

DINÂMICA
I- FORÇA, MASSA E ACELERAÇÃO
1. Dinâmica do ponto**1.1- Introdução**

Na Dinâmica estudam-se as leis que regem o movimento, estabelecendo-se a relação entre este e as forças que o provocam. Quando sobre um corpo, actua um sistema de forças não equilibrado, produz-se sempre uma alteração no estado do movimento desse corpo. A experiência mostra que, na alteração sofrida, influem não só as características do sistema de forças, como também a natureza do próprio corpo. Assim, diferentes sistemas de forças, actuando independentemente sobre o mesmo corpo, produzirão diferentes alterações no movimento deste; e o mesmo sistema de forças actuando sobre diferentes corpos, também produzirá alterações de movimento diferentes.

As leis que exprimem as relações entre o sistema de forças que actua num ponto material, as suas propriedades e a alteração de movimento que este sofre, foram formuladas por Isaac Newton e designam-se por Leis de movimento de Newton.

As leis de Newton só se aplicam directamente ao movimento de um ponto material sob a acção de uma força. *Nas aplicações práticas de Engenharia*, o que temos habitualmente de estudar é o movimento de um sistema de pontos materiais (rigidamente ligados ou não), sob a acção de um sistema de forças qualquer, produzindo qualquer tipo de movimento.

1.2 Inércia e Massa

A propriedade que confere a um corpo a capacidade de resistir a qualquer alteração do seu movimento, denomina-se inércia. Todos os corpos físicos são inertes, mas a inércia é diferente de corpo para corpo. A medida quantitativa de inércia de um corpo, denomina-se *massa*. A experiência mostra que forças diferentes, actuando sobre um mesmo corpo, produzem acelerações diferentes, mas proporcionais às forças que as provocam.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F}{a} = m$$

Esta constante de proporcionalidade (constante no domínio da mecânica clássica) é a massa do corpo.

1.3 - Princípios fundamentais da Dinâmica

▶ *Primeiro princípio de Newton (ou princípio da inércia)*

“Se sobre um ponto material não actua qualquer força, o ponto continua em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme”;

▶ *Segundo princípio de Newton*

“Se sobre um ponto material actua uma força, o ponto adquire aceleração. A direcção e sentido são os da própria força. A grandeza é directamente proporcional a esta e inversamente proporcional à massa do ponto”;

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

▶ *Terceiro princípio de Newton (ou da acção e reacção)*

“Entre dois quaisquer pontos materiais existem acções mútuas tais que a acção de um sobre o outro é igual, colinear e oposta à deste sobre aquele”;

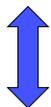
▶ *Quarto princípio (princípio de Galileu)*

“O efeito de duas ou mais forças que actuam simultaneamente sobre o mesmo ponto material é igual ao efeito que produziria a sua resultante”.

1.4 - Equações do movimento de um ponto material

As equações que regem o movimento de um ponto material são afinal as que resultam da aplicação do segundo princípio de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \text{EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA}$$



$$\begin{Bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ma_x \\ ma_y \\ ma_z \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Projecção em 3 direcções de um sistema de referência}$$

1.5 - Força de Inércia

Passemos na equação anterior, o vector “quantidade de aceleração” para o primeiro membro. Ficará

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

Se supuzermos que sobre o ponto material, além das forças reais cuja resultante é $\sum F$, actua uma outra força virtual

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}$$

então a equação fundamental da dinâmica pode ser reescrita de modo a traduzir o equilíbrio de um sistema de forças, no sentido estático do termo.

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$$

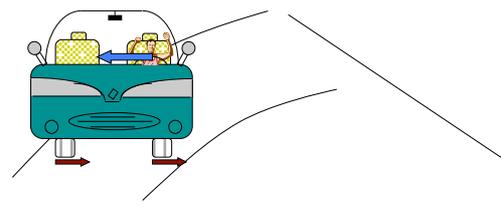
A força virtual ou fictícia é designada por força de inércia e a sua consideração permite, como se vê, a abordagem dos problemas de Dinâmica do mesmo modo dos de Estática. Supõe-se o ponto material em equilíbrio sob a acção de um sistema global de forças, em que se consideram as reais e as forças de inércia. Este modo de estudar os problemas de Dinâmica corresponde à aplicação do chamado *Princípio D’Alembert*.

1.6 - Sistema de referência inercial

A equação fundamental da Dinâmica, na realidade só será integralmente válida quando observada em sistemas de referência não acelerados. Com efeito, a nossa experiência leva-nos a concluir que, num referencial em movimento acelerado, mesmo que nenhuma força “real” actue sobre um corpo, este sofre, em relação a esse referencial móvel, alteração do seu estado de movimento. Veja-se por exemplo, o caso de um automobilista que é projectado para a esquerda quando efectua uma curva para a direita. Sofre a acção das “forças de inércia” correspondentes a acelerações de transporte, pelo menos, pelo que apresentará movimento relativo acelerado.

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = m\vec{a}^r + m\vec{a}^{tr} + m\vec{a}^c$$

$$m\vec{a}^r = -m\vec{a}^{tr} - m\vec{a}^c$$



1.7 - Momento cinético de um ponto material; sua variação

Definiu-se *momento cinético* de um ponto material P em relação a um polo O, como sendo o momento em relação a esse polo, do vector quantidade de movimento de P,

$$\vec{h}_o = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_p$$

Derivando este vector em ordem ao tempo, obtemos o vector “*momento dinâmico*” em O (ponto fixo)

$$\vec{k}_o = \vec{OP} \wedge m \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \wedge m \vec{v}}_{=0}$$

Utilizando a equação fundamental da Dinâmica, e multiplicando ambos os membros pelo vector \vec{OP} , ficará:

$$\vec{k}_o = \vec{OP} \wedge m \vec{a}$$

$$\vec{OP} \wedge (\sum \vec{F}) = \vec{OP} \wedge m \vec{a}$$

Dado que estamos a lidar apenas com um único ponto P, poderemos escrever

$$\sum \vec{M}_0 = \vec{OP} \wedge m \vec{a} \Leftrightarrow \sum \vec{M}_0 = \vec{k}_o$$

Esta equação é consequência imediata da equação fundamental da Dinâmica. De facto, no estudo da Dinâmica de um ponto material nada acrescenta de novo. Apenas surge um método alternativo de estudar o *equilíbrio dinâmico* de um dado ponto P: - Em vez de lidarmos com forças e quantidades de aceleração, podemos lidar, caso nos convenha, com momentos dessas forças e *momentos dinâmicos*.

O caso dos movimentos devidos à acção de forças centrais é um exemplo em que há vantagem em utilizar este outro formalismo, já que o momento dessas forças no “polo” do movimento será constantemente nulo.

1.8 - Aplicações

1.8.1 - Movimento rectilíneo

Consideremos um pequeno corpo, que materializa um ponto P, de massa m, movendo-se sem atrito sobre uma rampa inclinada de um ângulo α , relativamente à direcção horizontal.

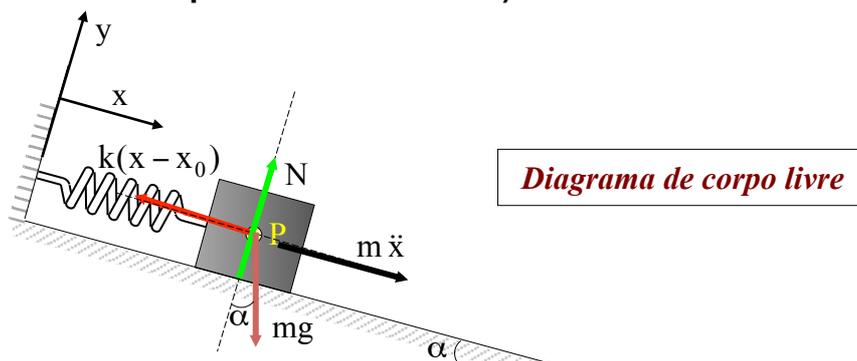


Diagrama de corpo livre

A equação do movimento dá origem às seguintes duas equações de projecção:

$$\begin{cases} -k(x - x_0) + mg \sin \alpha = m\ddot{x} \\ N - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Obtemos assim o valor da força N e a equação diferencial que traduz a variação de x com o tempo:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = mg \sin \alpha + kx_0 \\ N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

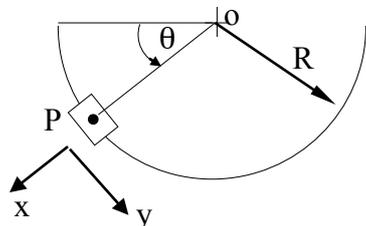
A resolução desta última equação diferencial conduz à seguinte lei do movimento:

$$x = A \cos(\omega t + \psi) + X_1$$

Sendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $X_1 = \frac{g}{\omega^2} \sin \alpha + x_0$; A e ψ duas outras constantes a determinar em função das condições iniciais do movimento.

1.8.2 - Movimento circular

Consideremos agora uma pequena corrediça que se move, sem atrito, sobre uma guia circular de raio R , contida num plano vertical. Essa corrediça parte do repouso, de uma posição definida por θ_0 .



Movimento circular de um ponto material

Pretendemos calcular a força de contacto e a lei de variação do parâmetro θ com o tempo. Fazemos um diagrama de corpo livre da corrediça, inventariando as forças em presença, bem como a quantidade de aceleração. Projectando a equação do movimento nas direcções tangencial e radial (respectivamente y e x) obteremos:

Com efeito,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ma_x \\ ma_y \\ ma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ma_x \\ ma_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{OP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})$$

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}R \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}^2R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}^2R \\ \ddot{\theta}R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ficará:

$$\begin{cases} -N + mg \sin \theta = -m\dot{\theta}^2R \\ mg \cos \theta = m\ddot{\theta}R \end{cases}$$

Daqui retiramos a equação diferencial do movimento, bem como a força N:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos \theta & (1) \\ N = mg \sin \theta + m\dot{\theta}^2R & (2) \end{cases}$$

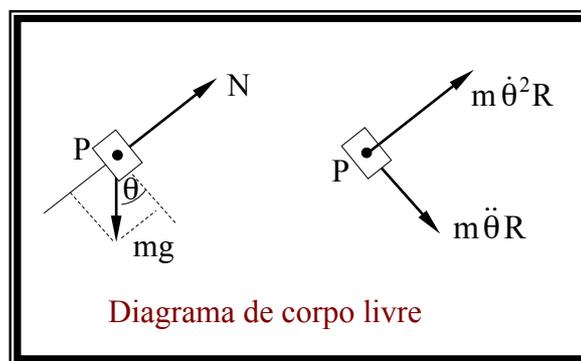


Diagrama de corpo livre

A resolução da equação diferencial (1) pode ser levada a cabo atendendo a que:

$\ddot{\theta} = \alpha \rightarrow$ aceleração angular

$\dot{\theta} = \omega \rightarrow$ velocidade angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\omega} \Rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega \quad \text{Logo, } \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega$$

Supondo que a corrediça parte do repouso ($\omega_0 = 0$) e da posição horizontal ($\theta_0 = 0$), então:

$$\frac{g}{R} \int_0^{\theta} \cos \theta = \frac{1}{2} \omega^2$$

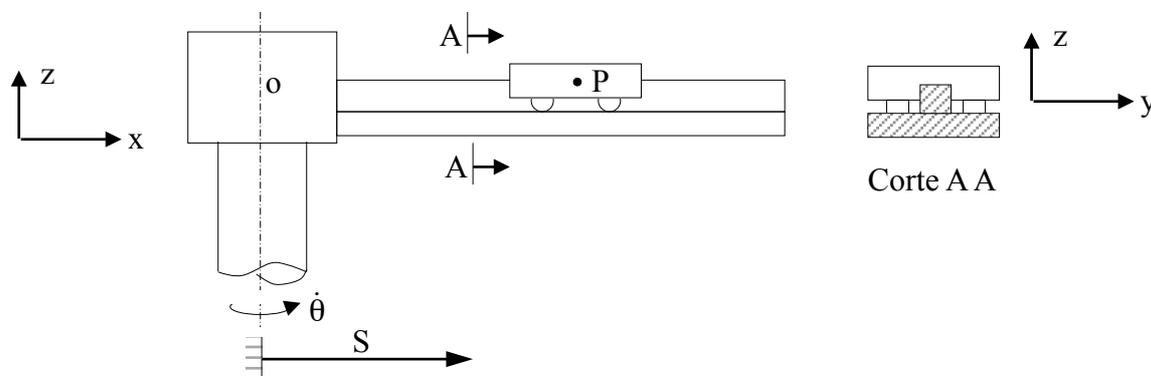
$$\frac{g}{R} \sin \theta = \frac{1}{2} \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \sin \theta$$

Substituindo este resultado na equação (2) obtemos a força N que corresponde à força de contacto entre a corrediça e a guia.

$$N = 3mg \sin \theta$$

1.8.3 - Movimento sobre um referencial móvel

Considere-se um ponto material P materializado por uma corrediça que se move em translação (parâmetro S) sobre uma guia horizontal, a qual se move por sua vez em torno de um eixo vertical (parâmetro θ).



Movimento de um ponto material sobre um referencial móvel

Admitindo que há atrito no contacto lateral da corrediça com a guia (coeficiente μ), pretende-se determinar as forças de ligação instaladas e qual a lei $S(t)$ sabendo $\theta(t)$.

Aceleração do ponto P:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{rel}} + \vec{a}^{\text{tr}} + \vec{a}^{\text{co}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{rel}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{OP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}^{\text{rel}}$$

Onde,

$$\vec{a}^{\text{tr}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -s\dot{\theta}^2 \\ s\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}^{\text{rel}} = \begin{Bmatrix} \ddot{s} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}^{\text{co}} = 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\dot{\theta}\dot{s} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Somando as três componentes obtém-se para o vector quantidade de aceleração as seguintes projecções:

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{s} - s\dot{\theta}^2 \\ s\ddot{\theta} + 2s\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \dot{Q} = m\vec{a} = \begin{Bmatrix} m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 \\ ms\ddot{\theta} + 2ms\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A resultante das forças que actuam na corrediça terá a seguinte projecção de acordo com os diagramas de corpo livre apresentados de seguida:

$$\sum \vec{F} = \begin{Bmatrix} -\mu H \\ H \\ mg - N \end{Bmatrix}$$

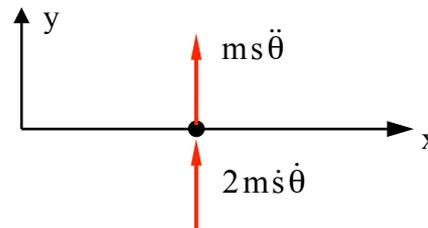
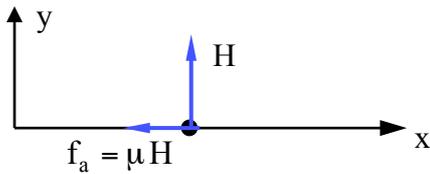
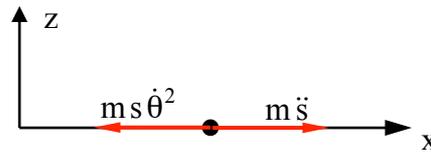
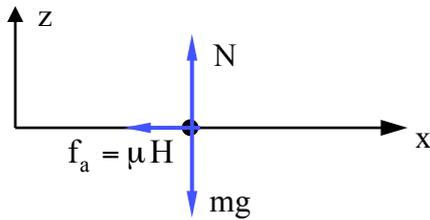


Diagrama de corpo livre para forças

Diagrama de corpo livre para quantidades de aceleração

Igualando o vector da resultante das forças ao vector quantidade de aceleração, ficará:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{Q}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\mu H \\ H \\ mg - N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 \\ ms\ddot{\theta} + 2ms\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Então:

$$N = mg$$

$$H = ms\dot{\theta}^2 + 2ms\dot{\theta}$$

$$-\mu H = m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2$$

Obteremos então a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{s} + 2\mu\dot{\theta}\dot{s} + (\mu\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2)s = 0$$

Que admite a solução geral:

$$s = s_0 e^{\left(-\mu\dot{\theta} + \sqrt{\dot{\theta}^2(1+\mu^2) - \mu\ddot{\theta}}\right)t}$$

A partir desta solução, obtem-se facilmente a força H e a força de atrito $f_a = \mu H$

2 - DINÂMICA DO SÓLIDO**2.1 - Introdução - Método de Análise**

Consideremos cada sólido como um sistema formado por pontos materiais discretos, cujas distâncias entre si permaneçam constantes. A cada ponto P_j de um tal sistema material podemos associar dois vectores que, de acordo com a 2ª lei de Newton, são iguais:

\vec{F}_j = Resultante das forças que actuam em P_j

$m_j \vec{a}_j$ = Quantidade de aceleração de p_j

$$\vec{F}_j = m_j \vec{a}_j$$

\vec{F}_j é a resultante de todas as forças que actuam no ponto P_j . Inclui, assim, forças exteriores e interiores ao sistema material. De acordo com a 2ª lei de Newton, teremos

$$\vec{F}_j^{\text{ext}} + \vec{F}_j^{\text{int}} = m_j \vec{a}_j$$

Se esta igualdade se verifica para todos os pontos P_j , poderemos dizer que o sistema de forças exteriores mais o sistema de forças interiores iguala o sistema de vectores \vec{a}_j que chamamos quantidades de aceleração.

Sabemos que é condição necessária e suficiente para que dois sistemas de vectores sejam equivalentes, que tenham elementos de redução no mesmo ponto iguais.

Daqui resulta que, necessariamente,

$$\sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_j^{\text{int}} = \sum_j m_j \vec{a}_j$$

$$\sum_j \vec{M}_o^j \text{ext} + \sum_j \vec{M}_o^j \text{int} = \sum_j \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j$$

Como as forças interiores, de acordo com a 3ª lei de Newton, são iguais e opostas 2 a 2, o sistema de forças interiores é equivalente a zero. Como consequência, obteremos as seguintes equações vectoriais, válidas para um sistema de pontos materiais;

$$\sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} = \sum_j m_j \vec{a}_j$$

$$\sum_j \vec{M}_o^j \text{ext} = \sum_j \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j$$

As equações anteriores são as chamadas *equações do movimento*. Nelas, não está, por ora, contida qualquer restrição referente ao sistema material. De facto, são válidas quer esta seja ou não um sistema rígido, um sistema formado por vários subsistemas rígidos considerados no seu conjunto, ou pura e simplesmente um sistema de pontos materiais discretos cujas distâncias entre si variam no tempo.

Os segundos membros de tais equações representam, respectivamente, o vector principal e o vector momento em O do sistema de vectores quantidades de aceleração.

Vimos já, em capítulos anteriores, que, ao primeiro se chamou *quantidade de aceleração do sistema material* e que sempre se verificava, fosse o sistema rígido ou não que

$$\sum_j m_j \vec{a}_j = M \vec{a}_G$$

sendo \vec{a}_G a aceleração do centro de gravidade do sistema material e M a sua massa total.

Chamamos ao 2º membro da 2ª equação das denominadas equações do movimento, o *Momento Dinâmico* em O do sistema material e aprendemos a calculá-lo em diversas situações particulares, quase sempre referentes a sistemas sólidos ou formados por conjuntos de sólidos.

Relembra-se, como relação particularmente útil, que o momento dinâmico em O pode sempre obter-se a partir do momento em G , pelo 2º Teorema de König:

$$\sum_j \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{a}_j = \vec{K}_G + \vec{OG} \wedge M \vec{a}_G$$

2.2 - Teorema do movimento do centro de massa de um sistema material

Num qualquer sistema de pontos materiais, rigidamente ligados ou não, verifica-se que

$$\sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} = M \vec{a}_G$$

Esta seria também a equação do movimento do *centro de massa*, se nele estivesse concentrada toda a massa do sistema material e sobre ele actuasse uma força igual à soma de todas as forças exteriores aplicadas ao referido sistema.

Esta constatação é conhecida por *teorema do movimento do centro de massa*, o qual pode ser e é habitualmente citado do seguinte modo:

“Em qualquer sistema material, rígido ou não, o centro de massa move-se como um ponto isolado, de massa igual à massa total do sistema e actuado por uma força igual à soma vectorial de todas as forças exteriores aplicadas”.

Verificamos assim, que, se um sistema de forças que actue num sistema material tem vector principal não nulo (há desequilíbrio de forças), o centro de massa adquire movimento acelerado.

2.3 - Movimento em torno do centro de massa

Tentemos agora encontrar um significado físico para o *momento da quantidade de aceleração* quando o polo (ponto O) utilizado no calculo dos momentos é o centro de massa:

$$\sum_j \vec{M}_j^{\text{ext}} = \vec{K}_G$$

Se o movimento real do sistema for uma translação, constata-se (a partir do 2º teorema de Koenig) que o momento dinâmico em G é nulo. Neste caso a equação anterior traduziria um equilíbrio de momento em relação a G, das diversas forças aplicadas. Noutro qualquer ponto, porém, tal situação não ocorreria (a partir do 2º teorema de Koenig).

Se o movimento real do sistema material for uma rotação em torno de um eixo que contém G, o momento dinâmico em G não será nulo, mas sê-lo-à a quantidade de aceleração ($\vec{a}_G = \vec{0}$).

◆ Num caso mais geral, pode-se interpretar o movimento do sistema material como sendo a soma de dois movimentos: uma *translação com o centro de massa*, provocada pelo desequilíbrio das forças exteriores aplicadas, mais uma *rotação em torno do centro de massa*, provocada pelo desequilíbrio de momentos das forças exteriores, em relação a esse ponto.

2.4 - Movimento plano de corpos rígidos simétricos

Introduzimos aqui duas limitações aos sistemas materiais considerados:

- a) Deslocam-se em movimento plano, isto é, cada ponto material permanece a distância constante de um dado plano de referência fixo;
- b) Os sistemas materiais são constituídos por corpos sólidos simétricos em relação ao plano de referência, (o que implicará que possuam um eixo principal de inércia baricêntrico perpendicular a esse plano).

Trata-se afinal, de particularizar as equações gerais já apresentadas. Assim, sendo (x,y) o plano do movimento, teremos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= M \ddot{x}_G \\ \sum F_y &= M \ddot{y}_G \\ \sum M_{Gz} &= I_{zz} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Nestas equações, I_{zz} é o momento de inércia relativamente ao eixo dos zz que passa no centro de massa do corpo rígido. A equação referente aos momentos resultou da particularização, para este caso, da equação matricial já estudada no capítulo da cinemática de massas

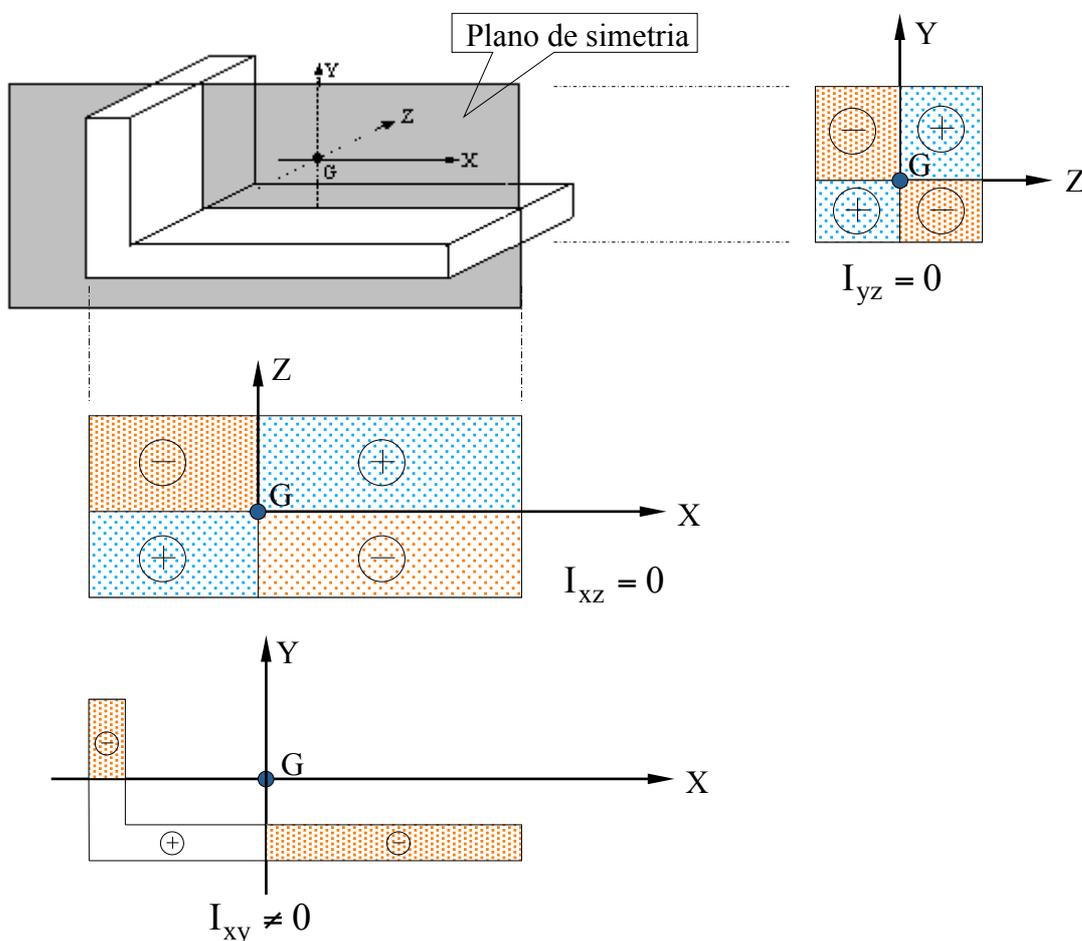
$$\vec{K}_G = \dot{\vec{H}}_G = [I_G] \{ \dot{\vec{\omega}} \} + \{ \vec{\omega} \} \wedge ([I_G] \{ \vec{\omega} \})$$

onde

$$\{ \dot{\vec{\omega}} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

e no caso geral de sólidos (como por exemplo uma cantoneira de abas desiguais) em movimento plano a matriz de inércia contém elementos nulos referentes ao plano de simetria.

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$



2.4.1 - Análise de sistemas de corpos rígidos em movimento plano

Esta análise pode ser feita por dois processos:

- Considerando o sistema como um todo, traçando portanto um único diagrama de corpo livre e não considerando as forças de ligação entre os diversos corpos;
- Dividindo o sistema em vários subsistemas, de modo análogo ao que foi feito na estática, considerando as equações de movimento de cada um deles e resolvendo em conjunto os sistemas de equações assim obtidas. Estão obviamente consideradas, neste caso, as forças de ligação entre os corpos.

Este 2º caminho é o mais utilizado, até porque é o único possível quando o número de incógnitas é superior a 3 (tal é o número de equações de que dispomos numa análise de equilíbrio plano).

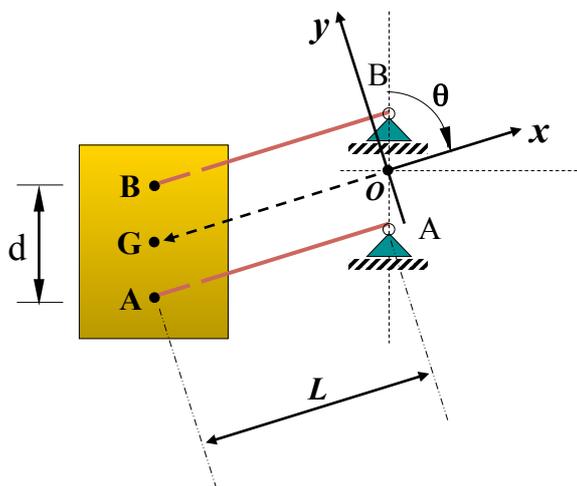
A maioria das aplicações práticas em engenharia trata de corpos rígidos que se movem sob determinados vínculos (rotação em torno de eixos fixos, rolamentos sem escorregamento, guiamentos,...).

Em todos estes casos, existem relações definidas entre as componentes da aceleração do centro de massa G e a aceleração angular. A solução destes problemas exige uma análise cinemática prévia, a qual não introduz problemas particulares na sua solução.

2.4.2 - Aplicações

a) Sólido em translação

“Pretende-se determinar as forças de ligação que ocorrem nos pontos A e B, em que o corpo de massa M indicado na figura, se articula com duas barras de massa desprezável, as quais o obrigam a deslocar-se em translação curvilínea sobre um plano vertical”.



Sólido em movimento de translação curvilínea

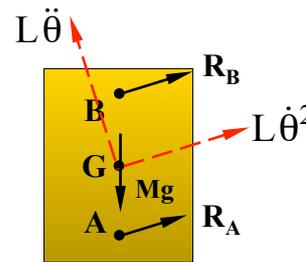


Diagrama de corpo livre

Análise cinemática prévia:

Calculo da aceleração do centro de gravidade

$$\vec{a}_G = \vec{\alpha} \wedge \vec{OG} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OG})$$

$$\vec{a}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{a}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L\dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculo do momento dinâmico em G

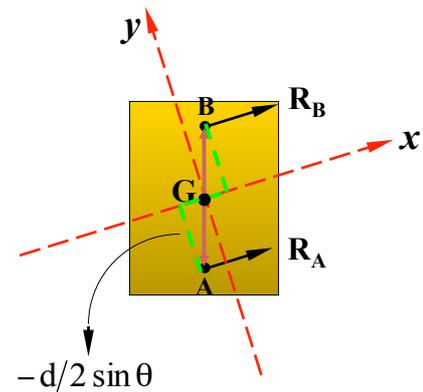
O momento dinâmico em G é nulo já que o corpo só tem movimento de translação.

Logo,

$$\vec{K}_G = \vec{0}$$

Calculo do momento das forças de ligação em G

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \vec{GA} \wedge \vec{R}_A + \vec{GB} \wedge \vec{R}_B \\ \vec{M}_G &= \begin{bmatrix} -\frac{d}{2} \cos \theta \\ -\frac{d}{2} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \cos \theta \\ \frac{d}{2} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} R_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{M}_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_A \frac{d}{2} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_B \frac{d}{2} \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (R_B - R_A) \frac{d}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Resultante das forças e momentos exteriores:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{\text{ext}} &= \begin{bmatrix} R_A + R_B - Mg \cos \theta \\ -Mg \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = M \vec{a}_G = \begin{bmatrix} ML\dot{\theta}^2 \\ ML\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{M}_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (R_B - R_A) \frac{d}{2} \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtemos então o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} R_A + R_B - Mg \cos \theta = ML\dot{\theta}^2 & (1) \\ -Mg \sin \theta = ML\ddot{\theta} & (2) \\ R_A = R_B & (3) \end{cases}$$

Admitindo que o corpo parte do repouso $\omega_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$ a 2ª equação (Eq. Diferencial do movimento) permite escrever:

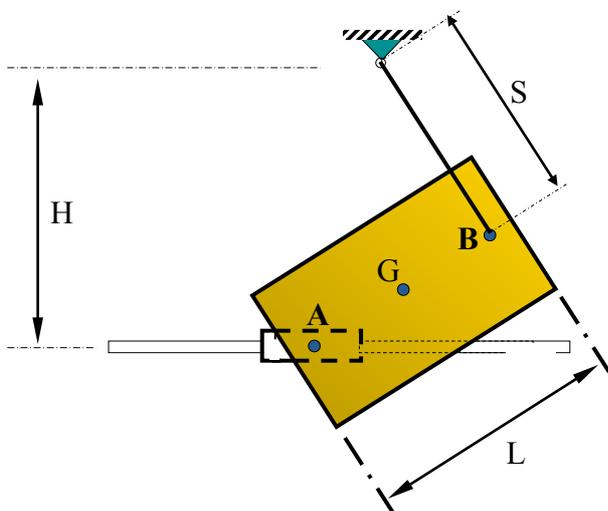
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} \cos \theta$$

Logo,

$$R_A = R_B = \frac{3}{2} Mg \cos \theta$$

b) Sólido em movimento plano mais complexo

“Pretende-se determinar as forças de ligação que actuam sobre uma placa de massa M e vinculada em B por uma barra e em A por uma corrediça que se move sobre uma guia horizontal. Desprezam-se as forças de atrito (i.e, admite-se que as ligações são perfeitas) e as massas dos corpos, que com a placa, estão em movimento”.



Sólido em movimento complexo

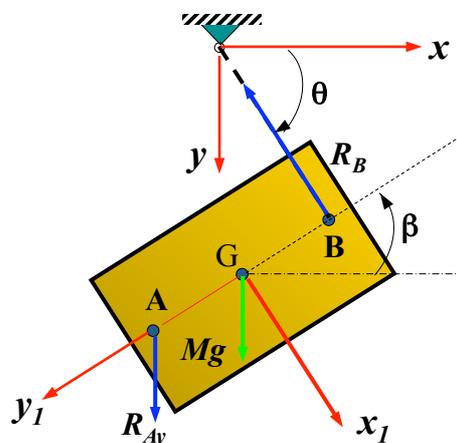
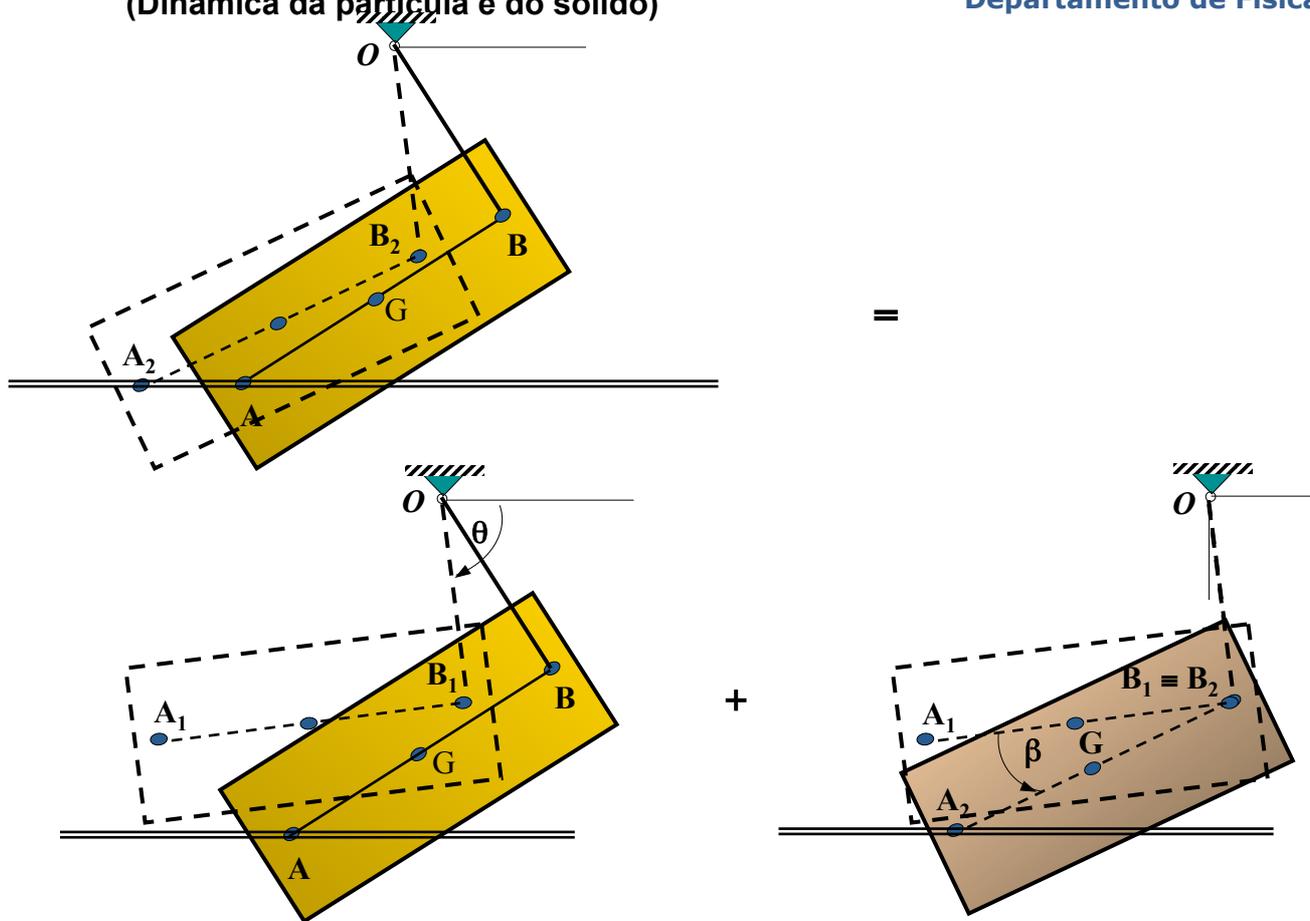


Diagrama de corpo livre



Rotação do ponto B em torno de O

Rotação do ponto G em torno de B

Análise geométrica:

Da figura vemos que $S \sin \theta + L \sin \beta = H$. Desta expressão e das suas primeiras e segunda derivadas em ordem ao tempo, obtemos os parâmetros cinemáticos $\beta, \dot{\beta}$ e $\ddot{\beta}$ em função de $\theta, \dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ que é o parâmetro cinemático que escolhemos (e suas derivadas).

$$\begin{cases} S \sin \theta + L \sin \beta = H \\ S \dot{\theta} \cos \theta + L \dot{\beta} \cos \beta = 0 \\ S(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + L(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \arcsin\left(\frac{H - S \sin \theta}{L}\right) \\ \dot{\beta} = -\frac{S \cos \theta}{L \cos \beta} \dot{\theta} \\ \ddot{\beta} = \frac{1}{L \cos \beta} (L \dot{\beta}^2 \sin \beta - S \ddot{\theta} \cos \theta + S \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{cases}$$

Calculo da aceleração do ponto G (centro de gravidade da placa);

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{a}_{G/B}$$

Usaremos a seguinte notação:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{10}$$

$$\vec{a}_{G/B} = \vec{a}_{21}$$

Logo,

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{10} + \vec{a}_{21}$$

$$\vec{a}_{10} = \vec{\alpha}_{10} \wedge \vec{OB} + \vec{\omega}_{10} \wedge (\vec{\omega}_{10} \wedge \vec{OB})$$

$$\vec{a}_{21} = \vec{\alpha}_{21} \wedge \vec{BG} + \vec{\omega}_{21} \wedge (\vec{\omega}_{21} \wedge \vec{BG})$$

Ficará

$$\vec{a}_{10} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} S \cos \theta \\ S \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} S \cos \theta \\ S \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\vec{a}_{10} = \begin{Bmatrix} -S \ddot{\theta} \sin \theta \\ S \ddot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -S \dot{\theta} \sin \theta \\ S \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{10} = \begin{Bmatrix} -S \ddot{\theta} \sin \theta - S \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ S \ddot{\theta} \cos \theta - S \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{21} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\beta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2} \cos \beta \\ \frac{L}{2} \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2} \cos \beta \\ \frac{L}{2} \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\vec{a}_{21} = \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \frac{L}{2} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \frac{L}{2} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \frac{L}{2} \sin \beta \\ \dot{\beta} \frac{L}{2} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{21} = \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \frac{L}{2} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \frac{L}{2} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta}^2 \frac{L}{2} \cos \beta \\ -\dot{\beta}^2 \frac{L}{2} \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \frac{L}{2} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \frac{L}{2} \cos \beta \\ \ddot{\beta} \frac{L}{2} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \frac{L}{2} \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ficará:

$$\vec{a}_G = \begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \frac{L}{2} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \frac{L}{2} \cos \beta \\ \ddot{\beta} \frac{L}{2} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \frac{L}{2} \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -S \ddot{\theta} \sin \theta - S \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ S \ddot{\theta} \cos \theta - S \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (a_G)_x \\ (a_G)_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determinação dos Momentos Cinético e Dinâmico (respectivamente \vec{H}_G e \vec{K}_G)

$$\begin{aligned} \vec{H}_G|_{s_0} &= [T_{10}] \vec{H}_G|_{s_1} \\ \vec{K}_G|_{s_0} &= \dot{\vec{H}}_G|_{s_0} + \vec{\omega}|_{s_0} \wedge \vec{H}_G|_{s_0} \end{aligned}$$

Onde

$$[T_{10}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz de transformação do ref}^{\text{al}}\text{-móvel no ref}^{\text{al}}\text{-fixo}$$

$$\vec{H}_G|_{s_1} = [I_G] \cdot \{\vec{\omega}\}|_{s_1}$$

Como o referencial local (“móvel”), eixos x_1, y_1, z_1 são *eixos centrais principais de inércia*, então:

$$\vec{H}_G|_{s_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{z_1 z_1} \dot{\beta} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}_G|_{s_0} = [T_{10}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{z_1 z_1} \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{z_1 z_1} \dot{\beta} \end{Bmatrix}$$

Então

$$\vec{\omega}|_{s_0} \wedge \vec{H}_G|_{s_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{z_1 z_1} \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_G|_{s_0} = \dot{\vec{H}}_G|_{s_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{z_1 z_1} \ddot{\beta} \end{Bmatrix}$$

Determinação das forças de ligação \vec{R}_A e \vec{R}_B

$$\sum \vec{F}^{ext} = M \vec{a}_G \Rightarrow \begin{cases} -R_B \cos \theta = M \cdot (a_G)_x \\ R_{Ay} - R_B \sin \theta + Mg = M \cdot (a_G)_y \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_G^{ext} = \vec{K}_G = \vec{G}A \wedge \vec{R}_A + \vec{G}B \wedge \vec{R}_B$$

$$\sum \vec{M}_G^{ext} = \begin{Bmatrix} -L/2 \cos \beta \\ L/2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{Ay} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L/2 \cos \beta \\ -L/2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -R_B \cos \beta \\ -R_B \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_G^{ext} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L/2 \cos \beta) R_{Ay} - (L/2 \cos \beta) R_B \sin \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{z_1 z_1} \ddot{\beta} \end{Bmatrix}$$

A 3ª equação de momentos juntamente com as de projecção das forças, permitem obter R_A e R_B admitindo que são conhecidas as leis de variação de $\theta(t)$ e $\beta(t)$.

2.5 – Dinâmica tridimensional de sólidos

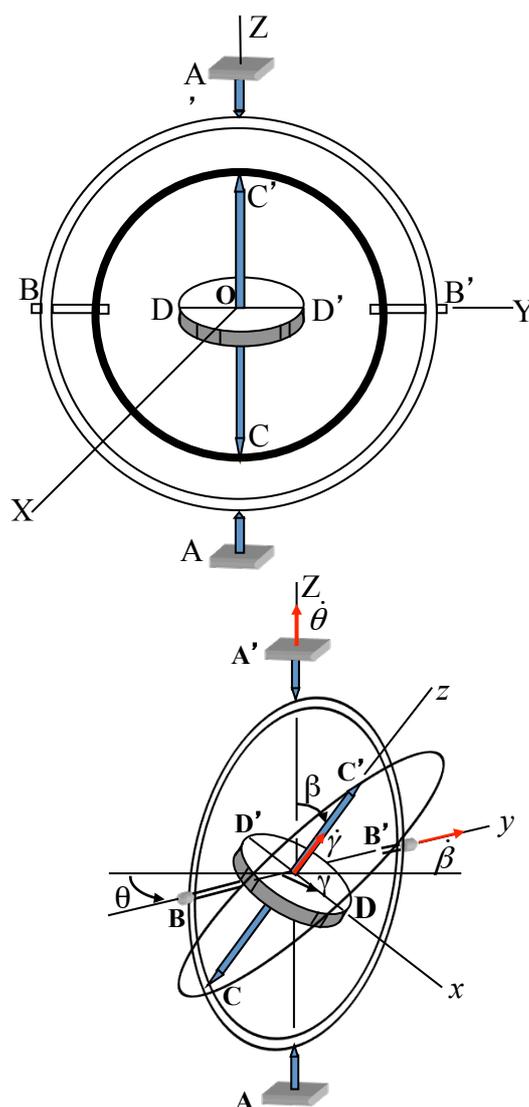
2.5.1 - Introdução

Apesar de uma grande percentagem dos problemas de dinâmica em engenharia ter soluções por meio dos princípios do movimento plano, desenvolvimentos mais modernos concentram atenção cada vez mais em problemas que necessitam de análise do movimento em três dimensões. A inclusão da 3ª dimensão adiciona uma complexidade considerável às relações dinâmicas e cinemáticas. A dimensão adicional não introduz apenas uma terceira componente aos vectores que representam força, velocidade, aceleração e momento cinético. Além disso, cria a possibilidade de duas componentes adicionais para os vectores que representam quantidades angulares, tais como momentos de forças e velocidades angulares.

Uma boa base em dinâmica do movimento plano é extremamente útil no estudo da dinâmica tridimensional, visto que a abordagem aos problemas e muitos dos termos são os mesmos ou análogos aos da dinâmica plana.

2.5.2 – Movimento giroscópico

Um giroscópio consiste essencialmente num rotor que pode girar livremente em torno dos seus eixos geométricos. Quando montado num *cardan* (ver figura), um giroscópio pode assumir qualquer orientação, mas o seu centro de gravidade deve permanecer fixo no espaço. A fim de definir a posição do giroscópio num dado instante, iremos escolher um sistema de eixos de referência fixo $OXYZ$, com origem O localizada no centro de gravidade do giroscópio, e o eixo Z , dirigido na direcção vertical. Consideraremos como posição de referência do giroscópio aquela na qual os dois anéis e o diâmetro DD' do rotor estão localizados no plano fixo YZ . O sistema pode ser levado desta posição de referência para qualquer posição arbitrária por meio dos seguintes passos: (1) uma rotação do anel externo de um ângulo θ em torno do eixo AA' , (2) uma rotação do anel interno de um ângulo β em torno de BB' , (3) uma rotação do rotor de um ângulo γ em torno de CC' . Os ângulos θ , β , e γ são os chamados *ângulos de Euler*; caracterizam a posição do giroscópio em qualquer instante. As suas derivadas, $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ definem, respectivamente a *precessão*, a *nutação* e a *rotação própria* do giroscópio no instante considerado.



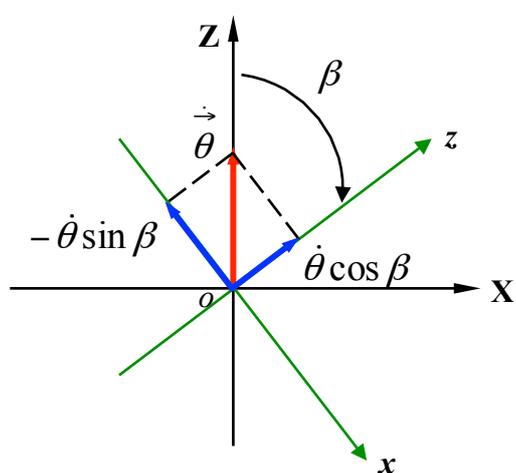
Para calcular as componentes da velocidade angular e do momento cinético do giroscópio, utilizar-se-á o sistema de eixos rotativos $Oxyz$ fixo no anel interno, com o eixo y ao longo de BB' e o eixo z ao longo de CC' . Estes são os eixos centrais principais de inércia do giroscópio mas, embora o acompanhem na sua precessão e nutação **não participam de rotação própria**. Por esta razão, são mais convenientes de usar que os eixos fixos no giroscópio.

Sendo assim, a velocidade angular do giroscópio deverá ser expressa no sistema de eixos móvel ($Oxyz$) como a soma de três velocidades angulares parciais correspondentes, respectivamente, à precessão, à nutação e à rotação própria do giroscópio.

Então:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} + \dot{\beta} + \dot{\gamma}$$

Notar que os vectores velocidade angular correspondentes à nutação e rotação própria do giroscópio, respectivamente $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$ estão direccionados segundo os eixos móveis, restando então a necessidade de projectar o vector velocidade angular correspondente à precessão neste sistema de eixos.



$$\{\dot{\theta}\}_{s_1} = [T_{01}] \{\dot{\theta}\}_{s_0}$$

$$[T_{01}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\{\dot{\theta}\}_{s_1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ 0 \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Então:

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

Momento Dinâmico do giroscópio relativamente ao seu centro de gravidade (ponto O)

Como os eixos coordenados **Oxyz** são eixos centrais principais de inércia, e lembrando que os eixos rotativos estão presos ao anel interno e, portanto, não tendo rotação própria, virá:

$$\vec{K}_o = \dot{\vec{H}}_o \Big|_{s_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{H}_o$$

onde $\vec{\Omega} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix}$, corresponde à velocidade angular dos eixos rotativos.

Então:

$$\vec{K}_o = \dot{\vec{H}}_o \Big|_{s_1} + \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix} \wedge \left(\begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix} \right)$$

Seja:

$$I_{x_1} = I_{y_1} = I$$

$$I_{z_1} = \bar{I}$$

então:

$$\vec{K}_o = \dot{\vec{H}}_o \Big|_{s_1} + \begin{Bmatrix} \bar{I} \dot{\beta} (\dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta) - I \dot{\theta} \dot{\beta} \cos \beta \\ \bar{I} \dot{\theta} (\dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta) \sin \beta - I \dot{\theta}^2 \cos \beta \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ficará

$$\dot{\vec{H}}_o \Big|_{s_1} = \left\{ \begin{array}{c} -I(\ddot{\theta} \sin \beta + \dot{\theta} \dot{\beta} \cos \beta) \\ I \ddot{\beta} \\ \bar{I}(\ddot{\gamma} + \ddot{\theta} \cos \beta - \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta) \end{array} \right\}$$

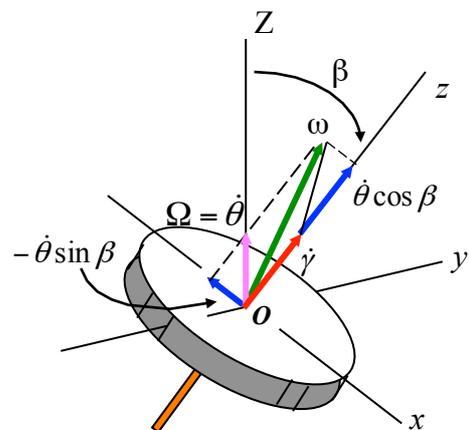
Logo.

$$\vec{K}_o = \left\{ \begin{array}{c} \bar{I} \dot{\beta} (\dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta) - I(\ddot{\theta} \sin \beta + 2\dot{\theta} \dot{\beta} \cos \beta) \\ \bar{I} \dot{\theta} (\dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta) \sin \beta + I(\ddot{\beta} - \dot{\theta}^2 \cos \beta \sin \beta) \\ \bar{I}(\ddot{\gamma} + \ddot{\theta} \cos \beta - \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta) \end{array} \right\} = \sum \vec{M}_o^{ext}$$

Este último sistema de equações define o movimento do giroscópio sujeito a um dado sistema de forças quando a massa dos anéis é desprezada. Como se trata de equações não-lineares, em geral não é possível exprimir os ângulos de Euler θ , β e γ como funções analíticas do tempo t , devendo-se utilizar métodos numéricos na solução. Entretanto, como se verá de seguida, existem muitos casos particulares de interesse que podem ser analisados facilmente.

2.5.3 – Precessão estacionária de um giroscópio

Neste caso particular do movimento do giroscópio, o ângulo β , a precessão $\dot{\theta}$ e a rotação própria $\dot{\gamma}$ permanecem constantes. Assim, deveremos determinar as forças necessárias que devem ser aplicadas ao giroscópio para manter este movimento, conhecido como *precessão estacionária* de um giroscópio.



Momento Dinâmico em O

$$\vec{K}_o = \dot{\vec{H}}_o \Big|_{S_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{H}_o$$

Como neste caso particular $\beta, \dot{\theta}$ e $\dot{\gamma}$ são constantes, o vector \vec{H}_o é constante em módulo e direcção em relação ao sistema de eixos de referência rotativo, e a sua derivada $\dot{\vec{H}}_o$ em relação a este sistema é nula. Assim a equação anterior reduz-se a

$$\vec{K}_o = \vec{\Omega} \wedge \vec{H}_o = \sum \vec{M}_o^{ext}$$

$$\sum \vec{M}_o^{ext} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ 0 \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ 0 \\ \dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta \end{pmatrix} \right)$$

$$\sum \vec{M}_o^{ext} = \begin{pmatrix} 0 \\ [\bar{I}(\dot{\gamma} + \dot{\theta} \cos \beta) - I \dot{\theta} \cos \beta] \dot{\theta} \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

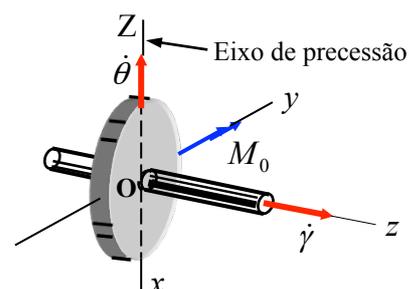
Cmo o centro de gravidade do giroscópio está fixo no espaço, então:

$$\sum \vec{F}^{ext} = m \vec{a}_G = \vec{0}$$

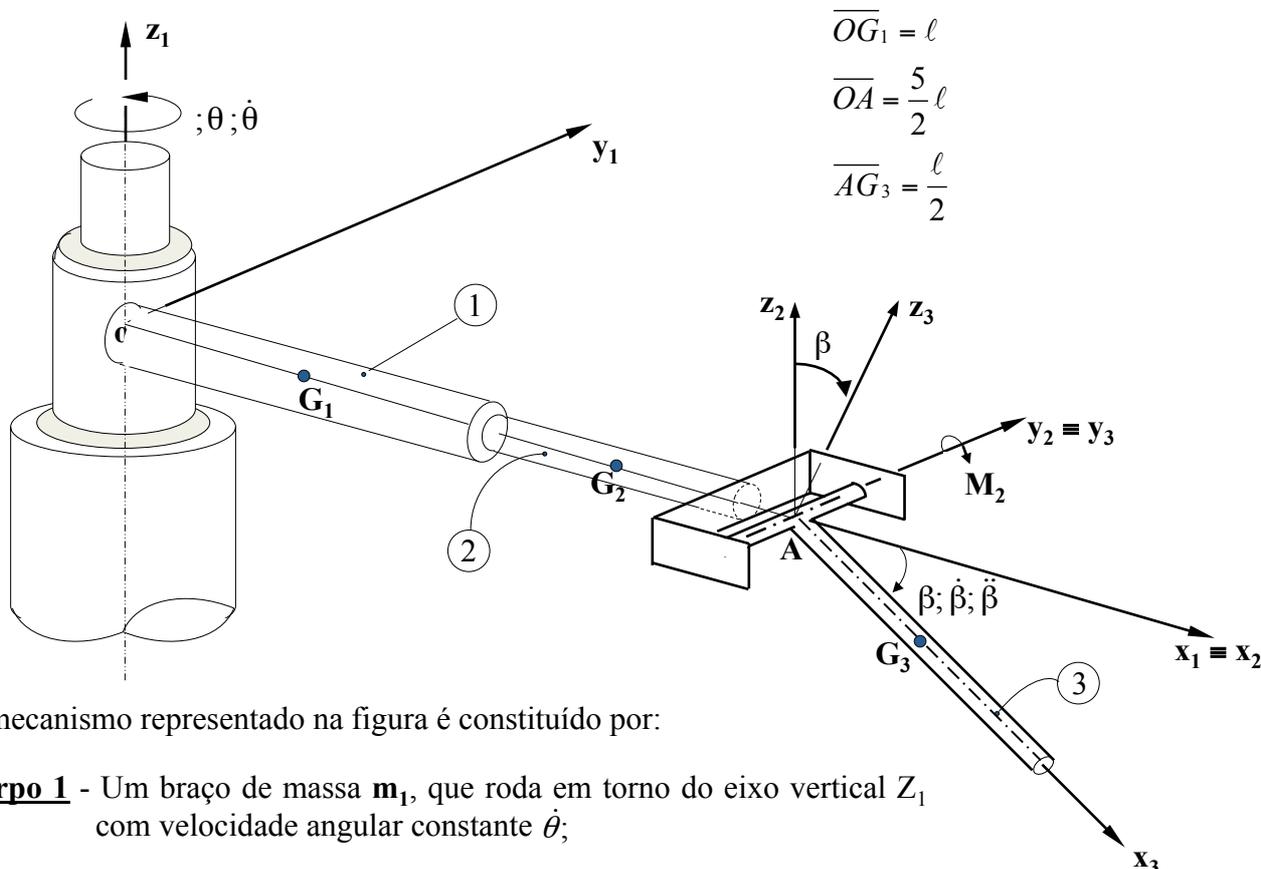
Assim, as forças exteriores que devem ser aplicadas ao giroscópio, para manter a sua precessão estacionária, reduzem-se a um binário de momento igual ao valor do 2º elemento do vector correspondente à última equação de momentos escrita acima. Notamos que este binário deverá ser aplicado segundo um eixo (eixo y) perpendicular ao eixo de precessão e ao eixo de rotação própria do giroscópio.

No caso particular em que o eixo de precessão e o eixo de rotação própria formam um ângulo reto entre si, temos $\beta = 90^\circ$, pelo que

$$\sum \vec{M}_o^{ext} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{I} \dot{\gamma} \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$



2.5.4 - Aplicações



O mecanismo representado na figura é constituído por:

Corpo 1 - Um braço de massa m_1 , que roda em torno do eixo vertical Z_1 com velocidade angular constante $\dot{\theta}$;

Corpo 2 - Um garfo de massa desprezável, que está rigidamente ligado ao corpo 1;

Corpo 3 - Um braço em forma de T, de massa m_3 que roda sob a acção do momento motor M_2 , em torno do eixo Y_2 com velocidade e aceleração angular, respectivamente iguais a $\dot{\beta}$ e $\ddot{\beta}$.

Suponha conhecidas as matrizes de inércia dos corpos 1 e 3, relativamente a eixos centrais principais de inércia. Considere todas as ligações perfeitas. Aplicando as equações fundamentais da Dinâmica, determine em S_1 :

- a) O tursor das Quantidades de Aceleração do corpo 3 no ponto A;
- b) O tursor das forças e momentos de ligação entre os corpos 2 e 3 no ponto A;
- c) O tursor das Quantidades de Aceleração do mecanismo no ponto O;
- d) O tursor das forças e momentos de ligação do sistema ao exterior, no ponto O.

Dados:

$$I_{y_3} = I_{z_3} = 1/12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; I_{x_3} \cong 0$$

$$I_{y_1} = I_{z_1} = 67/50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; I_{x_1} = 8/625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; m_1 = 4 \text{ kg} ; m_3 = 1 \text{ kg}$$

$$\ell = 1.0 \text{ m} ; \dot{\theta} = 15 \text{ rpm} ; \beta = 60^\circ ; \dot{\beta} = 30 \text{ rpm} ; \ddot{\beta} = cte = \frac{3}{2} \pi \text{ rad} / \text{s}^2$$

a) *Determinação do torsor das quantidades de aceleração do corpo 3*

$$\vec{v}_{G_3} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{30} \wedge A\vec{G}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \frac{5\ell}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \sin \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\ell}{2} \dot{\beta} \sin \beta \\ \frac{5\ell}{2} \dot{\theta} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \beta \\ -\frac{\ell}{2} \dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{G_3} = \vec{v}'_{G_3} + \vec{\omega}_{10} \wedge \vec{v}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -\frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - \frac{\ell}{2} \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -\frac{\ell}{2} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta \\ -\frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \cos \beta + \frac{\ell}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -\frac{\ell}{2} \dot{\beta} \sin \beta \\ \frac{5\ell}{2} \dot{\theta} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \beta \\ -\frac{\ell}{2} \dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -\frac{5\ell}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - \frac{\ell}{2} \cos \beta (\dot{\beta}^2 + \dot{\theta}^2) \\ -\ell \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\ -\frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \cos \beta + \frac{\ell}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{Q}'_3 = m_3 \cdot \vec{a}_{G_3} \rightarrow \text{Quantidade de aceleração}$$

Nota: $\dot{\theta} = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

Calculo do momento dinâmico (\vec{K}_{G_3})

$$\vec{K}_{G_3}|_{s_1} = \vec{H}_{G_3/1}|_{s_3}' + \vec{\omega}_{10} \wedge \vec{H}_{G_3}|_{s_1}$$

$$\vec{H}_{G_3}|_{s_1} = [T_{31}] \vec{H}_{G_3}|_{s_3}$$

$$[T_{31}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\vec{H}_{G_3}|_{s_3} = [I_{G_3}] \{\omega_{30}\}_{s_3} = [I_{G_3}] (\{\omega_{10}\}_{s_3} + \{\omega_{31}\}_{s_3})$$

$$\vec{H}_{G_3}|_{s_3} = \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{x_3} \dot{\theta} \sin \beta \\ I_{y_3} \dot{\beta} \\ I_{z_3} \dot{\theta} \cos \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_{G_3}|_{s_1} = \begin{Bmatrix} I_{z_3} \cdot \frac{\dot{\theta}}{2} \sin 2\beta \\ I_{y_3} \dot{\beta} \\ I_{z_3} \dot{\theta} \cos^2 \beta \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}_{G_3/1}|_{s_3}' = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} I_{z_3} \cdot (2\dot{\theta} \dot{\beta} \cos 2\beta) \\ I_{y_3} \ddot{\beta} \\ -I_{z_3} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin 2\beta \end{Bmatrix}$$

Nota: $\dot{\theta} = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$
 $I_{x_3} = 0$

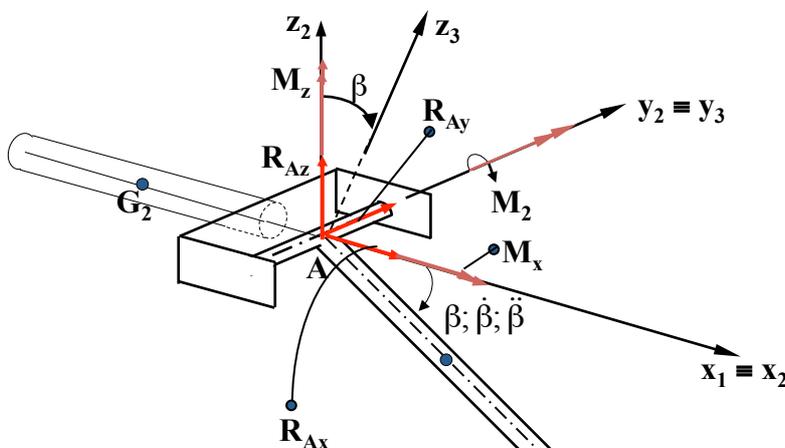
$$\vec{K}_{G_3}|_{s_1} = \vec{H}_{G_3/1}|_{s_3}' + \begin{Bmatrix} -I_{y_3} \dot{\theta} \dot{\beta} \\ \frac{1}{2} I_{z_3} \cdot \dot{\theta}^2 \sin 2\beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nota: $I_{z_3} = I_{y_3}$

Ficará:

$$\vec{K}_{G_3}|_{s_1} = \begin{Bmatrix} I_{y_3} \dot{\theta} \dot{\beta} (\cos 2\beta - 1) \\ I_{y_3} (\ddot{\beta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sin 2\beta) \\ -I_{z_3} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin 2\beta \end{Bmatrix}$$

b) Determinação das forças e momentos de ligação entre os corpos 2 e 3 no ponto A



$$\begin{cases} \sum \vec{F}^{ext} = \vec{Q}_3 \\ \sum \vec{M}_A^{ext} = \vec{K}_{G_3} + \vec{A}G_3 \wedge \vec{Q}_3 \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} - m_3 g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_3 (a_{G_3})_{x_1} \\ m_3 (a_{G_3})_{y_1} \\ m_3 (a_{G_3})_{z_1} \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_A^{ext} = \vec{A}G_3 \wedge \vec{R}_A + \vec{M}_{enc} \Leftrightarrow \sum \vec{M}_A^{ext} = \begin{Bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \sin \beta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_x \\ M_2 \\ M_z \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_A^{ext} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_2 + m_3 g \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Ficará:

$$\vec{A}G_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \sin \beta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} -m_3 \frac{5\ell}{2} \dot{\theta}^2 - m_3 \frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - m_3 \frac{\ell}{2} \cos \beta (\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) \\ -m_3 \ell \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta \\ \left\{ -m_3 \frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \cos \beta \right\} + m_3 \frac{\ell}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{Bmatrix}$$

$$\vec{A}G_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} -m_3 \frac{\ell^2}{2} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin^2 \beta \\ m_3 \frac{\ell^2}{4} \ddot{\beta} \cos^2 \beta - m_3 \frac{\ell^2}{8} \dot{\beta}^2 \sin 2\beta + m_3 \frac{5\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 \sin \beta + m_3 \frac{\ell^2}{4} \ddot{\beta} \sin^2 \beta + m_3 \frac{\ell^2}{8} (\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) \sin 2\beta \\ -m_3 \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin 2\beta \end{Bmatrix}$$

Substituindo pelos valores numéricos obtém-se:

$$m_3 \cdot \vec{a}_{G_3} = \dot{\vec{Q}}_3 = m_3 \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{5\ell}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - \frac{\ell}{2} \cos \beta (\dot{\beta}^2 + \dot{\theta}^2) \\ -\ell \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta \\ -\frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \cos \beta + \frac{\ell}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.28 \\ -4.271 \\ 3.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} - 9.8 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_{G_3} \Big|_{s_1} = \begin{Bmatrix} I_{y_3} \dot{\theta} \dot{\beta} (\cos 2\beta - 1) \\ I_{y_3} \left(\ddot{\beta} + \frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}^2 \sin 2\beta \right) \\ -I_{z_3} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin 2\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.619 \\ 0.481 \\ -0.355 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_A = \vec{K}_{G_3} + \vec{A}G_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} -0.619 \\ 0.481 \\ -0.355 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1.855 \\ 4.114 \\ -1.064 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.474 \\ 4.595 \\ -1.4194 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_2 + m_3 g \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} R_{Ax} = -11.28 \text{ N} \\ R_{Ay} = -4.271 \text{ N} \\ R_{Az} = 12.9 \text{ N} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} M_x = -2.474 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_2 = 2.145 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_z = -1.42 \text{ N} \cdot \text{m} \end{cases}$$

c) Determinação das quantidades de aceleração no ponto O

$$\vec{v}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{G_1} = \dot{\vec{v}}_{G_1} + \vec{\omega}_{10} \wedge \vec{v}_{G_1}$$

$$\vec{a}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell \ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\ell \dot{\theta}^2 \\ \ell \ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{Q}_1 = m_1 \vec{a}_{G_1} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ell \dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{Nota: } \dot{\theta} = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

Então:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_3 = \begin{Bmatrix} -m_1 \ell \dot{\theta}^2 - m_3 \frac{5\ell}{2} \dot{\theta}^2 - m_3 \frac{\ell}{2} \ddot{\beta} \sin \beta - m_3 \frac{\ell}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) \cos \beta \\ -m_3 \ell \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta \\ -m_3 \ddot{\beta} \cos \beta + m_3 \frac{\ell}{2} \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.14 \\ -4.271 \\ 3.1 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico do sistema em O

Corpo - 1

$$\vec{K}_{G_1}|_{s_1} = \vec{H}_{G_1}|'_{s_1} + \vec{\omega}_{10} \wedge \vec{H}_{G_1}|_{s_1}$$

$$\vec{H}_{G_1}|_{s_1} = [I_{G_1}] \{ \omega_{10} \}_{s_1} = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_1} \dot{\theta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_{G_1}|'_{s_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_1} \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{10} \wedge \vec{H}_{G_1}|_{s_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{z_1} \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\vec{K}_{G_1}|_{s_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{K}_0^1 = \vec{OG}_1 \wedge \dot{\vec{Q}}_1 + \vec{K}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Corpo - 3

$$\vec{K}_0^3 = \vec{OG}_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 + \vec{K}_{G_3}$$

$$\vec{OG}_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = (\vec{OA} + \vec{AG}_3) \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{5\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \sin \beta \end{Bmatrix} \wedge \dot{\vec{Q}}_3$$

$$\vec{OG}_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} -m_3 \frac{\ell^2}{2} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin^2 \beta \\ m_3 \frac{\ell}{2} (5 + \cos \beta) \cdot \left[\frac{\ell}{2} (\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) \right] + m_3 \frac{\ell}{2} \sin \beta \cdot \left[\frac{\ell}{2} (5\dot{\theta}^2 + \dot{\beta} \sin \beta + (\dot{\beta}^2 + \dot{\theta}^2) \cos \beta) \right] \\ -m_3 \frac{\ell^2}{2} \dot{\theta} \dot{\beta} \sin \beta \cdot (5 + \cos \beta) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OG}_3 \wedge \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} -1.855 \\ -3.64 \\ -11.75 \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\vec{K}_0^3 = \begin{Bmatrix} -1.855 \\ -3.64 \\ -11.75 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.619 \\ 0.481 \\ -0.355 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.474 \\ -3.16 \\ -12.11 \end{Bmatrix}$$

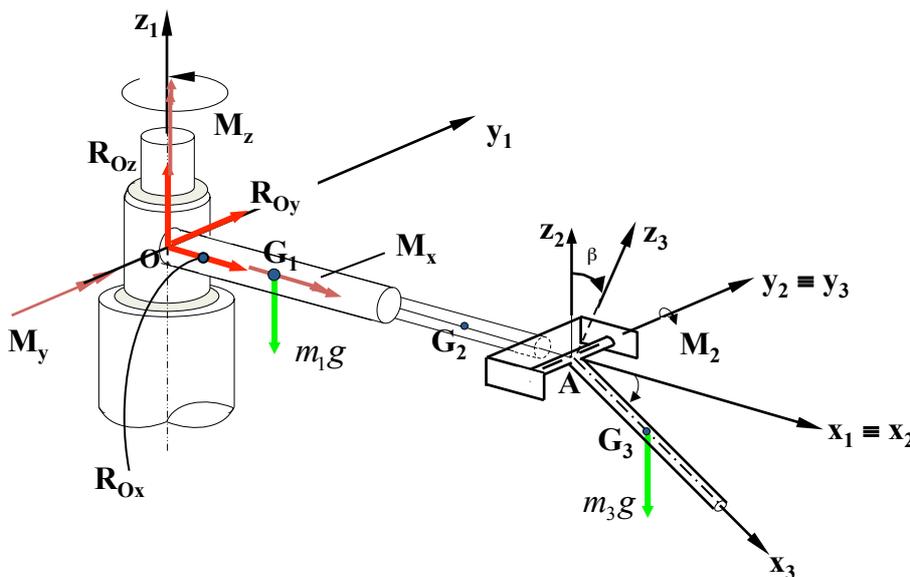
Quantidade de aceleração do sistema em O;

$$\dot{\vec{Q}} = \dot{\vec{Q}}_1 + \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} -21.14 \\ -4.271 \\ 3.1 \end{Bmatrix} N$$

Momento dinâmico do sistema em O;

$$\vec{K}_0 = \vec{K}_0^1 + \vec{K}_0^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2.474 \\ -3.16 \\ -12.11 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.474 \\ -3.16 \\ -12.11 \end{Bmatrix} N \cdot m$$

d) Forças e momentos de ligação do sistema ao exterior (no ponto O)



$$\sum \vec{F}^{ext} = \begin{Bmatrix} R_{0x} \\ R_{0y} \\ R_{0z} - (m_1 + m_3) \cdot g \end{Bmatrix} ; \quad \dot{\vec{Q}} = \dot{\vec{Q}}_1 + \dot{\vec{Q}}_3 = \begin{Bmatrix} -21.14 \\ -4.271 \\ 3.1 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \dot{\vec{Q}} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{0x} \\ R_{0y} \\ R_{0z} - (m_1 + m_3) \cdot g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.14 \\ -4.271 \\ 3.1 \end{Bmatrix} N$$

$$\sum \vec{M}_o^{ext} = \vec{OG}_1 \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OG}_3 \wedge m_3 \vec{g} + \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{Bmatrix} = \vec{K}_0$$

$$\sum \vec{M}_o^{ext} = \begin{Bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{5\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cos \beta \\ 0 \\ -\frac{\ell}{2} \sin \beta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{Bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_o^{ext} = \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} - [m_1 g \ell + m_3 g \frac{\ell}{2} (5 + \cos \beta)] \\ M_{0z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.474 \\ -3.16 \\ -12.11 \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} R_{0x} = -21.14 \text{ N} \\ R_{0y} = -4.271 \text{ N} \\ R_{0z} = 52.1 \text{ N} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{0x} = -2.474 \text{ N} \cdot m \\ M_{0y} = 63.0 \text{ N} \cdot m \\ M_{0z} = -12.1 \text{ N} \cdot m \end{cases}$$

O sistema mecânico representado na figura é constituído por:

Corpo 1 - um braço de massa m_1 que roda em torno do eixo horizontal $Z_0 \equiv Z_1$ com velocidade angular $\dot{\theta}$ e aceleração angular $\ddot{\theta}$, por acção da gravidade quando se retira o apoio A.

Corpo 2 - uma casca cilíndrica de massa m_2 , que roda em torno do eixo X_1 com velocidade angular $\dot{\beta}$ e aceleração angular $\ddot{\beta}$ accionada pelo momento motor M (constante) provocado por um motor eléctrico ligado ao corpo (1).

Suponha conhecidas as matrizes de inércia de ambos os corpos, em relação a eixos centrais principais de inércia. Considere ainda que os momentos de inércia $I_{x_2 x_2} = I_{y_2 y_2} = I_{z_2 z_2} = I_2$.

- Na posição inicial o corpo (1) está na posição horizontal, apoiado em A, e ao corpo 2 não é aplicado qualquer momento motor. Aplicando as equações fundamentais da Dinâmica, determine em relação a S_0 a aceleração angular do corpo 1 no instante imediatamente após retirar o apoio A.
- Passado um determinado intervalo de tempo, e já com o momento motor aplicado ao corpo 2, determine em S_1 , aplicando as equações fundamentais da Dinâmica, a quantidade de aceleração do sistema e o momento dinâmico do sistema, no ponto O.
- As forças de ligação e os momentos de encastramento, do sistema ao exterior, sabendo que ao fim de um intervalo de tempo ($t = 2$ s) se tem: $\theta = 30^\circ$; $\dot{\beta} = 15$ r.p.m

Dados

$$m_1 = 1 \text{ kg}; m_2 = 5 \text{ kg}$$

$$\ell = 1 \text{ m}; r = 10 \text{ cm}; H = 30 \text{ cm}$$

$$I_{z_1} = \frac{m_1}{12} (2\ell)^2 = \frac{1}{3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{m_2}{12} (3r + H^2) = \frac{1}{20} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

