

# OS RACIOCÍNIOS DOS ALUNOS NA DESCOBERTA DE DÍZIMAS FINITAS\*

## UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DE UMA TURMA DE 9.º ANO<sup>1</sup>

Cláudia Domingues  
Escola Secundária de Caldas das Taipas  
[cmadom@gmail.com](mailto:cmadom@gmail.com)  
Maria Helena Martinho  
CIED – Universidade do Minho  
[mhm@ie.uminho.pt](mailto:mhm@ie.uminho.pt)

**Resumo:** O desafio de o actual programa de matemática do ensino básico, de desenvolver o raciocínio matemático como capacidade transversal, exige uma percepção aprofundada dos processos que ocorrem quando os alunos raciocinam. Assim, no âmbito da dissertação de mestrado, a professora investigadora, primeira autora do artigo, aplicou três tarefas de investigação numa turma de nono ano com o objectivo de melhor compreender como raciocinam os alunos e de promover o desenvolvimento desse mesmo raciocínio. Este artigo centra-se numa dessas tarefas, a tarefa *À procura de dízimas finitas*, que se inseriu no tema “Números reais. Inequações.” Os registos dos alunos assim como as gravações de áudio e de vídeo foram analisados conjuntamente com todos os registos escritos da professora para proceder a uma análise interpretativa do caso dentro de uma metodologia qualitativa. Partindo da análise do processo de conjecturar verificou-se que a experiência de reformular as conjecturas, a partir dos contra-exemplos que surgiram, permitiu que aplicassem raciocínios mais complexos e que os raciocínios realizados se enquadraram nos padrões de raciocínio categorizados com base na investigação em educação matemática.

**Palavras-chave:** padrões de raciocínio matemático, tarefa de investigação, processo de conjecturar.

### Introdução

A escolha do tema Raciocínio Matemático resulta de duas motivações profissionais: compreender melhor os raciocínios dos alunos e responder ao desafio de os desenvolver. O facto de o actual programa de Matemática do ensino básico enfatizar a promoção do desenvolvimento do raciocínio matemático como capacidade transversal e ser, ao mesmo tempo, um possível agente de mudança nas práticas de ensino-aprendizagem na sala de aula através da implementação de tarefas, ou de sequências de tarefas, justificam a pertinência deste tema (Brocardo, Serrazina, & Rocha, 2008; Ponte & Sousa, 2010).

---

\* Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

<sup>1</sup> Domingues, C., Martinho, M. H. (2011). Os raciocínios dos alunos na descoberta de dízimas finitas: Uma experiência com alunos de uma turma de 9.º ano. In: *Actas XXII SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática). Lisboa: APM.

Com o objectivo de responder à questão “Como raciocinam os alunos quando descobrem a Matemática?” foram realizadas três tarefas de investigação numa turma de 9.º ano durante o ano lectivo 2009/2010.

Este artigo centra-se na análise e discussão dos raciocínios dos alunos na realização da tarefa “À procura de dízimas finitas” no que diz respeito ao processo de conjecturar.

### **Raciocínio matemático na descoberta:**

Várias designações têm sido dadas, por diferentes autores, ao processo de descoberta tais como: *processo indutivo* por Polya (1968), *processo de experimentação* por De Villiers (2003), *processo de investigação* por Ponte, Brocardo, e Oliveira (2003) e *pensar matematicamente* por Mason, Burton, e Stacey (1985). Todas estas designações têm em comum o facto de descreverem um processo que permite uma envolvimento activa, promovendo a descoberta aliada a uma compreensão da Matemática (Ponte et al., 2003; Mason et al., 1985; Polya, 1968).

Como refere Dreyfus (1991), a descoberta, apesar de demorar mais tempo, é uma forma eficiente de aprender matemática devido aos aspectos psicológicos envolvidos (o envolvimento pessoal, a intensidade da atenção, o sentimento de realização e de sucesso) e pelos processos de raciocínio desenvolvidos a longo prazo.

Uma conjectura, segundo Polya (1968), é uma afirmação geral que se pensa ser verdade, sendo a *generalização* o processo matemático fundamental na formulação de conjecturas. Generalizar é o acto de passar da consideração de um dado conjunto de objectos para um conjunto maior contendo os primeiros, o que envolve a percepção de regularidades e/ou fazer analogias com outra situação (Mason et al., 1985; Polya, 1968). A conjectura pode surgir por *analogia* quando se tenta resumir o aspecto em que há semelhança total ou parcial com outras situações ou questões já exploradas dependendo, assim, da experiência matemática que a pessoa tem (Polya, 1968).

Harel (2008) diferencia dois processos de generalização, em que o primeiro é empírico e o segundo é dedutivo: *generalização de padrão de resultados* (GPR) e *generalização de padrão do processo* (GPP). Exemplifica que, por GPR, provar que na sequência dos números pares a generalização da sequência 2, 4, 8, ... é  $2^n$  faz-se pela consistência dos resultados com a fórmula e por GPP prova-se que é  $2^n$  demonstrando que o processo que gera esta sequência é a multiplicação repetida por 2.

O diagrama cíclico de Mason et al. (1985), na fig.1, é representativo do processo de conjecturar: formular conjecturas, testá-las com diferentes exemplos, tentar refutá-las com casos especiais (contra-exemplos), começar a ganhar um sentido do porquê de a conjectura estar certa ou como modificá-la reformulando-a ou formulando uma nova conjectura.

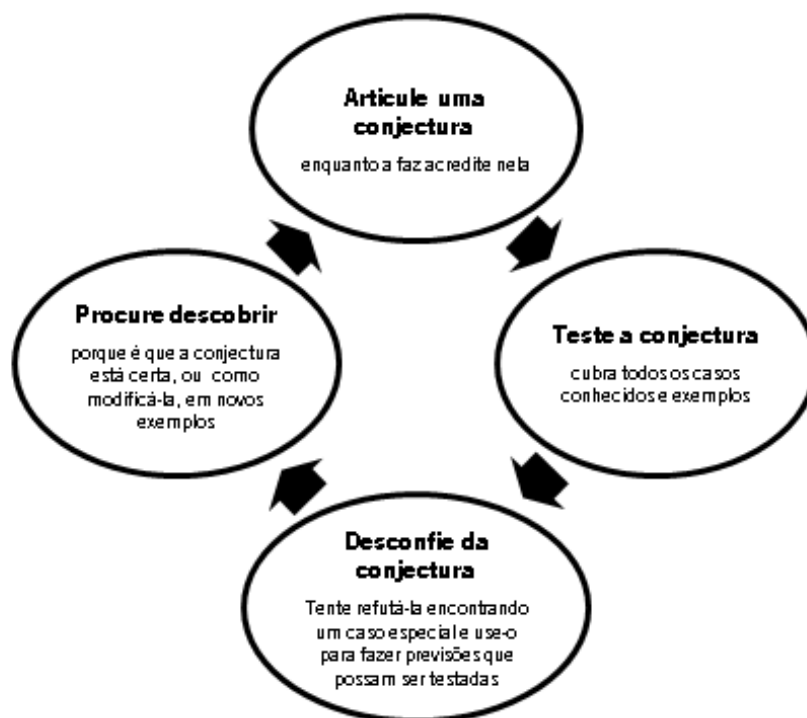


Fig. 1 – Processo de conjecturar de Mason, Burton, e Stacey (1985)

Ao longo do processo de conjecturar é importante a particularização que assume diferentes formas: escolher exemplos ao acaso para reunir evidências para a generalização e ajudar a interpretar a questão, escolher exemplos de forma sistemática aumentando a probabilidade de sucesso de encontrar padrões, e escolher casos especiais para testar a generalização (Mason et al., 1985; Polya, 1968). Segundo Reid e Knipping (2010) esta última forma de particularização é um raciocínio dedutivo pois geram-se casos específicos para testar uma generalização.

Lakatos (1999) apresenta, na discussão da conjectura de Euler, o uso de contra-exemplos, a que chamou de locais e de globais, durante o processo de prova de uma conjectura. Segundo De Villiers (2003), o contra-exemplo global verifica a premissa inicial mas não a conclusão, colocando em causa a validade da afirmação, enquanto o contra-exemplo local não é inconsistente com a conjectura desafiando um passo do raciocínio lógico ou apenas aspectos do domínio de validade da proposição. Em suma, a

apresentação de contra-exemplos pode ter várias implicações: a redefinição do conceito, a restrição do âmbito de aplicação da conjectura ou, ainda, a identificação de uma falha num passo do raciocínio do processo de prova (Watson & Mason, 2008).

O esquema apresentado por Davis e Hersh (1981), fig.2, do modelo simplificado de Lakatos, da heurística da descoberta matemática mostra o efeito do tipo de contra-exemplo no processo de conjecturar.

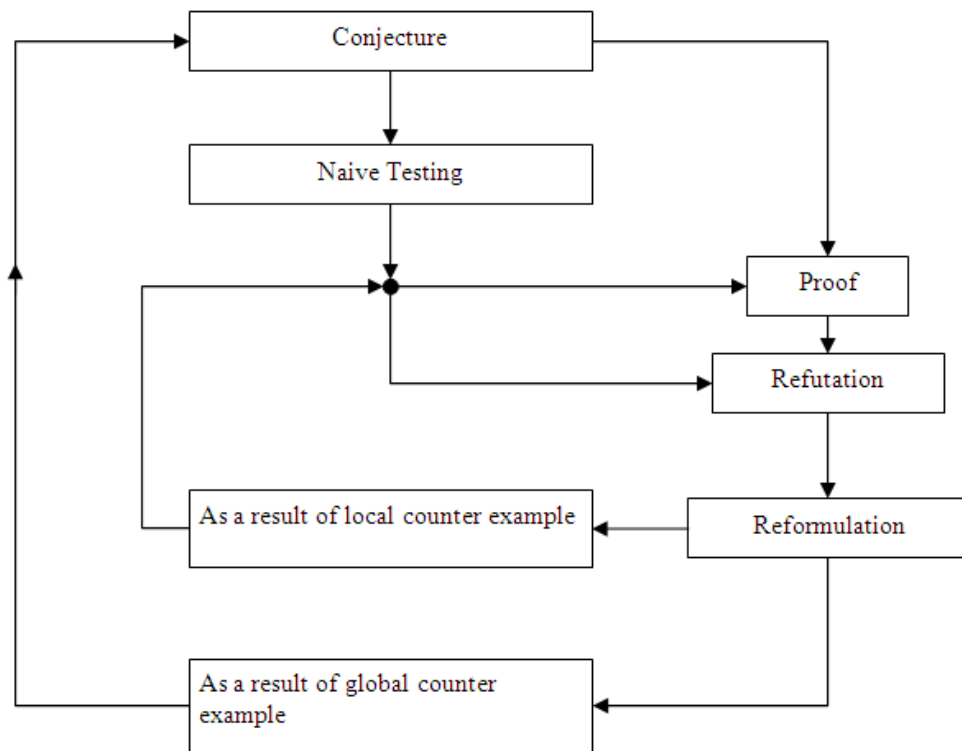


Fig. 2– Modelo da descoberta de Lakatos de Davis e Hersh (1981)

Em Lakatos (1999) a conjectura de Euler sobre os poliedros foi sendo reformulada barrando as exceções, restringindo o domínio das conjecturas e/ou o conceito de poliedro. Face a uma conjectura, declarar apenas que ela é falsa fecha o caminho da descoberta não permitindo progredir (Molina, 2001).

Goldenberg (1999) refere a importância de que o investigador desenvolva a capacidade de ver para além das aparências à procura de conexões lógicas.

No processo de descoberta podem estar envolvidos diferentes tipos de raciocínios e identificaram-se, através da investigação em educação matemática, três tipos de raciocínios como os mais importantes para ensinar e aprender a prova: o dedutivo, o indutivo, e a analogia. Reid e Knipping (2010) salientam ser por vezes difícil, ao

analisar o raciocínio, saber se foi feita uma analogia ao encontrar semelhança com outro caso ou se foi feita uma dedução. Com base nas investigações realizadas na educação matemática, Reid e Knipping (2010) sintetizaram os raciocínios que ocorrem durante a actividade matemática em cinco padrões de raciocínio, definidos como combinações de actos de raciocínio realizados individualmente ou em pequeno grupo: Dedução-conjectura-teste cíclico; Análise da Prova; Verificação científica; Rendição; *Exception* e *Monster Barring*.

O padrão de raciocínio que Reid e Knipping (2010) denominam de *verificação científica* segue a sequência de observar um padrão, conjecturar, testar, generalizar, deduzir e distingue-se do padrão de raciocínio *dedução-conjectura-teste cíclico* por iniciar com a observação de um padrão e não por uma dedução.

No padrão de raciocínio de *verificação científica* surgem outros dois, *Rendição* e *Exception e Monster Barring*, quando ao testar uma conjectura surge um contra-exemplo. A *Rendição* dá-se no caso de o contra-exemplo resultar na negação da conjectura: observação de padrão, conjecturar, testar, contra-exemplo, negação. No caso de se rejeitar o contra-exemplo duas situações podem ocorrer: o contra-exemplo é rejeitado por ser considerado um caso especial (*Monster barring*) ou a conjectura é reformulada de forma a excluir esses contra-exemplos (*Exception Barring*). O outro padrão de raciocínio é o de *Análise da prova*, em que há uma falha no raciocínio e, para a localizar, se faz a revisão da conclusão. Lakatos (1999) chamou de “proof-analysis” ao processo de provas e refutações que ocorre na actividade matemática.

### **Objectivos do estudo e metodologia:**

O objectivo do estudo é o de saber como raciocinam os alunos durante o processo de descoberta matemática. Através da análise do processo de conjecturar procuraram-se os padrões de raciocínio emergentes.

Esta investigação segue uma metodologia de estudo de caso interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). A investigadora e, simultaneamente, professora destes alunos foi observadora participante no estudo.

A recolha de dados realizou-se durante um ano lectivo numa turma de 9.º ano composta por 4 rapazes e 15 raparigas. A actividade dos alunos foi gravada em áudio, com um gravador por grupo, e a actividade de toda a turma foi gravada em vídeo através de uma

câmara fixa. Todas as tarefas foram realizadas em pequeno grupo e procuraram ser de investigação devido ao seu carácter mais aberto e de maior desafio.

A análise do raciocínio dos alunos no processo de descoberta foi feita segundo as seguintes categorias: (i) Formulação e teste de conjecturas – análise da forma como os alunos conjecturam e como testam a conjectura. (ii) Reformulação de conjecturas – análise da forma como reformulam a conjectura. Foi considerada como categoria transversal o conhecimento matemático dos alunos por estar sempre presente e condicionar os raciocínios realizados.

Com base em episódios que ocorreram durante a actividade matemática dos alunos, organizados em pequeno grupo em duas aulas, serão aqui apresentados os diferentes tipos de raciocínio que emergiram.

### **Discussão de resultados:**

O enunciado da tarefa (fig.3) remete para a particularização como forma de os alunos se envolverem e compreenderem a tarefa. Depois a questão “Quais são as fracções que dão origem a dízima finita?” orienta para a descrição das fracções de numerador 1 naquelas condições. Deparando-se com a impossibilidade de as escrever todas, iniciaram, então, a busca das propriedades que caracterizam estas fracções.

Os alunos esperavam encontrar rapidamente uma propriedade que caracterizasse os denominadores que originavam dízima finita (DF). Para seu desespero isso não aconteceu.

**A PROCURA DE DÍZIMAS FINITAS**

1. A fracção  $\frac{1}{25}$  dá origem a uma dízima finita e a fracção  $\frac{1}{3}$  a uma dízima infinita.

- Indica outras fracções da forma  $\frac{1}{n}$  que correspondam a dízimas finitas.
- Quais são as fracções que dão origem a dízimas finitas.
- Apresenta as tuas conjecturas.

2. Investiga se as tuas conjecturas se verificam igualmente com outros numeradores

Actividade da brochura da APM: "Matemática para Todos: investigações na sala de aula" caderno "Números e Regularidades: propostas de trabalho"

Fig. 3 – Enunciado da tarefa

As primeiras conjecturas foram as mais triviais e a sua refutação ocorreu por facilmente encontrarem contra-exemplos. Foi o que sucedeu com a conjectura “O denominador será número primo?” refutada com o contra-exemplo da fracção com denominador 3.

Verificou-se que, inicialmente, os alunos usavam muito este padrão de raciocínio de rendição de Lakatos (1999), em que após a observação de um padrão, formulavam uma conjectura, testavam-na e face a um contra-exemplo negavam-na. O raciocínio a seguir descrito mostra como a rendição pode ser improdutiva no processo de descoberta.

O grupo da Maria conjectura sobre os denominadores serem múltiplos de 5 ou serem pares, enquanto observam a sua lista de particularizações na fig. 4 que originam DF:

**M:** Em alguns [dos casos que são DF] o denominador é múltiplo de 5 e nos outros os denominadores são pares.

**B:** Múltiplos de 5: 5, 10, ...

**M:** 1 sobre 15 também dá dízima infinita.

Separar os números ...

denominador PAR	múltiplos de cinco
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{25}$
$-\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{10}$ $-\frac{1}{50}$
$-\frac{1}{8}$ $-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{20}$ $-\frac{1}{100}$
$-\frac{1}{10}$ $-\frac{1}{100}$	

Fig. 4 – Denominadores pares ou múltiplos de 5

A conjectura foi registada por escrito como relativa apenas aos múltiplos de 5 e foi refutada com o número 15 como se pode observar na fig.5. No entanto, o contra-exemplo da fracção com denominador 15 alerta para a reformulação da conjectura através de um estudo mais aprofundado sobre as características dos denominadores múltiplos de 5 que originam DF. Este exemplo mostra que estes alunos não estão despertos para os efeitos de um contra-exemplo, o que é natural sendo a primeira vez que investigam.

- Se o denominador fosse múltiplo de 5?  
 • Não, porque  $\frac{1}{15}$  não dá uma dízima finita.

Fig. 5 – Conjectura múltiplos de 5

Num outro grupo, os alunos queriam testar potências de 10 mas consideraram os múltiplos de 10:

**R:** Podemos ver se os números terminados em zero são dízimas finitas. (...) Um a dividir por dez dá... Um a dividir por cem dá..., um a dividir por um também dá. Terminam em zero!

**M:** Alguns dão mas outros não, por exemplo a dividir por trinta não dá.

Esta conjectura nem chegou a ser registada pois foi refutada com o contra-exemplo da fracção de denominador 30. Este raciocínio de rendição não permitiu a reformulação da conjectura.

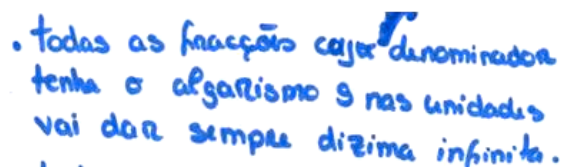
O grupo da Isa foi o primeiro a não se render face a um contra-exemplo revelando a capacidade de se questionarem e de aceitarem diferentes hipóteses. No entanto, ao procurarem outros denominadores que não originavam DF acabaram por conjecturar sobre os que originavam dízima infinita (DI). Testaram muitos denominadores, com ajuda da máquina de calcular, e encontraram semelhanças nos denominadores cujo algarismo das unidades era 9 ou 7, formulando as respectivas conjecturas:

**G:** Todos os [denominadores] 9,19,29,39 dão DI.

**J:** Podemos pôr isso.

**I:** Todos os números cujo denominador... Todas as fracções cujo denominador tenha o algarismo 9.

A conjectura formulada, fig.6, foi enunciada como restrita ao caso de o denominador ter algarismo das unidades 9, deixando em aberto a possibilidade de haver outros casos.



• todas as fracções cujo denominador tenha o algarismo 9 nas unidades vai dar sempre dízima infinita.

Fig. 6 – Conjectura do denominador terminar em 9

Chegaram a esta conjectura por, ao testar diferentes números, descobrirem um padrão que lhes permitiu generalizar. As alunas continuaram a investigação e descobriram a mesma propriedade para o algarismo das unidades 7.

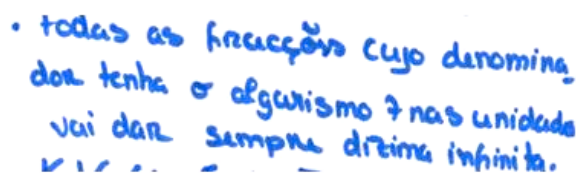
**I:** É como no 7.

**J:** Faz 107 Um sobre 7,17,27,37,47,57,67,77 Também é.

No outro foste até quanto?

**I:** Até 100.

Registaram outra conjectura similar à primeira, agora para o algarismo das unidades 7, como se pode ver na fig.7.



• todas as fracções cujo denominador tenha o algarismo 7 nas unidades vai dar sempre dízima infinita.

Fig. 7 – Conjectura denominador terminar em 7



O processo de conjecturar seguido por estas alunas está esquematizado na fig.8, onde se mostra a reformulação da conjectura 1 na conjectura 2 e a formulação das conjecturas 3 e 4.

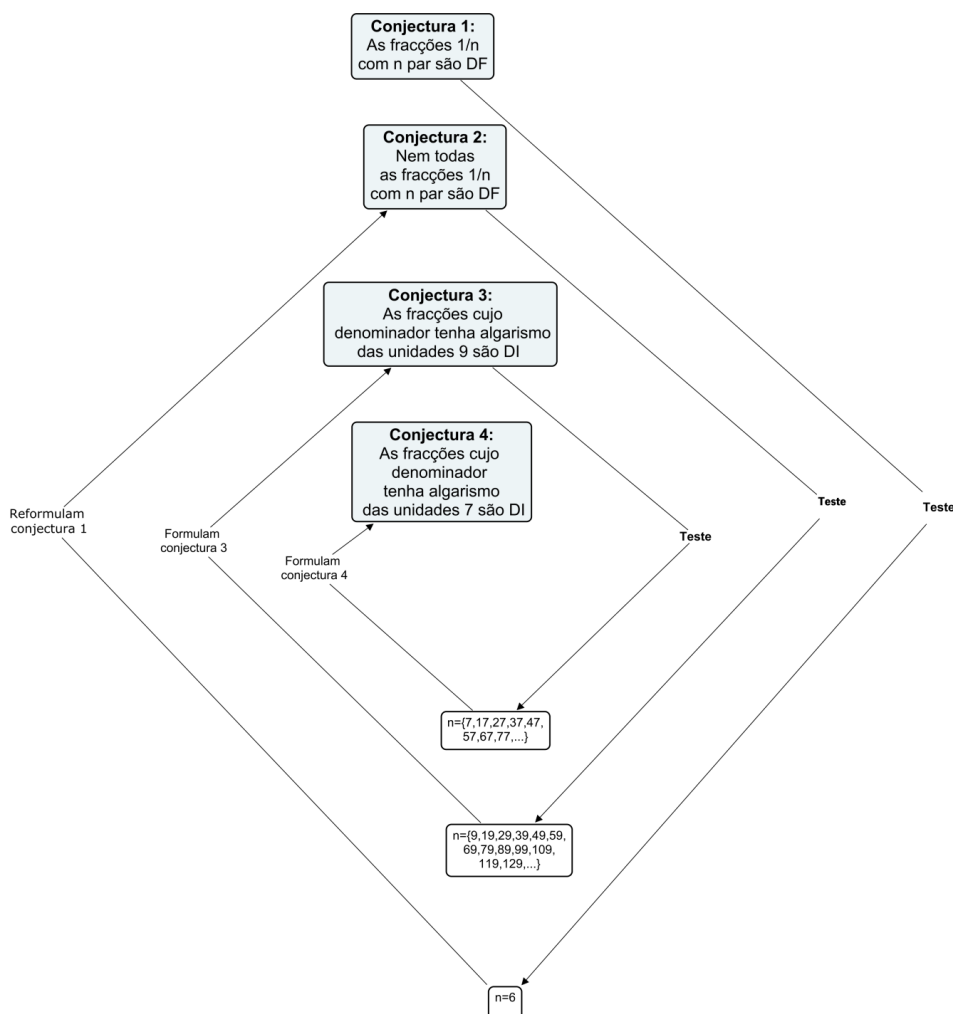


Fig. 8 – Esquema do processo de descoberta

Este grupo de alunos fez novas descobertas e a forma como o fizeram enquadra-se no padrão de raciocínio de *Verificação Científica*, pois foi pela observação de um padrão que formularam a conjecturas 3 e 4 generalizando para todos os casos naquelas condições.

A professora tentou ajudar os grupos a reformular as conjecturas tornando-as válidas num domínio mais restrito, como se exemplifica a seguir.

Vários grupos conjecturaram sobre a relação de dobro entre os denominadores. António dialoga com a professora sobre a relação de dobro que encontrou.

**A:** Mmm... Por exemplo aqui, stora: 5,10 dobro.

**Prof:** Já estás a procurar uma relação.

**A:** 4,8 dobro.

Outros elementos do grupo começam a observar casos em que se verifica essa relação:

**S:** Olha esta: 10,20.

(...)

**A:** Já sei, já sei, já sei... um meio, dobro, um quarto; dobro, um oitavo. Depois um quinto, o dobro de um quinto, um décimo, o dobro um décimo um vinte [avos].

A professora tenta focar a atenção dos alunos para o facto da relação de dobro estar a ser estabelecida entre duas sequências diferentes.

**D:** Fizemos este conjunto.

**A:** Um meio, um quarto, um oitavo.

**Prof:** Muito bem e agora para fazer uma regra que explique isso?

**Todos :** Ei!

**Prof:** O que é que estes números têm de especial? 2, 4, 8 e estavam a dizer que não passa pelo seis.

**A:** São pares.

**Prof:** Ele [o 6] não está aqui.

**A:** Porque são potências: 2 elevado a 2, ...

O aluno António explica ao grupo que aquelas fracções têm um denominador que pode ser escrito como potência de 2.

**A:** As dízimas finitas são aquelas em que a base da potência é dois.

**R:** O denominador.

**A:** A base do expoente, a base da potência. Por exemplo, 2 elevado a 10 é 1024; um sobre 1024 vai dar uma dízima finita; não há nenhum período aqui.

Esta reformulação da conjectura, formulada como uma equivalência, barrou todos os denominadores que não são potências de 2 – *Exception Barring*. Os colegas questionaram-se sobre outros denominadores que originam DF.

**A:** São aquelas em que a base é 2.

**D:** E tem 5, tem 8, tem 10.

**A:** Um sobre 5 dá 0,2.

(...)

**A:** Que era: as dízimas finitas são aquelas cuja potência a sua base é 2 e para um quinto não dá.

Nesta última frase o António constatou a existência de um contra-exemplo que põe em causa a sua conjectura. O processo de conjectura pode ser resumido pelo esquema apresentado na fig.9 em que a reformulação foi feita com ajuda da professora incentivando-os a observar o processo gerado pela multiplicação sucessiva pelo factor 2, ou seja, a generalizar por GPP.

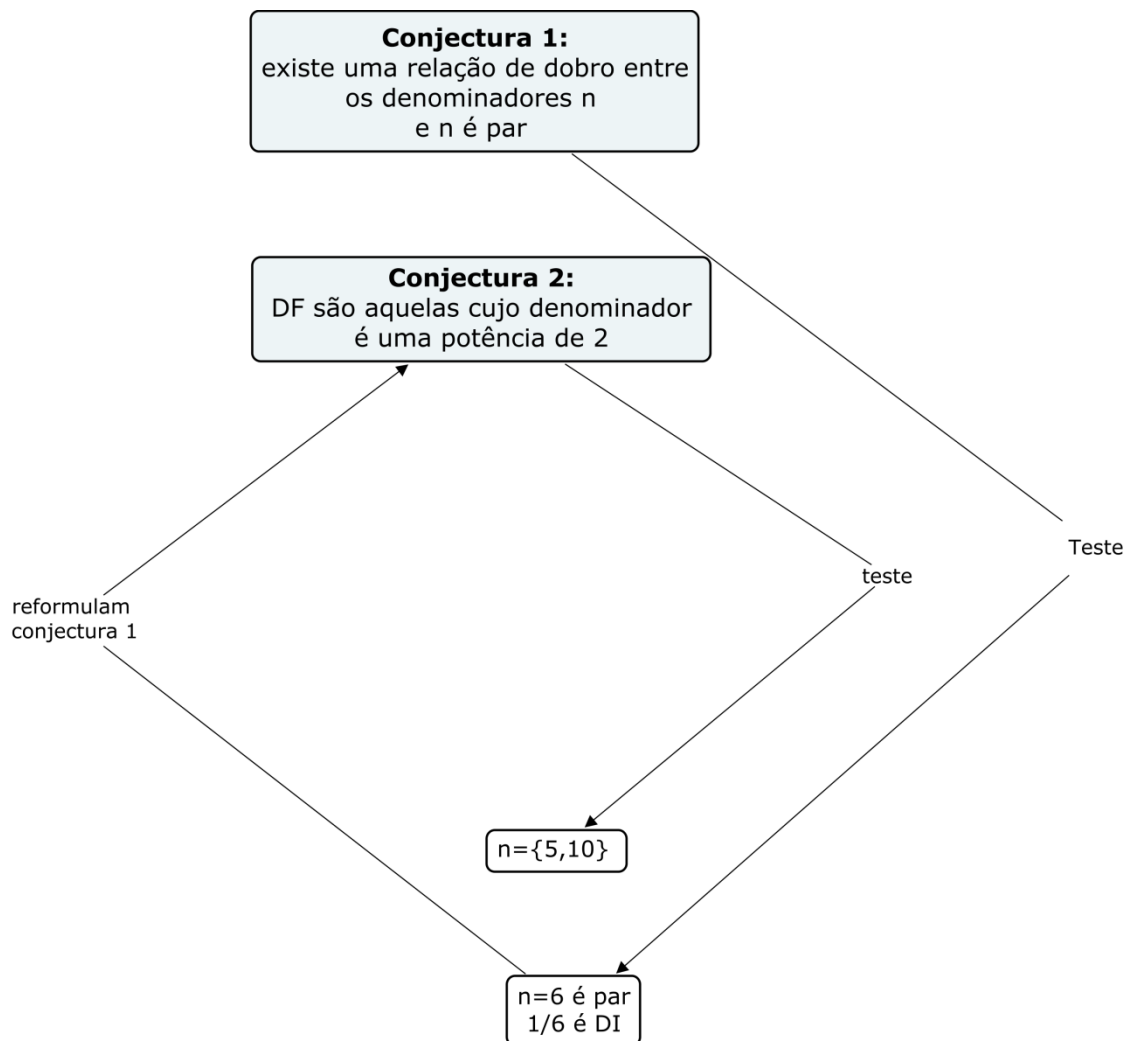


Fig. 9 – Reformulação da conjectura barrando exceções

Para continuar a descoberta era necessário resolver a questão dos contra-exemplos e a professora incentivou-os a procurarem outros denominadores relacionados com o 5. Ou tratavam os contra-exemplos como casos especiais – *Monster Barring* – ou os excluíam reformulando a conjectura – *Exception Barring*.

**Prof:** E porque não testam mais algumas?

**A:** Já testamos dois elevado a 10, um sobre 1024. Mas um quinto não dá.

**Prof:** Tentem encontrar outras relacionadas com as de um quinto.

Continuaram a procurar múltiplos de 5 iniciando um novo processo de conjecturar a partir da conjectura 1. Quando lhes surgiu o denominador 25 notaram, com surpresa, que origina DF e que não é o dobro de outro denominador.

**S:** Porque olha 25 não é o dobro.

**A:** Não é o dobro?

**D:** Mas 1 sobre 25 é uma DF.

**S:** Podemos é esquecermo-nos deste e passamos para este.

**D:** Não nos podemos esquecer porque tem que ser uma regra geral.

A Sofia propôs ignorar o contra-exemplo 25 por ser especial, tal como descrito no padrão de raciocínio *Monster Barring*, mas a Daniela não concordou por querer uma regra que incluía todos os casos.

Para que a investigação avançasse discutiu-se no grupo turma as conjecturas a que chegaram, permitindo que todos vissem um exemplo de reformulação de conjectura. Recorreu-se à decomposição dos denominadores em factores primos para identificarem as regularidades e progredir na investigação.

O grupo da Liliana continuou a investigação listando os denominadores múltiplos de 5, fig.10, e, ao procurar alguma relação entre os denominadores que eram DF, a aluna Liliana estabeleceu outra conjectura: “Aqui dá 0, 2... oh, espera e se nós pusessemos como nas potências de dois:  $5^1 = 5$ ;  $5^2 = 25$ ;  $5^3 = 125$ , ...”

$\frac{1}{5}$	→ dízima finita (DF)
$\frac{1}{10}$	→ DF
$\frac{1}{15}$	→ DI
$\frac{1}{20}$	→ DF
$\frac{1}{25}$	→ DF ✓
$\frac{1}{30}$	→ DI
$\frac{1}{35}$	→ DI
$\frac{1}{40}$	→ DF
$\frac{1}{45}$	→ DI
$\frac{1}{50}$	→ DF

Fig. 10- Lista de múltiplos de 5

Esta conjectura parece ter sido formulada por analogia baseada no facto de, no outro caso, ter resultado. O grupo prossegue a exploração tentando ganhar convicção na conjectura (ver fig. 11).

$\frac{1}{125}$	→ DF ✓
$\frac{1}{625}$	→ DF ✓
$\frac{1}{15625}$	→ DF ✓

Fig. 11- Teste à conjectura potências de 5

Prosseguiram com a exploração da sequência 25, 50, 100 ... a partir da decomposição em factores primos, fig.12, procurando regularidades.

- L:** Agora aqui...só falta o 25 e o 50 para descobrirmos todas.  
**P:** 50 dá  $2 \times 5^2$ .

Continuam a particularizar observando a decomposição respectiva em factores primos.

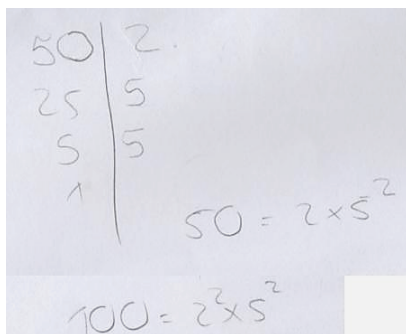


Fig. 12- Decomposição de denominadores

- P:** E o 100? Até pode ser que dê esta regra e a potência se altere.  
**L:** Já reparaste Paula que à medida que o número fica maior vai aumentando a potência de 2?  
**P:** Mas a de 5 mantém-se.  
**L:** Mas a de 2 vai aumentando 1.

Os alunos estão no caminho de formular uma outra conjectura quando experimentam o denominador 250 que, note-se, não faz parte da sequência que estão a estudar, chegando à expressão  $2 \times 5^3$ . Observem-se os registos da fig.13.

- L:** Foi a potência de 5 que aumentou não foi a de 2.

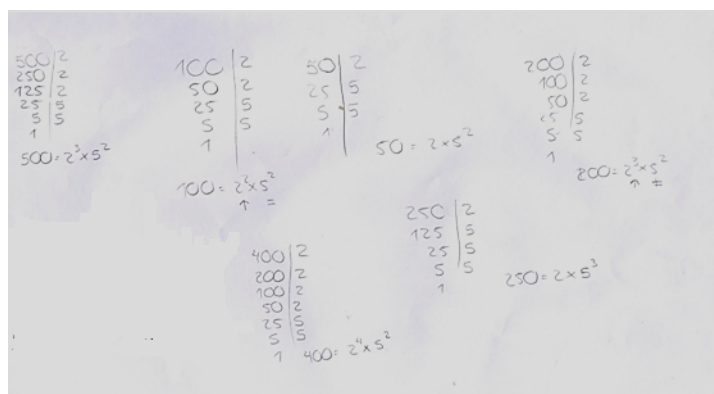


Fig. 13– Mais denominadores

Com base neste exemplo os alunos consideraram que a sua conjectura foi refutada. Iam render-se, negando a conjectura com base no contra-exemplo 250.

- L:** Então a nossa regra foi com o caneco.  
**M:** Foi pelo cano abaixo.

Paula e Liliana em vez de se renderem reanalisam a situação:

P: Mas o 5 aumentou.

L: Mas nós estávamos a ver que o 2 aumentava e o 5 mantinha.

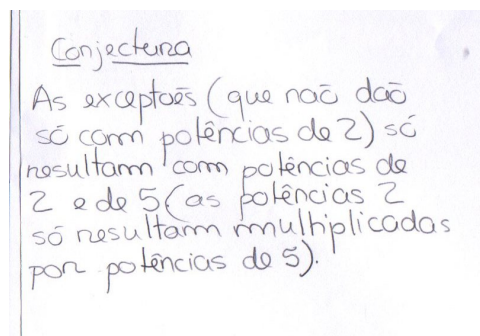
Liliana tem uma ideia:

L: Paula! E se for todos os números que têm 50 aumenta o 5 e o 2 mantém?

P: E se com 2 zeros o 5 mantém e o 2 aumenta 1.

L: 50. Se repararmos o 5 é que vai aumentar e o 2 mantém-se, mas se for com 2 zeros isto aumenta e o 5 mantém-se.

Decompuseram em factores primos outros denominadores da sequência que estavam a considerar, incluindo agora o 500 que se insere na sequência 125, 250, 500, ... Acabaram por formular uma conjectura mais geral, representada na fig.14. Este processo denota uma revisão dos dados e reanálise da situação em que não chegaram a encontrar a falha no raciocínio efectuado e descobrem um padrão mais abrangente. Esta reanálise que a Liliana faz é uma espécie de *análise de prova* pois faz uma revisão do processo que lhe permitiu reformular o raciocínio para todos aqueles casos.

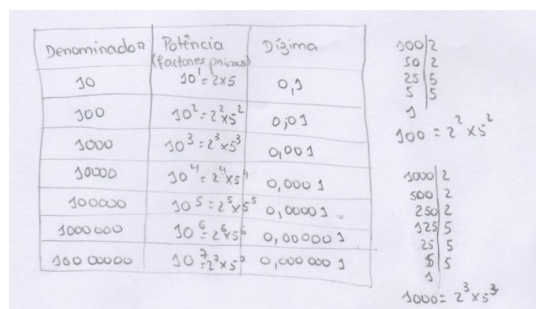


Conjectura  
As excepções (que não dão só com potências de 2) só resultam com potências de 2 e de 5 (as potências 2 só resultam multiplicadas por potências de 5).

Fig. 14 – Conjectura final

Esta conjectura refere-se aos denominadores potências de 5 ou ao produto de potências de 2 por potências de 5.

Outro grupo, ao observarem as suas tabelas, fig. 15, 16 e 17, encontram regularidades nos expoentes dos números 2 e 5.



Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
10	$10^1 = 2 \times 5$	0,1
100	$10^2 = 2^2 \times 5^2$	0,01
1000	$10^3 = 2^3 \times 5^3$	0,001
10000	$10^4 = 2^4 \times 5^4$	0,0001
100000	$10^5 = 2^5 \times 5^5$	0,00001
1000000	$10^6 = 2^6 \times 5^6$	0,000001
10000000	$10^7 = 2^7 \times 5^7$	0,0000001

100/2  
50/2  
25/5  
5/5  
1  
100 = 2^2 x 5^2

1000/2  
500/2  
250/2  
125/5  
25/5  
5/5  
1  
1000 = 2^3 x 5^3

Fig. 15– Denominadores potências de 10

Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
20	$2^2 \times 5$	0,05
200	$2^3 \times 5^2$	0,005
2000	$2^4 \times 5^3$	0,0005
20000	$2^5 \times 5^4$	0,00005
200000	$2^6 \times 5^5$	0,000005
2000000	$2^7 \times 5^6$	0,0000005
20000000	$2^8 \times 5^7$	0,00000005

$$\begin{array}{r} 20 \mid 2 \\ 10 \mid 2 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \\ \hline 20 = 2^2 \times 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \mid 2 \\ 100 \mid 2 \\ 50 \mid 2 \\ 25 \mid 5 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \\ \hline 200 = 2^3 \times 5^2 \end{array}$$

Fig. 16 – Denominadores dobro de potências de 10

Denominador	Potência (factores primos)	Dízima
40	$2^3 \times 5$	0,025
50	$2 \times 5^2$	0,02
80	$2^4 \times 5$	0,0125
160	$2^5 \times 5$	0,00625
125	$5^3$	0,008
320	$2^6 \times 5$	0,003125

*já tinhamos chegado a esta*

Fig. 17 – Organização de outros denominadores

Estabeleceram, a partir destes dados, a conjectura registada na fig. 18.

Qualquer fracção em que o denominador seja uma potência do 2, de 5 ou ambas o seu resultado é uma dízima finita.

Fig. 18 – Conjectura final

Ao lado da conjectura final escreveram várias expressões gerais, fig. 19, para traduzir os denominadores que originam DF de acordo com as diferentes relações que os alunos identificaram.

$$z^n, n \in \mathbb{N}$$


---


$$z^n \times 5$$

$$z \times 5^n$$

$$z^n \times 5^n$$

$$z^n \times 5^{n-3}$$

$$z^n \times 5^{n+1}$$

Fig. 19- Expressões gerais conjecturas

Faltou escrever a expressão do produto de qualquer potência de dois por qualquer potência de cinco necessitando usar duas variáveis:  $2^a \times 5^b, a e b \in \mathbb{N}$ .

O grupo da Liliana fez a interessante descoberta de regularidades nas potências, enquanto espera que os outros grupos concluam:

**L:** Já reparaste que as potências de 5 dão sempre 5 e as com 2 dá “coiso”. Juntamente com a outra regra as excepções dão os números pares multiplicam-se sempre por 5 e os números ímpares só dão com potências de 5.

**P:** Olha este é ímpar mas este que multiplicado por 2 dá par.

A descoberta destas alunas é importante para o desenvolvimento do seu sentido do número. Revelaram a capacidade de encontrar uma regularidade e generalizaram-na.

### **Conclusões**

O processo de conjecturar, vivenciado pela primeira vez por estes alunos, foi uma experiência de descoberta matemática importante que exigiu persistência ao longo do processo de conjecturar para reformularem as suas conjecturas através da aplicação de raciocínios mais complexos (Dreyfus, 1991) tais como, por exemplo: generalizar por GPP promovendo, assim, o raciocínio dedutivo (Harel, 2008); e fazer analogias apoiadas no enriquecimento da sua experiência matemática (Polya, 1968). A descoberta sobre a razão da paridade das potências, por um dos grupos, é reveladora do desenvolvimento da capacidade de notar e de generalizar (Mason et al., 1985) facto que revela como a oportunidade de descobrir lhes pode proporcionar “ver” para além das aparências e fazer conexões importantes (Goldenberg, 1999).

Em resposta à questão “Como raciocinam os alunos quando descobrem a Matemática?” pode afirmar-se que raciocinaram de acordo com os seguintes padrões de raciocínio: de rendição, de verificação científica, *Exception e Monster Barring*, de análise da prova e de analogia-conjectura-teste cíclico (Reid & Knipping, 2010). Salienta-se o facto de este último padrão de raciocínio iniciar por uma analogia, raciocínio que, tal como foi referido, pode ser confundido com uma dedução.

Relativamente ao conhecimento matemático esta tarefa permitiu aos alunos fazerem conexões sobre os números e as suas regularidades, melhorando o seu sentido do número.

### **Referências**

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.



- Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton Mifflin Company Boston.
- De Villiers, M. (2003). The Value of Experimentation in Mathematics. *9th National Congress of AMESA* (pp. 174-185). Cape Town: In Proceedings.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-39). Dordrecht: Kluwer.
- Goldenberg, P. (1999). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. In P. Abrantes, J. Pnte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part I: focus on proving. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* (40(3)), 487-500.
- Lakatos, I. (1999). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. United States of America: Bembo.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.
- Molina, J. A. (2001). Lakatos como Filósofo da Matemática. *Episteme*, 13, 129-153.
- Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. I). Princeton: University Press.
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do Ensino Básico. In G. G. Investigação (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do ensino Básico* (pp. 11-42). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Netherlands: Sense Publishers.
- Watson, A., & Mason, J. (2008). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples*. New York: Routledge.