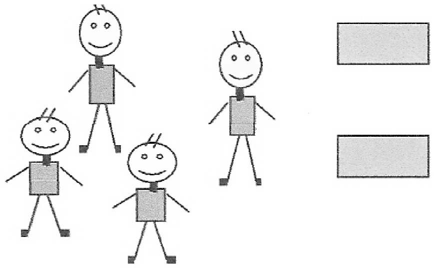
Cada um come ______

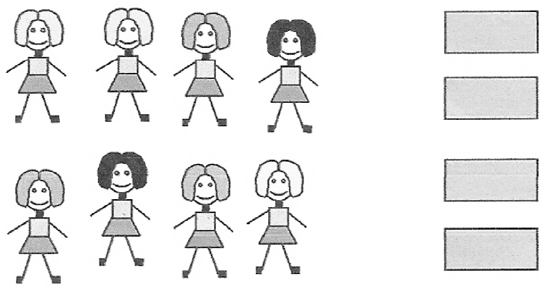
Explica a tua resposta.

TAREFA 2

Meninos	Meninas

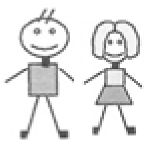
Escreve a fracção que come cada um em cada grupo.





As duas crianças querem comer a mesma quantidade de chocolate que as crianças do grupo A e B.

Desenha os chocolates que eles vão partilhar.



Cada criança come ____

Explica a tua resposta

TAREFA 3

Coloca o sinal adequado entre as fracções. (>, <, =)

$$\frac{1}{3} \;\_\_\_\_\; \frac{2}{6} \;\_\_\_\_\; \frac{3}{9}$$

Explica a tua resposta.

Coloca o sinal adequado entre as fracções. (>, <, =)

Explica a tua resposta.

TAREFA 4

Rodeia a fracção maior.

Coloca o sinal adequado entre as fracções. (>, <, =)

Explica a tua resposta.

Rodeia a fracção maior.

Coloca o sinal adequado entre as fracções. (>, <, =)

Explica a tua resposta.

Anexos 2 - A: Tarefas ainda sobre a interpretação quociente

Sessão 1

TAREFA 1

Quatro crianças vão partilhar entre si dois chocolates, de forma equitativa.

Cada criança pode ficar com um chocolate inteiro? Explica a resposta.

Cada um pode ficar com mais de meio chocolate? Explica a resposta.

Como dividirias os chocolates para que todos comessem a mesma quantidade e não sobrasse nada?

Que fracção do chocolate é que cada um vai receber?

TAREFA 2

Quatro meninas querem partilhar equitativamente um pacote de biscoitos, mas não sabemos quantos biscoitos estão no pacote.

Escreve a fracção que representa a parte do pacote que cada menina vai receber.

Se cada menina receber três biscoitos e não sobrar nenhum, quantos biscoitos tem o pacote? ____

Explica a tua resposta.

Chegaram mais duas amigas e as meninas vão partilhar com elas os biscoitos do pacote.

Cada menina vai receber mais ou menos biscoitos do que antes?

____

Explica a tua resposta.

Anexos 2 - B: Tarefas sobre a representação, significado e comparação na interpretação parte-todo

Sessão 2

TAREFA 1

A Rita cortou o seu chocolate em duas partes iguais e comeu partes.

Quanto comeu a Rita?

O Rui, como é menos guloso, cortou o seu chocolate em três das partes iguais e comeu uma das partes.

Que quantidade de chocolate comeu o Rui?

Como vamos representar essa quantidade que é menos do que 1 chocolate?

A Rita comeu $\square$ do chocolate.

Como vamos representar essa quantidade que é menos do que 1 chocolate?

A Rui comeu $\square$ chocolate.

TAREFA 2

O João só queria comer **um quarto** do chocolate.
Em quantas partes iguais teria de o partir?

Teria de partir o chocolate em ____________________

Quantas partes ia comer? ________________________

Escreve o número que representa a quantidade que ele ia comer.

.

O João ia comer $\boxed{}$ do chocolate.

A Maria partiu o seu chocolate em cinco partes iguais.
Comeu duas partes.

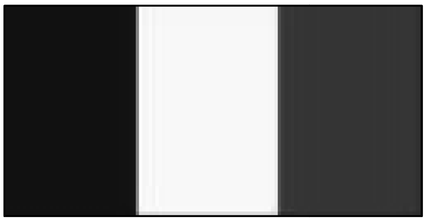
Pinta a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que a Maria comeu.

A Maria comeu $\boxed{}$ ocolate.

TAREFA 3

O pai da Ana está em França a trabalhar. Ela encontrou a bandeira na Net e escreveu ao pai mas deixou algumas lacunas pois ainda não aprendeu os números todos. Ajuda a completar o texto da Ana.



Querido pai.
Já descobri a bandeira da França e sei muitas coisas sobre ela.
Tem a forma de um rectângulo que está partido em **3** partes iguais. Cada parte tem uma cor diferente. Mas todas as cores ocupam o mesmo espaço: ___ da bandeira é azul, ___ da bandeira é branca e ___ da bandeira é vermelha.

TAREFA 4

Na escola da Luísa os alunos vão construir bandeiras para o dia da Europa.
Todas as bandeiras têm a mesma forma e o mesmo tamanho.
Pinta as bandeiras dos alunos segundo as indicações dadas abaixo.

Luísa: $\frac{1}{2}$ da bandeira é vermelha.

Gabriel: $\frac{1}{3}$ da bandeira é vermelha.

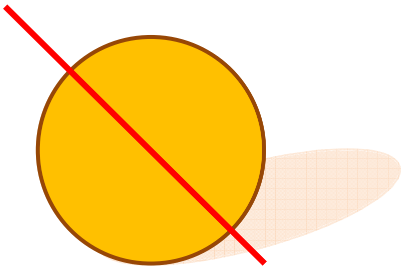
Ricardo: $\frac{1}{4}$ da bandeira é vermelha.

Sara: $\frac{1}{5}$ da bandeira é vermelha.

Sessão 3

TAREFA 1

A Catarina cortou uma em duas partes iguais e comeu uma das partes.



Que quantidade de piza comeu a Catarina?

____

Que número representa essa quantidade? $\boxed{}$

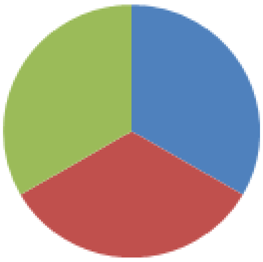
Escreve o significado de cada algarismo da fracção

Escreve o significado de cada algarismo da fracção: $\frac{1}{4}$ --

----

TAREFA 2

A Rita resolveu fazer experiências com papel para aprender a partir pizas em partes iguais e pintou cada parte de uma cor diferente.



guais está partida esta piza? ______________________________-

____

Escreve o número que representa cada parte:

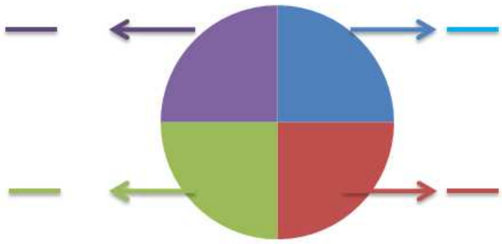
Parte da piza a verde ___

Parte da piza a azul ___

Parte da piza a vermelho ___

TAREFA 3

Esta é a segunda experiência da Rita. Escreve a fracção que representa cada parte das diferentes cores.



Quantos quartos pode ter uma piza?

____

TAREFA 4

A Cátia comeu $\frac{1}{3}$ de piza.

Em quantas partes iguais teve de partir a piza? ______________________________

Explica a tua resposta

Quantas partes comeu? ____

TAREFA 5

O João tinha um chocolate e partiu-o em cinco partes iguais para dar duas dessas partes ao irmão.

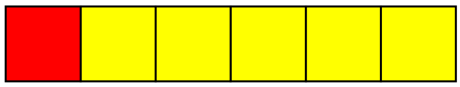
Escreve o número que representa a quantidade de chocolate que ele deu ao irmão.

Deu ao irmão do seu chocolate.

Explica porque escreveste essa fracção.

TAREFA 6

O Carlos pintou uma tira de papel quadriculado como a da figura.



Que fracção da tira está pintada a vermelho?

Explica porque escreveste essa fracção.

TAREFA 7

Vamos pintar fracções de rectângulos iguais.

Pinta $\frac{1}{2}$ do rectângulo.

Pinta $\frac{1}{2}$ do rectângulo.

Pinta $\frac{1}{2}$ do rectângulo.

Pinta $\frac{1}{2}$ do rectângulo.

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{4}$$

Rodeia a fracção que representa a parte maior do rectângulo.

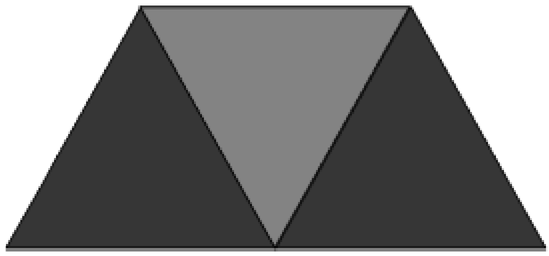
Explica a tua escolha.

Anexos 2 - C: Tarefas sobre a aplicação de fracções na interpretação parte todo

Sessão 3

TAREFA 1

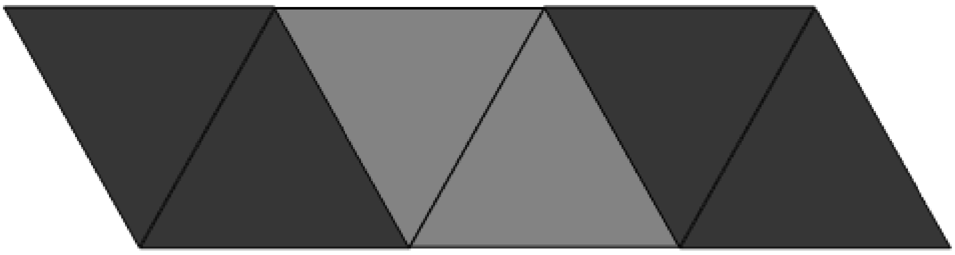
Pavimentação da Ana.



A Ana pavimentou de **verde ___** da figura

A Ana pavimentou de **vermelho** ___ da figura.

Pavimentação do João.

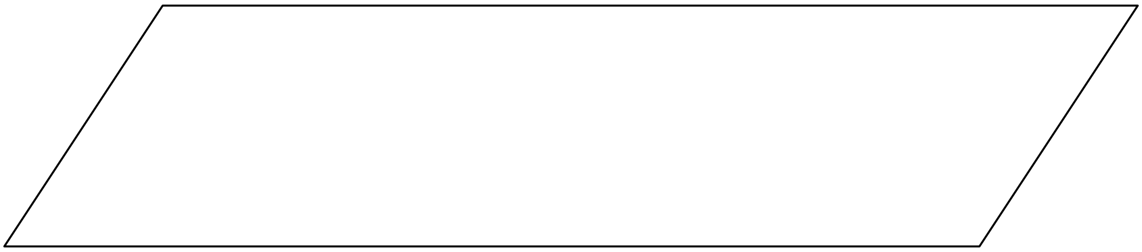


O João pavimentou de **verde ___** da figura

O João pavimentou de **vermelho ___** da figura.

TAREFA 2

Pavimenta a figura usando triângulos de duas cores. Pinta a tua pavimentação.



Que fracção da figura está pavimentada de verde?

Que fracção da figura está pavimentada de vermelho?

Anexos 2 - D: Tarefas sobre a exploração da construção do todo

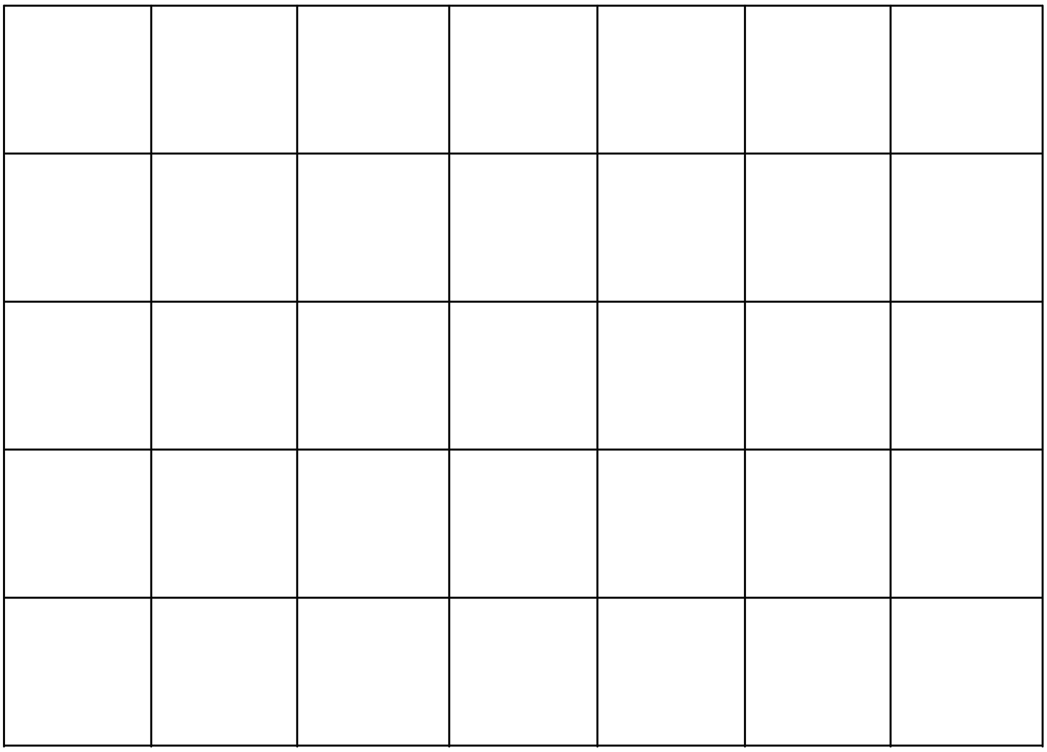
<u>Sessão 4</u>

TAREFA 1- construção do todo

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-o no quadriculado.

$\frac{1}{2}$ da figura é vermelha.

.



TAREFA 2 - construção do todo

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-o no quadriculado.

$\frac{1}{3}$ da figura é vermelha.

TAREFA 3 - construção do todo

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-o no quadriculado.

$\frac{1}{4}$ da figura é vermelha.

TAREFA 4 - construção do todo

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-o no quadriculado.

$\frac{1}{5}$ da figura é vermelha.

TAREFA 5 - construção do todo

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-o no quadriculado.

$\frac{2}{4}$ da figura é vermelha.

TAREFA 6 - construção do todo

Usando sempre quadrados de duas cores constrói figuras seguindo as indicações e pinta-o no quadriculado.

$\frac{2}{3}$ da figura é vermelha.