Grafos e digrafos com o *sagemath*

Pedro Patrício*

Acção de Formação de Grafos, Maio/Junho de 2008

Conteúdo

1 Introdução

Os grafos são uma forma conveniente de representar um fluxo de um certo bem. Imagine uma empresa transportadora que tem a seu cargo o fornecimento de um certo bem a várias localidades (ou filiais, deixo à sua imaginação). Obviamente que a empresa tem como alvo efectuar o serviço de forma competente, reduzindo os custos. Intuitivamente, associa-se cada filial a um vértice, desenhando uma aresta entre dois vértices (aka filiais) se estes estiverem ligados de alguma forma conveniente – por auto-estrada, por exemplo. Claro que a cada aresta podemos associar um peso, relativo ao custo de tomar essa estrada (combustível, portagens, horas a serem pagas ao motorista, por exemplo). Podemos também pressupor que existem estradas de "sentido único", obtendo assim um digrafo ou grafo dirigido, ou que existem

*Departamento do Matemática da Universidade do Minho. Email: pedro@math.uminho.pt

vários caminhos possíveis, e neste caso temos um multigrafo. Os grafos tornam-se então numa representação gráfica de possíveis fluxos de bens, o que não significa que constituam um mapa. De facto, não existe obrigatoriedade qualquer em relação a orientação, posição nem distância relativa.

2 Conceitos iniciais

Recorde que um *digrafo* $\mathcal{D}$ é um par ordenado $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{V}$ é um conjunto não vazio finito de vértices e $\mathcal{A}$ conjunto de arestas é um subconjunto de $\{(U,V) : U, V \in \mathcal{V}\}$.

No caso dos digrafos pesados, as arestas têm a si associadas um peso, e portanto são elementos de $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times P$, onde P é o conjunto dos pesos.

A classe dos multigrafos pode ser definida indexando cada aresta a um conjunto de índices. Ou seja, para $I \neq \emptyset$ conjunto de índices, o conjunto das arestas é um subconjunto do produto cartesiano $V \times V \times I$.

Iremos autorizar a existência de lacetes, ou *loops*, isto é, $(U, U) \in \mathcal{A}$, mas não iremos considerar multigrafos.

Dada uma aresta $(U, V) \in \mathcal{A}$, o vértice U diz-se *extremidade inicial* e o vértice V *extremidade final*.

Dizemos que os vértices U e V são *adjacentes*, $U \leftrightarrow V$, se $(U, V) \in \mathcal{A}$ ou $(V, U) \in \mathcal{A}$. Em qualquer um destes casos, diz-se que o vértice U é *vizinho* do vértice V. Esta aresta diz-se *incidente* em cada um desses vértices. O conjunto dos vizinhos de U denota-se por $\Gamma(U)$. Duas arestas ℓ_1, ℓ_2 são *adjacentes* se existir $X \in \mathcal{V}$ tal que ℓ_1, ℓ_2 incidem em X.

Os *antecessores* [resp. *sucessores*] de um vértice V são os elementos do conjunto $\Gamma^-(V) = \{U \in \mathcal{V} : (U, V) \in \mathcal{A}\}$ [resp. $\Gamma^+(V) = \{U \in \mathcal{V} : (V, U) \in \mathcal{A}\}$].

O *grau* (ou *valência)* de um vértice V, denotado por $deg(V)$ ou por $\partial(V)$, é o número de arestas próprias (ou seja, que não sejam lacetes) incidentes em V adicionado ao dobro do número[1] de laços em V . O *grau interior* de V, $\partial^-(V)$, é o número de arestas da forma $(*, V)$, e o *grau exterior* de V, $\partial^+(V)$, é o número de arestas da forma $(V, *)$. Ou seja, $\partial^-(V) = \#\Gamma^-(V)$ e $\partial^+(V) = \#\Gamma^+(V)$.

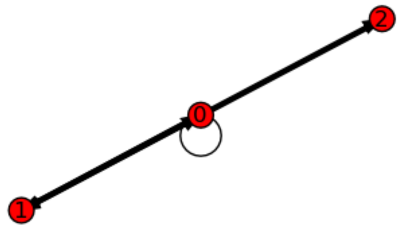
A título de exemplo, considere a representação gráfica do digrafo seguinte

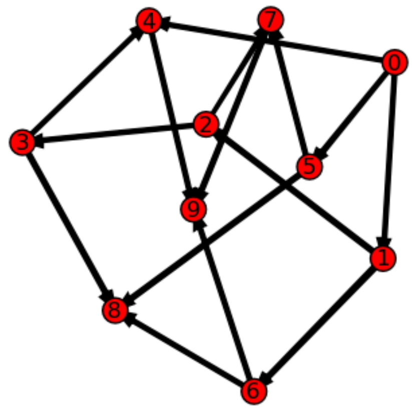
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend right] & V \arrow[l, bend right] \arrow[loop above] \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

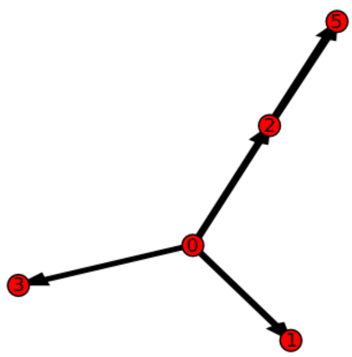
Temos, então, $\mathcal{V} = \{U, V, W\}$, $\mathcal{A} = \{(U, V), (V, U), (V, V), (V, W)\}$. Neste digrafo, $\partial^-(U) = \partial^+(U) = \partial^-(W) = 1, \partial^+(W) = 0, \partial^-(V) = 2, \partial^+(V) = 3$.

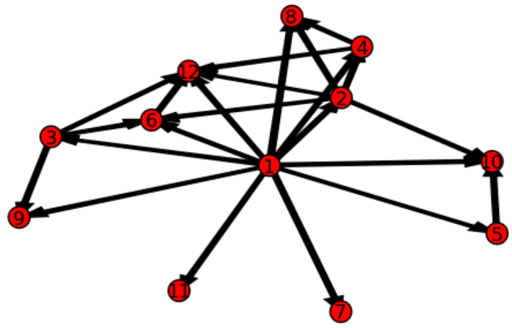
Exercício 2.1. *Para os grafos representados nas figuras, encontre os graus interior e exterior de cada vértice:*

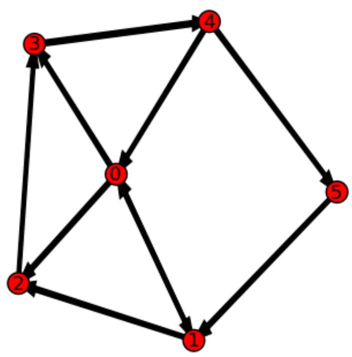
[1] que no nosso caso pode ser 0 ou 1.

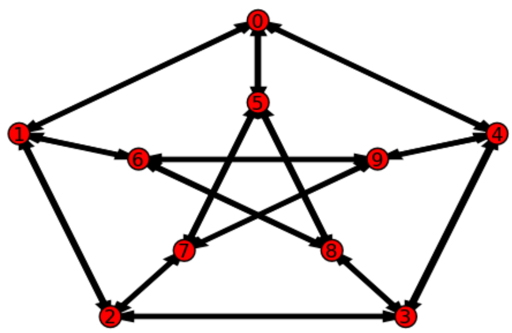












3 Representação com matrizes

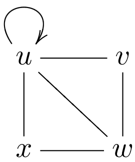
A um (p,q)-grafo $\mathcal{G}$, isto é, um grafo com p vértices e q arestas, podemos associar, de forma única, uma matriz $p \times p$, $A_G = A(\mathcal{G})$, denominada *matriz de adjacência* de $\mathcal{G}$, cujas linhas e colunas estão indexadas da mesma forma a uma ordenação dos elementos de $\mathcal{V}$, definida por

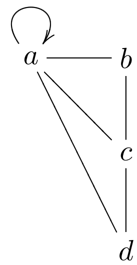
$$A_{[u,v]} = \begin{cases} \text{número de arestas incidentes com } u \text{ e } v & \text{se } u \neq v \\ \text{número de lacetes em } u & \text{se } u = v \end{cases}$$

onde $u, v \in \mathcal{V}$.

Claro que ao apenas considerarmos grafos ao invés de multigrafos, então as entradas da matriz de adjacência podem apenas tomar os valores 0 e 1.

Considere os grafos





Ordenando os vértices do primeiro grafo da forma (u, v, w, x), a matriz de adjacência é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como exercício, calcule a matriz de adjacência do segundo grafo, ordenando os vértices como (a, b, c, d).

Como é óbvio, a matriz de adjacência de um grafo (não dirigido) é simétrica.

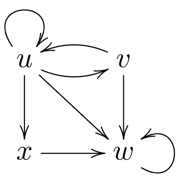
Vejamos agora o caso dos digrafos.

Nas mesmas condições da definição para grafos, a *matriz de adjacência de um digrafo* $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, que não é multidigrafo, é a matriz A_D definida por

$$A_D[u, v] = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in \Gamma^+(u) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $u, v \in \mathcal{V}$.

Como exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz de adjacência do digrafo



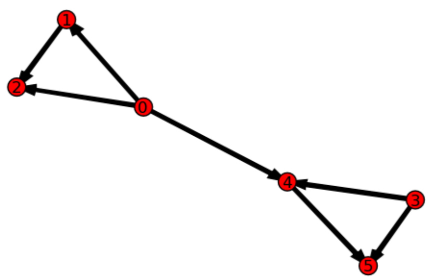
considerando a ordenação dos vértices como (u, v, w, x).

Repare que a linha correspondente ao vértice u diz-nos que de u é antecessor de todos os vertices, e que a coluna correspondente ao vértice w diz-nos que w é sucessor de todos os vértices do digrafo. Voltaremos mais tarde a esta noção de alcance.

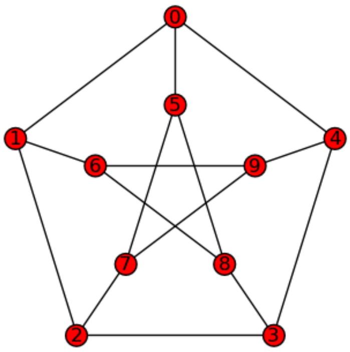
Exercício 3.1. *1. As matrizes*

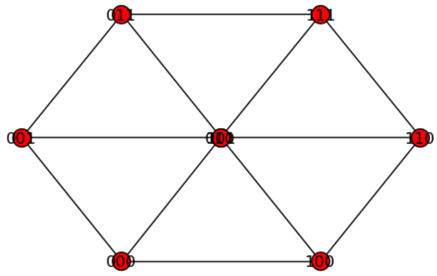
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

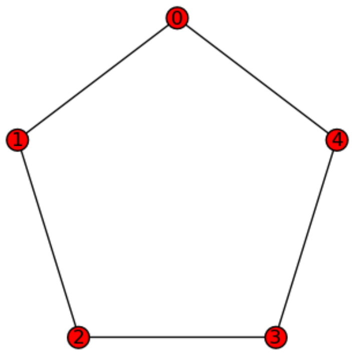
são de adjacência de cada um dos digrafos. Faça a correspondência.

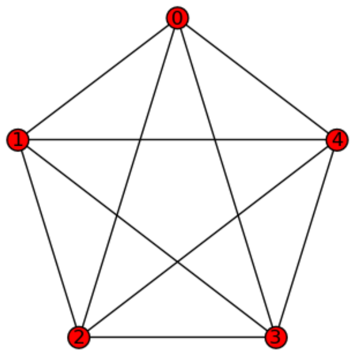


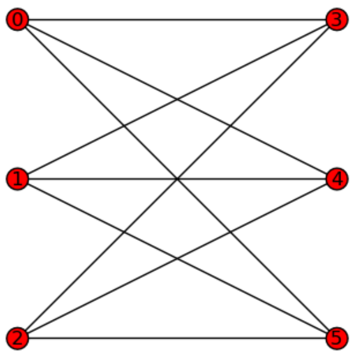
2. Encontre a matriz de adjacência de cada um dos grafos seguintes, fixando uma ordem para os vértices.

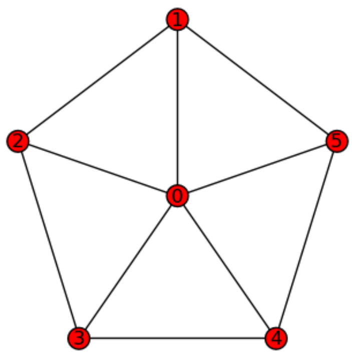




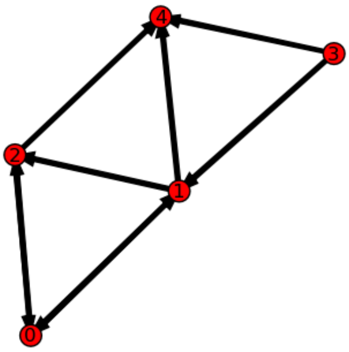


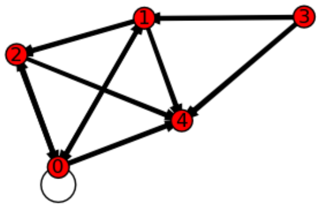


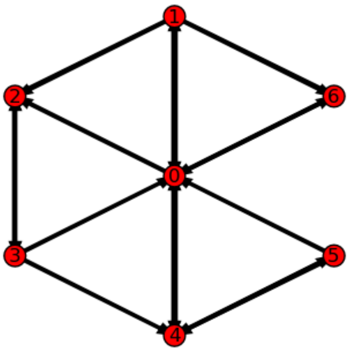


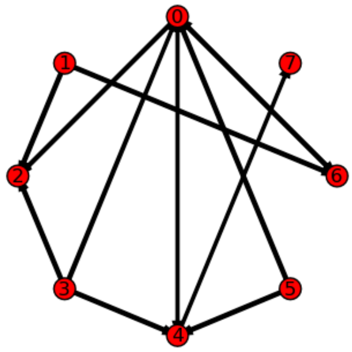


3. *Determine as matrizes de adjacência dos digrafos seguintes, fixando previamente uma ordem para os vértices.*







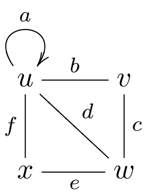


A um grafo $\mathcal{G}$ podemos associar uma matriz, a *matriz de incidência*, para uma certa ordenação dos vértices (a que se farão corresponder as linhas) e das arestas (a que se farão corresponder as colunas) fixa previamente, da seguinte forma:

$$I_{\mathcal{G}}[v,e] = \begin{cases} 0 & \text{se } e \text{ não incide em } v \\ 1 & \text{se } e \text{ incide em } v \text{ e } e \text{ não é lacete em } v \\ 2 & \text{se } e \text{ é lacete em } v \end{cases}$$

onde $v \in \mathcal{V}$ e $e \in \mathcal{A}$.

Calculemos a matriz de incidência do grafo já visto anteriormente, ordenando os vértices como (u, v, w, x) e as arestas como (a, b, c, d, e, f):



$$I_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como é fácil de verificar, uma outra ordenação dos vértices leva a troca de linhas da matriz de incidência, e uma outra ordenação das arestas a troca de colunas da matriz de incidência.

Proposição 3.2. *A soma das entradas de uma qualquer linha da matriz de incidência de um grafo é igual ao grau do vértice respectivo.*

Demonstração. Considere um vértice v do grafo de forma arbitrária, bem como as arestas das quais v é extremidade, mas que não são lacete em v. Estas são em número igual $\partial(v) - 2\delta$, onde $\delta = 1$ se existe um lacete v e $\delta = 0$ caso contrário. Ora $\partial(v) - 2\delta$ iguala o número de 1's na linha correspondente ao vértice v na matrix de incidência. Um lacete f (caso exista) contribui com 2 unidades no cálculo de $\partial(v)$, e 2 é a entrada na linha correspondente ao vértice v e na coluna correspondente à aresta f. $\square$

Proposição 3.3. *A soma das entradas de uma qualquer coluna da matriz de incidência de um grafo é igual a 2.*

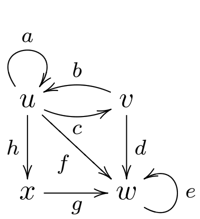
Demonstração. Se a aresta e incide em dois vértices distintos, digamos u e v, então as entradas correspondentes a u, e e v, e são iguais a 1. Uma aresta incide no máximo em dois vértices, pelo que as outras entradas dessa coluna valem 0. Se e é lacete, então incide num só vértice e a entrada correspondente é 2, sendo as restantes nulas. $\square$

A matriz de incidência de um digrafo é definida de forma análoga. Dado o digrafo $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, e para uma ordenação dos elementos de $\mathcal{V}$ e dos elementos de $\mathcal{A}$ fixa previamente, a matriz de incidência $I_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ é dada por

$$I_{\mathcal{D}}[v,e] = \begin{cases} 0 & \text{se } e \text{ não incide em } v \\ -1 & \text{se } v \text{ é extremidade inicial de } e \text{ e } e \text{ não é lacete em } v \\ 1 & \text{se } v \text{ é extremidade final de } e \text{ e } e \text{ não é lacete em } v \\ 2 & \text{se } e \text{ é lacete em } v \end{cases}$$

onde $v \in \mathcal{V}$ e $e \in \mathcal{A}$.

Por exemplo, no digrafo seguinte, ordenando os vértices como (u, v, w, x) e as arestas como (a, b, c, d, e, f, g, h),



$$I_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

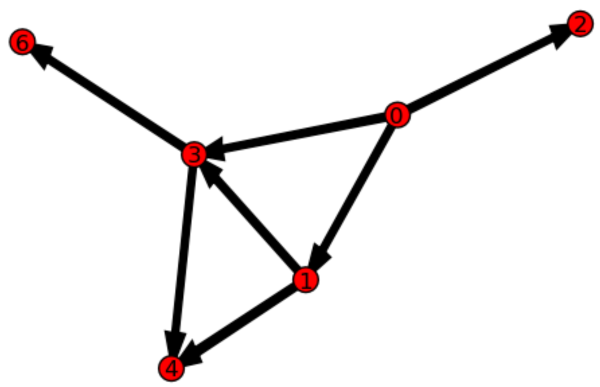
Proposição 3.4. *Num digrafo sem lacetes, a soma das entradas de uma coluna da matriz de incidência é zero.*

Demonstração. Exercício. $\square$

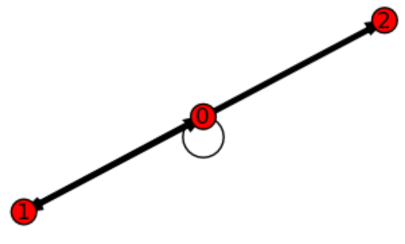
Exercício 3.5. *1. Encontre uma ordenação das arestas e dos vértices por forma a que*

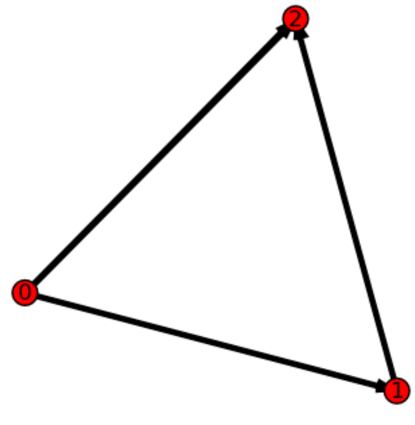
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

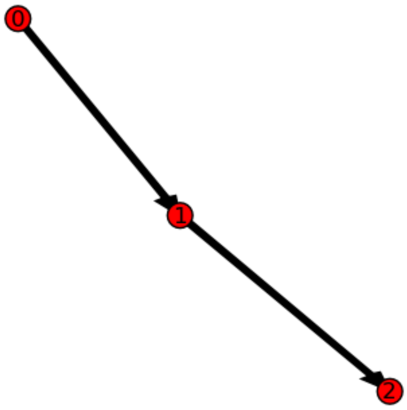
seja a matriz de incidência do digrafo

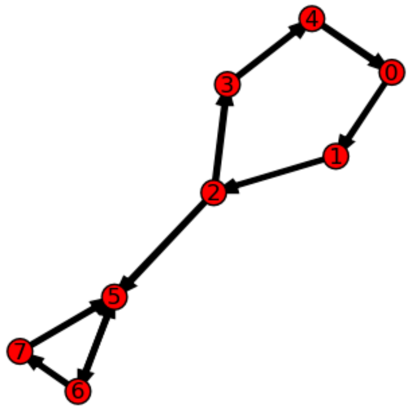


2. Indique uma matriz de incidência dos digrafos









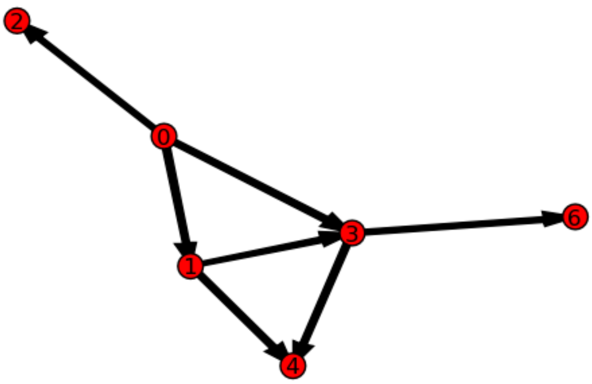
4 Conexidade

Um *caminho dirigido* num digrafo G do vértice v para o vértice w é uma sucessão (finita) de vértices e arestas

$$v = v_0, x_1, v_1, \ldots v_{n-1}, x_n, v_n = w,$$

com $v_i \in V_G$, tais que $x_i = (v_{i-1}, v_i) \in A_G$. Ou seja, $v_{i-1} \in \Gamma^-(v_i)$. As arestas são tais que a extremidade inicial de x_i é v_{i-1} e a final é v_i. Dizemos, neste caso, que existe uma *conexão* de v para w e escrevemos $v \twoheadrightarrow w$.

No digrafo representado por



temos, por exemplo, $0 \twoheadrightarrow 4$ e $0 \twoheadrightarrow 6$, mas $4 \not\twoheadrightarrow i$, para $i = 0, \ldots, 6$.

Um par de vértices diz-se *fortemente conectado* se existir uma conexão de cada um deles para o outro. Se existir conexão de apenas um deles para o outro, então teremos um par *unilateralmente conectado*. Um digrafo diz-se *fortemente conexo* se cada par de vértices for fortemente conectado, e *unilateralmente conexo* se cada par de vértices for unilateralmente conectado. Um digrafo diz-se *fracamente conexo* se o grafo suporte[2] for conexo.

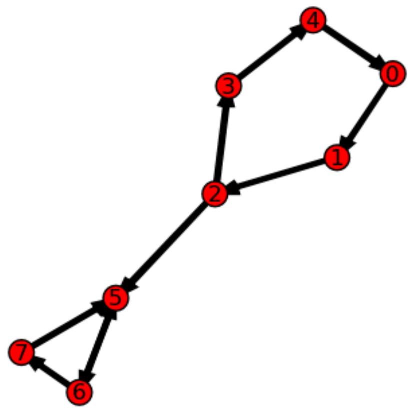
Exercício 4.1. *Indique que par de vértices do digrafo anterior são fortemente conectados.*

A um caminho dirigido de um vértice para ele mesmo dá-se o nome de *caminho fechado dirigido*. Um caminho fechado dirigido diz-se um *circuito dirigido* se os arcos que o compõem forem distintos, e um *ciclo dirigido* se todos os vértices que o compõem forem distintos.

A relação definida por xRw se $\{v, w\}$ forem fortemente conectados (ou seja, $v \twoheadrightarrow w$ ou $w \twoheadrightarrow v$) é uma relação de equivalência, e corresponde à partição de V em classes de equivalência, designadas por *componentes fortemente conexas* do digrafo.

O digrafo seguinte, embora o grafo suporte seja conexo, não é fortemente conexo. Por isso se diz que é fracamente conexo. Este digrafo tem como matriz de adjacência, tomando a ordem natural da enumeração dos vértices,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Quantas componentes fortemente conexas existem?

[2] Ou seja, o grafo obtido do digrafo onde as arestas perdem a orientação.

Teorema 4.2. *Seja A a matriz de adjacência do digrafo $\mathcal{G}$, para uma ordenação fixa previamente dos vértices. A entrada $A^r_{[u,v]}$ indica o número de caminhos dirigidos de u para v de comprimento r.*

Demonstração. A prova é feita por indução sobre r. Para $r = 1$, o resultado é óbvio. Suponha que é válido para $r-1$. Ora $A^r_{[u,v]} = \sum_{p\in\mathcal{V}} A^{r-1}_{[u,p]} A_{[p,v]}$ pela forma como o produto matricial está definido. Mas

$$A^{r-1}_{[u,p]} A_{[p,v]} = \begin{cases} A^{r-1}_{[u,p]} & \text{se } (u,p) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $A^{r-1}_{[u,p]}$ é um número de $r-1$-caminhos entre u e p, que iguala o número de r caminhos entre u e v que passam por $p \in \Gamma^-(v)$, temos que $\sum_{p\in\mathcal{V}} A^{r-1}_{[u,p]} A_{[p,v]}$ é o número de r-caminhos entre u e v. □

No digrafo representado atrás, e sabendo que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não existem, por exemplo, caminhos dirigidos de comprimento 2 de 7 para qualquer outro vértice que não o 6. Sabendo ainda que

$$A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não existem caminhos dirigidos de comprimento 6 de qualquer vértice que não o 0 e que termine em 1. E que existem 3 caminhos dirigidos de comprimento 6 de 2 para 5.

Corolário 4.3. *Se A é a matriz de adjacência de $\mathcal{G}$ então a entrada (i,j) de*

$$B_r = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^r$$

indica o número de caminhos, de comprimento não superior a r, entre v_i e v_j.

Proposição 4.4. *Sejam A a matriz de adjacência de $\mathcal{G}$, com m vértices, e*

$$B_m = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^m.$$

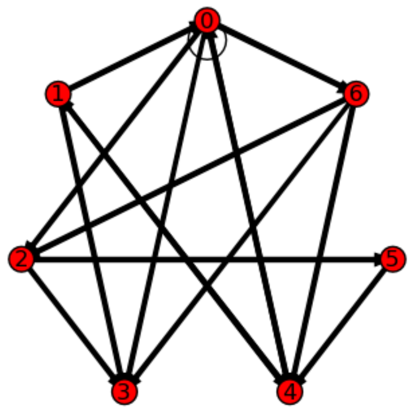
Então $\mathcal{G}$ é fortemente conexo se e só se B_m não tiver entradas nulas.

Para o digrafo considerado acima,

$$B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 9 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 13 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 14 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo, o digrafo não é fortemente conexo.

Exercício 4.5. *Considere o digrafo*



Indique uma matriz de adjacência. Ele é fortemente conexo? E o grafo suporte é conexo?

A *matriz de alcançabilidade* de um digrafo com n vértices é uma matriz $R = [r_{ij}]$ em que $r_{ij} = 1$ se existir um caminho dirigido de i para j e 0 caso contrário. Como é evidente, um digrafo é fortemente conexo se e só se os elementos da sua matriz de alcançabilidade forem todos iguais a 1.

Uma forma alternativa de se definir matriz de alcançabilidade (equivalente, como é óbvio, com a apresentada) de um digrafo com n vértices é a de considerar a matriz de adjacência A como matriz boleana, e tomar $R = A + A^2 + \cdots + A^m$. Recorde que as operações na álgebra de Boole estão definidas como

$$\begin{array}{c||c|c} + & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c||c|c} * & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\,.$$

No cálculo proposicional, a operação $+$ corresponde ao `OR` ou $\vee$, e a $*$ ao `AND` ou $\wedge$.

Seja R uma relação binária num conjunto finito V com m elementos. Ou seja, $R \subseteq V \times V$. O *fecho transitivo* R^* de R é o invólucro transitivo de R. Ou seja, é o menor conjunto (para a relação de ordem $\subseteq$) que contém R e é uma relação transitiva[3].

A relação R pode ser identificada da forma natural com o digrafo $\mathcal{G} = (V, R)$. A relação binária $R^2 = R \circ R$ está definida por

$$R \circ R = \{(u, v) \in V \times V \mid \exists_{w \in R}\, (u, w), (w, v) \in R\}\,.$$

Ou seja, R^2 pode ser encarado como um digrafo com m vértices e arestas (u, v) se existir um caminho dirigido de comprimento 2 de u para v. De forma análoga,

$$R^k = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{existe um caminho de comprimento } k \text{ de } u \text{ para } v\}\,.$$

O fecho transitivo R^* de R pode agora ser visto como o conjunto dos elementos (u, v), com $u, v \in V$, para os quais $u \twoheadrightarrow v$, ou seja, existe um caminho dirigido de u para v.

Teorema 4.6. *Seja R uma relação binária num conjunto V com m elementos e considere o digrafo $G = (V, R)$. Então*

1. *$R^* = R \cup R^2 \cup \cdots R^m$ é o fecho transitivo de R.*
2. *A matriz de alcançabilidade de G iguala a matriz de adjacência de $G^* = (V, R^*)$.*

Na figura acima, a matriz de adjacência de G é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a de G^* é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 4.7. *Encontre o fecho transitivo e a matriz de alcançabilidade dos digrafos seguintes:*

[3] Recorde que a relação binária $\propto$ é transitiva se $a \propto b$ e $b \propto c$ força necessariamante que $a \propto c$.

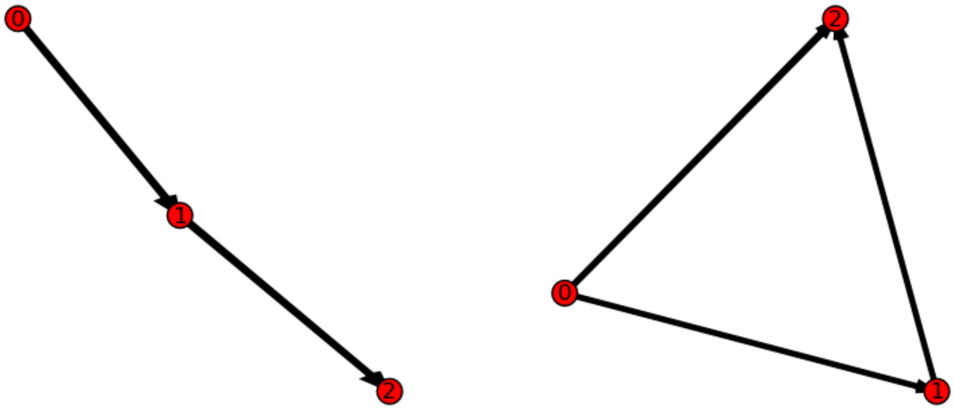
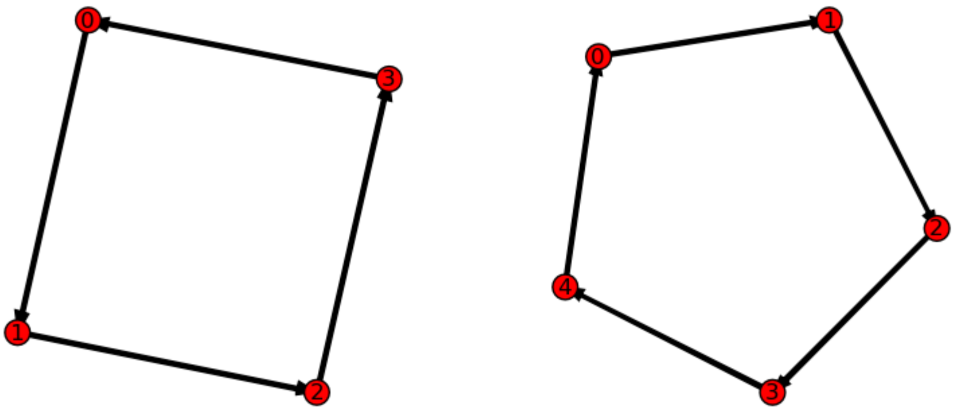
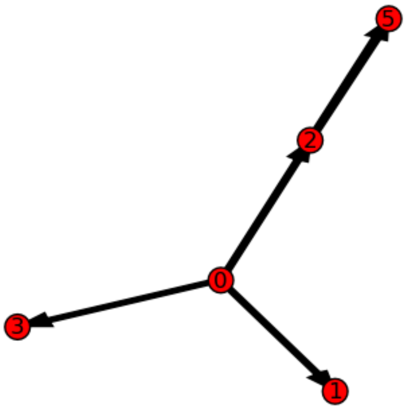
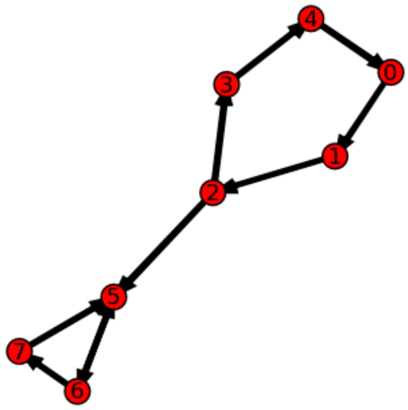
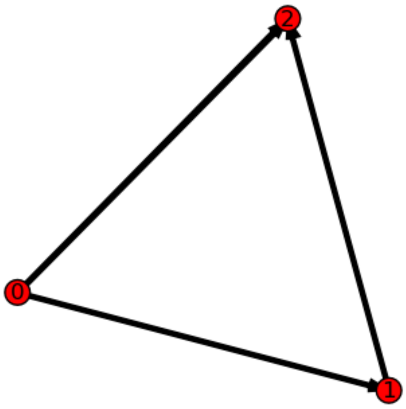


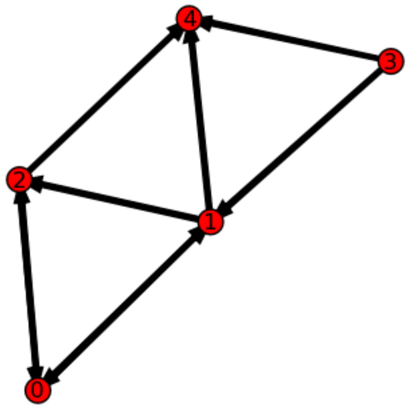
Figura 1: Um digrafo G e o seu fecho transitivo G^*











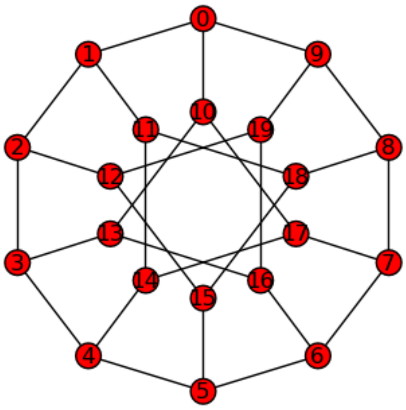
5 Grafos orientáveis

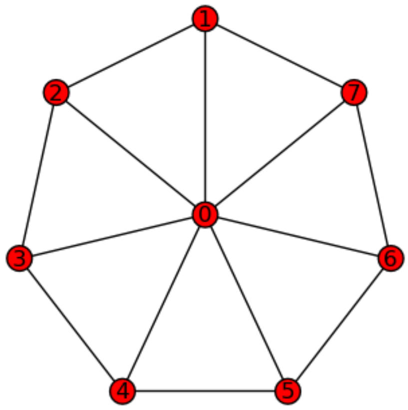
Se $\mathcal{G}$ é um grafo, então o digrafo que se obtém substituindo cada aresta de $\mathcal{G}$ por um arco é denominado de *orientação* de $\mathcal{G}$. Uma orientação de um grafo diz-se uma *orientação forte* se a orientação for fortemente conexa.

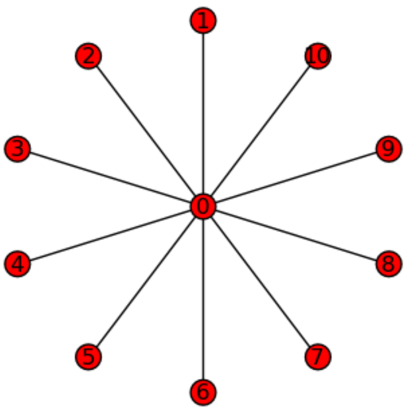
Um grafo diz-se *fortemente orientável* se possuir uma orientação forte. O resultado seguinte caracteriza os grafos fortemente orientáveis.

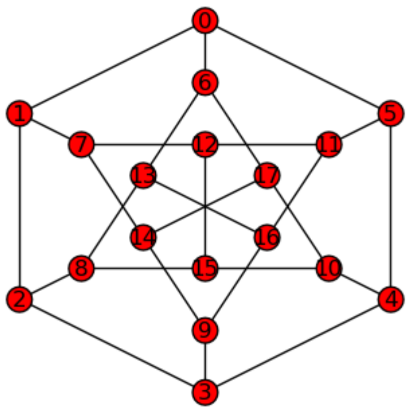
Teorema 5.1 (Teorema de Robbins)**.** *Um grafo é fortemente orientável se e só se é conexo e não tem pontes.*

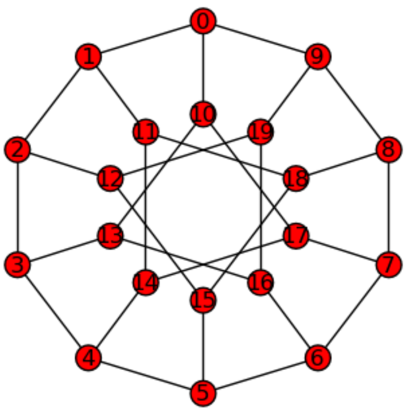
Exercício 5.2. *Dos grafos seguintes, indique os que são fortemente orientáveis.*

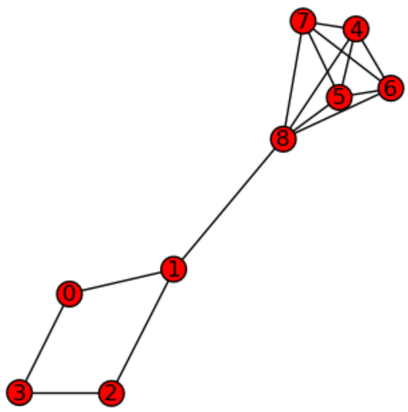












Referências

[1] Stephen Barnett, *Discrete mathematics: numbers and beyond*, Addison-Wesley Longman, 1998 (ISBN 0-201-34292-8).

[2] Jonathan Gross, Jay Yellen, *Graph theory and its applications*, CRC Press, 1999 (ISBN 0-8493-3982-0).

[3] Frank Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publ., 1972 (ISBN 0-201-02787-9).

[4] Robert E. Hartwig, *Directed graphs*, notas não publicadas, North Carolina State University, 2002.

[5] João Patrício, *Grafos e Digrafos*, notas de apoio à disciplina Lógica e Computação, IPT, 2007/2008.

[6] Mario Rodríguez Riotorto, *Primeros pasos en Maxima*, 2008, disponível em `www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/max.pdf`

[7] Ilda Perez F. da Silva, *Tópicos de Matemática Finita*, edição da A.E.F.C.L., 1992.

[8] William Stein, *Sage Reference Manual, Release 2008.04.21*, 2008, disponível em `http://www.sagemath.org/doc/paper-letter/ref.pdf`

[9] J. K. Truss, *Discrete mathematics for computer scientists*, Addison-Wesley Publ., 1999 (ISBN 0-201-36061-6).

Anexo

5.1 Maxima

O *Maxima* é uma sistema algébrico computacional de código aberto distribuído de acordo com a licença GPL. Pode ser obtido no endereço

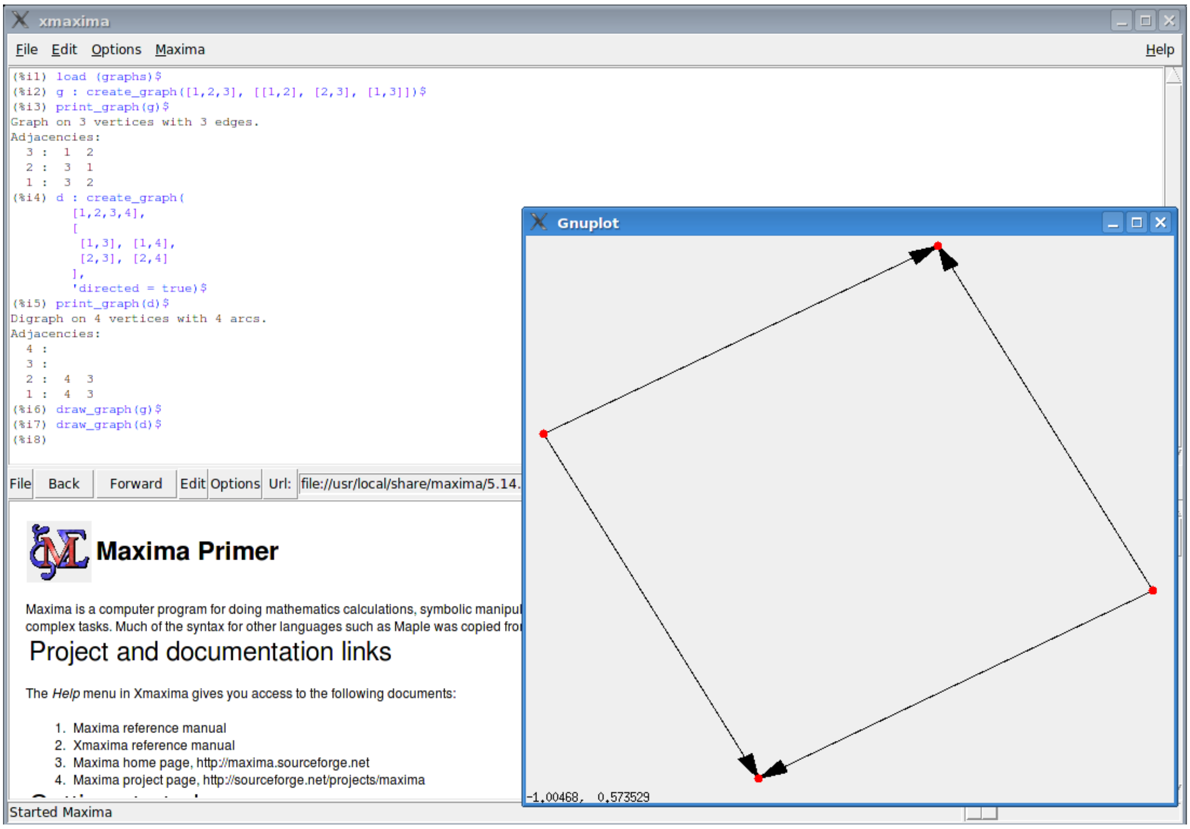
`http://maxima.sourceforge.net/`

A documentação referente ao estudo dos grafos pode ser consultada em

`http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima_52.html`

Uma versão mais intuitiva no uso do *Maxima*, o *wxMaxima*, pode ser obtido em

`http://wxmaxima.sourceforge.net/`



Em [6, pp 37–42] pode consultar como construir e realizar operações simples com grafos e digrafos. Deixamo-lo com algumas implementações muito simples.

```
(%i1) load (graphs)$
(%i2) g : create_graph([1,2,3], [[1,2], [2,3], [1,3]])$
(%i3) print_graph(g)$
```

```
Graph on 3 vertices with 3 edges.
Adjacencies:
  3 :  1  2
  2 :  3  1
  1 :  3  2
(%i4) d : create_graph(
        [1,2,3,4],
        [
         [1,3], [1,4],
         [2,3], [2,4]
        ],
        'directed = true)$
(%i5) print_graph(d)$
Digraph on 4 vertices with 4 arcs.
Adjacencies:
  4 :
  3 :
  2 :  4  3
  1 :  4  3
(%i6) draw_graph(g)$
(%i7) draw_graph(d)$
```

5.2 SAGE

As representações gráficas de grafos e digrafos apresentadas neste documento foram, na sua maioria, construidas com um outro sistema computacional, também ele distribuído sob a licença GPL, denominado *SAGE*. Pode ser obtido no endereço

`http://www.sagemath.org`

Em [8] pode consultar um manual de utilização, ou visitar

`http://www.sagemath.org/doc/html/ref/node40.html`

Apresentamos uma forma de integrar o SAGE na resolução de alguns dos exercícios propostos nestas notas.

1. Exercício 2.1

```
sage: D=DiGraph({ 0:[1,2,0], 1:[0]},loops=True)
sage: D.show()
sage: d = {0: [1,4,5], 1: [2,6], 2: [3,7], 3: [4,8], 4: [9], \
....: 5: [7, 8], 6: [8,9], 7: [9]}
```

```
sage: D=DiGraph (d,loops=True)
sage: D.show()
sage: g = DiGraph({0:[1,2,3], 2:[5]})
sage: G=DiGraph(g)
sage: G.show()
sage: g=DiGraph([[1..12],lambda i,j: i!=j and i.divides(j)])
sage: G=DiGraph(g)
sage: G.plot().show()

sage: D = DiGraph( { 0: [1,2,3], 1: [0,2], 2: [3], 3: [4], 4: [0,5], 5: [1] } )
sage: D.in_degree(vertices = [0,1,2], labels=True)
{0: 2, 1: 2, 2: 2}
sage: D.in_degree()
[2, 2, 2, 2, 1, 1]
sage: G = graphs.PetersenGraph().to_directed()
sage: G.in_degree(0)
3
```

2. Exercício 3.1(1)

```
sage: G = DiGraph( { 0 : [1, 2], 1 : [2], 3 : [4, 5], 4 : [5] } )
sage: G.plot().show()
sage: G.add_edge([0,4])
sage: G.plot().show()
sage: G.adjacency_matrix ()

[0 1 1 0 1 0]
[0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 1]
[0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0]
```

3. Exercício 3.1(3)

```
sage: g={0:[1,2], 1:[0,2,4], 2:[ 4,0], 3:[1,4]}
sage: G=DiGraph (g)
sage: G.show()
sage: G.adjacency_matrix()
```

```
[0 1 1 0 0]
[1 0 1 0 1]
[1 0 0 0 1]
[0 1 0 0 1]
[0 0 0 0 0]
```

4. Exercício 4.5

```
sage: N=matrix([[1,0,1,1,1,0,1],[1,0,0,1,1,0,0],[0,0,0,1,0,1,0],\
....: [0,0,0,0,0,0,0],[1,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0],[0,0,1,1,1,0,0]])
sage: G=DiGraph (N,loops=True)
sage: G.show(layout='circular')
sage: G.show3d()
sage: G.adjacency_matrix ()

[1 0 1 1 1 0 1]
[1 0 0 1 1 0 0]
[0 0 0 1 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0]
[1 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 1 1 1 0 0]
sage: G.adjacency_matrix ()==N
True
sage: G.vertices ()
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]
sage: sum(N^(i+1) for i in range(7))

[259 102 162 276 236  70 113]
[199  78 123 211 181  53  86]
[ 37  15  23  40  34  11  16]
[  0   0   0   0   0   0   0]
[199  79 123 210 180  53  86]
[ 86  34  53  91  79  23  37]
[102  40  64 110  94  28  44]
sage: N+N^2+N^3+N^4+N^5+N^6+N^7

[259 102 162 276 236  70 113]
[199  78 123 211 181  53  86]
```

```
[ 37  15  23  40  34  11  16]
[  0   0   0   0   0   0   0]
[199  79 123 210 180  53  86]
[ 86  34  53  91  79  23  37]
[102  40  64 110  94  28  44]
```

5. Exercício 4.7

```
 sage: g1=DiGraph( {0:[1],1:[2],2:[3],3:[0]})
sage: g1trans=g1.transitive_closure ()
sage: g1trans.show()
sage: g1trans.adjacency_matrix ()

[0 1 1 1]
[1 0 1 1]
[1 1 0 1]
[1 1 1 0]
```