



Maria Irene Marques Gonçalves **Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através do trabalho de projeto**

UMinho | 2011



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Irene Marques Gonçalves

**Aprendizagem dos modelos de grafos,
por alunos de MACS do 11.º ano,
através do trabalho de projeto**

Outubro de 2011



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria Irene Marques Gonçalves

**Aprendizagem dos modelos de grafos,
por alunos de MACS do 11.º ano,
através do trabalho de projeto**

Mestrado em Ciências da Educação
Área de especialização em Supervisão Pedagógica
na Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

Outubro de 2011

DECLARAÇÃO

NOME: Maria Irene Marques Gonçalves

ENDEREÇO ELECTRÓNICO: irenegoncalvesm@gmail.com

NÚMERO DO BILHETE DE IDENTIDADE: 8406986

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através do trabalho de projeto

ORIENTADOR: Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu

DESIGNAÇÃO DO MESTRADO: Mestrado em Ciências da Educação, Área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA DISSERTAÇÃO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

UNIVERSIDADE DO MINHO, 20 DE Outubro DE 2011.

Assinatura: _____

AGRADECIMENTOS

Ao Doutor Floriano Viseu, meu orientador, pelo seu constante apoio, sugestões, críticas, incentivo e disponibilidade.

Aos professores que me acompanharam durante a realização deste mestrado e que me ajudaram a crescer academicamente.

Aos meus colegas de mestrado com quem partilhei muitas experiências e momentos de trabalho.

A todos os meus alunos que sempre colaboraram e me ajudaram a levar a cabo este projeto.

Aos Diretores e colegas das Escolas onde trabalhei nos anos em que estive a realizar este mestrado.

À Daniela, à Ângela, à Carla e à Mónica pela sua disponibilidade e amizade.

À minha família pelo apoio e ânimo que sempre me deram, em especial, aos meus pais e aos meus filhos.

APRENDIZAGEM DOS MODELOS DE GRAFOS, POR ALUNOS DE MACS DO 11.º ANO, ATRAVÉS DO TRABALHO DE PROJETO

RESUMO

Este estudo visa analisar o contributo do trabalho de projeto na aprendizagem dos modelos de grafos de alunos de uma turma do 11.º ano de MACS. Trata-se de um estudo interpretativo com um design de estudo de caso com grupos de alunos de desempenhos escolares diferentes – médio, bom e fraco – e que procura responder às seguintes questões: (1) Que atividades realizam os alunos na aprendizagem de modelos de grafos através de um trabalho de projeto? Que dificuldades manifestam os alunos na realização dessas atividades? (2) Em que contribuiu o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos? (3) Que perspectivas têm os alunos sobre o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos? Os estudos de caso reportam-se a três fases distintas que decorreram *Antes, Durante e Após a experiência de ensino* que teve por base a resolução de um problema que traduzia, a partir de um mapa, o percurso de um camião na recolha do lixo de diferentes freguesias. Os dados foram recolhidos através de um questionário, registos escritos dos alunos, transcrições das aulas áudio gravadas, notas de campo e uma entrevista.

A revisão de literatura deste estudo estrutura-se em três partes: (1) as teorias de aprendizagem que evidenciam a atividade do professor e/ou aluno na construção do conhecimento matemático; (2) o trabalho de projeto no campo da educação, evidenciando-se vantagens e desvantagens da sua realização na sala de aula, os resultados de algumas investigações sobre esta temática e as particularidades deste método de trabalho, nomeadamente os elementos didáticos que lhe estão associados; (3) referência à evolução do currículo de Matemática, ao aparecimento dos modelos de grafos no currículo português e algumas vantagens que decorrem dessa introdução, apresentando-se exemplos de estudos que abordaram esta temática.

Os três grupos de alunos evidenciaram dificuldades na elaboração do problema promotor do trabalho de projeto, mas mostraram compreender os conteúdos de grafos trabalhados, nomeadamente a construção de um grafo a partir do mapa, a determinação de circuitos e caminhos, a aplicação dos algoritmos da cidade mais próxima, do peso das arestas, e de Kruskal. Durante a realização deste trabalho, os alunos evidenciaram ser autónomos na realização das tarefas, capacidade de pesquisa, de argumentação e de comunicação matemática. No trabalho de grupo que desenvolveram, tornaram-se tolerantes e aprenderam a respeitar os diferentes ritmos de aprendizagem dos seus colegas.

Palavras-Chave: Matemática, trabalho de projeto; grafos; estratégias de aprendizagem.

LEARNING GRAPH MODELS, FOR SOME STUDENTS FROM THE MACS 11TH GRADE, THROUGH THE PROJECT WORK

ABSTRACT

This study aims to analyze the contribution of the project work in learning graph models of students in the 11th grade of MACS. It is an interpretative study with a study case design with groups of students from different school performances – average, good and weak – which wants to answer questions like: (1) Which activities did students carry out in learning graph models through project work? Which difficulties do they point out? (2) How did the project work help in learning graph models? (3) Which perspectives do students have about project work in learning graph models? The study cases relate to three distinct phases that took place - before, during and after the teaching experience – That had its basics on the resolution of a problem, which showed, through a map, the route of a waste truck from different parishes. The data were collected through a questionnaire, students' written records, transcripts of recorded audio lessons, field notes and an interview.

The literature of this study is structured in three parts: (1) the learning theories that highlight the work of the teacher and / or student in the construction of mathematical knowledge, (2) the project work in the field of education, pointing out the advantages and disadvantages of its achievement in the classroom, the results of some investigations on this subject and the particularities of this method of work, namely the educational elements associated with, (3) reference to the evolution of the national curriculum, the emergence of graph models in the Portuguese curriculum and the advantages of its introduction, presenting examples of studies that have addressed this subject matter.

The three groups of students showed difficulties in the elaboration of the initial problem of the project work, but have shown they learned the content of graphs worked out, namely the graph construction from the streets map where the rubbish was collected, the determination of a circuit and a path, the application of algorithms from the nearest town and the weight of the edges, and even Kruskal.

During this work, the students showed to be independent in performing the tasks, their ability to research, to communicate and their mathematical reasoning. In the group work they have developed, they have become tolerant and learned to respect the different learning paces of their colleagues.

Key-words: Maths; work project; graph; learning strategies.

INDÍCE

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação para o estudo	1
1.2. Objectivo e questões de investigação	4
1.3. Organização do estudo	4
CAPÍTULO 2. REVISÃO DA LITERATURA.....	7
2.1. Teorias de aprendizagem	7
2.2. Trabalho de Projeto	13
2.2.1. Trabalho de Projeto na sala de aula.....	13
2.2.2. Realização de trabalhos de projeto na aula de Matemática.....	20
2.2.3. Elementos didáticos associados ao trabalho de projeto	29
2.3. Modelos de grafos	37
2.3.1. Breve análise da evolução do currículo de matemática em Portugal	38
2.3.2. Os modelos de grafos no currículo Português	41
CAPÍTULO 3. EXPERIÊNCIA DE ENSINO	49
3.1. Trabalho de projeto	50
3.2. Problemas complementares.....	54
3.3. Ambiente de Aprendizagem.....	55
3.3.1. Formação dos grupos de trabalho	56
3.3.2. Atividades a desenvolver na sala de aula	57
CAPÍTULO 4. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO	61
4.1. Opções metodológicas.....	61
4.2. Participantes	63
4.3. Métodos de recolha de dados.....	65
4.3.1. Questionário	66
4.3.2. A observação	67

4.3.3. Entrevista.....	68
4.3.4. Análise Documental	69
4.4. Análise de dados.....	71
CAPÍTULO 5. ESTUDO DE CASO DO GRUPO BRITO	73
5.1. Realização do trabalho de projeto	74
5.2. Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem de grafos.....	95
CAPÍTULO 6. ESTUDO DE CASO DO GRUPO SANDE S. MARTINHO	105
6.1. Realização do trabalho de projeto	106
6.2. Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem de grafos.....	126
CAPÍTULO 7. ESTUDO DE CASO DO GRUPO AIRÃO SANTA MARIA.....	133
7.1. Realização do trabalho de projeto	134
7.2. Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem de grafos.....	157
CAPÍTULO 8. CONCLUSÕES.....	163
8.1. Síntese do estudo.....	163
8.2. Conclusões do estudo	164
8.2.1. Atividades desenvolvidas na aprendizagem de grafos.....	164
8.2.2. Dificuldades manifestadas pelos alunos nas atividades realizadas no trabalho de projeto	174
8.2.3. Contributo do trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos	176
8.2.4. Perspectivas dos alunos sobre o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos.....	179
8.3. Reflexão Final.....	181
8.4. Sugestões para futuras investigações	183
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	185

ANEXOS	193
Anexo 1. Pedido de autorização para implementação de um estudo	194
Anexo 2. Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação	195
Anexo 3. Inquérito realizado aos alunos	196
Anexo 4. Texto relativo à campanha “Limpar Portugal”	200
Anexo 5. Problemas Complementares.....	201
Anexo 6. Relatório Individual da semana	205
Anexo 7. Grelha de Observação do Trabalho de Grupo	206
Anexo 8. Produtos finais dos grupos	207
Anexo 9. Notícia do Jornal	210
Anexo 10. Mapas de recolha do lixo de Brito, Sande S. Martinho e Airão Santa Maria	211
Anexo 11. Guião da entrevista	213

INDÍCE DE TABELAS

Tabela 1: Relação dos problemas complementares com os respectivos conteúdos	54
Tabela 2: Codificação dos métodos utilizados na recolha de dados.....	70

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Componentes que orientaram a experiência de ensino sobre Grafos numa turma de MACS do 11.º ano.....	49
Figura 2: Primeira formulação do problema pelos alunos do GB.....	77
Figura 3: Versão final do problema do trabalho de projeto.....	80
Figura 4: Resolução do 1º problema complementar.....	82
Figura 5: Grafo do 2º problema complementar.....	83
Figura 6: Utilidade dos grafos na interpretação (Rosa, RS, 26-04-2010).....	84
Figura 7: Estratégia utilizada na resolução da 1.ª questão (Carlos, RS,26-04-2010).....	85
Figura 8: Eulerização do grafo do GB.....	86
Figura 9: Análise da apresentação intermédia do grafo do GB (Rosa, RS, 17-05-2010).....	86
Figura 10: Estratégia utilizada na resolução da 2.ª questão (Carlos, RF).....	88
Figura 11: Resolução da 2.ª questão do GB, antes da apresentação final.....	88
Figura 12: Resolução da 3.ª questão do problema, antes da apresentação final.....	90
Figura 13: Reflexão sobre a forma de trabalhar do grupo GB (Adélia, RF).....	90
Figura 14: Relato sobre o trabalho de projeto (Rosa, RS, 17-05-2010).....	91
Figura 15: Mapa de Brito.....	92
Figura 16: Grafo do mapa de Brito.....	92
Figura 17: Eulerização do grafo da figura 16.....	93
Figura 18: Grafo com dois vértices de grau ímpar relativo ao grafo da figura 16.....	93
Figura 19: Grafo ponderado da apresentação final.....	94
Figura 20: Texto escrito pelo G.B para a notícia do jornal.....	94
Figura 21: Esboço do primeiro problema do grupo Sande S. Martinho.....	109
Figura 22: Segundo esboço do problema do grupo.....	110
Figura 23: Problema final do Grupo de Sande S. Martinho.....	110
Figura 24: Resposta ao 1.º Problema Complementar.....	112
Figura 25: Grafo do 2.º Problema Complementar.....	113
Figura 26: Percurso iniciado em A e finalizado em F.....	114
Figura 27: Dificuldade do grupo na elaboração do grafo (Sofia, RS, 25-04-2010).....	115
Figura 28: Relato sobre a realização do trabalho de projeto (Hélder, RS, 2-04-2010).....	115
Figura 29: Relato sobre a estratégia do grupo (Paula, RS, 03-05-2010).....	116
Figura 30: Grafo e Tabela da Apresentação Intermédia.....	117

Figura 31: Caminho da Apresentação Intermédia	118
Figura 32: Relato sobre a apresentação intermédia (Sofia, RS, 06-05-2010)	118
Figura 33: Anotações sobre a procura de respostas às dúvidas surgidas – 10.05.2011	120
Figura 34: Solução da 2.ª questão do problema	120
Figura 35: Relato sobre as estratégias escolhidas (Hélder, RS, 20-05-2010)	121
Figura 36: Dificuldades sobre a preparação da apresentação final (Paula, RS, 20-05-2010) ...	122
Figura 37: Relato sobre o trabalho do grupo (Sofia, RF)	122
Figura 38: Grafo do mapa de ruas de Sande S. Matinho e Eulerização.....	123
Figura 39: Tabela com os graus dos vértices e grafo	124
Figura 40: Percurso obtido pelo algoritmo da cidade mais próxima	125
Figura 41: Árvore geradora mínima.....	125
Figura 42: Texto elaborado pelo grupo S.S.M para a notícia de jornal da turma.....	126
Figura 43: Primeira formulação do problema do grupo	137
Figura 44: Versão final do problema do trabalho de projeto	138
Figura 45: Resolução do 1.º problema complementar	140
Figura 46: Resolução do 2.º problema complementar	142
Figura 47: Nova resolução do 2.º problema complementar.	144
Figura 48: Testemunho sobre a apresentação intermédia (Sara, RS, 26-04-2010)	144
Figura 49: Primeiro grafo elaborado pelo grupo	148
Figura 50: Relato sobre a apresentação intermédia (Sara, RS, 06-05-2010).....	149
Figura 51: Relato sobre a procura da resposta à 2.ª questão (Tatiana, RS, 12-05-2010)	150
Figura 52: Grafo ponderado	150
Figura 53: Circuito mínimo a iniciar em Guimarães	151
Figura 54: Elaboração do circuito com base no algoritmo do peso das arestas	151
Figura 55: Relato da Inês sobre a 3.ª questão (RS, 17-05-2010)	152
Figura 56: Árvore Geradora mínima	152
Figura 57: Relato sobre o grupo (Tatiana, RS, 17-05-2010)	153
Figura 58: Relato sobre a apresentação final (Inês, RS, 17-05-2010)	153
Figura 59: Grafo da apresentação final do grupo Airão Santa Maria	154
Figura 60: Grafo ponderado do circuito escolhido.....	155
Figura 61: Árvore geradora mínima.....	156
Figura 62: Texto escrito pelo grupo G.A.S.M para a notícia do jornal	156

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Motivação para o estudo

Este estudo debruça-se sobre a aprendizagem dos modelos de grafos apoiada por uma experiência pedagógica com recurso ao trabalho de projeto. Esta temática é pertinente considerando o sucessivo aumento da informação científica, a necessidade de cooperar com outros, de participar de forma racional e responsável na tomada de decisões particulares e da sociedade, a qual obriga a recorrer a diversas áreas de conhecimento. Nos últimos anos a Matemática discreta foi o ramo da Matemática que mais se desenvolveu (Gardiner, 1991). Segundo este autor, as ideias e técnicas fundamentais da Matemática discreta remontam ao século XVIII com Euler, porém, nessa altura não foi reconhecida como um ramo separado da Matemática. Somente nos últimos 40 anos, com o aumento do uso dos computadores, é que a Matemática discreta ganhou a sua ‘independência’, tornando-se cada vez mais importante na Matemática e no dia a dia (Gardiner, 1991). A interação entre a Matemática discreta e os computadores tornaram possível a criação de novas aplicações, mais eficientes e poderosas, dando destaque a outro tipo de problemas, fazendo com que a Matemática tradicional fosse encarada de outro modo (Gardiner, 1991). Na perspetiva de Dossey (1991), a Matemática discreta é a resposta da Matemática com o objetivo de permitir o entendimento das bases combinatórias usadas no desenvolvimento da eficiência de algoritmos computacionais.

No final da década de oitenta, a importância da Matemática discreta é reconhecida quer no desenvolvimento tecnológico quer em situações problemáticas do dia a dia, por entidades como a *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) e a Associação de Professores de Matemática (APM). Ambas as associações aconselham a introdução no currículo escolar de diferentes conteúdos da Matemática discreta, entre os quais se incluem os grafos. Apesar destas recomendações, somente no ano de 2004, com a criação no ensino secundário da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), com carácter optativo para o curso de Científico – Humanístico de Ciências Sociais e Humanas, é contemplada uma unidade didática sobre os modelos de grafos.

Como os objetivos dos programas escolares procuram preparar o aluno para o mundo do trabalho, para o exercício da cidadania crítica e responsável e para a prossecução de estudos,

à escola de hoje exige-se que não se limite a informar mas procure formar pessoas capazes de se adaptarem a uma sociedade em constante mudança e cada vez mais exigente (Menezes, 1999), importa perceber que conhecimentos e que competências se deseja que os alunos adquiram. As orientações curriculares e programáticas da disciplina de MACS referem explicitamente que o desenvolvimento das “capacidades de formular e resolver problemas simples em situações do dia a dia” (Ministério da Educação, 2001, p.3), a modelação de situações reais e o trabalho de projeto, têm um papel importante na formação dos alunos que frequentam esta disciplina. Promover junto dos alunos a capacidade de aprenderem a pensar, de resolverem problemas, de pesquisarem e selecionarem a informação adequada, é um dos objectivos do sistema escolar e, nesse sentido, os modelos de grafos tornam-se num tema importante pela diversidade de situações problemáticas que permite solucionar.

A integração dos conteúdos de modelos de grafos no currículo escolar português representa, assim, uma oportunidade para os alunos praticarem e desenvolverem a resolução de problemas, a comunicação matemática, o raciocínio e também a modelação (Feiteira & Pires, 2008). Num estudo realizado por Feiteira (2007) sobre grafos, o autor conclui que os modelos de grafos permitem que “os alunos tenham boas experiências de aprendizagem, apresentando ainda a vantagem de poder ser um veículo de recuperação para aqueles alunos que tenham tido insucesso ao longo do seu percurso escolar” (p. 148). Em muitos problemas ou situações problemáticas existe a tendência de se fazer um esquema ou modelo que facilita a organização das ideias, o qual representa um grafo (Coxo, 2008). O ensino de modelos de grafos, ao trabalhar conceitos e operações básicas que não exigem pré-requisitos nem muitos conhecimentos matemáticos, pode contribuir para que os alunos sejam capazes de os discutir sem dificuldades (Simões, 1999). A relativa facilidade que este tema pode representar para os alunos, permite que o seu desenvolvimento seja acompanhado com interesse por alunos com diferentes níveis de desempenho, ajudando a combater algum desinteresse que alguns alunos possam manifestar pela Matemática (Feiteira, 2007).

Por ser um tema que se presta a modelar de forma muito simples situações da vida real, constitui uma oportunidade para os alunos estabelecerem uma ligação entre os conceitos matemáticos apreendidos no contexto escolar e os conceitos que são apreendidos no dia a dia. Quando as atividades realizadas no contexto escolar apresentam situações do quotidiano, elas passam a ter um significado diferente para os alunos do que quando são desligadas da realidade, os quais tendem a apresentar e justificar os resultados finais, devendo esta ser uma

face da matemática explorada pelos intervenientes no processo ensino-aprendizagem (Cardoso, 2009).

O interesse em realizar este estudo prende-se, assim, com fatores de ordem pessoal e profissional. Por um lado, uma forte preocupação com a atual situação da Matemática no nosso país, onde os maus resultados dos alunos à disciplina de Matemática são um facto comprovado pelas classificações obtidas nos exames nacionais, o que evidenciam “fragilidades” ao nível do ensino e aprendizagem da Matemática que necessitam de ser atenuadas. Por outro lado, enquanto profissional, embora tenham surgido orientações no sentido de promover mudanças nas práticas educativas, a tendência é continuar a assistir a alguma resistência por parte de alguns professores, “limitando-se, essencialmente, a recorrer a elaborações curriculares e a propostas de atividades de aprendizagem idealizadas por outros a partir do currículo prescrito” (Morgado, 2007, p. 1). Adotando esta perspetiva de encarar o ensino de Matemática, a prática letiva é orientada por um ensino expositivo, norteadada pela sequência de conteúdos e atividades predominantemente sugeridas pelo manual escolar. Esta forma de ensinar os conteúdos matemáticos tem impedido que muitos alunos sejam encorajados a compreenderem e a apreciar o papel da Matemática no dia a dia, a desenvolver a sua confiança e capacidade de fazer Matemática e a resolver problemas ou situações problemáticas que evidenciem a aplicação desta disciplina no quotidiano através da sua participação em experiências diferentes. Nesse sentido, o NCTM (1991) defende que deve ser dada maior atenção à “utilização de uma grande variedade de estilos de trabalho (pequenos grupos, explorações individuais, aprendizagem entre alunos, discussões colectivas, trabalho de projeto)” (p. 162). O trabalho de projeto tem vindo a generalizar-se nas orientações metodológicas para o ensino de temas matemáticos, ao apoiar implicitamente a autoformação e a intervenção ativa dos alunos. O ensino baseado em projetos aproxima os alunos da realidade onde vivem, tornando o conhecimento mais significativo e contextualizado (Sousa, 2003). Ribeiro e Feiteira (2008) consideram que os modelos de grafos podem “pela diversidade de aplicações, potencialidades e facilidade de exploração em contexto escolar, (...) assumir um papel preponderante (...) para que os alunos adquiram uma cultura matemática mais rica” (p. 1). Também o NCTM (1991) refere que “(...) os alunos devem ter numerosas oportunidades para investigar situações problemáticas (...) que podem ser modeladas e analisadas a partir de grafos” (p. 212).

Atendendo a que a formação para todos implica a utilização de estratégias que dotem de significado a aprendizagem, tornando-a cada vez mais apetecível (Miranda, Morais, Dias &

Almeida, 2001), os modelos de grafos e o trabalho de projeto parecem adaptar-se a esse objectivo pelas suas características e surgindo como uma alternativa de ensino e aprendizagem que privilegia o desenvolvimento de capacidades matemáticas consideradas importantes pelas atuais recomendações da Educação Matemática.

1.2. Objectivo e questões de investigação

O interesse em realizar este estudo prende-se, fundamentalmente, à inclusão recente dos modelos de grafos no programa da disciplina de MACS. De modo a inovar a forma como leciono este tema, adotei uma estratégia de ensino, com base no trabalho de projeto, que valorizasse uma pedagogia centrada mais no aluno do que no professor. Da minha experiência de lecionação de MACS, tenho constatado que muitos dos alunos que frequentam esta disciplina procuram percursos escolares para ‘evitar a Matemática’. São normalmente alunos que apresentam dificuldades nesta disciplina e assumem, muitas vezes, uma atitude passiva quando confrontados com tarefas que exigem raciocínio e até o recurso ao cálculo. Por outro lado, o programa desta disciplina valoriza e dá ênfase à utilização de metodologias e tarefas que privilegiem os problemas de contexto real e que fomentem nos alunos atitudes de discussão e de reflexão, valorizando as diferentes formas de um aluno pensar e resolver os problemas. Assim, procuro averiguar o contributo do trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos de alunos do 11.º ano de MACS, respondendo às seguintes questões de investigação:

- (1) Que atividades realizam os alunos na aprendizagem de modelos de grafos através de um trabalho de projeto? Que dificuldades manifestam os alunos na realização dessas atividades?
- (2) Em que contribuiu o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos?
- (3) Que perspectivas têm os alunos sobre o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos?

1.3. Organização do estudo

Este estudo está organizado em oito capítulos. Neste primeiro capítulo referem-se as razões que estimularam a realização do estudo e apresenta-se o problema, em torno do qual ele se desenvolve, e as respectivas questões, às quais se procura dar resposta. De seguida, é feita uma apresentação do estudo onde se descreve a forma como este está organizado.

Posteriormente, no capítulo 2, começa-se por fazer uma breve abordagem às teorias de aprendizagem, para enquadrar as recomendações atuais para o ensino de Matemática. Continua-se com uma revisão de literatura, onde se analisa e se discute as perspectivas de vários autores sobre o trabalho de projeto na disciplina de Matemática e diferentes estudos que se realizaram sobre o tema. Apresenta-se ainda uma breve evolução do currículo de Matemática em Portugal, sobre os modelos de grafos no currículo português, e termina-se este capítulo com a apresentação de alguns estudos realizados sobre os modelos de grafos. No capítulo 3, apresenta-se a experiência pedagógica realizada, onde se descreve a forma como foi desenvolvido a componente empírica deste estudo. No capítulo 4, apresentam-se as opções metodológicas seguidas ao longo da investigação, a caracterização do contexto e dos participantes, bem como a caracterização dos instrumentos utilizados na recolha de dados. Nos capítulos 5, 6 e 7, apresentam-se os três estudos de caso realizados, analisando com pormenor o percurso dos três grupos de alunos selecionados com o objectivo de se perceber a forma como cada um deles desenvolveu o trabalho de projeto com a finalidade de aprenderem os conteúdos de grafos. Finalmente, no capítulo 8, apresentam-se as conclusões retiradas deste estudo e uma reflexão pessoal acerca de todo o trabalho desenvolvido ao longo da investigação, onde constam as limitações encontradas e algumas recomendações para estudos futuros.

CAPITULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo enquadra teoricamente a temática deste estudo, abordando temas que, de algum modo, contribuem para justificar a sua relevância: teorias de aprendizagem, das quais se optou por contrastar as que evidenciam a atividade do professor e/ou do aluno na construção do conhecimento matemático; a conceptualização do trabalho de projeto na sala de aula; e o tema dos grafos no currículo escolar.

2.1. Teorias de aprendizagem

Para que a aprendizagem do aluno seja um processo bem-sucedido é necessário que o ato de ensinar seja fundamentado por pressupostos teóricos que permitam compreender como o aluno aprende. É na Psicologia onde podemos encontrar “conhecimentos que nos ajudem a compreender a aprendizagem da Matemática” (Matos & Serrazina, p. 65, 1996). Porém, esta ciência tem apresentado diferentes perspectivas sobre a aprendizagem. Ao longo dos tempos, foram várias as teorias de aprendizagem que tiveram implicações na forma de ensinar dos professores e, conseqüentemente, na forma de aprender dos alunos.

Ao debruçar-se sobre as teorias de aprendizagem, Adler (1971) considera que estas podem ser classificadas de acordo com a relação que estabelecem entre o aluno e o meio ambiente em que se insere. De acordo com esta relação, o autor destaca três tipos de teorias: a teoria que vê o meio ambiente como o factor ativo primordial, que esteve na base do ensino tradicional centrado no assunto disciplinar; a teoria que vê a criança como o factor ativo primordial, que se centra no aluno; e a teoria que reconhece que quer a criança quer o meio ambiente têm um papel ativo no processo de aprendizagem, que está na génese do ensino contemporâneo. O autor pondera que a teoria do primeiro tipo nem sempre esteve formulada explicitamente, mas que pode ser reconhecida na prática docente pela evidência que assume a atividade do professor em relação à atividade do aluno, a quem compete recepcionar a informação que o professor transmite. Esta concepção de ensino é, por vezes, designada sob a forma de metáforas, tais como: a mente do aluno é uma esponja que absorve o conhecimento; a mente do aluno é uma tábua rasa em que o professor pode “escrever” à sua vontade; a mente do aluno é como o barro que pode ser moldado numa forma socialmente desejável. A

valorização do processo em detrimento do produto nas atividades de aprendizagem conduz às teorias do segundo e do terceiro tipo referidas por Adler (1971), que defendem uma perspectiva diferente de compreender o processo da aprendizagem. Estas teorias assentam no pressuposto de que o ato de aprender não é um simples acumular de conhecimentos na mente do aluno, o qual não tem qualquer papel ativo na aprendizagem, mas antes que o aluno à medida que cresce vai desenvolvendo o seu conhecimento. Para Piaget, qualquer sujeito, desde o seu nascimento constrói, ao longo do tempo, estruturas mentais cada vez mais, complexas e integradas que resultam da interação entre o sujeito e o meio (Morgado, 2002), entre os quais se exercem influências mútuas. Esta forma de ver a aprendizagem deu origem à teoria cognitivista, a qual defende que o aluno desempenha um papel ativo na sua aprendizagem. Piaget foi um dos grandes defensores desta teoria e os seus trabalhos exerceram uma grande influência na forma de ensinar e de aprender Matemática (Matos & Serrazina, 1996).

Na perspectiva piagetiana, a base de toda a aprendizagem resulta da atividade que o aluno desenvolve e realiza quando interage com o meio físico e social onde se encontra. A mente do aluno organiza-se em estruturas e os atos mentais relacionam-se pelos padrões de comportamento (Adler, 1971). A atividade intelectual é considerada como um processo de adaptação ao ambiente, composto por uma assimilação e uma acomodação. Através da assimilação, o aluno consegue “encaixar” as novas experiências e organizá-las nas estruturas mentais que já possui. Este “encaixe” provoca a modificação das estruturas existentes e, através da acomodação, ocorre a modificação final, permitindo que a mente se adapte às especificidades de cada experiência particular. O aluno ao interagir com o grupo social faz com que, segundo Piaget, o desenvolvimento intelectual também resulte de um processo social. Na interação com outras pessoas o aluno toma consciência de que os outros possuem opiniões diferentes da sua. O confronto de opiniões é um factor que promove a sua evolução intelectual, resultante não só do processo de acomodação e de modificação, que ocorre nas estruturas mentais resultantes das experiências vivenciadas, mas também do seu crescimento biológico. Segundo Piaget, a criança passa por quatro estádios de desenvolvimento mental até atingir aquele que, segundo o autor, corresponde ao culminar do desenvolvimento cognitivo dos indivíduos e que tem lugar na adolescência. Nesse percurso, existem sucessivamente o estádio da inteligência sensório-motor, o estádio das representações pré-operacionais, o estádio das operações concretas e o estádio das operações formais (Almeida, 1988). O estádio da inteligência sensório-motor acontece nos primeiros dezoito a vinte e quatro meses de uma

criança, período no qual ocorre a passagem por seis sub-estádios. Neste período a criança sofre uma modificação dos reflexos herdados dos seus progenitores e “adquire também um conhecimento prático do mundo exterior que lhe permitirá o acesso às representações pré-operatórias” (Almeida, 1988, p. 130). A passagem ao estágio seguinte – representações pré-operatórias – é marcada pela capacidade da criança se aperceber da existência dos objetos, mesmo que não estejam presentes, tornando-a capaz de elaborar mentalmente uma ação antes da sua realização física. A atividade motora e sensorial da criança faz-se acompanhar de uma antecipação mental das atividades, permanecendo neste estágio até aos sete anos. Durante este período já utiliza símbolos, inicialmente privados, passando depois a usar os símbolos utilizados socialmente. A criança é egocêntrica e incapaz de ver coisas sem ser pelo seu ponto de vista. O seu pensamento é formado a partir do que vê e é incapaz de fazer uma análise considerando vários factores. Como consequência, chega muitas vezes a conclusões contraditórias, não se apercebendo desse facto e aceitando-as naturalmente quando desloca a sua atenção de um factor para outro. Dos sete aos onze ou doze anos, a criança passa para o estágio das operações concretas que incidem sobre um conjunto de objetos reais e as relações entre eles. Ela já é capaz de organizar e ordenar os objetos com que se depara. A transição para o estágio das operações formais é feita quando começa a pensar na razão das coisas que não vê mas que sabe existirem. O estágio formal é alcançado entre os doze e os quinze anos, prolongando-se, segundo Piaget, por toda a idade adulta. Neste estágio, o adolescente já é capaz de identificar os factores relevantes numa investigação: formula hipóteses, retira conclusões das hipóteses formuladas e testa-as considerando a realidade.

A percepção da criança e a sua capacidade de pensar é suportada assim pela relação do seu desenvolvimento com a sua idade. À medida que cresce o seu pensamento passa de um estado egocêntrico e de curto alcance para um pensamento coordenado e capaz de considerar diferentes pontos de vista e múltiplas variáveis em simultâneo. A ordem de progresso pelos quatro estádios é fixa, sendo o ritmo desse progresso variável e acelerado pela vivência de experiências enriquecedoras e de um bom ensino:

A maturação do sistema nervoso pode fazer mais do que determinar a totalidade de possibilidades e impossibilidades num determinado estágio. Um determinado ambiente social mantém-se indispensável para a realização destas possibilidades. Segue-se que a realização pode ser acelerada ou retardada em função das condições culturais e educativas. (Adler, 1971, p. 215)

As ideias de Piaget nem sempre foram bem interpretadas. Adler (1971) advoga que o primeiro erro é relacionar os estádios de desenvolvimento apresentados por Piaget apenas com a idade cronológica levando a considerar que não é possível apressar a passagem de um estágio para outro. Desta forma, a escola não pode apressar essa passagem, sendo necessário esperar pela sua maturação. O autor lembra no entanto que Piaget referiu três factores importantes capazes de acelerar a passagem de um estágio ao seguinte: “maturação do sistema nervoso, experiência adquirida na interação com o meio físico, e a influência do meio social” (p. 216).

Um outro aspecto importante salientado por Adler (1971) é o facto de Piaget afirmar que quando uma experiência é assimilada na estrutura mental da criança, essa estrutura é ao mesmo tempo acomodada nessa experiência e modificada. Adler (1971) indica que o grande erro de muitos leitores da obra de Piaget é considerarem que a atividade da criança no processo de aprendizagem é o único factor realmente importante para a sua aprendizagem. O autor inclui neste grupo os entusiastas do ensino pela descoberta, que insistem que deve ser a criança a realizar as suas descobertas sem a ajuda de professores ou pares. Muitas descobertas estão fora do alcance das crianças, tornando-se necessário muitas vezes guiá-las habilmente através da formulação de questões ou através de uma cuidadosa seleção de experiências que permitam auxiliá-las na descoberta. Não se deve ficar eternamente à espera que as crianças consigam fazer as descobertas sozinhas, embora seja importante estimulá-las no sentido de desenvolverem todos os seus esforços para efetuarem sozinhos a descoberta. A troca de ideias com os seus colegas é uma experiência importante que não deve ser desvalorizada na expectativa de que a criança consiga descobrir tudo sozinha.

As opiniões sobre os benefícios e desvantagens do ensino pela descoberta divergem. No entanto, são diversos os estudos que mostram que a aprendizagem de conceitos matemáticos se processa de um modo mais profundo quando é utilizado um ensino por descoberta, ao invés de um ensino expositivo (Orton, 1990). Para este autor, o ensino pela descoberta incentiva o interesse dos alunos pela Matemática devido à relação que se estabelece entre a parte cognitiva e afectiva da aprendizagem, já que possibilita a utilização por parte dos alunos de todas as suas aptidões. Trata-se da melhor maneira dos alunos perceberem o seu potencial quando lhes é oferecida uma oportunidade de pensarem por si mesmos. Já Bruner (1971) considera que o ensino pela descoberta deve ser encarado “não como um produto mas como um processo de trabalho, e que o chamado método da descoberta tem como principal virtude o incentivo desse trabalho” (p. 168). Para este autor, o ensino pela descoberta estimula a aprendizagem da

Matemática e incentiva o desenvolvimento de uma concepção desta disciplina mais como um processo do que um produto acabado. Ao comparar o ensino expositivo com o ensino pela descoberta, Bruner argumenta que no ensino expositivo o aluno está preso ao discurso do professor, ficando o seu papel confinado à compreensão da mensagem transmitida por este. O aluno limita-se a desenvolver esforços no sentido de organizar a informação recebida, encontrando-se sempre atrás na mensagem transmitida pelo professor:

O ouvinte é forçado a uma posição algo passiva, uma vez que ele não tem o controlo da direção da mensagem ou do seu término (...) para o falante é muito mais atrativo. Ele, em vez de estar atrás da mensagem, está a emití-la, está na frente das palavras, está a falar, logo a seguir os seus pensamentos. Ele decide acerca da sequência e organização. (p. 168)

Estes argumentos tiveram uma grande repercussão, mas algumas dificuldades associadas a este método levaram ao surgimento do Gestaltismo ou Psicologia da Forma. Para Orton (1990), a aprendizagem por descoberta depende das conexões e das relações que o aluno estabeleça sem que o professor as exponha. A importância deste *insight* foi reconhecida como um fenómeno de aprendizagem pelos psicólogos da forma, enquanto processo interior do aluno, que consiste num esforço desenvolvido por este e que o guia à compreensão do problema. A essência da psicologia da forma consiste em admitir que a mente interpreta as sensações e as experiências que o aluno vive como um conjunto organizado e não como um conjunto de dados ou informações não relacionadas ou separadas. Se a estrutura subjacente a essas sensações ou experiências for compreendida, o aluno é capaz de encontrar a solução do problema. Os professores podem ajudar os alunos a aprender proporcionando-lhes experiências em que a estrutura seja evidente ou orientando-os para essa estrutura (Orton, 1990). Os defensores desta teoria consideram que a demonstração de um resultado feita pelo professor pode não provocar um *insight* no aluno. Entenda-se a palavra *insight* no sentido de o aluno conseguir compreender as relações existentes na demonstração efectuada. Para que a descoberta aconteça da forma mais segura possível é necessário que ocorra uma estruturação do pensamento, sendo então possível que a percepção da situação obtida seja compreendida e transferida para se encontrar a solução do problema. A teoria da forma tem como essência a ocorrência do *insight* como um aspecto fundamental da aprendizagem, no sentido da ocorrência deste permitir ao aluno uma estruturação do seu pensamento como consequência do esforço mental por ele desenvolvido

para conseguir compreender as características da situação que lhe permita de seguida dar resposta ao problema.

Tal como Piaget, também Vygotsky destaca a influência do meio social na formação e estruturação do pensamento humano e admite a existência de diferenças entre o modo de pensar de uma criança e de um adulto. César (2000), ao debruçar-se sobre as interações na aula de Matemática, reporta-se a Vygotsky para sustentar que o meio social é um factor de desenvolvimento cognitivo da criança na medida em que “toda a cognição é mediada pelas interações sociais que ela estabelece” (p. 19). Para esta autora, um dos grandes contributos do trabalho de Vygotsky consiste na definição da chamada zona de desenvolvimento proximal (ZPD), que parte do pressuposto de que todo o ser humano possui um conjunto de funções ou capacidades que já se encontram desenvolvidas, constituindo o chamado “desenvolvimento real” (p. 19). Essas capacidades são passíveis de serem utilizadas pelo sujeito quando ele realiza um trabalho individual. Porém, a mesma autora salienta que as pessoas possuem ainda um “desenvolvimento potencial” (p. 19), formado por aptidões que para se poderem desenvolver ao máximo é necessário a ocorrência de interações com pessoas mais capazes. A ZPD representa a zona onde é possível um professor atuar, assumindo o papel de pessoa mais competente, que interage com o aluno, permitindo que o ‘desenvolvimento potencial’ ocorra e cumpra o objectivo da aprendizagem que é favorecer o desenvolvimento do aluno. César (2000) salienta que apesar do professor ser considerado o par ideal para promover o ‘desenvolvimento potencial’ do aluno, não é claro nos escritos deixados por Vygotsky como poderia o professor assumir esse papel com tantos alunos com diferentes ritmos de aprendizagem na sala de aula, nem tão pouco de que forma poderia o professor aceder às diferentes ZPD dos alunos.

A importância que a linguagem tem nas interações que promovem a aprendizagem é um aspecto próximo entre Vygotsky e Piaget, mas existem alguns pontos de discórdia entre estes autores (César, 2000). Vygotsky não considera que o egocentrismo infantil defendido por Piaget possa incluir monólogos interiores da criança ou que o pensamento egocêntrico seja precedente do racional. A linguagem egocêntrica representa uma planificação da linguagem interior após ter ocorrido o processo de desenvolvimento da pessoa. É possível justificar o facto de muitas pessoas, por vezes, falarem em voz alta quando estão a executar uma tarefa que lhes é complicada. Neste caso, o monólogo representa uma verbalização da necessidade sentida pela pessoa em comunicar perante a dificuldade. Apesar das diferenças referidas, as ideias de Piaget foram uma fonte de inspiração para Vygotsky, já que ambos concordam que “se a inteligência se

desenvolve, e se as interações sociais têm um papel determinante no seu desenvolvimento, então os professores têm um papel preponderante na promoção das capacidades e aptidões dos seus alunos” (César, 2000, p. 21).

2.2. Trabalho de Projeto

Nesta secção debate-se o trabalho de projeto no campo da educação, apresenta-se algumas vantagens e desvantagens da sua aplicação na sala de aula e os resultados de algumas investigações realizadas sobre esta temática e apresenta-se as particularidades deste método de trabalho, nomeadamente as fases em que se organiza, de acordo com as perspectivas de diferentes autores, o trabalho de grupo que está subjacente à sua realização, a resolução de problemas e as tarefas de investigação.

2.2.1. Trabalho de Projeto na sala de aula

A evolução da sociedade e do sistema educativo invoca novas formas de ensinar Matemática que envolva o aluno nas atividades de aprendizagem e que o torne capaz de responder às múltiplas exigências da sociedade. Os pedagogos matemáticos contemporâneos não só recomendam que os alunos adquiram conhecimentos e habilidades consideráveis, mas também que pensem como matemáticos (Seng, 2000). Importa que os alunos obtenham informação e que sejam capazes de a usar nas mais variadas situações. Quanto mais estimulante e criativa for a oportunidade de usarem em bruto a informação que possuem maior sentido terá para eles a aprendizagem (Seng, 2000). O trabalho de projeto surge como uma componente do currículo da Matemática capaz de assumir essa função e possui características muito próprias que o identificam como uma metodologia de ensino e de aprendizagem:

Os projetos sintetizam, de certo modo, várias características desejáveis no currículo, em especial (a) o carácter intencional e autêntico do trabalho dos alunos, (b) a estreita relação entre processos e produtos, (c) a combinação entre o trabalho de grupo e individual e (d) a associação da Matemática com problemas e atividades que requerem reflexão, persistência e recursos variados mais do que com a rapidez e a produção de respostas curtas e exatas. Além disso, o trabalho de projeto pode ter ao mesmo tempo um valor próprio e uma forte ligação com a aprendizagem de vários tópicos e processos. (Abrantes, 1994b, p. 607)

Ao serviço do ensino e da aprendizagem, o trabalho de projeto “desencadeia um processo de dinamização e interação de diferentes domínios de atividades” (Castro & Ricardo, 2002, p. 13), o que é considerado fundamental da função da escola nas últimas décadas. Factores relacionados com a evolução do conhecimento, da tecnologia e com as mudanças da sociedade em que vivemos levam a que se considere que a escola seja entendida como um contexto de desenvolvimento, de socialização, do saber fazer e do inserir as aprendizagens escolares no mundo real dos alunos. Este método de trabalho está associado ao pensamento de Dewey (1953), defensor do experimentalismo, para quem o significado das coisas se obtém por meio da atividade prática. A chave do desenvolvimento intelectual e social consiste na escolarização e a escola pode assumir o papel de dinamização do crescimento da democracia social. Esta visão contrasta com os modelos que consideram o aluno um ser passivo, a ser moldado pelos professores, e o ensino com baseia na repetição de conteúdos que por vezes se distanciam das matérias escolares distantes da realidade social. Dewey acreditava que a escolarização universal era a solução para uma rápida transformação social.

Existem várias definições de trabalho de projeto, enquanto metodologia de ensino e de aprendizagem, entre as quais se destacam as seguintes:

- (1) É uma metodologia de ensino baseada na investigação-ação a partir da qual se procuram respostas empíricas para um dado problema (Leite, Malpique & Santos, 1989).
- (2) Simboliza o objectivo final de ações com carácter pouco específico de transformação do real (Barbier, 1993).
- (3) É um método de trabalho que deve ser encarado como uma perspectiva pedagógica, cujo valor educativo está no carácter aberto e contextualizado das situações de aprendizagem, capaz de assumir diversas formas de realização prática (Abrantes, 1994b).
- (4) Resulta de uma atividade intencional, que pressupõe a existência de uma planificação, de autonomia e iniciativa por parte de quem o realiza, que representa originalidade, complexidade e incerteza para os seus autores e que tem uma realização faseada e mais ou menos prolongada (Ponte, Brunheira, Abrantes & Bastos, 1998).
- (5) É uma metodologia de carácter investigativo, centrada na resolução de problemas, desenvolvida em grupo, que requer a participação de cada elemento respeitando as capacidades de cada um e cujo objectivo é a realização de um trabalho conjunto, resultante de uma planificação também conjunta, que reúne a concordância de todos os elementos do grupo (Castro & Ricardo, 2002).

- (6) Um “andaime” de suporte à aprendizagem e ao desenvolvimento das crianças (...) que permite configurar espaços de ação, no âmbito dos quais o educador e os alunos são os verdadeiros protagonistas (Mendonça, 2002).
- (7) Nasce de uma vontade, que apresenta uma certa complexidade, cuja realização resulta de uma planificação e de um processo mais ou menos extenso, com um número de intervenientes, recursos e viabilidade variável (Many, & Guimarães 2006).

Verifica-se que, de um modo mais ou menos explícito, vários autores defendem que o trabalho de projeto é uma metodologia de aprendizagem prolongada no tempo, que privilegia o trabalho de grupo, o mais colaborativo possível entre os alunos, e que pressupõe atividades de pesquisa, de discussão e de apresentação de estratégias de resolução de problemas.

As vantagens resultantes da realização do trabalho de projeto para os alunos são diversas. Para Leite et al. (1989), o trabalho de projeto “ao mudar fortemente as condições em que se aprende, leva a que se aprenda mais” (p. 59). Estes autores apresentam o trabalho de projeto como uma alternativa à rotina pedagógica, à incomunicabilidade entre professor e aluno e entre a escola e o seu exterior. Consideram que a aprendizagem por projetos, centrados na resolução de problemas, promove a compreensão de um modo natural e progressivo, já que permite uma “relação dinâmica entre a prática e a teoria, entre o sensível e o inteligível, entre saberes sociais e saberes escolares” (p. 81). O aluno tende a assumir um papel ativo na sua aprendizagem, crítico e atento à realidade envolvente, mas também exigente com ele e com os outros, tornando-se construtor do seu conhecimento. Nesta perspectiva, o conhecimento surge de uma estreita relação com o contexto em que é utilizado, não sendo possível separar os aspectos cognitivos, emocionais e sociais presentes nesse processo (Giroto, 2005).

Many e Guimarães (2006) defendem que a complexidade e a intervenção existentes no trabalho de projeto são características importantes para o aluno, por lhe permitir ter acesso a uma variedade de experiências e saberes, o que lhe faculta a obtenção de novas soluções, comparativamente com as anteriores, e a criação de novas questões. Na diversidade dessas experiências, estes autores destacam os saberes que advêm das múltiplas áreas disciplinares, tais como da Língua Portuguesa, Informática e Matemática. Esta é uma ideia também defendida por Leite et al. (1989) quando referem que a metodologia de projeto “está relacionada com uma visão interdisciplinar e mesmo transdisciplinar do saber (...) mesmo nos casos em que há um só professor no âmbito da sua disciplina ele exigirá uma visão global, dinâmica e interdisciplinar na interpretação da realidade” (p. 77). Para Sousa (2003), o ensino baseado em projetos permite a

integração de diferentes ramos do saber e, conseqüentemente, proporciona aprendizagens mais eficazes. Esta perspectiva tem vindo a ganhar relevância na atualidade por se constatar que a sociedade evolui muito rapidamente (Hargreaves, Earl & Ryan, 2001). Outra característica marcante no trabalho de projeto, segundo Castro e Ricardo (2002), é o desenvolvimento de capacidades de índole social – tais como comunicar, trabalhar em equipa, avaliar processos e tomar decisões – e de atitudes relacionadas com a vontade de aprender e com a persistência na realização das atividades.

São vários os aspectos que diferenciam o trabalho de projeto de outras metodologias de ensino. Para Ponte et al. (1998), o trabalho de projeto difere de outras formas de trabalho por não existir uma separação entre “os que pensam e os que fazem” (p. 16). O ensino expositivo dá lugar a um ensino individualizado, com pouca consideração pela atividade do aluno, pelos seus erros e pelas suas formas de pensar. Em detrimento de uma linha de ação previsível, o resultado obtido na realização do trabalho de projeto nem sempre é, segundo Many e Guimarães (2006), coincidente com o que inicialmente se previa. No entanto, essa diferença não impede a existência de algum prazer para os seus participantes, por serem os construtores e organizadores das suas ideias. A aquisição de saberes através do trabalho de projeto resulta de uma pesquisa orientada, normalmente desenvolvida em grupo, que implica uma constante relação entre a prática e a teoria. As informações necessárias ao desenvolvimento do trabalho de projeto podem ser obtidas por suporte electrónico e bibliográfico, ou resultar de observações, entrevistas, conversas informais e outras situações de trabalho de campo, exigindo que todo o grupo se envolva nessa atividade. Many e Guimarães (2006) ponderam assim que todo o participante é chamado a ter um papel ativo no decorrer do trabalho de projeto assumindo o papel de construtor do próprio saber.

O objectivo do trabalho de projeto é a resolução de problemas ou de uma situação problemática através de atividades que se desenvolvem em fases distintas, que, segundo Castro e Ricardo (2002), são muitas vezes subdivididas em problemas parcelares, os quais necessitam de pequenas investigações que ajudem a chegar à resposta mais adequada do problema inicial. Para estes autores, “trata-se de uma aprendizagem ação, na qual o processo pode ser tanto ou mais importante do que o produto final” (p. 11). A reflexão dessa ação é, segundo Abrantes (1994b), um elemento fundamental do trabalho de projeto, o que faz com que a aprendizagem derive da resolução de problemas através do ciclo experiência, reflexão e ação.

Porém, a realização de um trabalho de projeto pode também apresentar algumas desvantagens. O tema escolhido nem sempre é passível de ser executado através de um trabalho de projeto sendo necessário estar atento e verificar se estão reunidas as condições que “apoiem a realização do projeto: a exequibilidade do tema, a adequação do tema com a temática, a harmonia e coerência dos temas entre eles, o carácter problemático, o potencial de investigação do tema e o respeito pela intimidade e exposição da vida privada” (Many & Guimarães, 2006, p. 21). É ainda necessário verificar se o grau de dificuldade do tema escolhido é adequado à idade dos alunos e se a escolha do mesmo tema por diferentes grupos permite a diversificação de aprendizagens. Por outro lado, nem sempre os recursos e a informação disponíveis permitem a realização de um trabalho desta natureza, podendo ser um obstáculo à sua realização (Many & Guimarães, 2006). O tempo disponível e necessário é um outro aspecto que não pode ser descurado, sendo muitas vezes um grande ‘inimigo’ do trabalho de projeto.

Exige na prática mais tempo do que o ensino tradicional. O processo de trabalho é mais complicado, exige maiores períodos de tempo consecutivos e, muitas vezes, uma maior intensidade de trabalho por parte dos estudantes. O maior grau de autogestão dá maior motivação, mas exige também outro tipo de empenhamento que o estudo mais rotineiro não exige. (Leite et al., 1989, p. 22)

O trabalho de projeto está estreitamente ligado ao trabalho de grupo e nem sempre é fácil definir os grupos de trabalho, bem como as regras de funcionamento, de modo a garantir o seu ‘máximo’ rendimento. A desmotivação na realização do trabalho de projeto, provocada muitas vezes por uma rotina instalada, pode também ser uma desvantagem à sua realização, sendo necessário muitas vezes que o professor implemente diferentes estratégias, sem se afastar dos objectivos do trabalho de projeto. Por outro lado, os fracassos que o grupo enfrenta podem também conduzir à desmotivação, sendo importante nestas situações o apoio do professor (Many & Guimarães, 2006).

A avaliação do trabalho de projeto é um outro aspecto que pode trazer alguma desvantagem à sua realização. Nem sempre é fácil de o avaliar considerando a exigência curricular e a sua articulação com os testes de avaliação das aprendizagens realizadas. Many e Guimarães (2006) desaconselham “vivamente a realização de testes sumativos no final do trabalho de projeto porque (...) este tipo de exercício avaliativo perverte e vai contra a metodologia e os princípios do trabalho de projeto” (p. 77). Também as dificuldades que derivam da organização da escola (horários inadequados e turmas com um elevado número de

alunos), da organização do currículo (demasiado extenso) e da disponibilidade dos professores para trabalharem em projetos, contribuem muitas vezes para as muitas dificuldades com que um professor se depara quando pretende realizar um trabalho desta natureza. Porém, Abrantes (2011) salienta que estes obstáculos devem ser encarados na perspectiva de serem vencidos, salientando que existem exemplos de trabalhos de projeto que apresentam sugestões que podem ajudar a vencer tais obstáculos. No sentido de se ultrapassar algumas das desvantagens e dificuldades apresentadas, Many e Guimarães (2006) consideram que o trabalho de projeto pode ser conciliado com outras formas de aprendizagem, como por exemplo proporcionar momentos de reflexão em grupo turma para promover a globalização da problemática estudada, cabendo ao professor “estar atento às necessidades e problemas em cada grupo, dinamizando possíveis trocas inter-grupos” (Leite et. al., 1989, p. 79).

A elaboração de um trabalho de projeto pressupõe, segundo Many e Guimarães (2006), que todos os alunos são capazes de pensar e de desenvolver capacidades e conhecimentos de diferentes modos e com diferentes ritmos de trabalho. Sendo uma metodologia centrada no trabalho de grupo, ao exigir o envolvimento de todos os elementos na resolução de uma tarefa, promove o confronto de ideias e o conhecimento de diferentes processos e soluções (Castro & Ricardo, 2002). O trabalho de projeto é portanto uma metodologia de ensino que apresenta uma certa durabilidade, que passa pela elaboração de um problema, o qual exige pesquisa de informação, e se apoia na resolução de problemas complementares. Esta metodologia de ensino pressupõe que os alunos apresentem os seus processos e ideias, de modo a dar sentido à aprendizagem dos conteúdos de grafos. O trabalho de projeto apresenta, segundo diversos autores, características muito próprias que o distinguem como metodologia de trabalho no ensino e na aprendizagem. Para Castro e Ricardo (2002), o trabalho de projeto deve apresentar as seguintes características: ser importante e aproximar-se da realidade de cada participante; permitir novas aprendizagens; e ser resolvido considerando as condições da sociedade onde vivem os alunos. Mendonça (2002) refere que o trabalho de projeto implica intencionalidade, responsabilidade, autonomia, capacidade de decidir e influenciar o percurso a seguir e criatividade. Para Abrantes (1994b), o trabalho de projeto deve contemplar as seguintes características:

- Ser uma atividade intencional, ou seja, pressupõe um objectivo formulado pelos autores e executores do projeto, ou apropriado por eles, que dá

- sentido às suas atividades, às quais está associado um produto final que procura responder ao objectivo inicial e reflete o trabalho realizado;
- Responsabilizar os alunos e desenvolver a sua autonomia na realização das tarefas. Os alunos são responsáveis pelas escolhas efectuadas ao longo do trabalho;
 - Ser autêntico, de modo a que o problema ou situação sejam próximos e verdadeiros para os alunos e represente alguma originalidade;
 - Ser complexo, impedindo aos alunos uma resposta imediata, induzindo-os a que elaborem uma planificação;
 - Apresentar uma realização longa e faseada.

Para este autor, a realização de um trabalho de projeto contempla diferentes fases e finaliza com a apresentação do trabalho produzido. No entanto, as fases de realização de um trabalho de projeto são distintas para diferentes autores:

- Leite et al. (1989) consideram que um trabalho de projeto se desenvolve em três fases: (1) identificação e formulação do problema; (2) pesquisa e produção; (3) apresentação, globalização e avaliação final.
- Ponte et al. (1998) referem que o desenvolvimento do trabalho de projeto se processa em três fases: (1) planeamento e calendarização das atividades a desenvolver; (2) gestão e desenvolvimento do trabalho; (3) avaliação.
- Castro e Ricardo (2002) entendem que o trabalho de projeto se desenvolve em oito fases: (1) escolha do problema; (2) escolha e formulação de problemas parcelares; (3) preparação e planeamento do trabalho; (4) trabalho de campo; (5) ponto da situação; (6) tratamento das informações recebidas; (7) apresentação dos trabalhos; (8) balanço.
- Many e Guimarães (2006) defendem que a realização do trabalho de projeto compreende dez fases: (1) pré-projecto; (2) identificação da temática; (3) escolha e identificação de temas; (4) formação dos grupos de trabalho; (5) planificação do trabalho; (6) trabalho de campo e em sala de aula; recolha e tratamento de dados; (7) elaboração de um documento de sínteses; preparação da apresentação dos projetos; (8) apresentação dos projetos ao grande grupo; levantamento de questões; divulgação e disseminação; (9) globalização; avaliação final; (10) finalização.

Das diferentes fases que estes autores apresentam no desenvolvimento da componente empírica deste estudo, adoptou-se algumas delas na concepção e concretização de um trabalho

de projeto pelos alunos na sala de aula: (1) Definição do tema; (2) Criação do problema; (3) Planeamento do trabalho e problemas complementares; (4) Desenvolvimento do trabalho de projeto; (5) Apresentação e divulgação do trabalho de projeto. Esta estruturação seguiu a recomendação de Many e Guimarães (2006) em averiguar, antes da realização do trabalho de projeto, a sua exequibilidade e a identificação de possíveis temáticas que se adequem ao estudo dos grafos.

2.2.2. Realização de trabalhos de projeto na aula de Matemática

A realização de trabalhos de projeto na aula de Matemática, ao tornar-se uma realidade da prática docente, despertou o interesse da investigação de se debruçar sobre as suas potencialidades no processo educativo. Em Portugal, a primeira grande referência relativa ao trabalho de projeto está ligada ao estudo que Abrantes (1994b) realizou, com alunos do 3.º ciclo do ensino básico, sob a designação de Projeto MAT 789. O objectivo do seu estudo foi averiguar o contributo do trabalho de projeto na aprendizagem matemática dos alunos, ao longo dos três anos do 3.º ciclo, sobre situações problemáticas de contexto real. O ponto de partida consistiu em situações da realidade sobre as quais os alunos deviam descrever, interpretar e apresentar propostas de resolução. Cada projeto implicou a comunicação de resultados através de um relatório, posters ou brochuras, a produção de materiais ou modelos físicos. Os projetos englobavam atividades realizadas dentro e fora da sala de aula e baseavam-se no trabalho em pequenos grupos, embora existissem momentos de trabalho individual tais como a produção de relatórios. Os projetos proporcionaram, em muitos casos, experiências de interdisciplinaridade. Os resultados deste estudo evidenciam que a realização de projetos desenvolve a confiança dos alunos na utilização da Matemática em problemas de aplicação de contexto real. Evidenciam também que a generalidade dos alunos ultrapassou a perspectiva de ver a Matemática apenas relacionada com números e cálculo para a de uma disciplina necessária na interpretação de muitas situações reais. Segundo Abrantes (1994b), o trabalho de projeto tornou-se para alguns alunos “a atividade preferida, na qual baseavam em grande parte uma nova visão da Matemática muito ligada às aplicações” (p. 600). Os alunos que manifestaram a sua preferência pelos projetos em detrimento de outras metodologias de aprendizagem justificaram as suas opções pela autenticidade dos problemas trabalhados, a autonomia com que realizaram as tarefas e a variedade das tarefas desenvolvidas. O autor conclui que o trabalho de projeto

apresenta potencialidades no ensino e na aprendizagem da Matemática, devendo “ocupar um papel determinante no currículo e nas aulas desta disciplina” (p. 607).

Uma outra experiência foi desenvolvida pela equipa MAT 789, numa escola Secundária da Amadora, com alunos do 9.º ano de escolaridade, com o objectivo de “chamar a atenção para o interesse educativo de problemas pouco considerados nos programas e aulas de Matemática” (Abrantes, 1992, p. 25). Num concurso denominado “Matemática & Realidade”, concorreram 70 alunos que, organizados em grupos de 3 a 5, deveriam responder a uma situação da realidade concreta, sob a forma de questão aberta. Os alunos receberam uma folha onde estava representada uma situação relativa ao trânsito num cruzamento da cidade da Amadora, sendo cada grupo convidado a elaborar uma proposta para a colocação de um sistema de semáforos. Os alunos dispunham de um dia inteiro para responderem, podiam circular pelos vários locais da escola disponíveis para o efeito, salas, bar ou pátios e eram encorajados a utilizar livros, calculadoras, computadores e impressoras, colocados à sua disposição. O autor conclui que os alunos se envolveram na atividade com entusiasmo, mas que a falta de experiência em atividades deste tipo condicionou o desempenho de alguns deles. Verificou-se que os grupos de alunos que tinham participado no projeto MAT 789 apresentaram um desempenho superior aos restantes. Constatou-se que os grupos formados por alunos que não participaram no projeto MAT 789 tiveram dificuldades de organização, discutiam pouco a solução que iriam apresentar e deram mais importância à estrutura do trabalho do que às soluções encontradas. O autor conclui que, atendendo às aptidões desejáveis para o aluno, a escola deve promover a realização de atividades adequadas e que “o trabalho de projeto implicando a utilização da Matemática para interpretar ou resolver problemas da realidade pode desempenhar um papel insubstituível” (Abrantes, 1992, p. 29).

A referência que o trabalho de projeto adquire nas sucessivas reformulações dos programas escolares das diferentes disciplinas de Matemática despertou a curiosidade de Pereira, Ferreira, Aguiar, Pires e Sabugueiro (1999), que experimentaram este método de trabalho na sua prática docente, propondo aos seus alunos do 11.º ano um trabalho de projeto relativo ao tema Fractais. Os autores tiram várias lições desta experiência, quer em relação aos alunos, quer em relação ao seu crescimento profissional. Consideram que desenvolveram o seu conhecimento sobre o tema de Fractais sobre o qual pouco sabiam e que inovaram a sua prática através do trabalho entre pares, o que tornou “mais fácil preparar e implementar projetos, pois dessa forma estão em presença diferentes experiências e espíritos críticos, o que

poderá contribuir para uma melhor qualidade do resultado” (p. 70). Em relação aos alunos, apontam o desenvolvimento da capacidade de comunicação de ideias e conceitos matemáticos, o que “foi posta em prática durante as apresentações à turma” (idem). Referem ainda que durante a realização do trabalho, os alunos desenvolveram atitudes de pesquisa e selecção de informação, autonomia, cooperação e responsabilização. As opiniões dos alunos reforçam as conclusões dos autores, ao referirem que com o trabalho de projeto aprenderam que a Matemática não é somente números e cálculo, que tem a sua beleza e que foi gratificante a pesquisa que tiveram de fazer sobre assuntos em relação aos quais não tinham qualquer conhecimento.

O interesse pelo trabalho de projeto é transversal aos vários ciclos, o que se verifica no estudo realizado por Rebelo (2007) com alunos do 6.º ano de escolaridade com o intuito de analisar as implicações que o trabalho de projeto tem na aprendizagem da Geometria, ao nível das capacidades de comunicação matemática e de raciocínio e ao nível do conhecimento de conceitos e procedimentos. Neste estudo, a atividade dos alunos foi organizada em grupos de três elementos, competindo a cada grupo a construção de uma maquete. No desenvolvimento do projeto, a autora constatou que a autonomia dos alunos foi crescendo, assim como a capacidade criativa de alguns deles. A atividade realizada suscitou o interesse dos alunos e contribuiu para uma visão mais prática da Matemática. A autora conclui que o trabalho de projeto influenciou a aprendizagem dos alunos ao nível do conhecimento de conceitos e de “diferentes procedimentos pelo recurso a esquemas, à manipulação de diversos instrumentos, à construção de modelos a três dimensões a partir das suas representações a duas dimensões, ao cálculo e às estimativas de diferentes medidas” (p. 152). A capacidade de comunicação e o raciocínio matemático dos alunos foi desenvolvida na medida em que “eram encorajados a questionar as ideias uns dos outros, a explicar e a justificar as suas opiniões ou procedimentos” (p. 153).

Um outro estudo foi realizado por Sousa (2003) numa escola privada de Lisboa, sobre a aprendizagem da Matemática, através do trabalho de projeto. Este estudo seguiu uma metodologia de investigação qualitativa baseada num estudo de caso, e envolveu uma professora e 26 alunos de uma turma do 4.º ano do 1.º ciclo. Pretendia-se compreender e analisar as potencialidades desta metodologia na aprendizagem da Matemática numa perspectiva de Matemática para todos, a influência dos aspectos sociais e cooperativos decorrentes das interações existentes no desempenho dos alunos, e qual o papel do professor na utilização desta

metodologia. Os alunos envolvidos estavam habituados a não utilizar manuais escolares, a fazer leituras de documentos e de publicações, a efetuar consultas e pesquisas e a valorizar o caderno diário. Os projetos desenvolvidos pelos alunos incidiram sobre “Quanto dinheiro se gasta em combustível nas viagens”; “Que formas geométricas podemos encontrar na arquitetura e no design?”; “Como funcionam os bancos”; “Qual é o preço das coisas”; “Há quanto tempo ocorreram acontecimentos importantes?”; “Quais as formas geométricas das pedras preciosas?”; e “Que modificações vai haver com a entrada no Euro?” (pp. 128-129). A autora conclui que a realização destes projetos permitiu aos alunos desenvolver a sua competência matemática. A diversidade e complexidade de processos mentais que o trabalho de projeto implicou – como por exemplo a consciencialização dos alunos sobre a forma de desenvolvimento dos projetos, a comunicação do trabalho desenvolvido, a capacidade de avaliar e regular os trabalhos – desenvolveu nos alunos competências e capacidades de nível superior. A autora refere também que o trabalho de projeto na disciplina de Matemática, envolvendo problemas da vida real, proporciona a realização de conexões entre diferentes conceitos, nos vários domínios da Matemática, permitindo uma melhor ligação da disciplina com a realidade. Para além dos aspectos específicos da disciplina, foram envolvidas aprendizagens de outras áreas do currículo, como a Língua Portuguesa, através da expressão oral, a expressão escrita e conseqüentemente a comunicação matemática. A utilização, por parte dos alunos, de estratégias informais de resolução de problemas, mobilizaram conhecimentos, desenvolveram a criatividade, o pensamento crítico e divergente, a autonomia, e a responsabilidade no processo de aprendizagem. A autora salienta que o trabalho cooperativo nos vários grupos influenciou os resultados e a forma como os projetos se desenvolviam, tendo-se verificado que todos os alunos contribuíram no desenvolvimento do trabalho de projeto, mesmo aqueles que apresentavam maiores dificuldades à disciplina. O envolvimento de todos os alunos nas discussões, nas explicações e na tomada de decisões, foi algo comum a todos os grupos de trabalho, o que evidenciou o gosto pela realização do trabalho que produziram, tendo contribuído para o melhoramento da relação dos alunos com a disciplina de Matemática. O facto dos alunos terem trabalhado a partir de situações autênticas ajudou a que se envolvessem na resolução de problemas. Finalmente, a autora salienta que a professora participante assumiu uma concepção da aprendizagem construtivista, manifestando como principal preocupação a aquisição por parte dos alunos de conhecimentos significativos que levassem ao desenvolvimento das suas

capacidades de raciocínio, comunicação, resolução de problemas e ainda da destreza do cálculo.

Tentando perceber as vantagens do trabalho de projeto associado ao trabalho colaborativo, Dias e César (2008) desenvolveram um estudo inserido no projeto *Interação e Conhecimento*. Tratou-se de um estudo de caso de inspiração etnográfica, no qual participaram 22 alunos do 10.º ano, a professora de Matemática e o investigador. O objectivo deste estudo consistiu em explorar o impacto da implementação e desenvolvimento de um trabalho de projeto associado ao trabalho colaborativo no tema da Estatística. Os alunos participantes desenvolveram um trabalho colaborativo desde o início do ano lectivo e conheciam as regras do contracto didático característico desta forma de trabalho. O investigador e a professora adoptaram o co-ensino como forma de dar resposta às exigências do trabalho de projeto, que decorreu faseadamente durante os 2.º e 3º período às quartas-feiras. A professora e o investigador tinham o mesmo estatuto dentro da sala de aula. Os autores concluíram que o trabalho de projeto aproximou as aulas de Matemática da realidade e das preferências dos alunos, o que permitiu que estes atribuíssem significado às tarefas que realizaram. Pela primeira vez, foi possível aos alunos vivenciar um trabalho deste tipo, onde puderam escolher o tema, elaborar e apresentar o trabalho realizado à turma, sentindo que eram capazes de o realizar de uma forma responsável e autónoma. Os autores consideram que a apresentação do trabalho pelos alunos permitiu que sentissem que o que estavam a fazer tinha sentido e gerou neles um sentimento de que estavam a realizar um trabalho com um objetivo comum e a construir algo com significado. O facto de existir um contrato didático fez com que os papéis dos alunos e dos professores se alterassem. Os professores desempenharam um papel de orientadores e dinamizadores, enquanto os alunos desenvolviam o trabalho mais autonomamente, mesmo quando existiam dúvidas. Nesses momentos, os alunos estudavam novos conteúdos, consultando os livros disponíveis na sala de aula. Uma dificuldade apontada pelos alunos participantes foi a falta de tempo, apesar do conhecimento prévio da calendarização do trabalho de projeto. A professora de Matemática considera que esta se deveu ao grande número de dados trabalhados pelos alunos, o que tornou o trabalho pesado. Como forma de ultrapassar as dificuldades surgidas, estes alunos apontaram a comunicação, discussão e negociação dentro de cada grupo. Dias e César (2008) concluem que o trabalho de projeto aliado ao trabalho colaborativo permite criar uma dinâmica nas aulas de Matemática, que proporciona nos alunos uma alteração da representação social desta disciplina. Por outro lado, o trabalho colaborativo

permite o desenvolvimento nos alunos de competências essenciais, como o trabalho em equipa e a vivência social. Os resultados empíricos deste estudo evidenciam que os alunos associaram as vantagens do trabalho de projeto e do trabalho colaborativo às exigências da vida em sociedade, ao mesmo tempo que puderam trabalhar um tema de que gostavam, apropriar conhecimentos e desenvolver competências importantes para a sua vida dentro e fora da escola. Os alunos destacaram a autonomia adquirida que permitiu aprender a discordar e a argumentar para atingirem um objectivo comum.

Um outro estudo sobre o trabalho de projeto, que envolveu professores, foi desenvolvido por Feitosa (sd) com os seguintes objetivos: auxiliar a escola a organizar o currículo básico da 1.^a e 4.^a séries do ensino fundamental por meio de trabalhos de projeto; levar os professores a redimensionarem a prática docente e a concepção de ensino aprendizagem em consonância com os projetos de trabalho; e discutir a importância de se construir o conhecimento por meio de projetos de trabalho em comparação com o método tradicional de ensino. A realização deste estudo contemplou a pesquisa participante e semanalmente, durante as horas de trabalho pedagógico colectivo, eram realizadas leituras, discussões e orientações sobre o trabalho de projeto, tentando ajudar os professores participantes. Durante a semana, em pequenos grupos, era feita uma supervisão dos trabalhos realizados pelos professores participantes, onde se discutia a ação pedagógica de cada um e se analisava o desenvolvimento dos projetos. Os projetos desenvolvidos na escola mostraram níveis de elaboração diferenciados, de acordo com a forma de cada professor trabalhar. Foram desenvolvidos os seguintes projetos: “Festa Junina”, “Preservação do meio ambiente”, “Fazendo Arte na Escola” “Animais”, “Dinossauros” e “É o Bicho”.

Como conclusões deste estudo, o autor refere que ao longo do trabalho foram surgindo dúvidas que desafiavam o conhecimento dos professores sobre o trabalho de projeto. Verificou-se também que quando os professores participantes evidenciavam um bom entendimento sobre o trabalho de projeto, os seus alunos apresentavam conhecimentos específicos e genéricos sobre muitos assuntos e estavam dispostos a aprender e estavam mais envolvidos nas atividades escolares. Quanto aos professores participantes, foi possível verificar que atingiram um bom nível de conhecimento teórico e prático sobre o trabalho de projeto e ficaram mais seguros dos seus conhecimentos profissionais, conseguindo utilizar os seus instrumentos promotores de aprendizagem e adequando-os às necessidades individuais dos seus alunos.

No âmbito internacional, o trabalho de projeto também despertou o interesse de alguns investigadores, como por exemplo Eric (2005), Koh, Tan, Wang e Liu (2007) e Ross (1998). Eric (2005) procurou analisar o impacto da resolução de problemas com várias soluções na aprendizagem de alunos do ensino primário. Para o autor, a vontade de promover nas escolas o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos leva ao aparecimento de formas de ensinar que se afastem da abordagem tradicional. Para Eric, esta metodologia de trabalho permite que os alunos realizem uma aprendizagem significativa e que a resolução de problemas é fundamental na sua educação matemática. As questões que apresentam uma dificuldade de ordem superior desafiam a imaginação dos alunos e os problemas do mundo real permitem que os valores e crenças pessoais sejam considerados nas discussões entre eles, o que estimula a dinâmica e a liderança do grupo. O autor conclui que os grupos mais descontraídos parecem ser mais capazes na resolução de problemas porque os seus elementos aceitam melhor as diferentes opiniões. Na sua perspectiva, as discussões nos grupos sobre as tarefas propostas incentivam os alunos a dar explicações convincentes o que favorecem a construção de novos conhecimentos. Os resultados obtidos permitem ao autor afirmar que a ausência de um líder no grupo e de autoestima são factores que influenciam fortemente o desempenho dos grupos. Os alunos dos grupos que não apresentavam um líder eram mais silenciosos o que dificultou o trabalho em equipa. Este aspecto fez com que a presença do professor fosse mais solicitada. A baixa estima que os alunos apresentavam não lhes permitiam manter a discussão dos seus pontos de vista, enquanto sentiam que os grupos vizinhos, aqueles que tinham um líder, continuavam a resolver os problemas e a manifestar agrado durante esse processo. Nas tarefas com múltiplas soluções a presença do professor foi solicitada muitas vezes devido à necessidade que os alunos tinham de ter a certeza se estavam no caminho certo.

Os benefícios de estratégias de aprendizagem cooperativa levaram Koh, Tan, Wang e Liu (2007) a investigarem as percepções de 17 alunos do ensino secundário, com baixa capacidade matemática, sobre o impacto do trabalho de projeto na sua aprendizagem. Segundo os autores, o trabalho cooperativo favoreceu o desenvolvimento cognitivo e da capacidade de comunicação da maior parte dos alunos através das interações que realizaram com os seus colegas. No entanto, os autores destacam que a eficácia do trabalho de projeto nos grupos de baixa capacidade é muitas vezes impedida pela multiplicidade de dificuldades, que muitas delas derivam de obstáculos de natureza organizacional e administrativa, como, por exemplo, os alunos faltarem muitas vezes às reuniões semanais. Para Koh et al. (2007), alguns alunos de

baixa capacidade não reconhecem o trabalho de projeto como factor determinante na sua aprendizagem, o que é comprovado pelas ausências desses alunos a várias reuniões e a debates, bem como a sua falta de interesse geral e esforço que demonstraram durante a realização do trabalho de projeto. De modo a evitar estes cenários, os autores sugerem que as atitudes dos alunos sobre o trabalho em grupo devem ser debatidas e as tarefas a realizar devem-se relacionar com os seus interesses.

O desenvolvimento de estratégias que não sejam centradas na atividade do professor despertou o interesse de Ross (1998) de examinar a concretização de trabalhos de projeto com alunos que se encontravam a trabalhar em empresas. A autora procurou compreender os processos utilizados pelos alunos na realização de tarefas que se relacionavam quer com objectivos académicos quer com objectivos do mundo do trabalho. Para Ross, os objectivos a concretizar influenciam a forma como os alunos adaptam os projetos, o que parece explicar o comportamento que estes manifestaram às exigências do trabalho autêntico e simultaneamente às orientações curriculares. Os resultados do estudo revelam uma tensão entre o mundo do trabalho e a escola e uma sensibilidade necessária para os requisitos do tempo que é preciso para o desenvolvimento das atividades, da vontade de riscos e da percepção da influência da aprendizagem corporativa dos alunos. Através da adaptação dos alunos, a autora procurou situar a aprendizagem profissional em verdadeiros problemas profissionais. O conhecimento técnico de factos e de princípios foi necessário mas não suficiente para preparar os alunos-trabalhadores como profissionais capazes de responder a todas as situações. O conhecimento prático adquirido da experiência ajudou-os a dotarem de significado os conhecimentos que aprendiam, por os aplicarem na prática. A autora conclui que a complexidade das tarefas apresentadas serviu para que os alunos desenvolvessem o apreço pelo planeamento, a descoberta de informações relevantes que possibilitaram o progresso na resolução de problemas e ao mesmo tempo para se aperceberem que nem todos os problemas podem ser resolvidos rapidamente.

Quek, Wong, Divaharan, Liú, Peer e Williams (2007) realizaram um estudo, em Singapura, para compreenderem o papel do professor como facilitador da aprendizagem do aluno através do trabalho de projeto e a percepção dos alunos sobre a interação aluno/professor em aulas de trabalho de projeto. A equipa responsável pela realização do trabalho de projeto era constituída pelo diretor do departamento, pelo coordenador do trabalho de projeto e por quatro professores especializados de diferentes disciplinas (Matemática, Ciências, Humanidades e Artes). Este estudo contemplou 270 alunos, com uma média de idades de 14 anos, de sete

escolas secundárias distintas. Em cada escola existia uma equipa de cinco elementos responsáveis pela realização do trabalho de projeto e enquanto a pesquisa decorreu foram realizadas observações semanais às salas de aula pela equipa responsável, as quais forneceram elementos para serem discutidos entre os professores. O trabalho de projeto teve a duração de seis meses, através da realização de Workshops. No total existiram 67 projetos. Os dados deste estudo foram obtidos através da realização de dois inquéritos. Um primeiro inquérito, com 48 itens, procurava medir a percepção dos alunos sobre o papel do professor na sua aprendizagem; enquanto um segundo inquérito teve por objetivo analisar as atitudes dos alunos relacionadas com a realização do trabalho de projeto.

As conclusões deste estudo apontam que as atitudes do professor na sala de aula, durante a realização do trabalho de projeto, influenciam o apreço dos alunos pela aprendizagem realizada. Os autores consideram que o professor necessita de usar estratégias que facilitem a aprendizagem dos alunos em atividades que promovam o desenvolvimento afetivo, cognitivo e psicomotor. Estas atividades englobam discussões em grupo, reflexões individuais e/ou em grupo e o questionamento de ideias e problemas.

Neste estudo foram ainda analisadas as percepções dos alunos sobre o comportamento interpessoal do professor na sala de aula. Verificou-se que os alunos que apreciaram a realização deste trabalho de projeto consideraram que os seus professores foram bons líderes na realização do trabalho de projeto, enquanto para outros a incerteza que alguns professores revelaram pesou negativamente no apreço relativamente ao trabalho de projeto. Ficou ainda evidenciado que, para a maioria destes alunos, a aprendizagem através da realização do trabalho de projeto foi mais motivadora e fez mais sentido do que nas aulas que seguiam estratégias centradas no professor.

Em jeito de síntese, o trabalho de projeto e a consequente resolução de problemas é uma das grandes apostas dos educadores e matemáticos da atualidade, pelas potencialidades que apresenta no desenvolvimento do aluno, que vai de encontro aos objectivos escolares que procuram refletir as necessidades da sociedade da qual o aluno faz parte. A persistência e a procura de estratégias de resolução adequadas são características associadas por muitos autores a uma metodologia de ensino baseada no trabalho de projeto e na resolução de problemas cuja consequência é a capacidade de aprender continuamente e o desenvolvimento da flexibilidade de pensamento (Malta, 2008).

2.2.3. Elementos didáticos associados ao trabalho de projeto

Das características que emergem da literatura sobre o trabalho de projeto na sala de aula ressaltam elementos didáticos que foram considerados pertinentes no desenvolvimento deste estudo, tais como a resolução de problemas e a atividade de investigação na aula de Matemática.

O trabalho de grupo. Ao longo dos tempos têm sido atribuídas diversas potencialidades ao trabalho de grupo no processo de ensino-aprendizagem. Piaget deu um forte contributo nesse sentido, ao realçar a importância do trabalho de grupo no desenvolvimento cognitivo e nas interações sociais entre os alunos e entre os alunos e o professor. Quando se fala em grupo, está presente a ideia de um conjunto de pessoas que interagem e que têm em comum um dado objectivo (Castro & Ricardo, 2002). Porém, César et al. (2000) referem que não chega os alunos estarem sentados lado a lado para se considerar um trabalho de grupo e que interagem uns com os outros. Para estes autores, é necessário que os alunos se esforcem para que as interações se estabeleçam e possam desenvolver simultaneamente conhecimentos, capacidades, valores e atitudes através dessas interações.

A forma de um grupo trabalhar não é sempre igual e por vezes passa por várias fases até que os seus elementos se adaptem e consigam trabalhar apresentando algum rendimento. Castro e Ricardo (2002) defendem que para um grupo funcionar é necessário que exista aceitação entre os seus elementos, sentido de identidade e autoestima e onde a existência da ansiedade e insegurança sejam quase inexistentes. Segundo estes autores, a realização de um trabalho de projeto passa por várias fases, como o acolhimento, a troca de informações, a criação de objectivos, a planificação do trabalho a realizar e a conclusão e apresentação do trabalho realizado. Consideram que a idade dos alunos, a natureza da tarefa a realizar, a comunicação e os recursos existentes são factores que se devem considerar quando se pensa na dimensão dos grupos.

A dimensão de um grupo é um factor importante que interfere na comunicação existente entre os elementos do próprio grupo. Para Abrantes (1994b), o número de elementos de um grupo deverá variar entre quatro a cinco elementos. No entanto, o autor pondera que é mais benéfico para a existência de interações que um grupo tenha um número par de elementos do que um número ímpar, por considerar que neste caso é mais provável que alguém fique de fora da dinâmica do grupo. Já para Castro e Ricardo (2002) a dimensão de um grupo pode variar entre quatro e oito alunos tendo em consideração a quantidade de recursos utilizados pelo

grupo. A constituição dos grupos, em situações de ensino aprendizagem, pode ser, segundo Abrantes (1994b), da responsabilidade do professor ou dos alunos. O professor pode permitir que os alunos se agrupem segundo as suas preferências, mas pode também ser ele a fazer essa organização segundo critérios que considere relevantes. Arends (2008), reportando-se a resultados de algumas investigações, aponta que os grupos formados com a responsabilidade do professor tendem a apresentar melhores resultados. Mas, Abrantes (1994b) defende que a escolha dos elementos do grupo pelos alunos pode trazer benefícios atendendo às relações que têm uns com os outros e ao gosto de trabalharem juntos, embora o professor deva “atender ao conhecimento que tem dos alunos e ao tipo de atividade que lhes é proposta” (p. 160).

Quando os alunos trabalham em grupo existe, na perspectiva de Leite et al. (1989), um confronto de ideias que tende a favorecer a clarificação de conflitos cognitivos, a possibilitar que um dado problema seja analisado de diferentes perspectivas e a partilha de diferentes saberes que cada aluno possui. Para Abrantes (1994b), um ambiente de aprendizagem deste tipo permite “aos alunos discutirem livremente ideias matemáticas e trabalharem em conjunto na resolução de problemas [o que] é um elemento essencial na perspectiva de que se aprende por experiência e num contexto social” (p. 169). Ao favorecer a discussão de ideias e de processos entre os alunos, César et al. (2000) advogam que o trabalho em grupo aumenta o grau de autonomia e que a sua implementação significa acreditar que os alunos são capazes de construir o seu saber ao interagirem com os outros. Para que isso aconteça, estes autores consideram que o trabalho de grupo implica a criação de um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam confiantes, com sentido de responsabilidade e estimulados a realizar as tarefas propostas. Para tornar o trabalho de grupo mais eficaz é necessário definir conjuntamente com os alunos algumas regras, tais como ajudarem-se mutuamente, fazer conjecturas e testá-las, colocarem questões aos colegas e explicarem a sua forma de pensar. A justificação ou a explicação de raciocínios ganha relevância. Como defendem César et al. (2000), o aluno deve compreender que não é benéfico para a sua aprendizagem responder ao acaso, o que é bem diferente se organizar as suas ideias de modo a ser capaz de as apresentar com sentido aos outros.

A forma como um professor gere o trabalho dos grupos e os apoia nas atividades que realizam pode ser determinante para a concretização efetiva das tarefas da aula. O trabalho de grupo pode, segundo um estudo realizado pela APM (1998), ser combinado pelo professor com outras estratégias de aprendizagem, tais como a discussão com toda a turma, os momentos

colectivos de síntese (ou globalização) e o trabalho individual. A existência de momentos de globalização, onde cada grupo partilha com o grupo turma a problemática estudada, possibilita, na perspectiva de Leite et al. (1989), a existência de um equilíbrio entre os diferentes ritmos de trabalho dos grupos. Mas, como destaca Abrantes (1994b), muitas vezes surgem problemas quando o professor pretende que um grupo apresente e explique aos restantes colegas o seu processo de resolução. Segundo este autor, a discussão com toda a turma nem sempre resulta devido à falta de motivação dos alunos para escutar formas alternativas de resolução. O professor, ao procurar outras formas de promoção da discussão e da realização de sínteses das aprendizagens realizadas, deve, tal como referem Leite et al. (1989), estar atento ao trabalho dos diferentes grupos, às suas necessidades e problemas, a fim de compreender em que momentos se tornam benéficos para os grupos a troca de informação entre eles e a existência de espaços de globalização.

A Resolução de problemas. Nas últimas décadas, a investigação tem mostrado que a resolução de problemas é uma atividade indispensável na sala de aula de Matemática. As recomendações para o ensino desta disciplina destacam a atividade de resolução de problemas como forma de preparar os alunos para a compreensão e resolução de situações com que se depara no seu dia a dia:

A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo da Matemática. Como tal é objectivo prioritário do ensino da Matemática e uma parte integral de toda a atividade da Matemática. A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser apreendidos e as competências desenvolvidas. (NCTM, 1991, p. 29)

Tal atividade torna-se primordial para o aluno na aprendizagem de conceitos matemáticos e permite, segundo Ponte (2005), “perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto pela disciplina” (p. 2). O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas é para a APM (1998) um objectivo fundamental do ensino da Matemática actual:

A resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática em todos os níveis escolares (...) entende-se aqui a resolução de problemas num sentido mais amplo em que se considera essencial o trabalho à volta de situações problemáticas variadas e envolvendo processos e atividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar. (p.32)

Abrantes, Leal, Teixeira e Veloso (1997) corroboram tal posição quando referem que na resolução de problemas os alunos “estão a experimentar e a fazer matemática no sentido próprio do termo, o que constitui um dos objectivos essenciais do currículo” (p. 42). Trata-se de uma perspectiva de ver o ensino de Matemática que se distancia do ensino que enfatiza o desenvolvimento de “capacidades e factos que, se apreendidos, conduzem a cálculos exatos e eficientes” (Romão, 2000, p. 164). As recomendações atuais da educação matemática apontam para um ensino que valorize a Matemática como uma forma de pensar que envolve a resolução de problemas, comunicação e compreensão de conceitos, em detrimento de limitar o aluno a ouvir, ler e a repetir processos. A resolução de problemas é uma atividade transversal que desenvolve atitudes e capacidades que contribuem para a formação global dos alunos de todos os níveis de ensino, tais como “a confiança em fazer Matemática e desenvolver a perseverança e o espírito investigativo (...) comunicar matematicamente e (...) usar processos cognitivos de alto nível” (NCTM, 1991, pp. 28-29). Assim, os alunos desenvolvem o seu pensamento, as suas competências intelectuais, assumem papéis de adulto através de situações reais ou simuladas e tornam-se aprendentes autónomos e independentes (Arents, 2008).

Sendo a resolução de problemas uma temática à qual é atribuída muita importância nas orientações curriculares, torna-se pertinente compreender o que é um problema na perspectiva de diferentes autores:

- é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, na qual o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, sendo a solução, de antemão, do conhecimento do professor e no qual a resposta do aluno só tem duas classificações certa ou errada (Polya, 1986);
- uma tarefa, ou atividade orientada por objectivos na qual a pessoa precisa de desenvolver uma forma mais produtiva de pensar sobre uma dada situação (English, Lesh & Fennewald, 2008);
- uma situação cuja resolução exige ao aluno a utilização de diferentes estratégias, que o obrigue a envolver-se em atividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar (APM, 1988);
- uma tarefa de natureza fechada, que apresenta claramente o que é dado e o que é pedido, e de grau de desafio elevado, por traduzirem situações não rotineiras às quais o aluno não dispõe de um processo imediato de resolução e que pode ser resolvido por vários métodos (Ponte, 2005).

Na prática, nem sempre os alunos conseguem aplicar o que aprendem a novas situações, porque, tal como defendem English et al. (2008), a resolução de problemas implica um pensamento produtivo através de ciclos que integram a atividade de interpretar, descrever, testar e monitorizar o processo. Quando os alunos enfrentam uma situação problemática da realidade concreta, muitas vezes não a conseguem resolver por considerarem que ela não é em nada parecida com os problemas que resolvem na sala de aula (Abrantes, 1992). Na vida real, muitas vezes os problemas não apresentam uma formulação adequada e esta indefinição pode, segundo este autor, gerar dificuldades aos alunos. Na sala de aula, os alunos nem sempre costumam ser confrontados com situações desse tipo e por isso mostram-se pouco confiantes por “não se saber bem o que é para fazer” (Abrantes, 1992, p. 27). A formulação de problemas é assim uma atividade que, segundo Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), deve ser realizada juntamente com a resolução de problemas

Pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidade de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso. (p. 27)

Em Portugal, a formulação de problemas em Matemática tem sido objeto de realização de algumas investigações, como nos dá conta a síntese que Ponte, Matos e Abrantes (1998) realizaram de alguns trabalhos desenvolvidos. Um dos estudos analisados foi realizado por Alverca (1990) sobre a capacidade dos alunos do 1.º ciclo inventar problemas para serem resolvidos pelos seus colegas. Das 98 situações apresentadas pelos alunos, somente uma delas apresentava um enunciado pouco perceptível. De um modo geral, os alunos de todas as classes conseguiram aplicar os conhecimentos relativos à resolução de algoritmos na construção de situações problemáticas. Para os alunos ‘elaborarem um problema mais difícil’ significava elaborar expressões que conduzissem a um aumento do número de passos a realizar ou aumentar a grandeza dos números. Para a autora, a riqueza de conhecimentos utilizados na construção dos enunciados e as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas devem-se ao método de ensino utilizado. Também Porfirio (1993) constatou que os alunos mostram cuidados com a organização e clareza dos enunciados e evidenciam aspetos que

permitem enriquecer o enunciado produzido à medida que o trabalho decorreu. Quando os alunos trabalhavam em grupos apresentavam quase sempre formulações de problemas, enquanto nas produções individuais formulavam enunciados de exercícios. Em algumas das formulações de problemas apresentadas, o enunciado era semelhante a outros problemas já resolvidos pelos alunos, mas, apesar desta semelhança, esta formulação permitia a explicitação de relações que aprofundavam a compreensão da situação problemática original. Foi ainda possível verificar um aumento de criatividade nos alunos quando trabalhavam em grupo, o que permitiu inventar problemas que suscitavam questões ainda não analisadas ou mais complicadas na sua resolução.

Ponte et al. (1998) consideram que a formulação de problemas é uma atividade que proporciona um grande envolvimento dos alunos em termos de trabalho de grupo, embora este envolvimento tenha de ser estimulado por não acontecer espontaneamente. Concluem que em Matemática a capacidade de formulação de problemas é bastante importante e que os resultados analisados mostram que os alunos são capazes de formular problemas num contexto educativo bastante estimulante. Uma intervenção educativa adequada permite que, segundo estes autores, os alunos distingam a formulação de um enunciado de um exercício do de um problema.

Christou, Mousoulides, Pittalis, Pantazi e Sriraman (2005) consideram que existe pouca investigação sobre a capacidade dos alunos em criarem problemas quer em contexto numérico quer em contexto não numérico, o que os levou a realizar um estudo com o objectivo de construir um modelo teórico sobre a formulação/reformulação de problemas pelos alunos. Este estudo teve a participação de 143 alunos do 6.º ano de seis turmas distintas. Nesta amostra, 79 alunos eram do sexo masculino e 64 do sexo feminino. Foram apresentadas a estes alunos cinco situações problemáticas diferentes sobre as quais teriam de elaborar cinco enunciados de problemas que lhes permitisse verificar a aplicação da Matemática em diferentes contextos. Os autores esperavam que os alunos fossem capazes de editar, seleccionar, compreender e traduzir informação quantitativa. A edição de informação foi no sentido de os alunos serem capazes de elaborar um problema, ao qual não estava associado qualquer restrição. A selecção de informação referia-se a tarefas onde os alunos deveriam elaborar um problema, do qual conheciam a resposta, funcionando assim como uma restrição. A compreensão relacionava-se com tarefas nas quais os alunos deveriam criar um problema tendo por base uma equação ou um cálculo dado. A tradução aparecia associada a situações onde era pedido aos alunos que

elaborassem um problema apoiado numa tabela ou num gráfico. Estes autores concluíram que a compreensão exigiu aos alunos capacidade para compreenderem as operações apresentadas e que normalmente a formulação realizada pelos alunos seguia um processo algorítmico baseado na operação e não na estrutura semântica do problema. Os autores verificaram que a tradução era um processo mais rigoroso para o aluno do que a compreensão, uma vez que exigia que este fosse capaz de compreender as diferentes representações de relações matemáticas. Os processos de edição e seleção foram revelados mais pelos alunos que apresentavam uma melhor capacidade matemática.

Silver, Dows, Leung e Kenney (1996) efetuaram uma experiência com 53 professores do ensino secundário e 28 futuros professores, na qual era dado aos participantes um conjunto de dados e lhes era pedido que, com base neles, formulassem um problema, o resolvessem e testassem a solução encontrada. A resolução desta tarefa poderia ser feita individualmente ou em pares. Foram analisadas 399 respostas, algumas delas contendo esquemas e diagramas, juntamente com a fundamentação escrita. As respostas apresentadas evidenciaram que os participantes foram capazes de criar e responder de um modo diversificado, mostrando que tinham capacidade pessoal para este tipo de tarefa. Atendendo à diversidade demonstrada, estes autores concluem que os professores seriam capazes de utilizar este método com os seus alunos. Os mesmos autores salientam que este tipo de tarefa proporcionou o desenvolvimento do sentido crítico dos participantes, já que estimulou a sua envolvimento, contrariando o simples aceitar de processos. Defendem ainda que a realização destas tarefas promoveu a discussão e a apresentação de diferentes processos de resolução, estimulando a criatividade.

As atividades de formulação e resolução de problemas ganham relevância pela aplicação da Matemática a situações do quotidiano do aluno. Os problemas de contexto real definem-se por apresentarem dados a mais ou a menos e por isso Abrantes (1992) refere que nessas situações é necessário ignorar alguns dados e pesquisar sobre outros, para depois utilizar um modelo matemático que possa representar os dados selecionados, sobre o qual o aluno irá utilizar os conhecimentos e métodos da disciplina. Um problema surge assim como uma situação que se apresenta ao aluno com um certo grau de complexidade, para a qual não possui resposta imediata ou não sabe resolver com os conhecimentos que possui naquele momento e cuja resposta o obriga a usar diferentes estratégias, mobilizando diferentes capacidades e procedimentos.

As atividades de investigação na aula de Matemática. As tarefas realizadas pelos alunos na sala de aula podem ser de natureza distinta, mas a sua aprendizagem depende essencialmente da “atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam” (Ponte, 2005, p.11). As tarefas de sala de aula podem, segundo este autor, ser classificadas de acordo com o seu grau de desafio e de estrutura: exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas de investigação. Para o autor, o exercício é uma tarefa para a qual o aluno dispõe de uma estratégia ou um processo que lhe permita resolver de um modo imediato, que apela à memorização e à repetição de processos. Os problemas possuem um grau de desafio mais elevado do que os exercícios ao traduzirem situações não rotineiras sobre as quais o aluno não dispõe de um processo imediato de resolução e que pode ser resolvido por vários métodos. Nos exercícios e nos problemas quer o dado quer o pedido são conhecidos logo de início de um modo explícito, apresentando por isso uma estrutura fechada. As tarefas de estrutura aberta caracterizam-se por terem um “grau de indeterminação significativo no que é dado e no que é pedido” (Ponte, 2005, p. 17). Para o aluno, as tarefas de estrutura aberta podem representar um desafio elevado ou um desafio reduzido, características que distinguem as tarefas de investigação das tarefas de exploração. As tarefas de exploração representam um desafio de dificuldade reduzida e permitem que o aluno a execute sem um grande planeamento. Já as tarefas de investigação desafiam o aluno a elaborar um planeamento para tornar a sua execução possível, já que requerem que o aluno participe na “formulação específica das próprias questões a resolver” (p. 15), procure regularidades, estabeleça e teste conjecturas, comunique as suas estratégias e os seus resultados. A natureza das tarefas investigativas promove, segundo Ponte e Matos (1996), o desenvolvimento do raciocínio, um maior envolvimento e criatividade por parte do aluno:

As investigações Matemáticas (...) envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte do aluno (...) Enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizarem-se por assentarem em dados e objectivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido. (pp. 119-120)

Enquanto na resolução de problemas a questão já se apresenta definida e o objectivo do aluno é procurar a solução, Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) consideram que numa investigação a questão ainda não está definida, devendo o aluno proceder à sua formulação e o objectivo da atividade de investigação é o aluno proceder à exploração do problema definido. Numa investigação, o professor apresenta a ideia mas é o aluno que decide que questões irá

investigar e como o irá fazer. As investigações apresentam-se assim como sendo atividades caracterizadas por vários processos matemáticos que vão desde a recolha de dados, à formulação, teste e prova de conjecturas, que nem sempre ocorrem de uma forma linear (Brocardo, 2001). O tempo de realização de uma investigação é variável e quando se prolonga no tempo Ponte (2005) denomina-a de trabalho de projeto. Nesta perspectiva, considera-se que o trabalho de projeto é uma atividade particular das tarefas de investigação.

As recomendações atuais para o ensino de Matemática apontam para a valorização de atividades de exploração, conjectura e prova matemática e ainda as aplicações da matemática e a resolução de problemas. Segundo a APM (1995), devem ainda estimular a comunicação oral e escrita, a discussão e a reflexão, a troca e o confronto de ideias. Neste estudo destaco a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, uma vez que algumas delas não requer um elevado índice cognitivo enquanto outras levaram os alunos a considerar diferentes possibilidades, efetuar conjecturas e testar as descobertas realizadas. O trabalho de projeto diferencia-se assim da resolução de problemas por ser uma metodologia de trabalho baseada na procura de soluções para uma situação problemática, normalmente de contexto real, com um carácter mais aberto e pouco estruturada. A complexidade de um trabalho de projeto advém das muitas questões que por vezes é necessário pesquisar e dos vários objectivos que se pretende atingir. Considerando os autores sobre os quais me debrucei relativamente ao trabalho de projeto, constatei que esta metodologia pode representar um papel determinante no ensino e na aprendizagem da Matemática uma vez que promove: (1) a formulação e a resolução de problemas de diferentes graus de dificuldade; (2) as interações entre os alunos e o trabalho cooperativo; (3) o desenvolvimento da autonomia de aprendizagem; (4) o estabelecimento de conexões entre a Matemática e o mundo que nos rodeia; e (5) o desenvolvimento de capacidades cada vez mais consideradas no mundo em que vivemos, como sejam, o tratamento de informação, a colaboração na tomada de decisões, o espírito de iniciativa e a criatividade. Para que este desenvolvimento aconteça é preciso valorizar a dimensão social da aula de matemática, o confronto e o respeito de opiniões, a colaboração e a autoestima.

2.3. Modelos de grafos

Nesta secção apresenta-se uma breve referência à evolução do currículo nacional, para se perceber a partir de quando surgem os modelos de grafos no currículo escolar português e

aponta-se algumas vantagens da introdução dos modelos de grafos no currículo. Apresenta-se também exemplos de estudos sobre esta temática.

2.3.1. Breve análise da evolução do currículo de matemática em Portugal

Hoje em dia, questiona-se com alguma frequência que ensino de Matemática e que conteúdos se devem leccionar de modo a preparar o aluno para o exercício de uma cidadania crítica e responsável. Porém, o ensino da Matemática é muitas vezes marcado por objectivos de baixo nível cognitivo e por uma avaliação baseada quase exclusivamente por testes e exames escritos (APM, 1995). O currículo da disciplina de Matemática em Portugal, tal como em outros países, tem sofrido ao longo dos tempos transformações diversas. Nos anos 50, os programas centravam-se sobretudo nos conteúdos a leccionar, apresentando algumas notas referentes a cada um dos ciclos de ensino. Destacavam a importância do raciocínio, do desenvolvimento da história da matemática, da iniciativa e da confiança do aluno, aspectos que ainda hoje mantêm a sua atualidade (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Antes dos alunos ingressarem no ensino superior, a aritmética, a geometria e a álgebra eram os grandes temas do currículo, no qual era dado grande destaque ao treino das técnicas de cálculo. O ensino da Matemática em Portugal foi alvo de muitas críticas, sobretudo ao nível do cálculo. Apesar de ser o aspecto orientador de todo o ensino nos diferentes níveis, os alunos mostravam um desempenho aquém do que era esperado (Ponte et al., 1997). Com a introdução de temas como a teoria das probabilidades, a teoria dos conjuntos, a lógica Matemática, a álgebra abstracta e a topologia no ensino universitário, os programas de matemática do ensino básico e secundário sofreram alterações progressivas, tentando-se diminuir o desfasamento existente entre os conhecimentos ministrados aos alunos no ensino secundário e os que eram desejáveis que tivessem para poderem seguir o ensino universitário. No final dos anos 50, com o movimento da matemática moderna, aumentou-se a pressão para se alterar o ensino da Matemática. A Matemática escolar passa a ser apresentada de um “modo unificado, recorrendo à linguagem dos conjuntos e privilegiando o papel das estruturas, muito em especial das estruturas da álgebra abstracta” (Ponte et al., 1997, p.49). Como para este movimento as dificuldades dos alunos adivinham da sua incapacidade para relacionarem os diferentes assuntos, a introdução destes temas seria uma forma para dominarem melhor o cálculo (Feiteira & Pires, 2008). O movimento da matemática moderna chamou ainda a atenção sobre os métodos de ensino, salientando a importância do ensino pela descoberta por possibilitar que fosse o aluno a descobrir os

conceitos matemáticos. Ponte et al. (1997) consideram que a existência deste movimento em Portugal teve dois momentos distintos: uma fase experimental, conduzida por Sebastião e Silva nos anos 60, e uma fase de permanência, com início nos anos 70, na qual se generalizou pelos diferentes níveis de ensino, levando à criação de novos programas que vigoraram até 1991.

Desde o início dos anos 80 que os programas em vigor eram contestados pelo destaque dado às estruturas abstractas Ponte et al. (1997). Argumentava-se que não era fácil para os alunos compreenderem essas estruturas e por estes revelarem um fraco desempenho na elaboração de raciocínios, na resolução de problemas e no cálculo. A estas críticas seguiram-se as tendências internacionais do movimento *back to basics* que se deveram aos fracos resultados dos alunos nos testes de admissão à universidade. Segundo Ponte et al. (1997), em Portugal os efeitos do movimento *back to basics* não se fizeram sentir nessa altura, já que a aceitação das ideias defendidas pelo movimento da matemática moderna só aconteceu muito mais tarde no nosso país.

Nos anos 80, duas publicações tiveram um forte impacto na reorganização do ensino de Matemática a nível internacional. Uma delas, a *Agenda for action*, do *National Council of Teachers of Mathematics*, é um “manifesto onde se proclama que a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar” (Ponte et al., 1997, p. 53). A outra publicação, *Mathematics Counts*, mais conhecida como relatório Cockcroft, analisa o ensino de todos os níveis escolares da Matemática em Inglaterra e País de Gales. Este relatório dá conta da dificuldade que as pessoas adultas apresentavam na resolução de problemas sobre situações aparentemente simples, tais como verificar o troco ou calcular o custo da quantidade de um certo produto. Mesmo pessoas com alguma qualificação académica revelavam este tipo de dificuldade. Na impossibilidade de recorrerem a procedimentos matemáticos adequados, adoptavam estratégias alternativas, tais como comprar bens de consumo sempre com o mesmo valor, efetuar pagamentos através de cheques ou efetuar pagamentos por excesso. Segundo este relatório, as maiores dificuldades devia-se às diferenças entre a Matemática que se ensina nas escolas e aquela que é necessária no dia a dia. Recomenda por isso que se deve proporcionar aos alunos uma variedade de formas de trabalho, realçando que o ensino da Matemática, em qualquer nível escolar, deve proporcionar aos alunos uma exposição por parte do professor, a prática de competências fundamentais e de rotinas, a existência de diálogos entre os alunos e entre alunos e professor, a realização de trabalhos práticos adequados, a resolução de

problemas, nomeadamente de problemas que envolvam a aplicação da Matemática em situações da vida real e ainda a realização de trabalhos de investigação.

Mais tarde, nos anos 90 do século passado, surgiram outros documentos que realçaram também a importância da resolução de problemas, como são exemplo as *Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar* (NCTM, 1991). Tais documentos serviram de orientação para as reformas curriculares que aconteceram na disciplina de Matemática quer a nível nacional quer a nível internacional. Segundo Ponte et al. (1997), as novas orientações curriculares destacam a natureza das tarefas, o impacto das tecnologias no ensino e na aprendizagem da Matemática e na sociedade em geral e a emergência de novos domínios na Matemática. Relativamente à natureza das tarefas, os problemas são assumidos como o tipo de tarefas que desenvolve a capacidade do aluno de pensar, de definir estratégias, de confrontar ideias e de conectar conhecimentos apreendidos em diferentes temas da disciplina de Matemática e ainda de conectar os conhecimentos matemáticos com os de outras áreas disciplinares. Quanto às tecnologias, mais concretamente a calculadora gráfica e o computador, surgem associadas à realização de atividades de exploração e de pesquisa, à realização de trabalhos de grupo e à necessidade de desenvolver formas de promover a capacidade de comunicação do aluno, como por exemplo “expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho” (Ministério da Educação, 2001, p. 33).

As sugestões oriundas destes e de outros documentos, considerados pertinentes na área da educação matemática, surgem contempladas nas sucessivas alterações do currículo nacional da disciplina de Matemática, principalmente no que se considera ser importante ensinar e na forma como se deve proceder no ensino e na aprendizagem. Porém, existem muitas maneiras de pensar a Matemática, de a usar e de a desenvolver, o que faz com que em qualquer alteração ao currículo se deva atender à instituição escola, aos conhecimentos, aos interesses, às capacidades e aos valores dos professores de Matemática (Ponte et al., 1997). Cada época tem diferentes características que se vão alterando e que se refletem quer na escola quer nas alterações curriculares (APM, 1995). Por outro lado, Malta (2008) também considera importante que os objectivos curriculares se ajustem aos “alunos [porque] reconstruam a sua própria visão da matemática, seus próprios conhecimentos a partir de suas experiências, do que já sabe e de suas crenças” (p. 53). Só assim é que as sucessivas alterações no currículo da Matemática surgem no sentido de proporcionar uma melhoria no desempenho dos alunos nesta disciplina e de responderem à necessidade de formar cidadãos competentes, críticos e responsáveis.

2.3.2. Os modelos de grafos no currículo Português

Nas últimas décadas, os modelos de grafos assumiram um papel de relevo como ferramenta matemática em variadíssimas áreas do conhecimento (Cardoso, 2009). A necessidade de aplicar conceitos matemáticos a situações do mundo real transporta-nos para um dos tópicos da matemática discreta: os modelos de grafos. O surgimento destes modelos remonta ao século XVIII, associada às ideias de Euler para resolver o clássico problema das pontes da cidade de Königsberg. Inicialmente, tais modelos eram considerados pouco significativos do ponto de vista matemático, sendo basicamente usados em passatempos. No final da década de oitenta, reconhece-se a importância da matemática discreta na resolução de situações do dia a dia e a sua influência no desenvolvimento da tecnologia (Gouveia, 1999). As diretrizes da educação matemática apontam desde então a inclusão de alguns tópicos da matemática discreta nos programas escolares, nomeadamente os modelos de grafos, que, na perspectiva do NCTM (1991), “oferecem um complemento importante ao repertório de esquemas de representação dos alunos” (p. 212).

No ano lectivo 2004-05, os modelos de grafos foram incorporados no currículo do ensino secundário com a criação da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), no Curso Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e no Curso Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente. O ensino dos modelos de grafos apoia-se basicamente na leccionação de ‘Sistemas de distribuição’ e de ‘Planos de viagens’. O primeiro tópico trata dos problemas eulerianos que envolvem as arestas de um grafo. Na resolução deste tipo de problemas, o programa oficial sugere, entre outras, que o professor trabalhe situações relacionadas com a distribuição postal, com sistemas de limpeza de ruas e de recolha de lixo. É referido que “um problema de patrulhamento ou distribuição postal, pode ser proposto sobre um mapa desde encontrar quaisquer caminhos possíveis, passando por encontrar caminhos sem repetir arestas, até à necessidade de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto” (p. 19).

No segundo tópico estão englobados os problemas do tipo do ‘caixeiro-viajante’, que estão diretamente ligados aos grafos hamiltonianos e que têm uma grande aplicação em situações quotidianas, como são exemplo as situações relacionadas com a Gestão e a Economia. São também recomendados o uso de árvores e a procura de algoritmos que facilitem a determinação de soluções, o programa da disciplina de MACS salienta que está fora dos objectivos da disciplina uma introdução teórica sistematizada à teoria de grafos e que as

definições e notações podem ser “introduzidas à medida que forem sendo necessárias e úteis para economia e clareza de linguagem e devem ser tanto quanto possível inteligíveis no âmbito das situações de estudo” (Ministério da Educação, 2001, p. 18). As orientações metodológicas deste programa sugerem que os alunos trabalhem situações concretas nas comunidades em que vivem, como forma de promover o desenvolvimento de competências de intervenção cívica e de comunicação matemática. Com tais situações, pretende-se que os alunos realizem “experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras atividades” (Ministério da Educação, 2001, p. 1). Apesar de ser uma matéria complexa, o ensino dos grafos pode ser iniciado de uma forma intuitiva:

Se para a maioria dos temas abordados no ensino secundário, encontrar exemplos que possam conduzir o aluno para a construção do conceito ou resultado não é fácil, no que diz respeito à introdução da teoria de grafos este modo de proceder adapta-se naturalmente. A modelação de situações reais por modelos de grafos é quase sempre intuitiva, e muitas vezes divertida. Trata-se também de um tema que, praticamente, não tem necessidade de outros temas de matemática, deste modo não se corre o risco de perder o interesse dos alunos pelo facto de enredarem no processo de resolução de problemas por falta de conhecimentos básicos. (Pires & Hravchenko, 2006, p. 1)

Para além de apelarem à intuição na modelação de situações do quotidiano, os grafos não apelam a conhecimentos prévios de conceitos, o que poderá ser um factor de motivação na aprendizagem dos alunos. A introdução dos modelos de grafos no currículo foi bem aceite pelos diferentes intervenientes no processo educativo, quer pelo nível de profundidade com que pode ser trabalhada (Pires & Hravchenko, 2007), quer por representar uma importante ferramenta na resolução de muitos problemas de contexto real (Coxo, 2008; Pires & Hravchenko, 2007). Importa que o professor proponha exemplos adequados que permitam aos alunos estabelecer os conceitos que estruturam os modelos de grafos:

O fundamental é que os bons exemplos devem ser construídos de modo a que não sejam uma aplicação imediata dos conceitos mas que requeiram um trabalho intelectual que proporcione aos alunos o prazer da descoberta. Ao construírem o contexto para a construção do conceito, os exemplos não são meras ilustrações mas antes o ponto de partida para a discussão e para a introdução dos aspectos teóricos que se pretendem abordar. (Pires & Hravchenko, 2007, p. 15)

A espontaneidade inerente aos modelos de grafos leva muitos autores a apresentarem uma definição de grafo baseada em princípios intuitivos, onde existe um conjunto de pontos do plano, chamados de vértices, unidos por linhas, às quais se chama de arestas (Malta, 2008; Ore, 1995). Existem porém outras definições de grafo que apresentam maior rigor científico, como é exemplo a definição apresentada por Furtado (1973):

Do ponto de vista geométrico, um grafo pode ser descrito, em um espaço euclidiano de n dimensões, como sendo um conjunto V de pontos e um conjunto A de curvas contínuas que não se intersectam, satisfazendo as seguintes condições: 1) Toda a curva fechada de A contém exatamente um ponto de V ; 2) Toda a curva aberta de A contém exatamente dois pontos de V ; 3) As curvas de A não têm pontos em comum, a não ser de V . (p. 1)

Trata-se de uma definição que veicula uma linguagem que é culturalmente entendida por quem possui formação matemática. No âmbito deste estudo e de acordo com as orientações metodológicas do programa de MACS, pretende-se que a noção de grafo seja elaborada pelos alunos de uma forma intuitiva como um conjunto de pontos do plano, designados por vértices, e por linhas incidentes nesses pontos, chamadas de arestas, sem evidenciar aspectos não essenciais do conceito, tais como a forma do grafo e as dimensões das arestas.

A introdução dos modelos de grafos no currículo é segundo Althoen, Brow e Bumcrot (1991) sustentada por diferentes razões, sendo uma delas “ocorrerem em mapas de estrada, constelações, diagramas de circuitos e tabelas organizacionais” (p. 30). Por outro lado, os grafos promovem o conhecimento de algumas técnicas matemáticas que assumem grande importância na tomada de decisões das empresas (Feiteira & Pires, 2008). Permite ainda o desenvolvimento de índices de concentração na análise das relações entre os vários objetos (Furtado, 1973) e a criatividade, o que para Pires e Hravchenko (2007) está associada à construção de grafos:

Na construção de representações e esquemas, favorece o desenvolvimento de novos modelos. Este processo de construção apela permanentemente à criatividade de alunos e professores (...) a partir de uma simples representação gráfica podemos chegar facilmente a muitos dos conceitos e definições elementares. Desta forma, os alunos poderão efetivamente ensaiar a construção destes novos conceitos e ser capazes de os sentir (...) a passagem de conceitos espontâneos para conceitos formais pode ser realizada de uma forma bastante natural. (pp. 11-12)

A atividade de modelar situações é considerada por Cardoso (2009) como uma forma de desenvolver várias capacidades no aluno, tais como ser capaz de utilizar diferentes representações dos conceitos e de resolver autonomamente os problemas com que se depara:

Os alunos têm evidenciado capacidades e competências para simplificar e modelizar as diversas atividades propostas, usando estratégias tais como, esquemas, tabelas e contagens, como auxílio para o seu raciocínio, e dispensando a presença ativa do professor. De facto, os alunos demonstram uma forte autonomia e autoconfiança na resolução de exercícios enquadrados na teoria de grafos, o que contribui para que se tornem adultos matematicamente competentes. (p. 89)

A formalização dos conceitos apreendidos intuitivamente faz com que, na perspectiva de Holliday (1991), os alunos percebam a importância do domínio das definições, pois como elas são tão naturais não os confundem. A simplicidade com que se podem introduzir os modelos de grafos e explorá-los permite afirmar que “confere ao estudante do ensino secundário oportunidade de participar ativamente no processo matemático” (Holliday, 1991, p. 95).

As vantagens atribuídas aos modelos de grafos já eram defendidas antes da sua introdução no currículo nacional do ensino secundário. Em 1988, um grupo de professores e investigadores defendiam em Vila Nova de Milfontes, num seminário organizado pela APM, que o estudo de grafos deveria fazer parte do currículo quer do ensino básico quer do ensino secundário. Em 1994a, também Abrantes defendia a introdução dos modelos de grafos, num artigo da revista *Educação e Matemática*, com base nos resultados das atividades desenvolvidas pelos alunos no projeto MAT 789 e que relacionam o estudo de grafos com matrizes. Em 1999, Manuela Simões, num seminário de Matemática, apresenta um conjunto de problemas, denominando-os por “Grafolândia”, os quais podem ser discutidos por alunos de qualquer grau de ensino que possuam conhecimentos básicos de grafos. Com as propostas/tarefas que apresenta, a autora pretende que os alunos tenham oportunidade de expressar as suas ideias e as possam desenvolver ao resolver problemas. Para esta autora, a “importância crescente de problemas matemáticos relacionados por exemplo com questões de trânsito ou de negócios, que implicam a tomada de decisões leva-nos a considerar que os grafos devem ser um dos tópicos a ser integrados nos programas de Matemática” (p. 3).

Com a entrada do tema modelos de grafos no currículo nacional, começaram a surgir com maior frequência investigações e cursos de carácter mais prático relacionados com o tema de grafos. Ribeiro e Feiteira (2006) realizaram uma experiência com alunos do ensino básico e

secundário sobre situações de modelação que serviram para introduzir os grafos. Estes autores referem que as situações trabalhadas motivaram os alunos por lhes exigir pré-requisitos formais e por os responsabilizar pelas aprendizagens do grupo ao terem de apresentar e justificar quer os resultados finais quer os processos utilizados. A resolução de problemas permitiu aos alunos desenvolver atividades diferentes das que estavam habituados e apesar de não se terem baseado na aplicação de algoritmos de modo a chegarem ao resultado final, expressaram através de esquemas o seu raciocínio, e procuraram a melhor solução do problema, realizando diversas tentativas.

Um outro estudo sobre grafos foi desenvolvido por Feiteira (2007) com o objectivo de averiguar sobre a viabilidade de se introduzir o estudo de grafos no 3.º ciclo, quais os tópicos possíveis de serem trabalhados neste ciclo e ainda sobre como desenvolver duas unidades didáticas sobre esta temática, uma no 7.º ano e outra no 8.º ano. Relativamente à unidade a desenvolver no 7.º ano, contemplou a coloração de figuras e mapas, noções básicas de grafos, redes e resolução de problemas. A unidade a desenvolver no 8.º ano compreendeu os Circuitos e caminhos de Euler; Árvores; Problema do Caixeiro-viajante; Resolução de conflitos e Problemas de afectação. A proposta apresentada pelo autor para os temas de grafos a serem trabalhados no 3.º ciclo teve em conta os seguintes critérios de escolha: (1) os conteúdos escolhidos teriam de evidenciar a presença da Matemática na sociedade e serem relevantes; (2) deveriam apresentar a Matemática como uma disciplina dinâmica e importante para a sociedade; (3) deveriam dar relevância à História da Matemática, para servir de motivação aos alunos na aprendizagem que deveriam realizar, mostrando a Matemática como um produto em constante transformação. Este autor considera que se deve leccionar na disciplina de MACS mais alguns conteúdos sobre grafos, próximos dos que agora são leccionados: Planeamento de tarefas; Planaridade; Teorema das 4 cores; Problema do carteiro chinês; Problemas de Afectação. No estudo realizado, o autor conclui que é possível trabalhar o tema de grafos no ensino básico, adoptando uma metodologia compatível com este nível de ensino e isso já é um facto em países como os Estado Unidos e a Holanda. O autor considera que a integração dos grafos na disciplina de Matemática traria benefícios por ser rica em problemas e atividades diversas, passíveis de serem desenvolvidas na sala de aula, por mostrar de forma inequívoca a presença da Matemática no quotidiano e por permitir aos alunos boas experiências de aprendizagem, funcionando como um estímulo para os alunos com insucesso no percurso escolar. Feiteira (2007) considera ainda que este tema se proporciona à realização de trabalhos em grupo, onde

cada aluno ficará responsável por uma parte da atividade, por exemplo, cada aluno ficaria responsável por estudar um dado circuito. Permite ainda corrigir a visão pobre e redutiva que muitos alunos possuem da Matemática, mostrando-lhes como a Matemática pode contribuir para a compreensão do mundo em que vivem.

Considerando a estreita relação entre os problemas de carácter lúdico e os grafos, Gonçalves (2007) efetuou um estudo cujo objectivo foi apresentar vários jogos, onde são utilizados os grafos. A autora apresenta alguns jogos cuja compreensão, é feita através da aplicação de conhecimentos de grafos e que se proporcionam a que os conceitos teóricos relativos a esta temática possam ser introduzidos através desses jogos. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, é apresentada uma análise sobre a forma como Euler investigou o famoso problema das pontes de Königsberg e ainda diversos jogos explicando como é possível realizar uma introdução teórica dos conceitos de grafos com base neles. A autora conclui que os principais conceitos de grafos têm um exemplo lúdico onde podem ser aplicados e que os jogos apresentados acabam por percorrer esses mesmos conceitos. Ou seja, existência de um caminho, trajetos a passar por todas as arestas, usando o conceito de grafo euleriano, a existência de trajetos a passar por todos os vértices, ou seja, grafos hamiltonianos e a coloração de grafos. A leccionação através do jogo contribui, segundo a autora, para o desenvolvimento cognitivo do aluno, porque permite o seu desenvolvimento afectivo-social.

Atendendo à relação estreita entre a resolução de problemas do quotidiano e o ensino dos grafos, Silva (2009) desenvolveu a sua tese de mestrado na qual apresenta uma proposta de ensino dos grafos com base num conjunto de tarefas e onde propõe uma planificação e um guião de oito aulas para a disciplina de MACS de acordo com as indicações do programa oficial desta disciplina. A autora conclui que os objectivos que a escola pretende alcançar devem ser o reflexo das necessidades da sociedade onde o aluno está inserido e que é necessário refletir sobre os aspectos que se consideram importantes transmitir aos alunos, bem como os conceitos e processos que estes devem dominar. Defende por isso que é importante que o sistema escolar possibilite ao aluno: (1) decidir que informação é relevante para o estudo e compreensão de um determinado problema, bem como a melhor forma de apresentar essa informação; e (2) dar a resposta que considere mais adequada, apesar das múltiplas situações novas que poderão encontrar ao longo da sua vida. A autora defende que o grande desafio do sistema escolar passa por os alunos aprenderem a pensar, a resolver problemas, a enfrentar situações novas e aceder à informação e trabalhá-la de modo adequado. Considera que a abordagem realizada pelos

manuais ao tema de grafos sustenta-se em problemas da vida real, o que defende ser um factor de motivação para os alunos. Contrariamente a outros autores, defende que este tema não deve ser leccionado no 3.º ciclo por considerar que o nível cognitivo destes alunos ainda não lhes permite compreender e visualizar alguns conceitos necessários aos grafos.

Também Oliveira, Garnier, Barat, Bigli e Sousa (2008) realizaram, no Brasil, uma experiência com um grupo de professores cujo objectivo era “instrumentalizar os professores para introduzir o estudo de grafos” (p. 3). Os resultados da aplicação das atividades planeadas pelos professores aos seus alunos mostraram que, independentemente da idade, os alunos estavam motivados para aprender grafos e que a aula de Matemática podia “contribuir para a erradicação do analfabetismo funcional” (p. 6). Consideram que “a teoria de grafos, apresentada como desafio, oferece aos alunos a possibilidade de usar a intuição e elaborar as suas próprias estratégias para encontrar a solução sem necessidade de recorrer a conhecimentos matemáticos formais” (p. 2). Para estes autores, os modelos de grafos proporcionam a aplicação da Matemática e variados assuntos e desenvolvem a criatividade

Yanagimoto, Nakamoto e Masuada (2003) efetuaram, no Japão, um estudo com alunos da primária e do ensino básico, no sentido de compreenderem os efeitos nos alunos do ensino de grafos. Os autores concluíram que os conteúdos de grafos são apropriados para desenvolver o pensamento lógico dos alunos, por contribuírem para aumentar a sua concentração na compreensão da estrutura, na lógica do pensamento e também no cálculo ou na memorização de fórmulas e padrões de soluções. Estes autores referem que apesar de o ensino da Matemática discreta não ser popular no Japão, esta experiência mostrou que os alunos revelaram interesse pelas atividades realizadas, o que é um elemento importante.

Os resultados obtidos nos diferentes estudos analisados evidenciam que os grafos estimulam a concentração dos alunos, promovem a expressão do raciocínio através do uso de esquemas, mostram a utilidade da Matemática na resolução de problemas e proporciona-se à realização de trabalhos de grupo contribuindo para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

O programa da disciplina de MACS salienta que o objectivo da disciplina consiste em “introduzir alguns conceitos matemáticos através de problemas da vida real, mais numa perspectiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica” (p. 1) e que o “menos importante são o conhecimento e a utilização de rotinas e técnicas de cálculo e o domínio dos conceitos como objetos matemáticos” (p. 8). Um aluno que abranja os tópicos referentes aos modelos de grafos contemplados no programa da disciplina de MACS pode

facilmente compreender a aplicação de muitas técnicas com aplicações importantes no mundo real. Utilizando os grafos, o aluno terá a possibilidade de se envolver na resolução de diversos problemas que lhe permitirá obter experiências matemáticas significativas e marcantes, desenvolvendo as suas capacidades através de uma aprendizagem da Matemática que passa por fazer Matemática. Malta (2008) vê nos “grafos um campo fértil de desafios e pertinentes problemas tanto do ponto de vista matemático quanto da necessidade da vida contemporânea”, o que para Cardoso (2009) “é, sem dúvida, uma outra face da Matemática, a ser explorada pelos intervenientes no processo ensino - aprendizagem” (p. 89).

Considero por isso que a introdução de grafos no currículo português é benéfica, pelas potencialidades que apresenta, pela diversidade de situações problemáticas que permite trabalhar e pelo seu contributo na ligação da Matemática ao mundo real que nos rodeia. Tal como refere Feiteira (2007), o programa de MACS poderia ser um pouco mais ambicioso e incluir tópicos como o teorema das quatro cores

CAPÍTULO 3

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

O desenvolvimento do tema de grafos do programa de MACS, numa turma do 11.º ano, que foi objecto deste estudo, foi orientado pela realização de um trabalho de projeto pelos alunos, no qual se pretendia leccionar os modelos de grafos a partir de mapas relativos às ruas de recolha de lixo de diferentes freguesias. Com esta metodologia de ensino pretendeu-se promover a aprendizagem dos conceitos que integram os grafos de uma forma o mais autónoma possível. Algumas das fases que constituíram a produção deste trabalho de projeto foram apoiadas por problemas complementares, que foram introduzidos à medida que os alunos precisavam de conhecimentos para poderem prosseguir a sua atividade. Em termos pedagógicos, pretendeu-se desenvolver uma experiência de ensino, sobre o tema de grafos, que valorizasse a atividade do aluno (o que diz e o que faz) e que considerasse todas as ideias apresentadas na discussão de processos e resultados entre os alunos e entre os alunos e a professora (Figura 3).



Figura 1: Componentes que orientaram a experiência de ensino sobre Grafos numa turma de MACS do 11.º ano

Neste estudo o ensino dos grafos, entendido como ensino dos modelos de grafos decorreu entre 18 de Março e 02 de Junho de 2010. A concretização desta experiência de ensino aconteceu em quatro momentos diferentes: (1) apresentação do trabalho de projeto; (2)

desenvolvimento do projeto; (3) apresentação do trabalho final à turma; (4) divulgação do trabalho desenvolvido.

Esta proposta de experiência de ensino procurou desenvolver algumas das capacidades contempladas no programa da disciplina de MACS (Ministério da Educação, 2001), nomeadamente, a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real; e a capacidade de comunicar ideias. No desenvolvimento destas capacidades os alunos tiveram a oportunidade de elaborar estratégias que lhes permitiram interpretar, compreender, modelar e discutir um problema, de contexto real, na procura de soluções óptimas.

3.1. Trabalho de projeto

Na promoção da aprendizagem dos grafos, pelos alunos de MACS do 11.º ano, a realização do trabalho de projeto compreendeu cinco fases: (1) definição do tema; (2) criação do problema; (3) planeamento do trabalho e problemas complementares; (4) desenvolvimento do trabalho de projeto; (5) apresentação e divulgação do trabalho realizado.

Na 1.ª fase do trabalho de projeto, a professora começou por explicar à turma em que consiste o trabalho de projeto como método de aprendizagem e quais os seus objectivos, realçando que, como defendem Castro e Ricardo (2002), na sua elaboração é fundamental “a participação de cada elemento do grupo, segundo as suas capacidades, com o objectivo de realizar um trabalho conjunto, decidido, planificado e organizado de comum acordo” (p. 8). A professora salientou que no final do trabalho de projeto cada grupo deveria apresentá-lo ao grupo turma nas mais variadas formas, tais como em cartolina, em suporte digital, num quadro em cerâmica ou em tecido. De seguida os alunos foram desafiados a apresentarem propostas sobre temas que gostassem de desenvolver. Como os temas sugeridos pelos alunos – toxicodependência, estado das estradas na zona em que vivem e as médias de entrada na universidade – não se proporcionavam à temática dos grafos, a professora sugeriu a discussão de um texto relativo à campanha “Limpar Portugal” (Anexo 4). Este texto fazia parte da estratégia da professora como elemento alternativo ao possível desajustamento entre os temas apresentados pelos alunos e os temas propícios ao estudo dos grafos. A razão da escolha do tema do texto, para além de permitir a criação de ideias que proporcionassem a leccionação dos grafos, deveu-se à atenção que, nessa altura, era dada pela classe política de diferentes países e pela comunicação social. Exemplo dessa atenção foi a realização, no ano de 2009, da Conferência em Copenhaga sobre os factores de risco que a poluição e o lixo provocam no

aquecimento global. A poluição e o lixo são temas que fazem parte das preocupações atuais da população, em geral, e dos agentes políticos, em particular, como se verificou no discurso efectuado pelo Presidente da República no dia 10 de Junho de 2010, dia de Portugal. Ao nível da aprendizagem de conteúdos matemáticos esteve presente a promoção da educação do aluno para questões de cidadania.

Após a leitura e o debate sobre o teor do texto seleccionado, propôs-se aos alunos residentes na mesma zona que se juntassem em grupo para elaborarem algumas questões sobre aspectos contemplados no texto. Foi-lhes pedido que assumissem o papel de elementos da Junta de Freguesia onde moravam e que elaborassem propostas que pudessem solucionar os aspectos mais críticos identificados no debate, como por exemplo o que fazer para minimizar o lixo e a poluição nas zonas em que vivem. As questões e as ideias mais relevantes foram anotadas no quadro e foram discutidas no grupo turma. De seguida, os alunos procuraram na Internet vídeos que se debruçassem sobre a temática do lixo e da poluição. Dos vários vídeos encontrados, seleccionaram-se três¹ que pareceram serem pertinentes para serem visualizados pela turma. Assim, a escolha do tema acabou por ser decidida após a leitura e debate sobre um texto alusivo à campanha “Limpar Portugal” e a visualização de vídeos retirados da Internet pelos alunos, sobre a temática do lixo e poluição.

Depois destas atividades foi definido que o tema do trabalho de projeto seria “O lixo doméstico”, o que fez surgir a ideia de pedir às respectivas Juntas de Freguesia o mapa das ruas onde era efectuada a recolha do lixo. Atendendo à impossibilidade da conciliação entre os horários dos vários alunos e o funcionamento das Juntas de Freguesia, a professora ficou de fazer este contacto. A primeira Junta de Freguesia contactada informou que não dispunha desses dados e que teriam de ser solicitados à Câmara Municipal. A professora efectuou um primeiro contacto telefónico com a Câmara a que pertenciam as Juntas de Freguesia, ao que lhe foi sugerido que formalizasse o pedido por correio electrónico para os responsáveis pelo gabinete do ambiente. Posteriormente, a professora explicou aos alunos em que consistia o trabalho de projeto e quais eram os seus objectivos.

1 <http://www.youtube.com/watch?v=gDEcRQDwTL0>
http://jn.sapo.pt/paginainicial/interior.aspx?content_id=1056492
<http://www.youtube.com/watch?v=l4mFu72k-Ww&feature=related>
<http://www.youtube.com/watch?v=ngFWX6u0Qxg>
<http://www.youtube.com/watch?v=bE0xzOA5LWg&feature=related> (vídeos visionados em 18/03/2010)

Na 2.^a fase do trabalho de projeto, os alunos envolveram-se na criação de um problema, atendendo ao mapa que lhes foi entregue, sobre a recolha do lixo doméstico na freguesia onde residiam, o que constituiu a base do trabalho de projeto de cada um dos grupos. Os diferentes problemas elaborados seguiram determinados requisitos — como por exemplo fazer menção a percursos e à sua minimização —, que permitissem a abordagem dos tópicos que tratam os grafos, tal como são contemplados no programa nacional. Como os alunos desconheciam as características que deviam integrar no problema do seu grupo de modo a gerar os atributos essenciais dos tópicos dos grafos, a professora, sempre que era solicitada por um dado grupo, procurou dar sugestões em conformidade com as ideias que emergiram do debate sobre o texto “Limpar Portugal” e sobre os vídeos visualizados. A elaboração dos problemas pelos diferentes grupos teve a ajuda das professoras de MACS e de Português. A participação desta professora incidiu na elaboração dos textos produzidos pelos alunos. Na elaboração de tais problemas, os alunos apresentaram ao grupo turma as suas dúvidas e as suas propostas. Esta estratégia fez com que a versão final dos problemas de cada grupo apresentasse um tronco comum:

1. O Senhor X tem em sua posse um mapa no qual constam as ruas onde é feita a recolha de lixo pelos camiões da Câmara Municipal. Este é convidado para apresentar uma proposta que rentabilize o percurso efectuado pelo camião no sentido de repetir o menor número de ruas possível, caso finalize ou não no local onde iniciou a recolha. Considerando que o lixo é recolhido dos dois lados da rua, sempre que o camião passa, que proposta poderá o senhor X apresentar?
2. Existe apenas um dia onde é possível ao senhor X ir reunir-se com outros responsáveis pelos problemas relacionados com o lixo. O senhor X está a tentar elaborar um plano de viagem de modo a minimizar os quilómetros percorridos. Que plano poderá ser?
3. Algumas freguesias apresentam uma rede de esgotos ou de água incompleta. Assim, nessa reunião será discutido a finalização de tal rede, tentando que o comprimento das canalizações seja o menor possível. Que proposta poderá ser apresentada, considerando-se os objectivos definidos?

A elaboração das questões do problema teve a ajuda da professora de MACS, que procurou assegurar que tais questões possibilitassem o estudo dos tópicos dos grafos: a primeira questão permitiu abordar a noção de grafo, vértice, aresta, lacete, arestas paralelas, dimensão de um grafo, grafo conexo, caminho, circuito, circuito de Euler e Eulerização. A segunda questão tratou os grafos hamiltonianos, nomeadamente, o algoritmo da cidade mais próxima e do peso das arestas. Com a terceira questão, foi possível aos alunos compreenderem quando é que um grafo se diz uma árvore e poderem determinar a árvore geradora mínima.

Relativamente à 3.^a fase do trabalho de projeto, “Planeamento do trabalho e problemas complementares”, três dos grupos começaram por tentar responder à primeira questão percorrendo as ruas do mapa. Um dos grupos elaborou um plano de trabalho que consistiu basicamente na divisão de tarefas entre os elementos do grupo. O outro grupo começou por procurar na Internet exemplos similares com o que lhes estava a ser pedido. Para promover a aquisição de alguns conceitos relativos aos grafos, a professora recorreu à elaboração de problemas complementares (Anexo 5).

Estando na posse de alguns conceitos de grafos, os alunos passaram à 4.^a fase do trabalho de projeto, a fase do desenvolvimento. Ficou acordado que, quando todos os grupos tivessem finalizado a resposta à primeira questão do problema do trabalho de projeto, haveria uma apresentação à turma para que os alunos e a professora pudessem avaliar o trabalho desenvolvido até ao momento. Nesta fase, cada grupo implementou o seu ritmo de trabalho. No início de cada aula, a professora percorria os vários grupos. Nestes momentos, os grupos faziam um ponto da situação do trabalho desenvolvido e apresentavam as dificuldades sentidas. Algumas dúvidas mais específicas eram esclarecidas no grupo, outras eram aproveitadas pela professora para esclarecer no grupo turma.

Na 5.^a e última fase do trabalho de projeto, a fase da apresentação e da divulgação, os grupos procuraram rectificar os aspectos menos conseguidos na apresentação intermédia que foi realizada, responderam às restantes questões do problema e organizaram o produto final. Foram vários os produtos finais apresentados pelos grupos, para além do trabalho escrito, fornecido em suporte digital: (i) dois grupos apresentaram um quadro com o grafo, um deles em serapilheira e outro em tela em ponto de cruz; (ii) um grupo fez um vídeo com os elementos do grupo a apresentarem os percursos pedidos; (iii) um grupo fez um painel com curiosidades sobre grafos; e (iv) um grupo construiu uma maquete com a árvore geradora mínima e um circuito. Estes trabalhos encontram-se nos anexos (anexo 8), excepto o vídeo realizado. Após a apresentação final do trabalho de projeto desenvolvido, os grupos trabalharam na sua divulgação. Todos os grupos elaboraram um texto que depois foi compilado e publicado no jornal da escola, em nome da turma, sobre o trabalho realizado (Anexo 9). Apresentaram o trabalho desenvolvido aos seus Encarregados de Educação, na reunião realizada com os mesmos no final do 3.^o período, e disponibilizaram, através da professora de MACS, os trabalhos desenvolvidos à Engenheira da Câmara que cedeu os mapas das ruas de recolha do lixo.

A par do trabalho desenvolvido em grupo, semanalmente, cada aluno realizou um pequeno relatório (Anexo 6), onde descrevia as dificuldades sentidas, a forma como as ultrapassou e a forma como estava a decorrer o trabalho do seu grupo. No final do trabalho de projeto, os alunos realizaram ainda um relatório final acerca da atividade desenvolvida.

3.2. Problemas complementares

No desenvolvimento do trabalho de projeto, os alunos, organizados em grupos, procuraram responder ao problema que criaram e que sustentou todo o trabalho de projeto. Numa fase inicial, começaram por responder a alguns problemas complementares cujo objectivo foi permitir a aquisição, por parte dos alunos, de alguns conhecimentos de grafos, de modo a poderem desenvolver o trabalho de projeto mais autonomamente. Na procura desta autonomia, os alunos foram estimulados a pesquisarem, em manuais, na Internet, na biblioteca e noutros locais, como as juntas de freguesia, as respostas para as dúvidas que foram surgindo. Quando as dúvidas persistiam, a professora procurou debatê-las através dos problemas complementares, assim designados por terem como finalidade fornecer aos alunos as noções necessárias para dar continuidade ao seu trabalho. A professora seleccionou problemas complementares para os alunos estabelecerem as noções de grafo, caminho, circuito, grafo conexo, circuito e caminho de Euler, caminho e circuito de Hamilton (concretamente o algoritmo da cidade mais próxima e do peso das arestas) e a noção de árvore e de árvore geradora mínima. O quadro a seguir ilustra os conceitos que cada um desses problemas permitiu explorar:

Tabela 1: Relação dos problemas complementares com os respectivos conteúdos

Problema complementar (PC)	Conteúdos a tratar
PC1 (Pontes de Königsberg) http://www.prof2000.pt/users/miguel/grafos/	- Noção de grafo, vértices e arestas.
PC2 (Passeio dos alunos)	- Vértices adjacentes, grau de um vértice, vértice isolado, arestas adjacentes, arestas paralelas, pontes, dimensão de um grafo, ordem de um grafo, grafo simples, grafo conexo, grafo completo, grafo K_n , noção de caminho, noção de circuito, comprimento de um caminho ou de um circuito. - Dígrafos. - Grafos Eulerianos, caminho de Euler, Eulerização, melhor Eulerização, Teorema de Euler.
PC3 (Horários)	- Grafos Hamiltonianos, grafos pesados, algoritmos da cidade mais próxima e do peso das arestas.
PC4 (Ligação de computadores)	- Noção de árvore e árvore geradora mínima.

A naturalidade associada aos problemas complementares propostos, bem como a discussão gerada em torno das diferentes resoluções apresentadas pelos grupos à turma, permitiu a abordagem de alguns conceitos de grafos necessários para os alunos iniciarem mais autonomamente a resolução dos problemas que serviam de base aos seus trabalhos de projeto. A fim de reforçar a aprendizagem de alguns conceitos apresentados a partir da resolução dos problemas complementares, a professora propôs a realização de alguns exercícios do manual escolar adoptado como trabalho extra sala de aula. As dúvidas surgidas foram esclarecidas no início das aulas seguintes.

Apenas os dois primeiros problemas complementares foram realizados em grupo e corrigidos e apresentados em grupo turma. Os restantes não chegaram a ser apresentados à turma porque foram realizados em diferentes momentos pelos grupos. Aos poucos, os alunos adquiriram alguma autonomia na procura e compreensão dos conceitos necessários para resolver as últimas duas questões do problema do trabalho de projeto.

3.3. Ambiente de Aprendizagem

O ambiente de aprendizagem proporcionado aos alunos, nas aulas de estudo dos grafos, foi um factor determinante na sua aprendizagem. Porém, surgiram vários factores que, por vezes, condicionaram o ambiente de aprendizagem, como por exemplo as condições da sala de aula, o fraco sinal da Internet e, sobretudo, os factores que se relacionam com a relação de poder existente na sala de aula e os papéis atribuídos ao professor e ao aluno. Deste modo, com os alunos já organizados em grupos, negociaram entre si e com a professora algumas regras de trabalho. Segundo Ponte et al. (1997), implícito ao ambiente de aprendizagem de cada aula “há uma determinada cultura que regula as normas de comportamento e de interação e estabelece as expectativas dos respectivos intervenientes” (p. 90). Essas normas incluem a forma como os alunos entram na sala de aula e são organizados, a forma como o professor propõe as tarefas, o modo como os alunos são ou não estimulados a colocarem as suas dúvidas e a partilharem-nas com os restantes colegas, e a oportunidade que o professor lhes dá ou não de justificarem os seus raciocínios. Para Yackel e Cobb (1996), estas normas são, na sua maioria, transmitidas de um modo implícito pelo professor e inferidas pela regularidade nos padrões de interação. Segundo estes autores, as reacções do professor são muitas vezes um indicador implícito do que é ou não valorizado por ele e têm uma função importante na aprendizagem dos alunos. Assim,

pode afirmar-se que as normas instituídas podem condicionar em grande parte a atividade, a aprendizagem e o ambiente existente na sala de aula.

No caso da experiência de ensino realizada no estudo dos grafos, o facto de os alunos não poderem sair do recinto escolar sem a autorização dos pais e do diretor da escola, se encontrarem no 11.º ano de escolaridade e serem submetidos a exames nacionais e compararem sistematicamente as classificações obtidas entre si, influenciaram o seu desempenho em alguns momentos do seu trabalho, nomeadamente quanto ao tempo que dedicavam à realização do trabalho de projeto extra aula, já que tinham sistematicamente testes e outros trabalhos para realizar a outras disciplinas.

3.3.1. Formação dos grupos de trabalho

Atendendo à natureza do trabalho de projeto, os alunos desenvolveram a sua atividade em grupos, cujos elementos moravam, na sua maioria, na mesma freguesia. A turma onde este estudo foi desenvolvido era composta por vinte alunos do 11º ano do curso Línguas e Humanidades. Formaram-se cinco grupos de quatro elementos, com a preocupação de constituir um número que, como defendem Leitão e Fernandes (1997), favorecesse a intervenção de todos os participantes do grupo. É de referir que existiam alunos que apresentavam comportamentos e incompatibilidades de várias ordens e por isso foi importante que estes ficassem em grupos separados. Na base desta opinião está Artz e Newman (1990), que indicam que grupos heterogêneos possibilitam que os vários elementos possam ajudar na realização das tarefas e também podem ser ajudados, sem que se sintam intimidados, de modo a que todos os elementos do grupo tirem o maior proveito. Assim, todos os grupos tiveram elementos de ambos os sexos, que residiam na mesma área, e que apresentavam diferentes níveis de desempenho na disciplina. Como os alunos não estavam habituados a este tipo de trabalho e alguns deles tiveram a tendência a assumir uma atitude individualista ou passiva, existiram situações onde inicialmente se perdeu um pouco o objectivo do trabalho de grupo. Para minimizar esta situação, foram negociadas com os alunos regras sobre a atividade a desenvolver por cada elemento do grupo e pelos vários grupos. A forma como os elementos do grupo se organizavam para realizar as tarefas foi da sua responsabilidade. No entanto, qualquer elemento poderia ser chamado para explicar e justificar, perante toda a turma, as interpretações e soluções encontradas durante o trabalho no seu grupo. Com esta medida, a professora pretendeu promover a ajuda dos elementos do grupo, obrigando-os a envolver-se nas tarefas e a impedi-los de se acomodarem.

Interessava ainda que os alunos compreendessem que só estavam a contribuir positivamente para a discussão se alegassem argumentos diferentes dos já apresentados. Assim, era importante que os alunos estivessem à vontade para poderem expor o seu pensamento, as suas dúvidas e os seus raciocínios, sem medo de recriminações e sentissem que eram valorizados, quer pelos restantes elementos do grupo, quer pelo grupo turma e pela professora. Deste modo, foi negociado com os alunos o respeito pela diferença de opiniões e pelas dificuldades que apresentavam. Isto exigiu da professora muita atenção para valorizar as ideias dos alunos, os encorajar a participarem e a respeitarem as suas diferenças e opiniões.

Ao longo das várias aulas, o objectivo da experiência de ensino adoptada foi permitir que cada aluno assumisse um papel ativo na sua aprendizagem, enquanto co-construtor do seu conhecimento. Para garantir o cumprimento deste objectivo, foi estipulado que todo o trabalho realizado em grupo era discutido primeiramente no interior do próprio grupo e somente depois era solicitada a presença da professora, caso persistissem dúvidas. Cada grupo escolheu o seu porta-voz, no entanto, qualquer elemento desse grupo poderia intervir, sempre que considerasse que algo não estava a ser bem explicado, ou ser questionado por outros alunos da turma ou pela professora a respeito do trabalho que estava a ser feito e apresentado. Os grupos desenvolveram um trabalho colaborativo, que culminava com a apresentação e discussão na turma dos processos utilizados e resultados obtidos na resolução das tarefas. No interior dos grupos e no grupo turma, a discussão foi uma constante, permitindo aos alunos apresentar as suas resoluções, os seus raciocínios, confrontar processos, desenvolver a argumentação e, simultaneamente, consolidar aprendizagens. A apresentação à turma de todas as atividades realizadas e respectivas sínteses, permitissem a existência de discussões e conclusões.

3.3.2. Atividades a desenvolver na sala de aula

A aprendizagem da Matemática requer que as normas instituídas em sala de aula possibilitem ao aluno um ambiente estimulante à sua participação. O trabalho de projeto é uma metodologia que requer a participação de cada membro do grupo, segundo as capacidades de cada um, com o objectivo de realizar um trabalho por todos os elementos. Na perspectiva de Castro e Ricardo (2002), o trabalho de projeto é orientado para a resolução de um problema que seja significativo para os alunos, que permita novas aprendizagens com alguma complexidade. Procura-se assim aproximar os alunos do de situações do mundo real, proporcionando uma aprendizagem mais eficaz.

Os alunos nos vários grupos envolveram-se nas atividades propostas, desenvolveram técnicas de pesquisa e de procura de informação, que lhes permitiu ultrapassar muitas das dúvidas que surgiram na resolução das questões do problema. O desenvolvimento das capacidades de comunicação e de argumentação dos alunos foi estimulado através de discussões, quer no interior dos grupos, quer no grupo turma. Por isso, foi importante a atenção que a professora deu à observação das atividades realizadas pelos alunos, para poder valorizar o que estes diziam e faziam. À professora, enquanto elemento integrante da experiência de ensino realizada, coube, entre outros, o papel de ouvinte, coordenadora, facilitadora, orientadora, incentivadora, mediadora e amiga. Como refere Ledesma (2009), o trabalho de projeto requer da parte do professor “uma grande sensibilidade e capacidade para apoiar e orientar os grupos de alunos a ultrapassar as dificuldades emergentes ao longo do percurso” (p. 16). A professora assumiu diferentes papéis neste estudo. Procurou negociar com os alunos as regras estipuladas e que serviram de base ao desenvolvimento do trabalho de projeto, orientou as atividades que os alunos estavam a desenvolver, questionando-os de modo a promover as discussões e apoiou o trabalho dos grupos nos momentos de impasse e quando demonstravam incapacidade para continuar. Esta intervenção nos grupos de trabalho foi sempre cuidadosa, acompanhada de uma observação atenta, tentando não direcionar os seus processos e tinha por base o questionamento dos alunos, com o objectivo de permitir o levantamento de novas questões.

Ao longo das várias aulas, existiram momentos de trabalho colectivo, em pequenos grupos e individual. O trabalho colectivo existiu nos momentos em que ocorreram a negociação de significados, a introdução de problemas complementares, o questionamento dos alunos sobre uma solução apresentada pelo grupo, nas discussões e nos momentos em que foi solicitado aos grupos o ponto da situação dos seus trabalhos. Nestes momentos, a professora assumiu o papel de ouvinte e moderadora, dando espaço aos grupos para se pronunciarem. O trabalho em pequenos grupos persistiu ao longo de todo o projeto e permitiu que os alunos colocassem questões, que discutissem estratégias e soluções, que se ouvissem a si e aos colegas e que argumentassem ou criticassem esses argumentos. Sempre que um grupo chegasse a um impasse, a professora dirigiu-se ao grupo para tentar que fosse ultrapassado, após ter aconselhado a pesquisa. O trabalho individual aconteceu quando os alunos elaboraram os relatórios semanais e o relatório final. Estes foram momentos importantes pois permitiram que a professora se apercebesse das necessidades, dificuldades e interesses dos alunos,

possibilitando-lhe dar um apoio mais direto. Por outro lado, o aluno habituou-se a ser independente e a assumir a sua responsabilidade pessoal no processo de aprendizagem.

A avaliação do trabalho de projeto considerou o empenho de cada grupo nas tarefas realizadas, a capacidade de trabalho e de coordenação que revelaram, os relatórios que realizaram e o produto final apresentado.

Após a finalização do trabalho de projeto e respectiva apresentação ao grupo turma, a sua divulgação foi feita em três momentos distintos: (1) no jornal da escola, através da publicação de uma notícia, que resultou da compilação de vários textos elaborados pelos grupos; (2) apresentação dos trabalhos aos encarregados de educação; (3) apresentação dos trabalhos dos alunos à Sra. Engenheira da Câmara de Guimarães, que gentilmente cedeu os mapas sobre os quais os grupos trabalharam. Este momento de divulgação aconteceu apenas no ano lectivo seguinte, já que os alunos acabaram de entrar em período de exames. De referir ainda que esta divulgação foi feita apenas pela professora da disciplina de MACS, visto que os alunos, que agora se encontravam no 12º ano, não tinham disponibilidade de horário para o fazer.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo descrevem-se os procedimentos utilizados que orientaram esta investigação, sendo estruturado pelas seguintes secções: opções metodológicas; participantes; métodos de recolha de dados; e análise de dados.

4.1. Opções metodológicas

Esta investigação analisa o contributo do trabalho de projeto na aprendizagem dos modelos de grafos de alunos de uma turma do 11.º ano de MACS. Para esse fim, seguiu-se uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa ao centrar-se no estudo dos significados que os participantes dão às ações em que se envolveram de modo a aprofundar o conhecimento de um fenómeno num dado contexto (Bogdan & Biklen, 1994; Erickson, 1986). Procurou-se, assim, compreender e interpretar os fenómenos vivenciados na realidade escolar, através da análise das percepções e interpretações dos sujeitos intervenientes na ação educativa, de modo a captar as relações internas entre as ações e as percepções dos sujeitos, de difícil observação direta, tais como as crenças, motivações, intenções. Dá-se assim a conhecer o que é único e específico da experiência de ensino que foi realizada. Para Bogdan e Biklen (1994), uma investigação qualitativa tem como fonte direta dos dados o ambiente natural, no qual o investigador é o instrumento principal da recolha e análise dos dados de acordo com o contexto em que as ações ocorrem.

A natureza interpretativa deste estudo deve-se à pretensão de se centrar a análise no significado que os indivíduos dão aos acontecimentos em que se empenham (Bogdan & Biklen, 1994) e ao interesse pelo “significado humano da vida social e na sua clarificação e exposição por parte do investigador” (Erickson, 1986, p. 119). A atenção que se atribui aos significados das ações dos intervenientes é um dos aspectos que define o carácter interpretativo de uma investigação qualitativa. A descrição dos factos vai além das aparências, apresentando detalhadamente as interações sociais que ocorrem entre os participantes. Porém, uma investigação pode apoiar-se em dados de natureza qualitativa e não ter um cariz interpretativo, bastando para isso que evidencie as perspectivas do investigador ao invés de realçar as dos intervenientes (Erickson, 1986). A abordagem interpretativa deste estudo centra-se no

desempenho que os intervenientes apresentaram ao longo do estudo e na elucidação e exposição da investigadora e professora, a qual não pretendeu impor o seu ponto de vista, mas antes traduzir as suas percepções relativamente às experiências vividas pelos intervenientes no estudo. Os dados, ao serem filtrados pelos seus critérios, são interpretados com alguma subjetividade. A credibilidade das interpretações efectuadas é sustentada pela triangulação dos dados recolhidos através de fontes diversas (Erickson, 1986), pelo envolvimento dos participantes no estudo no processo de análise de dados e pela neutralidade da investigadora no momento dessa análise que possibilita averiguar os seus efeitos nas interpretações a posteriori.

O desenho do estudo segue uma metodologia de estudo de caso, por, como refere Yin (2005), ser apropriado quando se “investiga um fenómeno contemporâneo dentro do seu contexto da vida real; [onde] os limites entre o fenómeno e o contexto não são claramente definidos; (...) baseando-se em várias fontes de evidência” (pp. 32-33). Procura-se assim “conhecer a realidade tal como ela é vista pelos seus diferentes atores” (Ponte, 1994, p. 9). A adequação desta metodologia resulta por se “debruçar deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando-se descobrir o que há nela de essencial e característico” (idem, p. 3). Ao ter como ponto de partida uma situação específica é importante que o investigador se distancie afectiva e intelectualmente, para poder compreender o fenómeno no seu todo. Simultaneamente, deve ter a capacidade de interrogar o que observa, sem se comprometer com os dados que possam surgir (Yin, 2005).

Atendendo à diversidade dos alunos, quanto ao seu desempenho à disciplina de MACS, optou-se por realizar três estudos de caso, sendo cada um deles constituído por um grupo de quatro alunos com diferentes níveis de desempenho, no final do primeiro período, e que residissem maioritariamente na mesma freguesia. Os grupos estudados são denominados por: (i) Grupo de Brito (GB); (ii) Grupo de Sande S. Martinho (GSSM); e (iii) Grupo de Airão Sta. Maria (GASM). No registo de cada um dos estudos de caso seguiu-se um estilo narrativo para, a partir das percepções dos alunos, facultar o conhecimento da forma como se envolveram nas atividades que realizaram e das suas perspectivas sobre a experiência de ensino que vivenciaram.

Atendendo ao duplo papel desempenhado de investigadora e de professora, nem sempre foi fácil delimitar a fronteira entre os dois papéis. Como investigadora, procurei observar o desempenho de cada grupo, a forma como os alunos interagiam uns com os outros e recolher informação que possibilitasse interpretar e compreender as atitudes dos alunos. A intervenção

nos grupos de trabalho foi sempre cuidadosa, acompanhada de uma observação atenta, tentando não desviar os processos dos alunos. Como professora, prestei apoio aos alunos na resolução das tarefas, promoveu a cooperação entre os alunos do mesmo grupo, incentivou a pesquisa, o trabalho autónomo e a participação dos alunos nas atividades de cada aula e negociou com os alunos as regras que serviram de base ao desenvolvimento do trabalho de projeto.

4.2. Participantes

A escola onde decorreu este estudo situa-se no distrito de Braga e recebe alunos das várias freguesias vizinhas. No ano lectivo em que decorreu este estudo, a população estudantil era de 1877 alunos. Como é uma escola secundária com 3.º ciclo, 567 alunos eram do ensino básico e 1310 do ensino secundário. Relativamente ao ensino básico, 405 desses alunos eram do ensino regular, 108 eram alunos dos cursos EFA e 54 dos cursos CEF. Do ensino secundário, 519 alunos frequentaram o ensino regular dos cursos científico-humanístico, 457 o ensino profissional e 334 os cursos EFA.

Tendo em conta as características da população escolar, a oferta educativa/formativa da escola era abrangente e procurava articulá-la com as necessidades das empresas envolvidas, no sentido de proporcionar aos seus alunos uma formação adequada em contexto de trabalho, com probabilidade de saídas profissionais (Projeto Educativo da Escola). Apesar da direção da escola se ter mostrado receptiva à realização deste estudo, o mesmo não aconteceu com a maioria dos professores da turma. Apenas a Professora de Português aceitou participar em duas aulas. As razões apresentadas para a recusa dos outros professores prenderam-se com a falta de tempo, a realização de exames, ou a inadequação dos programas da disciplina com a temática deste estudo.

Das duas turmas da escola que tinham a disciplina de MACS, optou-se pela que apresentava um maior número de alunos. Tratava-se de uma turma com vinte alunos, do curso de Línguas e Humanidades, dos quais cinco eram de sexo masculino e quinze do sexo feminino, com uma média de idades de 17 anos. Dos vinte alunos da turma, apenas dois apresentavam uma retenção no seu percurso escolar. Ao serem questionados sobre as razões de frequentarem este curso, 15 alunos referiram razões relacionadas com a continuação dos estudos na universidade, enquanto que 5 afirmaram que essa opção se deveu ao facto de não gostarem dos outros cursos. Quanto ao seu aproveitamento a Matemática ao longo do seu percurso escolar,

dois alunos consideravam-se bons alunos a esta disciplina, onze alunos classificaram-se como sendo alunos médios e sete alunos referiram que tinham muitas dificuldades. Em relação às estratégias de resolução de problemas, 10 alunos referiram que costumavam ler o problema várias vezes, enquanto que outros 10 alunos, afirmavam recorrer a esquemas ou desenhos. Quanto tinham dificuldades nessa resolução, 18 alunos admitiam que tentavam várias vezes antes de pedir ajuda à professora, no entanto 3 deles, quando sentiam dificuldades, recorriam logo à ajuda da professora. Sobre a utilidade de resolverem situações relacionadas com o dia a dia, 17 alunos admitiram que é muito útil e apresentaram como exemplo, os saldos, enquanto que 3 deles referiram que não viam qualquer utilidade. Em relação à forma de trabalhar nas aulas de Matemática, 7 alunos afirmaram que gostavam de trabalhar em grupo, 4 mostravam preferência pelo trabalho individual, enquanto que 9 responderam que dependia do tipo de trabalho. Fora da sala de aula, todos estes alunos indicaram preferir trabalhar individualmente, porque se conseguiam concentrar melhor. Relativamente aos benefícios de trabalharem em grupos, os alunos apontaram razões relacionadas com a maior facilidade de tirarem dúvidas e verem outras formas e métodos de resolverem problemas. Quanto a desvantagens, os alunos apontaram o excesso de barulho, o mau funcionamento e o fraco empenho de alguns colegas.

Sobre o trabalho de projeto, os alunos foram unânimes em afirmar que já tinham realizado, no 10º ano, um trabalho de projeto sobre estatística. Questionados se gostariam de voltar a fazer um trabalho de projeto a Matemática, 16 responderam que sim, dois responderam que não e dois afirmaram que dependia do projeto. Quanto ao conhecimento do tema de grafos, 12 alunos admitiram nunca ter ouvido tal palavra, enquanto oito afirmaram já ter ouvido a palavra de grafos, mas não sabiam o que é.

Relativamente aos alunos da turma e no que toca à disciplina de MACS, dezasseis alunos referiram que gostavam desta disciplina, enquanto quatro alunos afirmaram não gostar. Independentemente da simpatia que nutriam pela disciplina de MACS, os alunos, com exceção de um deles, mostraram intenção de seguir estudos no ensino superior. O sentido de responsabilidade que a prossecução de estudos requer dos hábitos de trabalho dos alunos tende a não se verificar nesta turma, visto que apenas oito deles costumam estudar regularmente. A maioria dos alunos reconhece que somente estuda na véspera dos testes. Globalmente, a turma apresentava um comportamento irrequieto, falador e muito desconcentrado na maior parte das disciplinas.

Os alunos da turma foram organizados em cinco grupos de quatro elementos e permaneceram assim até ao final do estudo. Apenas um dos grupos perdeu um dos seus elementos por este emigrado para a Suíça. Todos os alunos demonstraram vontade de participar na investigação, razão pela qual a investigadora só seleccionou os grupos que constituem os estudos de caso após o final do ano lectivo. Esta tomada de decisão foi considerada para não se ferirem susceptibilidades dos alunos e para que se mantivessem empenhados e motivados até ao final do estudo, de forma a investigadora poder recolher informação de todos os grupos constituídos. Dos cinco grupos formados, foram seleccionados três deles para a realização dos estudos de caso com base nos seguintes critérios: (i) a área de residência (procurou-se que os alunos fossem provenientes da mesma freguesia); (ii) o valor da média obtida pelos alunos no final do 1.º período; (iii) a pertinência da informação recolhida por cada grupo. Atendendo ao desempenho dos alunos no 1.º período, três dos grupos foram considerados satisfatórios, um grupo foi designado de bom e o outro de fraco desempenho. Destes grupos, foram seleccionados um dos grupos satisfatórios (Grupo de Sande S. Martinho), o grupo bom (Grupo de Brito) e o grupo fraco (Grupo Airão Sta. Maria).

4.3. Métodos de recolha de dados

Numa investigação qualitativa, o investigador precisa, tal como referem Bogdan e Bicklen (1994), não só de “saber trabalhar e recolher os dados, como também ter uma boa ideia sobre o que os dados são” (p. 145). Porém, a forma como os dados são recolhidos determina a tradução dos significados que os intervenientes no estudo dão às ações em que se envolvem. Importa usar uma diversidade de técnicas de recolha de dados para obter informação que se relacione com as questões de investigação, competindo ao investigador a sua adequação ao objectivo que pretende atingir a cada momento. Com esta finalidade, recorreu-se neste estudo a diferentes técnicas de recolha de dados: questionário, observação, entrevista e análise documental. Estas técnicas são, segundo Yin (2005) e Tuckman (2000), adequadas num estudo de caso. A recolha de dados foi efectuada em três momentos distintos: (i) antes da experiência de ensino; (ii) durante a experiência de ensino; e (iii) após a finalização da experiência de ensino. Antes da experiência de ensino, os alunos responderam a um questionário para recolher informação sobre a sua relação com a disciplina de Matemática e sobre a forma como costumam trabalhar na e para esta disciplina. Durante a experiência de ensino, foram recolhidos diversos documentos escritos pelos alunos relativos: (i) às atividades que realizaram relativas à

resolução de problemas propostos; (ii) aos relatórios que elaboraram semanalmente sobre o trabalho desenvolvido; e (iii) a um relatório final sobre o trabalho de projeto desenvolvido. Também se recolheram informações com recurso a gravações de aulas, num registo áudio, que posteriormente foram transcritas, e através da recolha de notas de campo. Após a finalização da experiência de ensino foi realizada uma entrevista aos alunos de todos os grupos. Esta ocorreu depois de a professora ter atribuído a classificação aos alunos e após a finalização das aulas. Procurou-se deste modo uma recolha de informação o mais isenta possível e libertar os alunos de quaisquer condicionalismos que pudessem afectar a descrição das suas perspectivas sobre a experiência de ensino desenvolvida.

4.3.1. Questionário

O questionário é, segundo Rojas (2001), um método adequado para a recolha de informação referente a vários indivíduos, num curto espaço de tempo. Porém, o autor considera que a liberdade dada a esses indivíduos para realizarem a sua interpretação das questões pode constituir uma desvantagem. As questões que constituem um questionário podem ser abertas, fechadas ou mistas, devendo, segundo Rojas (2001), ir ao encontro de um conjunto de variáveis definidas previamente como importantes. Nesta investigação, o questionário utilizado foi estruturado por questões abertas, que, em função dos objectivos do estudo, constituem as três dimensões que o compõem: Parte 1, composta por sete questões, visou recolher as perspectivas dos alunos sobre a disciplina de Matemática e sobre a resolução de problemas; Parte 2, definida por cinco questões, procurou captar as opiniões dos alunos sobre o trabalho de grupo na aula de Matemática; e a Parte 3, formada por cinco questões, tratou de abarcar as perspectivas dos alunos sobre o trabalho de projeto. O questionário utilizado nesta investigação foi validado por alunos do 11.º ano de uma outra turma de MACS e por um especialista da área da Educação Matemática. O teor das respostas dadas pelos alunos e as críticas recebidas fizeram com que algumas das questões fossem reformuladas com o intuito de se tornarem mais claras, tendo ocorrido algumas alterações ao nível da estrutura e do número de questões no sentido deste não ser demasiado extenso.

Enquanto instrumento de recolha de dados, o questionário apresenta como vantagem relativamente a outras técnicas, como por exemplo a entrevista, o menor tempo requerido na recolha de dados (Gall, Gall & Borg, 2003). No caso deste estudo, o questionário permitiu recolher informação para caracterizar a turma sobre os aspectos que estruturam as dimensões

que o compõem, embora não possibilite aprofundar as respostas dadas pelos alunos. Para essa caracterização, o questionário foi respondido anonimamente pelos alunos antes da experiência de ensino. Como a informação recolhida através desta técnica poderia ser usada na elaboração dos estudos de caso, após o final do ano lectivo e no momento da realização da entrevista aos grupos foi perguntado aos alunos se viam algum inconveniente de colocar o seu nome nos respectivos questionários. Todos os alunos aderiram ao que lhes foi solicitado. Esta medida possibilitou que a informação recolhida pelo questionário pudesse ser associada a cada aluno que integrava os estudos de caso.

4.3.2. A observação

Numa investigação qualitativa, a observação permite ao investigador formular a sua própria versão do que está a ocorrer no contexto onde se realiza a ação educativa (Gall et al., 2003). Neste estudo, atendendo ao duplo papel de professora e investigadora, optou-se pela observação participante, o que, segundo Yin (2005), é um método privilegiado de recolha de dados por possibilitar ao investigador a oportunidade de poder participar nas atividades relacionadas com o estudo. Neste caso, como a investigadora era a própria professora foi possível analisar a forma como as aulas decorriam e aperceber-se de algumas situações, que de outro modo não teriam sido detectáveis, como por exemplo, as dificuldades dos alunos ao resolver algumas das tarefas propostas.

A participação da professora foi uma constante ao longo do estudo, já que em diversas ocasiões teve de assumir o papel de orientadora e colaboradora nas atividades dos alunos. Esta participação nem sempre foi fácil, pois as solicitações eram muitas, vindas de diferentes grupos, e era importante que todos os alunos sentissem que tinham alguém a quem poder recorrer. Como referem Bogdan e Bicklen (1994), “a tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode também surgir como particularmente difícil” (p. 172), daí que nem sempre foi possível fazer uma observação intensa do que decorria ao longo das aulas. A par do papel de professora, o papel de investigadora emergiu no questionamento sistemático de modo a compreender as atitudes e capacidades enquanto os alunos resolviam os problemas. As questões colocadas permitiram recolher mais informação e emitir um feedback acerca do trabalho que estes estavam a realizar.

Foram efectuadas gravações áudio em todas as aulas em que a investigação ocorreu. No início ponderou-se recorrer à gravação vídeo, mas tal não foi possível porque alguns

Encarregados de Educação não autorizaram. Com base nas gravações áudio foi feita, posteriormente, a transcrição na íntegra de todas as aulas onde ocorreu a investigação. O cruzamento do teor destas transcrições com os registos que resultaram da observação in loco das atividades dos alunos ajudou a compreender melhor a forma como estes se envolveram em tais atividades. O impacto que a presença do gravador provocou nos alunos apenas foi notado nas primeiras aulas. Ao longo do tempo, os alunos habituaram-se à presença do gravador, não se inibindo de se comportarem normalmente.

O envolvimento do investigador na ação tem vantagens e desvantagens. Uma das vantagens é permitir compreender melhor e com mais detalhe certas situações do fenómeno em estudo. Uma das desvantagens resulta do duplo papel que a investigadora desempenhou. Por mais que tente distanciar-se do fenómeno em estudo, não se torna fácil manter-se neutral na sua observação, visto que os seus próprios sentimentos e experiências estarão presentes nas suas próprias interpretações (Gall et al., 2003). Porém, como defendem estes autores, as vantagens deste tipo de observação excedem os pontos fracos no estudo da maioria dos problemas educacionais. A observação é um suplemento valioso de outros métodos de recolha de dados.

4.3.3. Entrevista

Num estudo qualitativo, a entrevista, ao “recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134), é geralmente utilizada em conjunto com outras técnicas de recolha de dados com o intuito de evitar possíveis enviesamentos da informação recolhida. No duplo papel que desempenhava, a investigadora conhecia os participantes do estudo, o que, segundo estes autores, fez com que a entrevista seguisse um formato de “uma conversa entre amigos” (idem). Neste caso, como referem Bogdan e Biklen (1994), não é conveniente “separar a entrevista das outras atividades de investigação” (p. 134). Para estes autores, num estudo qualitativo as entrevistas podem ser feitas individualmente ou em grupo. Neste estudo, optou-se por entrevistas em grupo porque “podem ser úteis para transportar o entrevistador para o mundo dos sujeitos” (idem, p. 138) e permitem a interação entre os entrevistados, sendo assim possível obter-se diferentes perspectivas sobre o mesmo fenómeno.

O grau de estruturação de uma entrevista pode ser, segundo Bogdan e Biklen (1994), aberto ou fechado. Numa entrevista aberta, o entrevistado fala livremente sobre um determinado tópico. Numa entrevista fechada, o assunto é controlado pelo entrevistador de uma forma rígida,

o que, segundo os autores, não permite recolher as formas de pensar de cada um. Entre estes dois tipos de entrevista existe a entrevista semiestruturada (Anexo 11), que foi adoptada neste estudo por se pretender que os alunos falassem livremente sobre a experiência realizada e que o rumo da 'conversa' fosse determinado pelas respostas, expressões e hesitações dos alunos. Com a entrevista procurou-se obter as percepções dos alunos sobre a experiência de ensino que foi realizada na aprendizagem de grafos.

As entrevistas foram realizadas numa sala de aula da escola após a professora ter atribuído as classificações aos alunos e depois do final das aulas. Ocorreram em dois dias diferentes de forma a conciliar a disponibilidade dos alunos no seu estudo para os exames do 11.º ano. Foram entrevistados os cinco grupos, pois todos os alunos manifestaram vontade de serem entrevistados. As entrevistas foram realizadas e transcritas pela investigadora.

4.3.4. Análise Documental

Fazem parte da análise documental deste estudo os documentos do projeto educativo da Escola, a ficha de síntese de caracterização da turma, as fichas biográficas dos alunos e as notas de campo da investigadora. Estes documentos permitiram efetuar uma recolha de informação sobre a oferta educativa da escola, a educação escolar dos encarregados de educação e sobre dados relativos aos alunos. Para Yin (2005), a informação que se obtém através da análise de documentos é: (1) estável, por poder ser observada diversas vezes e não se alterar; (2) exata, por estar associada a nomes, datas e outros detalhes de um dado acontecimento; (3) ampla cobertura, por poder decorrer num longo período de tempo e abranger uma diversidade de acontecimentos. Para além destes documentos, foram também analisados os seguintes: os registos escritos dos alunos; os relatórios que os alunos elaboraram semanalmente e na fase final do trabalho de projeto; as transcrições das aulas áudio gravadas; e as notas de campo efectuadas pela investigadora sob a forma de reflexões, comentários ou intervenções dos alunos em situações informais. Os documentos recolhidos foram codificados da seguinte forma (Tabela 2):

Tabela 2: Codificação dos métodos utilizados na recolha de dados

Instrumentos	Codificação
Questionário	(Q)
Registos escritos pelos alunos	(RE, Data)
Gravações áudio de aulas	(GA, Data)
Relatório Semanal	(Nome, RS, Data)
Relatório Final	(Nome, RF)
Entrevista	(E)
Notas de Campo	(NC, Data)

Os registos escritos pelos alunos resultam das atividades que realizaram nas aulas e são designadas por RE e pela data em que ocorreram. Estes registos foram analisados conjuntamente com as transcrições e as notas de campo, o que permitiram à investigadora uma melhor compreensão dos processos utilizados pelos alunos na resolução das tarefas propostas. As notas de campo registadas ao longo do estudo, designadas por NC e pela respectiva data, permitiram complementar a informação recolhida, cruzando-a com os dados obtidos por outras fontes. Esta técnica de recolha de dados permitiu registar informação sobre as atividades realizadas pelos alunos, nomeadamente os processos e estratégias utilizados e as dificuldades sentidas. Durante a aula registaram-se notas de campo com o intuito de se efetuar, posteriormente, uma análise descritiva sobre o que mais significativo aconteceu. Na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), estes registos constituem um importante instrumento de recolha de dados num estudo de caso, sendo que as observações realizadas ao longo das 25 aulas em que decorreu o estudo transformaram-se no “relato escrito daquilo que o investigador ouviu, viu, experienciou e pensou no decurso da recolha” (p. 136). Porém, estas atividades nem sempre se tornam fáceis de concretizar quando o investigador intervém na ação.

Semanalmente, à sexta-feira, os alunos elaboraram individualmente relatórios sobre as atividades desenvolvidas ao longo da semana, indicados por RS e pela data da sua origem, as aprendizagens realizadas e as dúvidas sentidas. Tratou-se de uma breve reflexão sobre o que decorreu durante essa semana de trabalho. No final do projeto, todos os alunos realizaram um outro relatório individual (RF) sobre o trabalho de projeto desenvolvido e o contributo deste método na sua aprendizagem de grafos. Contrariamente ao que é defendido por Many e Guimarães (2006), a opção pela realização de relatórios individuais deveu-se, por um lado, ao

cumprimento dos critérios de avaliação das aprendizagens dos alunos definidos pelo Conselho Pedagógico da Escola — foi estipulado que a avaliação dos alunos contemplasse testes e trabalhos individuais e de grupo; como o estudo se desenvolveu basicamente no 3.º período não havia outras opções a tomar. Por outro lado, tal opção também se deveu à necessidade da professora monitorizar o desempenho dos alunos nas atividades desenvolvidas.

4.4. Análise de dados

Considerando a natureza qualitativa do estudo e o seu carácter interpretativo, procurou-se dar significado aos dados recolhidos. Bogdan e Biklen (1994) consideram que a análise dos dados é a atividade que o investigador realiza na procura, organização e no tratamento dos dados de modo a dar sentido à informação que incorpora os diferentes documentos acumulados ao longo do estudo, de modo a obter conhecimento e de a tornar compreensível aos outros. A organização dos dados efetuou-se durante a experiência de ensino através da reunião da informação proveniente das diferentes fontes dos dados. Após o final dessa experiência, a informação foi reorganizada cronologicamente segundo cada um dos grupos que constituem os estudos de caso. Efetuou-se uma primeira leitura de toda a documentação para “examinar, categorizar, classificar (...) recombina evidências (...) para tratar as proposições iniciais” (Yin, 2005, p. 137). Esta leitura permitiu fragmentar a informação em torno de temas que permitiram, numa primeira instância, organizá-la e sistematizá-la mediante as seguintes categorias: (i) estratégias utilizadas pelos diferentes grupos na realização dos problemas complementares; (ii) aprendizagem e aplicação dos conceitos relativos aos grafos; (iii) interações entre os alunos.

Seguindo estas categorias, começou-se por desenvolver o estudo de caso do Grupo Brito com base na informação mais significativa em relação às questões que orientam este estudo. Posteriormente, elaborou-se o estudo de caso do Grupo de Sande S. Martinho. Como a informação recolhida destes dois grupos não apresentava regularidades quanto às categorias de análise dos dados estipulados, numa análise mais refinada dos dados e em conjugação com as questões do estudo emergiram as categorias que estruturam o desenvolvimento dos três casos: (i) Realização do trabalho de projeto; (ii) Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem dos grafos; e (iii) Avaliação do trabalho de projeto pelos alunos.

A análise dos dados, em cada um dos estudos de caso, integra as citações das palavras dos participantes, com a preocupação de não alterar o significado que os intervenientes dão às

acções em que se envolveram, o que permite ao leitor ‘vivenciar’ a sequência dos acontecimentos e confrontar as inferências que retira com as que são apresentadas pela investigadora (Gall et al., 2003). A opção pelo registo descritivo de cada um dos casos deve-se por a investigadora se interessar mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos obtidos, procurando assim analisar os dados de uma forma indutiva, na qual “as abstrações são construídas à medida que os dados particulares recolhidos se vão agrupando” (p. 50).

Após a elaboração dos estudos de caso e da transcrição das entrevistas, a investigadora enviou-os aos alunos de cada um dos grupos, para que estes se pudessem pronunciar. Após a leitura dos respectivos casos, os alunos alertaram para a existência de algumas trocas de falas entre os elementos do seu grupo e reconheceram que se reviam na informação apresentada, como exemplifica a referência que Tatiana faz sobre o estudo de caso do seu grupo:

Os documentos que me enviou apanharam a essência do trabalho, lembro-me bem de nós fazer e dizer aquilo, tais como as dificuldades que tivemos. Penso que o trabalho que a professora realizou mostra bem os momentos por aquilo que o meu grupo passou. Não tenho nada a dizer, estou de acordo com aquilo que escreveu pois de facto foi o que se passou de verdade.

As sugestões apontadas pelos alunos foram atendidas e rectificadas nos respectivos documentos. Interessa também referir que para o tratamento e análise das informações obtidas através do questionário, dos documentos elaborados pelos alunos, das gravações áudio e das entrevistas, procedeu-se à alteração dos nomes dos alunos.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DE CASO DO GRUPO BRITO

O grupo Brito (GB) é constituído por quatro alunos do 11.º ano de escolaridade de uma escola secundária do distrito de Braga, dos quais três são meninas — Rosa, Adélia e Teresa — e um é rapaz — Carlos, que nunca tiveram qualquer retenção ao longo do seu percurso escolar. São alunos provenientes de agregados familiares cujos pais têm estudos do ensino básico e do secundário: os pais da Rosa, da Adélia e do Carlos têm o 10.º ano e o pai da Teresa tem o 9.º ano; as mães da Teresa e do Carlos têm o 7.º ano, enquanto a mãe da Rosa tem o 10.º ano e a da Adélia tem o 9.º ano. Com exceção do Carlos, a Rosa, a Teresa e a Adélia pretendem seguir os seus estudos universitários. Esta opção parece refletir a classificação que cada um dos alunos obteve antes do início deste estudo: o Carlos teve 10 valores; a Adélia 13 valores; a Teresa 14 valores; e a Rosa 18 valores.

A Rosa é uma aluna que revela boa capacidade de argumentação e é bastante organizada. Aprecia a disciplina de Matemática porque “sempre gostei de Matemática e costumo obter bons resultados” (Q). Estuda assiduamente e gosta de ler, ver televisão e ouvir música. Não gosta de trabalhar em grupo porque julga que “individualmente consigo concentrar-me melhor, na medida em que não me distraio com ninguém” (Q), embora reconheça que o trabalho de grupo possui algumas vantagens, tais como a possibilidade de “poder tirar dúvidas com os colegas de grupo e ajudar um colega com mais dificuldades” (Q).

A Teresa também manifesta apreço pela disciplina de Matemática, quando afirma que “sempre gostei de Matemática; sou razoável mas podia ser melhor se não fosse tão preguiçosa” (Q). Tem por hábito estudar antes dos testes e não gosta de ler, apesar de ser uma aluna com alguma capacidade de argumentação e organização. Não gosta de trabalhar em grupo porque acha que “sozinha concentro-me mais e consigo perceber onde tenho dúvidas” (Q), mas aponta vantagens de trabalhar em grupo, tais como “tirar dúvidas com alguém, ajudar alguém, discutir ideias e comparar resultados” (Q).

A Adélia é uma aluna que indicia gostar de Matemática, quando assegura que “nunca tive nenhuma negativa a Matemática, acho que tive um desempenho positivo” (Q). Costuma estudar antes dos testes, gosta de ler e o seu passatempo preferido é ouvir música e ver televisão. Possui uma boa capacidade de argumentação, mas é pouco organizada. Não gosta de

trabalhar em grupo, embora refira que “é a única forma que tenho de me dedicar ao trabalho e estudo (...) e permite aos alunos tirarem dúvidas uns com os outros” (Q).

Finalmente, o Carlos afirma que “sempre fui razoável, tirando o 9.º ano, onde piorei talvez devido à maior dificuldade da matéria” (Q). Estuda somente antes dos testes, não gosta de ler e apresenta alguma dificuldade de expressão e organização. Aprecia trabalhar em grupo porque defende que “se fizer individualmente não tenho ninguém para me ajudar, se fizer em grupo sempre posso ajudar alguém e ao mesmo tempo ser ajudado” (Q). Aponta como vantagem de trabalhar em grupo a “maior facilidade nalgumas resoluções e a maior interação entre os alunos” (Q).

5.1. Realização do trabalho de projeto

Fase 1: Definição do tema

No início do estudo do tema de grafos, os alunos do grupo GB foram informados que iriam aprender os tópicos deste tema com base num trabalho de projeto. A reacção dos alunos deste grupo foi de relacionar este método de trabalho com os trabalhos de grupo que realizaram anteriormente:

Prof.: Vamos realizar um trabalho de Projeto onde vai ser abordada a temática dos grafos. Irá durar todo o período que nos falta até ao final do ano e procurará abordar uma temática que seja possível trabalhar através dos grafos e que vos desperte algum interesse.

Rosa: Professora, vamos escolher o tema?

Prof.: Sim.

Carlos: Vai ser do tipo que já fizemos?

Prof.: Bom, isso vamos já ver.

Teresa: Vamos fazer inquéritos?

Prof.: Penso que talvez não seja necessário. Mas gostaria que me dessem ideias de temas que gostassem de trabalhar.

Rosa: Eu gostava de estudar o mercado de trabalho na nossa zona.

Prof.: Como assim?

Rosa: Ver as saídas dos cursos na nossa zona.

Teresa: Eu gostava de estudar a poluição e formas de tratamento ou então ver por exemplo, quantos freguesias é que ainda não têm uma rede de esgotos completa!

Adélia: O tipo de drogas que os jovens consomem.

Carlos: Sim, era interessante. (GA, 18-03-2010)

Das várias sugestões apresentadas pelos alunos, nenhuma se adequava para a temática dos grafos. Como não surgiram temas que se adaptassem ao estudo de grafos, a professora questionou os alunos se tinham conhecimento da campanha que estava a ser publicitada nos meios de comunicação social sobre “Limpar Portugal”. Para ilustrar a importância deste tema em termos políticos e sociais, a professora propôs a leitura de um texto, cujo teor foi discutido no grupo turma:

Rosa: Agora vamos limpar isto, mas daqui a algum tempo a mentalidade dos Portugueses é a mesma e vai ficar tudo sujo na mesma. Havia de haver alguma medida que contrariasse isso. Por exemplo, quando eu fui à minha tia [Suíça], lá o Estado compra o lixo e aquilo não é muito barato e lá cada pessoa só tem direito a x sacos de lixo. Os homens do lixo só aceitam aqueles x sacos de lixo para as pessoas fazerem menos lixo, o resto as pessoas têm de reciclar. (...) Lá, cada casa tem de comprar os seus próprios sacos do lixo, mas depois o estado paga-lhes. São 10 por Mês. Aqui não, cada casa põe os que quer.

Prof.: Ou seja, têm de fazer uma boa gestão.

Rosa: Exacto, só aquilo que for mesmo necessário é que vai para o lixo.

Carlos: Mas alguém tem de dar um passo.

Rosa: Ó stora, depois as pessoas pensam. O ambiente enquanto eu viver ele não vai provocar nada, antes de eu morrer, ele não me vai prejudicar, então para que é que eu vou estar aí a...

Prof.: As pessoas não pensam mas perante aquilo que eu estou a ver parece que há entidades que estão a tentar preocupar-se em pensar. Por exemplo, porque será que entre os apoiantes [do movimento limpar Portugal] estão à frente das câmaras e das juntas? Porque será?

Rosa: São as entidades que se preocupam em promover um desenvolvimento sustentável para aquela região.

Prof.: E porque é que elas se preocupam?

Rosa: Porque futuramente vão ter lá habitantes.

Prof.: Quem é que normalmente na zona onde reside faz a recolha de lixo?

Carlos: Por acaso é a câmara.

Rosa: A junta não tem de limpar, se está dentro da propriedade o dono é que tem de limpar.

Prof.: Qualquer tipo de lixo?

Teresa: Sim aí cada um tem de limpar.

Prof.: Mas se o lixo está na rua, não sou eu que teoricamente tenho de fazer essa tarefa. Porque será que se a junta e a câmara têm todo o interesse em agradar aos seus eleitores, porque será que não o fazem assiduamente?

Rosa: Porque não há financiamento, não há organização.

Teresa: Pois, e é por isso, por não haver dinheiro, que também algumas freguesias depois do século XX, continuam a mandar os esgotos para a rua!

Prof.: Eu acho que estão a ser ditas duas coisas interessantes, (..) para se limpar (..) gasta-se dinheiro e é preciso uma boa gestão! (GA, 18-03-2010)

Os elementos do GB revelaram interesse sobre a temática da recolha do lixo, sobre a qual reconhecem que merece a devida atenção por parte da sociedade actual. Manifestam a preocupação de que é importante a forma como é efectuada a recolha e a reciclagem do lixo nas localidades em que vivem, ao mesmo tempo que realizam comparações entre as nossas práticas de cidadania e as práticas de outros países. Os argumentos que apresentam revelam sensibilidade para o papel que as pessoas e as entidades locais desempenham no tratamento do lixo. Os alunos apercebem-se que a recolha do lixo implica gastos monetários, sendo por isso importante a existência de uma boa gestão dos meios existentes.

Agradada pelo interesse dos alunos na discussão, a professora propôs que pesquisassem na Internet vídeos sobre este tema. Dos vários encontrados propôs a visualização de três, que pareceram ter informação pertinente:

Rosa: Eu acho que as pessoas têm de pensar no que está a passar-se no planeta, o aquecimento global, o excesso de lixo não chega fazer campanhas, as pessoas têm de mudar.

Carlos: Mas isso não é assim tão fácil. Basta ver os nossos hábitos. Muitas vezes nem separamos o lixo, tipo, ó os homens do lixo depois separam.

Adélia: Pois é por isso que estamos assim.

Teresa: É é fácil dizer. Não viste aquela notícia onde disseram que colocaram lixo tóxico aqui em Portugal e que pagaram não sei quanto à empresa que fez isso? O que interessa é o dinheiro. Os ricos pagam aos pobres para ficar com o lixo.

Rosa: Isso não é nada, esse é o problema. Quem tem dinheiro, só pensa em ganhar mais dinheiro, mesmo que destrua a natureza. (GA, 18-03-2010)

Dos alunos deste grupo, a Rosa, estava tão envolvida que no final da aula sugeriu que “temos de continuar o debate na próxima aula” (NC, 18-03-2010). O debate de ideias sobre o artigo e os vídeos retirados da Internet fizeram com que “os alunos se sentissem entusiasmados e todos quisessem expor as suas opiniões” (NC, 22-03-2010).

Fase 2: Criação do problema

Após a definição do tema, os elementos do GB começaram a formular o problema, com base num mapa da freguesia que ficaram de trabalhar (Brito), promotor do seu trabalho de projeto:

Rosa: Vamos criar um problema. Qual é que é o nosso problema?

Teresa: É se o camião passa, por exemplo, mais que uma vez na mesma rua.

Carlos: Eu acho é que isso vai se um trabalhão, vai ser muito complicado.

Rosa: É assim, não se esqueçam que nós vamos criar um problema que vamos trabalhar e vamos se calhar trabalhá-lo até ao fim, portanto temos de pensar bem no problema que vamos pôr. Olha, pomos este, para gastar o menos tempo possível será rentável passar pela mesma rua duas vezes?

Teresa: O quê?

Rosa: Por exemplo, ele vai aqui e quer voltar para aqui, será que ele pode vir assim ou é melhor assim?

Teresa: Pode ser, ou então temos uma ideia nova, criamos o nosso problema, por exemplo...

Adélia: Não, eu acho que devemos seguir.

Teresa: Ou então fixamos dois pontos e a partir desses dois pontos vimos qual é o trajeto a partir desses dois pontos. Por exemplo, tínhamos de saber de onde saem os camiões.

Rosa: Pois temos, mas não sabemos. Olha este, será que há uma obrigação de entrar e sair pela mesma rua? É sobre a recolha do lixo, fazemos este problema?

Adélia: Por exemplo, se eles entrarem no ponto A e se saírem no ponto A, será que fica mais rentável do que sair no B?

Rosa: Pronto, perguntamos isso? Queres que eu escreva? (GA, 25-03-2010)

Os alunos tentam perceber o tipo de problema que devem formular tendo por base as indicações dadas pela professora que emergiram do debate na turma, o mapa e os exemplos do manual escolar. Mostram sentido de responsabilidade da atividade que têm de desenvolver e debatem as suas ideias sobre o melhor trajeto a realizar pelo camião na recolha do lixo, o que dá origem à primeira formulação do problema pelos alunos do GB:

- Será que há complementariedade entre as diferentes freguesias na medida em que o camião do lixo, recolhe no mesmo percurso, resíduos de diferentes regiões?
 - Será que há uma preocupação em não passar na mesma rua mais do que uma vez?
 - Será que há uma obrigação de sair e entrar pela mesma rua na recolha do lixo?
 - Para gastar o menos tempo possível, será rentável passar pela mesma rua duas vezes?

Figura 2: Primeira formulação do problema pelos alunos do GB

Os alunos não se apercebem que algumas das questões que formularam não são passíveis de obter resposta. Um exemplo disso é a complementaridade entre as diferentes freguesias, pois os dados conhecidos não permitem saber quais as freguesias onde é efectuada a recolha por um ou vários camiões, nem a sequência de freguesias que o mesmo camião efetua no percurso de recolha do lixo. Por outro lado, exceptuando a primeira questão, as questões colocadas são de resposta curta. Cientes da falta de objectividade das suas questões, os alunos do GB procuram identificar os elementos do mapa que lhes permita escrever um problema que possa ser validado na apresentação que têm de fazer à turma:

Rosa: O presidente da junta de freguesia pretende saber se há uma obrigação de sair e entrar pela mesma rua, saber se existe e se há efetivamente...

Adélia: Ui Jesus!

Rosa: Este efetivamente não está aqui a fazer nada mas prontos.

Adélia: Ai está, está.

Rosa: Se a obrigação em sair...

Carlos: Obrigação não, rentabilidade.

Adélia: Ou se eles fazem isso mesmo, ó Rosa não tem nada a ver. Tens a certeza que é sobre o lixo, tens a certeza de que é esse o nosso problema?

Rosa: Então qual é que queres?

Teresa: Ai não sei, tu é que sabes.

Rosa: Ai não sei nada.

Teresa: Não sei, não sei se este problema nos vai levar a algum lado!

Rosa: Olha, o presidente da junta de freguesia de Brito pretende saber se efetivamente há rentabilidade em sair e entrar pela mesma rua.

Carlos: Onde a recolha do lixo foi iniciada.

Adélia: E ou entrar, tirava essa parte, percebeste? Pode ser uma reunião com os presidentes de câmara de todas as freguesias.

Teresa: O presidente da junta de freguesia de Brito pretende saber se há efetivamente uma rentabilidade em sair pelo mesmo local onde a recolha do lixo foi iniciada. Propomos a convocação de uma reunião entre todos os presidentes de junta das freguesias do concelho de Guimarães e o presidente de Câmara. (GA, 25-03-2010)

Os alunos tentam avançar na tarefa, mas continuam indecisos sobre o rumo do problema a elaborar. Ao sentirem alguma indefinição do que estavam a fazer, interpelam a professora para averiguarem o rumo a seguir:

Prof.: Até aqui ainda não fizeram nenhuma pergunta. Mas por exemplo, imaginem que queriam ir para essa reunião com dados concretos. (...) E para isso vão ter de elaborar uma proposta concreta, por exemplo, onde

o camião deverá iniciar e finalizar esse percurso, tendo por objectivo repetir o menor número de ruas?

Rosa: Após estas dúvidas o presidente...

Teresa: Quais dúvidas?

Rosa: Aquelas que tínhamos.

Adélia: Não, não. Tu tens de ir para a reunião com dados concretos. Vamos colocar por questões.

Prof.: Se é um problema da minha freguesia porque é que estão a ir buscar todos [os presidentes]?

Teresa: Porque são todos. (GA, 25-03-2010).

Na criação do problema, os alunos do GB sentiram diversas dificuldades, tais como a sistematização das ideias de todos os elementos do grupo, a percepção do que pretendem fazer e a escrita das questões do problema. Após solicitarem novamente a ajuda da professora, os alunos reformulam o enunciado do problema:

Rosa: O presidente da freguesia de Brito pretende reunir-se com o presidente de Câmara para lhe apresentar uma proposta de recolha de lixo na sua freguesia. Admitindo que a recolha se inicia e finaliza no ponto A e que em cada rua que passa o camião recolhe o lixo dos dois lados da rua, que percurso poderá ele apresentar? E se a recolha se iniciar em A e finalizar em B, que percurso poderá ele apresentar? Agora pomos, há uma reunião com todos os presidentes de freguesia do concelho para debater todos os assuntos relacionados com esta temática. Esta reunião pretende também esclarecer o presidente da freguesia de Brito e provavelmente todos os outros presidentes das freguesias de Guimarães, se existe uma complementaridade entre as diferentes freguesias, na medida em que há uma rentabilização da distância custo e da distância-tempo. Qual o percurso mais rentável para todos?

Teresa: Não é para todos. É para o presidente da câmara. É ele que vai ver quantos quilómetros.

Rosa: Então, o que querem? Stora.?

Prof.: Eu acho que não conseguem responder a esse problema, mas por exemplo, que tipo de percurso poderá ele fazer querendo sair da freguesia pelo mesmo local onde entrou? (GA, 25-03-2010)

Os alunos continuam a revelar dificuldades na formulação do problema, que se devem ao desconhecimento dos conteúdos de grafos e também por não compreenderem que algumas das questões por eles formuladas não podem ser respondidas somente com base nestes conteúdos. Ao interagirem com as professoras de MACS e de Português, os alunos elaboram o enunciado do problema:

1. O presidente da junta de freguesia de Brito pretende reunir-se com o presidente da câmara de Guimarães para lhe apresentar uma proposta de recolha de lixo na sua freguesia. Admitindo que a recolha de lixo em toda a freguesia é feita por um único camião, que percurso poderá o presidente de junta apresentar, de forma a repetir o menor número de ruas possível e considerando que:
 - 1.1. Inicia e finaliza a recolha no mesmo local?
 - 1.2. Inicia num local e finaliza noutro?
2. Vai realizar-se uma reunião entre o presidente da câmara de Guimarães e os presidentes das juntas de freguesia de Brito, Ronfe, Sande S. Martinho, Vermil e Santa Maria de Airão. Sabendo que o presidente pretende gastar um único dia para reunir com os vários presidentes de junta de freguesia, que percurso poderá ele fazer para efetuar o menor número de km possível?

	Guimarães	Sande S. Martinho	Brito	Ronfe	Vermil	Airão STª.Maria
Guimarães		9.8 Km	6.1 Km	10.3 Km	11 Km	12 Km
Sande S. Martinho	9.8 Km	-----	6.7 Km	10.2 Km	9.2 Km	10.3 Km
Brito	6.1 Km	6.7 Km	-----	9.9 Km	2.6 Km	3.8 Km
Ronfe	10.3 Km	10.2 Km	3.9 Km	-----	1.3 KM	2.1 Km
Vermil	11 Km	9.2 Km	2.6 Km	1.3 KM	-----	1.2 Km
Airão STª.Maria	12 Km	10.3 Km	3.8 Km	2.1 Km	1.2 Km	-----

3. O presidente de junta pretende renovar a rede de esgotos numa certa zona de Brito. Para isso irá pedir apoio ao presidente de Câmara de Guimarães. Como poderá ser feita essa rede de modo a que seja necessário gastar a menor quantidade de tubos possível?

Figura 3: Versão final do problema do trabalho de projeto

Os elementos do GB criaram um problema cujas respostas permitem a utilização dos conteúdos de grafos contemplados na disciplina. Os valores das distâncias que constam da tabela foram obtidos através do Google Maps.

Fase 3: Planeamento do trabalho e problemas complementares

Ao procurarem estabelecer uma estratégia de resolução do problema, os alunos do GB sentem-se constrangidos perante as dificuldades que experimentam na resolução da 1.^a questão do problema devido ao desconhecimento que têm dos conteúdos sobre os grafos:

Carlos: Como vamos fazer isto?
Rosa: Sei lá, mas temos de fazer.
Teresa: Não sei, acho que nunca vamos sair daqui!
Adélia: Ó Rosa, vamos mas é chamar a professora. (GA, 14-04-2010)

Perante as dificuldades demonstradas, a professora propôs a resolução do 1.º problema complementar (Pontes de Königsberg, Anexo 5) com o propósito de introduzir a noção de grafo:

Adélia: Duas pequenas ilhas, quais são as duas pequenas ilhas?
Rosa: É esta e esta. Vamos lá ver o percurso.
Carlos: Espero que a professora nos diga o que fazer, mas pronto...
Rosa: Vamos por este?
Adélia: É capaz de dar.
Teresa: O que é um grafo?
Adélia: É uma imagem. Onde é que estão as duas pequenas ilhas?
Rosa: O quê? Tá aqui uma.
Adélia: E a outra?
Rosa: Não sei. As pontes ligavam duas pequenas ilhas entre si. Está aqui uma e aqui outra.
Adélia: Eu sei, mas aqui não há uma só ponte, há mais.
Rosa: Pronto, mas uma ponte só liga duas. Olhem, esperem aí, ó stora, passear pela cidade, qual, esta?
Prof.: Sim, a questão é assim, será que eu partindo de uma margem e passando por todas estas pontes uma única vez irei conseguir regressar à mesma margem sem repetir pontes?
Rosa: Ó stora, podemos passar assim? Já sei, consegui, consegui!
Adélia: Olha, aqui o objectivo é visitar as ilhas todas.
Rosa: Stora, é obrigatório passar por todas as pontes?
Teresa: Ela não pode fazer isto pois não? Ela não pode avançar isto. Então pronto, olha é impossível.
Adélia: Olha, ela não tem que passar nas pontes todas para visitar as ilhas. (GA, 14-04-2010)

A compreensão do texto do enunciado e do esquema apresentado na figura gerou momentos de incompreensão entre os alunos. Inicialmente, o grupo começou por tentar efetuar uma resolução em conjunto. Ao procurarem explorar todas as possibilidades mudaram de estratégia. Cada elemento do grupo tentou iniciar um percurso num sítio diferente de modo a terem a certeza da inexistência de tal percurso nas condições pedidas:

Rosa: Somos 4, eu começo na A.
Adélia: Mas tu na A podes começar por esta ou por esta ou por esta.
Teresa: Não tem lógica, é pelas pontes. Vamos fazer ponte1, ponte2...
Rosa: Não dá! [Na esperança de ter algum auxílio no livro de texto, abre-o]

Adélia: Olha está aí um igual!

Rosa: Não dá, é de outro problema. A prof não ia pôr uma coisa que não desse. Tem de dar. Vamos tentar outra vez, olha vamos começar em sítios diferentes. Eu começo aqui.

Adélia: E eu começo aqui. (GA, 14-04-2010)

Os alunos partem do pressuposto de que as tarefas sugeridas pela professora têm sempre solução. Após algumas tentativas, começam a relacionar a impossibilidade de resolução devido à inexistência de um número ímpar de pontes – “Se for com as 5 do meio dá, imagina que é com as 5 (...) por isso é que com o ímpar é capaz de não dar” (Adélia, GA, 14-04-2010). Os alunos concluíram que o problema das Pontes de Königsberg não era possível e que tinham de repetir a passagem de uma ponte através do seguinte esquema:

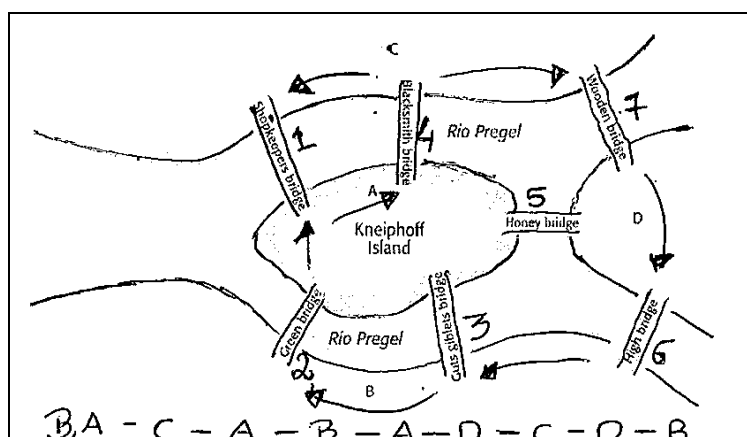


Figura 4: Resolução do 1º problema complementar

O esquema que apresentam sugere um percurso onde se repetem duas pontes. Este grupo revelou alguma organização na forma como assinalaram o percurso efectuado, tentando assim não se perder quando necessitavam de o demonstrar. Apercebem-se que têm sempre de repetir pontes, como exemplifica a afirmação de Rosa: “professora, não dá, repete sempre uma ponte” (GA, 14-04-2010).

A discussão em grupo turma, sobre o esquema apresentado por este grupo, permitiu que a professora introduzisse as noções de grafo, vértice e aresta.

Após a resolução e correção em grupo turma deste problema seguiu-se a resolução de um 2.º problema complementar (Anexo 5), o qual apresentava um mapa relativo ao qual era pedido aos alunos que indicassem percursos, mediante algumas condições. Nesta resolução, os elementos do GB já apresentaram um grafo para tentar responder às várias questões: “grafos, vamos pôr o ponto A, o ponto B, o ponto C, agora do A para B, há uma a ligar. Depois há outra

do C para A" (Rosa). Os elementos do grupo revelam compreensão do que é um grafo e da sua aplicação a esta situação:

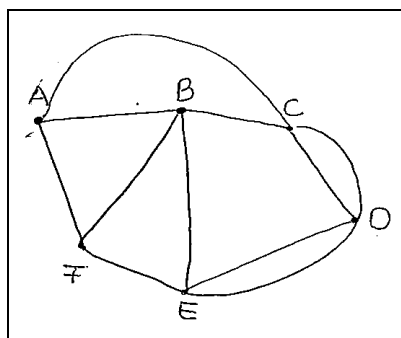


Figura 5: Grafo do 2.º problema complementar

Durante a resolução do 2.º problema complementar, a Adélia e a Teresa revelam dificuldades na interpretação do enunciado e na compreensão do sentido das arestas no contexto do problema:

Rosa: Tu queres passar nas ruas, não nos pontos.

Carlos: Repetes sempre.

Rosa: Olha, assim, por aqui, por aqui.

Carlos: Mas repetes do A ao F.

Adélia: Não percebo, não percebo, isto está mau. Já viste quantas ruas tem? Eu acho que se tiver um número ímpar de arestas vamos ter de repetir sempre.

Rosa: Admitindo que os alunos iniciam a limpeza em A...

Adélia: Ó Rosa espera um bocadinho, deixa-me pensar.

Carlos: Lembra-te quando foi a cena das pontes? Dava ímpar e isto tem de repetir.

Adélia: Indica o melhor percurso. Ele tem de repetir pelo menos duas.

Teresa: AF e FA são ruas diferentes.

Rosa: Não é a mesma coisa.

Carlos: É a mesma rua, mas são direções diferentes.

Rosa: Não são direções diferentes. É a mesma. A sério, vamos tentar.

Carlos: Tem de repetir.

Teresa: Será possível?

Rosa: Eu não sei se vou dizer mal, mas... AB e BF.

Adélia: Rosa duas não, a rua é o que está a ligar dois pontos, não estás a dizer bem.

Teresa: Diz só ABC.

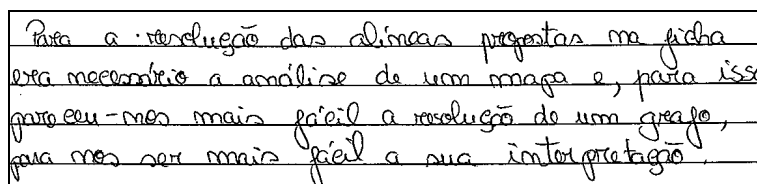
Adélia: Percebes Rosa, vais ter de fazer como estávamos a fazer, porque assim não dá. (GA, 19-04.2010)

O significado das arestas parece não ser claro para todos os elementos do grupo. Carlos associa as conclusões retiradas do 1.º problema a este problema complementar relativamente ao número de pontes ser ímpar, partindo logo do pressuposto de que terá de haver repetição de ruas. A Adélia e a Teresa mostram alguma dificuldade de aplicação dos conceitos apreendidos e revelam um ritmo de trabalho diferente dos restantes colegas de grupo.

As conclusões retiradas a partir do 2.º problema complementar permitiram à professora, conjuntamente com os alunos, introduzir mais conceitos de grafos: ordem e dimensão de um grafo, grau de um vértice, vértice isolado, lacete, arestas paralelas, dígrafo, grafo conexo, grafo completo, grafo regular, grafo K_n , subgrafo, caminho, circuito, caminho e circuito de Euler, condições do teorema de Euler e o processo de eulerização.

Fase 4: Desenvolvimento do trabalho de projeto

O conhecimento de conceitos relativos aos grafos fez com os elementos do grupo GB se apercebessem de que a construção de um grafo os pode ajudar na interpretação do mapa:



Para a resolução das últimas perguntas na ficha era necessário a análise de um mapa e, para isso para eu-mes mais fácil a resolução de um grafo, para me ser mais fácil a sua interpretação.

Figura 6: Utilidade dos grafos na interpretação (Rosa, RS, 26-04-2010)

Porém, como ainda não tinham uma perspectiva global sobre a aplicação dos conceitos dos grafos, os alunos colocaram algumas dúvidas sobre a aplicabilidade dos grafos quer em situações do seu dia a dia quer na realização do problema que ajudaram a formular:

- Para que servem os grafos?
- Como vamos determinar o melhor percurso do carro do lixo?
- Como podemos fazer um grafo a partir deste mapa?
- Onde vamos pôr os vértices?
- Como vamos Eulerizar o grafo?
- Como vamos seleccionar o percurso do Presidente?
- Como vamos medir a distância no mapa?
- Existe algum processo que nos ajude a obter o melhor percurso?

Na procura de respostas para estas dúvidas e da solução para as questões do problema, a atividade dos alunos desenvolveu-se ciclicamente: questão do problema — estratégia —

discussão—solução — questão seguinte do problema. Os alunos consciencializam-se que nem todas as estratégias que desenvolvem lhes permitem dar resposta ao problema:

A primeira questão consistia em saber do mapa onde o camionete percorre para a recolha do lixo iniciando e finalizando no mesmo posto e em pontos diferentes. Apetia-se o menor número de ruas, conhecendo-se por conhecer todos os lugares, ruas e para resolver a questão, inicialmente foram um posto por posto de forma a obter um percurso mas conhecendo-se aperceber que assim estava a ser muito longo pois não tinhamos a certeza se passávamos em todas as ruas e isso causou várias discussões no grupo. A professora deu-nos uma ajuda que foi fazer um grafo do mapa e isso foi grande "chamada" para a resolução da questão. A primeira questão exigiu a utilização de conceitos como grafo de Euler, caminho de Euler, Eulerização e foi baseado nestes conceitos que demos a resposta à questão.

Figura 7: Estratégia utilizada na resolução da 1.ª questão (Carlos, RS,26-04-2010)

Na resposta à 1ª questão do problema, os alunos do GB começaram por elaborar o percurso do camião da recolha do lixo por tentativas sem recorrer a conhecimentos de grafos. Com base nas considerações que a professora fez, constroem o grafo do mapa do grupo e no final apercebem-se da importância do grafo na resolução da primeira questão do problema do trabalho de projeto.

Após a concretização por todos os grupos da 1.ª questão do trabalho de projeto, cada grupo apresentou à turma o trabalho realizado para aferir dificuldades comuns, partilhar diferentes estratégias, desenvolver a argumentação com base na terminologia adequada dos grafos e promover a capacidade de comunicar com clareza os seus processos e resultados. Nesta apresentação intermédia, o grupo GB apresentou num acetato o grafo que traduz o menor percurso do camião repetindo o menor número de ruas na recolha do lixo:

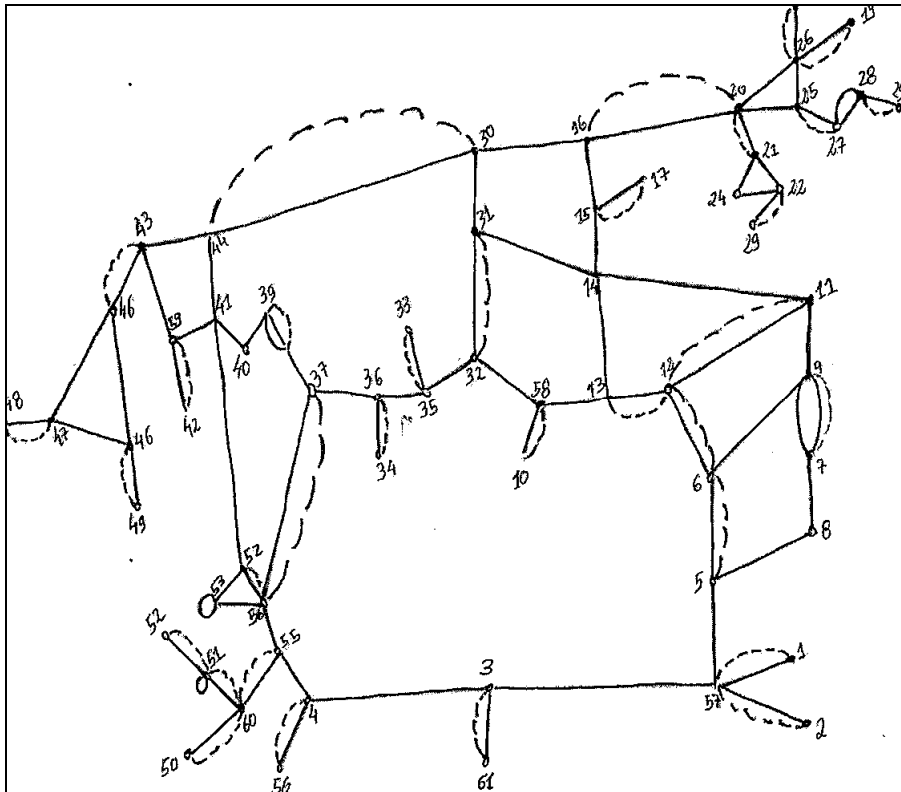


Figura 8: Eulerização do grafo do GB

O grafo que o grupo GB apresenta à turma assinala os vértices nos cruzamentos das ruas e as arestas como sendo as ruas a percorrer pelo camião na recolha do lixo. As arestas a tracejado indicam as ruas onde o camião repete a sua passagem. Para os alunos deste grupo, esta apresentação serviu para os responsabilizar nas atividades a realizar e para compreender melhor os cuidados que devem ter na apresentação final do seu trabalho:

O meu grupo tentou mostrar à turma de forma visível o trabalho e acho que o acetato permitiu ver bem o mesmo percurso, tivemos erros dos quais a falta de um ponto e que foi detetado pela turma, mas apesar de ter sido um erro também deu para ver que a turma conseguiu acompanhar a nossa apresentação, mas tivemos a consciência de que ainda temos de melhorar em vários aspectos na apresentação final.

Figura 9: Análise da apresentação intermédia do grafo do GB (Rosa, RS, 17-05-2010)

As ilações que retiram da sua apresentação servem para os alunos do GB de estímulo para o desenvolvimento do trabalho e de consciencialização de alguns aspectos a melhorarem

na evolução do seu trabalho e na sua apresentação à turma. No uso da linguagem dos grafos, mencionam quase sempre pontos em vez de vértices e revelam dificuldades na interpretação das condições do caminho de Euler, nomeadamente na explicitação que tal caminho deve ter início e fim em dois vértices de grau ímpar:

Prof.: Onde é que começaram o caminho?

Teresa: No dois.

Prof.: Onde o finalizaram?

Grupo: 57.

Prof.: Porquê?

Rosa: Porque assim o decidimos. Não foi nenhuma... foi à sorte.

Prof.: O que diz o Teorema do caminho de Euler?

Rosa: Porque se o caminho não repetir ruas, tem de ter dois, tem de ter o mesmo, não, tem no máximo, dois vértices de grau ímpar. (GA, 05-05-2010)

A estratégia que delinearam para representar o percurso do camião não lhes permitiu responder à questão que a professora lhes colocou. Os alunos hesitam na sua resposta e tiveram de repetir o percurso na totalidade:

Adélia: 32, 58, 10, 58, 13, 12, 6, 5, 6, 9, 6, 12, 11, hum, 12, 12.

Rosa: Repete, vai para cima agora.

Adélia: 13, 14, 31, 32, 31, 30, 44.

Rosa: Por cima.

Rita: Vós passastes ali o 59, 42, 59 e tem o 42
(gerou-se alguma confusão)

Rosa: Ah, não percebi. (GA, 05-05-2010)

No prosseguimento da sua atividade relativa à 2ª questão do problema orientador do seu trabalho de projeto, os alunos precisavam de mais conhecimentos sobre os grafos. Aos poucos, ganham autonomia na procura de informação em outras fontes para além do professor. Uma das fontes que utilizam é o manual escolar:

Teresa: Olha isto [começa a ler no livro de texto], consideremos agora que os vértices são as cidades, os vértices agora são Guimarães, Brito e as arestas são as ligações entre elas. É a mesma coisa, só que agora em vez de ser pontos são as cidades.

Carlos: Os cruzamentos!

Rosa: Agora interessa-nos ir pelo mais rápido. Podemos não fazer isto [passar por uma dada rua], percebes?

- Teresa: Interessa agora o menor percurso. Queremos descobrir o menor percurso a passar por todos os vértices, sem repetir nenhum deles.
- Rosa: Agora são os vértices que não queremos repetir. Um grafo G chama-se Hamiltoniano se admite um circuito passando por todos os vértices, sem repetir. Então ele tem de fazer um circuito a sair de Guimarães
- Teresa: Agora não podes é repetir vértices. Vamos fazer um exemplo. (GA, 10-05-2010)

Com a informação que tiraram da leitura do manual, os alunos do GB identificam os algoritmos que lhes permite responder à segunda questão do seu problema:

Depois da apresentação passamos à resolução da segunda questão. Esta exigia que encontrássemos um circuito que o presidente da câmara de Guimarães pudesse fazer, tendo em conta que ele teria que se encontrar com os presidentes de junta das freguesias de Brito, Ronfe, Sande S. Martinho, Vermil e Airão Santa Maria. Este percurso teria de garantir o menor número de Km possível. Para termos a certeza que isso acontecia, tivemos de investigar qual a melhor maneira de fazer o percurso. Fomos então ao manual e verificamos que a este problema chamámos “problema do caixeiro viajante” e para solucionar este tipo de questões, Hamilton propõe dois algoritmos. São eles o algoritmo da cidade mais próxima e o algoritmo do peso das arestas. Seguimos os passos de ambos os algoritmos para ver o que mais se adequava.

Figura 10: Estratégia utilizada na resolução da 2.ª questão (Carlos, RF)

Identificam os algoritmos da cidade mais próxima e do peso das arestas, cuja aplicação permite aos elementos do GB encontrar um percurso que minimize a distância a percorrer pelo presidente da Câmara às juntas de freguesia:

No algoritmo da cidade mais próxima:

- Começamos em Guimarães e fomos para a freguesia com menor distância a Guimarães. Foi Brito, que apresentava uma distância de 6,1 Km.
- De Brito fomos para Vermil, pois tem uma distância de 2,6 Km.
- De Vermil fomos para Airão, que tinha uma distância entre elas de 1,2.
- De seguida fomos para Ronfe (2,1).
- Prosseguimos para S. S. Martinho, pois, é a freguesia que tem menor distância a Ronfe que ainda não foi visitado.
- De S. S. Martinho acabamos em Guimarães (9,8 Km)

arestas	peso das arestas	
VA	1,2	✓
RV	1,3	✓
RA	2,1	X
VB	2,6	X
AB	3,8	✓
RB	3,9	X
GB	6,1	✓
BS	6,7	X
VS	9,2	X
SG	9,8	✓
SR	10,2	✓
RG	10,3	X
AS	10,3	X
VG	11	X
AG	12	X

Resolução:

- as arestas que têm ✓ são as que completam e fazem o nosso grafo

- As arestas que não utilizamos são assinaladas com X.

Figura 11: Resolução da 2.ª questão do GB, antes da apresentação final

Na elaboração do circuito pretendido, através da aplicação do algoritmo da cidade mais próxima, os alunos do GB procuram ligar uma localidade à que se apresenta mais próxima com o cuidado de não repetir a passagem pelas localidades. Demonstram compreender o funcionamento deste algoritmo e têm a percepção de que não podem regressar ao vértice de partida sem passar por todos os vértices, mesmo que num dado vértice se apresente uma aresta de menor peso. Na aplicação do algoritmo do peso das arestas, os alunos assinalam com um “X” as arestas que não querem considerar por formarem um circuito que não passa por todas as localidades a que estão obrigados, o que demonstra compreensão do procedimento descrito nesse algoritmo.

Depois de responderem à 2.^a questão, os alunos do GB recorrem novamente ao manual escolar para procurarem informação que lhes permita responder à 3.^a questão do seu problema – “elaborar uma rede de esgotos, correspondente a uma zona da freguesia, gastando a menor quantidade de tubo”:

Rosa: Agora não precisamos de passar em todas as ruas?

Teresa: Não, o que queremos é uma rede de saneamento que ligue estes pontos que é onde estão as caixas de saneamento e nos leve a gastar a menor quantidade de tubo.

Carlos: Mas a rede de saneamento tem de ligar todas as ruas.

Adélia: Não, tem de ligar as caixas de saneamento, não é necessário pôr tubos em todas. Podemos encaminhar para uma dada rua.

Teresa: Agora não precisamos de um circuito. Vamos fazer.

Rosa: Não, vamos primeiro ver no livro. Olhem, este exemplo, sete pequenas localidades. [Aluna lê o exemplo]. Eles chamam algoritmo de Kruskal. Como vamos agora medir estas distâncias no mapa?

Carlos: Uma régua.

Adélia: Régua não dá, porque não conseguimos medir estas curvas. E se for com uma corda?

Rosa: Sim, dá para dobrar. (GA, 10-05-2010)

Os elementos do GB indiciam compreender que segundo as condições da questão não é necessário passar por todas as ruas e que podem utilizar o Algoritmo de Kruskal. Após discutirem sobre um processo que lhes permita medir com algum rigor as distâncias assinaladas no mapa, elaboram a sua resposta construindo a árvore abrangente mínima.

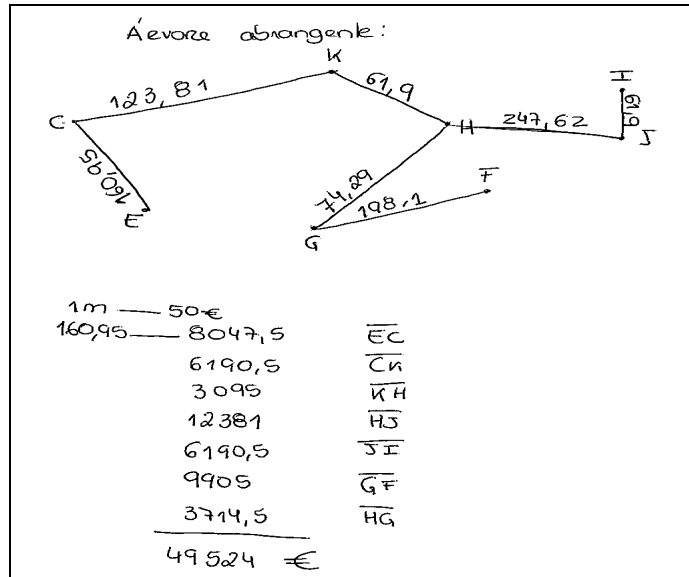


Figura 12: Resolução da 3.^a questão do problema, antes da apresentação final

O grupo associou a cada aresta o respectivo peso, o qual representava a distância entre as várias caixas de saneamento. Apesar de terem ao seu dispor meios informáticos e outros livros, recorrem novamente ao manual escolar por considerarem que “no nosso livro percebemos melhor o que diz” (NC, 10-05-2010). Os alunos do GB aplicaram os conteúdos programáticos dos grafos necessários para responder às várias questões do problema do seu trabalho de projeto e revelaram capacidade de interpretação, de organização, de selecção de informação e de autonomia.

Na preparação da apresentação do trabalho de projeto, os alunos reconhecem que o seu ritmo de trabalho nem sempre foi o mais adequado e que esse facto os obrigou trabalhar fora da sala de aula para organizarem o seu trabalho:

Se soubéssemos que o projecto iria ser tão trabalhoso começávamos, desde início, a estipular prazos para não acontecer o que aconteceu: reunião extra aula. Porém, considero que esta reunião foi produtiva, na medida em que só nos focámos no trabalho e tivemos tempo para perceber o que realmente tínhamos de fazer e como queríamos que este trabalho se desenrolasse.

Utilizámos quase sempre, em todas as questões, o manual pois consideramos que explica bem a matéria e isso foi um bom partido para conseguirmos resolver as questões.

Começámos desde cedo a pensar em como iríamos apresentar o nosso trabalho final pois a professora avisou-nos que a originalidade era um ponto importante.

Figura 13: Reflexão sobre a forma de trabalhar do grupo GB (Adélia, RF)

No desenvolvimento do seu trabalho os alunos ganham sentido de responsabilidade e têm a consciência que nem sempre fizeram uma boa gestão da sua atividade, o que poderá dever-se à falta de experiência de realizarem propostas de trabalho desta natureza. À medida que os elementos do GB sentem que são capazes de responder autonomamente aos desafios que o seu trabalho lhes coloca mostram-se envolvidos nas tarefas que realizam:

O trabalho do projeto está-se a tornar cada vez mais interessante, visto que agora já sabemos como fazer e ultrapassamos as maiores dificuldades

Figura 14: Relato sobre o trabalho de projeto (Rosa, RS, 17-05-2010)

O entusiasmo que sentem parece dever-se ao sentido que o trabalho começa a ganhar como um todo. Algumas das dificuldades inerentes à temática tendem a ser ultrapassadas, o que poderá dever-se à compreensão que desenvolvem dos conceitos de grafos que são necessários para a resolução dos problemas definidos.

Fase 5: Apresentação e divulgação do trabalho de projeto

Na apresentação final do seu trabalho à turma, recorrendo a um PowerPoint, os alunos do GB começam por clarificar a metodologia de apresentação do seu trabalho, que passa pela comparação entre a resolução do seu problema antes e após a aquisição de conhecimentos sobre os grafos:

- Rosa: O nosso trabalho está dividido em três partes, que correspondem às respostas do nosso problema. Vamos apresentar um PowerPoint e em cada slide temos um antes e um depois.
- Adélia: Assim, para responder à nossa primeira questão, o nosso grupo começou por construir um grafo de modo a simplificar a situação. Podemos ver que os vértices representam os cruzamentos e as arestas as ruas onde passa o camião. (GA, 26-05-2010)



Figura 15: Mapa de Brito

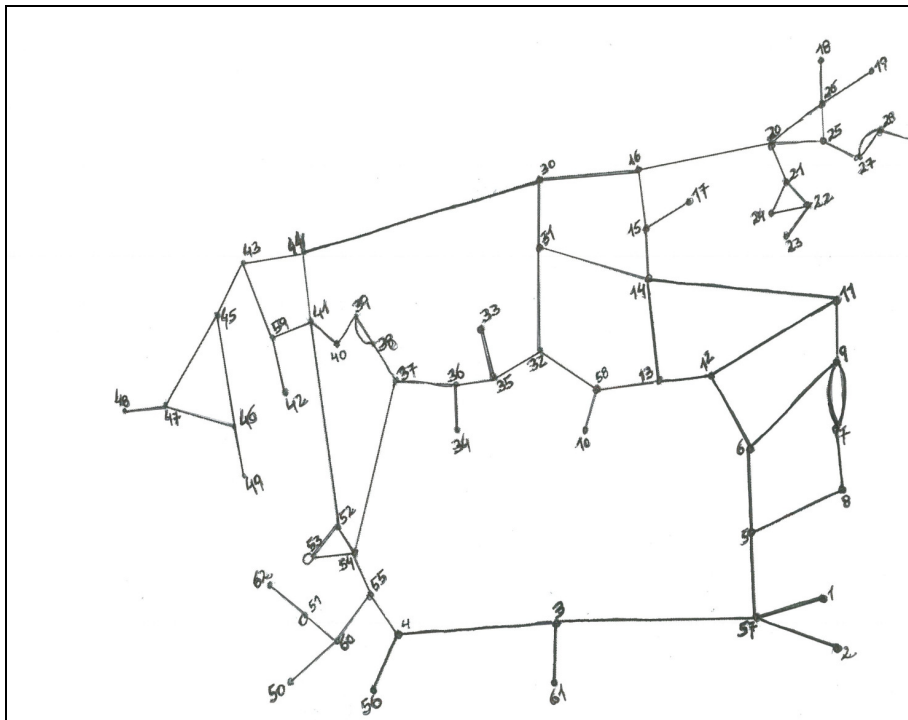


Figura 16: Grafo do mapa de Brito

Teresa: O nosso grafo não é um grafo de Euler, porque possui vértices de grau ímpar. Assim, para encontrar o percurso que repetia o menor número de ruas e que finalizava no mesmo sítio onde iniciava, eulerizamos o grafo, como podem ver, transformando os vértices de grau ímpar em grau par. Assinalámos essas arestas a tracejado como podem verificar.

O nosso circuito iniciou e finalizou no vértice 48. No final contámos e vimos que tínhamos de repetir 33 ruas. (GA, 26-05-2010)

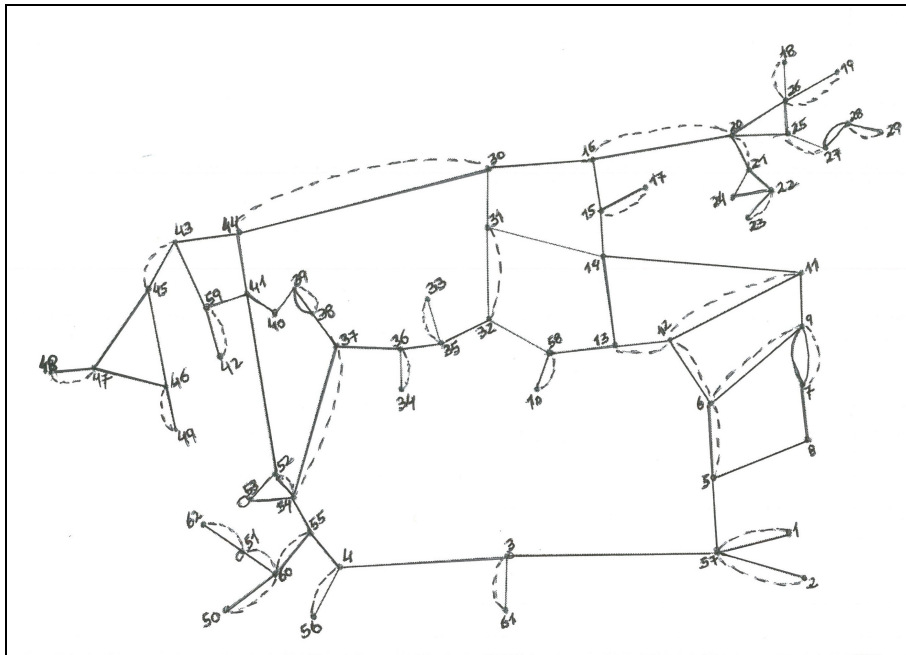


Figura 17: Eulerização do grafo da figura 16

Rosa: Para encontrar o caminho, usámos o teorema do caminho de Euler, que nos diz que podem existir dois vértices de grau ímpar no máximo e que deve iniciar e finalizar nesses vértices. Assim iniciámos em 62 e finalizámos em 23. Neste caso repetimos 31 arestas. (GA, 26-05-2010)

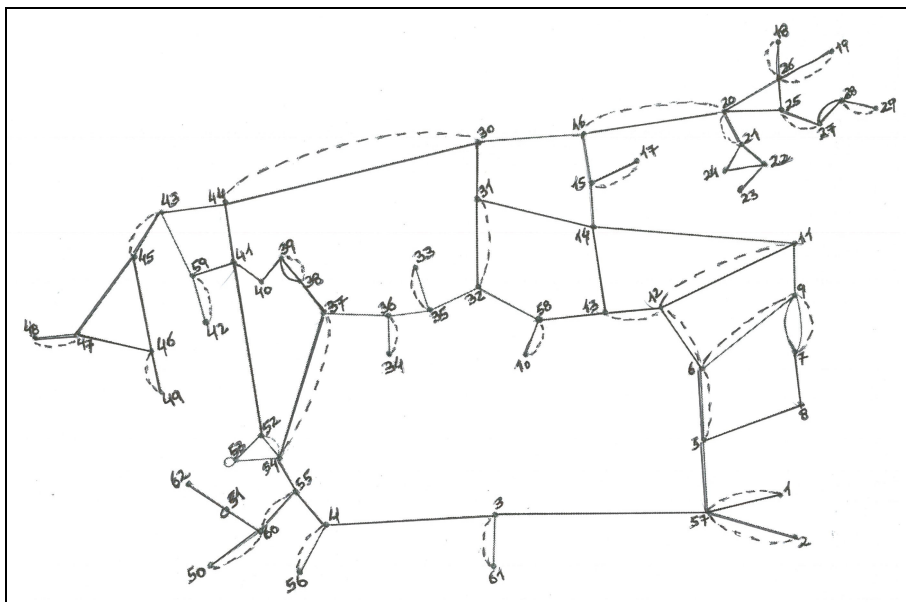


Figura 18: Grafo com dois vértices de grau ímpar relativo ao grafo da figura 16

Adélia: Na resolução da nossa segunda questão, começámos por construir o grafo com as distâncias entre as localidades. Vimos que este grafo se

chamava um grafo ponderado. No nosso caso, o algoritmo da cidade mais próxima deu-nos o melhor percurso para o Presidente de Câmara. (GA, 26-05-2010)

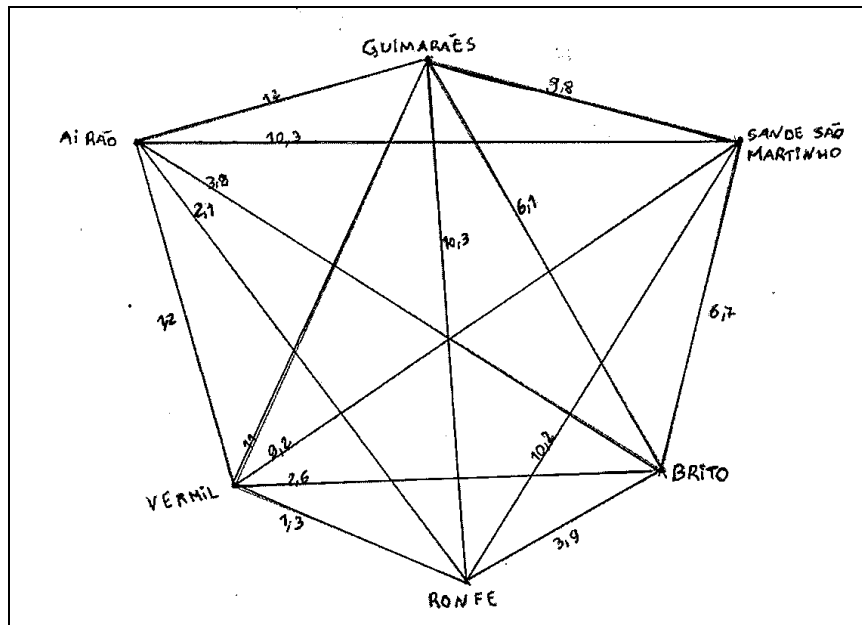


Figura 19: Grafo ponderado da apresentação final

Os elementos do grupo GB elaboram um grafo ponderado, onde cada freguesia é representada por um vértice, as ruas de ligação, por uma aresta e as distâncias entre as várias freguesias estão assinaladas pelo peso das arestas.

Teresa: Para a terceira questão vimos que era preciso construir uma árvore e aplicar o algoritmo de Kruskal. Medimos as distâncias do mapa e depois passámos à escala real. (GA, 26-05-2010)

Para além de darem a conhecer à turma o que fizeram, os alunos tornaram público a realização do seu trabalho através da escrita de um texto, cujas ideias foram integradas num texto final da turma a ser publicado no jornal da escola (Anexo 9).

Este trabalho de projecto surgiu no âmbito da disciplina de MACS com o objectivo de abordar o tema dos grafos. No início, o trabalho não nos despertou muito interesse, no entanto à medida que o tempo foi passando tornou-se cativante. Com efeito, quando conseguimos ultrapassar as nossas dificuldades sentimos-nos mais envolvidos e entusiasmados, visto que percebemos que somos capazes e que o tema da recolha de resíduos não será tão aborrecido do que pensamos.

Concluindo, com este trabalho tão diferente dos que costumamos realizar aprendemos a acreditar em nós e nas nossas capacidades e a não desistir a primeira de um tema que pode vir a ser muito interessante.

Figura 20: Texto escrito pelo G.B para a notícia do jornal

Os alunos manifestam o seu agrado por conseguirem ultrapassar as dificuldades inerentes à realização deste trabalho e emerge das suas impressões um sentimento de orgulho pelo trabalho que realizaram. A divulgação do trabalho foi também efectuada através de uma apresentação realizada pelos alunos aos seus Encarregados de Educação, o que contribuiu para reforçar o sentimento de que este trabalho foi diferente de outros já realizados, como refere a Adélia: "nunca antes tinha feito tal coisa mas foi bom" (E).

5.2. Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem de grafos

Início da realização do trabalho de projeto. No início do estudo dos grafos, os alunos do grupo GB tendem a traduzir o trabalho de projeto, com base nas experiências que desenvolveram ao longo do seu percurso escolar, como um trabalho de grupo que lhes permite conciliar a componente lúdica com a classificação que podem obter, como exemplificam as afirmações do Carlos e da Adélia:

Torna a matéria mais lúdica para os alunos e como tal pode haver mais contentamento e mais diversão para os alunos, mas sem nunca esquecer a aprendizagem. (Carlos, Q).

Se for bem organizado, para além de desenvolver certas competências, ajuda a subir a nota. (Adélia, Q).

Para os alunos do grupo GB, a realização de um trabalho de projeto "realiza-se dentro e fora da sala de aula" (Carlos, Q), resulta de "um plano de tarefas e estratégias de execução de trabalho que demora muito a realizar" (Teresa, Q) e termina com as "conclusões depois de realizado" (Rosa, Q). Ao ser desenvolvido em grupo, Rosa exprime a sua preocupação por "nem todas as pessoas do grupo colaboram" (Q).

Durante a realização do trabalho de projeto. Ao longo do estudo dos grafos os alunos desenvolveram as seguintes atividades: (1) criação de regras sobre o trabalho de grupo e a interação do grupo com a turma; (2) elaboração do problema promotor do trabalho de projeto; e (3) resolução de problemas complementares e de exercícios relacionados com a aprendizagem dos grafos. Relativamente ao cumprimento das regras estipuladas no início do estudo de grafos, este grupo manifestou preocupar-se com a forma como lidavam com as dúvidas que iam surgindo, que, como refere Rosa, "procurávamos resolvê-las dentro do grupo, mas se tal não fosse esclarecida perguntávamos à professora" (RS, 19-04-2010). Para esta aluna, algumas das

dúvidas que sentiram inicialmente foram sendo clarificadas à medida que adquiriam conhecimentos sobre os grafos, reconhecendo que “após elaborarmos o grafo percebemos melhor o que nos era pedido” (Adélia, RS, 26-04-2010). Por outro lado, a partilha em grupo turma das tarefas realizadas no interior de cada grupo permitiu “ouvir diversas opiniões, debatê-las e até visualizar formas de proceder mais simples” (Teresa, RS, 26-04-2010).

Na elaboração do problema promotor do trabalho de projeto, os elementos do grupo GB sentiram alguma dificuldade porque a “criação de um problema foi um problema, não só para mim, mas também para o meu grupo” (Teresa, RS, 12-04-2010), o que se deveu a “não estarmos a perceber a ideia pretendida, mas acho que até resultou bem” (Adélia, RS, 12-04-2010). Estas dificuldades foram ultrapassadas “com a ajuda da professora de Português e de MACS, que nos prestaram auxílio no domínio da linguagem” (Rosa, RF), e também “porque tínhamos ideias diferentes, mas com um diálogo entre todos, chegamos à solução” (Carlos, RS, 12-04-2010). A valorização do trabalho de grupo faz com que Adélia considere que “se continuarmos a trabalhar como grupo, o trabalho vai resultar bem” (RS, 19-04-2010). Já para Teresa, a “ajuda inicial da professora foi fundamental pois a autonomia era pouca, mas tudo isso foi-se alterando devido à entreaajuda do grupo na procura das soluções dos problemas” (Teresa, RF).

Na resolução dos problemas complementares, estes alunos não demonstraram dificuldades na sua realização e evidenciaram compreensão na aplicação de alguns dos conceitos leccionados a partir da análise da resolução destes problemas, como seja a construção do grafo relativo ao segundo problema complementar. Porém, na construção do grafo relativo ao mapa que representava o percurso de recolha de lixo doméstico da freguesia que trabalharam sentiram alguma dificuldade, talvez devidas à complexidade do mapa, o que os levou a pedir ajuda e a “seguir a pista da professora, depois do grafo concluído percebemos que realmente seria mais fácil fazer um caminho baseado no grafo e não no mapa real” (Carlos, RS, 26-04-2010).

A existência de prazos de cumprimento das diferentes fases deste trabalho fez com que os elementos deste grupo desenvolvessem estratégias de acção e tomassem decisões que lhes permitissem o cumprimento dos prazos estipulados, como exemplifica a afirmação de Carlos: “delineamos estratégias para a apresentação da primeira questão do problema, mas não concluímos a tarefa e para que fosse possível fazer a apresentação reunimo-nos extra-aula” (RS, 03-05-2010). A estratégia de apresentação que delinearam consistiu, como refere Rosa em,

“passar o nosso grafo para acetato e projetar no quadro para que todos os alunos da turma pudessem acompanhar o nosso processo” (RS, 03-05-2010). Após a apresentação do trabalho desenvolvido até este momento, os elementos deste grupo receberam algumas críticas referentes ao percurso que apresentaram. Por exemplo, Teresa salienta dessas críticas “a falta de um ponto [vértice]” (RS, 03-05-2010), o que fez com que o circuito elaborado não contemplasse a passagem numa rua. O teor desta crítica evidencia que a estratégia delineada não contemplou todas as arestas. As críticas recebidas foram consideradas pelos elementos deste grupo como positivas porque lhes permitiu, como defende Teresa, “perceber que a turma conseguia acompanhar a nossa apresentação e (...) tivemos a consciência de que ainda temos de melhorar em diversos aspectos” (RS, 03-05-2010).

Na realização do trabalho de projeto, os elementos deste grupo experimentaram diferentes sentimentos, tais como: (1) aprender novos conhecimentos que permitiram “arranjar soluções (...) aprendi mais, porque tinha de exigir mais de mim” (Carlos, RF); (2) superar dificuldades fez com que “o entusiasmo fosse grande” (Teresa, RS, 17-05-2010); (3) desenvolver a autonomia, o que fez com que “este trabalho fosse um trabalho diferente de todos os outros que já tive e exigiu de mim grande dedicação e esforço (...) desenvolveu em mim coisas positivas como autonomia de trabalho, maior responsabilidade e também um espírito de entreajuda” (Teresa, RF). Em termos gerais, os alunos destacam que este trabalho lhes proporcionou satisfação por conseguirem realizar algo que inicialmente pensavam ser quase impossível. Mesmo as coisas menos boas acabavam por lhes trazer ensinamentos positivos, como refere Carlos:

O grupo com o decorrer do tempo foi ganhando motivação e demonstrou atitude, vontade, responsabilidade e entreajuda entre todos os membros. Em todas as tarefas fomos dedicados e empenhados, pois sabíamos que dependíamos de nós mesmos para o entendimento da matéria e porque estávamos a ser avaliados pelo nosso trabalho. Nisso o grupo demonstrou uma grande maturidade. (RS, 17-05-2010)

O grupo expressa alguns sentimentos relativos ao seu envolvimento na realização deste trabalho. Compreendem que a responsabilidade demonstrada foi determinante e revelam um sentimento de orgulho pela atitude apresentada durante a realização do trabalho.

Após a realização do trabalho de projeto. No final do estudo de grafos, os alunos consideram que o trabalho de projeto se trata de uma metodologia de aprendizagem complexa, que exige ao aluno esforço e tempo até ao produto final:

Rosa: Exige de nós muito esforço.

Adélia: É muito complexo.

Rosa: Exige também um produto final que englobe todo o nosso trabalho, ao longo desse trabalho.

Carlos: Não é um trabalho normal, como nós fazíamos em duas aulas, é uma coisa mais elaborada, que leva tempo! (E)

Comparando esta metodologia de trabalho com outras realizadas anteriormente, os alunos consideram que o trabalho de projeto requer mais tempo de realização, implica alguns momentos de trabalho extra sala de aula, uma maior responsabilidade e autonomia nos processos de aprendizagem e uma percepção crítica de que a pesquisa de informação não significa encontrar respostas para as suas tarefas:

Carlos: Eu por mim e falo por mim, nos trabalhos que eu fazia antes, nunca exigia tanto de nós, nem do grupo. Isto demorou o período inteiro a fazer, e uma pessoa até teve de se reunir fora da sala de aula para cumprir prazos, enquanto os outros trabalhos que eu fiz em grupo, faziam-se em pouco tempo, não eram tão elaborados, não exigiam tanto.

Prof.: Este exigir tanto refere-se a quê?

Adélia: À responsabilidade.

Rosa: À autonomia, empenho, preocuparmo-nos com prazos.

Adélia: Acho que muita concentração!

Rosa: Nos outros bastava ir à Internet, ver qualquer coisa e já estava.

Adélia: Este, este não, isto foi mesmo assim feito por nós que nós sabíamos que não podíamos ir à Internet.

Prof.: Mas porque é que não podiam ir à Internet?

Teresa: Podíamos ir, mas por exemplo, nós mesmo que fossemos à Internet, como fomos ao livro, ao fim ao cabo fomos buscar informação ao livro como podíamos ter ido buscar à Internet, nós depois com essa informação íamos ter de resolver o problema.

Carlos: Enquanto num trabalho normal não era bem resolver o problema, era mais aplicação de coisas. (E)

Durante a realização de todo o trabalho, a discussão de diferentes pontos de vista entre os elementos do grupo e com o grupo turma contribuiu para momentos de reflexão sobre a compreensão e aplicação de conteúdos:

- Rosa: Eu acho que essa reunião correu muito bem, porque nós reunimo-nos mesmo só para fazer o trabalho (...) estávamos mesmo concentrados naquilo.
- Prof.: E não havia alguém que discordasse?
- Todos: Isso houve sempre.
- Calos: Vou dar um exemplo. Na realização da eulerização do nosso grafo a Teresa dizia que era por ali e eu dizia que era para ir para baixo e tentávamos chegar a um consenso.
- Prof.: E como era obtido esse consenso, por imposição?
- Adélia: Há mais dois elementos no grupo e um dizia que é melhor por causa disto e o outro dizia, eu acho que é melhor por causa daquilo e então o grupo refletia e via a melhor maneira.
- Carlos: Havia mais confrontos de ideias.
- Teresa: E quando se faziam apresentações à turma discutíamos e eu pensava, que chato, ninguém se entende, para que é que isto vai servir, mas no fim eu consegui perceber que se calhar ao ouvir aquela crítica ou aquela opinião, dava-me outras ...
- Prof.: Outras visões, outras formas de pensar?
- Adélia: Eu acho que essa questão, quando se apresentou a primeira questão, foi o ponto de viragem do nosso trabalho
- Teresa: Não estou só a falar das atividades, porque houve muitas discussões aqui!
- Prof.: Será que se essas discussões não existissem, vocês conseguiriam ter a percepção de tantas soluções que existiam?
- Teresa: Pois, mas só no fim é que me comecei a dar conta da importância disso. (E)

Os alunos sentem que este trabalho os levou a interagir mais do que nas aulas tradicionais e apercebem-se que as opiniões emitidas pelos colegas permitem visualizar outras soluções, obrigando-os a uma maior reflexão.

Apesar de já terem trabalhado em grupo várias vezes, destacam que na realização deste trabalho foi necessário voltar a aprender a trabalhar em grupo e a reforçar valores como a tolerância e a responsabilidade.

- Rosa: Eu acho que aprendemos todos a trabalhar.
- Adélia: E a respeitar mais uns aos outros e a sermos mais responsáveis uns perante os outros.
- Teresa: E apesar das discussões, muitas entre mim e a Rosa, acho que houve sempre respeito uns pelos outros, nunca houve do tipo, olha faz tu se queres fazer assim.
- Rosa: Porque enquanto fazemos exercícios, se quisermos fazemos é para o nosso bem, fazemos à nossa maneira, agora num trabalho de grupo, o grupo é que tem de empurrar e chegar ao mesmo objectivo. Por

exemplo, se era preciso passar alguma coisa em casa e se perguntava a alguém, podes fazer isto, a pessoa fazia e não se esquecia.

Teresa: A pessoa sabia que tinha de fazer senão o trabalho parava ali.

Adélia: Acho que não estávamos muito habituados, por acaso falei nisso no relatório, o grupo já tinha trabalhado junto noutras atividades, mas tivemos de aprender que as pessoas têm diferentes rotinas de trabalho, diferentes métodos e acho que tivemos de aprender a lidar um bocadinho uns com os outros.

Teresa: E a ter paciência.

Carlos: Ter a noção de que não sou só eu. (E)

Os alunos deste grupo reconhecem ser importante neste tipo de trabalho estarem atentos aos colegas e à sua forma de trabalho e evidenciam um sentimento de responsabilidade e comprometimento para com os colegas de grupo. Relativamente ao trabalho em grupo, os alunos destacam vantagens e algumas desvantagens quanto a este método de trabalho. Sobre as vantagens, destacam o espírito de entreajuda, a oportunidade de confrontarem as ideias entre os elementos do grupo e aprenderem ao seu próprio ritmo:

Carlos: A entreajuda entre colegas

Teresa: A Adélia faltou a uma aula e nós já estávamos com o ritmo muito acelerado e na aula seguinte nós, bem agora vamos ter de explicar a matéria à Adélia.

Carlos: Sempre que alguém estava em baixo, naquela de ficar para trás, uma pessoa puxava, faz, anda lá, temos de fazer, temos um prazo de entrega.

Adélia: Nós sabíamos que não podíamos separar enquanto grupo.

Rosa: Se fosse só um a fazer..., nós tínhamos uma visão mais alargada, bem nós estamos a fazer assim, mas os outros...

Carlos: Havia mais confronto de ideias.

Rosa: Por exemplo, estávamos a fazer assim e o outro dizia, bem aquilo, tens de ir ali.

Teresa: Vantagens, é conseguirmos aplicar a teoria à prática.

Carlos: É por exemplo, numa aula normal, a stora explica e vinha à nossa beira e pronto, explicava depois, uma pessoa por exemplo, num trabalho de projeto tinha de ir ao livro e pegar nos conteúdos e tentar explicar, exigia muito mais.

Teresa: Enquanto a professora na aula a dar-nos os conteúdos e nós interiorizarmos, nós é que tínhamos ao fim ao cabo dar-nos a nossa própria aula.

Prof.: Tinham de ponderar todos os pontos de vista.

Carlos: Tínhamos de puxar por nós, tínhamos de ser nós a dar a resposta ao problema.

Teresa: Ter a noção de que às vezes conseguimos, se calhar se houver esforço e trabalho da nossa parte nós conseguimos. (E).

Os alunos compreendem que é importante ouvir outras opiniões e que foi necessário estarem concentrados na realização das tarefas para conseguirem ser bem-sucedidos na sua realização.

Sobre as desvantagens do trabalho de projeto, os alunos apontam razões relacionadas com o funcionamento do grupo e alguma indefinição inicial na forma como iriam delinear o seu trabalho, o que parece dever-se à estrutura do próprio trabalho e por não estarem na posse de conteúdos que lhes permitisse visualizar logo de início como resolver o problema elaborado:

Rosa: Eu acho que a principal dificuldade foi, como é que hei-de explicar, estar concentrado só no trabalho do grupo, porque nós estávamos principalmente nas primeiras aulas um bocado à parte.

Prof.: Tiveram de se disciplinar.

Adélia: Porque nem toda a gente conseguia acompanhar da mesma maneira, outros queriam mais rápido, outros já não conseguiam acompanhar tão bem e tínhamos que ir mais lentos e acho que isso ajudou porque tivemos de aprender a rotina de trabalho de uns dos outros.

Rosa: Às vezes as divergências existiam.

Prof.: Aprenderam a lidar com elas?

Todos: Sim.

Prof.: Deveriam ter mais ou menos tempo?

Carlos: É assim, uma pessoa quer sempre mais tempo.

Rosa: Nós agora no fim vimos que cumprimos prazos.

Prof.: Se eu não tivesse estipulado prazos, vocês faziam render mais o trabalho, ou o facto de ter estipulado prazos fê-los entender que era um trabalho que tinham de cumprir e fazer as coisas?

Adélia: A estipulação de prazos obrigou-nos a concentrar mesmo no trabalho.

Rosa: Principalmente a primeira questão.

Prof.: A construção do grafo, ou a elaboração do circuito?

Carlos: Não foi aquilo, depois da stora nos dar os conceitos básicos.

Prof.: Os conceitos básicos, foram dados a partir da formalização, depois de terem feito a resolução da primeira e da segunda tarefa [problemas complementares], foi aí que foram dados os conceitos básicos.

Carlos: Sim, mas acho que foi a partir daí, quando a stora explicou o que era um grafo e como se construía um grafo, foi a partir daí que uma pessoa começou a conseguir andar autonomamente, porque antes, falo por mim, tinha muitas dificuldades. (E)

Os alunos admitem que foi necessário disciplinarem-se para conseguirem concretizar o trabalho e que a existência de prazos os ajudou num maior sentido de responsabilização. Referem que nem sempre foi fácil respeitar os diferentes ritmos de aprendizagem e que a percepção do que era um grafo, clarificou o que tinham de fazer. O trabalho ao ser realizado basicamente pelos alunos e ter exigido reflexão sobre as situações trabalhadas contribuiu para

se sentirem seguros nos assuntos estudados. Mesmo quando elaboraram em grupo as tarefas do manual escolar, os alunos “estabelecem semelhanças com as situações trabalhadas no trabalho de projeto” (NC, 20-05-2010).

Em termos gerais, três dos alunos deste grupo destacam positivamente o trabalho de projeto como método de aprendizagem por considerarem que a discussão de ideias, a autonomia e a entreaajuda favorecem a compreensão dos conteúdos estudados:

Teresa: Eu gostei desta maneira porque houve confronto de ideias, houve uma aprendizagem por nossa conta, crescemos como estudantes.

Carlos: Nós por exemplo, se alguém tivesse uma dificuldade podíamos contar sempre com a ajuda do outro e isso conta logo muito para a nossa aprendizagem (E)

Enquanto estes elementos do GB defendem uma pedagogia centrada na atividade do aluno, a Rosa revela que prefere que seja a professora a liderar o processo de ensino—aprendizagem através do método expositivo:

Rosa: É assim, eu preferia que tivéssemos dado aula.

Prof.: Porquê?

Rosa: Porque sim, eu acho que sou muito diferente dos membros do grupo, porque eu acho que sou..

Teresa: Ela stressa muito.

Rosa: Pois, às vezes eles dizem calma Rosa!

Teresa: É diferente, ela é mais impaciente. (E)

A diferença de opinião manifestada pela Rosa em relação à dos seus colegas parece dever-se ao seu perfil de boa aluna, já que individualmente conseguiria aprender o tema de grafos sem que para isso tivesse de adaptar o seu ritmo de trabalho ao dos restantes elementos do grupo.

Um aspecto que os alunos deste grupo destacaram positivamente no trabalho de projeto foi a aprendizagem realizada com base num mapa real que ilustrava o percurso dos camiões da recolha do lixo da freguesia em estudo.

Prof.: Teve alguma influência o mapa que tiveram em mãos ser da vossa terra?

Adélia: Se fosse uma coisa inventada, eu acho que ia ser...

Teresa: Eu acho que nem foi ser da nossa terra, foi ser o assunto ser, por exemplo, a recolha de lixo que é uma coisa que nós vemos todos os dias. (E)

Para os alunos foi importante saberem que estavam a trabalhar uma situação próxima da sua vivência, que no dia a dia estavam habituados a presenciar mas que não estavam habituados a valorizar ou a refletir sobre ela, o que parece tê-los marcado de algum modo. Apesar de alguns aspectos menos positivos, este trabalho parece ter marcado positivamente os alunos deste grupo:

Prof.: Se fossem contar a alguém a história deste trabalho, desde o momento da escolha do tema, até à sua conclusão, como a contariam?

Carlos: Para elaborar o problema foi chato.

Teresa: Exigiu muito de nós.

Rosa: Foi positivo, porque aumentou a nossa responsabilidade, a nossa autonomia, ajudou-me a trabalhar em grupo, a capacidade de argumentação e a tolerância e aplicar na prática os conteúdos, ajudou-me a perceber melhor a matéria teórica. (E)

Reconheceram alguns momentos menos bons mas também a contribuição deste trabalho para o aumento de algumas competências importantes no desenvolvimento de um estudante. Apesar de afirmar que gostaria de ter aprendido grafos através de um ensino expositivo, o que poderá dever-se ao facto de ser boa aluna e ter bons resultados numa modalidade de ensino expositivo, Rosa reconhece no final da experiência de ensino que a metodologia seguida tem benefícios na aprendizagem e na formação dos alunos.

CAPÍTULO 6

ESTUDO DE CASO DO GRUPO SANDE S. MARTINHO

O grupo Sande S. Martinho (GSSM) começou o estudo dos grafos com quatro alunos, dos quais três eram meninas e um era rapaz. Uma semana depois, este grupo ficou reduzido a três elementos porque uma das meninas saiu da escola para ir para o estrangeiro. O trabalho de projeto foi desenvolvido por Sofia, Paula e Hélder. Estes alunos não tinham qualquer retenção no seu percurso escolar e são provenientes de famílias com uma escolaridade correspondente ao 1.º ciclo, com exceção do pai da Paula que tem o 6.º ano de escolaridade. No final do 1.º período, a Paula foi a aluna do grupo que obteve a melhor classificação a Matemática, 15 valores, uma vez que Hélder teve 10 valores e Sofia teve 13 valores. A Paula é uma aluna dedicada e aplicada à disciplina de Matemática, embora seja um pouco tímida. É uma aluna que estuda diariamente, aprecia ler, passear e ir ao cinema. Gosta de trabalhar em grupo porque pode “discutir o problema com os colegas e solucioná-lo em conjunto” (Q), embora considere que trabalhar em grupo gera, por vezes, alguma “confusão quando as coisas não estão a ser bem efectuadas por parte de alguns colegas” (Q).

A Sofia é uma aluna aplicada e gosta de expor a sua opinião. Estuda diariamente e gosta de ouvir música. Prefere estudar Matemática individualmente porque não aprecia “perder um raciocínio quando um colega não o consegue perceber” (Q). Apesar desta preferência, reconhece vantagens no trabalho de grupo pela possibilidade de “esclarecer as dúvidas uns dos outros, trocar ideias e raciocínios” (Q), como também reconhece desvantagens pela tendência de “haver barulho, estarmos mais distraídos e de haver sempre uns que trabalham mais do que outros, o que não é justo” (Q).

O Hélder é um aluno um pouco revoltado, rebelde e indisciplinado por ter perdido um familiar próximo recentemente, mas que possui sentido crítico. Costuma estudar apenas antes dos testes, gosta de jogar futebol e não gosta de ler. O seu desempenho a Matemática reflete o sentimento que nutre pela disciplina, quando afirma “não gosto de Matemática” (Q). Aprecia trabalhar em grupo por “poder debater ideias e mais cabeças a pensar é melhor” (Q), embora aponte como desvantagem deste método de trabalho “o barulho e a distração” (Q).

6.1. Realização do trabalho de projeto

Fase 1: Definição do tema

Os alunos do grupo GSSM quando foram informados de que iriam abordar os conteúdos de grafos através do trabalho de projeto apresentaram diferentes reações. A Sofia e a Paula mostraram-se interessadas e estabeleceram comparações com outros trabalhos anteriores. Já Hélder, mostrou-se mais comedido e ficou a observar o que as colegas diziam:

- Sofia: Professora, nós no ano passado também fizemos um trabalho assim.
 Prof.: E gostaram?
 Paula: Sim, foi interessante, fomos pelas turmas, fizemos um inquérito, eu gostei.
 Prof.: Pois, mas não sei se iremos fazer exatamente assim, não sei se será necessário.
 Sofia: Professora, mas depois nós trabalhámos nas aulas as informações, fizemos gráficos, tabelas.
 Paula: Este ano, podíamos estudar o que acham os alunos sobre o funcionamento da escola.
 Sofia: Ou sobre alguns dos problemas dos jovens, por exemplo se fumam ou não. (GA, 18-03-2010)

As sugestões destes alunos indiciam a utilização da estatística como tema para o trabalho de projeto a realizar. Querendo que os alunos se entusiassem pelo trabalho que iriam realizar e na ausência de sugestões que se adaptassem ao estudo dos grafos, a professora questionou os alunos se tinham ouvido falar da campanha que estava a ser realizada nos meios de comunicação social sobre “Limpar Portugal”. Todos os elementos deste grupo disseram que sim e que os seus colegas escuteiros iriam participar nessa campanha. A fim de demonstrar aos alunos a sua importância, quer a nível social, quer a nível político, a professora distribuiu aos alunos um texto intitulado de “Movimento Limpar Portugal já tem mais de 30 mil voluntários inscritos”, cujas ideias foram debatidas na turma.

- Hélder: Eu também estou inscrito, mas eu acho que isto vai ser uma treta. Esta frase é interessante, “estamos a contar com 250 mil pessoas”
 Paula: É sinal de que as pessoas estão a aderir. Isto vai ter a ver com o nosso trabalho? Hum parece interessante!
 Prof.: Bem, talvez...
 Sofia: As pessoas estão interessados no assunto mas ao mesmo tempo ainda é preciso mais pessoas.
 Hélder: É só monte e ainda existe muito para limpar!

Sofia: Professora, na Suíça há mesmo um grupo de pessoas que estão sempre a passar e a limpar as ruas e não há o hábito de deitar o lixo para o chão. Se um polícia nos vir a fazer isso é capaz de passar um bom raspanete. Lá quase de meia em meia hora anda gente a limpar e o estado é que paga a essas pessoas. Por exemplo, aqui para limpar as ruas andam carros, mas na Suíça as pessoas que limpam andam a pé com um carrinho e assim não se gasta gasolina. Aqui em Portugal andam carros, gasta-se gasolina, gasta-se o preço de comprar carros. (GA, 18.03.2010).

A discussão gerada em torno do texto envolveu de um modo especial a Sofia que parece revelar maior sensibilidade e preocupação sobre a importância do tema e sobre o processo de recolha do lixo. Estabelece um paralelo com a forma como é realizada a recolha de lixo na Suíça, país onde já residiu, e destaca a necessidade de se fazer uma boa gestão dos custos necessários para se efetuar essa recolha de lixo. A Paula tenta perceber o porquê de se estar a falar do tema e procura compreender se existe alguma ligação com o trabalho que irá realizar. Já o Hélder, apesar de afirmar que irá participar na campanha, não se mostra muito sensível à sua importância.

Aproveitando as ideias apresentadas e querendo que todos os alunos se envolvessem, a professora sugeriu que, pesquisassem na Internet vídeos relacionados com a temática do lixo, sendo analisados, em grupo turma, três deles:

Sofia: Se fosse exigido às pessoas multas, elas começavam a ter mais cuidado. As pessoas têm de ser educadas, se não o fazem a bem, então temos de as obrigar.

Paula: Mas muitas vezes são os mesmos que fazem campanhas de limpeza que também fazem o lixo às escondidas.

Hélder: É verdade Professora, e depois os coitados que limpem, ou seja os homens do lixo. O problema é quando fazem greve, como vimos no vídeo.

Sofia: Eu acho que não passa por aí, porque isso não resulta e cada vez há mais lixo e menos dinheiro para o tratar. Se calhar devíamos colocar mais pontos de recolha de lixo. O que é importante é que as pessoas percebam, que é um problema de todos e que todos podemos contribuir, e não só de quem trabalha aí. Esses têm de se preocupar em fazer e garantir o seu melhor, mas todos temos de colaborar, como nesta campanha de agora. (GA, 18-03-2011)

A discussão gerada em torno dos vídeos fez com que os alunos se motivassem e expusessem as suas ideias. A Sofia considera que o problema do lixo é um problema de todos e

que por isso todos devem contribuir para a solução deste problema, mesmo que isso implique multas. A Paula realça o facto de que muitas vezes são os patrocinadores das campanhas de limpeza que fazem o lixo e o Hélder chama a atenção para a importância do trabalho realizado pelos homens do lixo.

O entusiasmo com que estes alunos participaram na discussão permitiu que se definisse para tema do trabalho de projeto o lixo doméstico nas várias freguesias de residência dos alunos da turma.

Fase 2: Criação do Problema

Após a definição do tema, os elementos do grupo GSSM principiaram a formulação do problema impulsor do trabalho de projeto, com base no mapa das ruas de recolha de lixo doméstico da freguesia Sande S. Martinho:

Paula: Mas que problema é que vamos criar?

Hélder: Sei lá, nunca fiz isto, nunca criei problemas em Matemática.

Paula: Não sei que problema é que a professora quer.

Sofia: Mas será qualquer problema? Vamos chamar a stora. Ó stora, não estamos a perceber bem o que é para fazer. É para inventar um problema?

Prof.: Bem, vocês têm o mapa da freguesia, certo? Agora por exemplo, numa das discussões que tivemos nas aulas anterior, a Sofia falava que aqui em Portugal se gasta dinheiro na gasolina dos carros do lixo e que na Suíça as pessoas andam a pé com carrinhos. No fundo o que queria dizer é que se devia fazer uma boa gestão dos recursos existentes na recolha do lixo. Vocês podem pegar nessa ideia e explorá-la. Por exemplo, o que poderiam fazer no sentido de saberem se os recursos estavam a ser bem utilizados, nomeadamente se o percurso de recolha era o melhor para se gastar menos gasolina?

Sofia: Olhem e se disséssemos que estávamos preocupados com a gasolina que se gasta e queríamos saber se era possível ter um percurso mais curto? Temos de fazer alguma coisa.

Paula: Boa, pode ser e podemos dizer que somos um grupo de cidadãos preocupados.

Sofia: Ou então escuteiros.

Paula: Sim tem tudo a ver com isto da campanha porque os escuteiros também vão. (GA, 25-03-2010)

Os elementos deste grupo sentem-se confusos pela tarefa que lhes está a ser pedida. O Hélder e a Paula parecem estar admirados por terem de criar um problema que não sabem muito bem qual, enquanto a Sofia tenta perceber que problema deve elaborar. Apoiando-se em

algumas das ideias que a professora lançou e que foram faladas no grupo turma e sentindo necessidade de dar resposta à tarefa, os alunos do grupo GSSM apresentaram um primeiro esboço do seu problema:

Problema:
Os escuteiros de Sande S. Martinho quiseram ver se o lixo estava a ser bem recolhido tendo em conta a distância - tempo e custo. Como poderão eles descobrir qual é o melhor percurso a realizar e se é esse que está a ser realizado.

Figura 21: Esboço do primeiro problema do grupo Sande S. Martinho

O primeiro problema que os elementos do grupo GSSM elaboraram apresenta-se muito geral e foca aspectos passíveis de não serem respondidos por falta de informação, como por exemplo a relação distância - tempo, já que não consideraram determinados factores que poderão influenciar a resposta a esta questão, como por exemplo a forma como é efectuada a recolha, se dos dois lados da rua em simultâneo, ou se é feita primeiramente de um lado e depois do outro lado. Estes aspectos foram salientados pela professora quando os elementos deste grupo voltaram a solicitar a sua presença, mas não foram considerados pelos alunos na segunda tentativa de elaboração do seu problema:

- Sofia: Sabemos lá se é dos dois lados ou de um. Olhem, vamos ao livro ver se diz alguma coisa que nos ajude.
- Paula: Boa ideia, vamos ver. Tem aqui algumas coisas que podemos usar.
- Sofia: Podemos pôr por alíneas. Podemos pôr uma alínea do tipo desta do correio.
- Paula: Não, igual não. Temos de falar do lixo. Vamos adaptar.
- Sofia: Podemos assim, os escuteiros de Sande S. Martinho pretendem averiguar se o percurso que o camião do lixo faz na recolha de lixo é o melhor e entre as várias freguesias. Como poderão eles responder a esta questão?
- Hélder: Bem já temos duas.
- Paula: E agora podemos pôr do saneamento, assim tipo esta.
- Sofia: Sim, por exemplo, os escuteiros sabem que, uma zona da freguesia tem um fraco saneamento. Como poderão obter resultados para, ajudem...
- Hélder: O seu aperfeiçoamento
- Sofia: Boa, pode ser. (GA, 25-03-2011)

O grupo apresentou um segundo esboço do seu problema:

Os escuteiros de Sande S. Martinho quiseram ver se o lixo estava a ser bem recolhido tendo em conta a distância - tempo e custo. Como poderão eles descobrir qual é o melhor percurso a realizar e se é esse que está a ser realizado.

Os escuteiros de Sande S. Martinho querem aperfeiçoar o percurso de recolha do lixo em diferentes freguesias e descobrir qual o melhor percurso entre essas várias freguesias. Como poderão eles descobrir e qual é o melhor percurso.

Os escuteiros sabem que existe uma parte na freguesia que não tem uma rede de saneamento. De que forma poderão obter resultados para o aperfeiçoamento da mesma.

Figura 22: Segundo esboço do problema do grupo

Na reformulação do problema, os elementos deste grupo serviram-se de alguns exemplos do manual escolar e tentaram adaptar ao tema do trabalho de projeto. Continuaram a incluir aspectos sobre os quais não conseguiriam responder, como a distância tempo e custo. Não atenderam às sugestões da professora ao alertar o grupo sobre a forma de recolha de lixo nas ruas e foram pouco claros sobre o que pretendiam nas questões formuladas

Com a ajuda das professoras de MACS e de Português, os alunos do grupo GSSM apresentaram a versão final do seu problema de trabalho de projeto:

1. Os escuteiros da freguesia de Sande S. Martinho, sensibilizados pelos problemas ambientais provocados pelo lixo, resolveram estudar um possível percurso a ser realizado pelos camiões na recolha do lixo. De modo a repetirem o menor número de ruas possível. Supondo que essa recolha era efectuada dos dois lados da rua, que percurso poderão apresentar, se a recolha tem:
 - 1.1. Início e fim no mesmo local?
 - 1.2. Início e fim em locais distintos?
2. Visando a coordenação de um projeto que permita melhorar a recolha do lixo nas freguesias de Ronfe, Vermil, Brito, Airão Sta. Maria e Sande S. Martinho, os escuteiros de Sande pretendem elaborar um percurso que possibilite ao responsável pela recolha do lixo no concelho de Guimarães, reunir num só dia, com cada chefe de agrupamento na respectiva freguesia. Que percurso poderão eles apresentar ao responsável do lixo, sabendo que ele reside em Guimarães e que no final do dia deverá regressar a Guimarães?

	Guimarães	Sande S. Brito Martinho	Ronfe	Vermil	Airão ST^a.Maria	
Guimarães	_____	9.8 Km	6.1 Km	10.3 Km	11 Km	12 Km
Sande S.	9.8 Km	_____	6.7 Km	10.2 Km	9.2 Km	10.3 Km
Brito	6.1 Km	6.7 Km	_____	9.9 Km	2.6 Km	3.8 Km
Ronfe	10.3 Km	10.2 Km	3.9 Km	_____	1.3 KM	2.1 Km
Vermil	11 Km	9.2 Km	2.6 Km	1.3 KM	_____	1.2 Km
Airão	12 Km	10.3 Km	3.8 Km	2.1 Km	1.2 Km	_____

3. Sabendo que os escuteiros de Sande, pretendem realizar uma proposta de melhoramento da rede de saneamento de uma dada área da sua freguesia, que percurso poderão eles sugerir, de modo a criarem uma rede com a menor distância possível?

Figura 23: Problema final do Grupo de Sande S. Martinho

No enunciado final, o grupo apresenta questões cujas respostas se baseiam em dados disponíveis no mapa das ruas de recolha de lixo doméstico da freguesia Sande S. Martinho, em conteúdos relativos aos grafos e em valores obtidos na Internet, através do Google Maps.

Fase 3: Planeamento do trabalho e problemas complementares

Os elementos do grupo GSSM começam por dividir tarefas entre si. Assim, a Sofia e o Hélder ficaram de responder às alíneas da primeira questão, enquanto a Paula ficou de principiar a construção da estrutura do trabalho em suporte informático.

- Paula: Eu acho que vou começar por fazer a capa.
Sofia: Por mim tudo bem, desde que te desenrasques. Não percebo nada disto. Isto é confuso, tantas linhas.
Hélder: Concordo, isto é uma confusão, não sei como vamos fazer isto. É melhor chamarmos a professora.
Paula: O que é que não consegues Sofia?
Sofia: É assim, isto é muito confuso, eu estou a seguir as linhas, mas às tantas já nem sei se passei por lá!
Paula: E se riscares?
Sofia: Olha para aqui, achas que não fiz isso, olha para esta confusão!
Paula: Olha chama a professora! (GA, 14-04-2010)

Apesar de cada elemento deste grupo tentar executar a tarefa que combinaram, a Sofia e o Hélder sentem-se um pouco perdidos perante as dificuldades que estão a encontrar e procuram o apoio da professora:

- Sofia: Stora isto é complicado. É muito difícil, porque há muitas possibilidades e são tantas linhas!
Hélder: Pois, nunca vamos sair daqui. Como vamos ter certeza de que é o percurso que repete menos ruas? Eu já nem sei por onde passei!
Prof.: Esperem, calma! Vamos fazer assim, vocês vão parar um bocadinho o que estão a fazer e vão tentar resolver um outro problema que tenho aqui, pode ser?
Sofia: Desde que seja mais fácil. (GA, 14-04-2010)

A professora, sentindo as dificuldades dos alunos ao procurarem a resposta para a primeira questão, sugere a resolução do 1.º problema complementar (Pontes de Königsberg, Anexo 5), com o objectivo de lhes permitir a aquisição de alguns conceitos básicos sobre grafos.

Os colegas de grupo da Sofia ainda não tinham concluído a tarefa, quando esta firma não ser possível realizar o percurso nas condições pedidas:

- Sofia: Não.
 Hélder: Não, não quê?
 Sofia: Passar por todas as pontes uma única vez.
 Hélder: Então não dá?!
 Sofia: Não, falta-te uma. Eu já fiz e também já fiz o que agora estás a fazer e continua a não dar.
 Paula: Já fizeste? Eu ainda não consegui fazer e já estas a dizer que não dá!
 Hélder: Qual? Espera já sei, acho que consigo, e podemos passar aqui por fora?
 Sofia: Sim, só que só podes passar por todas as pontes uma só vez.
 Hélder: Então podemos ir assim, assim.
 Paula: Espera, não faças nada, não faças isso.
 Hélder: Espera, juro que não vou fazer nada, só vou fazer assim, assim..
 Sofia: Eu fiz igual a vocês e não dá eh, eh, claro estás lá, passas duas vezes aqui e duas vezes aqui ainda por cima...
 Paula: Duas pequenas ilhas, é esta e qual?
 Sofia: É esta. (GA, 14-04-2010)

Na resolução do 1.º problema complementar, cada um destes alunos começou por resolver individualmente o problema para depois confrontar com o processo dos seus colegas. Quando a Sofia finalizou, tratou logo de dizer aos colegas que não dava e não esperou que os seus companheiros terminassem. A Sofia não reagiu muito bem ao facto de Hélder querer verificar se era ou não possível. Esta atitude parece revelar algum “atrito entre a Sofia e os restantes elementos do grupo” (NC, 14-04-2010).

A Sofia aparenta ser o elemento que se sente mais à vontade na resolução do problema, enquanto a Paula e o Hélder parecem demonstrar algumas dificuldades na compreensão da imagem apresentada e nas informações dadas sobre o objectivo do problema. No final, este grupo de alunos apresentou o seguinte percurso:

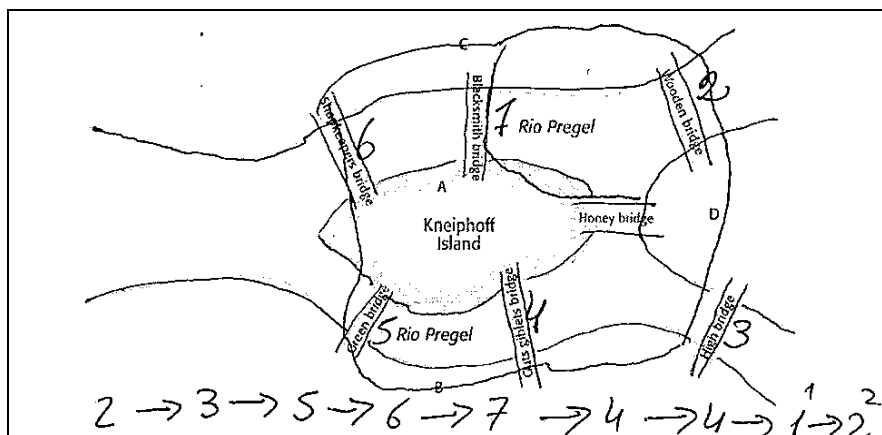


Figura 24: Resposta ao 1.º Problema Complementar

Os alunos concentraram a sua atenção nas pontes, numerando-as de 1 a 7, ignorando os pontos de terra. Concluíram que não era possível passear pela cidade sem repetir pontes e apresentaram um percurso, com início e fim na ponte n.º 2, no qual existe uma passagem repetida na ponte com o n.º 4, ignorando o facto de que deveriam ter finalizado na margem onde iniciaram. O percurso apresentado com base na sequência de números, para ser compreendido, necessitava que se observasse a figura. A opinião do Hélder de que se repetiriam duas pontes parece não ter influenciado a resposta final apresentada pelo grupo, prevalecendo aparentemente a opinião da Sofia. O diálogo que se estabeleceu no grupo turma, sobre a resolução deste problema, permitiu a introdução das noções de grafo, vértice e aresta:

Para os alunos adquirirem mais alguns conceitos elementares de grafos, a professora propôs a resolução de um 2.º problema complementar (Anexo 5), o qual contém um mapa com as ruas onde os alunos deveriam proceder à recolha do lixo. Os elementos do grupo GSSM começaram por elaborar um grafo:

- Sofia: Acho que vamos fazer como a stora.
 Paula: Era mais simples. Temos de pôr os pontos.
 Sofia: Sim, vamos pôr aqui, acho
 Hélder: Sim, tem lógica e as linhas devem ser as ruas.
 Paula: E agora temos de ligar, fazes tu Sofia? (GA, 15-04-2011)

No final da resolução do 2.º problema complementar, este grupo apresentam o grafo seguinte:

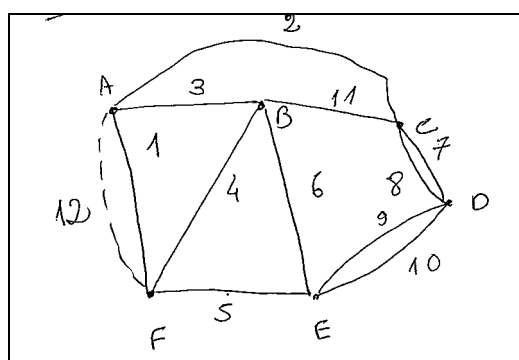


Figura 25: Grafo do 2.º Problema Complementar

Os alunos compreendem que os cruzamentos devem ser assinalados pelos vértices e as ruas, pelas arestas. As questões deste 2.º problema complementar incidiam na possibilidade de se elaborar percursos de recolha do lixo:

- Hélder: Eu aposto que não é possível.
 Sofia: Porquê, já viste?
 Hélder: Não, mas no outro também não foi e era como este.
 Paula: Oh, isso não é assim!
 Hélder: Não, então experimenta.
 Sofia: Olhem, vamos fazer assim, cada um de nós faz um percurso diferente, começamos todos em A e eu vou por aqui, o Hélder vai por ali e tu vais por aqui. Pode ser? Assim é mais rápido.
 Hélder: Vês, não dá, tens sempre que repetir ruas.
 Sofia: É, eu também repeti, acho que temos sempre de repetir pelo menos uma rua! (GA, 19-04-2010)

O Hélder de imediato estabelece uma relação de semelhança entre este problema complementar e o anterior, embora não consiga justificar porque razão afirma não ser possível. Na tentativa de constatarem se é ou não possível, a Sofia sugere uma estratégia onde cada elemento tenta efetuar um percurso distinto. No final, os elementos deste grupo concluem que não é possível e que teriam de repetir sempre pelo menos uma rua. A Forma de apresentar o percurso com recurso ao grafo foi um dos aspectos mais problemáticos para estes alunos:

- Hélder: As ruas são as nossas linhas?
 Sofia: Sim, são as arestas.
 Paula: Então, o nosso percurso pode ser 2, 7, 10.
 Sofia: E como sabemos onde inicia?
 Paula: Então, estamos na rua 2!
 Sofia: Mas se tu viesses de C também estavas na rua 2 e aqui diz que temos de sair de A.
 Paula: Então como vamos pôr?
 Hélder: Pomos só o A no início e no fim.
 Sofia: Podemos ver se existe só uma possibilidade.
 Paula: Não percebi.
 Sofia: Olha, a ligar A e B, só temos uma rua, então se colocarmos A-B sabemos que é a 3, entendes, porque 3 liga A a B..
 Paula: Ah, já percebi, A – B é a rua 3! (GA, 19-04-2010).

O percurso apresentado em resposta à alínea b) do problema complementar, na qual era pedido aos alunos que apresentassem um percurso a iniciar e finalizar em A, foi o seguinte:

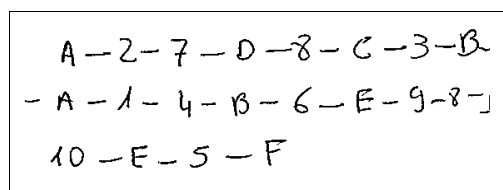
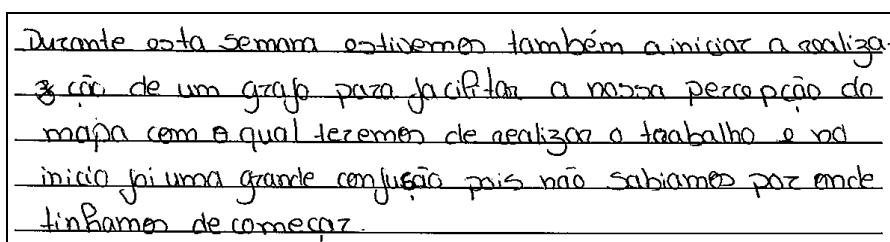


Figura 26: Percurso iniciado em A e finalizado em F

Verifica-se que os alunos do grupo GSSM usaram às vezes uma sequência só de números, outras vezes só de letras e outras vezes misturavam letras e números. Questionados do porquê dessa representação, Sofia considerou que “para ir da rua 2 para a rua 7 tem de passar por C, por isso não há necessidade de o pôr” (GA, 19-04-2010). A mesma lógica foi usada pelos elementos do grupo quando puseram a sequência B – A, pois entre estes dois cruzamentos existe uma só rua. Porém, no mesmo percurso, os alunos colocaram 8-C-3 e quando questionados para demonstrarem o percurso que estavam a efetuar, hesitaram na resposta ao compreenderem que havia várias possibilidades (NC, 19-04-2010). O diálogo existente no grupo turma sobre as soluções encontradas para o 2.º problema complementar permitiram desenvolver mais conceitos de grafos.

Fase 4: Desenvolvimento do trabalho de projeto

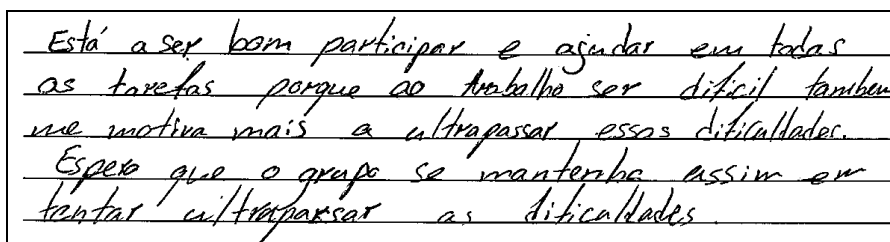
O conhecimento de algumas noções relativas aos grafos levou os alunos do grupo Sande S. Martinho a tentar iniciar novamente a resposta às alíneas da primeira questão do seu problema, com a construção do grafo representativo do seu mapa.



Durante esta semana estivemos também a iniciar a realização de um grafo para facilitar a nossa percepção do mapa com o qual fazemos de realizar o trabalho e no início foi uma grande confusão pois não sabíamos por onde tinhamos de começar.

Figura 27: Dificuldade do grupo na elaboração do grafo (Sofia, RS, 25-04-2010)

Apesar de reconhecerem que um grafo simplifica a situação a trabalhar, os elementos do grupo GSSM sentiram-se confusos quando tentaram construir um grafo a partir do seu mapa. Porém, estas dificuldades funcionaram para o Hélder como um estímulo para a tarefa que tinham de realizar:



Está a ser bom participar e ajudar em todas as tarefas porque ao trabalho ser difícil também me motiva mais a ultrapassar essas dificuldades. Espero que o grupo se mantenha assim em tentar ultrapassar as dificuldades.

Figura 28: Relato sobre a realização do trabalho de projeto (Hélder, RS, 2-04-2010)

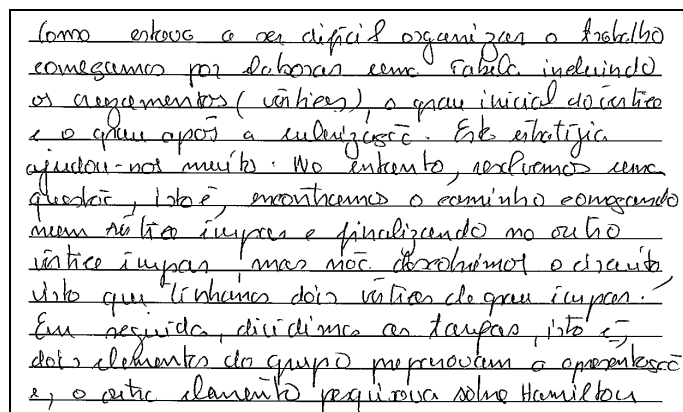
No desconhecimento da totalidade de aplicações que os grafos permitem e perante as dificuldades que iam encontrando, o grupo GSSM formularam durante a realização deste trabalho diversas questões para as quais foram procurando respostas:

- Como vamos iniciar a construção do grafo?
- Como vamos encontrar o melhor percurso?
- Será que existe um circuito?
- De que forma poderemos mostrar à turma a passagem pelas arestas?
- O que diz Hamilton?
- Que algoritmos existem para nos ajudar a responder à segunda questão?
- O que diz o algoritmo de Kruskal?

Estas dúvidas moveram os elementos do grupo GSSM, a procurar dar-lhes respostas, começando por desenvolver estratégias que lhes permitissem ultrapassar as dificuldades que estavam a sentir.

- Sofia: Olhem vamos começar num ponto e para não nos perder colocámos aí no mapa e tu colocas aí no papel.
- Hélder: Boa e eu aponto aqui. Assim sabemos a quantos vai ligar.
- Sofia: Sim é uma boa ideia. Fazes isso?
- Hélder: Sim e faço uma tabela e sabemos logo a quantos liga.
- Paula: É uma boa ideia! Assim podemos usá-la para fazermos aquilo que aquele grupo está a fazer e assim não nos perdemos! (GA, 23-03-2010).

A atividade deste grupo, desenvolve-se um modo cíclico: questão do problema – estratégia – discussão – solução – questão seguinte do problema. As dificuldades sentidas levam os alunos a desenvolver estratégias que lhes permitisse ultrapassá-las:



Como estava a ser difícil organizar o trabalho começamos por laborar com tabela incluindo os encontros (vértices), o grau inicial do vértice e o grau após a realização. Esta estratégia ajudou-nos muito. No entanto, resolvemos uma questão, isto é, encontramos o caminho começando num vértice ímpar e finalizando no outro vértice ímpar, mas não desenvolvemos o circuito visto que tínhamos dois vértices de grau ímpar. Em seguida, dividimos as tarefas, isto é, dois elementos do grupo preparavam a apresentação e, o outro elemento pesquisava sobre Hamilton.

Figura 29: Relato sobre a estratégia do grupo (Paula, RS, 03-05-2010)

Ao construírem uma tabela sobre os graus dos vértices, os alunos do grupo GSSM conseguiram ter a noção do número de vértices existentes no grafo que tinham grau ímpar. Mostraram alguma confusão entre a duplicação de arestas e o processo de eulerização, já que este só termina quando todos os vértices apresentam grau par. Os alunos não conseguem encontrar o menor circuito mas prosseguem a sua atividade dividindo tarefas. Enquanto alguns elementos preparam a apresentação das respostas à 1.ª questão para o grupo turma, Paula pesquisa informações sobre Hamilton para responderem à 2.ª questão.

Finalizada a 1.ª questão do problema do trabalho de projeto, realizou-se a sua apresentação ao grupo turma visando aferir dificuldades, apresentar diferentes estratégias, desenvolver a argumentação, utilizar a terminologia própria dos grafos e fomentar a clareza de comunicação dos processos e resultados obtidos. Na apresentação intermédia, este grupo colocou no quadro uma cartolina com o grafo do seu mapa e uma tabela com os graus dos vértices e foi dizendo em voz alta o melhor caminho, em resposta à alínea b) da 1.ª questão do seu problema.

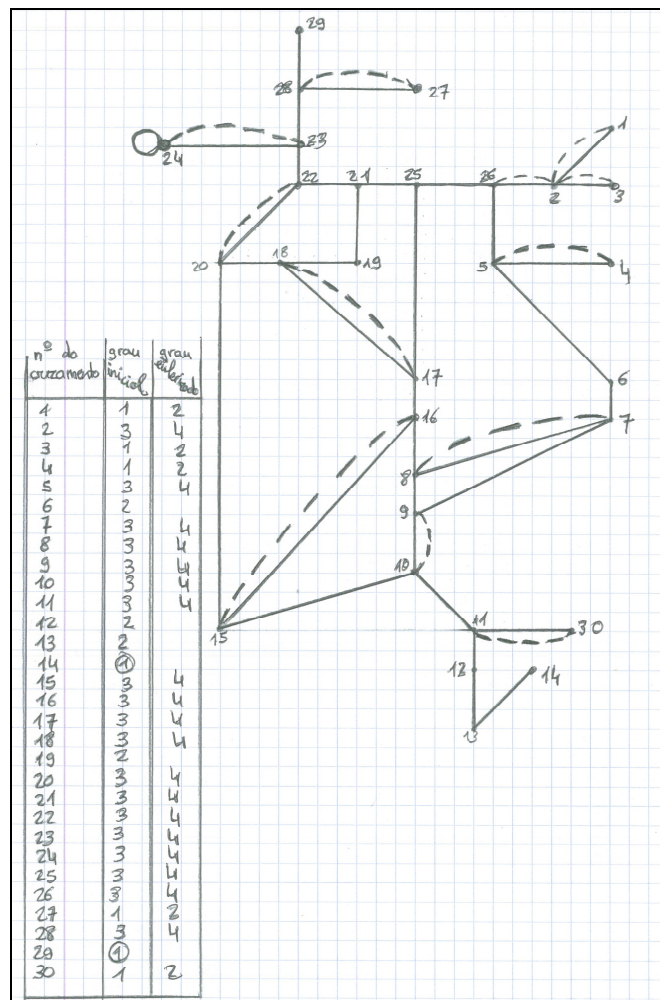


Figura 30: Grafo e Tabela da Apresentação Intermédia

No grafo apresentado à turma, é possível observar-se que os vértices identificam os cruzamentos existentes e as ruas são assinaladas com as arestas. As arestas que estão assinaladas a tracejado indicam as ruas onde o camião de recolha do lixo doméstico repete a sua passagem. A explicação da tabela apresentada foi dada pelo Hélder, o qual salientou que é possível ter a noção dos graus dos vértices à medida que as arestas são duplicadas. De seguida, a Paula leu o caminho encontrado e a Sofia escreveu-o no quadro:

Figura 31: Caminho da Apresentação Intermédia

A apresentação não foi muito conseguida e o grupo turma teve alguma dificuldade em acompanhar a sua exposição, pois muitas vezes não conseguia perceber de modo imediato qual a aresta que estava a ser percorrida. O grupo GSSM conclui, como resposta à alínea a) da 1.^a questão, não ser possível efetuar um circuito repetindo o menor número de ruas. No sentido de os ajudar a perceber que estavam a cometer um erro, a professora questionou-os – “Então estão a dizer que não é possível o camião regressar ao ponto onde iniciou a recolha?” (GA, 05-05-2010). – de modo a procurarem outra solução diferente.

A apresentação intermédia permitiu ao grupo GSSM compreender que a sua estratégia de apresentação não foi muito eficaz e constatar que a resposta dada à alínea a) da 1.^a questão do seu problema não fazia sentido.

Figura 32: Relato sobre a apresentação intermédia (Sofia, RS, 06-05-2010)

O diálogo existente entre os elementos do grupo GSSM, a professora e o grupo turma, levou ao surgimento de algumas ideias para melhorarem os aspectos menos conseguidos e revelou algumas fragilidades no uso correto de alguns termos:

- Sofia: Através do processo de eulerização vimos que passou de 3 a 4 e assim sucessivamente.
- Prof.: Confesso que estava um bocadinho distraída, mas o que são esses números?
- Sofia: Então, os números são os cruzamentos ou as arestas!
- Prof.: Como se chama isso?
- Paula: Vértices.
- Prof.: Mas não percebi, porque passa de 3 a 4 se continua no mesmo vértice?
- Paula: Porque acrescentamos uma aresta.
- Prof.: Mas já existia uma entre esses vértices. Como se chama ao processo que acrescenta uma aresta entre dois vértices que já estavam ligados por uma aresta?
- Hélder: É duplicação de arestas. (GA, 05-05-2011)

O facto de não terem utilizado a linguagem dos grafos, nomeadamente, o termo aresta, e grau de um vértice, fez com que a Sofia se confundisse quando questionada sobre o significado dos números que estava a dizer. Sempre que duplicava uma aresta, confundia o termo “grau de um vértice” com “vértice” e “aresta” e ainda a “eulerização” com “duplicação de aresta”.

Na continuidade do trabalho de projeto e na procura da resposta para a segunda questão do problema, os elementos do grupo GSSM utilizaram duas estratégias diferentes. Numa primeira fase, tentaram responder em grupo à questão de um modo intuitivo. Depois, querendo verificar se a solução encontrada estava correta, dividiram tarefas e foram pesquisar sobre o assunto. A Sofia procurou no manual exemplos que se adaptassem à questão que estava a ser trabalhada. O Hélder procurou num outro manual do 11.º ano que se encontrava na sala para consulta. A Paula pesquisou na Internet informação sobre Hamilton e consultou alguns sites que a professora disponibilizou no início do trabalho de projeto.

6 que diz Hamilton?

- procuramos no livro maes 11/12 que a professora forneceu;
- procuramos na internet
- procuramos no manual do 11.º

Como vamos solucionar o nosso problema?

o nosso grupo trabalhou de forma intuitiva com um método que se aproxima do algoritmo da cidade mais próxima.

Será que encontramos o melhor percurso?

- observamos o problema do exercício vizinho;
- observamos o algoritmo da cidade mais próxima e o do peso das arestas com os seus respectivos exemplos.

avaliar se é o melhor algoritmo para descobrirmos a resposta ao nosso problema?

Figura 33: Anotações sobre a procura de respostas às dúvidas surgidas – 10.05.2011

Após partilharem a informação que recolheram e analisarem exemplos de vários manuais, os alunos apresentaram a seguinte resposta:

2) O melhor percurso que poderá o presidente de câmara realizar percorrendo a menor distância possível é:

- segundo o algoritmo da cidade mais próxima
 Guimarães → Brito → Vermil → Airoã → Ronfe → Sande → Guimarães
 $1,2 + 2,1 + 2,6 + 9,8 + 10,2 = 32 \text{ Km}$
- segundo o algoritmo do peso das arestas

Airoã - Vermil	→	1,2
Vermil - Ronfe	→	1,3
Ronfe - Airoã	→	2,1 x
Brito - Vermil	→	2,6 x
Brito - Airoã	→	3,8
Ronfe - Brito	→	3,9 x
Brito - Guimarães	→	6,1
Guimarães - Sande	→	9,8
Sande - Ronfe	→	10,2

Airoã — Vermil — Ronfe

Brito — Guimarães — Sande

Assim concluímos que o menor percurso a percorrer é segundo o algoritmo da cidade mais próxima, com 32 Km.

Figura 34: Solução da 2.ª questão do problema

Apesar dos elementos do grupo GSSM terem mencionado que numa 1.ª fase, basearam a sua resposta num processo intuitivo, não o descreveram, tendo apenas apresentado a resposta com base no algoritmo da cidade mais próxima e do peso das arestas. Questionados sobre esse facto, a Sofia respondeu que “com a utilização dos algoritmos é mais fácil obter esse percurso, pois assim é só seguir os passos que nos são ditos” (NC, 10-05-2010).

Depois de concluída a resposta à segunda questão, o grupo GSSM concentrou-se na procura de conhecimentos que sustentassem a resposta à terceira questão do problema do

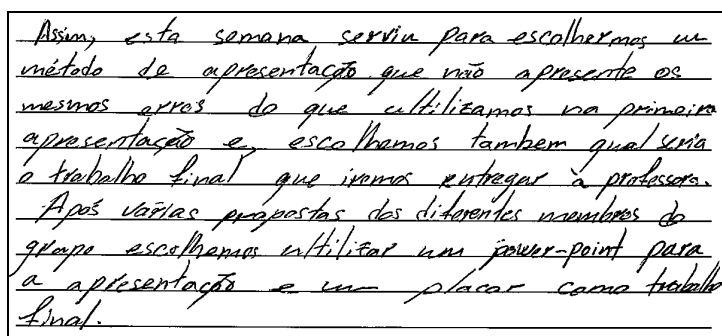
trabalho de projeto. Desta vez, a Paula, tal como a Sofia e o Hélder, foi também procurar nos manuais que estavam na sala de aula a informação que necessitava. Após cada um deles consultar o seu manual concluíram que teriam de se apoiar no algoritmo de Kruskal:

- Paula: Olhem este aqui tem um problema que é mais ou menos do tipo do nosso.
 Hélder: No livro que eu tenho não tem grande coisa.
 Paula: Mas este tem, fala de um sistema ferroviário.
 Sofia: O nosso também tem aqui alguns exemplos. Estamos a ficar com pouco tempo, vamos ver só um.
 Paula: Eu estou a perceber este. Agora, os vértices são as estações e no nosso caso vão ser..
 Sofia: Lê em voz alta
 Paula: Aqui diz que é um novo algoritmo, o de Kruskal ou do avarento. (GA, 17-05.2010)

Os elementos do grupo GSSM encontraram no manual analisado pela Paula um exemplo no qual se apoiaram para responderem à terceira questão do seu problema. Quando a professora os questionou sobre a razão de não terem efectuado qualquer pesquisa na Internet, para responderem a esta alínea, a Paula respondeu que “demora mais tempo e nos livros é mais fácil, porque às vezes estão lá coisas parecidas” (NC, 17-05-2010).

Estes alunos conseguiram aplicar corretamente grande parte dos conhecimentos de grafos. Embora não tenham conseguido, numa primeira fase, responder corretamente a todas as questões do problema que originou este trabalho de projeto, pois tinham referido que era impossível existir um circuito, mostraram autonomia na pesquisa, na interpretação da informação e uma boa capacidade de se organizarem para realizar as suas tarefas.

Antes da apresentação final, os elementos do grupo GSSM, organizaram-se e distribuíram novamente as tarefas entre si. Começam por decidir qual o produto final que iriam elaborar:



Assim, esta semana serviu para escolhermos um método de apresentação que não apresente os mesmos erros do que utilizamos na primeira apresentação e, escolhemos também qual seria o trabalho final que iramos entregar à professora. Após várias propostas dos diferentes membros do grupo escolhemos utilizar um power-point para a apresentação e um placar como trabalho final.

Figura 35: Relato sobre as estratégias escolhidas (Hélder, RS, 20-05-2010)

O grupo GSSM finalizou as respostas às questões do problema do trabalho de projeto e começou a pensar na sua apresentação e no produto final. Tendo noção das dificuldades que sentiram nas apresentações anteriores, resolveram pesquisar na Internet e ouvir as ideias de cada um para depois tomarem decisões.

nesta semana, acabamos o trabalho de projeto e começamos a preparar a apresentação do produto final. As dificuldades sentidas foi arranjar a melhor forma de apresentar. Para isso procuramos informações na internet e ouvimos as ideias de cada um.

Figura 36: Dificuldades sobre a preparação da apresentação final (Paula, RS, 20-05-2010)

Os alunos do grupo GSSM, sentem-se satisfeitos pela forma como estão agora a trabalhar e reconhecem que estão no bom caminho, como refere a aluna Sofia:

Quanto ao grupo no princípio não gostava do seu funcionamento, porque por vezes trabalhávamos individualmente e não em grupo. Mas à medida que o tempo ia passando, percebemos que a melhor forma de tirar rendimento do trabalho era dividir as tarefas e, depois confrontarmos as nossas ideias e, após isto elaborarmos uma resposta.

Figura 37: Relato sobre o trabalho do grupo (Sofia, RF)

Fase 5: Apresentação e divulgação do trabalho de projeto

Na apresentação final, o grupo GSSM começou por explicar à turma o seu trabalho:

- Sofia: O nosso trabalho é formado por vários pontos e realizou-se em várias fases. Na nossa apresentação daremos as respostas às questões do nosso problema e terminaremos com uma explicação sobre o que é o nosso produto final.
- Hélder: Ao longo do nosso trabalho fizemos várias pesquisas e uma delas foi irmos à junta da nossa freguesia pedirmos o seu símbolo.
- Paula: Tentamos também arranjar forma de vocês conseguirem ver melhor o nosso percurso, isto é, acompanharem a passagem pelas várias arestas e vértices e aí arranjamos num site da Net uma animação que nos ajudou muito. (GA, 26-05-2010)

A Sofia começou por explicar as imagens colocadas no primeiro slide do PowerPoint, justificando as suas escolhas com o facto de estas se relacionarem com o trabalho do grupo. De seguida, a Paula começou por explicar o grafo relativo ao mapa das ruas de recolha de lixo

doméstico da freguesia de Sande S. Martinho, afirmando que assinalaram os vários cruzamentos com os vértices e as ruas com as arestas. Posteriormente, apresentou a resposta à primeira alínea da primeira questão do problema do grupo:

Paula: Para encontramos o nosso caminho com início e fim no mesmo local, começamos por eulerizar o nosso grafo, pois como possui vértices de grau ímpar não é um grafo de euler:

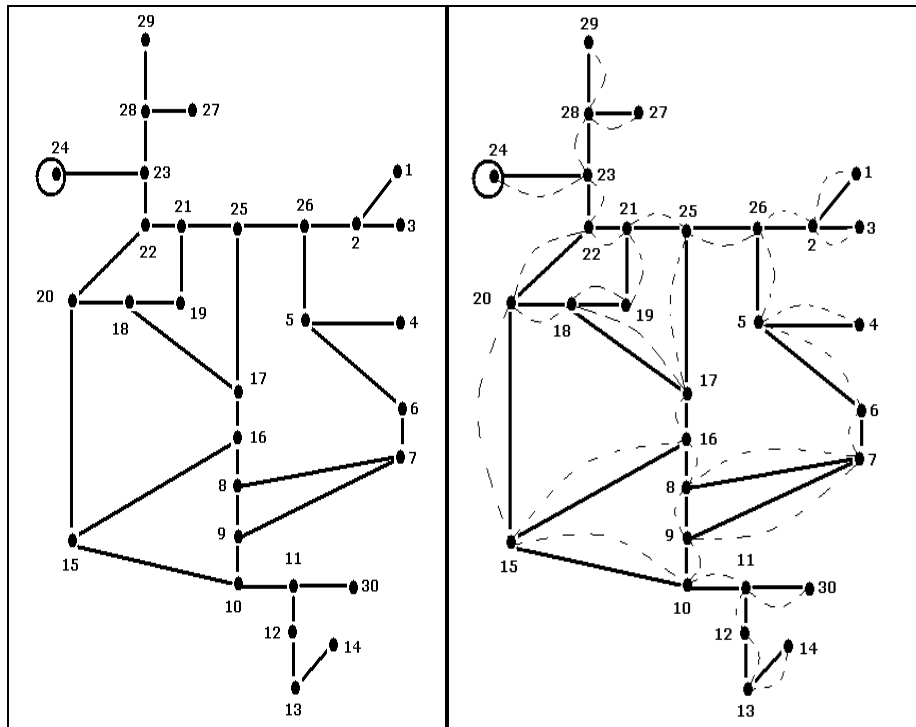
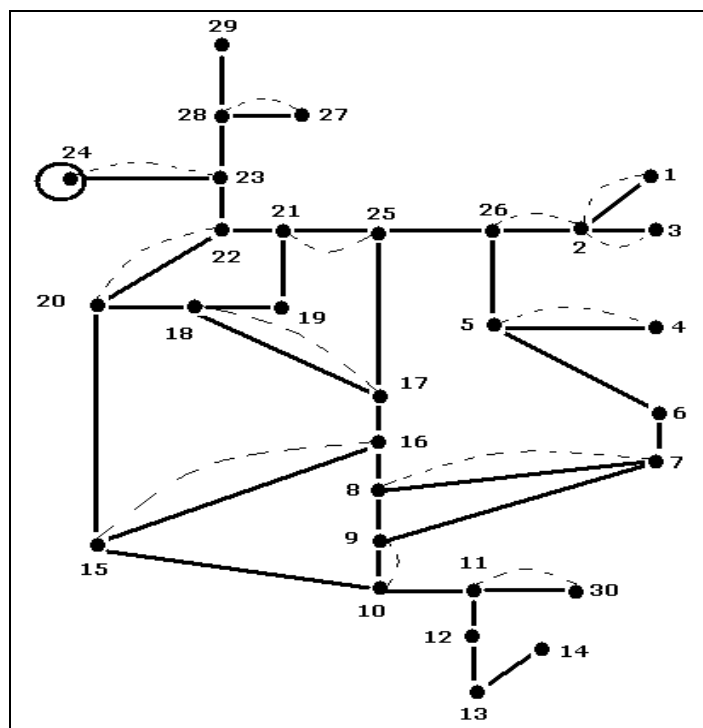


Figura 38: Grafo do mapa de ruas de Sande S. Matinho e Eulerização.

Paula: Como puderam ver o nosso grafo está eulerizado. Acreditamos que é a melhor eulerização, porque fizemos várias tentativas e o melhor percurso (circuito) por nós encontrado tem início e fim no vértice 29. Agora vamos ver o percurso por nós encontrado, se finalizar noutro vértice diferente daquele onde se iniciou, ou seja o nosso caminho. Neste caso é o Hélder que vai explicar.

Hélder: Começámos por apresentar uma tabela que nos ajudou a ver quais os vértices que tinham grau par e ímpar e de seguida efetuamos o percurso, que como poderá se ver, se inicia no vértice 29 e finaliza no 13



nº do cruzamento	Grau Inicial	Grau após eulerizado
1	1	2
2	3	4
3	1	2
4	1	2
5	3	4
6	2	4
7	3	4
8	3	4
9	3	4
10	3	4
11	3	4
12	2	4
13	2	4
14	1	4
15	3	4
16	3	4
17	3	4
18	3	4
19	2	4
20	3	4
21	3	4
22	3	4
23	3	4
24	3	4
25	3	4
26	3	4
27	1	2
28	3	4
29	1	4
30	1	2

Figura 39: Tabela com os graus dos vértices e grafo

O grupo assinalou a vermelho os vértices de grau ímpar permitindo localizá-los em qualquer momento no grafo. Na tabela apresentada, o grupo comete uma incorreção quando referem “grau após eulerizado” ao invés de “grau após duplicação da aresta”. Porém, a estratégia escolhida para assinalar as arestas que estavam a ser percorridas foi eficaz, já que conseguiram, através de uma animação retirada do site “www.glitter-graphics.com”, mostrar ao grupo turma o percurso que estava a ser efectuado. A apresentação da solução encontrada à segunda questão foi feita pela Sofia

Sofia: A resposta à nossa segunda questão foi obtida com base em dois algoritmos por nós estudados: o algoritmo da cidade mais próxima e do peso das arestas. O melhor percurso é dado pelo algoritmo da cidade mais próxima.

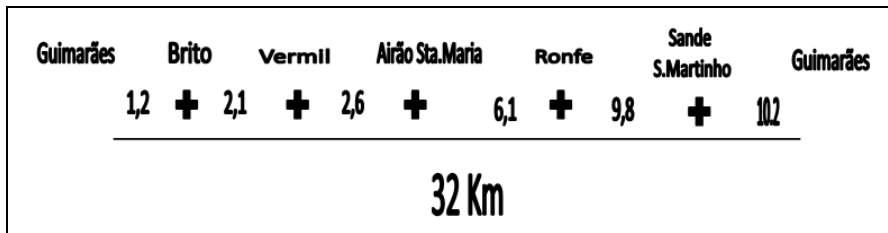


Figura 40: Percurso obtido pelo algoritmo da cidade mais próxima

A resposta à terceira questão foi novamente dada pela Sofia.

Sofia: Na nossa terceira questão, fomos ver o que dizia o algoritmo de Kruskal e construímos a árvore geradora mínima, que nos dá a menor distância, onde teremos de colocar o saneamento. Veremos primeiro o grafo do local onde queremos melhorar e depois a árvore a árvore geradora mínima. (GA, 26-05-2010)

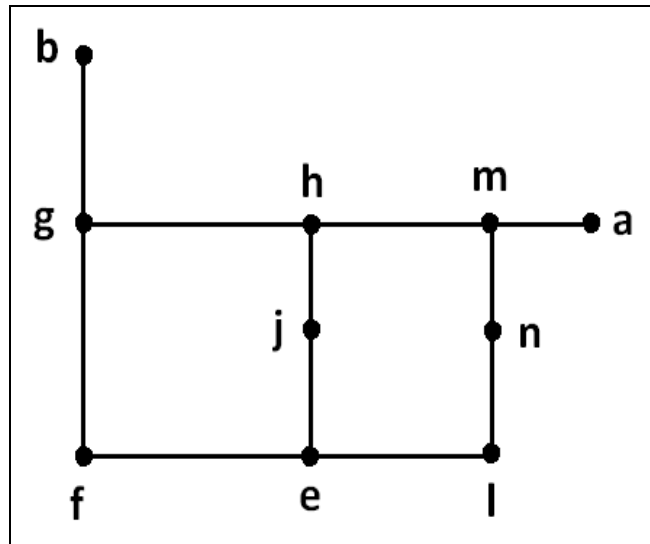


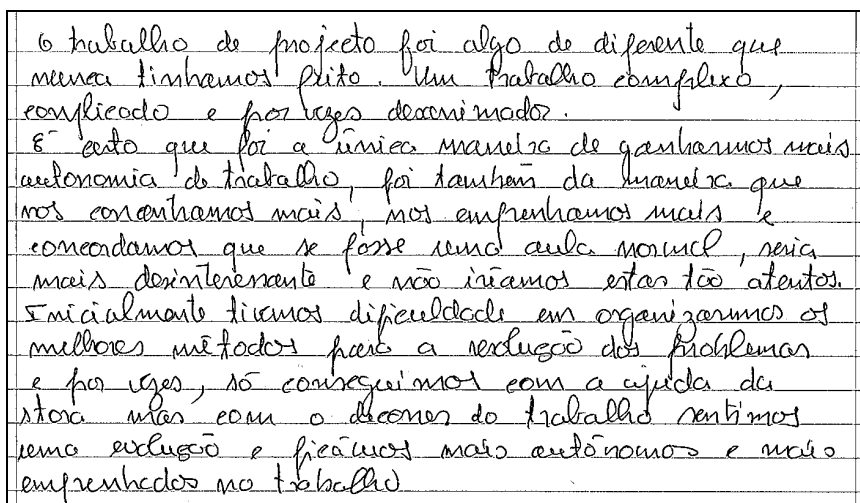
Figura 41: Árvore geradora mínima

Sofia: Concluimos que para melhorar a nossa rede de saneamento, é necessário cobrirmos uma distância de 2850m e que isso custará 42750 Euros. (GA, 26-05-2010)

O grupo GSSM não elaborou um grafo ponderado com as distâncias entre os vários locais por onde iria passar o presidente de câmara, tendo apenas apresentado o percurso final. Na apresentação realizada ao grupo turma, consultavam as distâncias diretamente da tabela.

O grupo GSSM, recorreu novamente a efeitos retirados do site “www.glitter-graphics.com”, para fazer o traçado da árvore geradora mínima.

Na apresentação final, para além de terem rectificado a resposta dada à alínea a) da 1.ª questão, tiveram a preocupação de melhorar substancialmente o material utilizado. Finalizada a sua apresentação, os elementos deste grupo, elaboraram um texto que depois foi utilizado, juntamente com textos de outros grupos, para a elaboração de uma notícia no Jornal da sua escola.



O trabalho de projecto foi algo de diferente que nunca tínhamos feito. Um trabalho complexo, complicado e por vezes desanimador. É certo que foi a única maneira de ganharmos mais autonomia de trabalho, foi também da maneira que nos ensinamos mais, nos enfrentamos mais e recordamos que se fosse uma aula normal, seria mais desinteressante e não iríamos estar tão atentos. Inicialmente tivemos dificuldade em organizarmos os melhores métodos para a resolução dos problemas e por vezes, só conseguimos com a ajuda da tutora mas com o decorrer do trabalho sentimos uma exclusão e ficámos mais autónomos e mais envolvidos no trabalho.

Figura 42: Texto elaborado pelo grupo S.S.M para a notícia de jornal da turma

Os alunos do grupo GSSM manifestam ter consciência de que este trabalho foi diferente de outros trabalhos já realizados e embora mostrem sentimentos de desânimo na fase inicial, reforçam a ideia de que a sua realização contribuiu para o aumento da autonomia e responsabilização dos elementos do grupo GSSM. Referem também que, com o desenvolver do trabalho, aprenderam a organizarem-se e a trabalhar em grupo. No final do período apresentaram o trabalho realizado aos Encarregados de Educação e evidenciam sentimentos de orgulho pelo trabalho realizado, como expressa Sofia: “ senti-me importante quando apresentava o nosso trabalho aos encarregados de educação” (E).

6.2. Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem de grafos

Início da realização do trabalho de projeto. No princípio do estudo de grafos, os alunos do grupo GSSM consideravam o trabalho de projeto como sendo um trabalho de grupo inserido num projeto. Para os alunos deste grupo, o trabalho de projeto associa-se à realização de um inquérito e à construção de gráficos:

Por trabalho de projeto entendo a realização de um projeto, como por exemplo, um inquérito (Sofia, Q);
O produto final, foram uns gráficos das perguntas feitas no inquérito; é um trabalho longo que se faz dentro e fora da sala de aula (Hélder, Q);
É um trabalho inserido num projeto (Paula, Q).

Os alunos referem algumas características do trabalho de projeto defendidas por diferentes autores, como por exemplo, a realização de um projeto, desenvolvido dentro ou fora da sala de aula e com uma duração mais ou menos longa, mas são entendidas pelos alunos como uma consequência da realização de trabalhos de grupo em Estatística.

Na realização do trabalho de projeto, a Sofia prefere trabalhar individualmente do que em grupo.

Durante a realização do trabalho de projeto. Durante o estudo dos grafos, os alunos desenvolveram as seguintes atividades: (1) criação de regras para o funcionamento do trabalho de grupo e de interação com a turma; (2) elaboração do problema promotor do trabalho de projeto; (3) resolução de problemas complementares e de exercícios relacionados com a aprendizagem dos grafos. No que toca ao cumprimento das regras, os elementos deste grupo esforçaram-se por cumprir as regras estabelecidas em grupo turma no início do trabalho de projeto, especialmente nas situações de dúvidas:

Algumas vezes o grupo não estava de acordo com a opinião de outros colegas, todavia discutíamos e acabávamos por resolver o problema, que envolvia a opinião de todos os membros do grupo (Paula, RS, 12-04-2010);
Para ser mais fácil, todos tínhamos uma tarefa e depois discutíamos sobre a resolução, porque assim cumpríamos as regras (Hélder, RS, 12-04-2010).

As dúvidas surgidas no início do trabalho foram esclarecidas à medida que os alunos realizavam os diferentes problemas complementares, adquirindo assim algumas noções básicas relativas aos grafos, tal como afirmam Paula e Sofia: “com este problema complementar comecei a perceber melhor os conteúdos relativos aos grafos” (Paula, RS, 19-04-2010); “foi interessante apercebermo-nos com a realização de exercícios sobre os grafos como estes podem simplificar muito os nossos problemas” (Sofia, RS, 19-04-2010).

A partilha em grupo turma dos diferentes processos de resolução gera alguns atritos mas também desenvolve nos alunos uma consciência da possibilidade de diferentes formas de fazer, como exemplifica a afirmação de Sofia: “até a mim me custou assumir que existem formas mais simples de chegar a uma resposta do que aquela que tinha trabalhado com o meu

grupo, mas aprendi a aceitar os métodos dos outros, assim como os meus erros” (RS, 19-04-2010). Para esta aluna, o bom funcionamento do grupo originou um sentimento de contentamento quando afirma que “estou muito orgulhosa do meu grupo, do nosso desempenho e do nosso esforço” (RF).

Relativamente à elaboração do problema, estes alunos sentiram dificuldades porque, como reconhece Paula, “nunca tinha ouvido falar de grafos e não sabia que problema é que devia criar (...) o meu grupo revelou algumas dificuldades, tais como, encontrar um caminho que iniciava em A e terminava em D” (RS, 12-04-2010). A construção do grafo relativo ao mapa das ruas onde era realizada a recolha de lixo não foi uma tarefa fácil para este grupo porque, como dá a conhecer Sofia, “no início foi uma grande confusão pois não sabíamos por onde tínhamos de começar” (RS, 26-04-2010,).

O cumprimento de prazos pelo grupo GSSM foi sempre respeitado, o que é realçado por Hélder quando considera que “o grupo mostrou-se muito responsável nos prazos e na elaboração das tarefas” (RF). O sentido de responsabilidade que norteou o trabalho que realizaram fez com que superassem o atraso inicial que tinham em relação a outros grupos:

O meu grupo, que era o mais atrasado no final no fim da resolução da primeira questão, consegui não só, dar resposta a todas as alíneas do problema antes de todos os outros, como também conseguimos ter a apresentação e o produto final prontos, enquanto os outros grupos ainda estavam a pensar o que fazer. (Sofia, RF)

A realização do trabalho de projeto foi para os elementos do grupo GSSM uma experiência que lhes permitiu: (1) aprender a trabalhar com grafos para facilitar a nossa percepção do mapa (Sofia, RF); (2) vencer dificuldades o que tornou o trabalho mais interessante e motivador (Paula, RF); e (3) desenvolver a autonomia e aumentar a nossa responsabilidade (Hélder, RF).

Após a realização do trabalho de projeto. No final do estudo de grafos, os alunos consideraram que o trabalho de projeto é “um trabalho que exige muito esforço de nossa parte e tem de ser real (Paula, E), que exige “sermos responsáveis para chegarmos ao produto final” (Hélder, E).

Ao compararem o trabalho de projeto com outras metodologias de trabalho realizadas anteriormente, estes alunos consideraram que o trabalho de projeto é mais complicado, que tem de haver organização e obriga a efetuar pesquisas para dar resposta aos problemas:

- Sofia: Este foi mais complexo.
Hélder: Nenhum foi como este, tem de haver organização, temos de dar muito de nós.
Sofia: Os outros eram mais simples, recolhíamos inquéritos, víamos quanto nos dava e estava feito.
Paula: Nos outros, praticamente aplicávamos o que já sabíamos, aqui tivemos muitas vezes de procurar para podermos responder. (E)

Durante a realização de todo o trabalho, o confronto de opiniões entre os elementos do grupo e com o grupo turma contribuiu para compreender melhor os conceitos e a sua aplicação:

- Paula: No início, não ouvíamos as ideias uns dos outros.
Hélder: Não estávamos habituados a este tipo de trabalho.
Paula: Às vezes um dizia uma coisa e o outro dizia outra e cada um tinha a sua ideia.
Prof.: E acharam interessante haver ideias diferentes?
Sofia: No início era difícil e existiram diversas chatices, principalmente eu e a Paula que somos muito competitivas, depois começamos a perceber que se trabalhássemos juntas tínhamos mais possibilidades.
Paula: No início, um fazia isto, o outro fazia aquilo e não confrontávamos, mas depois quando nos fizeram aquelas críticas começamos a dividir tarefas e depois juntávamos tudo, confrontávamos e era mais fácil compreender. (E)

Embora os alunos já tivessem tido vários trabalhos em grupo, reconhecem que com a realização do trabalho de projeto verificaram que é importante saber ouvir, dar a sua opinião ao grupo, pensar como um todo, manterem-se unidos e desenvolver a capacidade de comunicação com os outros:

- Sofia: No início cada um pensava por si.
Hélder: Fomos melhorando esse aspecto e aprendemos a ouvir-nos.
Sofia: E todos deram a sua ideia.
Hélder: Queríamos ouvir a opinião de todos.
Sofia: Quando acabávamos a resolução dos problemas, dávamos um tempo para ver se todos já tinham acabado.
Hélder: Para ver se todos tinham percebido.
Sofia: Pensávamos em grupo.
Hélder: Sabíamos que tínhamos de trabalhar. Não só para nós percebermos, mas também para mostrar aos outros.
Prof.: Esse mostrar significa o quê?
Hélder: Fazer os outros compreender o que estávamos a fazer. (E)

Os alunos destacam vantagens na elaboração do trabalho de projeto em grupo, tais como o cumprimento de regras, o respeito pela opinião dos outros, a autonomia e a aprendizagem realizada através da pesquisa efectuada:

- Sofia: Ganhámos autonomia, aprendemos a trabalhar em grupo e a respeitar as opiniões dos colegas.
- Hélder: Quando confrontávamos ideias, tentávamos até alguém desistir.
- Paula: Também a responsabilidade que tivemos de aprender a ter, porque sabíamos que cada um de nós tinha de cumprir a sua parte, para andarmos para a frente.
- Sofia: Fomos à Internet, fomos ao nosso manual, à Biblioteca consultar livros, vimos os livros que a professora trouxe, porque queríamos também demonstrar no nosso trabalho a importância que os grafos têm e com isso aprendemos muitas coisas e surpreendemos os nossos colegas. (E)

Apesar de tudo, nem sempre foi fácil trabalhar e aprender em grupo:

- Sofia: Ao início, ainda não estávamos bem unidos, ainda não estávamos prontos para trabalharmos todos juntos. Estávamos tão habituados a serem os stores a ensinar-nos as coisas vezes sem conta e desta vez fizemos a atividade sozinhos.
- Hélder: Tínhamos de descobrir por nós!
- Sofia: Estávamos mais habituados a decorar as coisas do que a utilizá-las mesmo. No início sentimos falta de ter a stora a explicar a matéria.
- Paula: Sentimos falta da segurança e sentíamos falta de alguns conceitos para nos ajudar a resolver as questões mais facilmente.
- Sofia: No início, a complexidade mexeu com os nossos sentimentos e houve alturas em que nos sentimos revoltados.
- Hélder: Não tínhamos autonomia, porque nunca tínhamos feito nada assim. (E)

Para os alunos, as maiores dificuldades de trabalharem em grupo foram sentidas no início, enquanto não dominavam os conceitos dos grafos. A aprendizagem de alguns conceitos contribuiu para simplificar a realização do trabalho. Reconhecem que existiram momentos onde desejaram que fosse a professora a explicar a matéria, para poderem resolver as questões mais facilmente. Com o tempo a forma de se relacionarem e de trabalharem em grupo foi mudando e os alunos deste grupo ambicionavam por conseguir fazer melhor:

- Paula: Eu no início acho que o grupo estava um pouco distante, mas ao longo do trabalho começamo-nos a envolver.

- Hélder: Porque não estávamos a conseguir ao início.
Paula: A falta de autonomia, eu acho.
Hélder: No início não tínhamos.
Paula: E por isso era negativo.
Sofia: Mas nós queríamos ser os melhores e trabalhamos para isso. O produto final obrigou-nos a encontrar fora da sala de aula. Dentro da sala de aula, conseguimos avançar muito bem e depois das nossas primeiras dificuldades não sentimos necessidade de nos reunirmos antes, apenas quando foi o produto final, encontramos-nos para ultimar pormenores, para ensaiar a apresentação e para ver se esta era eficaz.
Hélder: Aprendemos a matéria de uma forma divertida e aprendemos a argumentar melhor. (E)

Ao analisarem retrospectivamente o trabalho realizado, os alunos consideram que a aprendizagem através do trabalho de projeto foi eficaz, que os estimulou a desenvolver a argumentação e o sentido crítico:

- Hélder: Eu acho que foi importante, porque aprendemos a matéria e também aprendemos a ser mais autónomos, a ter mais organização, ganhámos sentido crítico e aprendemos a argumentar melhor.
Sofia: Eu acho que o mais importante foi aprendermos a respeitarmo-nos uns aos outros, aprendermos a dar a nossa opinião e se o trabalho se iniciasse hoje mudaria a minha atitude para com o grupo. (E)

Os alunos destacam que foi importante trabalhar uma situação real, o que tornou este trabalho mais interessante, como exemplificam as afirmações de Paula e de Hélder: “acho que tornou o trabalho mais interessante e mais real” (Sofia, E); “tornou-se diferente estar a trabalhar numa situação real, conhecida por nós” (Hélder, E). Ao expressarem assim o seu sentimento relativamente à metodologia seguida, os alunos gostariam de aprender outros conteúdos matemáticos com a mesma metodologia como aprenderam os grafos:

- Paula: Não é estar na aula a fazer exercícios e a ouvir teoria.
Sofia: Tivemos que estar envolvidos
Hélder: Foi como se fôssemos professores de nós próprios
Sofia: Isso pelo menos a mim deu-me muita força. (E)

A Sofia, aluna que viveu durante vários anos na Suíça, refere que a realização dos vários relatórios a estimulou a aperfeiçoar a escrita, enquanto Hélder e Paula afirmam que foi uma forma de refletirem sobre o trabalho realizado:

- Sofia: Eu esforcei-me por escrever melhor e tentei escrever com lógica.
- Paula: Quando escrevia o relatório, pensava no que poderíamos ter feito diferente.
- Hélder: Reavivávamos o que tínhamos feito e preocupava-me em escrever para a professora compreender. (E)

No final, os alunos consideram que apesar de terem existido alguns momentos menos bons, ficaram surpreendidos pela capacidade que tiveram de vencer obstáculos:

- Paula: Eu nunca pensei que ultrapassava assim as minhas dificuldades. Foi estimulante e contribui para a minha autoestima.
- Sofia: Aprendemos a trabalhar em grupo, ficámos mais unidos e começámos a trabalhar mais eficazmente.
- Paula: No início estávamos perdidos e sentimos várias dificuldades. Depois fizemos uns problemas complementares e a professora deu-nos uma pequena ajuda.
- Hélder: Percebemos que os grafos servem para muitas coisas e que simplificam muito e fomos ganhando mais autonomia.
- Paula: Às vezes estávamos a fazer um exercício e não conseguíamos e depois não tínhamos a capacidade de parar e acalmar e ficávamos ali a discutir e a desfazer os miolos até conseguir chegar à resposta.
- Sofia: E depois percebemos que em vez de discutir mais valia estar a falar uns com os outros e perceber e começou a dar frutos. (E)

Os alunos estão contentes com o resultado conseguido na elaboração deste trabalho. A aprendizagem de grafos permitiu clarificar os objectivos do trabalho que estavam a realizar, e motivou os alunos. A autoestima, as interações existentes no grupo e a qualidade do trabalho em desenvolvido em grupo foram reforçados com este trabalho de projeto.

CAPÍTULO 7

ESTUDO DE CASO DO GRUPO AIRÃO SANTA MARIA

O grupo de Airão Santa Maria (GASM) é composto por quatro alunos, dos quais três deles não apresentam qualquer retenção ao longo do seu percurso escolar, três são meninas – Tatiana, Sara e Inês – e um é rapaz – Rui –, que apresenta uma retenção no 10.º ano. Estes alunos provêm de agregados familiares com uma escolaridade equivalente ao 2.º ciclo, com exceção da mãe da Tatiana que possui o 9.º ano. Os elementos deste grupo pretendem, com exceção do Rui, prosseguir os seus estudos no ensino superior. Apesar das suas expectativas, estes alunos obtiveram antes do início deste estudo as seguintes classificações à disciplina de Matemática: Tatiana, 11 valores; Sara, 10 valores; Inês, 10 valores; e Rui, 8 valores.

A Tatiana é uma aluna com alguma capacidade de argumentação e gosta de ler. Reconhece que não gosta de Matemática e não sabe distinguir entre um exercício e um problema. Costuma estudar apenas para os testes e gosta de trabalhar em grupo porque lhe permite “ter várias opiniões com as quais podemos conjugar” (Q), embora admita que “podemos desconcentrar-nos devido ao número de pessoas” (Q).

A Sara é uma aluna pouco aplicada à disciplina de Matemática, estuda somente antes dos testes e gosta de ver televisão e passear. Prefere estudar individualmente do que em grupo porque “me concentro melhor” (Q). Para a Sara, trabalhar em grupo significa “realizar uma tarefa com várias pessoas” (Q), mas que não aprecia muito porque “às vezes dá confusão e barulho” (Q) embora reconheça potencialidades quando os alunos se “ajudam uns aos outros” (Q).

A Inês é uma aluna com bastantes dificuldades de aprendizagem, de interpretação e de estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos. Quando tem alguma dificuldade diz que “pergunto logo à professora, porque bloqueio” (Q). Para esta aluna, trabalhar em grupo significa que “todos os elementos devem trabalhar da mesma forma, de maneira a todos tirarem partido da aprendizagem” (Q). Gosta de realizar as tarefas em grupo porque considera que “há uma maior facilidade na resolução dos problemas, pois são várias pessoas a pensar” (Q), embora admita que “por vezes dispersamos e acabamos por não deitar atenção ao problema” (Q).

O Rui é um aluno com uma boa capacidade de argumentação, gosta de ler, de ver televisão e ir ao cinema e apenas estuda antes dos testes. Manifesta preferência por realizar as

tarefas individualmente porque “me ajuda a concentrar, a fazer por mim, no fundo obriga-me a pensar” (Q). Para o Rui, trabalhar em grupo significa que “todos os elementos do grupo devem pensar que estão ali para trabalhar e não para uma simples brincadeira” (Q), razão que o leva a afirmar que não gosta deste método de trabalho porque “a concentração não é a mesma, o empenho não é tanto, a aprendizagem creio que não seja tão elevada” (Q).

7.1. Realização do trabalho de projeto

Fase 1: Definição do tema

Dos alunos do grupo de Airão Santa Maria, a Tatiana e a Sara reagiram positivamente quando lhes foi dito que iriam realizar um trabalho de projeto com o intuito de aprenderem os conteúdos relativos aos modelos de grafos, enquanto Rui e Inês não se mostraram muito entusiasmados:

- Tatiana: Nós o ano passado também fizemos e foi muito fixe! Agora podíamos estudar as médias dos cursos de entrada na universidade.
- Rui: Foi fácil!
- Sara: Podíamos estudar as empresas locais ou a poluição, por exemplo.
- Prof.: Pois, não sei se poderemos trabalhar exatamente esses temas...querem sugerir mais alguns?
- Tatiana: O estado das estradas daqui, porque as que estão junto à escola estão muito mal!
- Inês: Ou então os filmes, era fixe!
- Rui: Professora, e vamos ter teste? Era fixe que não. (GA, 18-03-2010)

Pelos temas que apresentaram, os alunos parecem ligar o trabalho de projeto com os trabalhos que realizaram nos anos lectivos anteriores em Estatística. Para Rui, mais importante que o trabalho a realizar estava a preocupação de saber se iria realizar ou não um teste. Tatiana foi o elemento do grupo que apresentou mais sugestões de temas a desenvolver no trabalho. Verificando que as sugestões apresentadas pelos alunos não se adaptavam ao estudo dos grafos, a professora perguntou se tinham ouvido falar da campanha que estava a ser realizada nos meios de comunicação social sobre “Limpar Portugal”. A Tatiana, a Sara e o Rui comentaram que ouviram nas notícias do dia anterior (NC, 18-03-2010). Ao saber da importância que esta iniciativa estava a ter junto da comunicação social e a nível político, a professora desafiou os alunos a analisarem um texto intitulado ‘Movimento Limpar Portugal já tem mais de 30 mil voluntários inscritos:

- Tatiana: O padre falou disso nos avisos da missa de sábado.
- Sara: Sim e muita gente de muitos locais vai participar.
- Rui: Por isso é que se chama limpar Portugal. Mas no outro dia vi uma reportagem e a empresa que transporta ainda não se propôs a pagar tudo.
- Prof.: Tudo o quê?
- Inês: O lixo stora. Para as pessoas tirarem o lixo do meio do monte é preciso pagar para essas empresas retirarem o lixo.
- Rui: Pagar ao sucateiro.
- Sara: Não é só isso, o estado vai financiar todo este projeto, mas se não fosse o estado ninguém se propunha a limpar Portugal, porque já viu o que era, a stora limpar e depois ainda tinha de pagar pelo lixo dos outros?
- Rui: Isso era a boa ação. (GA, 18-03-2010)

Os alunos do grupo GASM apresentaram argumentos sobre o tema do lixo, evocando os custos económicos que a realização de uma campanha deste tipo implicava. Aproveitando o entusiasmo dos alunos, a professora desafiou-os a procurarem na Internet vídeos que retratassem a problemática do lixo e da poluição. Dos vários vídeos encontrados, propôs à turma a visualização e a discussão sobre três deles.

- Rui: O problema é que são os grandes países e os mais ricos que fazem grande parte da poluição. Muitas vezes são os ricos que pagam aos mais pobres para poderem lá colocar o lixo, em vez de gastarem algum dinheiro e fazerem um tratamento correto dos lixos. Depois fazem-se campanhas como esta, mas fica tudo igual. Daqui a dois meses vais aos montes e voltas a ver tudo cheio de lixo. As pessoas preferem colocar nos montes do que ter de pagar para arrumar.
- Sara: Mas as pessoas começam a ter a noção da importância de se mudarem as mentalidades e esta iniciativa é uma prova disso.
- Rui: E achas que isso vai mudar muito? Só mudaria se por exemplo, as pessoas não tivessem de pagar para poderem arrumar os seus lixos.
- Prof.: Mas por exemplo, hoje em dia se compramos um electrodoméstico novo a própria casa que vende normalmente fica com o velho e antigamente não era assim, já houve uma mudança.
- Tatiana: Olha, se mudar um bocadinho já é bom, pelo menos fala-se do tema! Nós copiamos a ideia de outros e pode ser que outros nos copiem a nós. (GA, 18-03-2010).

Na discussão que se gerou na turma, os elementos deste grupo realçam a importância que o tema do lixo tem para a sociedade presente e futura e a necessidade de haver mudanças na forma como o assunto é tratado pelos *media*. Rui parece não estar muito convencido de que essas mudanças acontecerão realmente, porque pondera que o factor económico influencia as

ações das entidades responsáveis. A participação entusiasta deste grupo contribuiu para se definir no grupo turma que o tema do trabalho de projeto seria relacionado com o lixo doméstico nas suas freguesias, factor que determinou a formação dos grupos.

Fase 2: Criação do Problema

Após a definição do tema, os alunos deste grupo principiaram, com base no mapa das ruas da freguesia onde moravam, a formulação do problema a tratar no seu trabalho de projeto:

- Tatiana: Mas que problema é que havemos de criar?
Rui: Não tenho a mínima ideia. Vamos dizer que o nosso problema é criar um problema.
Inês: Sabemos lá que problema é que devemos inventar com o mapa?!
Tatiana: Ainda estamos a começar e já está complicado!
Rui: E eu que pensava que isto ia ser simples, acho que antes quero teste! Esperamos que a professora passe por aqui para nos ajudar.
Inês: Vamos mas é chamá-la. (GA, 25-03-2010)

O entusiasmo inicialmente demonstrado pelos alunos deste grupo parece esmorecer-se pela indefinição que o mapa lhes causou, o que não lhes permitiu elaborar um possível enunciado de um problema que interligasse tal mapa e o lixo.

- Prof.: Então, ainda não escreveram nada sobre o vosso problema?
Tatiana: Professora, não estamos a conseguir perceber que problema é que devemos escrever.
Prof.: O vosso mapa tem assinalado as ruas onde é feita a recolha de lixo doméstico na vossa freguesia, certo? Reparem, nós estivemos a falar e surgiram várias ideias interessantes. Todos concordamos que o factor económico é importante e que condiciona o comportamento cívico das pessoas. Por isso, por exemplo, é importante saber se o camião quando recolhe o lixo nas ruas do vosso mapa se faz o percurso mais adequado, isto é, se será possível efetuar um percurso sem que se repitam ruas, por exemplo. Mas se tiver de repetir, como poderemos descobrir qual o percurso que repete menos ruas? Isto são, alguns exemplos de ideias que podereis contemplar no enunciado do vosso problema.
Sara: Então temos de inventar um problema que use o que sabemos neste mapa, por exemplo, se há algumas ruas onde não seja preciso passar, pode ser, não é?
Prof.: Bem, a questão é que sabemos que o camião tem de passar pelas ruas que estão aqui, porque este é um mapa real, por isso não sei se fará muito sentido dizer que não passa.
Rui: Pode-se pôr mais contentores.

- Prof.: Onde?
Rui: Nas outras ruas e assim não tinha de passar.
Prof.: Ó Rui, mas o mapa diz que passa, por isso... (GA, 25-03-2010)

Seguindo as indicações da professora, os alunos deste grupo elaboraram o enunciado de um primeiro problema:

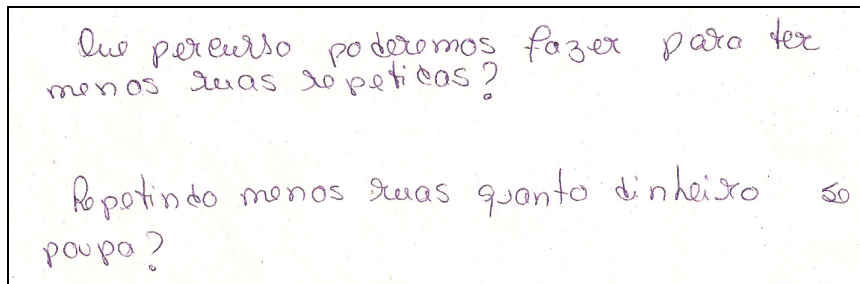


Figura 43: Primeira formulação do problema do grupo

O enunciado do problema surge na forma de questões que transcrevem algumas das ideias que a professora sugeriu, o que parece revelar a dificuldade dos alunos de elaborar problemas. Essa dificuldade parece dever-se ao desconhecimento dos conteúdos sobre grafos e à falta de hábito de formular problemas:

- Prof.: Reparem, não acham que primeiro deveriam fazer uma pequena introdução e só depois apresentar as questões?
Tatiana: Como se estivéssemos a contar uma história?
Prof.: Por exemplo e depois existem outros pormenores que vocês devem atender, relativamente à forma como é efectuada essa recolha.
Sara: Como assim, professora?
Prof.: Já repararam na forma como é feita a recolha do lixo nas vossas ruas? A recolha é feita só de um lado ou dos dois ao mesmo tempo?
Tatiana: Eu acho que na minha rua os homens pegam no lixo dos dois lados da rua, quando passam.
Prof.: Então reparem que nesse caso o camião só passa uma vez, senão teria de passar duas, não é? (GA, 25-03-2010).

Atendendo às considerações realizadas pela professora, os alunos continuaram a elaboração do seu problema, que derivou para a sua versão definitiva através da sua reformulação após a apresentação à turma e a interação com a professora de Português.

Um grupo de cidadãos da Freguesia de Airão, no âmbito da iniciativa limpar Portugal, verificou que, o lixo existente na sua freguesia era abundante. Decidiu pensar numa forma de recolha do lixo que melhorasse alguns aspectos, nomeadamente o percurso de recolha.

Supondo que a recolha é feita dos dois lados da rua, que percurso poderá ser realizado pelo camião do lixo se este:

- 1.1) iniciar e finaliza o percurso na mesma rua;
- 1.2) iniciar e finalizar o percurso em ruas diferentes;

2) Verificando que várias ruas onde era efectuada a recolha do lixo necessitavam de ser arranjadas, decidiram propor ao presidente de câmara que as mandasse arranjar. O presidente respondeu-lhes que esse era um problema de várias freguesias e que apenas tinha disponível uma equipa de trabalhadores para efetuar todos esses arranjos num só dia.

Devido à escassez de meios, o presidente de câmara, sugeriu-lhes que elaborassem uma proposta de percurso, de modo a percorrer o menor número de quilómetros possíveis e que permitisse à equipa de trabalhadores sair de Guimarães, fazer os arranjos nas freguesias Ronfe, Brito, Sande S. Martinho, Santa Maria de Airão e Vermil e regressar a Guimarães no final do dia. Que percurso poderá o grupo de cidadãos sugerir, sabendo que as distâncias entre as várias freguesias são as que estão na tabela a seguir?

	Guim.	S.S. Martinho	Brito	Ronfe	Vermil	Airão STª.Maria
Guim.	_____	9.8Km	6.1Km	10.3Km	11Km	12Km
S.S. Martinho	9.8Km	_____	6.7Km	10.2Km	9.2Km	10.3Km
Brito	6.1Km	6.7Km	_____	9.9Km	2.6Km	3.8Km
Ronfe	10.3Km	10.2Km	3.9Km	_____	1.3KM	2.1Km
Vermil	11Km	9. Km	2.6Km	1.3KM	_____	1.2Km
Airão STª.Mar	12Km	10.3Km	3.8Km	2.1Km	1.2Km	_____

3) O mesmo grupo de cidadãos verificou que uma zona da freguesia ainda não tinha canalizações para água potável. Aproveitando a boa vontade revelada pelo presidente de Câmara, resolveram propor a realização de uma canalização. Que percurso e que orçamento poderão apresentar, sabendo que cada metro de saneamento custa 15 euros?

Figura 44: Versão final do problema do trabalho de projeto

O problema elaborado pelo grupo GASM inspira-se na campanha limpar Portugal e centra-se na elaboração de diferentes percursos (circuitos e caminhos). Permite a aplicação dos conteúdos programáticos contemplados na disciplina, nomeadamente, os grafos eulerianos e hamiltonianos.

Fase 3: Planeamento do trabalho e problemas complementares

Na realização do seu trabalho, este grupo não elaborou qualquer plano que lhes servisse de orientação, procurando de um modo intuitivo obter a resposta para a primeira questão do

problema do seu trabalho de projeto. Observando a atividade do grupo, a professora reparou que os alunos estavam a dispersar-se:

- Prof.: Então, como está o trabalho?
Rui: Prof. isto é canja! É só seguir as ruas...
Prof.: E então já conseguiram responder?
Tatiana: Stora, eu acho que isto é um bocado confuso!
Sara: São muitas ruas!
Prof.: Mas o Rui parece estar a conseguir, não é?
Rui: É, mas temos de estar muito atentos, senão perdemo-nos! Elas não me acompanham!
Prof.: Mas nas regras que vocês elaboraram, é suposto que vocês dialoguem, ou não?
Rui: Sim, mas elas não querem!
Prof.: Então vou sugerir que parem um bocadinho o que estão a fazer e que tentam primeiro resolver uns problemas complementares que eu acho que vos poderão ajudar nesta tarefa. (GA, 14-04-2010)

Para Rui parecia ser fácil elaborar o percurso pretendido, mas o mesmo já não acontecia para as suas colegas. Ao ver que o grupo não estava a funcionar como deveria, a professora relembrou as regras instituídas no grupo turma sobre o trabalho em grupo e sugeriu a realização do 1.º problema complementar (Anexo 5) para que os elementos do grupo adquirissem alguns conceitos básicos sobre grafos.

- Tatiana: Isto aqui é o rio?
Rui: Sim e isto são as ilhas.
Tatiana: E o que se pretende é...
Rui: Queremos passar pelas pontes, sem repetir.
Inês: Vamos experimentar, começamos aqui?
Rui: Acho que não dá! Eu já fiz e repeti, vejam! Se começarmos aqui nesta vamos repetir a do meio e isso acontece sempre.
Tatiana: Mas e se iniciarmos noutra?
Rui: Já experimentei, não dá. Continua sem dar, repete sempre alguma ponte.
Tatiana: E se começar aqui, já experimentaste?
Rui: Já, já vos disse que acontece sempre a mesma coisa, há sempre alguma ponte que temos de repetir. Vamos mas é despachar-nos que os outros já acabaram.
Sara: Pronto, está bem, então vamos dizer que não dá, é isso?
Rui: Sim, eu digo. (GA, 14.04.2010)

Na resolução do 1.º problema complementar, Rui liderou o trabalho do grupo não se preocupando com as dúvidas das suas colegas. Apesar de a Tatiana insistir para experimentarem outras opções, ele prefere dar continuidade ao que está a fazer, alegando que os outros grupos já terminaram. Este aluno oferece-se para ser o porta-voz do grupo, o que é aceite pelos colegas sem que tentem compreender e confirmar o percurso que Rui apresenta à turma: “não é possível iniciar e finalizar no mesmo local onde se iniciou o percurso sem repetir pontes, como se pode ver neste desenho” (GA, 15-04-2011).

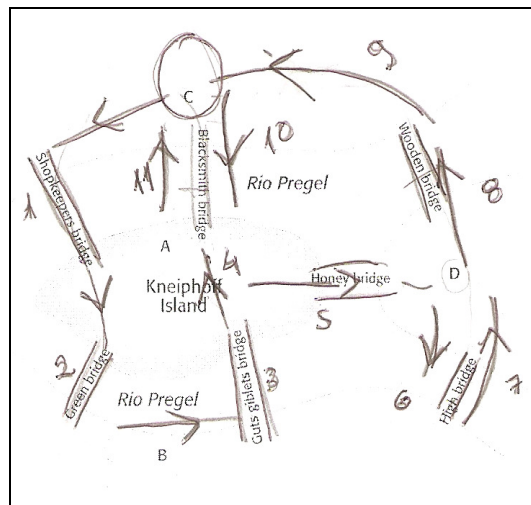


Figura 45: Resolução do 1.º problema complementar

Apesar das ilhas e margens estarem representadas com letras, na resolução que apresenta, Rui optou por representar as pontes e alguns pontos de terra com números, como é o caso de uma das margens que assinala com a letra C e o número 9. Associou às várias pontes um número que indicava a ordem do percurso, o que originou alguma confusão e incoerência sobre o que representavam os números. Algumas pontes estavam associadas a um número e outras a dois, como é o caso da ponte “High bridge”. Rui conclui que é necessário repetir duas pontes para conseguir finalizar no mesmo local onde iniciou, ou seja na margem “C” ou o “número 9”. Este aluno não compreendeu que a letra C representava toda a margem. Só quando foi questionado por um colega da turma sobre o que significava o número 9 é que o aluno se consciencializou da má interpretação que fez da imagem da tarefa que estava a trabalhar.

A confusão que resultou da apresentação deste grupo, fruto de uma má interpretação da imagem e da estratégia utilizada para indicar o percurso, permitiu introduzir as primeiras noções relativas aos grafos, nomeadamente a noção de grafo, vértice e aresta. No sentido de

proporcionar aos alunos a aquisição de mais algumas noções de grafos necessárias para conseguirem resolver de um modo autónomo as questões do problema gerador do seu trabalho de projeto, a professora propôs a resolução de um 2.º problema complementar (Anexo 5), o qual apresentava um mapa com as ruas onde os alunos deveriam proceder à recolha do lixo. Os elementos do grupo GASM, apesar de já terem sido confrontados com a noção de grafo, não a utilizaram na elaboração das respostas desta tarefa. Optaram antes por percorrer o mapa com várias cores sempre que pretendiam elaborar um percurso:

- Tatiana: Vamos tentar fazer um grafo?
- Rui: Para quê? Isto é simples, não tem nada que saber! Olha, querem ver se existe um percurso a iniciar em A e finalizar em A é só seguir as letras, olha, A, C ...
- Tatiana: Mas se conseguirmos fazer um grafo como a professora fez, parece ser mais simples.
- Inês: E assim aplicamos a matéria e a professora vê. Eu acho que podíamos tentar.
- Rui: Olha, fazei vós, eu vou fazer assim, é muito mais rápido. Não sei para que é necessário fazer lá o grafo para responder a isto!
- Sara: Eu acho que devíamos fazer. Afinal isto não é para dar esta matéria?
- Rui: Está bem, então fazei vós, é só para demorar mais tempo. Cá por mim vou mas é despachar isto e não preciso de nenhum grafo, ides ver. Vamos mas é despachar isto que é o que interessa.
- Tatiana: Ó Sara, vamos experimentar nós. Temos aqui estes pontos, que devem ser os...
- Inês: A professora disse vértices.
- Tatiana: Então, vamos pôr A, B, C, D...
- Sara: E e F. Agora temos de pôr estas linhas.
- Tatiana: Como? Ah, a professora disse que eram as pontes. Mas aqui como é que vamos pôr?
- Rui: Olhai, ainda estais a fazer o esquema e eu já vou para a terceira.
- Tatiana: Olha se ajudasses era mais rápido.
- Rui: Vós é que quisestes ir por aí.
- Tatiana: Olha dás cá uma ajuda!
- Inês: E se não fizéssemos isso?
- Tatiana: Pronto, está bem. (GA, 19-04-2010)

O Rui considera um desperdício de tempo construir um grafo para responder às questões do 2.º problema complementar. Estando em desacordo com os seus colegas de grupo, este aluno decide resolver a tarefa sozinho. Tatiana, Sara e a Inês tentam construir o grafo da situação mas acabam por desistir perante as dificuldades que sentiram e por constatarem que o seu colega de grupo conseguia responder às questões da tarefa enquanto elas ainda nem

sequer tinham finalizado a construção do grafo. No momento da apresentação, Rui, enquanto porta-voz do grupo, desenhou no quadro um mapa igual ao da figura da tarefa e preocupou-se em fazer as linhas exatamente como estavam representadas na figura:

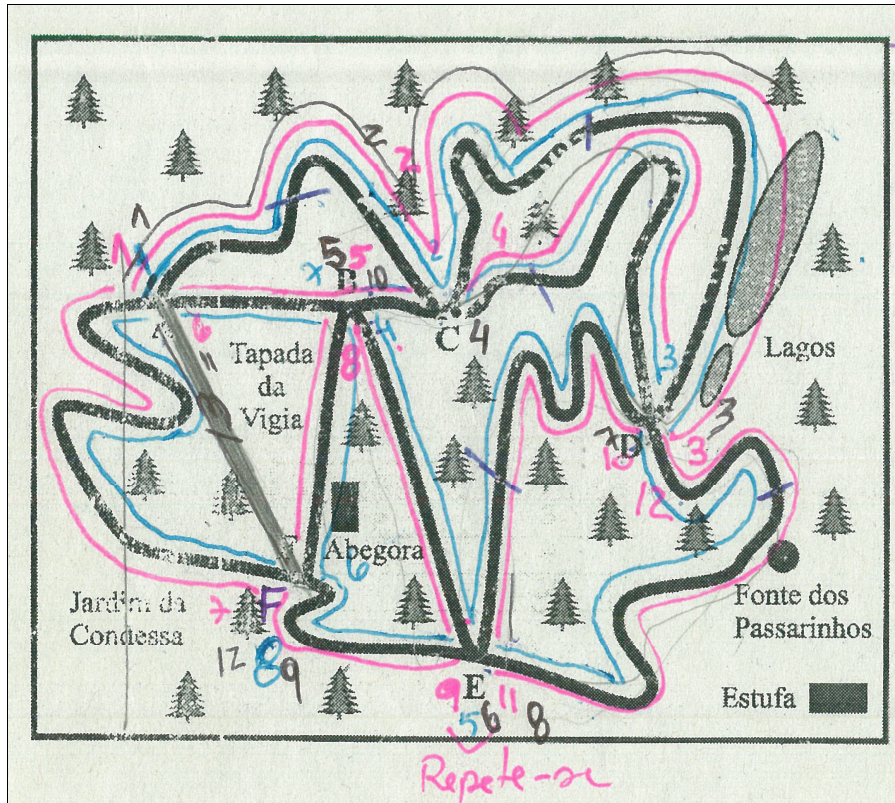


Figura 46: Resolução do 2.º problema complementar

Depois de responder oralmente que era impossível efetuar um percurso com início e fim em A, nas perguntas seguintes Rui traçou sucessivamente no desenho, a diferentes cores, os vários percursos que realizou. Sem que tivesse finalizado a exposição para a turma, a professora questionou-o:

- Prof.: Rui, como é que conseguiste ver que era impossível a resposta que destes à alínea a)? Olhaste para o mapa e viste, foi isso?
- Rui: Experimentei.
- Prof.: Como assim, como sabes que experimentaste todas as possibilidades?
- Rui: Da mesma maneira que os outros grupos. Fiz algumas tentativas e vi que não dava.
- Prof.: És capaz de mostrar à turma algumas tentativas que tenhas feito?
- Rui: Claro, olhe, fui de A para B, depois fui a C, depois D e depois, hum, acho que tenho de apagar, porque está um pouco confuso, porque já tem muitas linhas. (GA, 21-04-2010)

O que inicialmente estava claro para Rui, quando o mapa já tinha várias cores e a professora lhe pediu para voltar à alínea a) e mostrar por que razão a sua resposta era impossível, tornou-se confuso para si próprio continuar a explicação. Foi necessário apagar do mapa algumas linhas para não se perder na demonstração do percurso que pretendia realizar. Depois de apagar o quadro, Rui voltou a desenhar a figura insistindo no desenho das ruas, exatamente como se apresentavam no mapa. Como o grupo turma começava a dispersar a sua atenção, a professora questionou de novo o aluno:

- Prof.: É importante para a resposta fazer um desenho exatamente igual?
 Rui: Para mim foi.
 Prof.: Então as curvas todas são importantes?
 Rui: Exatamente.
 Sara: Falta do E ao D.
 Rui: Então, nós fizemos várias tentativas, sair de A, vir a E, de A a B, de A a C, que é o que fica mais próximo.
 Prof.: Como sabes que é o que fica mais próximo?
 Rui: Porque tentei todos.
 Prof.: Não estou a perceber.
 Tatiana: Fica mais próximo de só repetir uma, repetir menos ruas.
 Rui: Claro é isso a prof percebeu!
 Prof.: Não, não percebi, tem alguma distância? Outra coisa que ainda não percebi é a influência das curvas. Dizias há bocado de A para E, de A para B e nunca te referiste se era curva ou não. Afinal qual a influência das curvas? (GA, 21-04-2010)

Rui continuava agarrado ao mapa, dando importância à forma das ruas, enquanto a professora tentava que compreendesse que isso não era relevante para a resposta que devia dar. Para este aluno, a falta de rigor nas palavras parece não ser significativo visto que as suas colegas indiciam estar a compreendê-lo. Com giz de várias cores, Rui volta a ‘percorrer’ novamente as ruas do mapa com cores distintas. Porém, no final de mais algumas tentativas, apercebe-se que a estratégia escolhida torna o percurso do mapa construído no quadro muito confuso, optando por apresentar as várias respostas dos percursos que encontrou:

<u>AE</u>	<u>A-4</u>	<u>A-D</u>	<u>A-A</u>
A-1	A-1	A-1	A-1
C-2	C-2	C-2	C-2
D-3	D-3	D-3	D-3
B-4	C-4	C-4	C-4
E-5	D-5	B-5	B-5
F-6	E-6	A-6	E-6
B-7	F-7	F-7	D-7
A-8	B-8	B-8	E-8
F-9	F-9	E-9	F-9
A-10	A-10	D-10	B-10
		E-11	A-11
		D-12	F-12
			A-13

Figura 47: Nova resolução do 2.º problema complementar.

Rui representa as ruas com números e cores distintos para estabelecer a ordem com que estas estavam a ser percorridas, o que gerou ainda mais confusão por existirem ruas que estavam associadas a mais do que um número. Quando os alunos da turma olhavam para o mapa, para se orientarem e perceberem qual a rua que estava a ser percorrida, acabavam por se perderem. Da análise que fizeram da sua apresentação à turma, os elementos do grupo GASM compreenderam que a sua estratégia não foi eficaz e que o grupo turma não valorizou a forma como desenvolveram a tarefa, tal como é relatado por um dos alunos deste grupo no relatório semanal:

Na segunda feira a professora propôs-nos fazer um trabalho, resolver um problema com algumas questões. O trabalho era completo, o meu grupo teve dificuldades no início, tentamos resolver com graça, mas não conseguimos, então achamos melhor ficarmos pelo desenho que vinha na folha que era um bocinho confuso, mas para nós foi-nos mais fácil de realizar. A aula baseou-se neste trabalho. Na quarta foi apresentar a turma o que nos tínhamos feito, as nossas estratégias, como o fazemos e conta que para nós, a maneira que tínhamos feito tinha sido a melhor, mas os outros grupos não partilharam da mesma opinião, tornou-se confuso, e bastante polémico até, o que nos percebemos também foi que quando chegamos ao quadro verificamos que deixávamos sempre algo por fazer, e que realmente não utilizamos as melhores técnicas mas também não era assim tão incompreensível.

Figura 48: Testemunho sobre a apresentação intermédia (Sara, RS, 26-04-2010)

As apresentações realizadas pelos grupos à turma serviram para a professora explicar alguns dos conceitos de grafos necessários aos alunos para poderem prosseguir o seu trabalho de projeto. Partindo das respostas dos alunos às alíneas do 2.º problema complementar, a professora formalizou mais alguns conceitos de grafos.

Fase 4: Desenvolvimento do trabalho de projeto

Dos elementos do grupo GASM, quando passaram novamente à resolução do problema do seu trabalho de projeto, Sara começou por tentar efetuar o grafo representativo do mapa da freguesia de Airão:

- Tatiana: O que estás a fazer?
 Sara: Estou a tentar fazer o grafo. Se os outros conseguiram, nós também temos de conseguir
 Tatiana: Isto é o quê, uma rua?
 Sara: É e tudo isto são ruas. As letras vamos pôr aqui.
 Tatiana: Então eu vou começar a pôr e vocês dizem com que ligam.
 Inês: Então vamos começar. Põe A, B, C, agora liga o A ao B, o B liga ao C, o C liga ao D.
 Tatiana: O quê? O D, espera ainda não pus o D.
 Sara: Acho melhor pormos primeiro as letras todas, vamos contar e depois pomos 1,2,3, 4... 20..., as letras não vão chegar!
 Inês: Pomos o resto números.
 Tatiana: Sim, quando acabarmos pomos números. Isto vai ficar uma confusão com tantos números e letras! Ó Rui, podias ajudar.
 Rui: Vou acabar primeiro do que vós.
 Tatiana: Olha, isto é de todos, não é para cada um fazer como quer!
 Rui: Mas olhai para vós, só para construir o grafo, já é uma confusão e eu já estou a pôr o percurso.
 Sara: É, mas depois vai acontecer como no outro problema, quando quiseres explicar fica uma confusão e ninguém percebe e nós é que ficamos mal.
 Rui: Veremos, vou mostrar que não preciso dos grafos para nada. (GA, 26-04-2010)

O Rui continuava a não querer colaborar na construção do grafo, nem a trabalhar em grupo com as suas colegas, talvez por ainda não estar convencido da sua utilidade. Esquecendo-se das regras acordadas por todos os grupos, continuava a querer trabalhar individualmente. Desta vez porém as suas colegas de grupo não se deixaram convencer e tentaram elaborar o grafo representativo do mapa do grupo, apesar das dificuldades com que se deparavam:

- Tatiana: Olhem, e aqui temos de pôr alguma coisa?
- Sara: Não sei, isto são tantas linhas, que até custa a ver, depois tem mais linhas, nunca mais acabam as linhas. Deve ser melhor chamar a stora, para ver o que vamos fazer com estas linhas todas!
- Tatiana: Stora?
- Prof.: Sim, e então?
- Tatiana: Stora, isto está um pouco complicado. Aqui é necessário pôr um ponto?
- Prof.: Um vértice? Sim, porque repara o camião passa aqui e vem daqui para aqui, logo estes dois vértices têm de estar ligados por uma aresta.
- Tatiana: Mas assim vamos ter para aí 50 vértices!
- Prof.: Não sei, mas tendes mais alguns do que os que estão aqui, porque tudo isto são ruas por onde passam o camião, e tens de pôr uma aresta a ligar este cruzamento com este ponto.
- Sara: E depois stora?
- Prof.: Quando finalizarem o grafo, vão ver que não é assim tão complicado fazer o percurso que quereis.
- Tatiana: E como vamos saber se estamos a fazer o percurso que repete menos ruas?
- Prof.: Bom, primeiro vão ver se é um grafo de Euler, se não for, tereis de eulerizar. (GA, 26-04-2010)

Apesar do Rui não querer colaborar na construção do grafo, as suas colegas de grupo constroem-no e avançam para a resposta à primeira questão do seu problema: “indicar um percurso de recolha do lixo, iniciando e finalizando no mesmo local e um outro percurso a finalizar num local distinto de onde iniciou. Quando tentam proceder à eulerização do grafo, surgem algumas dúvidas sobre o que devem fazer:

- Tatiana: Agora temos de ver se é um grafo, um grafo... como é?
- Sara: De Euler. Como sabemos se é?
- Inês: Deixa ver, tem de ter os vértices com grau par, é o que diz aqui.
- Tatiana: Então não é, o A tem um. Então temos de fazer aquilo que a stora disse.
- Sara: O quê?
- Tatiana: Aquilo, eu, eule...
- Sara: Ah, isto aqui, eulerizar.
- Tatiana: É melhor chamarmos outra vez a stora. Stora?
- Prof.: Então já avançaram?
- Tatiana: Já stora, mas agora estamos outra vez sem saber o que é para fazer.
- Prof.: Então, o vosso grafo é um grafo de Euler?
- Sara: Não, tem vértices de grau ímpar.
- Prof.: Então tereis de eulerizar, para depois fazerem o circuito.
- Tatiana: Até aí já tínhamos chegado stora. O problema é esse.
- Prof.: O quê, eulerizar?

- Sara: Sim.
 Prof.: Olhem, eulerizar é duplicar as arestas até conseguirmos colocar todos os vértices com grau par.
 Inês: Mas quê stora, inventar ruas?
 Tatiana: Não vais inventar ruas!
 Sara: Temos de acrescentar pontinhos.
 Prof.: Não, vais duplicar arestas, ou seja, significa que tereis de passar por esta rua duas vezes, por exemplo. Claro que para conseguirem ter o circuito que repete menos ruas, tereis de garantir que é a melhor eulerização. (GA, 28-04-2010)

Apesar de a Tatiana ter sugerido a eulerização, após terem finalizado a construção do grafo, todo o grupo demonstra dificuldades em fazê-lo e a entender o que significa eulerizar. Ao interagirem com a professora, Tatiana, Sara e Inês conseguiram eulerizar o grafo e continuaram à procura do circuito que respondia à primeira questão do seu trabalho de projeto. Entretanto Rui muda de atitude ao aperceber-se que encontrar o circuito que pretendia não era tão fácil como julgava e ao ver as suas colegas a elaborarem o grafo:

- Tatiana: Temos de pôr uma de A para B.
 Sara: Mas agora o B tem 3.
 Tatiana: Então temos de pôr também outra a ir a C!
 Inês: Assim vamos pôr em todas!
 Tatiana: Pois, se calhar é melhor cada um de nós fazer!
 Inês: Mas só temos um grafo!
 Tatiana: Vamos fazer como aqueles [grupo de Brito], vamos tirar cópias e cada um fica com um. Também queres Rui?
 Rui: Pode ser. (GA, 28-04-2010)

Rui aceitou ficar com uma cópia ampliada do grafo que as suas colegas tinham construído. A dificuldade que estes alunos estavam a sentir para eulerizar o grafo leva-os a imitar a estratégia de um outro grupo, que resolveu tirar quatro cópias ampliadas do grafo de modo a que cada elemento do grupo pudesse realizar uma eulerização. Apesar de avançarem no seu trabalho de projeto, o grupo GASM não demonstrou até este momento uma verdadeira autonomia na realização das tarefas, nem tão pouco uma preocupação em elaborar um plano de ação. Eles procuravam observar o trabalho produzido por outros grupos e sempre que tinham dificuldades não arriscavam a tomar decisões, procurando confirmar primeiro junto da professora o que deveriam fazer a seguir. Este ritmo de trabalho manteve-se até finalizarem a resposta à primeira questão do problema, que consistia na elaboração de um caminho e de um circuito, tentando repetir o menos número de ruas possível.

No momento da apresentação intermédia, Sara desenhou no quadro o grafo que desenharam no papel:

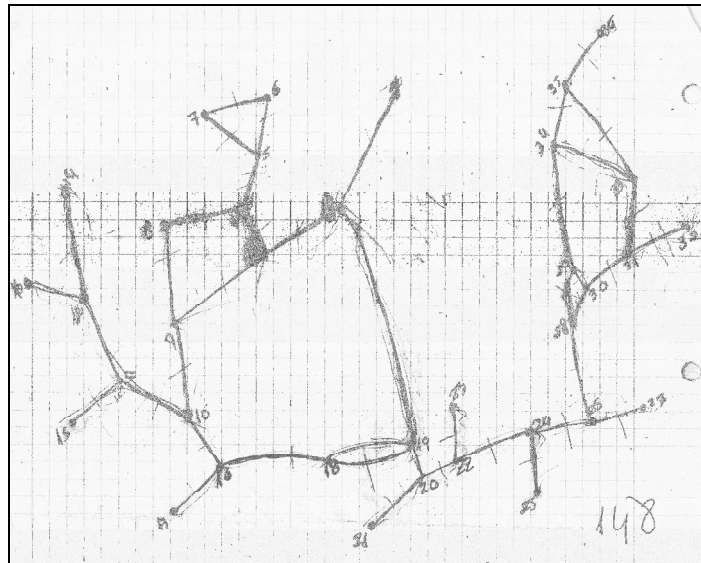


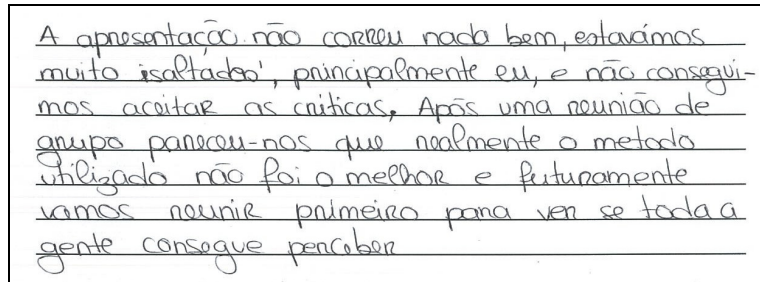
Figura 49: Primeiro grafo elaborado pelo grupo

- Tatiana: O nosso grupo fez o grafo. Os cruzamentos estão aqui e inicialmente íamos pôr letras, mas depois vimos que não chegavam e então pusemos antes números. Estas são as nossas ruas.
- Inês: Em cada rua que passarmos o Rui vai colocar um traço para saberem onde estamos a passar e a Tatiana vai escrever no quadro.
- Tatiana: Na nossa primeira questão tínhamos de começar e finalizar no mesmo ponto e vimos que para isso tínhamos de repetir ruas. O percurso que achamos que repetia menos ruas foi este. Podes começar Sara.
- Sara: A B C 4 5 6 7 4 8 9 10 11 12 14 12 13 12 11 15 11 ...
- Tatiana: Como viram repetimos 23 ruas.
- Aluno1: Mas eu acho que vocês não contaram a rua que liga B a 9.
- Rui: Como? Diz lá, claro que passamos, está riscado.
- Aluno 2: Eu também acho. Vocês repetiram e não contaram.
- Rui: É porque a Sara se enganou. Vê lá Sara, é porque te enganaste, porque no lugar contamos.
- Prof.: Mas como garantem que esse é o melhor percurso?
- Rui: Nós experimentamos várias hipóteses. (GA, 06-05-2010)

A apresentação deste grupo voltou a ser pouco eficaz. Alguns alunos da turma tiveram “dificuldades em acompanhar a sua exposição, o que motivou os elementos do grupo GASM a terem uma conversa dentro do grupo” (NC, 06-05-2011). A terminologia utilizada na exposição revelava algumas dificuldades na assimilação dos termos próprios dos modelos de grafos, como sendo a utilização do termo “ponto” em substituição de “vértice” e “percurso a finalizar no

mesmo local” em vez de “circuito”. Por outro lado, nenhum elemento do grupo foi capaz de referir que a repetição de ruas não era feita ao acaso, mas que foi consequência de terem eulerizado o grafo e ficaram atrapalhados ao serem confrontados com o facto de terem passado duas vezes numa rua e não terem contabilizado.

No final da apresentação intermédia, os elementos do grupo GASM reconheceram que não se saíram bem na apresentação à turma do seu trabalho:



A apresentação não correu nada bem, estávamos muito 'saltados', principalmente eu, e não conseguimos aceitar as críticas. Após uma reunião de grupo pareceu-nos que realmente o método utilizado não foi o melhor e futuramente vamos reunir palmeiros para ver se toda a gente consegue perceber

Figura 50: Relato sobre a apresentação intermédia (Sara, RS, 06-05-2010)

Após a apresentação intermédia, os alunos do grupo GASM continuaram o trabalho em grupo para darem resposta à segunda e terceira questão do seu problema do trabalho de projeto:

- Tatiana: Bem, agora nós queremos um percurso a passar por todas estas freguesias.
- Sara: Não é só um percurso, é o melhor percurso.
- Rui: Basta olhar para as distâncias.
- Tatiana: É, depois acontece como das outras vezes! Olhem vamos ver se existe alguma coisa para depois a prof. não nos perguntar porque é que é assim.
- Sara: Ó Tatiana, e vamos ver onde?
- Tatiana: Olha no livro, por exemplo.
- Rui: Ou na net. Eu vou ver se há net. Tens aí aqueles sites que a prof. tinha dado?
- Tatiana: Não, mas podes tentar ver se descobres alguma coisa.
- Inês: Eu vejo o livro contigo Tatiana.
- Tatiana: Olhem, aqui diz alguma coisa. Vamos ver se percebemos [começa a ler o livro]. Eu acho que é isto. Neste exemplo, eles colocam os pontos, os vértices nas localidades.
- Sara: Vamos fazer igual. Pomos um em Ronfe, outro em Brito...
- Rui: Não encontro nada. Deixa-me ver o que diz aí. Ah, e as arestas são as estradas.
- Inês: E estes números?
- Tatiana: São os km. Eles chamam um grafo ponderado. Eu acho que é isto que queremos. (GA, 10-05-2010)

O grupo reorganiza-se e parece começar a trabalhar em grupo, demonstrando alguma autonomia na realização das tarefas e na pesquisa da informação necessária para poderem responder à segunda questão do problema do trabalho de projeto. Parecem ter tomado consciência da importância de pesquisarem antes de responderem:

Como não foi elaborada relatório na semana anterior, irei falar um bocadinho das duas. Na segunda-feira passada, o nosso grupo teve de responder a 3 questões do relatório que foi elaborado para o presidente da comissão para isso recorremos à internet, mas como não teve muita ajuda, isto é não conseguimos encontrar nada que nos ajudasse, começamos a ler alguns métodos que estavam no manual e decidimos aplicar o método de Amilton

Figura 51: Relato sobre a procura da resposta à 2.ª questão (Tatiana, RS, 12-05-2010)

Na resposta à 2.ª questão “elaborar um percurso para a equipa de trabalhadores, de modo a percorrer o menor número de quilómetros possíveis, a sair de Guimarães, fazer os arranjos nas freguesias Ronfe, Brito, Sande S. Martinho, Santa Maria de Airão e Vermil e regressar a Guimarães” o grupo começa por elaborar o seguinte grafo:

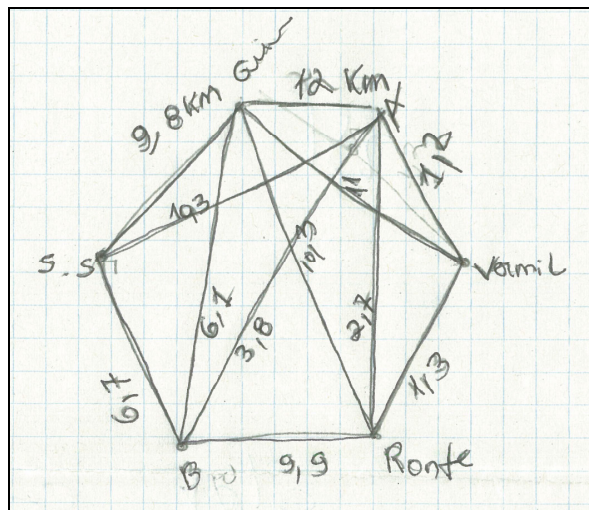


Figura 52: Grafo ponderado

Os alunos elaboram um grafo ponderado, no qual cada aresta tem associado o seu peso. Os vértices representam as localidades e os pesos das arestas simbolizam os quilómetros entre essas localidades. Considerando o algoritmo da cidade mais próxima, o grupo determina o

circuito que considera mínimo e que deve ser percorrido pelos trabalhadores responsáveis pelas obras nas várias freguesias envolvidas.

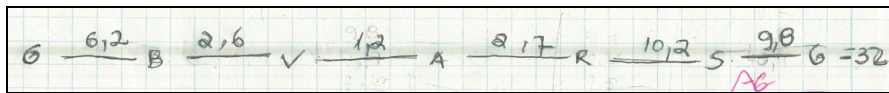


Figura 53: Circuito mínimo a iniciar em Guimarães

Partindo de Guimarães, o grupo percorre sucessivamente as localidades que se vão apresentando mais próximas, concluindo que a equipa de trabalhadores terá no mínimo de percorrer 32Km. De seguida, determinam outro circuito com base no algoritmo do peso das arestas, organizando-as por ordem crescente de peso e eliminando aquelas que fecham o circuito antes de passarem por todas as localidades pretendidas. À medida que seleccionam as arestas, vão construindo um novo grafo com as arestas aceites até formarem um novo circuito, passando por todas as localidades pretendidas:

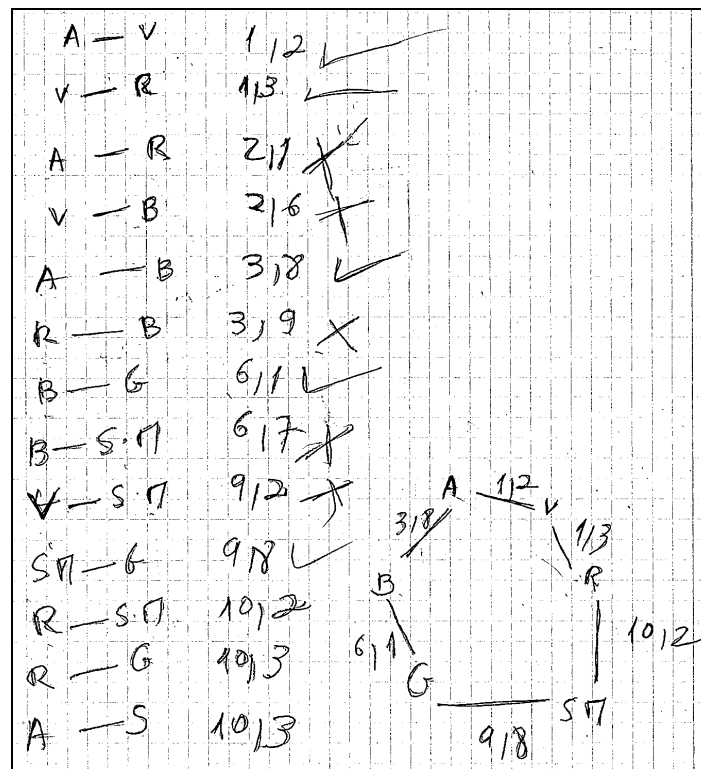


Figura 54: Elaboração do circuito com base no algoritmo do peso das arestas

A fim de obterem conhecimentos que lhes permitisse responder à última questão do seu problema do trabalho de projeto, “elaborar uma rede de água potável”, os elementos do GASM voltaram a consultar a Internet e o manual escolar:

- Sara: E agora, como vamos saber qual a quantidade de tubo?
 Rui: Nós agora queremos escolher as ruas mais curtas, para pôr tubos onde vai passar a água. Vou ver se agora encontro alguma coisa na net no Google.
 Tatiana: E quê, só pomos em algumas?
 Rui: Claro, temos de ver as que nos interessam e temos de as ligar.
 Inês: Olhem aqui no livro fala disso, vamos ver.
 Tatiana: Mas como vamos saber os quilómetros?
 Rui: Ó Tatiana, não pensas menina. Olha bem para o mapa.
 Tatiana: Mas como vais fazer, vais esticar a rua? (GA, 10-05-2010)

A Tatiana não estava a compreender porque razão o Rui estava apenas a considerar algumas das ruas e não todas as ruas dessa área do mapa. Como a Inês encontrou no livro uma situação parecida, ao analisarem o exemplo, a Tatiana questiona o grupo como poderão efetuar a medição das ruas no mapa para determinar o seu comprimento.

O meu grupo, como não sabia como medir umas ruas de Airão pensou até em pegar num carro e elaborar esse percurso, até fomos à Internet saber quais eram as ruas a que o mapa se referia mas achamos melhor medir com uma linha no gráfico e depois converter para metros.

Figura 55: Relato da Inês sobre a 3.ª questão (RS, 17-05-2010)

As distâncias foram determinadas com recurso a um fio e depois convertidas a metros através de uma regra de três simples. O grupo começou por realizar o grafo seguinte, no qual realça a negrito a árvore geradora mínima:

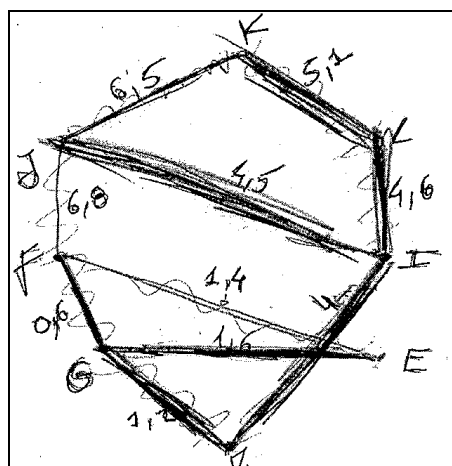


Figura 56: Árvore Geradora mínima

Na escolha da árvore geradora mínima, os elementos do grupo, após terem associado a cada aresta o respectivo peso, foram escolhendo sucessivamente as arestas de menor peso, tendo o cuidado de verificarem que não formavam nenhum circuito.

Estes alunos revelam mais autonomia na resolução da segunda e terceira questão do problema do trabalho de projeto, comparativamente com o desempenho que manifestaram na primeira, tendo revelado capacidade de compreensão, interpretação, seleção e de organização da informação.

Na preparação da apresentação do trabalho de projeto, os elementos do grupo Airão Santa Maria mostram-se entusiasmados com as ideias que reúnem:

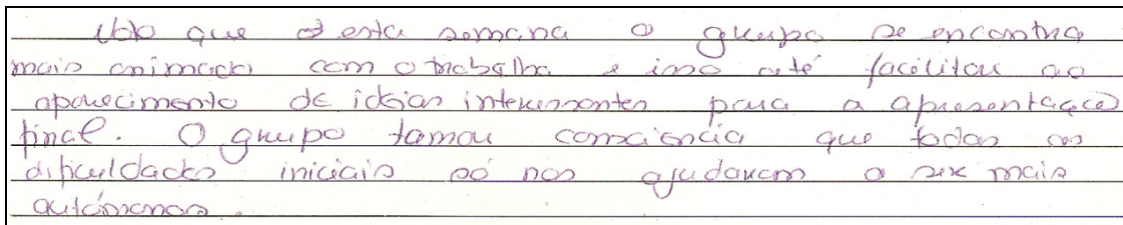


Figura 57: Relato sobre o grupo (Tatiana, RS, 17-05-2010)

Os alunos têm a consciência de que as apresentações anteriores à turma não foram bem organizadas, experiência que não pretendem repetir na apresentação final, que encaram como uma oportunidade para mudar a opinião da turma quanto ao desempenho do seu grupo:

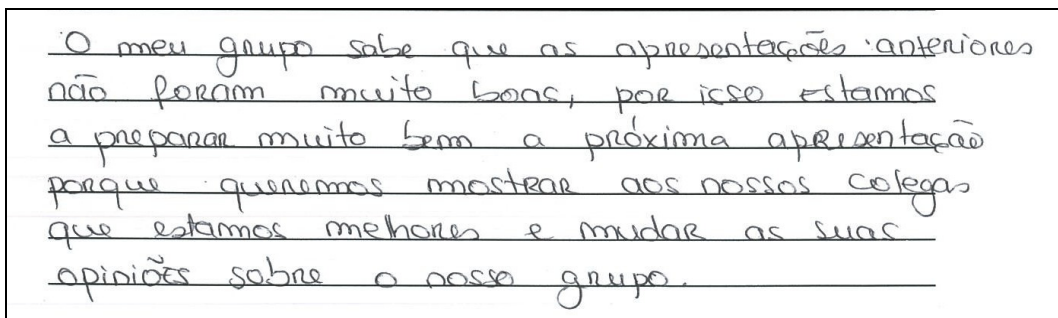


Figura 58: Relato sobre a apresentação final (Inês, RS, 17-05-2010)

Fase 5: Apresentação e divulgação do trabalho de projeto

Na apresentação final, os elementos do grupo GASM começaram por explicar em que consistia o seu trabalho. Notou-se que estavam “mais organizados do que nas apresentações anteriores e demonstravam maior cuidado nas palavras que utilizavam” (NC, 26-05-2010).

- Tatiana: Na nossa apresentação vamos começar por apresentar o grafo que construímos e que nos orientou quando procurámos as respostas para o nosso problema. No nosso grafo, os vértices representam os cruzamentos das ruas do nosso mapa e as arestas representam as ruas.
- Sara: O nosso grafo não é um grafo de Euler e por isso começámos por eulerizar o nosso grafo. Esta foi a parte mais complicada para nós, que não foi fácil. Pensamos que conseguimos a melhor eulerização, mas não o afirmámos com certeza. Mas fizemos muitas tentativas e por isso acreditámos que seja a melhor. Tal como vamos mostrar, para conseguir um circuito a iniciar em A temos de repetir 25 ruas. O Rui vai mostrar (GA, 26-05-2010)

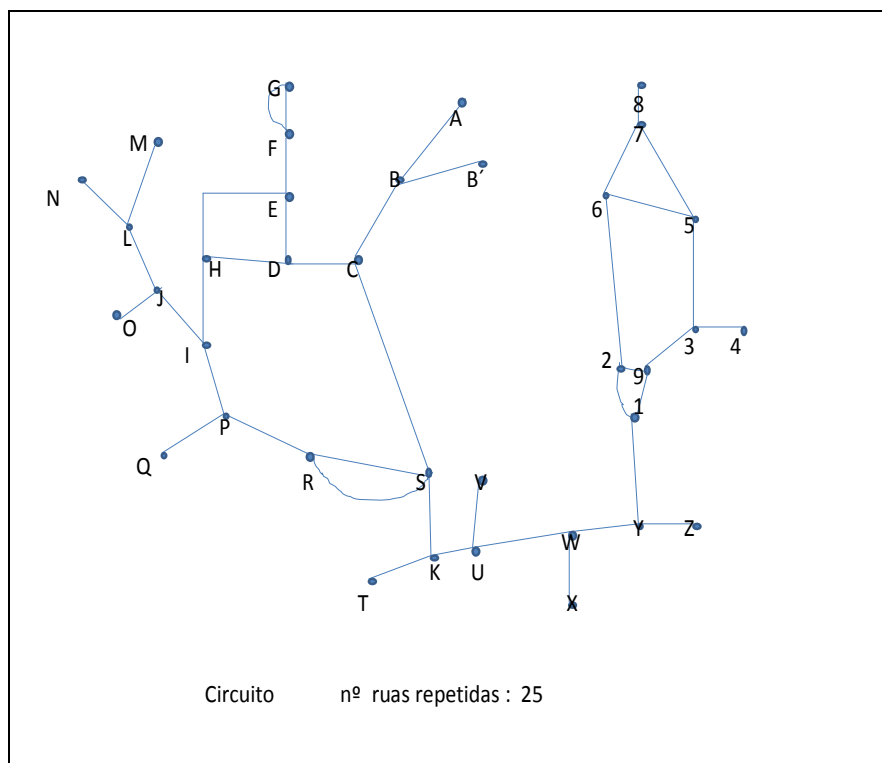


Figura 59: Grafo da apresentação final do grupo Airão Santa Maria

O grupo fez um PowerPoint com o grafo, e o Rui, com um marcador, ia traçando a vermelho as arestas que estavam a percorrer. Os restantes alunos da turma aperceberam-se que todas as arestas foram percorridas e que efetuaram a contagem das que tinham sido duplicadas. A mesma estratégia foi utilizada na elaboração do caminho.

- Tatiana: Para encontrarmos o caminho, aplicámos o teorema do caminho de Euler que nos permite ter dois vértices de grau ímpar. O nosso grupo, elaborou um caminho com início em A e fim em B. Desta vez repetimos 19 ruas e o Rui vai novamente mostrar.

Inês: Para a segunda questão fomos ver o que dizia Hamilton. Aqui elaborámos um grafo ponderado e fomos ver o que diziam os algoritmos da cidade mais próxima e do peso das arestas. Porém, como o algoritmo da cidade mais próxima deu um circuito menor, é só esse que vamos mostrar (GA, 26-05-2010).

Os alunos interagem com o grupo turma na explicação das condições do Teorema do caminho de Euler e na indicação do número de ruas que iriam repetir no percurso que estavam a apresentar. De seguida esclarecem o grupo turma sobre os algoritmos utilizados na procura da resposta à 2.ª questão do problema promotor do trabalho de projeto. Esta explicação ao grupo turma sobre o que o grupo iria apresentar a seguir, permitiu manter os alunos atentos e interessados à apresentação do trabalho deste grupo.

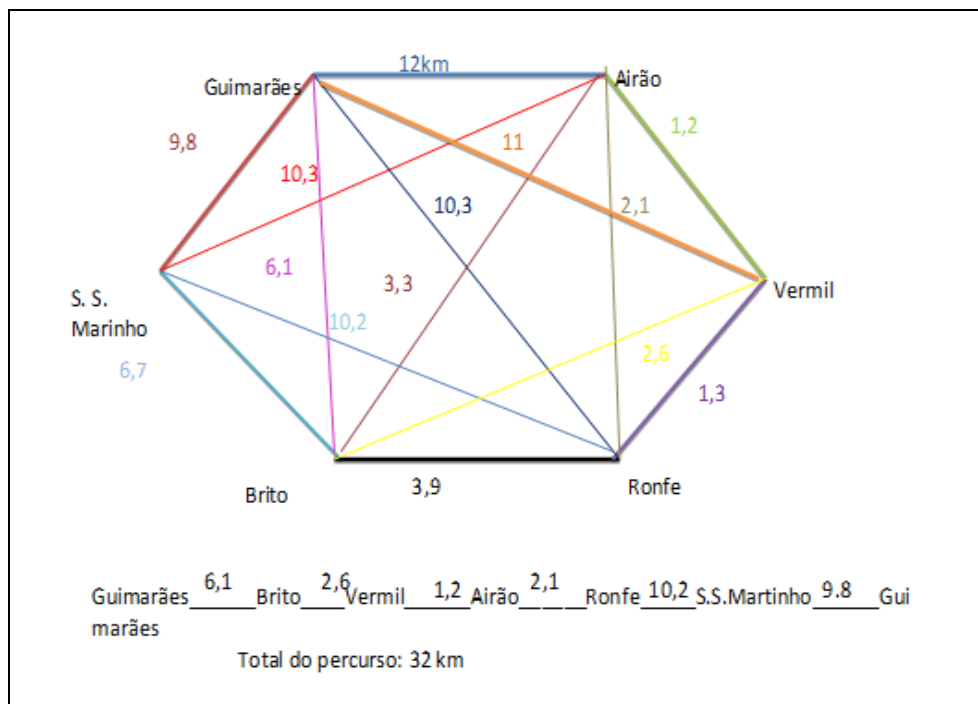


Figura 60: Grafo ponderado do circuito escolhido

Os alunos optaram por representar a cores diferentes as várias arestas e os respectivos pesos. Elaboraram o grafo ponderado e na apresentação explicaram à turma o funcionamento do algoritmo da cidade mais próxima:

Sara: Para a terceira questão, tivemos de construir a árvore geradora mínima. Começámos por medir as distâncias no mapa e depois passámos a metros. Aqui estivemos um pouco atrapalhados, mas depois, com uma linha conseguimos medir.

Rui: Após construirmos o grafo, fomos ver o que dizia o algoritmo de Kruskal. Depois de percebermos o que era uma árvore, começámos a escolher as arestas com menores metros [menos peso], tendo o cuidado de ver se não formavam um circuito até que todos os vértices estivessem ligados. (GA, 26-05-2010).

Os alunos que estão a apresentar continuam a explicar à turma a estratégia utilizada para medirem as distâncias do mapa, convertendo-as em metros. De seguida, elucidam que conteúdos utilizaram para darem resposta à 3.ª questão do seu problema do trabalho de projeto.

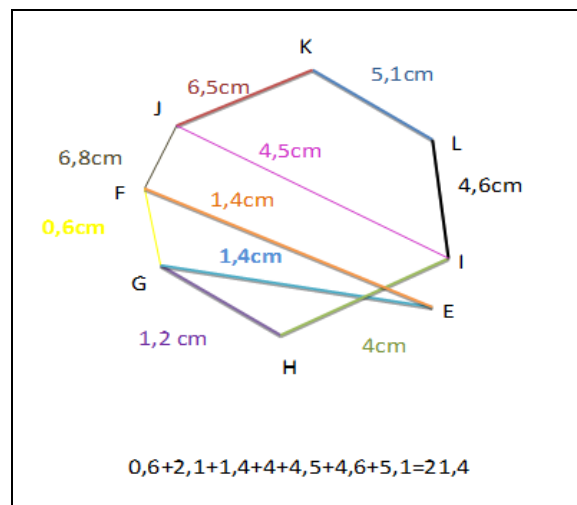


Figura 61: Árvore geradora mínima

No final, o grupo GASM apresentou à turma uma tela em ponto de cruz, o grafo das ruas de recolha de lixo doméstico da sua freguesia (Anexo 8). Os elementos deste grupo divulgaram o seu trabalho aos Encarregados de Educação, numa apresentação no final do ano, e contribuíram com um pequeno texto para a elaboração de uma notícia em nome da turma para o jornal da escola (Anexo 9):

Relatório

O trabalho ^{projeto} foi algo de diferente muito importante para nós porque é interessante, atrativo e desenvolvemos de uma forma muito ^{resulta} ~~atractiva~~ o nosso trabalho.

As primeiras semanas fo um pouco complicadas porque não nos enquadrámos muito bem de matéria.

Figura 62: Texto escrito pelo grupo G.A.S.M para a notícia do jornal

No texto que apresentam, os alunos do grupo GASM relatam a dificuldade que sentiram no início em utilizar os grafos. Apesar das dificuldades iniciais, reconhecem que o trabalho de projeto foi diferente dos trabalhos que realizaram anteriormente e que contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente.

7.2. Perspectivas dos alunos sobre a realização do trabalho de projeto na aprendizagem de grafos.

Início da realização do trabalho de projeto. No início do trabalho de projeto, os alunos do grupo GASM tendem a considerar esta metodologia de trabalho como uma forma de estudar um tema que depois deverá ser dado a conhecer, como mostram as afirmações da Tatiana e do Rui: “é um trabalho o qual serve para estatística de alguma coisa, para alguém ficar a saber” (Tatiana, Q); “estudámos um tema e vamos ter de dar conhecimento dele” (Rui, Q).

Durante a realização do trabalho de projeto. Os alunos deste grupo elaboram as seguintes atividades durante a aprendizagem dos grafos: (1) criação de regras sobre o funcionamento do trabalho em grupo e na interação com os outros grupos e com a professora; (2) elaboração do problema orientador do trabalho de projeto; e (3) resolução de problemas complementares e de exercícios relacionados com a aprendizagem de grafos. No que toca ao cumprimento das regras estipuladas no início do trabalho, este grupo nem sempre as cumpriu, como confirma a afirmação de Tatiana: “o grupo ainda não aprendeu a discutir as ideias antes de perguntar à professora. Temos de aprender que somos um grupo” (RS, 26-04-2010). Alertados de que deveriam respeitar as regras estipuladas, estes alunos procuraram mudar as suas atitudes, mas, como refere Sara, “nas trocas de opiniões nem sempre conseguimos concordar nas decisões finais” (RS, 19-04-2010). Com o passar do tempo, os alunos deste grupo compreenderam que era importante dialogarem, como exemplifica a afirmação de Sara: “falamos e confrontamos ideias e depois percebemos qual era a melhor eulerização sem chamar a professora” (RS, 26-04-2010).

Na elaboração do problema do trabalho de projeto, os elementos do grupo GASM sentiram muitas dificuldades e mostraram-se apáticos perante a tarefa que lhes foi pedida, como refere a aluna Inês: “o meu grupo teve muitas dificuldades em redigir um texto correto, não fomos autónomos, recorremos muitas vezes à professora (...) na fase inicial o grupo encontrava-se muito desorganizado e não estávamos a conseguir chegar a conclusão nenhuma” (RS, 12-04-2010).

Na resolução dos problemas complementares, tiveram algumas dificuldades em conciliar a utilização de grafos com as tarefas propostas, como exemplifica a afirmação da Tatiana: “o meu grupo teve dificuldades no início; tentamos resolver com um grafo mas não conseguimos, então achámos melhor ficarmos pelo desenho que vinha na folha” (RS, 19-04-2010). A ideia do grupo quanto à utilidade dos grafos na resolução dos problemas fez com que demorassem a perceber como se construía um grafo, porque, segundo Sara, “tínhamos um problema connosco, éramos contra a utilização dos grafos, achávamos que era mais complicado, mas no final conseguimos trabalhar com eles e percebemos que são úteis” (RS, 26-04-2010). A recusa apresentada pelo grupo sobre a utilização de grafos influenciou a qualidade das suas apresentações ao grupo turma. Na verdade, o grupo foi sistematicamente alvo das críticas da turma, o que para Tatiana se deveu “ao facto de não usarmos grafos, pois partimos logo do princípio de que era inútil, faziam com que as nossas apresentações não fossem esclarecedoras” (RS, 26-04-2010). O fraco desempenho que demonstraram perante a turma fez com que este grupo reconsiderasse a sua estratégia. Quando iniciaram a resposta à primeira questão do problema do trabalho de projeto, Sara dá conta de que “passámos logo à elaboração do grafo, que por fim até nem era assim tão difícil como tínhamos imaginado” (RS, 19-04-2010). Porém, na apresentação intermédia, apesar de terem elaborado um grafo, o grupo também revelou fragilidades tal como reconhece Inês: “a forma de apresentação não foi a mais adequada, visto que causou uma certa confusão à turma, primeiro quando estávamos a explicar o caminho e o circuito, a turma não conseguiu ver muito bem o que estávamos a fazer” (RS, 17-05-2011). As críticas que receberam dos seus colegas da turma fizeram com que este grupo voltasse a ponderar a sua prestação e a considerar que algo não estava bem. Sara esclarece que “após uma reunião de grupo chegamos à conclusão que realmente não tinha sido o melhor método, que as críticas estavam corretas e que tínhamos de fazer alguma coisa para mudar” (RS, 17-05-2010). Ao reconhecerem que não davam o melhor de si, Tatiana considera que “o grupo passou a empenhar-se mais e passámos a utilizar grafos” (RS, 17-05-2010).

Ao longo da realização deste trabalho o grupo experimentou diferentes sentimentos, tais como: (1) a compreensão de que os novos conhecimentos eram úteis porque “verificamos que nos facilitava e simplificava a realização dos problemas” (Tatiana, RF); (2) o reconhecimento da importância deste trabalho pois “percebi que se fizermos as coisas por nós, entendemos muito melhor o que é leccionado” (Inês, RF); (3) a persistência perante as dificuldades pois “percebi que nunca se deve desistir à primeira tentativa, deve-se sempre fazer as tentativas necessárias”

(Sara, RF); (4) a compreensão de quem ouve e de quem explica é importante pois “para nos podermos explicar é importante haver compreensão” (Rui, RS, 19-04-2011).

No global, o grupo demonstra satisfação pelo trabalho realizado e admite que adquiriam uma maior autonomia, como refere Tatiana:

Este trabalho foi complicado de resolver, complexo e por vezes desanimador, mas penso que todos temos a perfeita noção que se fosse numa aula normal, não sabia metade do que sei, pois aprendi a ter mais autonomia e a descobrir as coisas por mim contando com a ajuda dos colegas e por vezes da professora.
(RF)

O grupo compreende que as críticas que ouviram permitiram rectificar o que estava menos bem e que devem ser encaradas como algo de positivo, como exemplifica a afirmação de Sara: “deve-se levar a crítica como forma construtiva e não como uma maneira dos outros nos prejudicarem” (RF).

Após a realização do trabalho de projeto. No final do estudo de grafos, os alunos consideram que o trabalho de projeto “dá muito trabalho” (Tatiana, E) e “implica pesquisa, esforço, autonomia e empenho” (Sara, E). Ao compararem esta metodologia de trabalho com outras realizadas anteriormente, os alunos deste grupo referem que no trabalho de projeto é necessário compreender para depois se poder explicar, o que fez com que a sua autonomia e a sua responsabilidade fossem fortalecidos:

- Rui: Neste não tínhamos só de apresentar resultados, tínhamos de aprender uma coisa nova e explicá-la ou tentar explicar como aprendemos, tínhamos de ganhar autonomia e responsabilidade.
- Inês: Tivemos de ser nós a descobrir como chegar aos resultados, não era somente apresentar os resultados.
- Prof.: Como assim?
- Inês: Aqui nós não sabíamos o que havíamos de fazer. Antes já tínhamos dado a matéria e era só aplicá-la, agora tivemos de ser nós.
- Sara: A desenrascar basicamente (E).

Durante a realização deste trabalho de projeto, os momentos de discussão contribuíram para que os alunos compreendessem o que tinham de melhorar:

- Inês: Acho que aquelas apresentações foram mesmo...
- Rui: Não foi só a nossa, foi de toda a gente, porque surgiram várias críticas que nos tornaram melhores.

- Inês: Críticas construtivas.
Rui: Que influenciaram o trabalho final, porque pensamos, eles falaram mal disto então...
Tatiana: Se calhar se não houvesse críticas, nós continuávamos a fazer a mesma coisa.
Sara: Se não existissem estas apresentações, íamos cometer mais erros na apresentação final. (E)

Os momentos de partilha de ideias no grupo turma contribuíram também para um melhor entendimento do objectivo do trabalho e das matérias envolvidas:

- Sara: Também porque começámos, sei lá, a ver as apresentações dos outros, comecei mais a perceber, ao início não estava a perceber nada daquilo.
Rui: Depois a Sara chegou a um ponto em que construiu quase o grafo sozinha e depois na eulerização juntámo-nos e conseguimos.
Tatiana: Nós começámo-nos a envolver mais quando vimos que estávamos a conseguir os objectivos. Nós não estávamos a conseguir antes a atingir os objectivos, começámos a desanimar. Mas depois de vermos os outros a fazer, começámos também a ver como se fazia e ajudou.
Sara: Pois, porque se lhe fazem uma proposta e a stora não consegue, não consegue à primeira, não consegue à segunda, acho que começa-se a desanimar.
Inês: Quando o Rui foi à sua beira na nossa apresentação, passou-nos a percepção do que tinha sentido e foi quando conversámos e mudámos. (E)

No que diz respeito ao trabalho do grupo, estes alunos consideram que existem vantagens e desvantagens quanto a esta forma de trabalho. Relativamente às vantagens, destacam a partilha de diferentes opiniões, a capacidade de argumentação que desenvolveram nas discussões de grupo, o espírito de ajuda que acabou por acontecer, o empenho que tiveram de ter para serem bem-sucedidos nas tarefas e o apoio que puderam dar quando estavam desanimados.

- Tatiana: Primeiro, uma das coisas é que éramos mais cabeças a pensar, tínhamos mais ideias, sei lá era melhor do que se fosse só eu ou ela a pensar. Desvantagens, é que nem sempre chegávamos a uma conclusão.
Rui: Quando eu faltava, elas explicavam-me e depois tentava continuar.
Inês: Fomos obrigados a desenvolver a nossa forma de argumentar.
Tatiana: Os outros tinham de perceber o que queríamos dizer.

- Sara: E também tivemos de nos aplicar muito mais no trabalho, do que só saber teoria.
- Inês: E isso foi difícil e às vezes desanimávamos e o nosso espírito influenciava o nosso empenho e nós víamos o tempo a passar e havia alguém que dizia que tínhamos de continuar. (E)

As desvantagens apontadas por estes alunos quanto ao trabalho de grupo foram a falta de consenso em algumas situações, alguma conversa sobre assuntos que não se relacionavam com o trabalho que, conseqüentemente, se traduziu na falta de tempo e a grande exigência do trabalho:

- Inês: Às vezes não estávamos de acordo e discutíamos um bocado mas depois...
- Rui: Depois chegávamos e isso é o que interessa.
- Sara: Outras vezes estávamos todos chocados e ou deixávamo-nos estar ou falávamos de coisas que não eram do trabalho.
- Tatiana: E para o final já não tínhamos tempo.
- Rui: Mas assim também foi uma maneira de nós nos empenharmos ainda mais.
- Inês: Mas também tivemos de fazer tudo sozinhos e cansamo-nos mais.
- Rui: A ideia é essa, tu trabalhares. (E)

De um modo geral, os alunos consideraram que apesar de grande parte do tempo terem estado contra os grafos estes foram de grande utilidade na resolução dos problemas:

- Rui: Isto é como fazer um mapa, a estrada é aqui e a saída é ali, prontos já está. Pensávamos que ia ser uma coisa simples, mas não, começámos a ver que aquilo era um bocado complicado.
- Tatiana: Era muita rua, aquilo era muito complicado, muito confuso e com o grafo tudo se tornou muito mais simples. Tínhamos a certeza de que não falhava nenhuma rua.
- Inês: E depois nós também não conseguíamos explicar.
- Tatiana: Da melhor maneira.
- Inês: Pois, nós percebíamos, mas parecia que a turma não percebia nada do que fazíamos.
- Rui: Tinha de ser, nós não estávamos ali por teimosia, chegámos à conclusão que devia ser melhor, para toda a gente estar a usar e só nós é que não e só nós é que tínhamos confusão quando explicávamos aos outros. (E)

Apesar de estes alunos terem apontado as discussões como um aspecto negativo do trabalho de grupo, acabam por salientar que o importante foi que no final conseguiram estar de

acordo. Ao permitirem algumas conversas não relacionadas com o trabalho que estavam a realizar, este grupo sentiu que muitas vezes o tempo era curto. A proximidade do fim da duração do projeto influenciou o empenho do grupo, compreendendo que não podiam distrair-se com conversas pois assim não conseguiriam cumprir o estabelecido. Os elementos deste grupo foram unânimes em afirmar que este foi um trabalho diferente de tudo o que já tinham realizado durante o percurso escolar:

- Sara: Foi uma experiência nova.
Rui: Sei lá, foi uma coisa eu acho que foi cativante.
Tatiana: Marcou-nos, porque aprendemos muito mas deu-nos muito trabalho.
Inês: O pior trabalho da minha vida (sorri) porque foi um trabalho que tivemos mesmo de trabalhar e que não foi só ir à net e já está. Houve alturas em que senti falta de ser a professora a explicar.
Tatiana: Que nem podíamos pedir ajuda às pessoas dos outros grupos.
Sara: Foi diferente aprender assim, porque apesar de não termos feito muitos exercícios, conseguíamos resolver quase todos os que estavam no livro. (E)

Os elementos deste grupo revelam a sua preferência pela pedagogia centrada na atividade do aluno:

- Tatiana: Eu gostava de aprender Matemática sempre assim.
Sara: Desta forma é mais fácil porque realmente aprendemos. Temos de ser nós a aprender, temos de nos esforçar nos exercícios.
Rui: Assim eu percebi que tinha de estar presente e tinha de ser eu a perceber para poder ajudar a fazer. Acho que este trabalho só trouxe vantagens porque assim houve empenho, criatividade, originalidade, raciocínio, entre outras coisas. (E)

Os alunos reconhecem que apesar da existência de alguns momentos de desânimo, este trabalho mostrou-lhes que conseguem fazer o que consideravam impossível e que é importante ouvir a opinião dos outros e rectificar os aspectos menos conseguidos. Aperceberam-se que algumas estratégias de apresentação são mais eficazes do que outras, que quando se empenham conseguem resultados positivos e ajudar o grupo, e sobretudo que conseguiram crescer como alunos e como pessoas.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

Este estudo tem como objectivo averiguar o contributo do trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos por alunos de MACS do 11.º ano de escolaridade. Com esta finalidade, este capítulo sistematiza o que de mais importante se evidencia das atividades que os alunos realizaram, em grupo, na concretização de um trabalho de projeto. Ao cruzar a informação que obtive na elaboração de três estudos de caso não pretendo estabelecer comparações entre os grupos estudados, mas antes identificar o que mais de específico emerge de cada grupo, atendendo à sua singularidade, para compreender o efeito e limitações de tal metodologia de ensino na aprendizagem de grafos pelos alunos.

8.1. Síntese do estudo

A aprendizagem de modelos de grafos foi idealizada de modo que resultasse a partir da realização de um trabalho de projeto. No início do estudo deste tema, os alunos foram informados sobre o que consiste um trabalho de projeto e ao longo do seu desenvolvimento foram-se apercebendo da sua finalidade na aprendizagem de tópicos do tema em estudo. A sequência das suas atividades — definição de um tema, criação de um problema, pesquisa de informação, resolução de problemas e apresentação e discussão de processos — procurou dar sentido ao que aprendiam sobre os grafos. Para concretizar o objectivo deste estudo, que se realizou numa escola secundária do distrito de Braga, pretende-se responder às seguintes questões:

1. Que atividades realizam os alunos na aprendizagem de modelos de grafos através de um trabalho de projeto? Que dificuldades manifestam os alunos na realização dessas atividades?
2. Em que contribuiu o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos?
3. Que perspectivas têm os alunos sobre o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos?

Para responder a estas questões, foram selecionados, após a concretização da experiência de ensino delineada para o estudo do tema grafos, três grupos de alunos com base na área da sua residência, no nível de desempenho obtido no 1.º período e com a pertinência da informação recolhida. Cada grupo deu origem a um estudo de caso — Grupo de Brito (GB), Grupo de Sande S. Martinho (GSSM) e Grupo de Airão Santa Maria (GASM) — cujos dados foram recolhidos em três momentos distintos: antes da experiência de ensino, durante a experiência de ensino e após a experiência de ensino. O estudo foi orientado por uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa e seguiu um *design* de estudo de caso. Os dados foram recolhidos através de um questionário, observação participante, análise documental (que inclui registos escritos dos alunos e da professora, relatórios dos alunos e transcrições de aulas áudio-gravadas) e entrevistas.

8.2. Conclusões do estudo

Da análise e do cruzamento da informação de cada um dos casos elaborados emergem as principais conclusões deste estudo que procuram responder a cada uma das questões de investigação.

8.2.1. Atividades desenvolvidas na aprendizagem de grafos

Atendendo à natureza do trabalho de projeto, ao longo da experiência de ensino sobre o tema de modelos de grafos os grupos realizaram diversas atividades, tais como: (i) formulação de um problema promotor do trabalho de projeto; (ii) resolução de problemas; e (iii) apresentação e discussão de processos e resultados.

Formulação de um problema promotor do trabalho de projeto. Antes da intervenção pedagógica, os alunos apresentaram as suas percepções sobre o entendimento do que consiste um problema. Para os elementos do grupo GB um problema “é algo complexo, com um grau de exigência maior do que os exercícios” (Adélia, Q), que “exige mais cálculos” (Teresa, Q) e “interpretação” (Carlos, Q). De modo similar, os alunos do grupo GSSM destacam que um problema se relaciona com “uma situação do dia a dia” (Sofia, Q), cujos “dados não são apresentados claramente” (Hélder, Q) e exigem “raciocínio sobre o que é apresentado” (Paula, E). Já os alunos do grupo de GASM referem que “num problema (...) temos que pensar para chegar aos valores” (Inês, Q) e que na “resolução temos que atender ao enunciado, transpor ideias usando a matemática” (Rui, Q). Constata-se que, atendendo às suas experiências

escolares, os alunos indiciam distinguir as características de um problema das que caracterizam os exercícios. Das suas percepções, apercebe-se que têm a noção de que um problema difere do exercício por apresentar um grau mais elevado de desafio, tal como advoga Ponte (2005).

Porém, ter a noção do que é um problema nem sempre significa que, por várias razões, se é capaz de elaborar um problema mediante um dado contexto. O desconhecimento do conteúdo que contempla o problema pode ser uma das razões que obsta à sua elaboração. Foi o que aconteceu neste estudo. No início da experiência de ensino, os alunos manifestaram insegurança na elaboração de um problema que despoletasse o estudo dos grafos, como exemplificam as afirmações de alunos de cada um dos grupos: “não sabíamos se o que estávamos a fazer era essa a finalidade” (Teresa, GB, E); “sabíamos lá que problema é que devíamos inventar com o mapa!” (Inês, GASM, E); “já resolvi problemas, mas criar... não!” (Hélder, GSSM, E). A perplexidade dos alunos de terem que enunciar um problema indicia que esta atividade foi pouco trabalhada ao longo do seu percurso escolar. Embora as recomendações atuais para o ensino de Matemática incentivem a formulação de problemas por parte dos alunos, na perspectiva de Brown (2008) este aspecto é pouco trabalhado porque as práticas de ensino incidem mais sobre as estratégias de resolução de problemas do que na formulação de problemas. Para Silver et al. (1996), a formulação de problemas faz parte integrante da atividade matemática que o aluno deve desenvolver na resolução de problemas. A formulação de problemas pode ser inculcada pelo professor através da monitorização que faz dos trabalhos realizados pelos alunos. Neste estudo, uma forma de monitorizar esse trabalho foi através da discussão entre os elementos de cada grupo e entre estes e o grupo turma sobre o teor dos enunciados que desenvolveram. Paulatinamente, o problema ganhou sentido, tal como afirma Adélia: “até o problema ficar bem definido foi preciso trabalhar muito” (Adélia, GB, E).

Na fase da criação de um problema, nem todos os grupos interagiram do mesmo modo. Os alunos do Grupo de Brito manifestaram uma preocupação de ouvirem e respeitarem as ideias de uns e de outros, o que parece ter contribuído para a elaboração do enunciado do seu problema. Como resultado deste trabalho conjunto, surge um enunciado que revela a existência de conexões entre o tema do trabalho de projeto, o lixo, e as várias ideias surgidas e debatidas anteriormente em sala de aula, nomeadamente, o papel das juntas de freguesia e das câmaras na recolha do lixo, e os percursos efectuados pelos camiões nessas recolhas. Este grupo apresentou uma atitude que revela uma consciencialização da importância que o problema que estavam a elaborar viria a ter para o trabalho do grupo, como se pode verificar nas palavras de

Rosa, quando afirma que “tínhamos de ter em atenção que o texto do nosso problema era importante, pois teríamos de lhe responder” (E). A interação entre os elementos deste grupo parece dever-se à atividade baseada em problemas que, como defende Arends (2008), “encoraja a colaboração e a realização conjunta” (p. 384).

A autonomia que este grupo revelou na criação do problema não se verificou de igual modo nos outros grupos. No grupo de GSSM, a orientação que a professora lhes deu não foi suficiente para compreenderem que o problema que elaboraram não podia ser respondido com os dados que apresentava, como reconhece Sofia: “o nosso problema foi corrigido porque apresentava erros de expressão e algumas questões que não podiam ser resolvidas só pelos grafos” (E). A falta de compreensão do porquê desta impossibilidade parece relacionar-se com o contexto real do problema, o que, segundo Abrantes (1994b), as propostas de trabalho com origem em situações do dia a dia devem ter em atenção alguns “aspectos não matemáticos que são relevantes na situação em estudo” (p. 74).

Para os elementos do grupo de GASM, a criação de um problema revelou-se ser uma atividade complexa, que só foi realizada com a ajuda da professora. Esta ajuda é considerada por Adler (1971) como fundamental para a realização das atividades da sala de aula, porque muitas descobertas estão fora do alcance de alguns alunos. A professora centrou mais a sua atenção neste grupo para que não se desmotivassem, já que não apresentavam o mesmo ritmo de trabalho do que os outros grupos. Many e Guimarães (2006) defendem que os fracassos de um dado grupo podem conduzir à sua desmotivação.

Conclui-se que os três grupos que constituíram os estudos de caso apresentaram diferentes níveis de autonomia na elaboração de um problema. A diferença manifestada indicia dever-se ao contexto real do problema, o que faz com que, segundo Abrantes (1994b), a sua formulação resulte em alguma indefinição. Para este autor, essa indefinição resulta de os alunos nem sempre serem confrontados em sala de aula com este tipo de situações e por isso mostram-se pouco confiantes por “não se saber bem o que é para fazer” (p. 27). Importa assim que as estratégias de ensino contemplem atividades que envolvam os alunos na formulação de problemas de modo a elevar a compreensão e a utilidade do que aprendem.

Resolução de problemas. Neste estudo, a atividade de resolução de problemas apontava a aquisição de conhecimentos de grafos e a aplicação dos conhecimentos adquiridos. A aquisição de conhecimentos foi concretizada, numa primeira fase, através da resolução de problemas complementares. Posteriormente, aquando da resolução do problema promotor do

trabalho de projeto, a aquisição de conhecimentos relativos aos grafos foi realizada de uma forma mais autónoma pelos alunos. Na resolução do 1.º problema complementar, os alunos contactaram com as primeiras noções de grafos, tal como refere Teresa: “vimos o que era um grafo, os vértices e as arestas” (GB, E). Com a resolução do 2.º problema complementar, foram explorados novos conceitos, nomeadamente “o que é um caminho e um circuito” (Rosa, GB, E) ou ainda as noções de “grafo conexo, duplicar arestas e eulerizar um grafo” (Sofia, GSSM, E). É através da resolução deste problema complementar que os alunos começaram a aperceber-se da importância dos grafos na resolução do problema formulado: “nós sabíamos o conceito de vértice e aresta, mas não sabíamos como íamos usar isso num grafo” (Rosa, GB, E); “com este problema percebi como encaixar o trabalho” (Hélder, GSSM, E); “nós primeiro cometíamos erros ao fazer os problemas e quando passámos para o projeto já sabíamos o que havíamos de fazer” (Tatiana, GASM, E).

A resolução dos problemas complementares evidenciou ainda as concepções dos alunos sobre o que esperam de um problema que é proposto pelo professor. No 1.º problema complementar, os alunos foram confrontados com a impossibilidade de apresentarem um percurso que não repetisse arestas e que finalizasse no mesmo local onde tinham iniciado. A sua reação foi tentar várias possibilidades de modo a conseguir apresentar um percurso sem repetição em vez de confiarem no resultado obtido pelos elementos do seu grupo. Tal atitude parece dever-se a hábitos adquiridos ao longo do seu percurso escolar, como exemplifica a afirmação de Rosa: “estamos habituados a resolver problemas com solução e não estávamos à espera que a professora nos mandasse fazer um problema que não desse” (GB, E). A percepção da aluna de que os problemas que, normalmente, costuma resolver na sala de aula têm sempre solução é corroborada por Abrantes (1989), para quem “raramente se propõem aos alunos questões em aberto, conjecturas das quais não se sabe à partida se são verdadeiras ou não” (p. 6). O contributo que a disciplina de Matemática desempenha na formação dos alunos para a vida ativa faz com que este autor defenda que a prática lectiva deve contemplar situações indefinidas já que “na vida real somos confrontados com problemas de que não podemos conhecer antecipadamente a solução e, muitas vezes, não sabemos mesmo se essa solução existe” (p. 6).

A resolução do problema promotor do trabalho de projeto contribuiu para os alunos adquirirem mais conhecimentos de grafos, nomeadamente, sobre os grafos hamiltonianos, tal como referem os alunos: “construímos o grafo do mapa, e um grafo ponderado, com as

distâncias que conhecíamos” (Adélia, GB, E); “aplicámos os algoritmos da cidade mais próxima e do peso das arestas” (Sofia, GSSM, E); e “vimos o que era uma árvore e aplicámos o algoritmo de Kruskal para determinar a árvore geradora mínima” (Rui, GASM, E). A aprendizagem de grafos a partir da resolução de problemas mobilizou os alunos a pesquisar sobre os conteúdos deste tema: “fomos buscar informação ao livro, para depois resolver o problema” (Rosa, GB, E); “chegámos a ir à net ver como se trabalhava com grafos” (Rui, GASM, E); e “pesquisámos nos livros que a professora trouxe para a aula, noutros livros da biblioteca e na Internet” (Sofia, GSSM, E). Esta iniciativa fez com que alguns alunos se tornassem mais autónomos nas atividades da aula sem ter que solicitar amiúde a orientação da professora, o que, segundo Leite et al. (1989) e Pereira et al. (1999), tende a dever-se à natureza do trabalho de projeto. Aprender a aprender torna a aprendizagem mais significativa (NCTM, 2007), o que deve ser uma preocupação das atividades que o professor promove na e fora da sala de aula através de, por exemplo, situações problema que envolvam o aluno a pesquisar, selecionar, tratar e aplicar informação que o ajude a tomar decisões.

Em relação à aplicação de conhecimentos adquiridos sobre os conteúdos de grafos, inicialmente, os alunos manifestaram divergências quanto à utilidade do que aprendiam. Os alunos dos Grupos de Brito e de Sande S. Martinho começaram logo por construir um grafo na resolução do 2.º problema complementar, revelando facilidade na compreensão do que era um grafo e como se construía: “foi só colocar os vértices nos cruzamentos e as ruas eram as arestas” (Rosa, GB, E); “ter em atenção as ligações dos vértices e das arestas” (Sofia, GSSM, E). Porém, os alunos do Grupo de Airão Santa Maria resolveram o 2.º problema complementar por tentativa e erro. Somente no problema promotor do trabalho de projeto é que construíram o grafo do seu mapa. Apesar destas diferenças, os alunos dos três grupos revelaram compreender os vários conceitos de grafos, como se constatou na aplicação que efetuaram na resolução das várias tarefas ao longo da experiência de ensino. Independentemente da forma como os alunos realizaram o seu trabalho, a aparente “facilidade” como aprenderam os conteúdos de grafos parece dever-se à ausência de conhecimentos prévios no estudo destes conteúdos, o que, segundo Holiday (1991), “confere ao estudante do ensino secundário a oportunidade de participar ativamente no processo matemático” (p. 95). A forma como a maioria dos alunos participou na resolução de problemas com base nos modelos de grafos leva a inferir a importância das representações gráficas no estudo de conceitos matemáticos. Para o NCTM

(1991), os grafos “oferecem um complemento importante ao repertório de esquemas de representação dos alunos” (p. 212).

A percepção dos alunos sobre a utilidade dos grafos na resolução de problemas foi diferente nos vários grupos e parece que condicionou o desempenho dos alunos ao nível da aplicação destes conhecimentos. Os alunos dos Grupos de Brito e de Sande S. Martinho consideraram que os grafos foram muito úteis e que simplificaram muito a resolução dos problemas: “ajudam a compreender melhor os problemas, por isso tentámos logo construir um grafo” (Teresa, GB, E); “a construção do grafo deu um clic para ajudar” (Sofia, GSSM, E). Porém, o mesmo não se verificou com o Grupo de Airão Santa Maria no início da experiência de ensino. Este grupo começou por recusar a utilização dos conhecimentos de grafos que adquiriam na resolução de problemas complementares por não lhes reconhecerem qualquer utilidade, como exemplifica a afirmação da Tatiana: “éramos anti-grafos” (E). Em termos pedagógicos, esta relutância tem o seu lado positivo desde que convirja para diferentes formas de resolver um dado problema. Mas, quando resulta numa teimosia para se ser diferente corre-se o risco de não se obter o mesmo efeito. Com o desenrolar da experiência de ensino, os alunos deste grupo apercebem-se que por alguma razão estavam a aprender conteúdos dos modelos de grafos. A mudança que ocorre nestes alunos parece dever-se essencialmente a três factores: (1) à exigência das questões relacionadas com o mapa do grupo, como se depreende das palavras da Tatiana: “aquilo era muito complicado, era muito confuso, aquilo era muita rua”; (2) à constatação de que os outros grupos utilizavam os grafos, como refere Inês: “toda a gente estava a usar, só nós é que não” (E); (3) à importância de aprenderem os conteúdos relativos aos grafos que poderiam ser contemplados no exame nacional, tal como afirma Rui: “nós tínhamos de aprender esta matéria, porque no exame nacional deve sair” (E). Os alunos apercebem-se assim que nem sempre as estratégias intuitivas que utilizavam lhes permitiam resolver as questões do problema do seu trabalho de projeto. A complexidade do mapa ajudou a realçar a funcionalidade dos conteúdos dos grafos. Para Coxo, (2008) e Pires e Hravchenko (2007), a pertinência do estudo de grafos reside precisamente em fornecer ao aluno ferramentas que ajudem a simplificar o que parece ser complexo na resolução de muitos problemas de contexto real.

A resolução de problemas foi considerada pelos alunos como sendo uma estratégia que favoreceu a aprendizagem de grafos por exigir uma explicitação dos processos utilizados e por incidir sobre uma situação real, como exemplificam as afirmações do Rui, Teresa e Paula: “não

é fácil perceber e transmitir aos outros, é muito confuso chegar ao quadro e explicar e aí o grafo ajudou-nos imenso” (Rui, GASM, E); “permitia aos outros acompanhar o nosso trabalho e se calhar se fosse ponto por ponto [no mapa] não conseguiam” (Teresa, GB, E); “dava-nos segurança nas nossas explicações” (Paula, GSSM, E). Estas considerações são sustentadas por Furtado (1973), para quem os grafos permitem o desenvolvimento de índices de concentração na análise de situações e da capacidade de comunicar processos e resultados. Para tal, terá contribuído o contexto real dos problemas trabalhados.

Apresentação e discussão de processos e resultados. Ao longo desta experiência de ensino os alunos realizaram várias apresentações sobre o que fizeram na resolução de problemas. Foram efectuadas no quadro apresentações em três momentos distintos: (1) no início da experiência de ensino – apresentação da resolução do 2.º problema complementar; (2) durante a experiência de ensino – apresentação intermédia sobre a primeira questão do problema promotor do trabalho de projeto; (3) final da experiência de ensino – apresentação do trabalho desenvolvido à turma e, posteriormente, aos encarregados de educação.

Relativamente à apresentação do 2.º problema complementar, os alunos dos Grupos de Brito e de Sande S. Martinho seguiram estratégias de apresentação muito similares. Começaram por construir no quadro o grafo correspondente ao mapa que constava na tarefa do problema, associaram a cada cruzamento de ruas um vértice e a cada rua uma aresta. De seguida, numeraram as arestas. Apesar da semelhança das estratégias delineadas por estes dois grupos, a apresentação realizada pelo Grupo de Brito mostrou uma maior organização. De modo a poderem orientar-se, estes alunos colocaram um número e uma seta em cada aresta, indicando o sentido e a ordem pela qual seria percorrida. Esta estratégia ajudou os alunos na sua apresentação porque, como refere Adélia, “assim não nos perdíamos” (E), e, como indica Carlos, “era mais fácil os nossos colegas acompanharem, porque entre nós vimos antes que era mais fácil” (E). O Grupo de Sande S. Martinho também associou um número a cada aresta, mas revelou pouca clareza na sua apresentação. Para estes alunos, o número colocado junto da aresta não tinha qualquer significado, o que fez com que o grupo turma tivesse de dividir a sua atenção entre o grafo e o percurso apresentado, tornando-se a estratégia seguida pouco eficiente. Apercebendo-se da confusão que geraram aos seus colegas, Sofia e Paula reconhecem, respectivamente, que “no lugar parecia mais fácil explicar” (E) e “nem nos tínhamos apercebido que estava mal” (E). Em relação a estes dois grupos, o grupo de Airão Santa Maria apresentou ao grupo turma uma resolução baseada no desenho da figura dada, o

que se tornou pouco eficiente e gerou confusão, como exemplifica a afirmação de Sara: “foi difícil explicar o percurso” (E).

Das apresentações efectuadas do 2.º problema complementar, alguns alunos aperceberam-se que os seus processos não eram claros, tal como referem Sofia e Rui: “não pensávamos que ia ser tão confuso a explicar à turma” (Sofia, GSSM, E); “para nós, aquilo era lógico e claro, mas no quadro não conseguimos explicar bem” (Rui, GASM, E). Porém, as diferentes formas de apresentar a resolução deste problema contribuiu para os alunos confrontarem os seus processos com os dos outros e ambicionarem melhorar o seu desempenho nesta experiência, como consideram alguns alunos: “ficámos um pouco chateados, mas vimos que os outros foram mais claros e queríamos melhorar” (Tatiana, GASM, RS, 26-04-2010); “nós achámos que estávamos bem, mas verificámos que outros fizeram melhor e isso deixou-nos com vontade de conseguir mais” (Sofia, GSSM, E). Esta vontade de melhorar o trabalho realizado derivou, como defende Adler (1971), do desenvolvimento intelectual do aluno que resulta do confronto de formas de pensar e de processos. A partilha de opiniões com os outros tende a ser assim um factor de promoção do desenvolvimento do aluno, que deve ser estimulado pelos professores nas suas aulas, porque, como defendem Leitão e Fernandes (1997), “explicar as estratégias de raciocínio e analisar os problemas com os colegas resulta muitas vezes na aquisição de novos conhecimentos, permite testar hipóteses, clarificar ideias menos corretas e corrigir erros de compreensão e aplicação de princípios matemáticos” (p. 100). Ainda em relação à apresentação do 2.º problema complementar, constata-se que o grupo que revelou uma maior organização e eficácia na sua apresentação, o Grupo de Brito, foi aquele que desde o início da experiência de ensino evidenciou ter um líder: “a Rosa” (todos, GB, E). Para Eric (2005), a liderança consensual de um elemento de um grupo influencia fortemente o desempenho que um grupo apresenta nas atividades que realiza.

Durante a realização da experiência de ensino, os alunos efetuaram uma apresentação intermédia do seu trabalho. Contrariamente ao que tinha acontecido durante a apresentação do 2.º problema complementar, desta vez, todos os grupos conseguiram construir o grafo do mapa que esteve na base do trabalho de projeto. Esta apresentação intermédia foi realizada pelos alunos dos três grupos de formas diferentes. O grupo GB preocupou-se com a eficácia da sua apresentação tentando que os restantes colegas acompanhassem a sua exposição, como refere Teresa: “fizemos acetatos porque todos iam conseguir ver” (GB, E). Já o grupo GSSM, apesar de ambicionar ser claro na sua apresentação, não conseguiu comunicar devidamente as suas ideias

através de cartolinas porque, como afirma Hélder, “ao perto víamos bem as cartolinas, mas os nossos colegas ao longe não” (GSSM, E). O grupo de GASM não preparou devidamente a sua apresentação, limitando-se a desenhar no quadro o grafo que tinham no papel. Os alunos deste grupo reconhecem, como exemplifica a afirmação de Tatiana, que “a nossa apresentação foi demorada, desorganizada, cansativa e não conseguimos ser claros” (GASM, E). Somente o grupo GB mostrou sensibilidade para perceber a importância da estratégia escolhida de modo a garantir que o grupo turma percebesse os seus processos. Revelaram assim a preocupação de respeitar as ideias de cada elemento do seu grupo e de despertar a atenção dos restantes colegas, como comprova a afirmação de Adélia: “conversávamos entre nós sobre o que cada um achava para ver como podíamos mostrar o grafo com eficácia aos nossos colegas” (GB, E). Conclui-se assim que a diferença patente na forma como os alunos apresentaram os seus trabalhos revela que nem todos os alunos estavam habituados a realizar este tipo de atividade. De forma a promover a capacidade de comunicar aos outros as suas ideias, resultados e processos é importante que o professor contemple nas suas estratégias de ensino processos de “dinamização e interação de diferentes domínios de atividades” (Castro & Ricardo, 2002, p. 13).

De um modo geral, os alunos consideram que através da apresentação intermédia puderam comparar o trabalho do seu grupo com o trabalho de outros grupos: “podemos posicionar-nos em relação aos outros grupos” (Teresa, GB, E); “avaliámos o nosso desempenho em relação ao dos nossos colegas” (Rui, GASM, E); e “achámos que não estávamos muito mal, só a cartolina” (Paula, GSSM, E). A existência de momentos de partilha entre os grupos das suas atividades permite, segundo Leite et al. (1989), uma convergência entre os diferentes ritmos de trabalho. Estes momentos proporcionam aos alunos uma oportunidade de avaliarem o trabalho que realizam ao confrontá-lo com o trabalho produzido pelos seus colegas, o que não acontece quando prevalece a atividade do professor.

No final da experiência de ensino, os alunos apresentaram o seu trabalho ao grupo turma e aos seus encarregados de educação. Na apresentação ao grupo turma, todos os grupos revelaram ultrapassar os aspectos menos conseguidos nas apresentações anteriores. Recorrendo ao PowerPoint, os diferentes grupos procuraram assegurar que os restantes colegas conseguiriam acompanhar a sua apresentação. O grupo GB procurou realçar a aplicação dos conteúdos de grafos na resolução do seu problema através do contraste entre a situação inicial e a obtida após a aquisição dos conhecimentos de grafos. O grupo GSSM recorreu à Internet para obter uma aplicação que os ajudou a mostrar aos colegas as arestas que estavam a ser

percorridas ao mesmo tempo que as referiam. Quanto ao grupo GASM, projetaram o seu trabalho num quadro branco para o percorrerem com uma caneta de forma a mostrar aos seus colegas as várias arestas que estruturavam o grafo que modelava o seu problema.

Comparativamente com as apresentações anteriores, na apresentação final os alunos evidenciaram ter mais atenção com a forma como deviam comunicar com os seus colegas, como evidenciam as afirmações de Teresa, Sofia e Inês: “queríamos dar uma ideia da evolução do nosso trabalho aos nossos colegas e fazer isso com eficácia, por isso todos fomos para casa pensar em ideias” (Teresa, GB, E); “ficámos muito frustrados na apresentação intermédia por não conseguirmos que os nossos colegas acompanhassem o nosso trabalho e então fomos procurar na Internet formas de conseguir fazer isso” (Sofia, GSSM, E); e “desde o início que o nosso grupo era mau nas apresentações e tivemos de nos esforçar para mudar isso um pouco” (Inês, GASM, E). A evolução demonstrada nesta apresentação tende a dever-se à capacidade de imaginação dos alunos, à consciencialização da importância que tem na aprendizagem o debate de ideias com os outros e aos materiais que utilizaram na concretização do seu trabalho. Para César (2000), a interação com os outros potencia o desenvolvimento da zona proximal dos alunos, que se trata da diferença entre o que são capazes de fazer por si e o que fazem com a ajuda de alguém. Na apresentação final, para além do recurso ao PowerPoint, os alunos apresentaram à turma um modelo físico do seu trabalho, que surgiu com um certo secretismo, como referem Carlos, Sofia e Rui: “queríamos apresentar uma coisa bonita” (Carlos, GB, E); “não queríamos que os outros nos copiassem” (Sofia, GSSM, E); e “queríamos surpreender, ser diferentes, porque estávamos sempre atrás” (Carlos, GASM, E). Esta atitude dos alunos revela um espírito competitivo no sentido de cada grupo se superar de modo a surpreender os outros, mostrando assim o brio e o empenho que colocaram na realização do seu trabalho e, de alguma forma, a identidade que procuraram preservar do seu grupo. Do que resultou deste estudo, tal competição, desde que seja sadia e respeite as diferenças de uns e de outros, torna-se um factor de promoção da aprendizagem.

A apresentação realizada pelos alunos aos seus encarregados de educação permitiu divulgar os seus trabalhos e desenvolver nestes alunos um sentimento de orgulho, fazendo com que este trabalho se tornasse diferente e não fosse somente mais um trabalho de grupo. Esta apresentação foi por isso importante para estes alunos, apesar das aulas já terem finalizado, porque tal como é afirmado por Many e Guimarães (2006), “este tipo de evento dá ao trabalho de projeto outra dimensão” (p. 70).

8.2.2. Dificuldades manifestadas pelos alunos nas atividades realizadas no trabalho de projeto

No desenvolvimento desta experiência de ensino, verificou-se que surgiram algumas dificuldades nas atividades desenvolvidas pelos alunos. Uma dessas dificuldades foi a elaboração do problema promotor do trabalho de projeto, que se deveu, essencialmente, como referem Paula e Teresa, ao “desconhecimento dos grafos” (Paula, GSSM, E) e por “não percebermos que não podia ser qualquer problema, mas também não sabíamos muito bem qual” (Teresa, GB, E). A formulação do problema revestiu-se de alguma complexidade, o que indicia a pouca prática que os alunos têm na realização deste tipo de atividades. Atendendo à importância que os programas escolares das diferentes disciplinas de Matemática dão à formulação de problemas, esta atividade deve ser incentivada pelo professor, por constituir, como defende Silver et al. (1996), um meio de desenvolvimento da capacidade matemática dos alunos. Para Boavida et al. (2008), a formulação de problemas deve ser colocado ao nível da resolução de problemas por contribuir para o aprofundamento da compreensão pelo aluno dos conceitos e procedimentos matemáticos e para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e de pensamento crítico. Importa assim que as estratégias de ensino promovam atividades que envolvam o aluno na escrita do enunciado de problemas, no confronto entre as ideias chave desses enunciados e os conteúdos matemáticos que estão a ser trabalhados e na argumentação sobre o sentido desses enunciados no contexto da aprendizagem.

Outra dificuldade sentida pelos alunos foi na procura da melhor eulerização do grafo que modelava a situação apresentada. Esta dificuldade deveu-se ao elevado número de vértices de grau ímpar que os grafos apresentavam, como constatam as afirmações de alunos de cada um dos grupos: “foi um pouco confuso porque existiam muitos vértices de grau ímpar e às vezes quando duplicávamos uma aresta, o vértice ímpar ficava par, mas depois havia um de grau par, que agora tinha ficado ímpar” (Rosa, GB, E); “foi difícil tentar encontrar a melhor eulerização, porque aquilo quase que andava em círculo, par ímpar, par ímpar” (Sofia, GSSM, E); “compreender a aplicar a eulerização do grafo foi muito complicado para o nosso grupo” (Sara, GASM, E). Para Feiteira (2007), esta dificuldade surge quando um grafo apresenta mais de quatro vértices de grau ímpar, o que faz com que a sua eulerização possa “tornar-se demasiado complexa” (p. 104).

Embora estas dificuldades fossem comuns aos alunos dos diferentes grupos estudados, surgiram outras dificuldades que foram específicas a alunos de alguns grupos. Foi o caso da

elaboração do grafo do mapa pelos alunos do Grupo de Airão Santa Maria, alimentada em parte pela atitude que inicialmente estes alunos assumiram. Ao desvalorizarem a utilidade dos grafos, protelaram a sua elaboração e a aplicação dos conteúdos de grafos na resolução de alguns problemas. Quando tentaram construir o grafo correspondente ao seu mapa, estes alunos sentiram dificuldades em considerar o elevado número de vértices e a forma das arestas, como referem Rui e Sara: “o grafo era na altura uma confusão” (Rui, E); “só depois de várias tentativas é que conseguimos, porque ligávamos muito as formas e às posições dos pontos [vértices]” (Sara, E). O adiamento na construção do grafo e na utilização dos conteúdos de grafos tiveram consequências na eficácia das apresentações realizadas pelos alunos deste grupo.

Ao longo da realização deste trabalho, os grupos GSSM e de GASM revelaram dificuldades em todas as apresentações que precederam a apresentação final. Os motivos de tais dificuldades foram distintos nos dois grupos. Para o grupo GSSM deveram-se, em parte, ao mau funcionamento do grupo, fruto de uma competição pouco saudável entre a Sofia e a Paula. Estas alunas eram muito competitivas entre si, o que dificultou a comunicação entre os elementos do grupo, tal como refere Sofia: “no início existiram várias chatices, principalmente, eu e a Paula, que somos muito competitivas nessas coisas [notas] e até preferíamos cada uma fazer uma coisa porque não queríamos chatear-nos” (E). Este relacionamento parece evidenciar a pouca interação que inicialmente existiu neste grupo e que vai ao encontro do que Castro e Ricardo (2002) alegam sobre a forma de um grupo trabalhar, que nem sempre é igual e por vezes passa por várias fases até que os elementos se adaptem e consigam rentabilizar esse trabalho.

No grupo GASM, as dificuldades pareceram dever-se essencialmente ao descuido deste grupo na preparação das suas apresentações e à não utilização dos conteúdos de grafos, o que dificultou a comunicação destes alunos com o grupo turma, fazendo com que essas apresentações resultassem em momentos de crítica e confusão.

Apesar de alguns grupos terem utilizado os conteúdos dos grafos desde a primeira apresentação, foi perceptível a sua dificuldade na utilização da linguagem deste tema. Os alunos do grupo GSSM revelaram alguma confusão no entendimento de um circuito de euler. No final de cada uma dessas apresentações, a professora procurava analisar os erros cometidos, esclarecer dificuldades e sistematizar conceitos. Esta intervenção é defendida por Leite et. al. (1989), que consideram ser da responsabilidade do professor “estar atento às necessidades e

problemas em cada grupo, dinamizando trocas intergrupos” (p. 79). Os erros cometidos pelos alunos são, segundo Santos (1991), uma “consequência inevitável de um limite humano (...) [e] um elemento [pro]motor do conhecimento” (1991, p. 131). A valorização pedagógica do erro implica que o professor o considere nas suas estratégias de ensino, como por exemplo através da análise de contraexemplos e de ideias discrepantes, da discussão de todas as respostas dos alunos e não apenas da resposta correta, do confronto de ideias/processos/resultados e da elaboração pelos alunos de problemas e de questões de aplicação dos conhecimentos que adquirem. Como defende Santos (1991), importa ultrapassar a ideia negativa que, muitas vezes, se associa ao erro, mas antes deve-se considerá-lo porque “a verdade resulta de uma rejeição sucessiva de erros” (idem, p. 132).

8.2.3. Contributo do trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos

A realização do trabalho de projeto pelos alunos indicia que esta metodologia contribuiu de diferentes modos para as aprendizagens realizadas sobre grafos. Nessas aprendizagens evidencia-se fortemente a forma como os alunos trabalharam em grupo, como referem, respectivamente, Rosa, Sofia e Rui: “foi uma aprendizagem conjunta” (GB, E); “compreendemos que o trabalho conjunto é mais eficaz” (GSSM, E); e “juntos conseguimos fazer o que no início parecia impossível” (GASM, E). Para um bom funcionamento dos grupos concorreu a disponibilidade que os alunos sentiram por parte dos seus colegas de grupo no esclarecimento de dúvidas e na definição de estratégias de resolução das tarefas com que se depararam, como exemplificam as afirmações de Carlos e Rui: “dávamo-nos bem e sabíamos que se alguém tivesse dificuldade podíamos contar sempre com ajuda do outro” (Carlos, GB, E); “houve duas ou três aulas em que faltei e por isso não estive tão envolvido como elas (...) mas tive a ajuda delas” (Rui, GASM, E). O trabalho cooperativo promoveu a aprendizagem dos alunos, o que é evidenciado no estudo realizado por Koh et al. (2007). Estes autores concluem que o apoio recebido pelos alunos por parte dos seus colegas favorece o seu desenvolvimento cognitivo.

O trabalho cooperativo entre os alunos dos três grupos estimulou a tolerância e a responsabilidade, tal como é evidenciado pelas afirmações de Adélia, Hélder e Sara: “aprendemos a ser mais tolerantes” (Adélia, GB, E); “tivemos de parar algumas vezes porque víamos que alguns não estavam a compreender” (Hélder, GSSM, E); e “compreendemos que todos tínhamos de trabalhar porque éramos todos responsáveis pelo trabalho” (Sara). Estes resultados são corroborados pelos resultados do estudo realizado por Pereira et.al., (1999), que

apontam que os alunos envolvidos revelaram atitudes de cooperação e de responsabilização. Estas atitudes tendem a ser desenvolvidas em práticas pedagógicas que permitam que os alunos trabalhem em conjunto em detrimento de um trabalho sobretudo individualizado. O ideal será que o aluno possa desenvolver experiências de aprendizagem que o desafiem a trabalhar quer individualmente quer em grupo, respeitando o nível do seu desenvolvimento cognitivo, as características da sua personalidade e as normas instituídas na sala de aula pelo professor e pelos alunos.

As capacidades de autonomia e de pesquisa afiguram-se que foram desenvolvidas através da realização do trabalho de projeto. O facto de a professora não recorrer a uma estratégia de ensino expositivo na explicitação dos conteúdos de grafos, fez com que os alunos se mobilizassem na procura de esclarecer as dúvidas que surgiam, tal como referem Hélder, Rui e Rosa: “nunca nos tinham mandado descobrir por nós, por isso a nossa autonomia era pequena” (Hélder, GSSM, E); “fomos à Internet para procurar trabalhos e ver como se fazia e também procurámos nos livros” (Rui, GASSM, E); “fomos ao livro de texto ver se nos ajudava” (Rosa, GB, E). Estes resultados são coerentes com o que aconteceu no estudo desenvolvido por Pereira et al. (1999), onde se constatou que os alunos desenvolveram atitudes de pesquisa e de seleção de informação e a sua autonomia na elaboração de um trabalho de projeto sobre fractais através de uma pedagogia centrada na atividade dos alunos na procura de informação sobre este tema.

Uma outra contribuição do trabalho de projeto foi a evolução positiva como os alunos se envolveram nas apresentações realizadas. Essa evolução parece dever-se às críticas emitidas quer por parte dos alunos do grupo turma, quer pela professora, principalmente pelo modo como apresentavam o seu trabalho e se referiam aos conceitos de grafos. Ao consciencializarem-se que poderiam melhorar as suas apresentações, para além dos aspectos técnicos, os alunos procuraram organizar o seu discurso de modo a tornarem, perante a turma, a verbalização dos conceitos dos grafos de uma forma clara e compreensível aos outros. Os próprios alunos aperceberam-se do progresso da sua capacidade de comunicação/argumentação, como exemplificam as afirmações de Teresa, Hélder e Tatiana: “permitiu-nos ver aquilo que não podíamos fazer (...) e os erros dos outros também serviram para aprendermos (...) e compreendemos que era importante ouvir os outros” (Teresa, GB, E); “sabíamos que neste trabalho tínhamos de trabalhar não só para nós percebermos mas também para explicar aos outros” (Hélder, GSSM, E); “nós tínhamos de argumentar, para valorizarmos a

nossa apresentação” (Tatiana, GASM, E). O desenvolvimento da capacidade de comunicação/argumentação dos alunos, tende a dever-se, segundo Rebelo (2007), por os alunos serem “encorajados a questionar as ideias uns dos outros, a explicar e a justificar opiniões e procedimentos” (p. 153).

O trabalho produzido pelos grupos na realização do trabalho de projeto sugere que os alunos compreenderam a maior parte dos conteúdos de grafos estudados, o que se constata na aplicação desses conteúdos às questões dos problemas propostos e na apresentação que fizeram do seu trabalho em diferentes momentos. Para essa compreensão terá contribuído a durabilidade com que decorreu o trabalho de projeto, como afirmam Teresa, Sara e Hélder: “discutíamos, teimávamos e falávamos uns com os outros durante tanto tempo sobre o mesmo tema, (...) que nós já estávamos à vontade e que nos ajudava a perceber melhor o que fazíamos” (Teresa, GB, E); “como era um assunto do nosso dia a dia, quando resolvíamos os problemas, cada um defendia as suas ideias e o que achava” (Sara, GASM, E); “foi mais exigente e como tivemos de aplicar ao nosso problema, compreendemos muito mais do que se fosse só a teoria” (Hélder, GSSM, E). Para além da durabilidade em que decorreu o trabalho de projeto, a compreensão dos conteúdos de grafos também poder-se-á dever, como ilustram os resultados obtidos por Eric (2005), ao contexto real dos problemas, o que, segundo este autor, tende a evidenciar na discussão entre os alunos sobre a resolução desses problemas as suas crenças e valores pessoais. Nessa resolução, a forma como foram abordados os conteúdos de grafos parece ter estimulado alguns alunos a recorrerem a diferentes processos, como atestam as palavras de Hélder e do Rui: “como não tínhamos conceitos nenhuns, fizemos todos de uma forma diferente” (Hélder, GSSM, E); “às vezes quando não sabíamos outra forma de resolver, íamos por tentativa e erro e usávamos tudo o que nos parecia lógico” (Rui, GASM, E). A ausência de conhecimentos prévios fez com que os alunos não se inibissem de procurar resolver as tarefas inicialmente propostas. Como essa ausência não dispersou os alunos nas atividades que tinham de concretizar, infere-se que a forma como o professor orienta os alunos e como estabelece com estes as normas que regem as atividades da sala de aula são factores determinantes na concretização de estratégias de ensino similares à que foi delineada neste estudo.

O problema promotor do trabalho de projeto, ao basear-se em dados reais, marcou positivamente a experiência desenvolvida pelos alunos, como transparecem as afirmações de Adélia, Rosa, Paula e Rui: “lembramo-nos sempre do trabalho que elaborámos em MACS”

(Adélia, GB, E); “a recolha do lixo é uma coisa que vemos todos os dias” (Rosa, GB, E); “conhecia o local e é uma coisa real” (Paula, GSSM, E); “foi importante fazer um problema sobre o lixo, porque todos os dia temos lixo” (Rui, GASS, E). Os alunos tiveram assim a oportunidade de verificar que “a matemática constitui um elemento ao serviço de um problema ou fenómeno do mundo real (Brown, 2008, p. 222). Para este autor, o trabalho com este tipo de problemas proporciona “motivação para o questionamento matemático que possa de outra forma ser considerado isolado das experiências do mundo” (p. 216). Tal posição mostra a importância de se trabalharem em sala de aula problemas de contexto real, o que faz com que os alunos sintam a ligação da matemática com o mundo onde vivem.

Em termos gerais, os conteúdos de grafos proporcionaram aos alunos o contacto com a vertente lúdica da matemática, tal como exemplifica a consideração que Paula faz sobre o trabalho realizado: “era engraçado ver a forma como os grafos simplificavam as coisas, era quase um jogo” (E). Esta ideia é partilhada por Gonçalves (2007), ao concluir que os principais conceitos de grafos têm um lado lúdico onde podem ser aplicados. Para Feiteira (2007), a integração dos grafos nas disciplinas de Matemática traz benefícios ao processo de ensino-aprendizagem por permitir a resolução de uma diversidade de problemas próximos da realidade dos alunos e por despoletar experiências de aprendizagem que podem funcionar como um estímulo para os alunos com insucesso no seu percurso escolar.

8.2.4. Perspectivas dos alunos sobre o trabalho de projeto na aprendizagem de modelos de grafos

No início do estudo do tema de grafos, os alunos participantes neste estudo identificam o trabalho de projeto como um trabalho similar ao que realizaram em grupo no 10.º ano no estudo de Estatística, como exemplificam as considerações efectuadas por Carlos e Sofia: “faz-se estatísticas e depois apresentam-se” (Carlos, GB, Q); “comparável a um inquérito” (Sofia, GSSM, Q). Ao efetuarem esta comparação, os alunos invocam algumas características do trabalho de projeto, tais como a durabilidade, a realização de atividades dentro e fora da sala de aula e a sua apresentação, como ilustram as respostas dadas por Adélia, Paula e Rui: “dura vários dias (Adélia, GB, E); “pode realizar-se dentro da sala de aula ou fora” (Paula, GSSM, E); “estuda-se um tema para depois o apresentar” (Rui, GASM, Q). Porém, após o término da experiência de ensino que envolveu a aprendizagem de grafos, os alunos destacam diferenças entre o trabalho de projeto que realizaram e os trabalhos que efetuaram anteriormente, como

evidenciam as afirmações de Carlos, Hélder e Tatiana: “os trabalhos que nós fazíamos nunca exigiam tanto de nós, nem do grupo, faziam-se em pouco tempo, não eram tão elaborados, não exigiam tanto” (Carlos, GB, E); “nós nunca realizámos um trabalho como este” (Hélder, GSSM, E); “o que nós fizemos o ano passado não tinha nada a ver com este” (Tatiana, GASM, E).

Ao estabelecerem comparações entre a realização do trabalho de projeto e outros trabalhos realizados anteriormente, os alunos de cada grupo salientaram os aspectos mais marcantes do desenvolvimento do trabalho de projeto. Os alunos do grupo de Brito apontam a exigência, a complexidade e o desafio que este trabalho representou, como se constata na asserção de Teresa: “sentimo-nos estimulados e desafiados a pensar, obrigou-nos a puxar pela cabeça, tivemos de estar muito concentrados e envolvidos para conseguirmos” (E). Um outro aspecto mencionado foi a existência de prazos, que reforçou a responsabilidade de cada um, como reconhece Adélia: “nós sabíamos que nas datas marcadas tínhamos de ter o trabalho pronto e isso fez com que nos momentos em que nos distraíamos, alguém se lembrasse que na data x tínhamos de apresentar” (E). Embora reconheçam que o trabalho que realizaram não se tornou fácil, os alunos deste grupo consideram que a metodologia de ensino/aprendizagem utilizada foi gratificante na forma como aprenderam conteúdos matemáticos: “advém do nosso trabalho” (Teresa, E); “vimos que é possível aplicar os conceitos para nos ajudar no nosso dia a dia” (Rosa, E); “fomos mais participativos na nossa aprendizagem” (Carlos, E).

Os alunos do grupo Sande S. Martinho destacam outros aspectos do trabalho de projeto, tais como a colaboração entre os elementos do grupo, a autonomia no desenvolvimento das atividades de cada grupo, o espírito crítico na concretização dessas atividades e capacidade de argumentação, como exemplificam as afirmações de Paula e Hélder: “nós tivemos de nos guiar a nós mesmos, tivemos de ter sentido crítico com o nosso trabalho e com os dos nossos colegas” (Paula, E); “ao trabalharmos juntos notámos que as nossas respostas eram mais significativas e desenvolvemos a nossa argumentação ao defendermos o que fizemos” (Hélder, E). Esta estratégia de aprendizagem foi considerada por todos os alunos deste grupo como sendo eficaz e motivadora por perceberem que, como refere Hélder, “evoluímos muito, vencemos as nossas dificuldades e sentimos que realmente aprendemos os grafos” (E).

Já os alunos do grupo Airão Santa Maria destacam do trabalho de projeto, o sentido de responsabilidade, um maior índice de autonomia do que disponibilizaram na realização de outros trabalhos e a pesquisa, tal como referem Tatiana, Rui e Sara: “nós tivemos de puxar por nós e vimos que afinal conseguíamos” (Tatiana, E); “parecia que quanto mais fazíamos, mais

conseguíamos fazer” (Rui, E); “para concretizar as ideias que nós íamos tendo, tivemos de pesquisar coisas” (Sara, E). Porém, o nível de exigência que sentiram na concretização do trabalho de projeto foi para elementos deste grupo um aspecto negativo, embora, para Tatiana, essa exigência fez com que os estimulasse a trabalhar e a envolverem-se na consecução do seu trabalho: “houve alturas em que foi muito duro e complicado, mas sabíamos que tínhamos de fazer e por isso reagíamos” (Tatiana, E). Para os alunos do GASM esta forma de aprender Matemática é mais trabalhosa do que no ensino dito expositivo, mas é também mais eficaz por implicar o envolvimento do aluno, tal como refere Rui: “nós aqui, não bastava estar sentado a olhar para a professora, tínhamos de fazer e se por um lado era difícil, por outro quando conseguíamos ficávamos mesmo a perceber” (E).

Um aspecto que foi destacado pelos alunos dos grupos estudados foi a apresentação aos encarregados de educação, o que contribuiu para valorizar o seu esforço e demarcar a diferença com outros trabalhos realizados: “foi agradável ver a forma como a minha mãe me ouvia atentamente” (Adélia, GB, E); “senti-me importante ao mostrar à minha mãe e à minha diretora de turma como é possível aprender matemática através de um mapa e do lixo” (Sofia, GSSM, E); “acho que a minha mãe gostou de me ver ali a falar, apesar de pouco perceber o que eu falava” (Tatiana, GASM, E). Esta apresentação indicia que representou para os alunos um momento especial da sua vivência escolar, fazendo com que o trabalho de projeto não fosse encarado como mais um trabalho escolar, mas tenha contribuído para aumentar “o prazer e a autoestima dos participantes” (Many & Guimarães, 2006, p. 70).

Da análise das perspectivas dos alunos sobre a aprendizagem de grafos através de uma metodologia de trabalho de projeto emergem algumas implicações para a prática pedagógica, tais como: (1) a complexidade de algumas tarefas promove o envolvimento do aluno, estimulando-o para o trabalho a realizar; (2) a aprendizagem torna-se mais significativa, porque resulta da atividade do aluno e da ligação da Matemática situações do dia a dia; (3) a existência de prazos desenvolve uma maior responsabilização; (4) a autonomia, o espírito crítico e a argumentação são reforçados; (5) a publicitação do trabalho dá outra dimensão à aprendizagem e ao trabalho realizado.

8.3. Reflexão Final

A realização deste trabalho constituiu uma experiência que superou algumas das minhas expectativas, apesar das limitações que o acompanhou. Após a sua realização, estou ciente de

que se voltasse a concretizar a experiência de ensino que orientou este estudo alteraria vários aspectos. Um desses aspectos relaciona-se com a fase que diz respeito à escolha do tema que serviu de base à elaboração do problema promotor do trabalho de projeto dos alunos. Um olhar retrospectivo sobre a experiência leva-me a aperceber-me que nesta fase poderia repensar outras estratégias de ensino que na altura surgiram mas que acabei por não considerar: (i) definição do mesmo tema mas que levasse os grupos a definir diferentes problemas promotores do seu trabalho de projeto; (ii) definição de uma diversidade de temas de modo que cada grupo trabalhasse um tema diferente do de outros grupos. Estas estratégias proporcionariam uma maior identidade de cada grupo do que a estratégia que foi delineada. Na altura, optei por não pesar os prós e os contras destas estratégias por me deparar com a ausência de resposta por parte de algumas entidades, nomeadamente, uma empresa de transportes, com a falta de adesão por parte de professores de outras disciplinas (com exceção da professora de Português) em participar no trabalho de projeto delineado e com a existência de exames a nível nacional no final do ano. Estes condicionalismos não me permitiram alongar o prazo de espera de resposta das entidades contactadas nem contar com a participação de colegas, o que me levou a apostar na estratégia que delinee para a aprendizagem de grafos. Relativamente ao critério de interdisciplinaridade, aspecto que, segundo diferentes autores, caracteriza a realização de um trabalho de projeto, as razões apontadas pelos professores como justificativa para a sua ausência deveram-se sobretudo com a gestão do currículo de cada professor em função do exame final, o que se traduziu no receio de ficar sem tempo para finalizar os conteúdos programáticos.

Um outro aspecto que foi constrangedor na minha ação foi a forma como geri as atividades dos alunos quer dentro como fora da sala de aula. Em relação às atividades da sala de aula, a pouca experiência que estes alunos apresentavam em práticas lectivas deste tipo, dificultou inicialmente a realização deste trabalho de projeto. Não posso deixar de problematizar a prática que desenvolvi com os mesmos alunos antes da realização desta experiência de ensino, durante o 1.º período e parte do 2.º período, na qual privilegiei estratégias de ensino centradas na atividade do professor em detrimento da do aluno. Provavelmente os hábitos então adquiridos pelos alunos fizeram com que alguns tivessem dificuldades em organizarem-se no trabalho de grupo, serem autónomos nas tarefas que realizaram e respeitarem algumas das normas de funcionamento previamente definidas em grupo turma, como por exemplo a forma como colocavam dúvidas à professora sem as discutir no seio do seu grupo. Confesso também

que nem sempre foi fácil limitar o duplo papel que desempenhei, de professora e de investigadora, o que, por vezes, com receio de não poder cumprir o programa para exame poderei ter direccionado a atividade dos alunos de modo a que estes chegassem a alguns resultados. Tornou-se difícil distinguir a ajuda da orientação em demasia, embora conscientemente procurasse intervir quando fosse estritamente necessário.

Em relação às atividades que os alunos poderiam realizar fora da sala de aula, senti-me constrangida na sua gestão, principalmente as que exigiam o consentimento quer do diretor da escola, quer do encarregado de educação para os alunos poderem sair da escola durante o período lectivo, como por exemplo para contactarem pessoas nas juntas de freguesia, na Câmara Municipal ou nos correios. Questiono-me até que ponto seria mais benéfico para a aprendizagem dos alunos se fossem eles próprios a contactar as entidades que eu, enquanto professora, contactei. Porém, apesar de todas estas limitações, a criação de um forte espírito de cooperação entre os alunos dos vários grupos, a responsabilização e a crescente autonomia demonstrada na resolução das diferentes tarefas, permitem-me ter a convicção de que o trabalho de projeto é uma metodologia de aprendizagem com potencialidades para o ensino de Matemática. Em relação aos grafos, a atitude que os alunos manifestaram na sua aplicação na resolução de problemas de situações da realidade em que vivem permitem-me considerar que constituem um foco de motivação para os alunos gostarem de aprender matemática.

8.4. Sugestões para futuras investigações

Algumas das limitações sentidas neste estudo deveram-se ao nível de escolaridade dos alunos estudados implicar a realização de exames nacionais no final do ano. Para evitar os constrangimentos relacionados com a avaliação externa dos alunos, seria pertinente realizar uma experiência de ensino similar ao que foi desenvolvida neste estudo com alunos de outros níveis de escolaridade, como por exemplo do ensino profissional. Neste contexto, o estudo poderia incidir sobre o impacto na aprendizagem e na formação dos alunos da resolução de problemas de contexto do mundo do trabalho onde se inserem.

Como a realização de um trabalho de projeto integra momentos de apresentação do que foi feito e do que falta fazer, importa estudar o papel do trabalho de projeto no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos.

A aprendizagem de grafos aconteceu à medida que os alunos procuravam resolver problemas. Como estes evidenciaram alguns constrangimentos por não possuírem os

conhecimentos necessários dos conteúdos de grafos, uma sugestão para um futuro trabalho passa por analisar as atitudes dos alunos na resolução de um trabalho de projeto depois de possuírem tais conhecimentos.

A envolvimento de professores das diferentes disciplinas dos alunos na realização de um trabalho de projeto leva a considerar a realização de um estudo sobre o papel que esse envolvimento tem no desenvolvimento do conhecimento profissional de cada professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (1992). Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática*, 23, 25–29.
- Abrantes, P. (1994a). Contagens, grafos e matrizes nos nossos programas? Talvez um dia... *Educação e Matemática*, 30, 17 – 23.
- Abrantes, P. (1994b). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)
- Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, 8, 7-10 e 35.
- Abrantes, P. (2011). Trabalho de projecto em Matemática escolar. *Educação e Matemática*, 111, 27–32.
- Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). *Mat789. Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Adler, I. (1971). Piaget on the learning of mathematics. In D. B. Aichele & R. E. Reys (Eds.), *Readings in secondary school mathematics* (pp. 210 – 221). Boston: Prindle, Weber & Schmidt.
- Almeida, L. S. (1988). Perspectiva desenvolvimentalista. In L. S. Almeida (Orgs.), *Teorias da inteligência* (pp. 121-143). Porto: Edições Psicologia Porto.
- Althoen, S., Brown, J., & Bumcrot, R. (1991). Graph Chasing across the Curriculum: Paths, Circuits, and Applications. In M. Kenney, & C. Hirsch, *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (pp. 30–43). Reston, Virginia: National Council of teachers of Mathematics.
- APM (1995). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: Associação de professores de Matemática.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de professores de Matemática.
- Arends, R. I. (2008). *Aprender a ensinar*. Madrid: McGraw–Hill.
- Artz, A. F., & Newman, C. M. (1990). Cooperative learning. *Mathematics Teacher*, 83, 448-449.
- Associação de Professores de Matemática (1988). *Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Barbier, J. M. (1993). *Elaboração de projectos de acção e planificação*. Porto: Porto editora.

- Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Brown, S. (2008). *Reconstruir a Matemática Escolar. Problemas com problemas e o mundo real*. Mangualde: Edições Pedagogo.
- Bruner, J. (1971). *Toward a Theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.
- Cardoso, A. (2009). *Teoria de grafos: uma reflexão sobre a sua abordagem no ensino não universitário* (Tese de Mestrado, Universidade Portucalense).
- Castro, L. B., & Ricardo, M. M. C. (2002). *Gerir o trabalho de projecto – guia para a flexibilização e revisão curriculares*. Lisboa: Texto editora.
- César et al. (2000). Interacções sociais e Matemática: ventos de mudança nas práticas de sala de aula. In C. Monteiro et al. (Orgs.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 47-83). Viseu: Fundação Calouste Gulbenkian
- César, M. (2000). Interacções na aula de Matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In C. Monteiro et al. (Orgs.), *Interacções na aula de Matemática* (pp. 13-34). Viseu: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An Empirical Taxonomy of problem posing process. *ZDM*, 37(3), 149–158. Acedido em 30 de Maio, 2011, de http://www.math.umt.edu/sriraman/70_NOMAD2007.pdf.
- Cockcroft, W. (1982) *Mathematics Counts*. Londres: H. M. S. O.
- Costa, A. (2006). *Grafos Hamiltonianos – 11º Ano. Projecto de Estágio*. Braga: Universidade do Minho.
- Coxo, C. (2008). *Fundamentos da lógica e algoritmos da programação* (Tese de Mestrado, ESE Santarém).
- Dewey, J. (1953). *Como pensamos*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.
- Dias, E., & César, M. (2008). Trabalho de projecto associado ao trabalho colaborativo: Cidadania em cenários de Educação formal. In F. Sousa, & C. Carvalho (Eds.), *Actas da II Conferência Ibérica* (pp. 245-253). Lisboa: DEFCUL.

- Dossey, J. (1991). Discrete Mathematics: the Math for Our Time. In M. Kenney, C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K – 12* (pp. 1–9). Virginia: NCTM.
- English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME11) – Topic Study Group 19: *Research and development in problem solving in mathematics education*. Acedido em 30 de Maio, 2011, de <http://tsg.icme11.org/document/get/458>
- Eric, C. (2005). Using open-ended mathematics problems. A classroom Experience (Primary). In Shegar, C., & Rahim, R. B. A. (Eds.), *Redesigning pedagogy: Voices of Practitioners* (pp. 129-146). Singapore: Pearson Education South Asia. Acedido em 2 de Julho, 2010, de <http://repository.nie.edu.sg/jspui/bitstream/10497/213/1/2005u5.pdf>.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.
- Feiteira, R. (2007). *Grafos para todos. Sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico* (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve).
- Feiteira, R., & Pires, M. (2008). Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal. *Revista Iberoamericana de Educação e Matemática*, 16, 183 – 196.
- Feiteira, R., & Pires, M. (2011). O ensino de grafos em Portugal. *Educação e Matemática*, 112, 19 – 23.
- Feitosa, F., B. (sd). *Ensinando por meio dos projetos de trabalho: relato de uma experiência*. Acedido em 25 de Maio, 2011, de http://www.assis.unesp.br/revistadiscenciapesquisa/docs/FeitosaFB_2.pdf
- Furtado, A. L. (1973). *Teoria de Grafos. Algoritmos*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- Gall, M., Gall, P., & Borg, W. (2003). *Educational research: An introduction*. Boston: Allyn and Bacon.
- Gardiner, A. D. (1991). A Caution Note. In Kenney, M., & Hirsch, C. (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K – 12* (pp. 1–9). Virginia: NCTM. Acedido em 30 de Maio, 2011, de http://web03.unicentro.br/especializacao/Revista_Pos/P%C3%A1ginas/3%20Edi%C3%A7%C3%A3o/Exatas/PDF/1-Ed3_CE-Applicac.pdf.
- Giroto, C. G. G. S. (2005). *A (re)significação do ensinar-e-aprender: a pedagogia de projetos em contexto*. São Paulo: UNESP, 1, 87-106.

- Gonçalves, A. (2007). *Grafos: Aplicações ao Jogo* (Tese de Mestrado, Universidade Portucalense).
- Gouveia, M. T. (1999). *Teoria dos Grafos. Currículo alternativo para a disciplina de Métodos Quantitativos* (Tese de Mestrado, Universidade Portucalense-Infante D. Henrique).
- Hargreaves, A., Earl, L., & Ryan, J. (2001). *Educação para a mudança: recriando a escola para adolescentes*. Porto Alegre: Artemed.
- Holliday, R. L. (1991). Graph Theory in the High school Curriculum. In M. Kenney, & C. Hirsch, *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (pp. 87–95). Reston, Virginia: National Council of teachers of Mathematics.
- Koh, C., Tan, O. S., Wang, C. K. J., Ee, J., & Liu, W. C. (2007). Perceptions of Low Ability Students on Group Project Work and Cooperative Learning. *Asia Pacific Education Review*, 8(1), 89-99. Acedido em 2 de Julho, 2010, de <http://www.springerlink.com/content/6u15156j81780853/>
- Ledesma, F. (2009). Das TIC em contexto educativo às TIC no currículo. In F. M. P. Ledesma, & J. A. O. Duarte (Orgs.), *Histórias de aprendizagem das (com as) tecnologias* (pp. 9-16). Setúbal: Escola superior de Educação.
- Leitão, A., & Fernandes, H. (1997). O trabalho de grupo e aprendizagem cooperativa na resolução de problemas por futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho, & I. Vale (Coords.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática* (pp. 99 – 128). Aveiro: Grupo de investigação em resolução de problemas.
- Leite, E., Malpique, M., & Santos, M. R. (1989). *Trabalho de projecto. 1. Aprender por projectos centrados em problemas*. Porto: Edições Afrontamento.
- Malta, G. (2008). *Grafos no ensino médio: uma inserção possível* (Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio grande do Sul).
- Many, E., & Guimarães, S. (2006). *Como abordar a metodologia de trabalho de projecto*. Porto: Areal editores.
- Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Mendonça, M. (2002). *Ensinar e aprender por projectos*. Porto: Asa Editores.
- Menezes, L. (1999). *Matemática, linguagem e comunicação*, ProfMat99 (pp. 123-145). APM: Portimão. Acedido em 30 de Abril, 2011, de <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2008%202009/Comunicacao/Proff.pdf>.

- Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: Autor.
- Miranda, L., Morais, C., Dias, P., & Almeida, C. (2001). Ambientes de aprendizagem na Web: Uma experiência com fóruns de discussão. In P. Dias, & C. de Freitas (Orgs.), *Actas de Challenges 2001, II Comunicação na Educação* (pp. 585 – 593). Braga: Centro de Competência Nónio da Universidade do Minho.
- Morgado, J. (2007). Autonomia e profissionalismo docente: Importância dos mediadores curriculares na configuração das práticas pedagógicas. In E. C. Martins (Org.), *Cenários da Educação/Formação: novos espaços, culturas e saberes*. Actas do VIII Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Castelo Branco: IPCB (CD-ROM).
- Morgado, L. (2002). Piaget-Vygotsky: uma abordagem psicopedagógica. *Revista Portuguesa de Psicologia*, 36, 45-66.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE .
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Oliveira, J., Garnier, E., Barat, N., Bigli, C., & Souza, C. (2008). *Introduzir o estudo de Grafos com textos, jogos e situações interdisciplinares*. Projecto Fundão. Acedido em 5 de Fevereiro, 2011, de <http://www.sbemrj.com.br/spemrj6/artigos/b7.pdf>.
- Ore, O. (1995). *Grafos y sus aplicaciones*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.
- Pereira, C., Ferreira, E., Aguiar, M., & Sabugueiro, S. (1999). Um trabalho de projeto no 11.º ano. *Educação e Matemática*, 55, 67-70.
- Pires, M., & Kravchenko, V. (2006). Grafos para todos: a importância dos exemplos na construção dos conceitos. In *Actas do ProfMat* (pp. 15–17). Setúbal: APM.
- Pires, M., & Kravchenko, V. (2007). Reflexões sobre o ensino de grafos. *Educação e Matemática*, 93, 11–15.
- Polya, G. (1986). *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

- Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projectos Educativos*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigações em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Quek, C. L., Wong, A. F. L., Divaharan, S., Liú, W. C., Peer, J., & Williams, M. D. (2007). Secondary school students perceptions of teachers-student interaction and students attitudes towards project work. *Learning Environ Res*, 10, 177-187. Acedido em 30 de Maio, 2011, de <http://www.springerlink.com/content/2m56h26755j0772j/>.
- Rebelo, P. C. A. (2007). *Reorganização Curricular e o Trabalho de Projecto: uma experiência do ensino da Geometria no 6.º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado, Universidade do Minho).
- Ribeiro, C., & Feiteira, R. (2006). *Modelação no ensino básico e secundário: um percurso possível à introdução dos grafos*. Acedido em 5 de Fevereiro, 2011, de http://www.apm.pt/files/_Co_Ribeiro_Feiteira_486a01bf84ab8.pdf.
- Ribeiro, C. M., & Feiteira, R. (2008). Modelação no básico e secundário: um percurso possível à introdução dos grafos. In *Actas do XXIV Encontro Nacional de Professores de Matemática- ProfMat 2008*. Elvas: Portugal. Acedido em 30 de Maio de 2011, de http://www.apm.pt/files/_Co_Ribeiro_Feiteira_486a01bf84ab8.pdf.
- Rojas, R. (2001). *El Cuestionario*. Acedido em 26 de Setembro, 2010, de <http://aprendeonline.udea.edu.co/revistas/index.php/ceo/article/viewFile/1498/1155>.
- Romão, M. (2000). O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática. In C. Monteiro et al. (Orgs.), *Interações na aula de Matemática* (pp. 163-177). Viseu: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Ross, K. R. (1998). Blending authentic work projects and instructional assignments: an adaptation process. *Educational Technical Education Research and Development*, 46(3), 67-79.

- Santos, M. (1991). *Mudança conceptual na sala de aula – um desafio pedagógico*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Santos, L., Brocardo, J., Pires, M., & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SEM-SPCE.
- Seng, S. (2000). *Teaching and learning primary in Singapore*. Paper presented at the Annual International Conference and Exhibition of the Association for Childhood Education International (Baltimore, MD, April 17-20, 2000). Acedido em 2 de Julho, 2010, de <http://eric.ed.gov/PDFS/ED439812.pdf>.
- Silva, L. (2009). *A Teoria de Grafos no Ensino* (Tese de Mestrado, Universidade Portucalense).
- Silver, E., Downs, J., Leung, S., & Kenney, P. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematical Education*, 27 (3), 293-309.
- Simões, M. (1999). Grafolândia. Acedido em 30 de Maio, 2011, de <http://area.dgicd.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/grafosmanuela.pdf>.
- Sousa, H. (2005). O Ambiente de Aprendizagem e a Matemática. *Educação e Matemática*, 83, 35-40.
- Sousa, H. (2003). *A aprendizagem da Matemática e o trabalho de projecto numa perspectiva de Matemática para todos. Um estudo de caso do 1.º ciclo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).
- Tuckman, B. (2000). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Yanagimoto, T., Nakamoto, A., & Masuda, N. (2003). *A study on teaching graph theory – for primary & junior high school students*. Acedido em 30 de Maio, 2011, de <http://www.icme-organisers.dk/tsg13/yana.pdf>.
- Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planeamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

ANEXOS

Anexo 1. Pedido de autorização para implementação de um estudo



Universidade do Minho

Instituto de Educação e Psicologia

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Exmo. Sr.º Diretor da Escola Secundária

Assunto: Pedido de autorização para implementação de um estudo

Maria Irene Marques Gonçalves, aluna do Mestrado em Supervisão Pedagógica/ Supervisão Pedagógica do Ensino de Matemática da Universidade do Minho, propõe-se realizar um estudo intitulado: Aprendizagem dos modelos de Grafos, por alunos do 11º ano, através do trabalho de projeto.

Este estudo é orientado pelo Doutor Floriano Viseu, do Instituto de Psicologia da universidade acima referida.

O tema escolhido é contemplado nos programas oficiais da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais do 11º ano- Grafos.

Este estudo inclui a análise de tarefas escritas e orais, individuais e em grupo, do ano de escolaridade já referido.

O anonimato dos registos escritos e orais dos alunos será salvaguardado, de acordo com as leis do direito à identidade, ao bom nome e à intimidade.

Comprometo-me a disponibilizar ao vosso estabelecimento de ensino um exemplar da tese quando concluída e defendida.

Venho, assim, pedir autorização para aplicação do estudo acima sinteticamente descrito.

Com os melhores cumprimentos:

Prof. Irene Gonçalves

Braga, 4 de Janeiro de 2010

Anexo 2. Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.^(a) Sr.(a)

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) _____ nº ___ da turma F do 11º ano da Escola Secundária

Eu, Maria Irene Marques Gonçalves, professora de Matemática do seu educando, encontro-me a frequentar o 2.º ano de Mestrado em Educação, na área de especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, na Universidade do Minho. Pretendo desenvolver, na turma do seu educando, uma experiência pedagógica, com o conhecimento e autorização do Conselho Executivo. O objectivo desta experiência consiste em analisar práticas pedagógicas na sala de aula e sua importância para o ensino/aprendizagem da matemática.

Para obter a informação que me ajude a dar resposta ao objectivo proposto, preciso de fotocopiar os trabalhos desenvolvidos pelos alunos, efetuar entrevistas e gravar em vídeo ou áudio as aulas da experiência. Para esse fim, solicito que me autorize a utilizar estes meios de recolha de informação. Comprometo-me a fazer uso dos dados recolhidos apenas para apoiar a minha investigação e a assegurar a confidencialidade dos mesmos, bem como o anonimato dos alunos envolvidos.

Agradecendo, desde já, a colaboração prestada por Vª Exª, solicito que assine esta declaração, e peço que depois de destacada a devolva, o mais breve possível, através do seu educando.

Com os melhores cumprimentos,

A professora

Declaração

Eu Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) _____ nº ___ da turma ____ do ___ ano da Escola Secundária Padre Benjamin Salgado – Joane, declaro que a professora de matemática do meu educando, no âmbito da sua investigação, está:

- Autorizada a gravar aulas em que o meu educando participa, em vídeo
- Autorizada a gravar aulas em que o meu educando participa, apenas em áudio
- Não autorizada a fazer qualquer registo áudio ou vídeo

Joane, 4 de Janeiro de 2010

Assinatura do Encarregado de Educação: _____

Anexo 3. Inquérito realizado aos alunos

Questionário

Caro(a) aluno(a),

Este questionário insere-se no trabalho de investigação que estou a realizar no âmbito do Mestrado em Ciências da Educação, na área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática, na Universidade do Minho. O objectivo da minha investigação consiste em averiguar como se processa a aprendizagem dos modelos de grafos através do trabalho de projeto.

Com este questionário pretendo recolher informação sobre as tuas perspectivas relativamente à disciplina de Matemática, à resolução de problemas, ao trabalho em grupo e sua organização e à tua atividade na realização de trabalhos de projeto na disciplina de Matemática.

Os dados obtidos serão utilizados apenas para fins de investigação, assegurando-se o anonimato e a confidencialidade dos mesmos, pelo que deves responder sem qualquer tipo de receio e com a maior seriedade. Não existem respostas certas ou erradas mas sim respostas que correspondem à forma de pensar de cada um sobre as questões que são formuladas.

Obrigado pela tua colaboração

(Maria Irene Marques Gonçalves)

Março de 2010

Parte I: Perspectivas sobre a disciplina de Matemática e a resolução de Problemas.

1. Que razões te levaram a optar pelo curso de Línguas e Humanidades?

2. Descreve o teu desempenho na disciplina de Matemática ao longo do teu percurso escolar (desde a primária até à atualidade)

3. Que temas de Matemática aprecias mais? E menos? Porquê?

4. Na disciplina de Matemática, já resolveste vários tipos de tarefas, tais como exercícios e problemas. Na tua opinião, que diferenças existem entre um exercício e um problema?

5. Quando resolves um problema na disciplina de Matemática, que estratégias costumas usar?

6. Que importância tem a resolução de problemas de situações do dia a dia na tua aprendizagem? Explica a tua resposta e se possível dá um exemplo.

7. Na resolução de problemas, quando tens dificuldades costumas perguntar logo à professora o que deves fazer ou procuras resolvê-lo por ti próprio? Porquê?

Parte II: Perspectivas sobre o trabalho de projeto na sala de aula.

1. Nas aulas de Matemática costumás trabalhar em grupo ou individualmente? Porquê?

2. Quando estudas Matemática fora da sala de aula costumás fazê-lo em grupo ou individualmente? Porquê?

3. Indica algumas vantagens da realização das atividades da aula em trabalho de grupo.

4. Indica algumas desvantagens da realização das atividades da aula em trabalho de grupo.

5. Na tua opinião, o que significa trabalhar em grupo? Que cuidados deve haver para que seja proveitoso na tua aprendizagem?

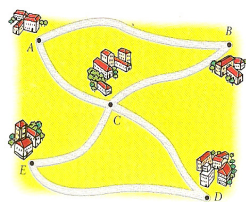
Parte III: Perspectivas sobre o trabalho de projeto

1. Já alguma vez realizaste na disciplina de Matemática um trabalho de projeto? Se sim, explica como decorreu, referindo de quem foi a escolha do tema e dos grupos, qual o produto final obtido, se foi apresentado à turma, etc.

2. Na tua opinião, o que se entende por trabalho de projeto?

3. Gostavas de realizar um trabalho de projeto em Matemática? Justifica a tua resposta.

4. Já ouviste falar de grafos? Se sim, explica o que são e para que servem?



5. Imagina que és o carteiro responsável pela distribuição do correio numa zona com **6 ruas**. Indica uma possível estratégia (por exemplo, na forma de um esboço) que permita que essa distribuição se processe no menor tempo possível, sabendo que é feita a distribuição dos dois lados de cada rua.

Anexo 4. Texto relativo à campanha “Limpar Portugal”

Página Movimento Limpar Portugal já tem mais de 30 mil voluntários inscritos - Ecosfera - ... 1 de 2

Credibilidade - Crédito Fixibom, especialistas desde 1995. 9º - 17º Lisboa 17 de Março de 2010

IPSILON | GUIA DO LAZER | CINECARTAZ | INIMIGO PÚBLICO | PESO E MEDIDA | Siga-nos em: [ícones] Pesquisa ok

20 Infografia Milionários no mundo em 2010 - Quantos são e quanto valem

Vinte anos/Vinte histórias Filomena Alvarez - A vida dos operários é a sua

Olhares Cruzados A reabilitação urbana conta para a competitividade do Porto?

JORNAL DO DIA | PDF | VIDEOS | MULTIMÉDIA | INFOGRAFIAS | BLOGUES | DOSSIERS |

MUNDO POLÍTICA ECONOMIA DESPORTO SOCIEDADE EDUCAÇÃO CIÊNCIAS ECOSFERA CULTURA LOCAL MEDIA TECNOLOGIA

ecosfera NOTÍCIAS CRONOLOGIA CALENDÁRIO DÉ NOTÍCIAS CONTACTOS



Foto: Pedro Cunha

A ideia de um movimento de voluntários a limpar a floresta partiu de um grupo de amigos que seguiu um exemplo desenvolvido na Estónia

Site da iniciativa

Opinião dos leitores

política
Por João Pereira - Lisboa
Nesta limpeza deviam estar incluídos muitos políticos que entram na política com as calças na mão e saem de lá com fortunas.

Denunciar este comentário

Muito bem!!!
Por Pedro Miguel Pereira - Massamá - Portugal
Excelente iniciativa - a minha singela homenagem para estes heróis. Só peço que removam materiais artificiais e mantenham os materiais naturais que podem servir de húmus mesmo a muito longo prazo.

Denunciar este comentário

limpar? mas então?
Por Jorge - Lisboa
Vão limpar trastes velhos? pode ser um começo, mas é inconsequente, quase uma brincadeira, um passeio, então os lixos realmente perigosos? a esses é que é preciso resolver, uns limpam, e outros o governo dá-lhes licenças para sujar, e com lixos realmente perigosos, é o caso dos (caçadores)que despejam chumbo toneladas de chumbo pelas terras e águas do país, esses baguinhos de chumbo é que deviam ser apanhados, mas as Camaras, e os ambientalistas, fecham os olhos a este veneno que é o chumbo espalhado pelos matadores, porque será? responda quem souber melhor do que eu.

Denunciar este comentário

Comentários 1 a 4 de um total de 5
Ler mais >>

Blogue sobre este artigo
Se comentar este artigo no seu blogue, o link aparecerá aqui.
Efectue o ping do seu blogue no Twingly para nós o encontrarmos.

Movimento Limpar Portugal já tem mais de 30 mil voluntários inscritos

18.02.2010

Lusa

O Movimento Limpar Portugal recebeu já mais de 30 mil inscrições de voluntários, muitos delas de associações e de clubes, para limpar detritos deixados na floresta portuguesa, a 20 de Março.

"Temos mais de 30 mil inscrições na nossa rede social na internet, algumas delas representando associações ou clubes", disse Paulo Pimentel Torres, um dos promotores da iniciativa, que hoje apresentou o movimento à comissão parlamentar do Ambiente, Ordenamento do Território e Poder Local.

"Se o clima permitir, contamos ter de cem a 250 mil pessoas a limpar as florestas portuguesas de Norte a Sul do país, Madeira e Açores", acrescentou.

A ideia de um grande movimento de voluntários a limpar a floresta partiu de um grupo de amigos, que seguiu um exemplo desenvolvido na Estónia.

Os promotores serviram-se de uma rede social na internet para pedirem voluntários dispostos a, no próximo dia 20 de Março, remover entulhos e lixos despejado de forma pouco cívica nas florestas.

Segundo Paulo Pimentel Torres, o objectivo desta iniciativa é "fazer com que as pessoas se alertem, se eduquem, saibam que há serviços do Estado para remover "monos" e que não é preciso deixá-los para o meio da floresta".

Entre os lixos mais comuns encontrados estão resíduos industriais não perigosos e certos tipos de lixos domésticos, como entulhos de pequenas obras, que levam as pessoas a despejarem-nos nas florestas para evitarem pagar pela sua eliminação.

"Aqui há pouco tempo foram encontrados em Águeda 30 ou 40 carrinhos de bebé por acabar numa zona de difícil acesso", exemplificou.

Entre os apoiantes deste movimento estão mais de cem câmaras municipais, centenas de juntas de freguesia e também uma centena de escolas, que estão a abordar o tema com os alunos.

Alguns grupos de voluntários estão já a promover acções por todo o país.

No sítio do movimento na internet (<http://limparportugal.ning.com>) estão mais de 5500 locais concretos a precisar de limpeza.

O movimento aceita também ajudas de empresas ou autarquias, traduzidas em cedência de meios e serviços, mas não aceita dinheiro.

PUB

PUB

Quem disse que não existem famílias perfeitas?

Mercedes-Benz

PUB

Ajude-nos a tirar uma fotografia "verde"

Mapa "verde" de Portugal

vídeo em directo

Cegonhas na Web

webcam em directo / Live

Barboletas na web

webcam em directo / Live

Grifos na web

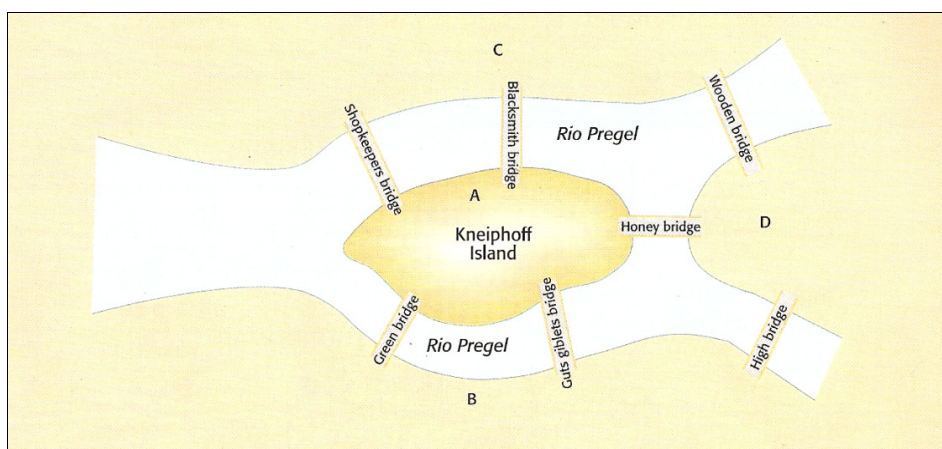
webcam em directo / Live

O que faz você pelo Ambiente?

PARTICIPA

Anexo 5. Problemas Complementares**Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 11º ANO****Problema Complementar nº 1 - Grafos**

1. A cidade de Kaliningrad da Rússia, chamava-se no século XVII Königsberg. Nessa altura, existiam sete pontes que atravessavam o rio Pregel, como é demonstrado na figura a seguir.



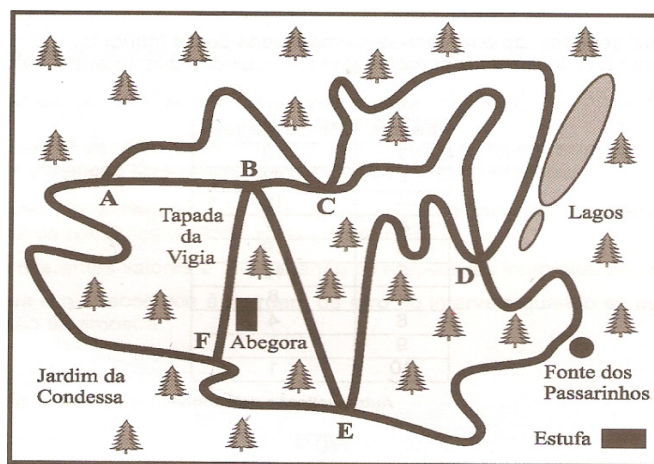
As pontes ligavam duas pequenas ilhas entre si e a cada uma das margens. As pessoas da cidade entretinham-se com um velho desafio, ao qual ninguém tinha ainda conseguido responder

1. Será possível que alguém consiga passear pela cidade passando por todas as pontes uma única vez?
2. Que percurso se poderá fazer, se quisermos finalizar o percurso no local onde se iniciou?

Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 11º ANO

Problema Complementar nº 2 - Grafos

Os alunos do 11F da E.S.P.B.S, estão a programar para o dia 21 de Março de 2010, uma campanha de limpeza num parque natural. Pretendem apanhar o lixo que se encontrar no chão das ruas assinaladas no mapa a seguir. Os alunos dispõem apenas de uma manhã para efetuar essa tarefa, sendo necessário organizar-se.



- Admitindo que os alunos iniciam a limpeza no ponto A e que finalizam também em A, será possível recolherem o lixo de todas as ruas, não repetindo ruas?
- Indica o melhor percurso para os alunos efetuarem a limpeza das ruas, admitindo que iniciam e finalizam em A.
- Indica um percurso para os alunos realizarem, admitindo que iniciam em A e que terminam em F? E se finalizarem em D?
- Será possível que os alunos iniciem o percurso de limpeza em qualquer cruzamento e finalizarem noutro qualquer cruzamento? Justifica a tua resposta.
- Admite agora que foi aberta uma segunda rua a ligar directamente os cruzamentos A e F. Será possível os alunos elaborarem um percurso de limpeza das ruas, sem repetir qualquer rua, iniciando e finalizando a limpeza em A?

Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 11º ANO

Problema Complementar nº 3 - Grafos

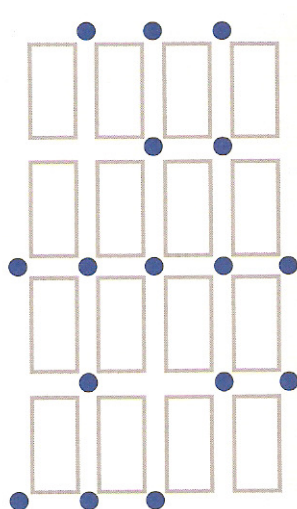
1. Uma filial canadiana de distribuição de correspondência está sediada na Ilha de S. Miguel e recebe semanalmente diversas encomendas para entrega nalgumas ilhas açorianas. A empresa possui um barco rápido que utiliza para a distribuição. Considere a tabela de distância em milhas.

	Flores	Faial	Graciosa	Terceira	S. Miguel	Sta. Maria
Flores	—	132	155	190	283	322
Faial	132	—	46	69	149	192
Graciosa	155	46	—	44	262	186
Terceira	190	69	44	—	92	145
S. Miguel	283	149	262	92	—	54
Sta. Maria	322	192	186	145	54	—

- Indique todos os possíveis percursos de distribuição, admitindo que o barco tem de percorrer todas as ilhas e regressar a São Miguel.
- Tendo em conta o custo de percorrer todas as Ilhas semanalmente, onde aconselharia a empresa a instalar a sua sede? Explique o seu raciocínio.

Matemática Aplicada às Ciências Sociais - 11º ANO**Problema Complementar nº 4 - Grafos**

2. O Rui Coelho vai utilizar parte da sua quinta para construir algumas estufas conforme o esquema. Cada estufa tem uma área de 20 metros por 10 metros e os pontos azuis representam pontos de água para assegurar o regadio. A dada altura o Rui decidiu electrificar cada um dos locais onde estão instalados as torneiras. Tornou-se por isso necessário que a todos esses locais chegasse um cabo eléctrico.



Qual o número mínimo de metros de cabo que seria necessário? Explique o seu raciocínio.

Anexo 6. Relatório Individual da semana

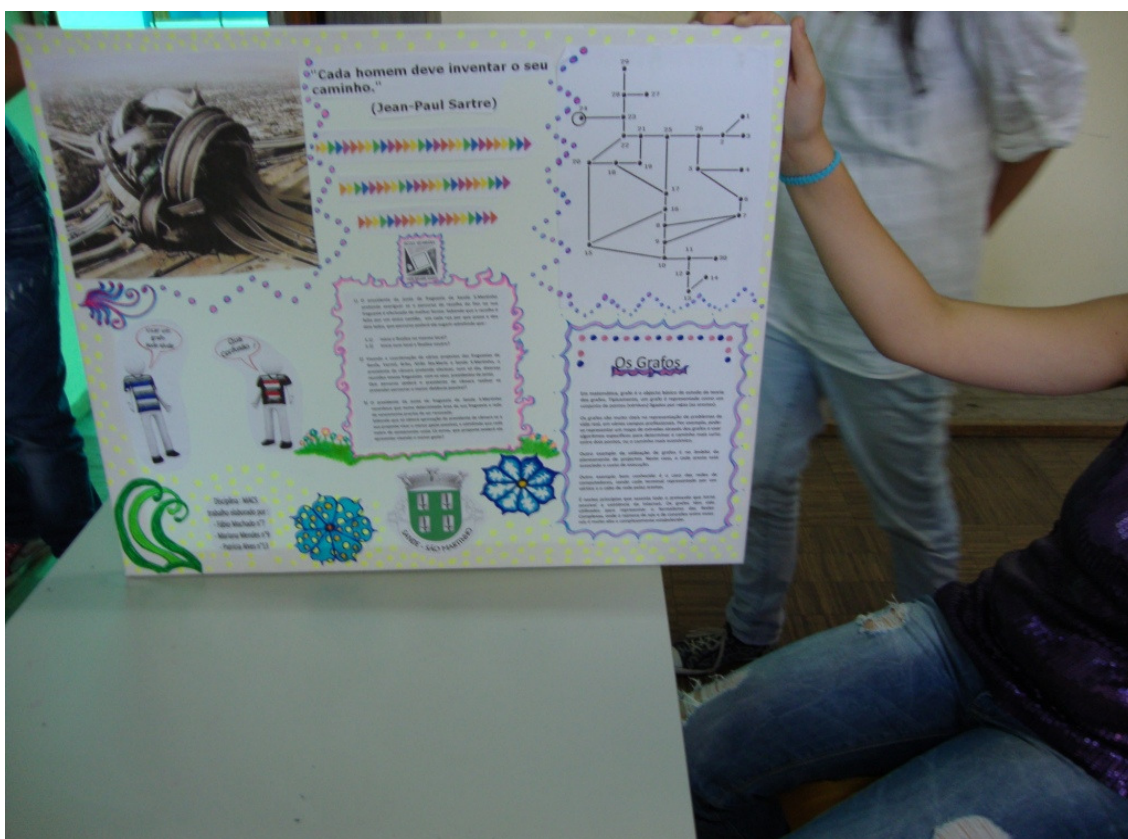
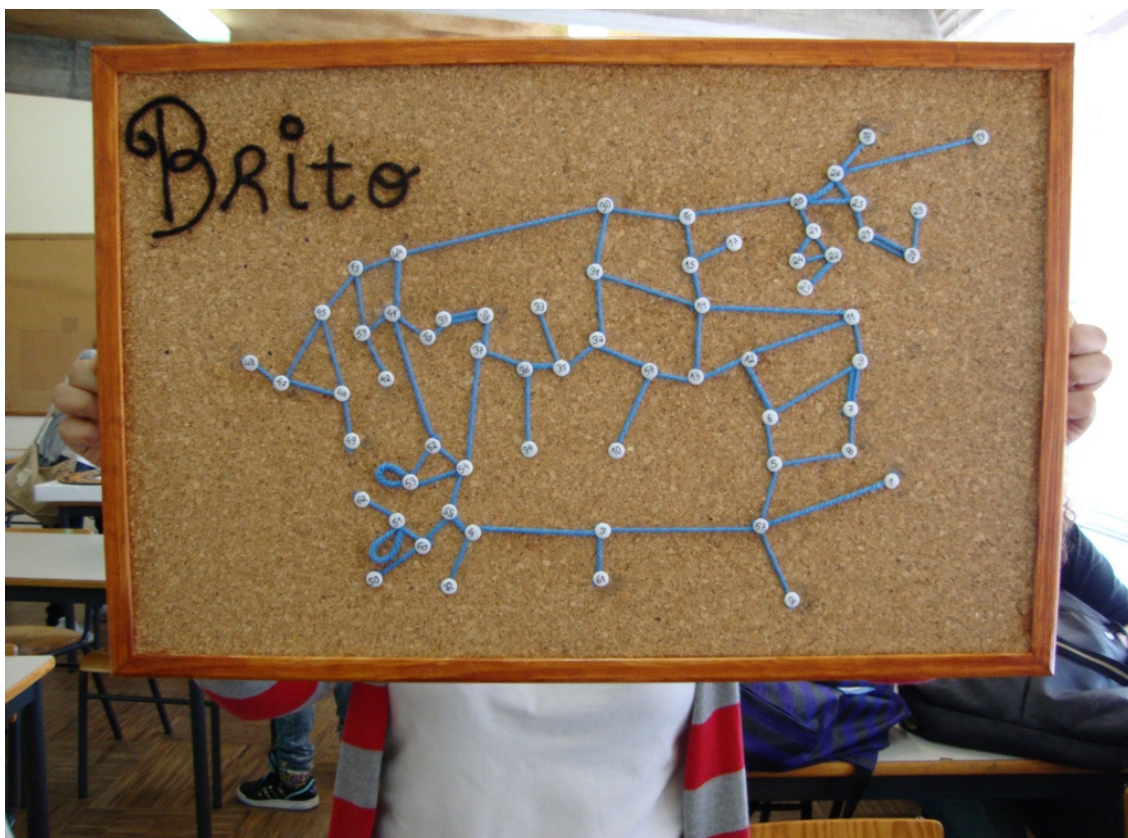
Relatório Individual da semana

No presente relatório deve indicar as atividades desenvolvidas ao longo da semana, as dificuldades sentidas na sua realização e a forma como as ultrapassou. Deve ainda referir o que aprendeu e o que aprendeu menos bem. Procure descrever como funcionou o seu grupo no desempenho das atividades, e no cumprimento das regras estabelecidas. Pode ainda escrever sobre outros aspectos que considere importantes, ou dar sugestões para futuro.

Anexo 7. Grelha de Observação do Trabalho de Grupo

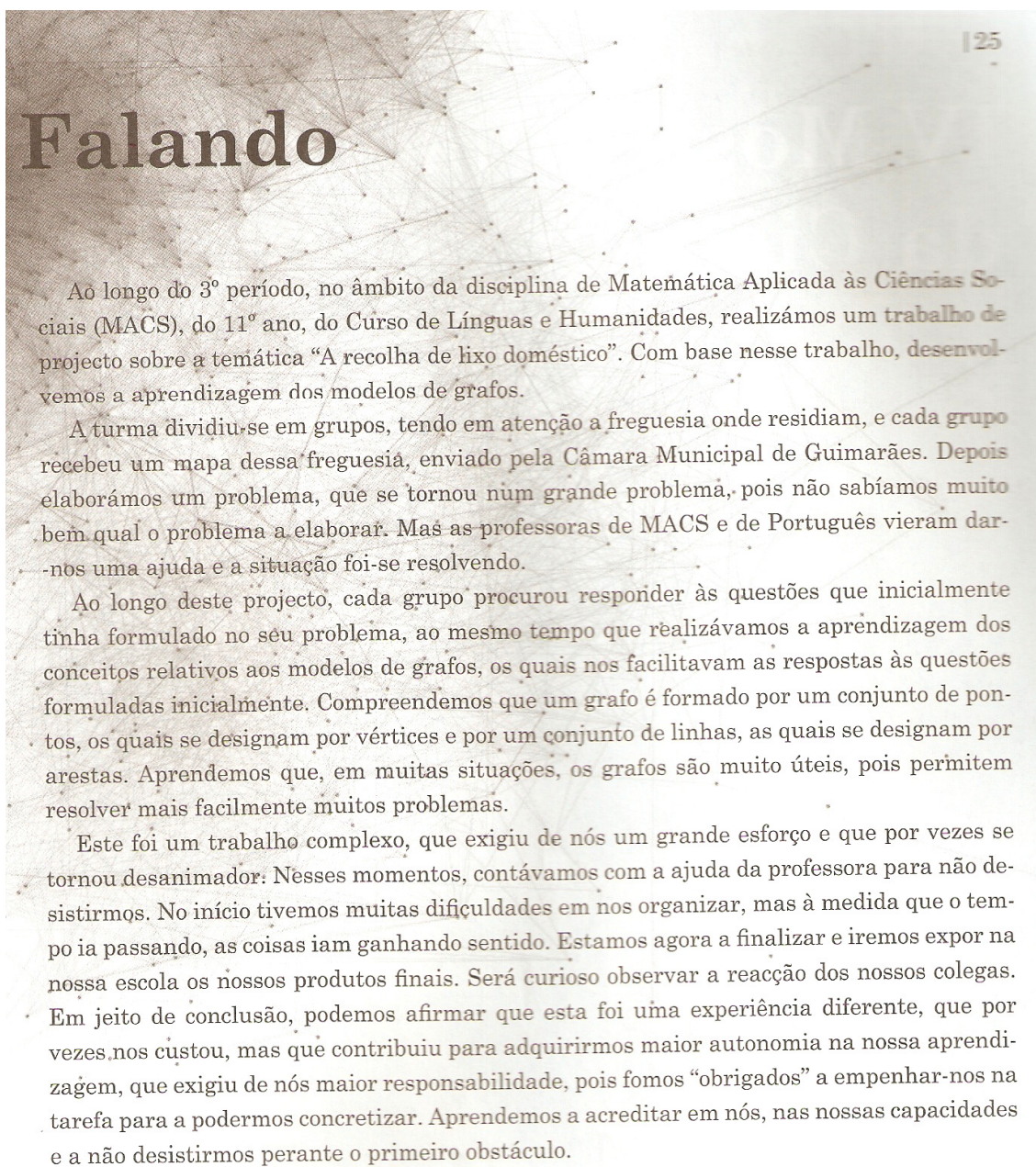
Grelha de Observação do Trabalho de Grupo								
		Elementos	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	
Revela responsabilidade	Coopera nas tarefas							
	Respeita os outros							
	Apresenta o material necessário							
	Assíduo e pontual							
Manifesta autonomia	Toma decisões individualmente sem consultar os outros.							
	Toma decisões ouvindo a opinião dos outros elementos							
Fundamenta as decisões								
É organizado								
Articula os Saberes teóricos e práticos								

Anexo 8. Produtos finais dos grupos

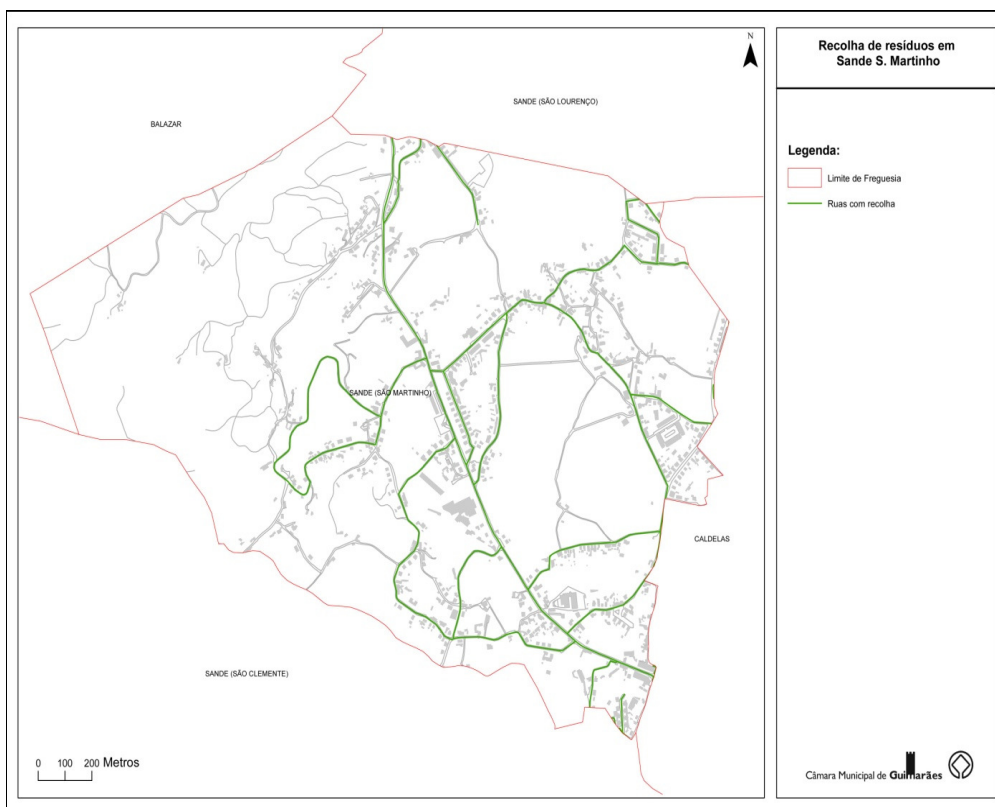
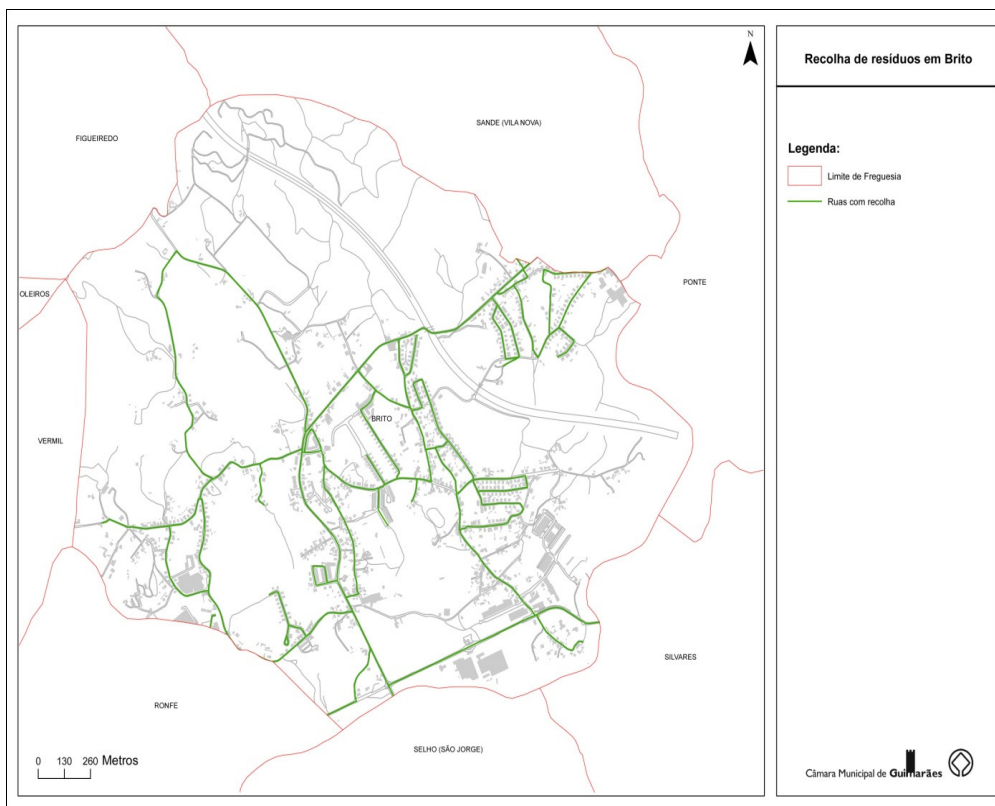


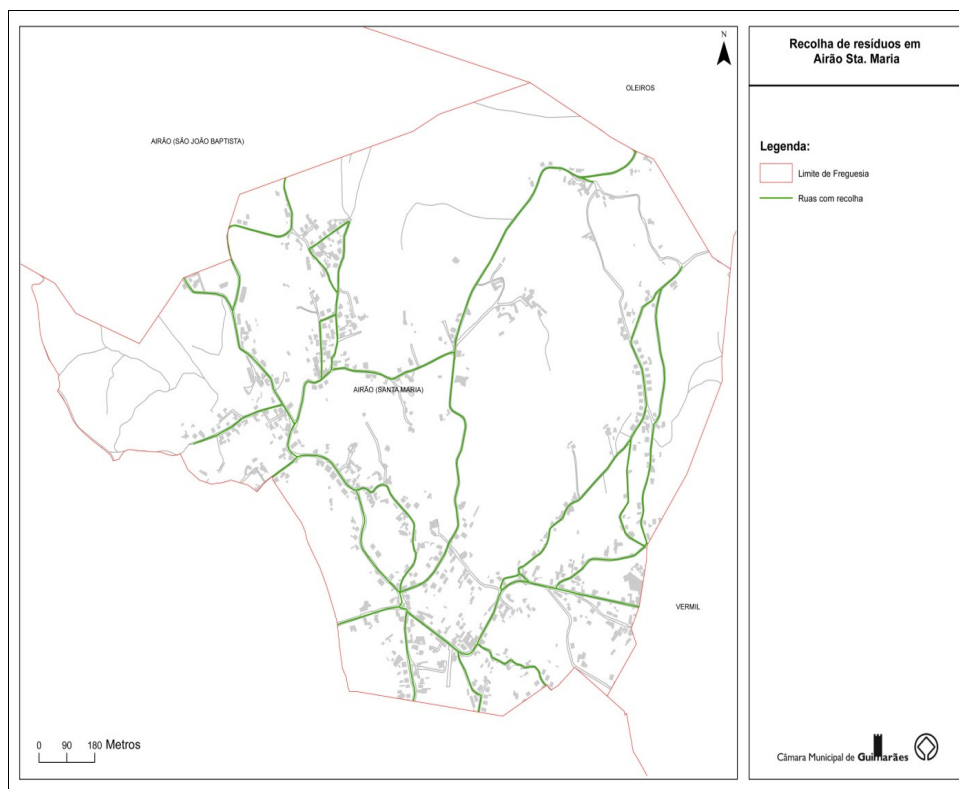




Anexo 9. Notícia do Jornal

Anexo 10. Mapas de recolha do lixo de Brito, Sande S. Martinho e Airão Santa Maria





Anexo 11. Guião da entrevista

Propostas de Questões da Entrevista:

1) Que atividades realizam os alunos na elaboração de um trabalho de projeto na aprendizagem de Grafos?

- 1.1 Após a realização deste trabalho, com que ideia ficam de um trabalho de Projeto?
- 1.2 Quando este trabalho de projeto vos foi apresentado, que ideias vos surgiram para a sua elaboração?
- 1.3 Descrevam o vosso envolvimento neste trabalho de Projeto.
- 1.4 Quais as principais dificuldades que sentiram na realização deste trabalho e como as conseguiram ultrapassar
- 1.2 Que atividades realizaram para a realização deste trabalho e quais os processos e estratégias utilizados no desenvolvimento dessas atividades?
- 1.3 Que descobertas fizeram neste trabalho de projeto?
- 1.4 O problema criado por vocês foi reformulado? Porquê?
- 1.5 As atividades complementares propostas pela professora ajudaram a avançar na tarefa? Como?
- 1.6 Qual foi a fase mais difícil deste trabalho para vocês? Qual foi a questão do problema mais complicada para encontrar a resposta? Porquê?
- 1.7 Na vossa opinião, de que forma os grafos vos ajudaram a resolver o vosso problema? Conseguiram resolvê-lo sem usar grafos? Se sim, descrevam como o fizeram e expliquem a razão de terem usado grafos.
- 1.8 O que mais de positivo vos marcou neste trabalho? E de negativo? Indiquem três aspectos de cada.
- 1.9 Esta forma de abordagem de um conteúdo matemático deixa-vos mais ou menos motivados para a aprendizagem da matemática? Porquê?
- 1.10 Que ilações retiraram da apresentação intermédia que fizeram?
- 1.11 O que mais destacam da fase de preparação do trabalho para a apresentação final?
- 1.12 Que atividades desenvolveram fora da sala de aula para avançar no vosso trabalho?
- 1.13 De que modo a realização dos relatórios semanais contribui ou não para o contributo para a vossa formação?
- 1.14 Se fossem contar a alguém a história deste trabalho, desde o momento da escolha do tema até à sua conclusão, como a contavam?

2) Que atitudes, capacidades e conhecimentos desenvolvem nessas atividades. Que dificuldades manifestam?

- 2.1 Relativamente ao trabalho que realizaram, que vantagens notaram por terem trabalhado em grupo? E que desvantagens?
- 2.2 Sentiram que existia um líder no grupo, que vos puxava para não desanimarem e vos obrigava a trabalhar?
- 2.3 De que modo as opiniões dos elementos eram escutadas e partilhadas no desenvolvimento deste trabalho?
- 2.4 Na vossa opinião, que alterações ocorreram nas atitudes do grupo ao longo deste trabalho?
- 2.5 Que cuidados devem existir num trabalho de grupo para que ele se torne produtivo?
- 2.6 Indiquem algumas atitudes que tenham acontecido no vosso grupo ou na turma que considerem ter beneficiado ou prejudicado este trabalho?

2.7 Na vossa opinião o grupo cumpriu sempre as regras estipuladas no início do trabalho? Porquê?

3) Que perspectivas têm os alunos sobre o trabalho de projeto na aprendizagem de Grafos?

3.1 Consideram que o trabalho colaborativo com os vossos colegas possibilitou a obtenção de respostas mais significativas? Como e porquê?

3.2 Consideram que a partir deste projeto estão mais preparados para responder a um teste de conhecimentos sobre a Teoria de Grafos?

3.3 Que vantagens e desvantagens vêm nesta forma de construção do vosso conhecimento?

3.4 O que aprenderam sobre grafos? O que é para vocês um grafo?