A CALCULADORA GRÁFICA COMO INSTRUMENTO PARA O DESENVOLVIMENTO DA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA[1]

Maria da Graça Magalhães
Escola Secundária/3 Henrique Medina
graça.n.magalhaes@gmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd - Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo: A presente investigação tem como objectivo provar que a calculadora gráfica pode desempenhar um papel de instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da argumentação matemática, quando os alunos são estimulados a desenvolver tarefas de investigação em pequeno e em grande grupo. Para tal a professora investigadora elaborou uma tarefa de investigação, sobre o tema das funções racionais, que foi aplicada a uma turma do 11.º ano. A tarefa foi realizada primeiro em pequenos grupos e posteriormente em grande grupo, com a entrega final de um relatório individual. A metodologia adoptada foi de carácter qualitativo e descritivo. Neste estudo a calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral para os alunos na medida em que os ajudou na compreensão da tarefa, assim como na validação ou rejeição das conjecturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática. É de salientar, a importância da calculadora gráfica, do ponto de vista dos alunos, para o sucesso da investigação. A sua utilização permitiu construir e visualizar os gráficos de diferentes funções e, através da sua análise, formular conjecturas e tentativas de prova.

Palavras-Chave: Argumentação matemática, calculadora gráfica, tarefa de investigação.

Introdução

Na última década o desenvolvimento das capacidades argumentativas nos alunos tornou-se um assunto discutido e trabalhado pela comunidade matemática por diferentes razões, nomeadamente, a necessidade de uma abordagem precoce das habilidades relevantes no processo de prova, a exploração do potencial de interacção social no desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas e a importância das competências argumentativas nos currículos como forma de reforçar a autonomia intelectual nos alunos (Douek & Pichat, 2003).

---

[1]Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Magalhães, M. G., Martinho, M. H. (2011). A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática. In: XXII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática). Lisboa: APM.

Boavida (2005) salienta que o interesse pela argumentação, assim como a importância de serem criadas condições favoráveis na aula de matemática para experiências em que o foco seja a explicação e a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações e a formulação, avaliação e prova de conjecturas têm sido alvo de várias investigações em Matemática. O facto é que apesar da noção de argumentação ser utilizada frequentemente em educação matemática, o seu significado não tem sido amplamente discutido.

Particularmente, no que concerne ao tema das funções, Domingos (2008) considera que ao nível da educação em Portugal tem sido dada pouca relevância ao estudo das funções, apesar de fazer parte do currículo dos ensinos básico e secundário. Para Kaldrimidou e Ikonomou (1998), o conceito de função tem uma posição central na ciência e na educação matemática. Estudos efectuados apontam para as potencialidades do estudo em torno das diferentes representações das funções, nomeadamente numérica, algébrica, tabular, gráfica e verbal e das dificuldades que os alunos têm em estabelecer conexões entre elas (Carraher & Schliemann, 2007; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). No entanto, apesar de na educação matemática a representação gráfica de funções ser um tópico importante, verifica-se que para a grande maioria dos alunos é considerada como um obstáculo difícil de transpor na sua compreensão pois ao trabalharem com funções e gráficos, constata-se que os conhecimentos que vão adquirindo ficam compartimentados e estanques, ou seja, demonstram ter dificuldades em estabelecer relações entre as informações das diferentes representações (Demana & Waits, 1992).

Com o aparecimento da calculadora gráfica, esse obstáculo pode estar reduzido por se tornar uma ferramenta que ajuda a compreender melhor alguns conceitos, possibilitando aos alunos a visualização enquanto fazem matemática (Demana & Waits, 1992). A visualização pode ser entendida como o processo de formar imagens mentalmente, com o auxílio de papel e lápis ou com o uso da tecnologia. Dependendo do contexto matemático, a visualização não está isolada das restantes representações podendo ser estabelecidas relações entre elas (Cunninghan & Zimmermann, 1991). A possibilidade de visualização com a calculadora gráfica permite que os alunos dediquem mais tempo à resolução de problemas e menos à manipulação meramente mecânica dos mesmos (Kaber & Longhart, 1995).

Para além da sua componente visual a calculadora gráfica proporciona também aos alunos momentos de discussão em que partilham as suas ideias através de previsões, testes e generalizações, criando-se assim ambientes propícios à investigação matemática (Gracias & Borba, 2000). Como refere Dugdale (1993) a fácil manipulação das representações gráficas dá origem à possibilidade de visualização da representação de funções e desempenha assim um papel importante no raciocínio matemático, na investigação e na argumentação. Assim, novas formas de trabalhar na sala de aula são necessárias para incentivar os alunos a raciocinar com o auxílio da calculadora gráfica.

Para esta experiência a professora investigadora seleccionou e elaborou uma tarefa de investigação, sobre o tema das funções racionais e implementou-a numa turma do 11.º ano. Trata-se de uma tarefa integrada numa sequência de tarefas elaboradas pela professora com o intuito de trabalhar o tema das funções de modo exploratório. Esta tarefa com recurso à calculadora gráfica tinha como objectivo, para além de proporcionar aos alunos uma experiência significativa de aprendizagem do conceito de função racional, desenvolver as suas capacidades de argumentação em Matemática.

Com a presente investigação pretende-se responder à seguinte questão: Poderá a calculadora gráfica desempenhar um papel de instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da argumentação matemática, quando os alunos são estimulados a explorar uma tarefa de investigação em pequeno e em grande grupo?

Argumentação matemática

Nas últimas décadas, a maior preocupação da Matemática escolar foi centrar-se no produto em vez de se centrar no processo, visto que muitos alunos são incapazes de explicar ou de justificar os seus raciocínios (Vincent, Chick & McCrae, 2005). No entanto, fazer matemática consiste em fazer descobertas, conjecturas, generalizações, contra-exemplos, refutações e provas. O aluno, ao tentar resolver uma situação problemática, vai fazer esquemas cognitivos ou desenvolver raciocínios de forma a encontrar a solução adequada ao problema em questão. Nesse processo podem surgir raciocínios incorrectos, no entanto, o erro deve ser encarado como um fenómeno inerente à aprendizagem (Ponte & Serrazina, 2000).

Quando, na sala de aula, um aluno explicita o seu pensamento aos restantes elementos da turma a argumentação causa efeito na discussão que se desenvolve posteriormente, pois os alunos após ouvirem a explicação do colega podem desenvolver argumentações contra, a favor ou simplesmente melhoram as suas ideias (Whitenack & Yackel 2008).

As actuais orientações curriculares de Matemática dão especial ênfase à necessidade de se criarem, na sala de aula, contextos diversificados em que a explicação e a justificação de ideias e procedimentos matemáticos têm um lugar de destaque (Boavida, 2008). Torna-se assim fundamental valorizar no processo de ensino e aprendizagem o envolvimento de todos os alunos em actividades argumentativas em qualquer tópico matemático e não apenas em alguns temas ou em ocasiões particulares em que se exploram determinado tipo de tarefas.

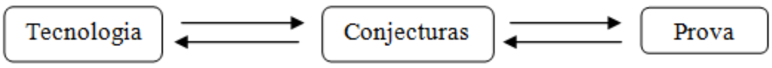
Fonseca (2000) aponta três hábitos que importa desenvolver nos alunos: (i) tratar as afirmações como conjecturas, desenvolvendo a capacidade de testar e de modificar as afirmações com o intuito de serem encontradas justificações convincentes; (ii) testar conjecturas e justificá-las; e (iii) ter um olhar crítico relativamente aos argumentos apresentados pelos colegas. Assim, se os alunos forem desafiados e estimulados, ao longo da escolaridade, a uma "prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações" vão construindo uma ideia cada vez mais correcta do significado, da necessidade e da importância da prova na Matemática (Veloso, 1998, p. 374).

Calculadora gráfica

A introdução da calculadora gráfica na escola não pretendia ser uma mera ferramenta à disposição dos alunos para lhes facilitar o trabalho. O objectivo foi essencialmente desafiar, criar a possibilidade de resolverem problemas mais exigentes com uma ferramenta que lhes abreviava o trabalho mais rotineiro. No entanto, a calculadora gráfica precisa de ser utilizada de forma adequada, de maneira a que sejam aproveitadas todas as suas potencialidades e que os alunos aumentem a sua autonomia e espírito crítico na resolução de problemas e na descoberta de conceitos matemáticos (Quesada, 1996). Segundo alguns autores, os alunos normalmente utilizam a calculadora gráfica como instrumento de confirmação dos resultados obtidos analiticamente (Rocha, 2000).

Para que seja feita uma utilização inteligente da calculadora gráfica cabe ao professor uma responsabilidade acrescida no que se relaciona com a planificação de tarefas que sejam adequadas ao seu uso e cabe ao aluno a capacidade de decisão em relação à adequação da utilização da calculadora na resolução das tarefas propostas pelo professor (Burril et al., 2002). As calculadoras vieram assim, proporcionar um novo tipo de tarefas, questões e estratégias de ensino e aprendizagem a desenvolver dentro da sala de aula (Dunham & Dick, 1994).

Ponte et al. (1997) consideram que trabalhar com a calculadora gráfica na resolução de tarefas que desafiem e estimulem os alunos a formular conjecturas promove a capacidade de investigar e de desenvolver raciocínios e argumentos. A calculadora gráfica enriquece a qualidade e a extensão das investigações na aula de Matemática, pois desta forma os alunos podem analisar exemplos e contra-exemplos, explorar e formular conjecturas mais rapidamente (Hirschhorn & Thompson, 1996). A calculadora gráfica pode assim, desempenhar um importante papel como instrumento mediador no processo de decisões tornando o aluno participante activo no processo de aprendizagem.



Metodologia

Com a presente experiência pretende-se estudar se a utilização da calculadora gráfica pode desempenhar um papel de instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática dos alunos, quando estes são estimulados a desenvolverem uma tarefa de investigação com recurso à calculadora gráfica, em pequeno e em grande grupo.

Para isso foi realizada uma experiência durante o mês de Fevereiro de 2010, numa turma do 11º ano, heterogénea, composta por 25 alunos (18 raparigas e 7 rapazes) e em que a investigadora, primeira autora deste artigo, era professora da disciplina de Matemática.

Esta experiência consistiu na exploração de uma sequência de tarefas de modo a que os alunos construíssem o seu próprio conhecimento no desenvolvimento sobre o conceito e o comportamento das funções racionais. Nesta comunicação apresenta-se apenas extractos da investigação efectuada na quinta e última tarefa da sequência.

A recolha de dados foi efectuada através de registos áudio e vídeo dos diálogos desenvolvidos em pequeno e grande grupo e posteriormente através dos relatórios escritos e reflexões realizadas individualmente sobre a tarefa proposta.

A análise dos dados foi organizada em duas partes: a argumentação matemática (formulação e teste de conjecturas e da conjectura à prova) e a calculadora gráfica (contributos e dificuldades). Nesta comunicação apresentam-se apenas pequenos excertos de alguns diálogos desenvolvidos na discussão em pequeno grupo, dos relatórios de investigação e de reflexões sobre a tarefa.

A tarefa de investigação

Para efectuar esta experiência, a professora dividiu inicialmente a turma em pequenos grupos de três ou quatro elementos. A tarefa de investigação proposta aos alunos foi a seguinte:

Considera os dois gráficos seguintes:

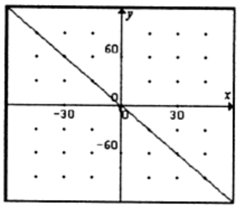


Fig.1

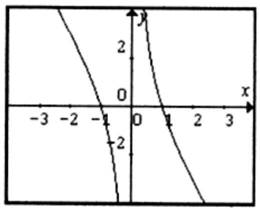


Fig.2

Estes gráficos representam a mesma função. No entanto, foram considerados rectângulos de visualização diferentes na calculadora gráfica.
Determina a expressão analítica da função considerada na fig.1 e fig.2.

Esta tarefa tinha como objectivo principal a sensibilização dos alunos para a escolha da uma janela de visualização, na calculadora gráfica, quando se pretende obter o gráfico de uma determinada função. Nos trabalhos em pequeno grupo foi utilizada a calculadora gráfica e na discussão desenvolvida em grande grupo foi utilizado o quadro interactivo com a calculadora gráfica previamente instalada.

Realização da tarefa em grupo

Na fase inicial da aplicação da tarefa a professora efectuou uma breve introdução chamando a atenção que a família de funções que iria ser estudada era do tipo $f(x) = ax + b + c/(dx + e)$. Referiu também que a representação gráfica desta nova família de funções poderia contemplar assimptotas oblíquas, que ainda não tinham sido obtidas nos casos estudados em aulas anteriores.

Argumentação matemática

Na fase inicial os alunos começaram por analisar as duas representações gráficas da mesma função, para a qual se pretendia encontrar a sua expressão analítica.

Inicialmente, a maioria dos grupos tentou descobrir a equação da recta da fig. 1. Por exemplo, um dos grupos após a leitura do enunciado imediatamente elaborou uma conjectura relativamente a uma possível equação da recta, que consideraram ser $y = -2x$, testando de seguida a sua veracidade.

> *Fausto:* Segundo o enunciado, os dois gráficos representam a mesma função.
> *Elisa:* Pois é. O que muda é a escala. Temos que achar a expressão.
> *Fausto:* A expressão da função deve ser do tipo $f(x) = ax + b + c/(dx + e)$.
> *Elisa:* Parece que a recta do gráfico 1 corresponde à assimptota do gráfico 2.
> *Alexandra:* Então vamos calcular a expressão da recta.
> *Fausto:* A expressão é $y = -2x$.
> *Júlia:* Agora temos que relacionar a expressão com qualquer coisa....
> *Elisa:* Como a expressão da assimptota oblíqua é $y = ax + b$, vamos comparar.
> *Alexandra:* Já achamos $ax + b$. O $ax + b$ é igual a $-2x$.

Este grupo não teve qualquer dificuldade em fazer a conexão entre os dois gráficos dados na tarefa pois facilmente elaboram uma conjectura que relacionava a equação da recta da fig. 1 com a assimptota oblíqua do gráfico da fig. 2. Outros alunos, de uma forma mais detalhada tentaram inicialmente encontrar a equação da recta da fig. 1, e passaram de imediato à fase da exploração. Estes alunos a partir de dois pontos pertencentes à recta do gráfico 1, nomeadamente $(30,-60)$ e $(-30,60)$ determinaram analiticamente a equação da recta $y = -2x$.

> *Célia:* ... Da figura 1 podemos concluir que ... Vamos determinar o declive da recta, não é?
> *Raul:* Sim.
> *Célia:* Vamos considerar um ponto da recta $A(30,-60)$.
> *Raul:* Também podemos considerar o ponto $B(-30,60)$.
> *Margarida:* Vamos determinar o declive da recta utilizando os dois pontos.
> *Raul:* $\overline{AB} = B - A = (-60,120)$.
> *Célia:* Então o declive fica igual a $120/(-60)$ que dá -2. Fazendo a equação da recta, $y = mx + b$ ... Substituímos o y por -60, o m por -2 e o x por 30, e vamos calcular o b ... O b vai dar 0. Então a equação da recta vai dar $y = -2x$.

Posteriormente, todos os grupos tentaram encontrar a expressão analítica da função cujos gráficos estão exemplificados nas figuras 1 e 2. Nesta fase os alunos elaboraram conjecturas e tentaram provar que as expressões analíticas encontradas eram válidas, independentemente da janela de visualização considerada. Um dos grupos, na tentativa de encontrar a expressão analítica da função dada graficamente no enunciado da tarefa passou à análise dos aspectos mais significativos da fig. 2.

Célia: Da figura 2 podemos tirar os pontos $C(-1,0)$ e $D(1,0)$. A assimptota vertical é $x = -d / c$.
Raul: A assimptota vertical é $x = 0$.
Célia: Vamos então escrever a função analítica de uma função que a assimptota é $x = 0$. Ora, $f(x) = ax + b + c / (dx + e)$ …
Raul: Se a assimptota vertical é zero, e tem de ser zero.
Célia: Então fica $f(x) = ax + b + c / dx$. E $ax + b$ vai ser $-2x$ na função.

Os alunos deste grupo conforme foi evoluindo o trabalho descobriram, por tentativa erro, qual era a expressão analítica da função dada graficamente, utilizando para tal a calculadora gráfica como forma de confirmar as suas conjecturas. No entanto, sentiram a necessidade de verificar que a expressão analítica encontrada era válida.

Raul: Por tentativa erro descobri que a função fica $f(x) = -2x + 2 / x$.
Margarida: Temos que fazer agora analiticamente …
Célia: Sabemos que a função $f(x) = -2x + c / dx$ pois e é zero.
Raul: Substituímos o valor de x e y por um dos zeros da função.
Célia: Ao substituir na função o ponto $(1,0)$ temos $c = 2d$.
Margarida: Então se substituirmos o d por 1 e o c por 2 …
Raul: …obtemos a função $f(x) = -2x + 2 / x$.

A maioria dos grupos para testar a validade da expressão analítica encontrada descobriu que o valor da incógnita c era igual ao dobro da incógnita d e posteriormente concluíram que c tinha que ser igual ao dobro de d, no entanto, ambas as incógnitas tinham de ter o mesmo sinal.

Alexandra: O c é o dobro do d.
Fausto: Pois é. Então se o d for 1 o c tem que ser obrigatoriamente 2.
Júlia: Vamos tentar comprovar isso...Substitui o d por 2 e o c deu 4.
Elisa: O c tem que ser o dobro de d, mas os seus sinais têm que ser iguais. Se forem diferentes não dá.
Alexandra: Se c tiver sinal diferente de d já não se aplica a expressão $-d / e$.
Fausto: Então a expressão da função é $f(x) = -2x + c / dx$.

Outros grupos, não conseguiram chegar à conclusão de que c é o dobro de d, no entanto, por tentativa e erro, encontraram a expressão analítica da função pretendida.

Rui: Então agora temos de dar valores a c e d …
Maria: Até obtermos a figura 1.
Vitória: Sim.
Maria: $c = 1$ e $d = -1$.
Rui: Não dá.
Dora: $c = -1$ e $d = 1$.
Vitória: Não dá, mas está quase. Vamos experimentar $c = 2$ e $d = 1$.
Rui: Esse dá!

Durante a exploração desta tarefa alguns grupos desenvolveram argumentos na tentativa de testarem e provarem as suas conjecturas.

Calculadora gráfica

A calculadora gráfica foi utilizada durante a exploração da tarefa com o intuito de teste e de verificação se as expressões analíticas encontradas correspondiam às representações gráficas da figura 1 e 2, caso fosse alterada a janela de visualização. Nas discussões desenvolvidas por cada um dos grupos foi evidente a importância da utilização da calculadora gráfica nesta investigação. Os alunos ao longo da elaboração das suas conjecturas de forma a tentarem encontrar uma expressão analítica para a função que podia ser representada graficamente quer pelo gráfico 1 quer pelo 2, foram utilizando a calculadora gráfica de forma activa e crítica. Nomeadamente, um dos grupos quando pretendeu testar se a expressão analítica era válida, utilizou o *Zoom* da calculadora para fazer variar a janela e assim, verificar que era uma das possibilidades para a tarefa.

Dora: Para termos a certeza que esta bem é melhor aumentarmos a janela.
Maria: Temos bem!
Rui: Quanto maior é a janela mais a função se aproxima da assimptota!
Todos: Sim!
Dora: Sendo assim a expressão analítica da função da figura 1 e da figura 2 é $f(x) = -2x + 2/x$.

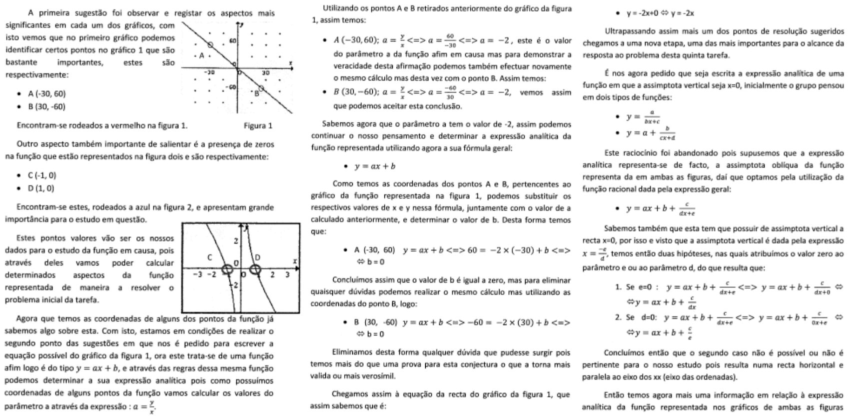
Na discussão desenvolvida pelos diferentes grupos foi também evidente verificar a importância da utilização da calculadora gráfica na exploração desta tarefa, nomeadamente a visualização dos diferentes gráficos que foram sendo obtidos devido à alteração dos valores dos parâmetros.

Relatório da tarefa e reflexão

Nesta tarefa, os argumentos apresentados pelos alunos foram no sentido de explicarem como é que raciocinaram até encontrarem uma expressão analítica de uma função que estivesse de acordo com as condições da tarefa.

Argumentação matemática

Na fase de apropriação da tarefa os alunos referiram nos seus relatórios que, após a leitura individual da tarefa, começaram por fazer uma análise de cada um dos gráficos. A maioria dos alunos evidenciou uma grande capacidade de organização do raciocínio, argumentando sempre de uma forma completa e rigorosa relativamente às conjecturas seguidas e às abandonadas, assim como às tentativas de prova realizadas. Por exemplo, Raul descreve o processo de raciocínio efectuado pelo seu grupo.



A primeira sugestão foi observar e registar os aspectos mais significantes em cada um dos gráficos, com isto vemos que no primeiro gráfico podemos identificar certos pontos no gráfico 1 que são bastante importantes, estes são respectivamente:

- A (-30, 60)
- B (30, -60)

Encontram-se rodeados a vermelho na figura 1.

Figura 1

Outro aspecto também importante de salientar é a presença de zeros na função que estão representados na figura dois e são respectivamente:

- C (-1, 0)
- D (1, 0)

Encontram-se estes, rodeados a azul na figura 2, e apresentam grande importância para o estudo em questão.

Estes pontos valores vão ser os nossos dados para o estudo da função em causa, pois através deles vamos poder calcular determinados aspectos da função representada de maneira a resolver o problema inicial da tarefa.

Agora que temos as coordenadas de alguns dos pontos da função já sabemos algo sobre esta. Com isto, estamos em condições de realizar o segundo ponto das sugestões em que nos é pedido para escrever a equação possível do gráfico da figura 1, ora este trata-se de uma função afim logo é do tipo $y = ax + b$, e através das regras dessa mesma função podemos determinar a sua expressão analítica pois como possuímos coordenadas de alguns pontos da função vamos calcular os valores do parâmetro a através da expressão : $a = \frac{y}{x}$.

Utilizando os pontos A e B retirados anteriormente do gráfico da figura 1, assim temos:

- $A\,(-30, 60)$; $a = \frac{y}{x} <=> a = \frac{60}{-30} <=> a = -2$, este é o valor do parâmetro a da função afim em causa mas para demonstrar a veracidade desta afirmação podemos também efectuar novamente o mesmo cálculo mas desta vez com o ponto B. Assim temos:
- $B\,(30, -60)$; $a = \frac{y}{x} <=> a = \frac{-60}{30} <=> a = -2$, vemos assim que podemos aceitar esta conclusão.

Sabemos agora que o parâmetro a tem o valor de -2, assim podemos continuar o nosso pensamento e determinar a expressão analítica da função representada utilizando agora a sua fórmula geral:

- $y = ax + b$

Como temos as coordenadas dos pontos A e B, pertencentes ao gráfico da função representada na figura 1, podemos substituir os respectivos valores de x e y nessa fórmula, juntamente com o valor de a calculado anteriormente, e determinar o valor de b. Desta forma temos que:

- A (-30, 60) $y = ax + b <=> 60 = -2 \times (-30) + b <=>$ $\Leftrightarrow$ b = 0

Concluímos assim que o valor de b é igual a zero, mas para eliminar quaisquer dúvidas podemos realizar o mesmo cálculo mas utilizando as coordenadas do ponto B, logo:

- B (30, -60) $y = ax + b <=> -60 = -2 \times (30) + b <=>$ $\Leftrightarrow$ b = 0

Eliminamos desta forma qualquer dúvida que pudesse surgir pois temos mais do que uma prova para esta conjectura o que a torna mais valida ou mais verosímil.

Chegamos assim à equação da recta do gráfico da figura 1, que assim sabemos que é:

- y = -2x+0 $\Leftrightarrow$ y = -2x

Ultrapassando assim mais um dos pontos de resolução sugeridos chegamos a uma nova etapa, uma das mais importantes para o alcance da resposta ao problema desta quinta tarefa.

É nos agora pedido que seja escrita a expressão analítica de uma função em que a assimptota vertical seja x=0, inicialmente o grupo pensou em dois tipos de funções:

- $y = \frac{a}{bx+c}$
- $y = a + \frac{b}{cx+d}$

Este raciocínio foi abandonado pois supusemos que a expressão analítica representa-se de facto, a assimptota oblíqua da função representa da em ambas as figuras, daí que optamos pela utilização da função racional dada pela expressão geral:

- $y = ax + b + \frac{c}{dx+e}$

Sabemos também que esta tem que possuir de assimptota vertical a recta x=0, por isso e visto que a assimptota vertical é dada pela expressão $x = \frac{-e}{d}$, temos então duas hipóteses, nas quais atribuímos o valor zero ao parâmetro e ou ao parâmetro d, do que resulta que:

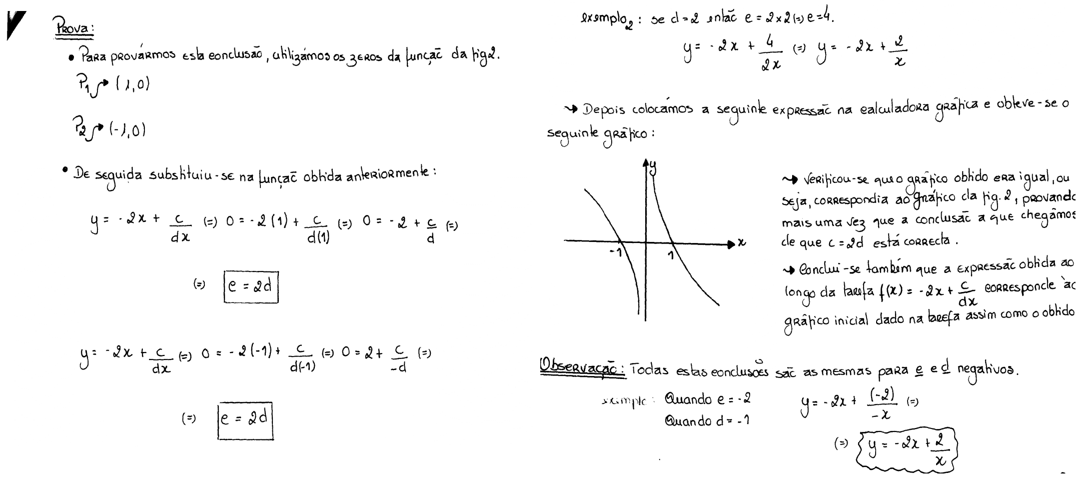
1. Se e=0 : $y = ax + b + \frac{c}{dx+e} <=> y = ax + b + \frac{c}{dx+0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = ax + b + \frac{c}{dx}$
2. Se d=0: $y = ax + b + \frac{c}{dx+e} <=> y = ax + b + \frac{c}{0x+e} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = ax + b + \frac{c}{e}$

Concluímos então que o segundo caso não é possível ou não é pertinente para o nosso estudo pois resulta numa recta horizontal e paralela ao eixo dos xx (eixo das ordenadas).

Então temos agora mais uma informação em relação à expressão analítica da função representada nos gráficos de ambas as figuras

Figura 1. Excerto do relatório de Raul

Note-se que Raul conforme efectuou a verificação de que $c = 2d$, referiu quais foram os argumentos considerados pelo seu grupo para a validar. Finalmente os alunos encontraram a expressão analítica que tem como representação gráfica as duas figuras dadas no enunciado da tarefa, como é o caso de Júlia.



Prova:

- Para provármos esta conclusão, utilizámos os zeros da função da fig2.

$P_1 \to (1,0)$

$P_2 \to (-1,0)$

- De seguida substituiu-se na função obtida anteriormente:

$y = -2x + \frac{c}{dx} \Leftrightarrow 0 = -2(1) + \frac{c}{d(1)} \Leftrightarrow 0 = -2 + \frac{c}{d} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{e = 2d}$

$y = -2x + \frac{c}{dx} \Leftrightarrow 0 = -2(-1) + \frac{c}{d(-1)} \Leftrightarrow 0 = 2 + \frac{c}{-d} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{e = 2d}$

exemplo$_2$: se d = 2 então e = 2 × 2 $\Leftrightarrow$ e = 4.

$y = -2x + \frac{4}{2x} \Leftrightarrow y = -2x + \frac{2}{x}$

→ Depois colocámos a seguinte expressão na calculadora gráfica e obteve-se o seguinte gráfico:

→ Verificou-se que o gráfico obtido era igual, ou seja, correspondia ao gráfico da fig. 2, provando mais uma vez que a conclusão a que chegámos de que c = 2d está correcta.

→ Conclui-se também que a expressão obtida ao longo da tarefa $f(x) = -2x + \frac{c}{dx}$ corresponde ao gráfico inicial dado na tarefa assim como o obtido

Observação: Todas estas conclusões são as mesmas para e e d negativos.

exemplo: Quando e = -2
Quando d = -1

$y = -2x + \frac{(-2)}{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2x + \frac{2}{x}$

Figura 2. Excerto do relatório de Júlia

No final dos relatórios os alunos efectuaram uma reflexão sobre o desenvolvimento da investigação. Em particular, Célia referiu que a experiência que realizou "desempenhou um papel muito importante na sua aprendizagem e no desenvolvimento da capacidade de argumentar relativamente às conjecturas seguidas e às abandonadas". Salientou também que o método de ensino, em que os alunos participam activamente no desenvolvimento da sua aprendizagem, faz com que "haja mais entusiasmo e uma maior vontade de ir para as aulas".

Calculadora gráfica

Nesta tarefa foram vários os contributos da utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento da investigação. Em particular, Raul no seu relatório tem evidências relativamente à vantagem da utilização da calculadora gráfica na verificação através da alteração da janela de visualização, de que as duas figuras dadas no enunciado da tarefa eram possíveis representações gráficas da mesma função.

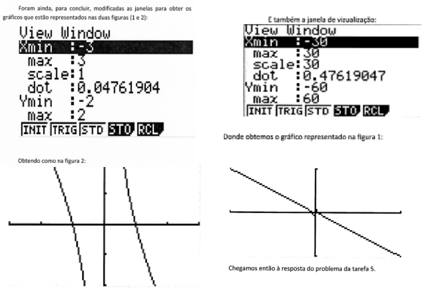


Figura 3. Excerto relatório de Raul

Sónia referiu também que para confirmar que a função $f(x) = -2x + 2/x$ tinha uma assimptota vertical de equação $x = 0$ recorreu ao *menu table* da calculadora gráfica.

Esta função confirmada pela opção *table* tem assímptota vertical $x = 0$.

x	Y1
-2	3,8333
-1	1,6666
0	ERROR
1	-1,6666
2	-3,8333

Figura 4. Excerto do relatório de Sónia

A calculadora gráfica ajudou os alunos a testarem e a validarem as suas conjecturas, desenvolvendo deste modo a capacidade de argumentação matemática nos alunos. Nas suas reflexões, os alunos consideraram que a calculadora gráfica foi um instrumento essencial e indispensável no desenvolvimento da investigação em grupo. Por exemplo, Célia considera que a calculadora gráfica permitiu testar "se determinada conjectura formulada era válida ou se deveria ser refutada". Salientou também que é importante que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar com a calculadora gráfica para que não sejam tiradas conclusões erradas devido às limitações deste instrumento tecnológico. Afonso é da opinião de Célia relativamente à calculadora gráfica acrescentando que "pode ser um instrumento muito útil quando utilizado correctamente, com a janela de visualização mais conveniente". Rafaela destacou também a importância da utilização dos instrumentos tecnológicos nas aulas de matemática relativamente à possibilidade de visualização gráfica das funções e por se tratar de um suporte para o debate de ideias, ou seja, para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente nos alunos. Esta aluna refere que "as novas tecnologias são boas companheiras da matemática".

Conclusão

Os alunos ao utilizarem as potencialidades da calculadora gráfica, progressivamente foram adquirindo uma atitude mais crítica e reflexiva em relação à tarefa de investigação proposta, tentando encontrar possíveis regularidades na descoberta da solução e na formulação da respectiva conclusão. Este facto é destacado por Gracias e Borba (2000) que consideram que quando se implementam tarefas de investigação, na sala de aula, em que se potencie o uso da calculadora gráfica, criam-se oportunidades de aprendizagem, no que se refere à discussão, exploração e compreensão de conceitos matemáticos.

A calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral, na medida em que ajudou os alunos na compreensão da tarefa, assim como na validação ou rejeição das conjecturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática. É de salientar, a importância deste instrumento, do ponto de vista dos alunos, para o sucesso da investigação, pois foi a partir da sua utilização que foi possível construir e visualizar os gráficos de diferentes funções e através da sua análise, formular conjecturas e tentativas de prova. Outros estudos apontam no mesmo sentido ao revelarem que o processo de elaboração de hipóteses, teste de conjecturas, refutação e generalização, é possível ser efectuado de forma mais rápida e eficiente devido às potencialidades da calculadora gráfica na produção de vários gráficos, estimulando assim, a investigação matemática (Gracias & Borba, 2000).

Neste estudo, foi notório que a calculadora gráfica contribuiu para a realização da tarefa, por os alunos terem a possibilidade, de mais rapidamente, visualizar os vários gráficos, das diferentes funções. Esta opinião é reiterada por Demana e Waits (1992), pois consideram que a calculadora gráfica é um instrumento que pode ajudar os alunos numa melhor compreensão de alguns conceitos devido à possibilidade de visualização enquanto fazem matemática. Assim, verificou-se que a calculadora gráfica desempenhou o papel de instrumento facilitador da aprendizagem e o de mediador no processo de investigação, fundamental na construção de novos conceitos matemáticos e estimulando os alunos a desenvolver o seu próprio conhecimento matemático.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In A. M. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres, J. Duarte & T. O. Duarte, *Actas XVI SIEM* (pp. 13-43). Évora: APM.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Burril, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: Research findings and implications for classroom practice.* Michigan: Michigan State University.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), Second handbook of mathematics teaching and learning (pp.669-705). New York, NY: Macmillian.

Cunningham, S., & Zimmermann, W. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning Mathematics (pp.1-8). USA: Mathematical Association of America.

Demana, F., & Waits, B. K. (1992). A computer for all students. The Mathematics Teacher, 85 (2), 94-95.

Domingos, A. (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino aprendizagem. In A. P. Canavarro (Org.), 20 anos de temas na E e M (pp.126-136). Lisboa: APM.

Douek, N., & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In Neil A. Pateman, Barbara J. Dougherty & Joseph T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA,* (Vol. 2, pp.341-348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Dunham, P., & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher, 87* (6), 440-445.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In Thomas A. Romberg, Elizabeth Fennema & Thomas P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp.101-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fonseca, H. I. C. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. Lisboa: APM.

Gracias, T. S., & Borba, M. C. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações da calculadoras gráficas. *Educação Matemática, 56*, 35-39.

Hirschhorn, D., & Thompson, D. (1996). Technology and reasoning in algebra and geometry. *The mathematics teacher, 89* (2), 138-142.

Kaber, L., & Longhart, K. (1995). Using graphing calculators to teach high school mathematics. In David Thomas (Ed.), *Scientific Visualization in Mathematics and Science Teaching* (pp.19-25). Charlottesville, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of Mathematics: The Case of graphic representations of functions. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.271-288). Reston: NCTM.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research 60* (1), 1-64.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática. Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Quesada, A. R. (1996). On the impact of first generation of graphing calculators on the mathematics curriculum at the secondary level. In P. Gomez & B. Waits (Eds.), *Roles of calculators in the classroom* (pp.143-164). New York: State University of New York Press.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Lisboa: Universidade Aberta.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vincent, J., Chick, H., & McCrae, B. (2005). Argumentation profile charts as tools for analyzing students´ argumentations. In Helen L. Chick & Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 4* (pp.281-288). Melbourne: PME.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos. A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática, 100*, 85-88.