Acerca de la mejor selección de una reserva en un sistema serie

Erika Eliana Toloza Gordillo*
Departamento de Matemáticas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
José E. Valdés**
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba
Josué M. Corujo***
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

Resumen

Se considera un sistema serie constituido por los componentes C_1 y C_2. Se dispone además de las reservas R_1 y R_2, pero se puede colocar solo una de las dos reservas: R_1 en paralelo con C_1, o R_2 en paralelo con C_2. ¿Cuál de las reservas colocar? Para responder esta pregunta se realiza un estudio de comparación entre los tiempos de vida de los dos sistemas con reserva, usando varias formas de comparación estocástica. Entre los resultados de mayor interés hallados están los referidos a las condiciones bajo las cuales es mejor colocar la reserva más débil con el componente también más débil.

Palabras Clave: Fiabilidad; Sistema serie; Reserva activa; Comparaciones estocásticas

1. Introducción

Una forma de aumentar la fiabilidad de los sistemas es la colocación de reservas, en particular reservas activas, es decir en paralelo. El problema de dónde colocar las reservas para obtener configuraciones óptimas ha sido estudiado usando una variedad de órdenes estocásticos. Entre los primeros trabajos dedicados a este problema están, Boland et al. (1988, 1992), y Singh y Misra (1994). Otros trabajos dedicados al tema son, Chen et al. (2017), Laniado y Lillo (2014), Romera et al. (2004), Valdés y Zequeira (2003, 2006), Valdés et al. (2010), Wang y Laniado (2015a , 2015b).

A veces es natural suponer que la reserva a colocar depende del componente al cual le será colocada. En Valdés y Zequeira (2003) se considera el siguiente problema. Los componentes C_1 y C_2 forman

**e-mail:* erika.toloza@uptc.edu.co
***e-mail:* vcastro@matcom.uh.cu
****e-mail:* j.corujo@matcom.uh.cu

un sistema serie y se dispone de las reservas R_1 y R_2, pero se puede colocar solo una de las dos reservas: R_1 en paralelo con C_1, o R_2 en paralelo con C_2. ¿Cuál de las reservas colocar? Para responder esta pregunta es necesario hallar la mejor opción en algún sentido.

Suponga que las variables aleatorias X_1, X_2, Y_1 y Y_2 representan los tiempos de vida de C_1, C_2, R_1 y R_2, respectivamente. Denotemos

$$U_1 = \text{mín}[\text{máx}(X_1, Y_1), X_2] \qquad \text{y} \qquad U_2 = \text{mín}[X_1, \text{máx}(X_2, Y_2)].$$

Note que U_i es el tiempo de vida del sistema que se forma cuando la reserva R_i se coloca en paralelo con el componente C_i, $i = 1, 2$. Se deben comparar entonces las variables aleatorias U_1 y U_2. Si en un sentido dado de comparación de variables aleatorias resulta que U_1 es mayor que U_2, se deberá colocar la reserva R_1, y si U_2 es mayor que U_1, entonces se deberá colocar la reserva R_2. Existe también la posibilidad de que no se cumplan ninguna de las dos situaciones anteriores, en ese caso U_1 y U_2 no son comparables.

Dada una variable aleatoria Z con función de distribución $H(t) = P(Z \leq t)$, se denotará $\bar{H}(t) = P(Z > t)$. Sean X y Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G, respectivamente.

Se dice que X es menor que Y en el *orden estocástico usual* (denotado por $X \leq_{st} Y$), si $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$ para todo número real t. La notación $X =_{st} Y$ indica que X y Y tienen igual distribución.

Sean X y Y no negativas. Se dice que X es menor que Y en el *orden creciente cóncavo* (denotado por $X \leq_{icv} Y$), si $\int_0^t \bar{F}(x)dx \leq \int_0^t \bar{G}(x)dx$ para todo $t \geq 0$.

Recordemos que si X es una variable aleatoria no negativa y absolutamente continua, con densidad de probabilidad $f(t)$, entonces la tasa de riesgo $\lambda(t)$ correspondiente a X se define como (ver Barlow y Proschan (1975)),

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

para todo $t \geq 0$ tal que $\bar{F}(t) > 0$. Además $\bar{F}(t) = e^{-\Lambda(t)}$, donde $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x)dx$. Observe que $\lim_{t \to \infty} \Lambda(t) = \infty$.

Sean X y Y no negativas con tasas de riesgo $\lambda(t)$ y $\mu(t)$, respectivamente. Se dice que X es menor que Y en el *orden de la tasa de riesgo* (denotado por $X \leq_{hr} Y$), si $\lambda(t) \geq \mu(t)$ para todo $t \geq 0$.

Aunque las relaciones $X \leq_{st} Y$, $X \leq_{icv} Y$ y $X \leq_{hr} Y$ se denotan en términos de variables aleatorias, en realidad son relaciones entre las funciones de distribución de estas variables, las cuales constituyen órdenes parciales en el conjunto de todas las funciones de distribución. En Shaked y Shanthikumar (1994, 2007) se hace un estudio detallado sobre los órdenes estocásticos y sus aplicaciones (ver también Ross (1996)).

Si una variable aleatoria X representa el tiempo de vida de un artículo (componentes, reservas o sistemas), entonces el tiempo de vida residual del artículo en el instante t, denotado por $[X - t|X > t]$, $t \geq 0$, se define como el tiempo de vida que resta desde t hasta su fallo, en el supuesto de que el artículo sobrevive el instante t. La relación $X \leq_{hr} Y$ se cumple si y solo si se cumple

$$[X - t|X > t] \leq_{st} [Y - t|Y > t]$$

para todo $t \geq 0$ (ver Shaked y Shanthikumar (2007), pag 17). Observe que $X \leq_{hr} Y$ implica $X \leq_{st} Y$, y esta última relación a su vez implica $X \leq_{icv} Y$. Se puede decir que con el orden estocástico usual se comparan dos artículos nuevos, mientras que con el orden de la tasa de riesgo se comparan artículos ya usados un tiempo t, para cada $t \geq 0$.

Se dice que X es menor que Y en el *sentido probabilístico* (denotado por $X \leq_{pr} Y$), si $P(X > Y) \leq P(Y > X)$.

A diferencia de las primeras tres relaciones, en cuya definición intervienen solo las distribuciones marginales de X y de Y, en la definición de la relación $X \leq_{pr} Y$ interviene la distribución conjunta de estas variables aleatorias. En general no existe implicación entre las relaciones $\leq_{st}$ y $\leq_{pr}$, pero si X y Y son independientes, entonces $X \leq_{st} Y$ implica $X \leq_{pr} Y$. Para mayores detalles sobre la relación $\leq_{pr}$ puede verse Blyth (1972) y Boland et al. (2004).

Cuando se comparan dos tiempos de vida de artículos, si uno de estos tiempos es menor que el otro en el sentido de una determinada relación de comparación, diremos que el artículo con tiempo de vida menor es más débil que el otro, o que el de mayor tiempo de vida es más fuerte, en el sentido de la relación de comparación dada.

En Valdés y Zequeira (2003), Romera et al. (2004) y Valdés et al. (2010), se obtienen condiciones sobre los tiempos de vida de componentes y reservas, que son suficientes para que el sistema con tiempo de vida U_1 sea más fuerte que el sistema con tiempo de vida U_2, es decir, para que U_1 sea mayor que U_2 en alguno de los sentidos de comparación de variables aleatorias definidos anteriormente. La mayoría de los resultados de estos trabajos proporcionan condiciones suficientes según las cuales, si C_1 es más débil que C_2 y R_1 es más fuerte que R_2, entonces U_1 es mayor que U_2, o sea debe colocarse la reserva R_1 al componente C_1. En el presente trabajo se amplían los estudios anteriores de comparación entre U_1 y U_2 y se hace énfasis en la obtención de condiciones suficientes según las cuales, si C_1 es más débil que C_2 y R_1 es más débil que R_2, entonces U_1 es mayor que U_2.

Es interesante notar la aparente contradicción que existe en el hecho de que el tiempo de vida del sistema constituido cuando se coloca la reserva más débil al componente más débil, sea mayor en cierto sentido, que el tiempo de vida del sistema constituido al colocar la reserva más fuerte al componente más fuerte.

En la Sección 2 se hallan resultados asintóticos para la tasa de riesgo de un sistema paralelo compuesto por dos componentes independientes. Estos resultados se utilizan después para demostrar la Proposición **??** de la Sección 3, pero también tienen interés en sí mismos. La Sección 3 constituye la parte fundamental de este trabajo. En las Proposiciones **??**, **??** y **??** se establecen condiciones suficientes bajo las cuales lo mejor es colocar la reserva más débil con el componente también más débil. La Proposición **??** presenta una condición necesaria y suficiente que complementa resultados de trabajos anteriores.

En lo adelante se asumirá que las variables aleatorias X_1, X_2, Y_1 y Y_2 son absolutamente continuas y conjuntamente independientes. Sean $F_1(t)$, $F_2(t)$, $G_1(t)$ y $G_2(t)$ las funciones de distribución, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ las densidades de probabilidad, y $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$ las tasas de riesgo de las variables aleatorias X_1, X_2, Y_1 y Y_2, respectivamente.

2. Sistema paralelo

Consideremos un sistema paralelo constituido por dos componentes con tiempos de vida X_1 y X_2. Denotemos por $r(t)$ la tasa de riesgo del tiempo de vida de este sistema, $U = \max(X_1, X_2)$.

Lema 1. *Sea* $\dfrac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \to c$ *cuando* $t \to \infty$*, con* $0 < c < 1$ *. Entonces*

$$\frac{\bar{F}_2(t)}{\bar{F}_1(t)} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \to 0,$$

cuando $t \to \infty$ *(si* $c = 0$ *también* $\bar{F}_2(t)/\bar{F}_1(t) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$*).*

Demostración. Denotemos $\Lambda_i(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda_i(x)\,dx,\ i = 1, 2$. Observe que

$$\frac{\bar{F}_2(t)}{\bar{F}_1(t)} = \exp\{-(\Lambda_2(t) - \Lambda_1(t))\} = \exp\left\{-\Lambda_2(t)\left(1 - \frac{\Lambda_1(t)}{\Lambda_2(t)}\right)\right\}.$$

Pero $\dfrac{\Lambda_1(t)}{\Lambda_2(t)} \to c$ y $\Lambda_2(t) \to \infty$, cuando $t \to \infty$. Entonces

$$\frac{\bar{F}_2(t)}{\bar{F}_1(t)} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{\bar{F}_2(t)}{\bar{F}_1(t)} \cdot \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)} \to 0,$$

cuando $t \to \infty$. □

Proposición 2. *Sea* $\dfrac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \to c$ *cuando* $t \to \infty$*, con* $0 < c < 1$*. Entonces*

$$\frac{r(t)}{\lambda_1(t)} \to 1^+, \tag{1}$$

cuando $t \to \infty$*.*

Demostración. Note que

$$\frac{r(t)}{\lambda_1(t)} = \frac{\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)} F_1(t)\,\bar{F}_2(t) + F_2(t)\,\bar{F}_1(t)}{1 - F_2(t)\,F_1(t)}. \tag{2}$$

De la igualdad anterior se halla que $\dfrac{r(t)}{\lambda_1(t)} > 1$ si y solo si, $F_1(t) > \dfrac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}$, desigualdad que se cumple cuando $t \to \infty$. Por otra parte, (**??**) también puede escribirse,

$$\frac{r(t)}{\lambda_1(t)} = \frac{\frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)} F_1(t)\,\frac{\bar{F}_2(t)}{\bar{F}_1(t)} + F_2(t)}{\frac{1 - F_2(t)F_1(t)}{\bar{F}_1(t)}}.$$

Usando ahora la regla de L'Hôpital y el Lema 1 se demuestra (**??**), puesto que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F_2(t) F_1(t)}{\bar{F}_1(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f_2(t) F_1(t) + F_2(t) f_1(t)}{f_1(t)} = 1.$$

□

La Proposición **??** significa que cuando $t \to \infty$, la tasa de riesgo del sistema paralelo se aproxima asintóticamente por encima a la tasa de riesgo del componente cuya tasa de riesgo es menor asintóticamente.

Corolario 3. *Sea $\lambda_i(t) \to a_i$, $i = 1, 2$, cuando $t \to \infty$. Entonces*

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \min(a_1, a_2). \tag{3}$$

Demostración. Por la Proposición **??**, si $\dfrac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \to c$, $0 < c < 1$, y $\lambda_1(t) \to a$ cuando $t \to \infty$, con a finito, entonces $r(t) \to a$ cuando $t \to \infty$. De esta observación se deduce (**??**). □

3. Sistema serie con reservas activas

Denotemos por $r_1(t)$ y $r_2(t)$ las tasas de riesgo de los tiempos de vida U_1 y U_2, respectivamente. Usando el Corolario **??** inmediatamente se obtiene el siguiente resultado

Proposición 4. *Sean $\lim_{t\to\infty} \lambda_i(t) = \lambda_i$ y $\lim_{t\to\infty} \mu_i(t) = \mu_i$, con μ_i y λ_i constantes, $i = 1, 2$. Entonces una condición necesaria para el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$ es que se cumpla la desigualdad*

$$\min(\lambda_1, \mu_1) + \lambda_2 \leq \min(\lambda_2, \mu_2) + \lambda_1. \tag{4}$$

En la siguiente proposición, para el caso en que los tiempos de vida de los componentes y de las reservas tienen distribución exponencial, se hallan condiciones necesarias para que se establezca el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$. Esto complementa resultados de Singh y Misra (1994), y Valdés y Zequeira (2003), en los cuales se establecen condiciones suficientes para que se cumpla ese orden.

Proposición 5. *Suponga que X_1, X_2, Y_1 y Y_2 se distribuyen exponencialmente con tasas de riesgo λ_1, λ_2, μ_1 y μ_2, respectivamente. Sea $\lambda_2 \geq \mu_2$. Entonces:*

1) Las condiciones $\lambda_1 \geq \max(\lambda_2, \mu_1)$ y $\lambda_1 - \lambda_2 > \mu_1 - \mu_2$ son necesarias para que se cumpla la relación $U_1 \geq_{hr} U_2$.

2) Si $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, entonces $\lambda_1 \geq \max(\lambda_2, \mu)$ es condición necesaria y suficiente para que se cumpla la relación $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demostración. 1) Notemos que $r_1(0) \leq r_2(0)$ si y solo si $\lambda_1 \geq \lambda_2$, y que por la Proposición **??** $\lim_{t\to\infty} r_1(t) \leq \lim_{t\to\infty} r_2(t)$ si y solo si se cumple la desigualdad (**??**). Luego de (**??**), si $\lambda_2 \geq \mu_2$, necesariamente $\lambda_1 \geq \mu_1$, y en ese caso (**??**) se transforma en $\lambda_1 - \lambda_2 > \mu_1 - \mu_2$.

2) Aún sin suponer $\lambda_2 \geq \mu$, la Proposición 4.1 de Singh y Misra (1994), y también su generalización, la Proposición 1 de Valdés y Zequeira (2003), demuestran la suficiencia. La necesidad se prueba tomando $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ en la parte 1). $\square$

La condición $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ de la parte 2) de la Proposición **??** equivale a considerar que se tiene solo una reserva. El resultado de esta parte de la proposición significa, que bajo las suposiciones que en ella se establecen, la reserva debe ser colocada al componente más débil.

Valdés y Zequeira (2003) consideran en general tiempos de vida no exponenciales de componentes y reservas, y hallan condiciones suficientes para que se cumpla $U_1 \geq_{hr} U_2$. Bajo estas condiciones, si C_1 es más débil que C_2 y R_1 es más fuerte que R_2, entonces el sistema con tiempo de vida U_1 es más fuerte que el sistema con tiempo de vida U_2, es decir, debe colocarse la reserva R_1 al componente C_1. Es natural que surja la siguiente pregunta: siendo C_1 más débil que C_2 y R_1 más débil que R_2, ¿bajo que condiciones debe colocarse la reserva R_1 al componente C_1?

Para mayor claridad en la exposición que sigue, enunciemos el siguiente resultado de Valdés y Zequeira (2003) en forma de proposición.

Proposición 6. *La relación $U_1 \geq_{st} U_2$ se satisface si se cumple una de las condiciones a) o b):*

a) $X_1 \leq_{st} X_2$ *y* $Y_1 \geq_{st} Y_2$

b) $X_2 \geq_{st} Y_2 \geq_{st} Y_1 \geq_{st} X_1$.

Esta proposición se prueba observando que la relación $U_1 \geq_{st} U_2$ es equivalente a la desigualdad

$$F_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq F_2(t)\bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t), \quad t \geq 0. \tag{5}$$

y que esta se satisface si se cumple una de las condiciones a) o b).

El resultado de la Proposición **??** se interpreta de la siguiente manera. En el sentido del orden estocástico usual, en las condiciones de a) debe colocarse la reserva más fuerte al componente más débil, y en las condiciones de b) debe colocarse la reserva más débil al componente más débil.

Note de (**??**), que si en particular, $Y_1 =_{st} Y_2$, o $Y_1 =_{st} X_1$ y $Y_2 =_{st} X_2$, entonces $X_1 \leq_{st} X_2$ es condición necesaria y suficiente para que se cumpla $U_1 \geq_{st} U_2$. Por otro lado, si $Y_1 \leq_{st} Y_2$, entonces para que se cumpla $U_1 \geq_{st} U_2$ es necesario que $X_1 \leq_{st} X_2$. En Valdés y Zequeira (2003) se prueba también, que si $Y_1 =_{st} X_1$ y $Y_2 =_{st} X_2$, entonces no existe orden según la relación $\geq_{hr}$ entre U_1 y U_2.

En Romera et al. (2004) se probó que si $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\bar{G}_1(t)\bar{F}_2(t) \geq \bar{G}_2(t)\bar{F}_1(t)$, $t \geq 0$, entonces $U_1 \geq_{pr} U_2$, de donde se halla que la relación $U_1 \geq_{pr} U_2$ también se cumple en las condiciones de b) de la Proposición **??**. Por otra parte, en Valdés et al. (2010) se prueba que la condición, $X_2 \geq_{st} Y_2 \geq_{icv} Y_1 \geq_{st} X_1$ implica $U_1 \geq_{icv} U_2$. Luego en las condiciones de estos dos últimos casos, también la reserva más débil debe colocarse al componente más débil para que U_1 sea mayor que U_2 en el sentido de las relaciones de comparación $\geq_{pr}$ y $\geq_{icv}$, respectivamente.

La siguiente proposición proporciona otras condiciones suficientes para el cumplimiento de la relación $U_1 \geq_{st} U_2$.

Proposición 7. *Si $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ y $\lambda_1(t) - \lambda_2(t) \geq \mu_1(t) - \mu_2(t)$, $t \geq 0$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$.*

Demostración. La desigualdad (**??**) también puede escribirse,

$$(1 - e^{-\int_0^t \lambda_1(u)du}) \cdot e^{-\int_0^t (\lambda_2(u)+\mu_1(u)-\lambda_1(u)-\mu_2(u))du} \geq (1 - e^{-\int_0^t \lambda_2(u)du}).$$

Ahora es evidente que con las suposiciones hechas esta última desigualdad se satisface. □

Si $\lambda_2(t) = \mu_2(t)$, $t \geq 0$, las condiciones de la Proposición **??** se reducen a $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ y $\lambda_1(t) \geq \mu_1(t)$, $t \geq 0$. Por otro lado, si $\lambda_1(t) = \mu_1(t)$, $t \geq 0$, estas condiciones se reducen a $\lambda_2(t) \leq \lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t) \leq \mu_2(t)$, $t \geq 0$. Puede observarse que en ambos casos no se establece relación entre $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$.

La Proposición **??** no aporta nada nuevo cuando $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ y $\mu_1(t) \leq \mu_2(t)$, $t \geq 0$, pues estas condiciones implican las condiciones de a) de la Proposición **??**. Pero si $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ y $\mu_1(t) \geq \mu_2(t)$, $t \geq 0$, esta proposición aporta varias relaciones según las cuales es mejor colocar la reserva más débil con el componente más débil. Una de estas relaciones, $\lambda_1(t) \geq \mu_1(t) \geq \mu_2(t) \geq \lambda_2(t)$, $t \geq 0$, implica las condiciones de b) de la Proposición **??**, pero las otras no, ellas son:

i) $\mu_1(t) \geq \lambda_1(t) \geq \mu_2(t) \geq \lambda_2(t)$,

ii) $\lambda_1(t) \geq \mu_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \mu_2(t)$,

iii) $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \mu_1(t) \geq \mu_2(t)$,

donde naturalmente se asume también que $\lambda_1(t) - \lambda_2(t) \geq \mu_1(t) - \mu_2(t)$, $t \geq 0$.

En el siguiente ejemplo se muestra que cuando los tiempos de vida de los componentes y reservas se distribuyen exponencialmente, una condición necesaria para que tenga lugar la relación $U_1 \geq_{st} U_2$ consiste en que el tiempo medio de vida del componente C_1 sea menor que el tiempo medio de vida del componente C_2.

Ejemplo 1. *Consideremos que X_1, X_2, Y_1 y Y_2 tienen distribución exponencial con tasas de riesgo λ_1, λ_2, μ_1 y μ_2, respectivamente. Mostremos que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ es una condición necesaria para que se cumpla $U_1 \geq_{st} U_2$. Denotemos por $F_{U_i}(t)$ la función de distribución de U_i, $i = 1, 2$. Note que*

$$\begin{aligned}\bar{F}_{U_1}(t) &= P[U_1 > t] = \left[e^{-\lambda_2 t} + e^{-\mu_1 t} - e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\right] e^{-\lambda_2 t},\\ \bar{F}_{U_2}(t) &= P[U_2 > t] = \left[e^{-\lambda_1 t} + e^{-\mu_2 t} - e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\right] e^{-\lambda_1 t},\end{aligned}$$

de donde $U_1 \geq_{st} U_2$ si y solo si se satisface la desigualdad

$$\left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] e^{-(\mu_1+\lambda_2)t} \geq \left[1 - e^{-\lambda_2 t}\right] e^{-(\mu_2+\lambda_1)t}, \quad t \geq 0,$$

o, equivalentemente, la desigualdad

$$\frac{e^{-(\mu_1+\lambda_2)t}}{e^{-(\mu_2+\lambda_1)t}} \geq \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{1 - e^{-\lambda_1 t}}, \quad t \geq 0.$$

Tomando límite cuando t tiende a cero en la desigualdad anterior se obtiene $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Puesto que U_1 y U_2 no son independientes, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$ en general no implica $U_1 \geq_{pr} U_2$, y por lo tanto de la Proposición **??** no se deduce que en las condiciones que en ella se asumen se cumple $U_1 \geq_{pr} U_2$. Sin embargo, no es difícil probar que las condiciones de esta proposición son también suficientes para que se cumpla $U_1 \geq_{pr} U_2$. Esta última relación será tratada con mayor detalle en la Proposición **??**.

En Valdés y Zequeira (2003), al estudiar las condiciones bajo las cuales la reserva más fuerte debe colocarse con el componente más débil, las tasas de riesgo $r_1(t)$ y $r_2(t)$ se escriben en la forma

$$r_1(t) = \frac{\lambda_1(t)G_1(t)\bar{F}_1(t) + \mu_1(t)F_1(t)\bar{G}_1(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)} + \lambda_2(t)$$

$$r_2(t) = \frac{\lambda_2(t)G_2(t)\bar{F}_2(t) + \mu_2(t)F_2(t)\bar{G}_2(t)}{1 - F_2(t)G_2(t)} + \lambda_1(t),$$

y realizando transformaciones algebraicas se halla que la desigualdad $r_1(t) \leq r_2(t)$, $t \geq 0$, y por lo tanto $U_1 \geq_{hr} U_2$, es equivalente a la desigualdad

$$\frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1 - F_2(t)G_2(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)} (\lambda_1(t) - \mu_1(t)F_1(t)) \geq \lambda_2(t) - \mu_2(t)F_2(t). \tag{6}$$

En Valdés y Zequeira (2003) también se prueba que cuando $\mu_2(t) \geq \mu_1(t)$, $t \geq 0$, si además,

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) + \mu_1(t), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

entonces se cumple $U_1 \geq_{hr} U_2$, lo cual de nuevo significa que en las condiciones asumidas, la reserva más fuerte debe colocarse con el componente más débil. Examinemos ahora condiciones bajo las cuales, colocando la reserva más débil con el componente más débil, se cumple $U_1 \geq_{hr} U_2$. En las condiciones de las siguientes dos proposiciones se cumplirá la desigualdad (**??**), y por lo tanto solo tiene interés el caso $\mu_1(t) \geq \mu_2(t)$, $t \geq 0$.

Proposición 8. *Sea $\mu_1(t) \geq \mu_2(t)$, $t \geq 0$. Si $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) + \mu_1(t)$ y $\mu_1(t) - \mu_2(t) \leq \lambda_2(t) \leq \mu_2(t)$, $t \geq 0$, entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$.*

Demostración. Como $\lambda_2(t) \leq \mu_2(t)$ implica $\lambda_2(t) - \mu_2(t)F_2(t) \leq \lambda_2(t) - \lambda_2(t)F_2(t) = \lambda_2(t)\bar{F}_2(t)$, $t \geq 0$, entonces para probar (**??**) es suficiente probar que se cumplen las desigualdades,

$$A(t) = \frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1 - F_2(t)G_2(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)} \frac{1}{\bar{F}_2(t)} \geq 1, \tag{8}$$

y

$$\lambda_1(t) - \mu_1(t)F_1(t) \geq \lambda_2(t),$$

para todo $t \geq 0$. La última desigualdad se satisface debido a suposiciones de la proposición, puesto que $\lambda_1(t) - \mu_1(t)F_1(t) \geq \lambda_1(t) - \mu_1(t) \geq \lambda_2(t)$, $t \geq 0$. También de las suposiciones se obtienen las desigualdades $\lambda_1(t) \geq \mu_2(t)$ y $\mu_1(t) \geq \lambda_2(t)$, las cuales a su vez implican $F_1(t) \geq G_2(t)$ y $G_1(t) \geq F_2(t)$,

$t \geq 0$, respectivamente. Entonces

$$A(t) \geq \frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1 - F_2(t)F_1(t)}{1 - F_1(t)F_2(t)} \frac{1}{\bar{F}_2(t)} = \frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1}{\bar{F}_2(t)}.$$

Pero como $\mu_1(t) - \mu_2(t) - \lambda_2(t) \leq 0$, $t \geq 0$, se tiene que

$$\frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1}{\bar{F}_2(t)} = \exp\left(-\int_0^t (\mu_1(x) - \mu_2(x) - \lambda_2(x))\, dx\right) \geq 1.$$

De esta manera queda probado que $A(t) \geq 1$, $t \geq 0$. □

De las condiciones de la Proposición **??** se deduce que $\mu_2(t) \leq \mu_1(t) \leq 2\mu_2(t)$, $t \geq 0$. Por otro lado, si $\lambda_2(t) = \mu_2(t)$, $t \geq 0$, entonces las suposiciones de esta proposición se escriben, $\mu_2(t) \leq \mu_1(t) \leq 2\mu_2(t)$ y $\lambda_1(t) \geq \mu_1(t) + \mu_2(t)$, $t \geq 0$. Note que en la proposición se asume implícitamente que la reserva R_1 puede ser no más de dos veces más débil que la reserva R_2 en el sentido de la tasa de riesgo.

Proposición 9. *Si $\lambda_2(t) \leq \mu_2(t)$ y $\lambda_1(t) \geq 2\lambda_2(t) + \mu_1(t)$, $t \geq 0$, entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$.*

Demostración. Puesto que de $\lambda_2(t) \leq \mu_2(t)$ y $\lambda_1(t) \geq \mu_1(t)$, $t \geq 0$, se deduce que $G_2(t) \geq F_2(t)$ y $F_1(t) \geq G_1(t)$, $t \geq 0$, entonces se tiene,

$$\frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1 - F_2(t)G_2(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)} \geq \frac{\bar{G}_1(t)}{\bar{G}_2(t)} \frac{1 - G_2^2(t)}{1 - G_1^2(t)} = \frac{1 + G_2(t)}{1 + G_1(t)} \geq \frac{1}{2}.$$

Además, $\lambda_1(t) - \mu_1(t)F_1(t) \geq \lambda_1(t) - \mu_1(t)$ y $\lambda_2(t) - \mu_2(t)F_2(t) \leq \lambda_2(t)$, $t \geq 0$, luego para que se cumpla (**??**) es suficiente que se cumpla la desigualdad

$$\frac{1}{2}(\lambda_1(t) - \mu_1(t)) \leq \lambda_2(t),$$

para todo $t \geq 0$, la cual se satisface por las suposiciones de la proposición. □

Existen situaciones en las cuales no se cumplen las condiciones de la Proposición **??** y sí se cumplen las de la Proposición **??**, y viceversa, situaciones en las cuales no se cumplen las condiciones de la Proposición **??** y sí se cumplen las de la Proposición **??**. El siguiente ejemplo ilustra esto.

Ejemplo 2. *Si $\mu_1(t) = 3\mu_2(t)$, $t \geq 0$, entonces no se cumplen las suposiciones de la Proposición **??**, y sí se pueden cumplir las condiciones de la Proposición **??**. Si tomamos ahora, $\lambda_2(t) = \mu_2(t)$, $\mu_1(t) = \frac{3}{2}\mu_2(t)$ y $\lambda_1(t) = 3\mu_2(t)$, $t \geq 0$, entonces no se satisfacen las condiciones de la Proposición **??**, pues no se cumple la desigualdad $\lambda_1(t) \geq 2\lambda_2(t) + \mu_1(t) = 2\mu_2(t) + \frac{3}{2}\mu_2(t)$, $t \geq 0$, y sí se cumplen las condiciones de la Proposición **??**.*

En la siguiente proposición se analiza la relación $U_1 \geq_{pr} U_2$. Supondremos que las tasas de riesgo de los componentes y de las reservas son todas proporcionales entre sí. Este es el caso, por ejemplo, cuando los tiempos de vida de todos los componentes y reservas tienen distribución de Weibull con el mismo parámetro de forma.

Proposición 10. *Sean $\mu_1(t) = c_1\lambda_1(t)$, $\mu_2(t) = c_2\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t) = c\lambda_1(t)$, $t \geq 0$, donde c, c_1 y c_2 son constantes positivas. Entonces para que se cumpla $U_1 \geq_{pr} U_2$ es necesario y suficiente que $c \leq c_0$, donde c_0 es la raíz no negativa de la ecuación en c, $c^2 + c \cdot c_1 - c_2 - 1 = 0$. Además,*

1) si $c \geq 1$, es necesario que $c_1 \leq c_2$;

2) si $c \leq 1$, es suficiente que $c_1 \leq c_2$;

3) si $c_1 \geq c_2$, es necesario que $c \leq 1$, y suficiente que $c \leq \frac{c_1}{c_2}$.

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} A &= P(U_1 > U_2) - P(U_2 > U_1) \\ &= P(X_1 < \text{mín}(X_2, Y_1)) - P(X_2 < \text{mín}(X_1, Y_2)) \\ &= \int_0^\infty \bar{G_1}(t)\bar{F_2}(t)dF_1(t) - \int_0^\infty \bar{F_1}(t)\bar{G_2}(t)dF_2(t). \end{aligned}$$

Pero como $\bar{G_1}(t) = (\bar{F_1}(t))^{c_1}$, $\bar{G_2}(t) = (\bar{F_2}(t))^{c_2}$ y $\bar{F_2}(t) = (\bar{F_1}(t))^{c}$, entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty (\bar{F_1}(t))^{c+c_1} dF_1(t) - c\int_0^\infty (\bar{F_1}(t))^{c+c_2} dF_1(t) \\ &= \int_0^1 x^{c+c_1}dx - c\int_0^1 x^{c+c_2}dx = \frac{1}{c+c_1+1} - c\frac{1}{c+c_2+1}. \end{aligned}$$

Luego, $A \geq 0$ si y solo si $h(c) = c^2 + c \cdot c_1 - c_2 - 1 \leq 0$, y como $h(0) = -c_2 - 1 < 0$ y $h'(c) = 2c + c_1 \geq 0$, entonces $h(c) \leq 0$ si y solo si $c \leq c_0$.

Note ahora que $h(1) = c_1 - c_2$. Por lo tanto: Si $c \geq 1$, entonces $h(c) \geq c_1 - c_2$, y de esta forma $c_1 \leq c_2$ es necesario para establecer la desigualdad $h(c) \leq 0$; si $c \leq 1$, entonces $h(c) \leq c_1 - c_2$, y para que se cumpla $h(c) \leq 0$ es suficiente que $c_1 \leq c_2$; si $c_1 \geq c_2$, entonces $c_0 \leq 1$, y para que se satisfaga $h(c) \leq 0$, necesariamente debe ser $c \leq 1$, además, como $h\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 < 0$, entonces es suficiente que se cumpla $c \leq \frac{c_2}{c_1}$. □

La Parte 3) de la Proposición **??** brinda una condición suficiente bajo la cual lo mejor, en el sentido de la relación $\leq_{pr}$, es colocar la reserva más débil al componente más débil. Por ejemplo, si los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 y Y_2 se distribuyen exponencialmente con tasas de riesgo λ_1, λ_2, μ_1 y μ_2, respectivamente, y $\mu_1 > \mu_2$, entonces $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1}$ es una condición suficiente para $U_1 \geq_{pr} U_1$.

4. Conclusiones

En las proposiciones **??** y **??**, para el orden de la tasa de riesgo, y en la parte 3) de la Proposición **??**, para la comparación probabilística, se establecen condiciones suficientes bajo las cuales lo mejor es colocar la reserva más débil con el componente también más débil, cuestión que aparentemente pudiera parecer contradictoria. Los resultados asintóticos hallados en la Sección 2 para un sistema paralelo constituido por dos componentes tienen interés en sí mismos.

Queda pendiente el estudio sobre las condiciones bajo las cuales debe colocarse la reserva más débil con el componente más débil, desde el punto de vista de otras formas de comparación estocástica y también en sistemas serie de mayor número de componentes y reservas.

Referencias

[1] Barlow, R.E., Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

[2] Blyth, C.R. (1972). Some probability paradoxes in choice from among random alternatives, *Journal of American Statistical Association* **67**, 366-373.

[3] Boland, P.J., El-Neweihi, E., Proschan, F. (1988). Active Redundancy Allocation in Coherent Systems, *Probab. Eng. Inform. Sci.* **2**, 343-353.

[4] Boland, P.J., El-Neweihi, E., Proschan, F. (1992) Stochastic Order for Redundancy Allocations in Series and Parallel Systems, *Adv. Appl. Prob.* **24**, 161-171.

[5] Boland, P.J., Singh, H., Cukic, B. The stochastic precedence ordering with applications in sampling an testing. *Journal of Applied Probability* **41**, 73–82, (2004).

[6] Chen, J., Zhang, Y., Zhao, P., Zhou, S. (2017). Allocation Strategies of Standby Redundancies in Series/Parallel System, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2017.1313984.

[7] Laniado, H., Lillo, R. (2014). Allocation Policies of Redundancies in Two-Parallel-Series and Two-Series-Parallel Systems. *IEEE Tansactions on Reliability* **63**, N° 1, 223-229.

[8] Romera, R., Valdés, J.E., Zequeira, R.I. (2004). Active-redundancy allocation in systems, *IEEE Transactions on Reliability* **53**, N° 3, 313-318.

[9] Ross, S.M. (1996). *Stochastic Processes*. Second Edition. Wiley & Sons.

[10] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1994), *Stochastic Orders and Their Applications*. Academic Press. New York.

[11] Shaked, M., Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer, New York.

[12] Singh, H. and Misra, N. (1994), On redundancy allocation in systems, *Journal of Applied Probability* **31**,1004-1014.

[13] Valdés, J.E., Arango, G., Zequeira, R.I., Brito, G. (2010). Some stochastic comparisons in series systems with active redundancy, *Statistics and Probability Letters* **80**, 945-949.

[14] Valdés, J.E., Zequeira, R.I. (2006). On the optimal allocation of two active redundancies in a two-component series system, *Operations Reseach Letters* **34**, 49-52.

[15] Valdés, J.E., Zequeira, R.I. (2003). On the optimal allocation of an active redundancy in a two-component series system, *Statistics and Probability Letters* **63**, 325-332.

[16] Wang, J., Laniado, H. (2015). On likelihood ratio ordering of parallel system with two exponential components, *Operations Research Letters* **43**, 195-198.

[17] Wang, J., Laniado, H. (2015). A note on allocation policy in two-parallel-series and two-series parallel systems with respect to likelihood ratio order, *Statistics and Probability Letters* **102**, 17-21.