Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Fomento de las habilidades de modelización a través de problemas de Fermi

Development of modelling skills through Fermi problems

Alumno: María Sanz Ruiz

Especialidad: Matemáticas

Director: Daniel Sadornil Renedo

Curso académico: 2021/2022

Fecha: Junio 2022

Agradecimientos

Un año después me enfrento a la misma página en blanco, intentando reflejar lo imposible que habría sido llegar hasta aquí sin algunas personas que siguen siendo muy importantes para mí.

En primer lugar, este trabajo no habría sido posible sin Dani. Gracias no sólo por enviarme tus comentarios, sino también por hacerme reír con ellos. Gracias por los libros, las charlas, y por tener la puerta del despacho siempre abierta. Por recordarme que tengo que trabajar, y también que tengo que descansar. Muchas gracias, en definitiva, por pasar otro año más conmigo.

Además, este trabajo no habría sido posible sin el apoyo de mis padres, que siempre creen que voy a conseguir cualquier cosa que me proponga. Gracias por dejar que os demuestre que tenéis razón en todas las ocasiones.

Por último, este trabajo no habría sido posible sin todos los demás amigos y familiares que me habéis acompañado también durante este año, como sabía que haríais. No habría llegado aquí sin vosotros, que seguís ayudándome a comprender la vida y a burlarme de los números.

Gracias.

Resumen

La competencia matemática incluye varias destrezas relacionadas con habilidades de resolución de problemas contextualizados. En este documento se presenta un estudio del uso de problemas de Fermi como método para fomentar el desarrollo de estas habilidades, así como las estrategias de resolución y dificultades encontradas durante una experiencia de aula realizada con alumnos sobre este temario.

Palabras clave: Problemas de Fermi, Modelización, Matemáticas, Educación

Abstract

Mathematical Competence comprises several skills related to contextualized problem solving. In this document I submit a study on the use of Fermi problems as a method to improve the development of these skills, as well as the problem-solving strategies and difficulties found during a classroom experience done with students on this content.

Key words: Fermi problems, Modelling, Mathematics, Education

Contenido

1. Introducción

Hoy en día, es bastante común encontrar a estudiantes de Secundaria desanimados con la asignatura de Matemáticas. Esto se puede vincular, en gran parte, al hecho de que el enfoque que muchos de ellos tienen hacia la asignatura es erróneo: por lo general, esperan a que el profesor resuelva los problemas y ejercicios que les plantea para, posteriormente, memorizarlos y reproducirlos en el examen.

Esta manera de aprender resulta, a largo plazo, abrumadora. Las Matemáticas se convierten en una materia desagradable en la que no importa cuánto se esfuerce un alumno por memorizar lo que se ha visto en clase, porque siempre habrá algo sobre lo que no ha reflexionado y que no entiende. Además, copiar mecánicamente los ejercicios sin pensar sobre ellos tiene como resultado el abandono de varios procesos importantes relacionados con la actividad matemática. El alumno que se estudia los problemas de memoria pierde la oportunidad de llevar a cabo y aprender procedimientos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático. En definitiva, pierde la oportunidad de participar activamente en su propio aprendizaje.

Algunas de las capacidades asociadas a una buena competencia matemática son aquellas que denotan autonomía en la resolución de problemas. Estas actividades en concreto van ligadas a una visión de las matemáticas bastante aplicada. Durante las clases de la asignatura es bastante común escuchar quejas por parte de los alumnos, que a menudo no entienden "para qué sirve esto". Es por ello importante proponerles actividades que fomenten la contextualización de las matemáticas, para que puedan comprobar que se trata de una asignatura útil e incluso, a veces, hasta divertida.

Con las actividades que se proponen en este trabajo, en concreto la resolución de problemas de Fermi, se pretende fomentar la capacidad de los alumnos para modelizar. Se estudiarán en el presente documento los distintos procesos que tienen lugar asociados a la actividad de modelización, así como las estrategias que utilizan los alumnos para llevarla a cabo.

Otra destreza asociada a la competencia matemática que cobrará importancia durante el presente documento es la estimación, íntimamente ligada al sentido numérico. El alumno debe ser capaz de distinguir entre cantidades, siendo crítico con la magnitud de las mismas. Esto puede resultar especialmente complicado cuando se trabaja con números especialmente grandes o pequeños: por ello, se estudiará el dominio que tienen los alumnos de estas cifras y algunas estrategias para trabajar en su reconocimiento.

La competencia matemática, así como todas las habilidades asociadas a ella (de las cuales se hablará en detalle durante el marco teórico del presente documento), sólo se pueden desarrollar mediante la práctica. Por esto es necesario que los problemas que se plantean a los alumnos les fuercen a hacer uso de las destrezas matemáticas. En este trabajo se propone trabajar las habilidades mencionadas anteriormente a través de los problemas de Fermi. A lo largo de este trabajo se estudiará cómo, mediante esta metodología, es posible ayudar a los alumnos a desarrollar no sólo sus capacidades matemáticas, sino también una actitud más saludable hacia la materia. Para corroborar estas afirmaciones acerca de la utilidad de la metodología se llevará a cabo una experiencia de aula (detallada en el capítulo 4 de este trabajo) en la que se tratarán contenidos relacionados con los problemas de Fermi con los alumnos, y se estudiarán sus estrategias y dificultades a la hora de resolverlos, así como el aprendizaje que tenga lugar durante la misma experiencia.

En definitiva, a lo largo de este documento se estudiará cómo el gran potencial de los problemas de Fermi para desarrollar la competencia matemática del alumnado hace de ellos el objeto idóneo de una investigación enfocada a la pedagogía, como la que se presenta en este propio Trabajo de Fin de Máster.

2. Objetivos y preguntas de investigación

El objetivo principal de este trabajo es el desarrollo por parte del alumnado de estrategias de modelización a través de lo que se conoce como problemas de Fermi. Además de este y por el mismo medio se pretende alcanzar la consecución de los siguientes fines:

- Favorecer la concepción y el uso de estrategias de resolución de problemas matemáticos.
- Estimular el desarrollo del sentido numérico y, más en general, del sentido crítico a la hora de reconocer distintas cantidades.
- Reconocer y potenciar las competencias del alumnado a la hora de realizar operaciones matemáticas.
- Motivar una actitud más abierta al reconocimiento de la importancia de las matemáticas y a su uso cotidiano.
- Impulsar el conocimiento de técnicas de modelización matemática.

Enfocadas a la consecución de estos objetivos se plantean las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué estrategias usan los alumnos a la hora de modelizar situaciones de la vida cotidiana?
- ¿Son capaces los alumnos de distinguir entre diversas cantidades cuando estas son grandes?
- ¿Los alumnos son competentes a la hora de hacer estimaciones? ¿Qué técnicas conocen para ello?
- ¿Son los problemas de Fermi una herramienta eficaz a la hora de contextualizar las matemáticas?

A lo largo de este documento se tratará de dar respuesta a estas cuestiones.

3. Marco teórico

3.1. Competencias

Durante los últimos años, desde diversos organismos se ha insistido en la necesidad de que todos los ciudadanos hayan adquirido una serie de *conocimientos, capacidades y actitudes* que les permitan desarrollarse plenamente de manera *personal, social y profesional* para conseguir no sólo adaptarse a su entorno en una sociedad cambiante, sino favorecer el desarrollo de dicha sociedad en cuanto a varios factores (Ministerio de Educación y Formación Profesional – Gobierno de España, 2018).

La adquisición de estas habilidades se trata de un proceso que tiene lugar a lo largo de toda la vida. Sin embargo, este desarrollo está fuertemente ligado a la educación: gran parte de las competencias más esenciales a la hora de desenvolverse en la vida habrán de ser adquiridas a lo largo de los años de escolarización.

En el ámbito internacional, a lo largo de varios Consejos Europeos (European Parliament, 2000; CORDIS, 2003) desde la Unión Europea se ha ido definiendo el concepto de competencia e integrándolo como parte del currículum a través de diversos programas educativos y recomendaciones. Por otra parte, la OCDE ha elaborado el Programa para la Evaluación Internacional para Estudiantes (PISA), a través del cual se realiza periódicamente un estudio del nivel competencial de los alumnos.

A nivel nacional, en el Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007), por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, se introdujeron las competencias clave en el currículo. Estas habían de ser adquiridas por medio del trabajo en las distintas materias y otras experiencias derivadas de estudiar en el propio centro (actividades complementarias, acción tutorial...). Las legislaciones posteriores a esta (entre ellas la que se encuentra vigente durante este curso) han mantenido este enfoque competencial.

De acuerdo con lo especificado en la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), que es la ley en vigor durante el curso presente, hay siete competencias clave cuya asimilación es fundamental para el desarrollo de los alumnos. Incluidas en estas se encuentran, por ejemplo, la competencia matemática, la social y cívica, el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor... (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015).

A cada competencia van asociados una serie de descriptores operativos que identifican cuáles son exactamente los conocimientos, capacidades y actitudes que el alumno tiene que asimilar para poder considerar que la ha alcanzado. En particular, la adquisición de la competencia matemática implica la capacidad de describir, interpretar, predecir y razonar distintos fenómenos apoyándose en las matemáticas. Además, conlleva el manejo de nociones como la de cantidad, espacio, forma o relación.

En la Recomendación 2006/962/EC sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, el Parlamento y Consejo Europeos definen la competencia matemática en torno al razonamiento, la resolución de problemas en situaciones cotidianas, el pensamiento matemático y el uso de los diferentes sistemas de representación (Diario Oficial de la Unión Europea, 2006). Desde la OCDE, la competencia matemática se basa en formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos (OCDE, 2021). Mogen Niss (1989) identifica varias habilidades propias de esta competencia, entre las que se incluyen la capacidad de comunicación, matematización, diseño de estrategias para resolver problemas o utilización de estrategias matemáticas.

La capacidad de modelizar, el sentido numérico o las habilidades de estimación están así íntimamente relacionadas con la competencia matemática. Por lo tanto, es fundamental asegurar que tenga lugar su adquisición por parte del alumnado.

Así lo recoge la LOMCE. Por lo tanto, durante este curso, tiene sentido el desarrollo de experiencias docentes como la que se presenta en este trabajo, destinadas a favorecer la adquisición de competencias. Sin embargo, durante los cursos venideros se espera que entre en vigor la Ley Orgánica de Modificación de la LOE (LOMLOE). En el Boletín Oficial del Estado correspondiente al Real Decreto 217/2022, del 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, se especifica que, durante los cursos en los que esta ley esté en vigencia, se mantendrá el enfoque competencial que ha estado presente en los cursos anteriores. En este documento se hace hincapié en que, una vez más, la formación integral del alumnado debe necesariamente centrarse en el desarrollo de las competencias. En concreto, se mencionan varios descriptores operativos asociados a la competencia matemática (y en ciencia, tecnología e ingeniería) similares a los mencionados anteriormente, basados en el razonamiento, el análisis crítico o el uso de distintas estrategias de resolución de problemas, entre otras destrezas. En definitiva, el carácter de la ley que estará vigente durante los próximos años favorece que experiencias docentes como la que se plantea en este Trabajo de Fin de Máster vayan a seguir teniendo cabida y relevancia en el futuro inmediato.

3.2. Modelización

La modelización es, según la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática, una relación que se establece entre las matemáticas y el mundo real (Sierra et al, 2011).

No obstante, diferentes autores proponen otras definiciones de modelización, como pueden ser:

- Proceso de resolución de problemas que involucra la matematización de un fenómeno del mundo real. Durante este proceso se elabora un modelo matemático para describir, estudiar o predecir el comportamiento y las propiedades del fenómeno estudiado (Albarracín y Ärlebäck, 2019)
- Elaboración de un sistema conceptual a partir de una serie de conceptos que describen o explican los objetos matemáticos relevantes en el estudio de un fenómeno (Harel y Lesh, 2003)
- Formulación de un problema real en términos matemáticos, resolución de este (si es posible) e interpretación de los resultados en los términos del problema y de la situación estudiados (Gómez, 2000)
- “La modelización es el arte de aplicar las matemáticas en la vida real” (Niss, 1989).

Se puede proporcionar una nueva definición del concepto de modelización que incorpora las ideas expuestas en las anteriores: proceso involucrado en la resolución de problemas que consiste en la expresión de fenómenos de la vida real en términos matemáticos, para posteriormente estudiarlos y, a través de operaciones abstractas, obtener conclusiones acerca del contexto que se pretende analizar. Esta última definición es la que se utilizará durante el resto del presente documento cuando se haga referencia a este proceso.

En lo referente a la educación matemática, la modelización constituye una destreza fundamental para el desarrollo del alumnado. Saber modelizar es, según la OCDE, una de las principales características de un estudiante competente en matemáticas (Antequera Guerra, 2012; OCDE, 2021).

La modelización matemática es una competencia que, a su vez, permite profundizar en el desarrollo de los estudiantes en cuanto a:

- Aprendizaje de conceptos matemáticos.
- Relación de las matemáticas con otras áreas de conocimiento.
- Formulación y resolución de problemas.

Es decir, no sólo se trata de una destreza inherentemente importante, sino que además favorece el desarrollo de otras (Antequera Guerra, 2012).

Tal como indica Ärleback (2009), el proceso de modelización es a menudo concebido como un ciclo en el que una persona parte de un problema de la vida real, lo relaciona con otro del ámbito matemático, y posteriormente vuelve al mundo real para analizar los resultados. Blum y Niss (1991) muestran en el siguiente diagrama cómo se desarrolla este fenómeno (ver figura 1).

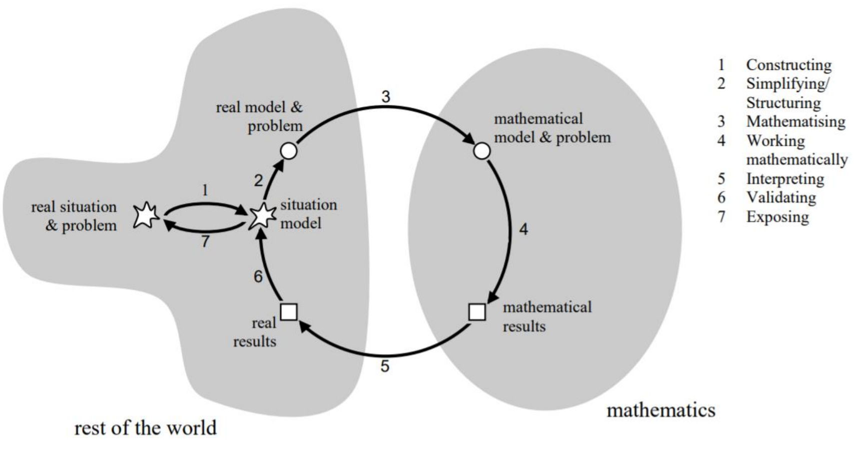


Figura 1: ciclo de modelización de Blum y Niss

Una representación similar a esta, aunque considerablemente simplificada, se puede encontrar en el marco para la prueba de matemáticas del informe PISA 2021 (ver figuras 2 y 3).

Figura 2: ciclo de modelización (OCDE, 2021)

Figura 3: modelización como base de la competencia matemática (OCDE, 2021)

A menudo, las evaluaciones PISA de la competencia matemática se llevan a cabo a través de la resolución de diferentes cuestiones contextualizados en la vida real. Esta metodología centrada en la resolución de problemas, de la cual se hablará posteriormente, se denomina matematización, y consta (de forma similar a la modelización) de tres partes: matematización horizontal, vertical y verificación (Rico, 2006).

El estudio del problema en el ámbito real y su posterior traducción al mundo matemático (o matematización horizontal) incluye, según Rico (2006), procesos como pueden ser los siguientes:

- Identificar las matemáticas relevantes en el problema.
- Representar la situación de distintas formas.
- Comprender la relación entre los distintos lenguajes de representación.
- Encontrar regularidades, relaciones o patrones.
- Identificar isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Representar el problema mediante un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez que se han llevado a cabo todas estas actividades y se ha conseguido traducir el problema a una expresión matemática, tiene lugar lo que se conoce como matematización vertical: se utilizan conceptos y destrezas del ámbito matemático para solucionar el problema. Algunas de las acciones involucradas en la matematización vertical son las siguientes:

- Utilizar diferentes representaciones del modelo matemático.
- Utilizar diferentes lenguajes: simbólico, formal, técnico... Así como operaciones asociadas a ellos.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos.
- Combinar e integrar los modelos matemáticos.
- Argumentar y generalizar.

Posteriormente a estas dos fases, existe una tercera de validación y reflexión similar a la vuelta al ámbito real descrita en el ciclo de modelización. Algunos de los procesos involucrados en esta fase son los siguientes:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites.

El desempeño del alumno en cada una de las actividades que se acaban de enumerar constituye una muestra de sus capacidades y habilidades ligadas a la competencia matemática. En particular, estas tres fases son las que integran el proceso de modelización que se ha mencionado anteriormente, descrito por Blum y Niss en su gráfico (figura 1).

Sin embargo, estudios posteriores acerca del proceso de modelización, como los realizados por Ärlebäck (2009) o Albarracín (2016), han demostrado que su complejidad es notoriamente superior a la descrita con anterioridad. No se trata de trasladar un problema al ámbito matemático para luego estudiar los resultados en la realidad: más bien, se va saltando entre un entorno y otro hasta que se obtiene una solución satisfactoria.

En la primera de las dos figuras siguientes se puede observar una reinterpretación del ciclo de modelización elaborado por Blum y Niss. En esta ocasión se detallan los saltos que alguien va dando entre las diferentes fases (problema real, modelo, modelo matemático, operaciones matemáticas...) de la resolución, clarificando que la modelización no es en absoluto un proceso lineal. Al intentar resolver un problema de esta forma, se entra y se sale de cada fase cuantas veces sea necesario. En la figura 5 se presenta un estudio similar: se detalla cómo un grupo de alumnos ha ido pasando por las diferentes fases (que aparecen en colores distintos) entremezclándolas, en vez de empezar y terminar cada una de manera secuencial.

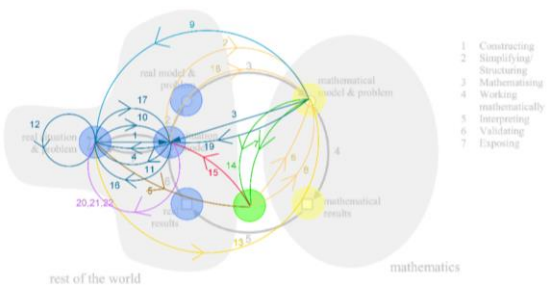


Figura 4: proceso de modelización (Albarracín, 2016)

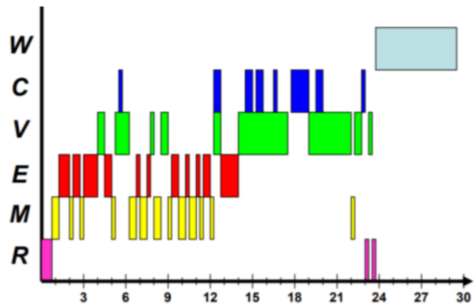


Figura 5: ejemplo del proceso de modelización (Ärkebäck, 2009)

Alsina (2007) señala que, en un contexto educativo, el objetivo de emplear la modelización para resolver problemas tiene que ser trabajar las grandes ideas matemáticas subyacentes en ellos: "cambio, crecimiento, espacio, forma, azar, dependencia, relaciones, razonamiento cuantitativo...". En este contexto, hace hincapié en la importancia de elegir problemas adecuados para fomentar esta competencia; problemas que los alumnos puedan identificar con la realidad, cuya formulación trascienda la dimensión pedagógica y permita a los alumnos apreciar la importancia de las matemáticas como herramienta para resolverlos.

Por lo mencionado en los párrafos anteriores, una opción posible para ello pueden ser los problemas de Fermi, que se tratarán en una sección posterior. Estos problemas tienen su origen en las cuestiones que Enrico Fermi planteaba a sus alumnos para que utilizasen habilidades de pensamiento deductivo y estimación (Albarracín, 2017); de esta última se hablará a continuación.

3.3. Sentido numérico y estimación

Además de la modelización, una de las destrezas que caracterizan la competencia matemática es el sentido numérico. Tal y como señalan Segovia y Martínez (2009), los alumnos que desarrollan esta destreza comprenden bien el significado de los números, saben relacionarlos, entienden cómo operar con ellos y son capaces de reconocer y comparar magnitudes, ya sea en relación de unas con otras o utilizando referentes propios.

Los niños a edades muy tempranas empiezan a conocer los números de forma seriada, es decir: en orden, pero sin asimilar exactamente su significado. Posteriormente, en la etapa de Educación Infantil y al inicio de la Educación Primaria relacionan los números con su significado y empiezan a conocer las operaciones básicas que se pueden realizar con ellos. Resnick, Newcombe y Shipley (2017) estudian las distintas maneras de representar mentalmente grandes cantidades, y afirman que es común utilizar una línea mental en la que se van organizando los números. Tanto niños como adultos tienen dificultades para situar cantidades muy grandes (mayores que 100.000) en dicha línea.

Los términos que hacen referencia a algunas de estas grandes magnitudes (millón, billón...) son conocidos, pero a medida que van creciendo hay dificultades a la hora de comprender realmente su tamaño y/o cantidad y establecer relaciones entre sí y con otros números. Esto responde a una cuestión evolutiva: históricamente no se ha tenido mucha necesidad de comprender el significado de grandes cantidades. Sin embargo, hoy en día es importante saber hacer estas distinciones. Por ejemplo: al hablar del presupuesto de un país o del gasto social no se perciben las magnitudes detrás de las cifras: simplemente se considera “mucho dinero”. El siguiente ejemplo sirve para entender mejor la diferencia entre millones y billones: un millón de segundos son 11 días y medio; sin embargo, un billón de segundos constituye, aproximadamente, 31710 años. Se trata de cifras tan descomunales que, a menudo, los resultados asociados a ellas sobrepasan a la intuición.

A la hora de enfrentarse a estas cantidades, Dvorsky (2014) menciona algunas estrategias que ayudan a comprenderlas mejor. El cambio de unidades, la agrupación de los elementos a contar o las analogías relacionadas con el tiempo son algunas de las maneras más comunes de visualizar magnitudes inabarcables.

En ciertos contextos, especialmente cuando se trabaja con magnitudes tan grandes, no es fácil (ni, a veces, interesante) obtener el número exacto de una cierta medida o cantidad. Por ello cobra importancia la capacidad de hacer estimaciones. Existen varias definiciones del término “estimación”: según la RAE, es el “aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo”. Otros autores concretan que la estimación se trata de un proceso en el que se evalúa una cierta cantidad (ya sea una medida o el resultado de una operación) mediante algún tipo de razonamiento o conjetura que excluye instrumentos de medida. Algunas características de la estimación son las siguientes: se hace con rapidez, a menudo mentalmente, basándose en alguna información o referencia y tiene como resultado valores lo más sencillos posibles, si bien pueden ser inexactos (Segovia Alex y Castro Martínez, 2009; Pizarro, Gorgorió y Albarracín, 2016).

Algunos autores, como Pizarro, Gorgorió y Albarracín (2016) distinguen tres tipos de estimación:

- Visual de numerosidades: se trata de estimar el número de elementos distribuidos en cierta área sin tiempo para contar cuántos hay realmente.
- Con referentes: siempre involucra cálculo mental o estimaciones de cálculo. Se realiza con ayuda de referencias (propias o auxiliares) y puede involucrar procesos de modelización si la realidad que se está estudiando alcanza cierta complejidad.
- Medición: se puede llevar a cabo de distintas formas: con instrumentos destinados a ello (metro, cronómetro...), que representen unidades estandarizadas (cartulina que mide exactamente un metro cuadrado) o no (utilizar un lapicero para medir longitudes). También puede realizarse indirectamente: por ejemplo, multiplicando longitudes conocidas para hallar una superficie o resolviendo problemas de trigonometría.

Las primeras investigaciones acerca de cómo se hacen las estimaciones datan de 1890 y están enmarcadas en el ámbito de la Psicología. Es a finales del siglo XX cuando este tema suscita interés en el campo de la educación matemática.

(Civil, 2020). Hoy en día la capacidad de hacer estimaciones está reconocida como una competencia esencial no sólo desde el punto de vista de la educación obligatoria, sino también para evitar el anumerismo y lograr que los alumnos sean capaces de desenvolverse en el mundo real (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015). La estimación es una actividad que se lleva a cabo a diario, y es necesario estar preparados para desempeñarla. (Shakerin, 2006; García Navarro, 2013).

Sin embargo, el propio Shakerin (2006) pone de manifiesto en sus investigaciones que la capacidad de estimación de los alumnos es insuficiente. En su trabajo, este autor estudia las dificultades que los integrantes de un grupo de estudiantes de ingeniería atraviesan para llevar a cabo algunas tareas básicas relacionadas con el tema. Se trata de ejercicios a los que alumnos de Secundaria deberían ser capaces de dar respuesta: "¿Cuántos libros hay en la biblioteca de la universidad?", "¿Cuánto pesan dichos libros?". El autor del documento concluye que será necesario trabajar mucho para rectificar la deficiencia actual en las habilidades estimativas del alumnado.

Varios autores, entre los que cabe destacar a los anteriormente citados Ärleback o Albarracín, han estudiado la eficacia de los problemas de Fermi fomentar la capacidad de los estudiantes para hacer estimaciones, de los cuales se hablará posteriormente en la sección 3.5.

3.4. Resolución de problemas

Hoy en día, la resolución de problemas es un método ampliamente utilizado en la enseñanza de las Matemáticas. Esto se debe a las numerosas ventajas que ofrece: favorece el aprendizaje activo y ayuda a transmitir los procesos de pensamiento involucrados no solamente en áreas específicas de la materia, sino también en la vida real.

Con el fin de hacer de ellos una herramienta para el aprendizaje real y efectivo, Antequera (2012) propone una serie de requisitos que es necesario que cumplan los problemas a plantear. Se exponen a continuación algunos de ellos:

- Deben suponer un desafío y ser entendidos como tal.
- Han de ser tareas originales, no rutinarias.

- Es necesario que el alumno esté obligado a ser crítico y reflexionar acerca de la solución.
- Deben estar diseñados para favorecer que los estudiantes comprendan e interpreten la información que se les da, identificando los elementos más relevantes.
- Han de estar conectados a la vida real, proporcionando contexto.

Es importante resaltar que no todas las actividades que se proponen a los alumnos en clase de matemáticas son problemas. Muchas veces se hacen ejercicios con el fin de asentar conocimientos procedimentales: la resolución de los mismos es, a menudo, completamente algorítmica. Una vez que se han hecho varios ejemplos, los ejercicios no suponen un desafío intelectual para los estudiantes, sino que se convierten en algo rutinario. Sin embargo, los problemas no tienen estas características: para solucionarlos, el alumno debe reflexionar con profundidad acerca de lo que está haciendo. Al estudiante se le proporcionan unos datos y se le plantea una cuestión: a partir de ahí, debe ser él mismo quien decide cómo manipular los datos para dar respuesta a la pregunta.

De esta forma, la resolución de un problema implica necesariamente la creación de un modelo matemático. Es aquí donde entran en juego las tres fases de la modelización o matematización descritas en la sección 3.2: la correspondiente al ámbito real (matematización horizontal), al matemático (matematización vertical) y a la revisión del problema desde el ámbito real (verificación). Como se ha mencionado entonces, lo más común es que el alumno vaya saltando entre estos ámbitos a la hora de resolver un problema.

Otros autores, sin embargo, estudian los procesos de resolución de problemas y los dividen de otra manera, atendiendo a otros criterios. Se destaca a continuación el modelo de Polya (1965), que distingue las siguientes cuatro fases:

- Comprensión del problema: el estudiante no solo debe comprender la cuestión, sino también desear resolverla. Para ello, es necesario elegir muy bien qué problemas se plantean: no pueden ser demasiado difíciles ni demasiado fáciles, y deben estar expuestos de manera natural e interesante. Es en esta fase cuando el alumno debe identificar elementos importantes en la resolución del problema.

- Concepción de un plan para solucionarlo: se trata de identificar qué cálculos, razonamientos o construcciones se van a llevar a cabo para resolver el problema. Lo más importante es concebir la idea de un plan: esta idea puede ser fruto de una serie de ensayos más o menos infructuosos, tomando forma poco a poco, o puede ser una idea que el alumno tenga impulsado por el profesor. Aunque el docente puede resultar de ayuda, para favorecer el aprendizaje es indispensable que no se imponga en ningún momento al alumno. A la hora de concebir este plan de resolución, hay varias cuestiones que pueden ayudar al estudiante: "¿Conoces algún problema relacionado?", "¿Te resulta familiar?", etc. Para llevar a cabo con éxito esta fase es necesario tener conocimientos previos y buenos hábitos de pensamiento.
- Ejecución de dicho plan: es esencial que el alumno vaya verificando no solo la correcta realización de cada paso, sino también que dicho paso es el correcto y tiene sentido.
- Visión retrospectiva del problema: es necesario transmitir a los estudiantes que ningún problema puede considerarse terminado del todo: siempre queda algo por hacer, ya sea mejorando la solución o la comprensión de la misma.

De todo lo anterior se deduce que el alumno juega un importante papel en la resolución de problemas. Esto no solamente se debe a sus habilidades para modelizar y, más en general, a su competencia matemática. Un importante factor es el estado psicológico del alumno. A menudo los estudiantes rechazan los problemas sin enfrentarse a ellos, alegando que son muy difíciles y haciendo gala de una extraña aversión a leer textos durante las clases de matemáticas. A pesar de que en la mayoría de los casos sí que tienen los conocimientos y capacidades necesarios para llegar a la solución, los alumnos son incapaces de alcanzarla debido a que su propia predisposición mental constituye un obstáculo insalvable. Por este motivo, los problemas deben ser algo más que una herramienta para desarrollar la competencia matemática: es necesario que contribuyan a que el alumno tenga más confianza en sí mismo y en sus conocimientos y habilidades.

Lo más natural a la hora de enfrentarse a un problema matemático es que los alumnos se bloqueen en alguna de las fases (ya sean las del proceso de modelización/matematización, o las descritas por Polya). Para ello, Groves y Stacey (1999) proponen una serie de consejos para que el alumno pueda superar los posibles obstáculos cognitivos y avanzar en la resolución. Estos consejos incluyen:

- Leer atentamente el problema, tratando de comprenderlo
- Escribir acerca de la cuestión
- Hacer un dibujo de la situación, si es posible
- Trabajar de manera sistemática
- Utilizar alguna herramienta que resulte de ayuda: ya sea un problema similar resuelto anteriormente o un concepto matemático, por ejemplo.
- Buscar y explotar regularidades
- Hacer uso del ensayo y error: esto resulta importante especialmente a nivel psicológico. Lo más común ante un bloqueo es quedarse sin hacer nada, pero de esta forma el alumno sentirá que está esforzándose de alguna forma en resolver el problema, lo cual aumentará sus posibilidades de lograrlo.
- Registrar por escrito lo que se está haciendo: útil no solo para aclararse con las ideas propias, sino también de cara a problemas futuros que sean parecidos o que estén relacionados.
- Explicar lo que se hace: no solo ayuda a poner en orden las ideas mientras se está resolviendo una cuestión, sino que también resulta útil para asentar lo aprendido una vez que se ha conseguido alcanzar la solución.

Es importante destacar que todos los procedimientos descritos a lo largo de este apartado (tanto las actividades correspondientes a la resolución de problemas como las asociadas a la superación de obstáculos cognitivos) constituyen ejemplos de actitudes que denotan competencia matemática. En otras palabras, trabajar en la resolución de problemas es una excelente forma de lograr que el alumno desarrolle habilidades involucradas con esta competencia. En este trabajo se pretende estudiar cómo los problemas de Fermi en particular constituyen una herramienta muy útil para la adquisición de habilidades matemáticas.

3.5. Problemas de Fermi

Enrico Fermi (1901-1954) fue un importante físico del siglo XX. Nacido en Italia y exiliado más tarde a los Estados Unidos, realizó grandes contribuciones en el ámbito de la física nuclear. Es destacable asimismo la labor como docente que llevó a cabo durante la última etapa de su vida. Era precisamente en esta época cuando disfrutaba planteando problemas poco habituales a sus alumnos, con el fin de estimular su inteligencia y su espíritu crítico (García Navarro, 2013).

¿Cuántos afinadores de pianos hay en Chicago? ¿Cuántas veces late el corazón de un hombre a lo largo de su vida? Estos son ejemplos de cuestiones que actualmente reciben el nombre de problemas de Fermi. Se trata de problemas abiertos en los que es necesario hacer estimaciones para suplir carencias de datos concretos. A menudo involucran el manejo de cantidades no definidas con precisión, y por ello requieren el uso de la modelización para hallar una solución. El resultado obtenido no será exacto, sino simplemente una aproximación, y se considerará correcto si tiene el mismo orden de magnitud que la solución real. Lo más importante a la hora de hacer estos problemas no es la solución final, sino el proceso de pensamiento que se utiliza para llegar a ella (García Navarro, 2013).

Normalmente un problema de Fermi obliga a plantear cuestiones cuya respuesta es necesaria para resolverlo. Por ejemplo: ¿cuántas personas se encuentran sobrevolando los Estados Unidos en este momento? Para averiguarlo, es necesario saber la población de los Estados Unidos o el tiempo que pasa una persona media volando, entre otras cosas. Para plantear estas cuestiones es necesario usar la modelización, y saber qué operaciones se quieren llevar a cabo para resolver el problema original. Una vez identificados los datos necesarios, se aproximan lo mejor posible y se utilizan para solucionar el problema (Weinstein y Adam, 2008; Anderson, 2010).

Un ejemplo clásico de problema de Fermi, propuesto por él mismo, es el de dar respuesta a la siguiente cuestión: ¿cuántos afinadores de piano hay en Chicago? A primera pista puede parecer que faltan datos, así que habrá que usar conocimientos previos, cultura general y estimaciones de algunas cantidades para suplir esta carencia. Se pueden suponer, por ejemplo, los siguientes valores para algunos de los datos involucrados:

- En Chicago hay aproximadamente 9 millones de habitantes.
- En promedio, viven dos personas en cada casa.
- En 1 de cada 20 de estas casas hay un piano que se afina regularmente.
- Cada afinador trabaja durante 8 horas cada día, 5 días cada semana y 50 semanas cada año.

Además, se sabe que:

- Cada piano debe afinarse una vez al año, cosa que no hace el propio pianista.
- Un afinador tarda dos horas en llevar a cabo esta tarea, incluyendo el tiempo de viaje.

Una vez que se han determinado todos estos datos, es necesario hacer cuentas para resolver el problema:

$$\frac{9 \text{ millones de personas}}{2 \text{ personas por casa}} \cdot \frac{1 \text{ piano}}{20 \text{ casas}} \cdot 1 \text{ afinación por piano por año} =$$
$$= 225.000 \text{ afinaciones por año}$$

$$50 \cdot 5 \cdot 8 = 2000 \text{ horas al año trabaja cada afinador}$$

$$\frac{2000 \text{ horas de trabajo}}{2 \text{ horas por afinación}} = 1000 \text{ afinaciones al año realiza cada uno}$$

$$\frac{225.000 \text{ afinaciones por año}}{1000 \text{ afinaciones por año y por afinador}}$$
$$= 225 \text{ afinadores de piano hay en Chicago}$$

De esta manera se concluye que hay, aproximadamente, 225 afinadores de piano en Chicago.

Como se ha comentado, la resolución de problemas de Fermi requiere de habilidades de modelización y estimación. Es por ello que, en el ámbito educativo, los problemas de este tipo resultan útiles para desarrollar dichas habilidades. Albarracín y Gorgorió (2013a) afirman que, mediante el estudio de este tipo de cuestiones, los alumnos pueden aprender que existen muchas aproximaciones posibles para un mismo problema y que los resultados no son tan importantes sino cómo se llega hasta ellos. Asimismo, les permiten comprobar la utilidad de crear modelos que sustituyan a los métodos de cálculo explícitos.

Ärlebäck (2009) argumenta que, gracias a ellos, los estudiantes pueden alcanzar una visión más realista de la actividad matemática: esta no consiste solamente en obtener resultados exactos a través de operaciones predeterminadas. Además, considera que los problemas de Fermi sirven para que los alumnos se den cuenta de que a menudo las limitaciones a la hora de resolver problemas no residen en la falta de datos sino en la incapacidad de usarlos. En este contexto, Albarracín y Gorgorió (2013b) afirman que los alumnos a menudo tienen problemas para incorporar conocimientos adquiridos en su vida cotidiana en la resolución de problemas. Recalcan que los estudiantes están acostumbrados a enunciados artificiales y alejados de la realidad, y que los problemas de Fermi sirven, en este sentido, para proporcionar coherencia y contexto a las matemáticas. Enfatizan además la utilidad de los problemas de Fermi para trabajar la modelización.

Albarracín (2017) expresa además su sorpresa ante el hecho de que los problemas de Fermi apenas sean considerados o empleados en el ámbito educativo. Afirma que están ligados al trabajo competencial, basado en proyectos y en problemas, colaborativo y enfocado a la modelización. Argumenta que sirven para trabajar cantidades inabarcables y dotarlas de significado, ayudando a los alumnos a entender la realidad que les rodea y desenvolverse mejor en ella.

En definitiva, los problemas de Fermi presentan una metodología idónea para trabajar la modelización y fomentar la competencia matemática entre el alumnado. Es interesante, por lo tanto, estudiar cómo se pueden llevar al aula.

4. Propuesta docente

4.1. Preparación y diseño

La siguiente experiencia docente ha sido diseñada junto a mi tutor del TFM para ser realizada con alumnos de Secundaria o Bachillerato durante tres días. Como parte de la actividad está pensada para trabajarse en grupos, ha colaborado asimismo la tutora de prácticas del centro, para elegir con qué clase hacerla y organizar a los alumnos en equipos heterogéneos en cuanto a actitudes y capacidades.

A principios de curso, cuando todavía no había hecho las prácticas y no conocía a mis alumnos, planteé la experiencia de aula para realizarla con chicos de Bachillerato. Sin embargo, al ver las características de los alumnos que tenía mi tutora del centro de prácticas, ambas coincidimos en que los estudiantes del grupo de tercero de la ESO se interesarían más por la actividad y sacarían más partido de la experiencia, así que al final decidí realizarla con ellos. No obstante, esta actividad puede realizarse en cualquier curso de Secundaria o Bachillerato, pues no es necesario dominar muchos de los conceptos que se adquieren en estas etapas. Para resolver problemas de Fermi, como se ha comentado en este trabajo, es necesario saber modelizar y poseer ciertos conocimientos de cultura general. Estas habilidades están más relacionadas con características del alumnado, como pueden ser la madurez o la actitud ante las matemáticas, que con sus conocimientos sobre la asignatura en sí. Así que el cambio de grupo, lejos de suponer un problema, resultó ser todo un acierto.

En la clase con la que se llevó a cabo la experiencia había matriculados 12 alumnos. Se trata de estudiantes que cursan tercero de Secundaria en la modalidad bilingüe con algunas asignaturas en inglés; entre ellas, las Matemáticas. Sin embargo, muchos de ellos han expresado en varias ocasiones su descontento acerca de la dificultad añadida que esto supone, así que esta actividad en concreto se ha llevado a cabo íntegramente en castellano.

Entre los alumnos de esta clase existe un sentimiento generalizado de bloqueo hacia las matemáticas. A pesar de que se esfuerzan en entenderlas, la mayoría admiten abiertamente que a menudo esta asignatura les genera fuertes sentimientos de frustración. Hay unos pocos que sí que se sienten confiados con las matemáticas; alguno incluso busca información por su cuenta fuera de clase para seguir aprendiendo. Por el contrario, hay un porcentaje de alumnos en clase que a la hora de enfrentarse a un problema esperan que el docente les proporcione el procedimiento a seguir punto por punto y afirman que se sienten incapaces de pensar las cosas por sí mismos. Dada la naturaleza de la actividad, era de esperar que estos últimos fueran los que más pudieran beneficiarse de trabajar con Problemas de Fermi.

La experiencia de aula se ha dividido en tres sesiones:

- Primera sesión: presentación del temario
- Segunda sesión: trabajo en grupos
- Tercera sesión: presentación por parte de los alumnos de lo que han estado haciendo y breve cuestionario

La primera sesión consistiría en una breve explicación de quién es Fermi y de qué trataban las actividades que se iban a trabajar. Se harían durante esta clase algunos problemas de este tipo con todo el grupo de alumnos, preguntándoles por su opinión y animándolos a participar. Estas cuestiones incluirían el problema clásico de los afinadores de piano y preguntas relacionadas con grandes concentraciones de gente. Lo importante de esta sesión era que los alumnos se familiarizasen con el contenido y con la manera de proceder a resolver este tipo de problemas.

Durante la segunda sesión, los alumnos trabajarían en grupos. Estos grupos, como se ha mencionado anteriormente, fueron creados con ayuda de la tutora intentando que sean heterogéneos en cuanto a actitudes y capacidades. Además, se procuró que cada estudiante estuviera a gusto con los compañeros con los que les ha tocado trabajar, considerando sus relaciones y afinidades. A cada grupo se le pediría que diera respuesta a dos preguntas: en cada caso, una de ellas era directa, mientras que la otra tenía un carácter más general y abierto, requiriendo de la consideración de más factores. Adicionalmente, en ambos casos se plantearon cuestiones adicionales.

Las preguntas que se plantearon a cada grupo fueron diseñadas junto con el tutor de este Trabajo de Fin de Máster. A la hora de plantearlas se buscó que tratasen temas más o menos conocidos para el alumno, de manera que los estudiantes pudieran hacer estimaciones sobre objetos y cantidades que les resultan familiares. Por ello se pueden encontrar varias cuestiones contextualizadas en el propio instituto o relacionadas con comida. A modo de material de consulta y para encontrar ejemplos de posibles problemas se utilizó el libro “Guesstimation. Solving the world’s problems on the back of a cocktail napkin” (Adam y Weinstein, 2008).

Las preguntas fueron las siguientes:

Grupo 1:

- ¿Cuántas cajas de tizas se usan en el instituto durante un curso entero? De estas, ¿cuántas son de tizas blancas?
- ¿Cuántas gotas de agua se necesitan para llenar un cubo? ¿Y una piscina? ¿Cuántas gotas de agua se necesitan para limpiar el polvo de todos los coches de España?

(Como curiosidad con respecto al segundo punto, cabe mencionar que la actividad se llevó a cabo en fechas coincidentes con la oleada de polvo sahariano que tuvo lugar este año: de ahí la última pregunta).

Grupo 2:

- ¿Cuántos folios usan todos los alumnos del instituto durante un año? De estos folios, ¿cuántos están destinados a exámenes?
- ¿Cuántos granos de arroz hay en 1kg? Si invitamos a paella a todos los que estamos en el instituto, ¿cuántos granos de arroz habrá?

Grupo 3:

- Si llenamos el aula de caramelos, ¿cuántos nos tocan a cada uno? ¿Y a cada alumno del instituto? ¿Podemos dar caramelos a todos los habitantes de Santander?
- ¿Cuántas croquetas se comen en España durante un año? De estas, ¿cuántas son de jamón?

En el grupo de clase hay, además, un chico con Síndrome de Asperger que a menudo se niega a trabajar en grupo. En previsión de que durante el desarrollo de esta actividad prefiriera realizarla solo, se prepararon preguntas para que las resolviera él por su cuenta a modo de medida de atención a la diversidad. Las cuestiones eran las siguientes:

- ¿Cuántas células hay en tu cuerpo? ¿Y en los de todos los alumnos de la clase? (Pista: una célula ocupa aproximadamente 10^{-15} m^3)
- El segundo problema, relacionado con contar dinero dentro de una caja fuerte, al final se utilizó en el cuestionario de control de conocimientos.

Durante la tercera sesión, los alumnos debían salir a la pizarra a explicar brevemente cuáles eran las preguntas que se les habían planteado y cómo habían respondido. Posteriormente, se preparó un cuestionario al que debían dar solución al siguiente problema: "¿Cuántos billetes de cinco euros entran en una caja fuerte de $1m^3$? ¿Y monedas de un euro? Con todas estas monedas, ¿cuántos helados podemos comprarnos?"

Además, junto con este problema, se les pidió que dieran respuesta a varias preguntas relacionadas con su opinión sobre las clases, la dificultad del temario y la utilidad de este.

4.2. Desarrollo

Primer día

Antes de comenzar la experiencia docente, se explicó a los alumnos que durante aquellos días estudiarían con su profesora de prácticas un temario algo fuera de lo común como parte del Trabajo de Fin de Máster que tenía que realizar. Mi tutora de prácticas me instó a hablarles de lo que significaba llevar a cabo esta actividad con ellos para mí y fue todo un acierto: al ver que se trataba de una experiencia tan importante en mi formación, muchos de ellos expresaron el deseo de hacerlo lo mejor posible. De esta manera, la actividad dio comienzo con una excelente predisposición por parte de los estudiantes.

La primera sesión consistió en explicaciones, intercaladas con la participación de los alumnos como grupo de clase. A modo de apoyo para llevar a cabo esta clase se utilizó una presentación en formato PowerPoint (ver anexo) en la que se mostraban algunos de los datos, cifras estimadas y cálculos realizados para resolver problemas.

La exposición empezó con una breve explicación acerca de quién era Enrico Fermi. Se les preguntó si les sonaba de algo el nombre: todos ellos dijeron que no, pero luego fueron capaces de ubicarlo gracias a su participación en el Proyecto Manhattan. A modo de introducción de lo que iban a trabajar, se les contó también que Fermi era un profesor de universidad que planteaba a sus alumnos cierto tipo de cuestiones fuera de lo común. A continuación, se procedió directamente a intentar solucionar el problema de los afinadores de pianos en Chicago.

Cuando se les planteó el problema por primera vez, los estudiantes se sintieron muy desubicados. Se les instó a que dieran respuestas y algunos de ellos hicieron algunas estimaciones, que quedaron apuntadas en la pizarra: los números que mencionaron variaban entre 100 y 10.000 afinadores de pianos. En un momento dado, una niña comenzó a preguntarse cuántas personas habría en Chicago y cuántas de ellas tendrían pianos: al instarles a que siguieran por esa línea de razonamiento, muchos de ellos empezaron a identificar los datos útiles para resolver el problema.

Una vez que tuvieron todos los datos identificados, se les animó a ir haciendo estimaciones para cada uno. Algunos datos (como puede ser la población de Chicago) los tenían más claros: en otros, surgía cierto debate. Por ejemplo, para hallar la proporción de personas que tienen un piano en casa tardaron bastante en llegar a un acuerdo, y se tomaron a ellos mismos como muestra. Al hacer esto no tuvieron en cuenta las diferencias entre ellos mismos y los habitantes de Chicago; no obstante, su decisión final resultó ser bastante cercana a la que se ha mencionado anteriormente al hacer el problema.

Una vez identificados los datos, había que hacer las cuentas con ellos. Aquí algunos tuvieron un poco más de problema en identificar por qué se estaban haciendo ciertos cálculos. Sin embargo, pronto lo entendieron. Al terminar este problema mostraron su asombro ante el hecho de que una cuestión que pareciera tan difícil e imposible de acertar en un principio pudiera resolverse con relativa facilidad utilizando las matemáticas.

A continuación, se les habló de grandes concentraciones de gente, y de cómo hacer cálculos para estimar cuántas personas caben en un sitio determinado. Se utilizaron estas técnicas para resolver la siguiente cuestión, centrada en estudiar dónde cabrían todos los habitantes del mundo si se agrupasen. Se les fueron dando diferentes opciones: Asia, Europa, España o Cantabria. La mayoría de los estudiantes opinaban que todos los habitantes del mundo sí podrían entrar en Europa, pero no en España. Sólo una afirmó que cabrían en España, y la posibilidad de meterlos en Cantabria les parecía descabellada. Sin embargo, al hacer los cálculos, se quedaron sorprendidos no sólo de que Cantabria fuera la respuesta correcta, sino también de lo fácil que les habría resultado poder comprobarlo.

Para terminar la primera sesión, se les planteó un problema contextualizado en su propio instituto: enseñándoles una foto del patio, se les propuso resolver la cuestión de cuánta pizza tendrían que comprar para celebrar una fiesta en la que se llenase el patio de gente. Para resolverlo, comenzaron por calcular el área del patio: en este punto les costó llegar a un consenso, pero al final pudieron juntar la información que les ofrecía la escala de la foto con su propia experiencia para ponerse de acuerdo. Después, hicieron estimaciones de cuántas personas cabrían y cuánta pizza habría que comprar para cada uno. Estimar el número de personas les resultó sencillo, pero para la pizza volvió a haber diferencia de opiniones. Algunos decían que ellos comían perfectamente media pizza; otros argumentaban que con un pedazo para cada uno daba de sobra. Al final se pusieron de acuerdo en dos pedazos, argumentando que alguien que quisiera más pizza siempre podría pedírsela a alguien que fuera a comer menos. Seguidamente, se les pidió que dieran solución al mismo problema, pero teniendo en cuenta la distancia de seguridad impuesta por las restricciones del coronavirus. Este último caso les resultó prácticamente trivial, puesto que la única estimación que debían hacer era la de personas que podían entrar (la que menos les costaba), así que lo tuvieron resuelto enseguida. Es destacable el hecho de que, para encajar a las personas manteniendo la distancia social, dividieron el patio utilizando cuadrados (es decir, como si en el suelo hubiera una cuadrícula) en vez de círculos, lo cual habría sido más eficaz.

Segundo día

Para continuar con la experiencia de aula, se pidió a los alumnos que trabajasen en grupos de cuatro personas para dar respuesta a unas preguntas.

Antes de que diera comienzo la sesión se habló con el alumno con Síndrome de Asperger y se le explicó lo que iban a tener que hacer, dándole la opción de trabajar por su cuenta si así lo prefería. Sin embargo, él mismo dijo que en esta ocasión le gustaría trabajar con sus compañeros, así que no hubo problemas en ese sentido.

A continuación, dio comienzo la sesión propiamente dicha. Se dividió a los alumnos en las agrupaciones que se habían hecho previamente siguiendo criterios de heterogeneidad en cuanto a conocimientos y actitudes. Seguidamente, se proporcionaron a cada grupo dos cuestiones a las que debía dar respuesta. Al principio algunos se quejaron de que las preguntas eran difíciles y de que no sabían muy bien por dónde empezar. Se les animó a que les dieran un par de vueltas, siguiendo razonamientos parecidos a los del día anterior, y a que no se desanimasen. También se les ofreció la posibilidad de pedir ayuda si se trababan. Se les avisó asimismo de que deberían llevar a cabo una exposición de los cálculos que habían hecho y los resultados que habían obtenido al día siguiente.

Grupo 1

Las integrantes de este grupo son cuatro chicas. Una de ellas se desenvuelve muy bien en la asignatura y tiene mucha capacidad de razonamiento, mientras que otra empezó el curso con dificultades, pero poco a poco está empezando a sobreponerse y a mejorar su actitud y sus calificaciones. Las otras dos, sin embargo, están bastante bloqueadas con la asignatura. Tienen por costumbre aprenderse de memoria los procedimientos que se llevan a cabo en clase para resolver problemas, sin detenerse a reflexionar sobre ellos; este método de estudio les está generando muchos problemas a la hora de cursar la asignatura, y se sienten impotentes al ver que, por mucho que se esfuerzan en memorizar, no consiguen aprobar.

A la hora de comenzar a dar respuesta a las cuestiones, estas dos chicas estaban un poco perdidas. Sin embargo, ayudadas por sus compañeras, empezaron a hacer los problemas y pronto estuvieron todas trabajando en conjunto, discutiendo las distintas estimaciones que querían llevar a cabo.

Para la cuestión de las tizas (cuántas cajas se usan en un curso entero y cuántas de estas son de colores), tuvieron bastante facilidad en llevar a cabo las estimaciones relacionadas con el tiempo lectivo; esto era de esperar, pues su propia experiencia como estudiantes resultaba de gran ayuda. Sin embargo, se trabaron algo más en decidir cuánto tiempo tarda en gastarse una tiza: después de hacer algunas mediciones de las tizas de la pizarra utilizando la regla de clase, empezaron a aplicar razonamientos un poco más realistas. Por ejemplo, empezaron a considerar que, en realidad, los pedazos pequeños nunca se usan, así que no se aprovecha la tiza por completo. Finalmente, acabaron por concluir que aproximadamente se gasta una tiza cada dos clases, argumentando que lo más normal es que, si el profesor no termina de utilizarlas, los alumnos juegan con ellas y al final las acaban perdiendo.

También hubo algo de debate dentro del grupo a la hora de estudiar cuántas de estas tizas eran blancas: determinaron que sería más fácil calcular la proporción de tizas de color con respecto al número de tizas totales que se utilizaban, pero no se ponían muy de acuerdo en cuál debía ser dicha proporción. Argumentaban que dependía mucho de cada profesor y que, mientras algunos tenían por costumbre escribir siempre algunas cosas en colores distintos para hacer énfasis en ellas, otros nunca hacían uso de este material durante sus clases. Finalmente se decidieron por hacer una estimación del promedio, de manera análoga al caso de la pizza visto el día anterior.

El problema del agua les resultó más complicado; se les hizo difícil estimar cuántos litros corresponden a una gota de agua o a una piscina. Es posible que esto sea debido a que el contexto de la cuestión se aleja un poco más de su realidad cotidiana; si se compara con el anterior, es normal que el alumnado tenga que hacer estimaciones relacionadas con aspectos concernientes a los días lectivos y contextualizados en el centro, pero no están tan acostumbrados a realizar problemas de capacidad. Además, estas estimaciones involucran cantidades que son tan extremadamente grandes (o pequeñas) que su manejo puede resultar engorroso. Para poder desenvolverse mejor a la hora de afrontar el problema, se sugirió a las integrantes del grupo que utilizasen la notación científica, ya que la habían estudiado en un momento anterior del curso. Su primer instinto fue quejarse, argumentando que no les gustaba mucho ese temario. Se les dijo entonces que no pasaba nada, y que los problemas podían hacerse igual de bien sin utilizar este recurso: simplemente, los cálculos resultaban más engorrosos. Pasado un rato, claudicaron al darse cuenta de que se trataba de una herramienta muy útil para llevar a cabo la actividad, y empezaron a usar la notación científica.

Grupo 2

Este equipo estaba compuesto por tres chicas y un chico. De entre las alumnas, una de ellas destaca por ser increíblemente trabajadora; a pesar de que no siempre es capaz de deducir lo que se explica durante las clases a la primera, siempre pone empeño y revisa las cosas una y otra vez hasta que al final entiende más o menos el temario. Las otras dos muestran interés en la asignatura no por sí misma, sino con el fin de aprobarla. A menudo en sus tareas resuelven ejercicios sin detenerse a reflexionar sobre lo que hacen, lo cual les genera sentimientos de frustración. Una de ellas se empeña en hacer deberes constantemente para intentar enterarse de lo que hay que hacer, mientras que la otra achaca sus dificultades al hecho de que la asignatura se enseñe en inglés, como parte de un programa bilingüe. Dado que esta actividad se ha llevado a cabo en castellano, esta última alumna se ha sentido más tranquila y confiada durante estos días que en el resto de las clases. Por último, en el grupo también hay un chico: se trata de un estudiante de naturaleza habladora y extravertida, que en el pasado ha tenido dificultades para concentrarse en los estudios debido a que durante las clases tendía a distraerse con sus amigos en vez de prestar atención. En este curso, sin embargo, los compañeros con los que suele distraerse han sido destinados a otro grupo; así que durante las clases suele sentarse apartado, quedarse callado y no expresar mucho interés por lo que se enseña. A lo largo de esta experiencia docente, sin embargo, ha participado en varias ocasiones, ya sea tratando de hacer estimaciones o hablando con su grupo acerca de cómo es mejor hacer los cálculos.

A la hora de dar respuesta al problema que trata sobre contar cuántos folios usan los alumnos, han realizado fácilmente todas las estimaciones que están más relacionadas con el contexto de su realidad educativa (de forma similar al grupo anterior). Ha habido más debate a la hora de decidir cuántos folios utiliza normalmente cada estudiante: finalmente, han decidido contar con un promedio de folios distinto en función de si una hora lectiva corresponde a una clase normal o a un examen. Por lo demás, no han tenido mayores dificultades para dar respuesta a la cuestión.

En cuanto al segundo problema, de forma similar al grupo anterior, han tenido algunas dificultades a la hora de estimar el peso de los granos de arroz y la cantidad que se le debe servir a cada persona. Esto puede deberse, una vez más, al hecho de que el contexto de esta cuestión les pueda resultar un poco más lejano que el de la anterior, que estaba centrada en horas lectivas y folios. Estos elementos formaban parte de su realidad diaria y por lo tanto hacer estimaciones acerca de ellos les ha debido parecer más sencillo.

Grupo 3

Este grupo estaba integrado por tres alumnos y una alumna. Entre ellos se encontraba el chico con Síndrome de Asperger, que durante la actividad se esforzó en reflexionar acerca de las cuestiones planteadas, mostrarse participativo y debatir con sus compañeros acerca de la mejor manera de realizar estimaciones determinadas. Otro integrante del grupo era un chico que en general tiene dificultades en la asignatura de matemáticas: se trata de alguien que, a pesar de esforzarse en entender las cosas, tiende a confundir los conceptos que se trabajan en clase y a menudo se hace un lío con el temario. Los otros dos miembros del grupo son un chico y una chica que, en general, no tienen problemas con la asignatura. A menudo muestran interés genuino por los conceptos y razonamientos que se les explican durante las clases de matemáticas, y a veces en su casa buscan material de ampliación en internet.

A la hora de dar respuesta a la pregunta referente a llenar el aula de caramelos, este grupo no ha estimado el volumen del aula en términos de metros cúbicos, sino que han utilizado unidades de medida algo más inusuales: han comparado el área de las baldosas del suelo y la altura de uno de los integrantes con las medidas de un caramelo, para posteriormente comparar estas dimensiones con las de un caramelo promedio. Esta parte del problema se les ha atravesado un poco, pues en las zonas de las esquinas y las paredes de la clase las baldosas del suelo no estaban completas. Para que pudieran seguir adelante con la resolución del problema, se les indicó que hicieran las estimaciones de manera aproximada, y que no pasaba nada si el número de baldosas obtenido no coincidía exactamente con el real. Sin embargo, debido a su naturaleza perfeccionista, los integrantes del grupo estuvieron debatiendo durante un rato más hasta ponerse de acuerdo en contar una baldosa por cada dos pedazos de los que había en la pared, pues estos se aproximaban bastante a la mitad.

En lo que respecta al problema de saber cuántas croquetas se comen en España, tuvieron menos dificultades. Supieron identificar enseguida las estimaciones y cálculos a realizar, aunque sí hubo algo de debate acerca de cuántas croquetas tomaba cada uno en una ración y cuántas era normal comer.

Por lo general, todos los grupos estuvieron trabajando en los problemas durante la sesión de manera intensa y sin distracciones. Mostraron empeño y preocupación por realizar correctamente las actividades, y siempre que se movieron de sus mesas de trabajo fue para preguntar dudas o para hacer estimaciones de forma más correcta (por ejemplo, los alumnos que contaron baldosas estuvieron recorriendo la clase). El clima generalizado en el aula era de trabajo, aunque los alumnos no trataban a las preguntas como unos simples ejercicios de matemáticas que hay que hacer, sino como retos acerca de cuestiones a las que querían dar respuesta.

Tercer día

En la última sesión de esta experiencia docente, se pidió a los alumnos que salieran a la pizarra a explicar qué preguntas les habían tocado y cómo habían resuelto cada cosa. Se aclaró que no necesitaban ningún tipo de soporte: bastaba con que contasen lo que habían estado haciendo. Podían apoyarse en las hojas en las que habían detallado los cálculos, y utilizar la pizarra para escribir datos si querían. Durante sus exposiciones fueron explicando las estimaciones que habían hecho y los cálculos que habían realizado.

En algunas ocasiones utilizaron contenidos del temario de la asignatura que en el pasado les habían resultado difíciles de estudiar: ellos no dieron a esto mucha importancia, dado que su prioridad era explicar los cálculos que habían hecho y solucionar los problemas. Un ejemplo es el del primer grupo y la notación científica: las alumnas expresaron en varias ocasiones lo poco que les gustaba tener que utilizarla, pero a la hora de hacer el problema de las gotas de agua no dudaron en emplearla. Al hacerlo, ellas mismas admitieron que hacer cuentas resultaba mucho más fácil de esta manera.

Otro ejemplo es el de una alumna que en el pasado ha tenido problemas para realizar reglas de tres: sin embargo, durante su exposición ella misma fue la que utilizó este procedimiento para hacer varias cuentas relacionadas con las proporciones. Cuando, más tarde, la profesora le llamó la atención acerca del hecho de que había conseguido hacerlas correctamente, respondió que en este caso le había parecido fácil y lógico. Es posible que la contextualización del problema contribuya a dotar de lógica y significado a estos procedimientos.

Al terminar las exposiciones, se pasó a cada uno un cuestionario que constaba de dos partes (ver anexo). En la primera se les planteaba un problema a resolver similar a las que habían visto durante estos días. A la hora de intentar dar respuesta a la pregunta, algunos estudiantes se quejaron acerca de su dificultad. Sin embargo, después de darles algunos ánimos y pistas iniciales, se sintieron algo más confiados y se pusieron a trabajar. A pesar de que algunos no terminaron de resolver el problema, todos lo intentaron y cada uno hizo lo que pudo, a excepción de dos alumnos que ese día no pudieron venir y por lo tanto no tuvieron ocasión de realizar el cuestionario.

La segunda parte de este se trataba de una serie de preguntas destinadas a evaluar la opinión de los alumnos sobre distintos aspectos de la experiencia docente que se había realizado con ellos durante los tres días. Para que respondieran a esta parte, se les hizo mucho hincapié en la importancia de que valoraran la actividad de forma honesta y sincera. Se les explicó que lo que se pretendía era que dieran su opinión sobre la experiencia para saber cómo se podía mejorar en un futuro, y que el dar su opinión no tendría ninguna repercusión en su evaluación o en sus resultados en la actividad, sino en la profesora de prácticas a la hora de realizar su Trabajo de Fin de Máster, y para mejorar la actividad de cara a realizarla posteriormente con otros alumnos.

4.3. Resultados

En general, la actividad se desarrolló de manera bastante fluida. Los estudiantes se esforzaron en colaborar y se mostraron interesados en los problemas que se les planteaban, reconociendo su utilidad.

Para cada cuestión, era necesario llevar a cabo operaciones matemáticas para dar respuesta. Sin embargo, en este caso los alumnos también debían identificar y estimar los datos que les iban a resultar relevantes. Esta parte de la actividad fue la que les resultó más interesante y en la que más se fijaron. A menudo cuando explicaban lo que estaban haciendo se centraban mucho más en contar cómo habían hecho cada estimación y en qué se habían basado. Sin embargo, trataban las operaciones a realizar como una parte trivial y menos importante del proceso de resolución. Es posible que esto se deba a que la realización de cálculos siempre ha formado parte de los problemas de matemáticas y por lo tanto están acostumbrados a ello, mientras que tener que determinar los datos es más novedoso.

Esto llama mucho la atención, puesto que en clase hay un grupo numeroso de estudiantes que a menudo se quejan de que no saben resolver los ejercicios si no se les proporciona un procedimiento. Al darles esta libertad, los alumnos se centraban más en la parte novedosa del problema, reconociendo que saber qué cálculos y procedimientos tenían que realizar en el fondo les parecía bastante trivial comparado con las estimaciones.

En cuanto a la realización de los problemas en sí, la mayoría de los grupos la llevaron a cabo de manera bastante similar: primero estimando todos los datos necesarios para posteriormente hacer todas las operaciones juntas. A modo de ejemplo se presenta a continuación el desarrollo completo que hizo el primer grupo para dar respuesta a su primer problema; los demás están realizados de manera similar, salvo algunas excepciones que se mencionarán después.

Grupo 1

Para dar respuesta al problema sobre las cajas de tiza, las alumnas de este grupo comenzaron estimando todos los datos que iban a necesitar. De hecho, escribieron la siguiente lista:

- 5 días a la semana
- 6 clases al día
- Suponemos que hay 12 tizas en cada caja
- Hay 26 cursos en total en el instituto
- Hay 10 meses lectivos

- Suponemos que una tiza se gasta cada 2 clases

Esto fue lo que más tiempo llevó. Los datos relacionados con el tiempo de clase (5 días a la semana, 6 clases al día, 10 meses lectivos) les resultaron bastante fáciles de estimar, quizá debido a que se trata de datos que les resultan muy familiares. Destaca la excepción de los 10 meses lectivos: no tuvieron en cuenta algunas vacaciones, con las que quedarían 9 meses. Sin embargo, estimar el último dato les resultó más complicado. ¿Cómo podían medir la velocidad a la que se gasta una tiza? Se plantearon distintos métodos para realizar esta estimación: preguntar a profesores, pintar algunas palabras en la pizarra y medir la tiza... Finalmente, llegaron a la conclusión de que nada de esto era necesario, puesto que normalmente, al final de cada clase, los alumnos solían jugar con las tizas y perderlas mucho antes de que concluyese su vida útil. Así que decidieron que, teniendo esto en cuenta, era razonable pensar que cada dos clases hacía falta utilizar una tiza nueva.

A continuación, realizaron las siguientes operaciones:

- 6 clases × 5 días = 30 clases a la semana por curso
- (30 clases × 26 cursos = 780 clases a la semana en total)
- 30 clases × 4 semanas = 120 clases al mes por grupo
- 120 clases al mes × 10 meses = 1200 clases al año por grupo
- Si cada 2 clases se utiliza 1 tiza, al año se utilizan 600 tizas por grupo
- 600 tizas ÷ 12 tizas por caja = 50 cajas por grupo
- 50 cajas × 26 cursos = 1300 cajas al año

Como se puede observar, al principio pensaron en ir haciendo los cálculos concernientes a todas las clases del instituto. Sin embargo, se dieron cuenta de que iban a salir números demasiado grandes: en el segundo paso tenían 780, y luego debían seguir multiplicando. Así que decidieron abandonar esta idea e ir calculando lo necesario para cada grupo, para finalmente multiplicar por 26.

Adicionalmente, debían calcular qué proporción de estas cajas correspondían a tizas blancas o de color. Para estimar cuántas tizas de color usaban los profesores, tuvieron un pequeño debate: algunas decían que la mayor parte de los docentes nunca las utilizaban, mientras que otras opinaban que había que tener en cuenta a otros que usaban a diario tizas de varios colores. Finalmente, se pusieron de acuerdo en estimar que 1 de cada 20 tizas que usan los profesores es de color, y resolvieron el resto del problema mediante reglas de tres y otras operaciones sencillas.

Para resolver el problema de las gotas de agua, comenzaron estimando que cada gota ocupa 0,01ml. Además, decidieron que un cubo se corresponde con 1l: a partir de ahí, lo resolvieron mediante reglas de tres. No tardaron en estimar, de forma análoga, cuántas gotas de agua caben en una piscina. El apartado referente a limpiar el polvo de todos los coches de España les costó más; en concreto, tuvieron dificultades a la hora de estimar cuántos litros hacen falta para limpiar un coche. Esto es normal, pues de todos los datos era el más ajeno a su contexto. Otra cosa que les resultó algo complicada en este problema fue trabajar con los números grandes: al hacer operaciones, llegaron a la conclusión de que había aproximadamente 17 millones de coches en España. Al tener que multiplicar esta cifra por otras de aproximadamente el mismo orden de magnitud se quedaron un poco bloqueadas: entendían qué cuentas había que hacer, pero eran demasiado largas. En este momento cedieron y empezaron a utilizar la notación científica.

Grupo 2

Para enfrentarse a la primera cuestión (número de folios que utilizan los alumnos del instituto durante un año), los integrantes de este grupo siguieron un procedimiento similar al descrito en el problema de las tizas. Se les pidió que distinguieran entre los folios comunes y los destinados a la realización de exámenes, y a la hora de estimar estos últimos tuvieron un pequeño debate, pues no todos los exámenes eran iguales. Al final se decantaron por un promedio de siete folios por prueba, argumentando que en asignaturas como Historia o Lengua y Literatura había que escribir mucho y que los alumnos de cursos más avanzados probablemente hicieran exámenes más difíciles y en los que hacía falta desarrollar más el temario.

El segundo problema (relacionado con los granos de arroz) lo hicieron de manera un poco distinta: en vez de comenzar estimando todos los datos, al principio se limitaron a estimar que cuatro granos de arroz equivalían a un gramo. Esto les resultó complicado, pues se trataban de cantidades mucho más pequeñas de lo que normalmente estaban acostumbrados a manejar. A partir de aquí, fueron intercalando estimaciones y reglas de tres para dar respuesta a las diferentes cuestiones del enunciado. Se muestran a continuación sus respuestas:

$$1 \text{ kg} = 1000\text{g}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1000}{x} \rightarrow x = 4000 \; gramos \; en \; un \; kilo \; de \; arroz$$

$$1 \text{ plato de arroz} = 150 \text{ g aproximadamente}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{150}{x} \rightarrow x = 600 \text{ gramos en cada plato}$$

$$616 \times 600 = 369600 \text{ granos para todo el instituto}$$

Durante la resolución de este problema, los integrantes del grupo se cuestionaron en varias ocasiones los resultados, pues les parecían números demasiado pequeños. Sin embargo, no quisieron cambiar su estimación inicial de que un gramo de arroz equivale a cuatro granos, pues les parecía que un gramo era una medida muy pequeña y que más de cuatro granos de arroz serían demasiados.

Grupo 3

De forma similar a sus compañeros, los integrantes de este equipo hicieron una lista de los datos que necesitaban y luego fueron llevando a cabo los cálculos para hallar la solución de cada problema.

Para la primera cuestión (llenar el aula de caramelos), comenzaron estimando que un caramelo ocupa un centímetro cúbico. A continuación, como no tenían instrumentos que les permitieran medir el aula con un grado de exactitud razonable, decidieron ponerse a contar las baldosas del suelo (las cuales sí podían medir con la regla) y estimaron que la altura de la clase era aproximadamente el doble de la de uno de los integrantes (el cual sí conocía su propia altura). Sin embargo, contar las baldosas no resultó tan fácil como parecía al principio: muchas de ellas estaban partidas, lo cual les generaba confusión. Como más o menos los pedazos que quedaban se asemejaban a lo que sería la mitad de una baldosa, decidieron contar una por cada dos de estas piezas. Al final, se mostraron sorprendidos por el resultado del problema: no sólo cabían en el aula caramelos de sobra para todos los habitantes de Santander, sino que sobraban muy ampliamente.

En cuanto al problema de las croquetas, no hay mucho que comentar: siguieron un procedimiento similar al descrito anteriormente y, aunque sí que debatieron brevemente cuántas croquetas comía alguien a la semana (para, posteriormente, multiplicar y averiguar cuántas se comen al año), terminaron resolviendo la cuestión sin mayores incidentes.

Problema del cuestionario

Durante la tercera sesión de la experiencia docente, cada grupo expuso brevemente qué problemas habían tenido que hacer y cómo los habían resuelto. Después se les pidió que realizasen el cuestionario final de la actividad, en el que debían responder a lo siguiente: "¿Cuántos billetes de cinco euros entran en una caja fuerte de 1m^3? ¿Y monedas de un euro? Con todas estas monedas, ¿cuántos helados podemos comprarnos?"

La principal dificultad, común a casi todos los estudiantes, consistió en estimar el volumen que ocupaban los billetes. Al ser tan finos, se les hacía difícil estimar una medida. Muchos de ellos optaron por estudiar en su lugar el volumen de un fajo de varios billetes, para luego multiplicar. La mayoría obtuvieron respuestas del orden de un millón.

En cuanto a las monedas, la mayor parte de los alumnos han realizado un procedimiento similar al de los billetes, apilándolas. Además, por lo general, las han tratado como si fueran objetos con forma de cilindro, teniendo en cuenta que al meterlas en la caja iban a quedar huecos. Solamente ha habido una alumna que haya hecho el problema calculando el volumen de cada moneda. Para ello, ha estimado que tienen un diámetro de 2,5cm y un grosor de 3mm, y ha utilizado la fórmula para el volumen de un cilindro: $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 1{,}25^2 \times 0{,}3$. Una vez obtenida esta cifra, ha dividido el volumen de la caja entre el de la moneda para ver cuántas caben. Esta estrategia de resolución, aunque es más complicada y sirve para estimar mejor el volumen de las monedas, no tiene en cuenta el espacio que quedará libre en la caja debido a la forma de estas.

En cuanto a la última cuestión acerca de los helados, la mayor parte de los alumnos respondieron sin dificultad alguna, suponiendo que un helado costaba entre 2€ o 2,5€ y dividiendo el dinero obtenido entre esta cantidad. Sólo hubo un estudiante que se confundió y multiplicó el dinero obtenido por 2. Sin embargo, dadas las características del estudiante y su desempeño en la asignatura y en el resto de la actividad, es razonable suponer que esto se trata de un pequeño desliz y no de falta de conocimientos.

4.3.1. Análisis de las estrategias utilizadas

Como se ha especificado anteriormente, en la mayor parte de los casos los alumnos han dividido cada problema en dos partes: obtención de datos y operaciones con los mismos.

La principal técnica de obtención de datos ha sido la estimación. Al comienzo de la actividad, los alumnos no estaban muy seguros de cómo responder a las preguntas; sin embargo, cuando se les ofreció la posibilidad de ser ellos mismos los que aproximasen los datos que les faltaban, enseguida se mostraron más confiados. Los problemas ya no parecían imposibles.

En general, las estimaciones que han realizado los alumnos han sido bastante acertadas. Los datos que más les ha costado estimar han sido aquellos que tienen que ver con objetos muy pequeños (gotas de agua, granos de arroz o grosor de un billete, por ejemplo) que se encuentran más alejados de su contexto. La combinación de estos dos factores (cifras muy pequeñas y descontextualización) resulta en un incremento considerable en la dificultad de los problemas. Por el contrario, los estudiantes destacan especialmente a la hora de trabajar con datos relacionados con el instituto (número de alumnos, tiempo que pasan allí...); esto es comprensible, dado que estos datos están íntimamente relacionados con su realidad más cotidiana. Además, por lo general los números involucrados en estos cálculos no eran tan extremadamente grandes o pequeños como en los otros problemas. Por ello, no es de extrañar que las aproximaciones que han realizado en estos casos no solo son las más cercanas a la realidad, sino también las que llevan a cabo con más seguridad.

Además de la estimación de datos, cabe destacar la medición del aula llevada a cabo por el tercer grupo durante el problema de los caramelos. En lugar de aproximar las dimensiones de la sala en cuanto a metros cúbicos, emplearon referentes (las baldosas del suelo y la altura de uno de los integrantes) para poder contestar con mayor exactitud.

Siempre que es posible, los alumnos tienden a convertir sus datos a unidades de medida conocidas: litros, gramos, metros... Un buen ejemplo es el problema realizado por el primer grupo acerca de las gotas de agua. Estiman que un cubo tiene una capacidad de un litro y, posteriormente, se preguntan cuántos litros harán falta para limpiar un coche. Esta cuestión podría haber resultado más fácil si se hubieran planteado cuántos cubos llenos de agua son necesarios. Incluso el grupo 3, después de haber medido el aula, llevó a cabo una conversión de unidades pasando de baldosas × compañeros a metros cúbicos.

Como se ha mencionado anteriormente, los alumnos por lo general han estimado todos los datos para posteriormente hacer operaciones con ellos. Esto ha dotado a las cuestiones de un carácter algo parecido al de los problemas de matemáticas al uso, en los que se proporcionan datos al estudiante para que sea él quien determine las cuentas necesarias. Sin embargo, dado que en este caso los datos provenían de ellos mismos, les ha resultado bastante sencillo saber qué operaciones tenían que llevar a cabo.

De hecho, los estudiantes controlaban tan bien esta parte de los problemas que a menudo buscaban no solamente un método para solucionarlos, sino el mejor método. En muchos de los problemas había que ir haciendo operaciones con cifras que, poco a poco, iban aumentando. Los alumnos por lo general intentaron realizar los cálculos de tal manera que los números involucrados en las cuestiones fueran creciendo más hacia el final de la resolución de las mismas, de tal manera que las cifras fueran más manejables. Un ejemplo de este modo de proceder se puede observar claramente en el primer problema del primer grupo, cuando descartan una cuenta porque trabajar con los resultados es más engorroso que dejar esa misma operación para el final del problema.

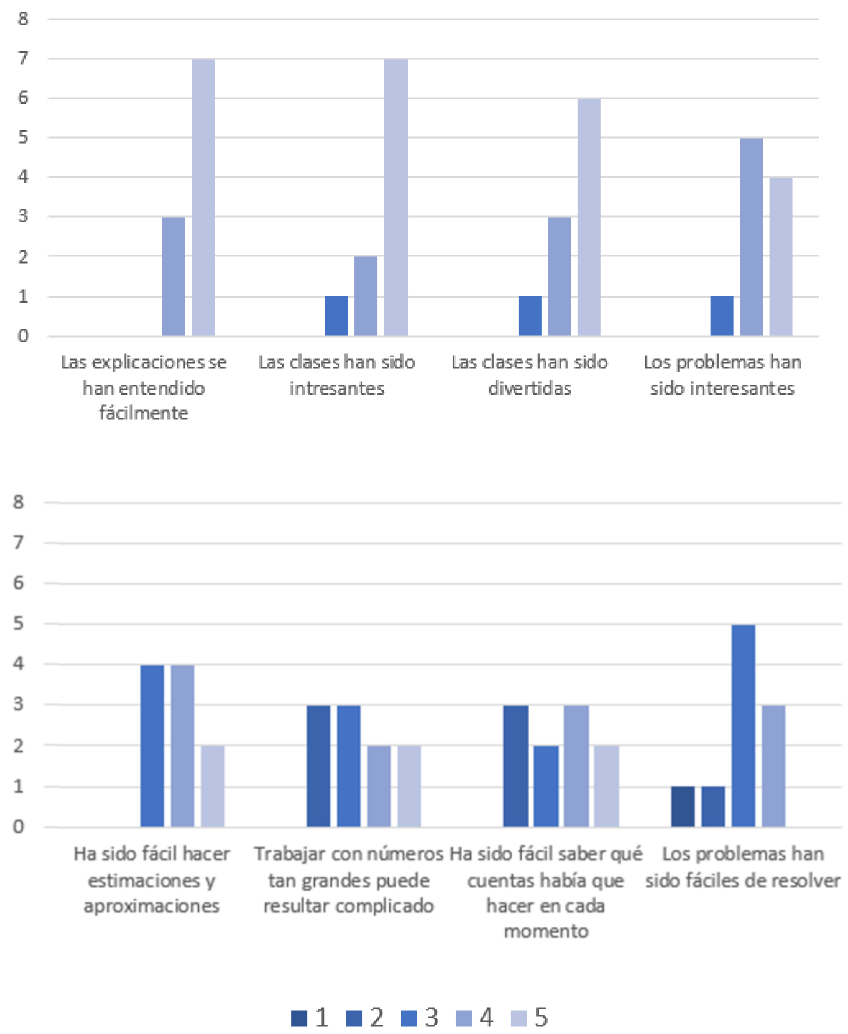
Por lo general, los estudiantes han exhibido un nivel de confianza y seguridad en la actividad muy superior al que han mostrado trabajando durante el resto de la asignatura. La naturaleza de estos problemas (libres, abiertos) favorece que sea el estudiante el que controla lo que hace y cómo halla la solución, en lugar de tener que seguir un camino preparado por su profesor. Esto ha favorecido que los alumnos se sientan más tranquilos, puesto que durante la actividad no tenían que hallar una solución correcta sino simplemente razonar y hacerlo lo mejor posible.

4.3.2. Opiniones sobre la actividad

Al finalizar la experiencia docente, se pidió a los alumnos que respondieran a unas preguntas acerca de su opinión sobre esta, con intención de poder ajustar aspectos como la metodología o la dificultad de las actividades propuestas.

En primer lugar, se solicitó a los estudiantes que calificasen varias afirmaciones utilizando números entre el 1 (muy en desacuerdo) y el 5 (muy de acuerdo). Se presentan a continuación varios gráficos en los que se especifica el número de veces que ha salido cada resultado en cada pregunta:

Respuestas al cuestionario



Adicionalmente, se hicieron algunas preguntas de carácter más abierto para que pudieran desarrollar mejor su opinión. Las siguientes son algunas de las respuestas más repetidas:

¿Qué has aprendido durante esta actividad?

- He aprendido a hacer aproximaciones y estimaciones.
- Que no hay que tener miedo a los números grandes.
- He reforzado los conocimientos sobre notación científica.
- Que se pueden resolver problemas cuando no tenemos datos, aunque no sea de manera exacta.

¿Crees que utilizarás algo de lo que hemos visto para resolver problemas de la vida real?

- Sí, para cuando no conocemos los datos suficientes.
- No lo sé.
- Sí, pues así se podría calcular de forma aproximada cualquier cosa.
- Sí, es útil.
- En mi caso no, porque no se me dan bien las matemáticas.

Como se puede observar, en general el temario de las sesiones ha resultado de interés para el alumnado. La dificultad de los problemas no les ha parecido excesiva, aunque es necesario tener en cuenta que el grupo con el que se ha realizado la actividad está compuesto por alumnos que cursan 3º de la ESO en una modalidad bilingüe: por lo general se trata de niños sin dificultades demasiado significativas en los estudios. Si esta propuesta docente se fuera a llevar a cabo con otro grupo, sería conveniente adaptar las preguntas para hacerlas más o menos difíciles dependiendo del nivel de la clase: por ejemplo, en los trabajos en equipo se podría prescindir de las preguntas extra o agregar más...

En general, los estudiantes reconocen que la actividad les ha ayudado a confiar más en sus habilidades matemáticas. Muchos de ellos afirman que durante estos días se han dado cuenta de que son capaces de resolver problemas que al principio parecen difíciles, imposibles o con datos insuficientes.

Además, opinan que las actividades que se han llevado a cabo pueden resultar útiles fuera del aula. Un gran porcentaje de los alumnos considera que es bastante probable que tenga que hacer estimaciones y cálculos similares a los vistos durante su vida cotidiana. Por otra parte, los alumnos que han respondido negativamente a la pregunta acerca del uso de estas técnicas en la vida real han aclarado que esto se debe a que no tienen confianza suficiente en sus habilidades matemáticas, no a la naturaleza del temario en sí.

Como se ha visto a lo largo de esta experiencia, sin embargo, actividades de este tipo pueden resultar interesantes para mejorar la confianza de los estudiantes en sus propias capacidades.

5. Conclusiones

Al principio de este mismo trabajo se ha formulado una lista de objetivos y preguntas de investigación enfocados a estudiar la relevancia de los problemas de Fermi como herramienta para enseñar matemáticas en el aula.

De cara a realizar una experiencia docente similar a la aquí presentada con otros alumnos, sería interesante mantener algunas de las cosas que se han hecho. Por ejemplo: el trabajo por grupos no solamente ha servido para fomentar la competencia cívica y social, sino que además ha propiciado una mejora del sentido numérico en los estudiantes. Al verse forzados a debatir acerca de las estimaciones que hacían y considerar los puntos de vista de los demás, iban poco a poco adquiriendo mayor conocimiento acerca de las magnitudes que estaban utilizando. Sin embargo, depende del grupo de alumnos con el que se realice la experiencia, también sería conveniente cambiar algunas cosas. En particular, se podrían modificar los problemas para adecuarlos a distintos contextos, o para trabajar contenidos determinados.

Con la actividad llevada a cabo con los estudiantes se pretendía estudiar las estrategias que utilizan para modelizar situaciones de la vida cotidiana y resolver cuestiones contextualizadas. A lo largo de la experiencia docente se ha comprobado que son perfectamente capaces de elaborar modelos que les permitan resolver los problemas planteados. Su principal estrategia de resolución se basa en reducir los problemas a otros cuyo formato les resulte más familiar. Por ejemplo, a menudo estiman todos los datos que van a necesitar al principio de cada pregunta para reducirla a una cuestión de hacer operaciones como las que suelen resolver en clase.

Asimismo, a la hora de estudiar el sentido numérico de los alumnos, se ha comprobado que, en la mayoría de los casos, tienden a fiarse más de aquellos datos que constituyan el resultado de alguna operación matemática que de los que provienen de su propia intuición. Las dificultades para hacer estimaciones no surgen tanto en función de si la cantidad es extremadamente grande o pequeña, sino en relación con el contexto de la misma.

Mediante esta actividad se pretendía entonces impulsar las capacidades del alumnado en cuanto a modelización y sentido numérico: estos aspectos han sido el principal criterio a la hora de elaborar los problemas. La consecución de este objetivo por parte de los estudiantes con los que se ha realizado la actividad ha sido evidente. Adicionalmente, las operaciones involucradas en las cuestiones a resolver han sido llevadas a cabo con éxito por parte de los estudiantes. A la hora de llevar a cabo una experiencia docente similar con otros grupos, además, no sería difícil adaptar las cuestiones planteadas a las necesidades del alumnado para que trabajen con contenidos o contextos determinados, siempre atendiendo a sus necesidades educativas.

Por otra parte, con esta experiencia docente se aspiraba a contextualizar las matemáticas y a motivar una actitud más abierta hacia la asignatura y su utilidad fuera del aula. Es aquí donde la actividad realmente ha destacado. Cuando se ha preguntado a los alumnos acerca de lo que han aprendido, algunos hablan de hacer estimaciones o de resolver problemas: sin embargo, la mayoría ha decidido mencionar un cambio de actitud hacia la asignatura en sí. Muchos hablan de lo importante que es enfrentarse a problemas que al principio parezcan irresolubles, o de no tener miedo a trabajar con aquello que pueda resultar, a primera vista, más complicado. Además, una gran mayoría ha reconocido que la actividad matemática que se ha estado llevando a cabo durante las sesiones resulta relevante en cuanto a la contextualización de la asignatura: durante la experiencia docente, las matemáticas no sólo han cobrado sentido por medio de las aplicaciones que tienen en la vida cotidiana, sino que, además, han sido divertidas.

Como se ha visto a lo largo del marco teórico de este trabajo, el uso de la modelización a la hora de resolver problemas y el sentido numérico forman parte de la competencia matemática cuya adquisición por parte de los alumnos se pretende fomentar. Sin embargo, una actitud positiva hacia la asignatura de matemáticas que incluya no dejarse llevar por el derrotismo también constituye una importante faceta de esta competencia. Por todo lo anterior, puede concluirse que la actividad realizada con los alumnos acerca de problemas de Fermi ha contribuido a mejorar su competencia matemática en varios aspectos.

En conclusión, el uso de problemas de Fermi favorece el impulso de un cambio de actitud hacia la asignatura y todos los procesos involucrados en ella, promoviendo de esta manera una visión positiva de las matemáticas.

6. Bibliografía

Adam, JA. y Weinstein, L. (2008). Guesstimation. Solving the world's problems on the back of a cocktail napkin. *Princeton University Press.*

Albarracín, L. (2016) Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización: qué sabemos y qué más deberíamos saber. V Jornadas de Modelización Matemática, Valencia, 12 al 14 de mayo de 2016. Recuperado de https://jornadasmoma5.blogs.upv.es/files/2016/05/Albarracin.pdf el 5 de junio del 2022

Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning,* vol. 10(2), pp. 117-135.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013a). Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: estrategias y éxito en la resolución. PNA, 7(3), 103-115.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013b). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, vol. 16(3), pp. 289-315.

Albarracín, L., Gorgorió, N. y Pizarro, N. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* vol. 91, pp. 91-103.

Albarracín, L. y Ärlebäck, JB (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM Mathematics Education*, núm. 51, pp. 979-990

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, núm. 43, pp. 85-101

Anderson, P. (2010) A simplified Method of Fermi Estimation for the Student Innovator*. ventureWell. Proceedings of Open, the Annual Conference* (p. 1). National Collegiate Inventors & Innovators Alliance

Antequera, AT. (2012). Propuesta educativa para enseñar nociones de Teoría de Juegos en Educación Secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* vol. 79, pp. 101-126

Ärkebäck, JB. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast,* vol. 6, núm. 3, art. 4

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, núm. 1, pp. 37-68

Castro, E. y Segovia, I. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology,* vol. 7(1), núm. 17, pp. 499-536

Civil, E. (2020) Estimación de magnitudes para evitar el anumerismo. Estima bien y vive mejor. Recuperado de https://didactia.grupomasterd.es/blog/numero-19/estima-bien-y-vive-mejor el día 6 de marzo del 2022

CORDIS (2003). Consejo europeo de Barcelona, 15 y 16 de marzo de 2002, conclusiones de la Presidencia. Recuperado de https://cordis.europa.eu/programme/id/EMP-BARCELONA-2002C/es el 4 de junio del 2022.

Diario Oficial de la Unión Europea (2006). Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. Recuperado de https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:ES:PDF el 4 de junio del 2022.

Dvorsky, G. (2014) How to Comprehend Incomprehensibly Large Numbers. Recuperado de https://gizmodo.com/how-to-comprehend-incomprehensibly-large-numbers-1531604757 el día 12 de marzo del 2022

European Parliament (2000). Consejo europeo de Lisboa, 23 y 24 de marzo 2000. Conclusiones de la presidencia. Recuperado de https://www.europarl.europa.eu/summits/lis1_es.htm el 4 de junio del 2022.

García, J.M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Épsilon - Revista de Educación Matemática,* vol. 30(2), núm. 84, pp. 57-68

Gómez, J. (2008). Per un nou ensenyament de les matemàtiques. Ed. *CEAC*.

Groves, S. y Stacey, K. (2001). Resolver problemas: estrategias. Narcea, S. A. Ediciones.

Harel, G. y Lesh, R. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 5, núm. 2, pp. 157-189

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primario, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, núm. 25, sec. I., pág. 6983. Recuperado el 24 de mayo del 2022 de https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 5, de 5 de enero de 2007 (BOE-A-2007-238). Recuperado de https://www.boe.es/buscar/pdf/2007/BOE-A-2007-238-consolidado.pdf el 4 de junio del 2022.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2018). Competencias clave. Recuperado de https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-actual/competencias-clave.html el 28 de abril del 2022.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76, sec. I., pág. 41571.

Newcombe, N., Resnick, I. y Shipley, T. (2017) Dealing with Big Numbers: Represenctation and Understanding of Magnitudes outside of Human Experience. *Cognitive Science,* vol. 41, pp. 1020-1041

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Application and Modelling in Mathematics Curricula. Roskilde Universitet.

OCDE (2021) PISA Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ed. *Trillas.*

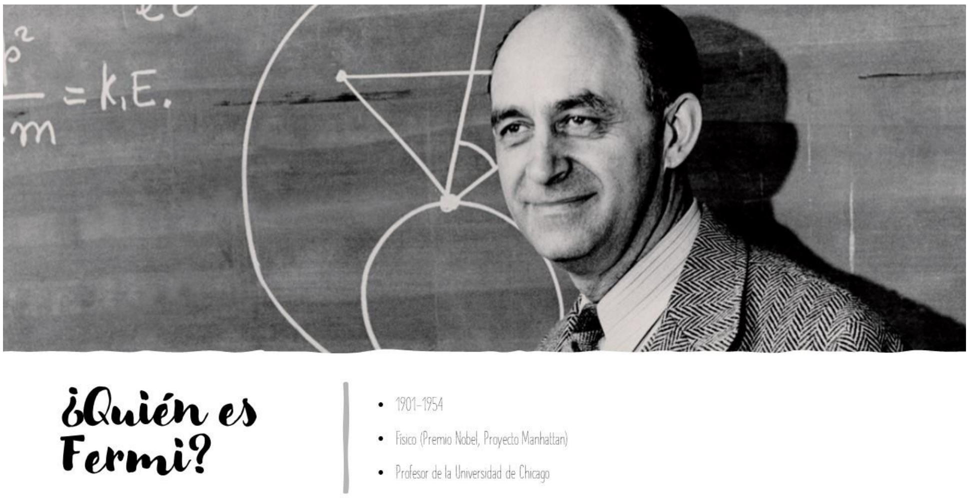
Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación,* 2006, núm. extraordinario, pp. 275-294.

Shakerin, S. (2006). The Art of Estimation. *International Journal of Engineering Education,* vol. 22, núm. 2, pp. 273-278

Sierra, L., García-Raffi, L.M. y Gómez i Urgellés, J. (2011). La modelización matemática en cuarto de la ESO. *Modelling in Science Education and Learning,* vol. 4, núm. 28, pp. 345-365

7. Anexo

7.1. Presentación



¿Cuántos afinadores de pianos hay en Chicago?

¿Cuántos habitantes hay en Chicago?	9 millones
¿Cuántos viven en cada casa?	2 personas en cada casa
¿En cuántas de esas casas hay un piano?	Un piano por cada 20 casas
¿Cada cuánto se afina un piano?	Una vez al año
¿Cuánto trabaja un afinador en un año?	8 horas al día, 5 días a la semana, 50 semanas al año
¿Cuánto tarda en afinarse un piano?	2 horas

$$\frac{9\text{ millones de personas}}{2\text{ personas por casa}}\cdot\frac{1\text{ piano}}{20\text{ casas}}\cdot 1\text{ afinación por piano por año} =$$
$$= 225.000\text{ afinaciones por año}$$

$$50\cdot 5\cdot 8 = 2000\text{ horas al año trabaja cada afinador}$$

$$\frac{2000\text{ horas de trabajo}}{2\text{ horas por afinación}} = 1000\text{ afinaciones al año realiza cada uno}$$

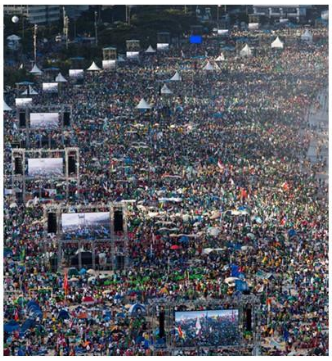
$$\frac{225.000\text{ afinaciones por año}}{1000\text{ afinaciones por año y por afinador}} = 225\text{ afinadores de piano hay en Chicago}$$

Grandes concentraciones de gente

Calculamos la superficie (utilizamos la escala del mapa)

Densidad: 1 metro cuadrado = x personas (depende de lo mucho que nos apretujemos)

Calculamos el número de asistentes utilizando una regla de tres



Grandes concentraciones de gente

Concierto de Rod Stewart (1994, Río de Janeiro)	3,5 millones de personas
Concierto de Jarre (1997, Moscú)	3,5 millones de personas
Kumbhamela (2001)	70 millones de personas

¿Dónde metemos a todo el mundo?



¿Dónde metemos a todo el mundo?



¿Dónde metemos a todo el mundo?

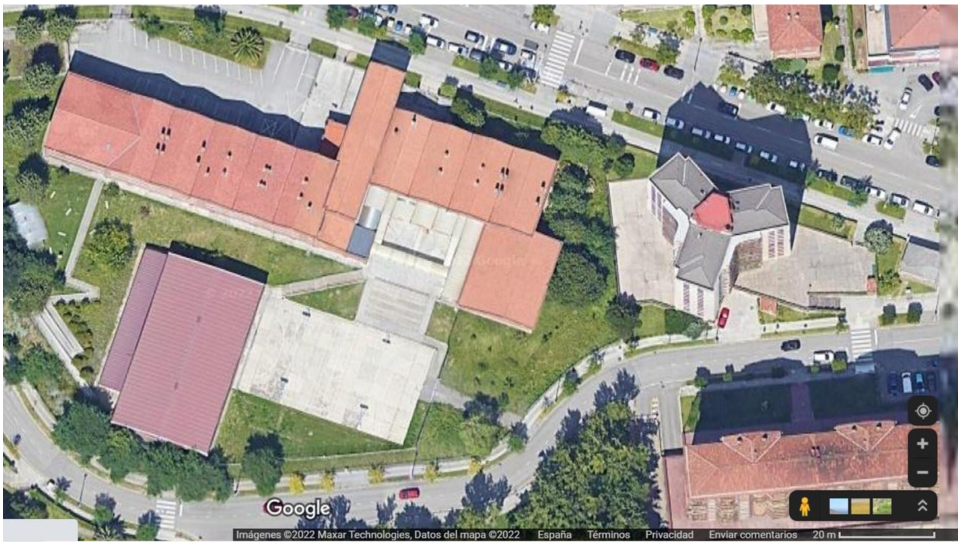
Superficie de Cantabria:

$$5321 \text{ km}^2 = 5321000000 \text{ m}^2 =$$
$$= 5.321 \cdot 10^9 \text{ m}^2$$

Población mundial:

$$7000000000 \text{ personas} = 7 \cdot 10^9 \text{ personas}$$

¡Si metemos a dos personas por cada metro cuadrado cabemos de sobra!



¿Cuánta pizza compramos?
¿Y con restricciones?

7.2. Cuestionario y actividad final

PROBLEMAS DE FERMI

NOMBRE:

Responde razonadamente a la siguiente pregunta:

¿Cuántos billetes de cinto euros entran en una caja fuerte de $1m^3$? ¿Y monedas de un euro? Con todas estas monedas, ¿cuántos helados podemos comprarnos?

Califica, del 1 (muy en desacuerdo) al 5 (muy de acuerdo), las siguientes afirmaciones:

Las explicaciones se han entendido fácilmente

Las clases han sido interesantes.

Las clases han sido divertidas.

Los problemas han sido interesantes.

Ha sido fácil hacer estimaciones y aproximaciones.

Trabajar con números tan grandes puede resultar complicado.

Ha sido fácil saber qué cuentas había que hacer en cada momento.

Los problemas han sido fáciles de resolver.

Responde a las siguientes preguntas:

¿Qué has aprendido durante esta actividad?

¿Crees que utilizarás algo de lo que hemos visto para resolver problemas de la vida real?

Otros comentarios/opiniones sobre la actividad: