

# SEGURANÇA DE MACIÇOS TERROSOS COM CARGAS QUAISQUER. ALGUNS NOVOS DESENVOLVIMENTOS PARA A SUA AVALIAÇÃO

## SAFETY OF GROUND MASSES UNDER LOADING CONDITIONS. SOME NEW DEVELOPMENTS FOR ITS EVALUATION.

Araújo, Nuno; Departamento de Engenharia Civil e C-TAC, Universidade do Minho, 4800-058 Guimarães, Portugal, [nuno@civil.uminho.pt](mailto:nuno@civil.uminho.pt)

Machado, Gaspar J.; Departamento de Matemática e Aplicações e CMAT, Universidade do Minho, 4800-058 Guimarães, Portugal, [gjm@math.uminho.pt](mailto:gjm@math.uminho.pt)

Martins, Júlio B.; Departamento de Engenharia Civil e CMAT, Universidade do Minho, 4800-058 Guimarães, Portugal, [jbm@civil.uminho.pt](mailto:jbm@civil.uminho.pt)

### RESUMO

O presente trabalho descreve e discute os métodos de cálculo à rotura de maciços terrosos por métodos rígido-plásticos, métodos elasto-plásticos e métodos elásticos, apresentando-se novos programas de computador para o cálculo do coeficiente de segurança. Apresentam-se exemplos e fazem-se comparações entre resultados obtidos através de vários métodos.

### ABSTRACT

This work describes and discusses the calculation methods for evaluation of the safety factor in relation to rupture of ground masses: rigid-plastic methods; elastic-plastic methods; and elastic methods. New computer programs are presented for the safety factor. Also, examples are presented and comparisons of results are done between the methods.

### 1 - DEFINIÇÃO E BREVE RESENHA HISTÓRICA

A segurança em relação ao equilíbrio limite ou rotura avalia-se por meio de dois coeficientes, um  $\gamma_a$  de majoração das ações e um outro de minoração das características de resistência dos materiais, que no presente estudo afeta o solo, respetivamente  $\gamma_\phi$  para a tangente do ângulo de atrito do solo e  $\gamma_c$  para a coesão. Para sobrecargas, segundo o Eurocódigo 7,  $\gamma_Q$  vale 1,3 ou 1,5, conforme a combinação em análise.

O estudo do equilíbrio limite de obras de Engenharia Civil começou com Coulomb (1776) que além de Físico e Matemático era também Engenheiro Militar, razão pela qual também se interessou pela estabilidade de fortificações sujeitas a impulso de terras. Coulomb usou conceitos da Estática para calcular o impulso de terras em muros de suporte e apercebeu-se de que o impulso era muito menor quando o muro se afastava do solo (impulso ativo), do que quando o mesmo era empurrado contra o solo (impulso passivo). Mas não se apercebeu dos outros possíveis mecanismos de rotura do sistema terras-muro, correspondentes à rotação do muro em torno da aresta inferior ou superior, ou da combinação deste movimento com o de translação. De facto, as teorias do colapso de maciços terrosos como corpos rígido-plásticos estavam ainda por estabelecer. Embora os conhecimentos de Estática estivessem avançados, não parece que a Cinemática o estivesse tanto e, por isso, ninguém tinha dado conta da dualidade entre Estática de Estruturas e Cinemática de Mecanismos.

Por outro lado, Coulomb, ao contrário de Rankine (também Matemático e Físico), tratou do equilíbrio de maciços terrosos e seus suportes de forma "finita", isto é, em termos de equilíbrio de forças e momentos, e não em termos "infinitesimais" de equilíbrio de tensões. Rankine (1857) usou o equilíbrio do paralelepípedo infinitesimal para definir o tensor das tensões e o equilíbrio do tetraedro elementar para definir o vetor tensão numa dada faceta. Determinou desse modo os sistemas de planos conjugados de escorregamento no maciço terroso ou de linhas de rotura, em termos bidimensionais. Determinou assim uma distribuição de pressões das terras na face de contacto destas com os seus suportes. A face de contacto foi assumida plana, vertical e lisa, talvez por comodidade de cálculo. Como Coulomb, apercebeu-se de que as pressões eram muito menores quando o muro se afastava do solo (tensões ativas, ou estado ativo de tensão), do que quando o muro era empurrado contra o solo (tensões passivas, ou estado passivo de tensão), e calculou os coeficientes de impulso de terras respetivos:  $K_a = (1 - \sin\phi)/(1 + \sin\phi)$  e  $K_p = (1 + \sin\phi)/(1 - \sin\phi)$ . Rankine criticou a teoria de Coulomb essencialmente pelo facto do problema do Equilíbrio Limite dos maciços terrosos e seus suportes terem sido tratados em termos de forças e não em termos de tensões. Esta controvérsia, aparentemente inútil do ponto de vista prático, ainda hoje continua entre os defensores do cálculo elastoplástico, posto em termos de tensões e extensões, e os que defendem um tratamento rígido-plástico para o cálculo à rotura, posto em termos de forças e deslocamentos generalizados.

## 2 - MÉTODOS CORRENTES PARA AVALIAÇÃO DE FS

O coeficiente de segurança (FS) para o “estado último de equilíbrio limite” (ULSE) é realizado geralmente de acordo com a lei de Coulomb, e os métodos de cálculo mais usuais são os das fatias, os quais são métodos “rígido-plástico”. Zhu *et al.* (2003) publicaram uma teoria que incorpora a maior parte desses métodos. Martins (2006), com base nessa teoria, realizou um programa para computador que faz o cálculo de FS para alguns dos métodos das fatias. Como casos particulares consideram-se os de Fellenius (1936) e Bishop (1955) para superfícies circulares de deslizamento, e os de Morgenstern e Price (1965) e Correia (1988) para superfícies não circulares de deslizamento. Partindo de um  $FS_0$  arbitrário aproximado mas bem escolhido, são estabelecidas as equações de equilíbrio para cada fatia, assim como as equações que representam as condições de cedência de Coulomb nas potenciais superfícies de deslizamento na base da fatia e entre esta e as suas vizinhas. Visto que no conjunto existem mais incógnitas do que equações, para cada fatia, numa posição genérica  $x$ , é necessário estabelecer uma relação do tipo  $T(x) = G_1(x) \cdot E(x) + G_2(x)$  entre as forças vertical e horizontal entre essa fatia e a seguinte. Morgenstern e Price (1965) estabeleceram  $T(x) / E(x) = \lambda \cdot f(x)$ , em que  $f(x)$  representa uma função escolhida a priori, apenas sujeita à condição de  $f(0) = 0,0$  e  $f(n) = 0,0$ , com  $n$  o número de fatias. Várias experiências numéricas, quer nacionais, quer internacionais, demonstram que tanto uma relação bilinear para  $f(x)$  como uma função seno, dão os mesmos valores para FS. O “fator de escala”  $\lambda$  consiste numa constante a determinar, isto é, a adicionar às incógnitas. Independentemente, Correia (1988), Martins (1979) e Martins e Marques (1984) estabeleceram que  $\Delta T(x) = \lambda \cdot f(x)$ , em que  $\Delta T(x)$  representa a diferença nos esforços transversos nas duas faces de cada fatia. Além destas hipóteses, tem de ser assumida uma distribuição inicial de tensões normais na superfície de deslizamento escolhida *a priori*. Feito isto, obtém-se um sistema de  $n$  equações não lineares a  $n$  incógnitas, incluindo FS e  $\lambda$ . Como é bem de ver esse sistema de equações não lineares tem de ser resolvido iterativamente. O cálculo termina quando o valor absoluto da diferença entre o FS obtido num ciclo de iterações e o FS obtido no ciclo de iterações anterior é menor que 0,01. Os métodos das fatias de Morgenstern e Price (1965), Correia (1988) e todos os similares têm um certo número de “falhas”, nomeadamente: a superfície de deslizamento não sendo um círculo ou um plano (para um material com peso) não é cinematicamente admissível; a constante  $\lambda$  e a função  $f(x)$  não têm qualquer significado físico; o processo não é sempre convergente (para obter convergência e é, por vezes, necessário mudar  $FS_0$  para valores irrealistas, excepcionalmente baixos ou altos). Mesmo assim, algumas vezes, é preciso mudar a superfície de deslizamento, para se obter convergência na solução. Ainda assim, há muitos milhares de obras geotécnicas estáveis em cujos projetos o FS foi calculado pelos métodos das fatias de Morgenstern e Price (1965), Correia (1988) ou similares. Todavia, a maior parte dos programas comerciais para computador baseados nos métodos das fatias são aplicáveis somente na estabilidade de taludes, incluindo barragens de terra e muros de suporte de terras. Frequentemente, ficam de fora, as cortinas de estacas-pranchas, os túneis, as cavernas, os poços, as fundações diretas, etc.

## 3 - NOVOS MÉTODOS RÍGIDO-PLÁSTICOS PARA AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE SEGURANÇA

Para obviar algumas das “falhas” acima referidas, para os métodos das fatias, Martins *et al.* (2010) e Machado *et al.* (2011) conceberam os Métodos dos Blocos Rígidos (RBM) que, a duas dimensões, podem assumir duas formas principais: misturas de blocos triangulares e quadrangulares, e Blocos-Fatias (blocos quadrangulares de faces laterais verticais). O princípio fundamental, nestes novos métodos rígido-plásticos, é o de o sistema estrutural concebido *a priori* ser isostático. Sendo uma estrutura isostática, logo que por redução dos FS nas superfícies de contacto dos blocos com a superfície exterior e nas juntas entre fatias o sistema estrutural se torne hipostático, forma-se um mecanismo de colapso. Nesse mecanismo é, necessariamente, cinematicamente admissível qualquer configuração de blocos escolhida. Naturalmente que ainda restam fatores de incerteza quanto ao menor FS, pois este dependerá da configuração de blocos concebida. Esta será escolhida a “sentimento” pois não é difícil escolher *a priori* uma configuração próxima da que origina um FS mínimo, aspeto que existe em todos os métodos das fatias.

Existe semelhança, ou pelo menos, correspondência, entre os métodos rígido-plásticos acima referidos e os clássicos métodos de cálculo à rotura de estruturas. Repare-se na analogia que sempre se poderá estabelecer entre o sistema de Blocos-Fatias (Martins *et al.* 2010; Martins *et al.* 2011) e um sistema estrutural estaticamente determinado tal como o da Figura 1, onde  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  representam o peso próprio dos blocos aos quais se podem juntar forças externas quaisquer. O mesmo se pode dizer quanto a estruturas reticuladas porticadas e de lajes. Os métodos das linhas de rotura para avaliação da segurança em lajes são muito antigos (veja-se, por exemplo, Johansen (1943), Jones (1962), Langendonck (1965) e Langendonck (1971)). No caso de pórticos, para qualquer estrutura porticada já projetada, é conhecida a resistência última de cada barra, sendo usualmente medida pelo momento fletor plástico  $M_p(i)$  da barra  $i$ . Então, o problema consiste em encontrar uma configuração de nós plastificados (rótulas plásticas) que leve ao colapso (equilíbrio limite) da estrutura, de tal maneira que, ao atingir-se o colapso, não existe

secção reta alguma da barra  $i$ , onde o momento fletor seja em valor absoluto maior que  $M_p(i)$ . Usualmente, as rótulas plásticas são colocadas nos pontos de aplicação das cargas concentradas e/ou nos centros de gravidade das cargas distribuídas, de modo a que, no conjunto, se forme um mecanismo de colapso. Note-se que uma hipótese fundamental do método é a de que os eixos das barras se mantêm retilíneos na fase de colapso (quando a estrutura se transforma num mecanismo). Esta hipótese é razoável, visto que a parte elástica das deformações é muito pequena nessa fase.

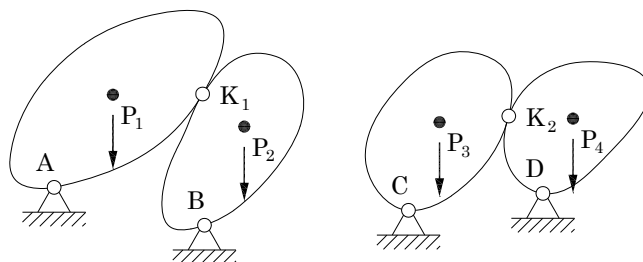


Figura 1 - Sistemas Estruturais Estaticamente Determinados

Em Jones (1962), apresenta-se um exemplo simples com duas configurações de rótulas plásticas, a cada uma das quais corresponde um mecanismo possível de rotura. Note-se que uma situação semelhante acontece com a força externa que é necessário aplicar para suportar, na fase de rotura, a tensão dos solos contra um muro de suporte. Existem duas tensões, distintas, em solos: a tensão ativa  $P_a$  e a tensão passiva  $P_p$ , conforme o solo desloca o muro ( $P_a$ ), ou o muro é deslocado contra o solo, por exemplo num encontro de ponte em arco ( $P_p$ ). Observa-se ainda que no caso das estruturas reticuladas ou laminares, o peso próprio da estrutura é sempre pequeno quando comparado com as sobrecargas que produzem a rotura, enquanto que no caso da rotura de maciços terrosos, as sobrecargas são sempre pequenas quando comparadas com o peso próprio do maciço. Daí resulta que o cálculo no caso dos maciços terrosos seja um fator FS de redução das características de resistência dos solos do maciços terroso (ângulo de atrito e coesão das terras), enquanto que no caso da rotura de estruturas porticadas ou laminares, o que se calcula é um fator  $F_m$  de "majoração" das cargas. Este facto é muito importante na resolução dos dois tipos de problemas. Assim, no caso da rotura de estruturas porticadas ou laminares, as equações resolventes são sempre lineares, enquanto que no caso dos maciços terrosos as equações resolventes são sempre não lineares.

#### 4 - MÉTODOS ELÁSTICOS E ELASTO-PLÁSTICOS PARA AVALIAÇÃO DO COEFICIENTE DE SEGURANÇA

Os métodos elasto-plásticos para obtenção, num maciço terroso, de pontos de plastificação usando elementos finitos, estão há muito divulgados e fazem parte de muitos programas para computador comerciais. Todavia, só mais recentemente (e.g., Smith e Griffiths (2004)) esses métodos têm sido aplicados ao cálculo do coeficiente de segurança. Até ao momento, esses métodos limitavam-se a obter pontos e zonas de plastificação que, devido a problemas numéricos nas iterações que sempre se têm de realizar, muitas vezes não permitiam extrair um valor para FS. Smith e Griffiths (2004) apresentam alguns exemplos de aplicação desses métodos ao cálculo de FS, usando como equação de cedência a de Mohr-Coulomb, e admitindo um ângulo de dilatação nulo (regra de escoamento não associada). Observa-se desde já que, ao contrário dos métodos rígido-plásticos, o cálculo de FS se faz a partir do tensor das extensões e seu correspondente tensor das tensões no interior de cada elemento, sempre em regime elástico.

Contudo, Smith e Griffiths (2004), baseados nos trabalhos de Zienkiewicz e Taylor (1989), usam uma entidade artificial, designada por tensor de extensões visco-plásticas e associada a outra entidade também artificial designada por "etapa" de tempo  $\Delta T$ , que levam a um processo iterativo conducente, numa primeira fase de cálculo, à verificação da condição de cedência de Mohr-Coulomb nos pontos do interior de cada elemento. Satisfeita esta condição, os autores passam a um acréscimo do coeficiente de segurança, iniciando-se novo ciclo de cálculos utilizando  $\Delta T$ , até que o processo se torna numericamente divergente, o que corresponderá ao verdadeiro fator FS (tanto mais que o deslocamento máximo nos nós da rede de elementos finitos cresce abruptamente). As entidades "virtuais" usadas por Smith e Griffiths (2004) destinam-se a obter (em cada etapa) um acréscimo nas forças de massa que conduz a acréscimo nas forças nos nós da rede. Dessa forma, é de supor que as forças totais nalguma etapa de tempo levem a uma situação de instabilidade numérica, correspondente a uma situação de rotura. O critério de divergência numérica é o que já se adotava quando se usava (e usa) programas comerciais. Só que durante os dois níveis de iterações, em muitos casos, sobretudo em maciços terrosos com várias camadas de geometria irregular e características de resistência variadas, não há "monotonia" nos

resultados, isto é, há oscilações muitas vezes dramáticas e não é possível obter um valor “seguro” ou “fiável” para FS. Por outro lado, embora Smith e Griffiths (2004) apresentem o algoritmo do programa computacional utilizado e indiquem as várias sub-rotinas usadas, as fontes destas não são indicadas.

Assim, não é possível seguir com pormenor os exemplos apresentados. Daí que, depois de se tentar, sem sucesso, redigir o novo código computacional, com base na teoria existente em Smith e Griffiths (2004), se tenha decidido mudar de estratégia, utilizando o que podemos designar por “Método Elástico” para o cálculo de FS. Enquanto que Smith e Griffiths (2004), e todos os autores que com elementos finitos utilizam métodos elasto-plásticos, colocam apoios nos maciços terrosos muito longe da massa de terreno potencialmente deslizante (e sempre apoios simples de reação vertical na base do maciços) e apoios simples de reação horizontal nas faces laterais do maciços, o programa que se elaborou coloca apoios duplos ao longo de uma superfície deslizante obtida da seguinte forma: Inicialmente, em desenho à escala, traçam-se meia dúzia de círculos de deslizamento que, a sentimento, se afiguram serem os mais desfavoráveis no caso em questão. Aplicam-se de seguida os métodos de Fellenius (1936) e de Bishop (1955) para obter os respetivos FS. Por fim, considera-se que o círculo que corresponde ao menor desses FS é o círculo mais desfavorável, o qual dá origem à superfície deslizante onde se colocam os apoios. Dentro do círculo concebe-se uma rede de elementos finitos triangulares, com funções de forma lineares.

Os parâmetros de elasticidade  $E$  (módulo de Young) e  $\nu$  (coeficiente de Poisson) são os mais aproximados à realidade dos terrenos, sendo que o valor  $E$  em nada influi nos resultados e  $\nu$  influi muito pouco, razão pela qual se toma sistematicamente igual 0,3 em solos arenosos e areno-argilosos, e igual 0,49 em solos puramente argilosos. Os tipos de cargas aplicadas nos nós da rede são as provenientes do peso próprio do maciço, através do peso volúmico do solo em cada elemento e forças externas, se existirem.

Assemblada a matriz de rigidez da estrutura correspondente à rede de elemento finitos, com as forças nos nós, logo se obtêm os deslocamentos nos mesmos, e destes, o tensor das extensões no interior de cada elemento. Deste obtém-se, por sua vez, as reações e por recurso à lei de Hooke, o tensor das tensões. Os fatores de segurança, em cada apoio, são obtidos das reações e na lei de Coulomb. Com base no tensor das tensões e na lei de Mohr-Coulomb, obtém-se o FS no centro de cada triângulo. Analisando os FS nos apoios e os FS nos centros dos elementos é fácil, com critérios de médias, e apesar da maior ou menor dispersão de valores, obter um valor “seguro” ou “fiável” para FS, para o maciço terroso carregado de qualquer modo. Na obtenção do círculo mais desfavorável, usam-se ainda métodos de algoritmos genéticos e/ou o método de Monte Carlo. O mesmo se realiza quando se pretende obter as características de resistência dos terrenos mais “fiáveis”.

## 5 - ALGUNS RESULTADOS

Num primeiro estudo, foram utilizados resultados apresentados por Zhang (1999). Este autor, usando o método “Rigid Finite Element Methods” (RFEM) e programação matemática, para taludes com ângulos sobre a horizontal entre 45° a 90°, comparou os FS obtidos com o seu método com vários outros. Para tal utilizou o “número de estabilidade”,  $\gamma \cdot H/c$ , com  $\gamma$  o peso volúmico do solo,  $H$  a altura do talude, e  $c$  a coesão do solo associado a ângulos de atrito do solo, variáveis entre 0° e 25°. Construiu então um Quadro, onde são apresentados os valores de  $\gamma \cdot H/c$  para os ângulos de talude e para os ângulos de atrito acima referidos, para vários tipos de análise (Taylor, 1948; Chen, 1975), além da do autor, que refere ter usado uma superfície de deslizamento circular passando pelo pé do talude. Extraiu-se desse Quadro o valor  $\gamma \cdot H/c = 13,68$ , que corresponde ao que Zhang (1999) obteve com o seu método para um talude com ângulos sobre a horizontal de 60° e para um solo com ângulo de atrito 25°, sendo a altura do talude tratado igual a 10 metros e o peso volúmico do solo  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ . Com estes dados obtém-se de imediato a coesão  $c = \gamma \cdot H / 13,68 = 14,62 \text{ kPa}$ , à qual corresponde o fator de segurança FS = 1,00.

Utilizando os programas gerais elaborados pelos autores para os métodos das fatias de Fellenius (1936), Bishop (1955), Morgenstern e Price (1965) e de Correia (1988), obteve-se para esse caso os valores que constam do Quadro 1. Utilizando o programa de Blocos-Fatias (Martins *et al.*, 2010; Machado *et al.*, 2011), obteve-se FS = 1,03. Note-se que, considerando os valores constantes apresentados por Zhang (1999) para os vários tipos de análise corrente aí referidos, os fatores de segurança correspondentes variam entre 1,06 e 1,12, segundo o que Zang (1999) apresenta em termos de  $\gamma \cdot H/c$ . Utilizando o Método do Limite Elástico para o cálculo de FS, obteve-se 1,08.

Quadro 1 - Fatores de Segurança Obtidos com o Programa Geral para os Métodos das Fatias

Fellenius	Bishop	Morgenstern e Price	Correia
1,07	1,06	1,01	1,05

O segundo estudo realizado nesta secção é relativo a um túnel pouco profundo, escavado num granito alterado, com cerca de 134 m de comprimento e secção reta de cerca de 95 m<sup>2</sup>. A profundidade do teto do túnel varia entre cerca de 5 m e 13 m, tendo-se utilizado na escavação “The New Austrian Tunnelling Method” (NATM) (ver Figura 2).

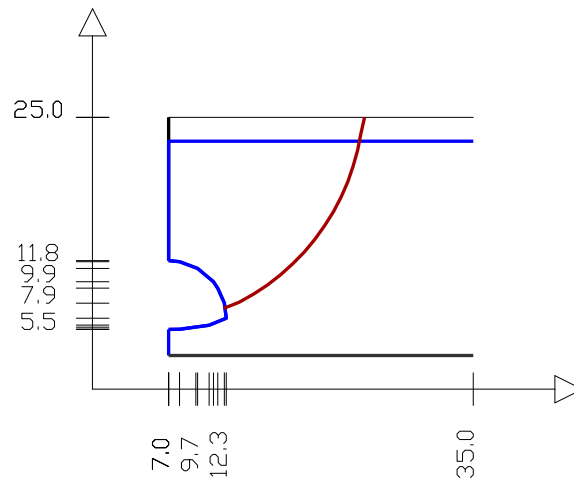


Figura 2 - Vista frontal da metade direita do corte vertical do túnel pouco profundo através de um plano segundo o seu eixo longitudinal

As características mecânicas e os parâmetros adotados para definir o estado de tensão inicial foram extraídas de Martins *et al.* (2004) e estão representadas no Quadro 2. No cálculo elastoplástico, em programa comercial, para obtenção do fator de segurança, admitiu-se um coeficiente de impulso  $K_0 = 0,4$  para todos os materiais. Admitiu-se também, para todas as camadas, um comportamento linearmente elástico até atingida a condição de cedência de Mohr-Coulomb, definida pelo módulo de elasticidade  $E$ , independente dos níveis de tensão e de deformação.

Quadro 2- Características dos Terrenos do Túnel

Solos	$E$ (MPa)	$\nu$	$c$ (kPa)	$\phi$ ( $^\circ$ )	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )
Aterro	20,0	0,35	0,0	30,0	19,0
Granito W5	1000,0	0,35	10,0	38,0	19,0
Granito W3	6000,0	0,20	300,0	25,0	25,0

Utilizando os programas gerais elaborados pelos autores para os métodos das fatias de Fellenius (1927), Bishop (1955), Morgenstern e Price (1965) e Correia (1988), obtiveram-se para este caso os valores que constam do Quadro 3.

Quadro 3- Fatores de Segurança Obtidos com o Programa Geral para os Métodos das Fatias

Fellenius	Bishop	Morgenstern e Price	Correia
1,20	1,36	1,33	1,33

Utilizando o programa de Blocos-Fatias (Martins *et al.*, 2010; Machado *et al.*, 2011), obteve-se  $FS = 1,36$ , e utilizando o Método do Limite Elástico obteve-se  $FS = 1,34$ . Para os métodos de Morgenstern e Price (1965), Correia (1988), Blocos-Fatias (Martins *et al.*, 2010; Machado *et al.*, 2011) e Método do Limite Elástico, tomou-se como superfície de deslizamento um plano passando nos pontos superior e inferior do círculo de deslizamento da Figura 2 (note-se que nesta figura não se representa um corte transversal, pelo que o fator de segurança calculado diz respeito à estabilidade lateral e não à estabilidade frontal - este seria um problema tridimensional que está ainda em estudo). Demonstra-se assim que as superfícies de deslizamento planas bem como as superfícies de deslizamento circulares são as únicas (para materiais com peso) cinematicamente admissíveis, e que as superfícies de deslizamento poligonais com mais de um lado, não são cinematicamente admissíveis. Sokolovskii (1965) demonstrou que superfícies de deslizamento em espiral logarítmica são cinematicamente admissíveis, mas isso é só válido para materiais sem peso, embora com atrito, como seria, aproximadamente, o caso das escórias de alto-forno.

## 6 - Discussão

1. Teoricamente, as formulações rígido plásticas, que são as mais antigas, e nas quais são satisfeitas as equações de equilíbrio (estática) e as condições de cedência (plastificação), poderiam definir o FS mínimo e ao mesmo tempo a correspondente superfície de deslizamento, usando-se para tal programação não-linear. Porém, na prática, os maciços terrosos são sempre corpos heterogêneos com singularidades geométricas várias, o que, muitas vezes não leva a qualquer solução.

2. As formulações rígido-plásticas tradicionais, em que a estrutura (maciço terroso) se torna hipostática, como um todo, são ainda hoje as mais usadas. Apesar de em algumas dessas formulações a superfície de deslizamento não ser circular nem plana (logo não cinematicamente admissível), conduz na prática a fatores de segurança válidos, mas devem sempre ser corroborados por vários dos outros métodos tradicionalmente usados (Fellenius, Bishop, etc.). Inúmeras obras já projetadas e executadas, para as quais foram aplicados esses métodos, estão estáveis, o que dá uma garantia quanto à “fiabilidade” do FS obtido.
3. Nos métodos de Morgenstern e Price (1965) e de Correia (1988), pelo facto de neles se incluírem parâmetros sem qualquer significado físico, leva ao aparecimento de dificuldades numéricas que só poderão ser ultrapassadas, por vezes, pela mudança do valor inicial  $FS_0$ , assim como da superfície de deslizamento.
4. No método dos Blocos-Fatias (Martins *et al.*, 2010; Machado *et al.*, 2011) não existem dificuldades numéricas. Porém, em cada caso particular, devem ser testadas duas ou mais configurações isostáticas de Blocos-Fatias para se extrair delas o menor dos FS médios.
5. As formulações elasto-plásticas têm a vantagem de não terem limitações quanto à hiperstaticidade da configuração de elementos a considerar. Na quase totalidade das publicações com este tipo de formulação, usa-se o método dos elementos finitos (FEM), e um grande número de elementos (frequentemente quadrangulares com vários pontos de Gauss no seu interior e com funções de interpolação quadráticas ou de maior grau). Tudo com a intenção de obter um valor para FS “rigoroso”, o que é impossível, pois o próprio FEM não é rigoroso. Só quando se utilizam elementos triangulares e funções de interpolação lineares, é que as extensões são iguais de um e do outro lado das interfaces entre os elementos. Porém, as componentes normais do vetor tensão de um e outro lado das interfaces entre elementos são sempre descontínuas.
6. A utilização do método FEM, na grande maioria das publicações, toma para cada caso (em geral talude, aterro ou barragem de terra) um elevado número de elementos e coloca os apoios do maciço terroso muito longe da potencial superfície de deslizamento. Esta situação origina, por um lado, a um elevadíssimo volume de cálculos (horas de cálculo) e, por outro, a dificuldades de convergência numérica na obtenção do FS, uma vez que se usam dois níveis de iterações. Não se deve calcular as reações de apoio, pois tal pode conduzir a valores absurdos. O que se deve calcular são os deslocamentos em cada nó da rede de elementos, e considerar que ocorre o colapso do maciço terroso quando os deslocamentos tomam valores exagerados em certos pontos (crista da barragem, etc.). Porém, os valores dos deslocamentos são diretamente proporcionais ao módulo de elasticidade  $E$  do material do maciço terroso, sendo contudo simples demonstrar que o fator de segurança não depende deste parâmetro.
7. No Método do Limite Elástico, a rede de elementos (sempre triangulares e com funções de interpolação lineares) está contida na “massa terrosa crítica deslizante” obtida, *a priori*, pelo círculo de deslizamento que origina o mínimo FS, seja pelo método clássico de Fellenius (1936), seja pelo método de Bishop (1955). Os apoios, sempre duplos (não existe necessidade nem conveniência no uso de apoios simples), situam-se nos nós da rede que estão ligados ao exterior. Portanto, o volume de cálculos é muito reduzido (alguns segundos), e podem-se obter os FS nos apoios e também nos centros dos elementos. Os FS nos apoios satisfazem a condição de cedência de Coulomb, uma vez que se calculam forças nos apoios, e os FS nos centros dos elementos satisfazem a condição de cedência de Mohr-Coulomb, uma vez que se calculam tensões nesses centros. Nos casos tratados, os valores médios de FS não se afastam muito nessas duas localizações.
8. O uso de programas comerciais para computador, seja para os métodos rígido-plásticos, seja para os métodos elasto-plásticos, deve ser feito com cuidados redobrados, visto que o utilizador nunca saberá em pormenor como são feitos os cálculos. Uma falha na entrada de dados, por exemplo, pode levar a um FS errado. A solução será utilizar, em cada caso particular, mais que um programa comercial, se possível, com bases diferentes.

## 7 - Conclusões

Ao longo do presente estudo foi apresentada uma breve introdução histórica do cálculo à rutura, sublinhando as diferenças entre soluções rígido-plásticas e soluções elástico-plásticas, e analisada a abordagem do problema até à atualidade. É também apresentado um programa geral de cálculo do

coeficiente de segurança FS para maciços terrosos submetidos a cargas quaisquer e em condições quaisquer. Os resultados da aplicação a alguns casos concretos revelam que as diferenças entre o FS obtido com o programa apresentado e o FS obtido por outros métodos, incluindo os de programação matemática, são desprezáveis do ponto de vista prático.

Como linhas de desenvolvimento futuro, é ainda necessário utilizar este programa geral em mais casos concretos (escavações, fundações diretas e indiretas, túneis, etc.) e para variadas situações (terrenos heterogêneos, percolação de água, sismos, etc.) e comparar resultados com o FS obtido por outros métodos rígido-plásticos, incluindo os de programação matemática, e elástico-plásticos (MEF, DF e MIF).

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado através do programa FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade — COMPETE e por fundos portugueses através da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto PEst-C/MAT/UI0013/2011.

## REFERÊNCIAS

- Bishop, A. W. (1955). The Use of the Circle Slip Surface in the Stability Analysis of Earth Slopes. *Géotechnique*, Vol. 5, No. 1, pp. 7-17.
- Chen, W. (1975) Limit analysis and Soil Plasticity, *J. Ross Publ.*, EUA, pp. 638.
- Correia, R. M. (1988). A Limit Equilibrium Method of Slope Stability Analysis. *Proceedings 5<sup>th</sup> Int. Symp. Landslides*. Lausanne, pp. 595-598.
- Coulomb, C. A. (1776). Essais sur une application des règles des maximisé et minimisé a quelques problèmes de statique relatives à l'architecture. *Mémoires Académie Royal Pres*. Division Sav.7, Paris.
- Fellenius, W. (1936). Calculation of the stability of earth dams, *Proceedings 2<sup>nd</sup> Cong. Large Dams*, Washington, Vol. 4, pp. 445-462.
- Johansen, K. W. (1943). Yield-line theory. *Cement and Concrete Association*, Londres, pp. 205.
- Jones, L. L. (1962). Ultimate Load Analysis of Reinforced and Prestressed concrete Structures, *Chatto and Windus*, Londres, pp. 211.
- Langendonck, T. (1965) Charneiras Plásticas em Lajes de Edifícios", *ABCP*, S. Paulo.
- Langendonck, T. (1971) Charneiras Plásticas em Lajes Retangulares de Pontes", *ABCP*, S. Paulo, 1. edição 1965, 2. edição, 1971.
- Machado, G. J., Costa, D. F., Silva, J. M., Ribeiro, H. J. C. e Martins J. B. (2011). Computational Methods for Calculation of the Safety Factors of Geotechnical Structures, *Proceedings 2<sup>nd</sup> International Symposium on Computational Geomechanics*, Cavtat-Dubrovnik, Croácia, abril.
- Martins, F. F. e Martins, J. B. (2004), Métodos Rígido-Plásticos e Métodos Elástico-Perfeitamente Plásticos. Influência das Constantes Elásticas no Coeficiente de Segurança da Estabilidade de Taludes. *Proceedings 9 Congresso Nacional de Geotecnia e II Congresso Luso Brasileiro de Geotecnia*, Universidade de Aveiro, 18 a 23 abril.
- Martins, J. B. (1979). Revisão dos Métodos de Resolução do Problema do Equilíbrio Limite dos Maciços Terrosos e Rochosos Diaclasados. *I.U.T.A.M. National Congress*, Lisboa, LNEC, outubro.
- Martins, J. B. e Marques, P. S. (1984). Calcul par Programmation Linéaire des Murs de Soutènement Renforcés. Colloque «Renforcement en place des sols et des roches». ENPC, DFCAI (Direction de la Formation Continue et de l'Action International), Paris, outubro, pp. 9-11.
- Martins J. B., Machado, G. M. e Ribeiro H. J. C. (2010). A Limit Equilibrium of 2D and 3D non homogeneous loaded Ground Masses. *GeoFlorida, Advances in Analysis, Modeling and Design*, West Palm Beach, Florida, 20 a 24 fevereiro.
- Morgenstern, N. R. e Price, V. E. (1965). The analysis of the stability of general slip surfaces. *Géotechnique*, Vol. 15, No. 1, pp. 79-93.
- Rankine, W. J. M. (1857). Earth Pressure Theory, *Phil. Trans. of the Royal Soc*. Londres.
- Smith, I. M. e Griffiths, D. V. (2004). Programming the finite element method, John Wiley and Sons Ltd., pp. 646
- Sokolovskii, V. V. (1965). Statics of Granular Media. *Pergamon Press*, Oxford, pp. 270.
- Taylor, D. W. (1948). Fundamentals of Soil Mechanics. *John Wiley & Sons*, Nova Iorque, pp. 370.
- Zhang, X. (1999). Slope Stability Analysis Based on Rigid Finite Element Method, *Géotechnique*, Vol. 49, No 5, pp. 585-593.
- Zhu, D. Y., Lee C. F. e Jiang H. D. (2003). Generalized Framework of Limit Equilibrium Methods for Soil Stability Analysis, *Géotechnique*, Vol. 53, No 4, pp. 377-395.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (1989). The finite element method. MacGraw-Hill, Vols. I e II, 4. edição, Nova Iorque, pp. 787.