A PREVALÊNCIA DA LINEARIDADE NAS RELAÇÕES ENTRE OS CONCEITOS DE PERÍMETRO, ÁREA E VOLUME[1]

Isabel Afonso Martins
Escola Secundária/3 de Monção – Monção, Portugal
isabel.afonso.martins@gmail.com
José António Fernandes
Universidade do Minho – Braga, Portugal
jfernandes@ie.uminho.pt

RESUMO

No presente estudo teve-se como principal propósito conhecer, descrever e interpretar os processos desenvolvidos pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo relações entre os conceitos de perímetro, área e volume.
Participaram no estudo duas turmas, uma do 6.º ano e outra do 9.º ano, cada uma com 26 alunos. A recolha de dados foi efectuada através de um teste, incluindo questões sobre os conceitos de perímetro, área, volume e suas relações.
Em termos de resultados, verificou-se que a grande maioria dos alunos, quer do 6.º ano quer do 9º ano, estabeleceu relações lineares entre os conceitos, as quais conduziram sempre a respostas correctas quando se tratava de relações entre perímetros e a respostas incorrectas quando se tratava de relações entre áreas e entre volumes. Entre os dois anos escolares não se salientaram diferenças significativas no tipo de respostas dadas e nas estratégias usadas.

Palavras-chave: Relações entre os conceitos de perímetro, área e volume; Linearidade; Alunos do 6.º e do 9.º anos de escolaridade.

1. Introdução

A Geometria tem vindo a ocupar um lugar de destaque no currículo de Matemática, o que se jutifica por ela fazer parte do património cultural, permitir-nos interpretar e intervir no mundo que nos rodeia, facilitar a visualização e representação de objectos, bem como a manipulação dessas representações e a resolução de problemas do quotidiano. De acordo com Fainguelernt (1999), "a Geometria é considerada como uma ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos; é, talvez, a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e real" (p. 15). Ainda neste aspecto, Matos e Serrazina (1996) acrescentam que "parece essencial que a Geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial cruciais para o mundo moderno" (p. 265).

Partindo, então, destes pressupostos, a Geometria é, indubitavelmente, um campo fértil para aprender a fazer e a pensar, porque a intuição, o formalismo, a abstracção e a dedução fazem parte da sua essência. De acordo com o NCTM (2007), "a geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos" (2007, p. 44).

Apesar da sua importância, os alunos apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento geométrico. Uma das dificuldades encontradas pelos alunos em Geometria prende-se com a diferenciação entre os conceitos de perímetro, área e volume, bem como nas relações existentes entre eles. Muitas vezes, as

[1] Texto produzido no âmbito do Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

relações entre os três conceitos não são estabelecidas; outras vezes, a maioria dos alunos tem concepções erradas sobre tais conceitos, pensando que se os lados de uma figura aumentam k vezes, então o perímetro, a área e o volume aumentarão também na mesma proporção, ou seja, k vezes.

As estratégias de resolução dos alunos utilizadas em problemas envolvendo os conceitos de comprimento, perímetro, área e volume têm sido estudadas extensivamente nestes últimos anos sob a perspectiva do fenómeno da "ilusão da linearidade" (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004; Modestou & Gagatsis, 2006, 2007). Nesse sentido, muitos pesquisadores e educadores matemáticos alertam para o perigo e para a tendência exagerada, quer por parte dos alunos, quer de alguns professores, de aplicar o modelo linear em situações lineares ou não lineares. Segundo Freudenthal, a linearidade é uma propriedade das relações que nos permite lidar com qualquer relação numérica como se ela fosse linear (1983).

As relações lineares (ou proporcionais) têm uma ampla aplicabilidade e são bastantes úteis para a compreensão não só de inúmeras situações da vida quotidiana, mas também em muitos problemas em matemática e ciências. Desde muito cedo, os alunos experimentam uma ampla aplicabilidade desse tipo de relações, sendo-lhes dada grande atenção no ensino básico. A longo prazo, os alunos desenvolvem crenças erróneas de que qualquer relação pode ser quantificada como proporcional, aderindo à chamada "ilusão de linearidade".

Neste contexto, no presente trabalho estudam-se as estratégias usadas por alunos do 6.º e do 9.º anos de escolaridade para estabelecerem relações entre os conceitos de perímetro, área e volume, afirmando-se a hipótese da prevalência da linearidade no estabelecimento dessas relações.

2. A ilusão da linearidade

Desde o início da sua escolaridade que as crianças experimentam uma vasta e frequente aplicabilidade das relações lineares/relações proporcionais em consequência da grande ênfase dada a esse tema no currículo de Matemática. Os alunos aprendem, por exemplo, que existe uma relação linear ou proporcional entre o diâmetro e o perímetro de um círculo; entre o peso de uma determinada quantidade de líquido e o seu volume e entre o tempo e a distância percorrida a uma velocidade constante. Deste modo, as relações lineares ou proporcionais revelam-se importantes aos olhos dos alunos na medida em que permitem compreender inúmeras situações escolares e do quotidiano.

Entende-se por funções lineares ou relações proporcionais todas aquelas que podem ser traduzidas por uma função do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, e que são representadas graficamente por uma linha recta que passa pela origem (De Bock, 2002; De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002).

A estrutura linguística básica dos problemas envolvendo proporcionalidade directa ou relações lineares inclui quatro quantidades (a, b, c, d), das quais, na maioria dos casos, três são conhecidas e uma é desconhecida. Para determinar a quantidade desconhecida pode-se aplicar a regra de três simples ou as proporções, sendo dada pelo produto de duas das quantidades conhecidas a dividir pela terceira quantidade conhecida. Neste caso, a tendência dos alunos em aplicar o raciocínio proporcional em situações-problema para as quais não é adequado deve-se, em parte, também às características da formulação do problema, que os alunos aprenderam a associar ao raciocínio proporcional ao longo do seu percurso escolar.

Existem casos onde os problemas de partida têm uma estrutura linguística geral similar, mas que não se referem a relações proporcionais. Nestes casos, os problemas são considerados "pseudo-proportionais", por causa da forte impressão que eles criam para a aplicação do modelo linear. O problema que se segue constitui um exemplo de problema do tipo “pseudo-proporcional”: “Um pianista precisa de 5 minutos para executar um tema musical. Quanto tempo precisam três pianistas para executar o mesmo tema com a mesma orquestra?”. Assim, se um problema corresponde à estrutura linguística geral da proporcionalidade, a tendência para evocar a proporcionalidade directa pode ser extremamente forte, mesmo que não se adequa a esses problemas (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Para além da ampla aplicabilidade e do carácter universal, as relações proporcionais ou lineares também parecem auto-evidentes e intrinsecamente simples (características comuns às intuições). As proporções parecem estar profundamente enraizadas no conhecimento intuitivo dos alunos e são usadas de forma espontânea e até mesmo inconsciente, o que torna a abordagem linear natural, inquestionável e, em certa medida, inacessível à introspecção ou reflexão (De Bock et al., 2002). Nesse sentido, Rouche refere que “é a ideia da proporcionalidade que vem primeiro à mente porque, provavelmente, não há funções mais simples que as lineares” (1989, p. 17).

Durante a última década, a investigação empírica contribuiu para a compreensão do fenómeno de “ilusão da linearidade”, fornecendo dados sobre a sua dimensão e persistência em diferentes configurações experimentais (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; Modestou & Gagatsis, 2007; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004; Van Dooren, 2005; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004 e 2005). Esses autores realizaram investigações a partir de testes de papel e lápis e de algumas entrevistas, trabalhando principalmente com problemas aritméticos, geométricos ou probabilísticos, desenvolvendo materiais didácticos e implementando algumas experiências de ensino com o objectivo de superar a dependência excessiva dos modelos lineares. Em geral, os autores observaram que, apesar do uso desses materiais didácticos, durante as experiências de ensino, alguns alunos continuaram a cair na “armadilha” da proporcionalidade, aplicando-a na resolução de problemas lineares e não-lineares.

A “ilusão da linearidade” está intimamente interligada a uma clara e excessiva tendência que os alunos têm em aplicar o modelo linear em situações não-proporcionais, nomeadamente envolvendo os conceitos de área de figuras e de volume de sólidos ampliados ou reduzidos. As investigações realizadas nessa área mostram que o fenómeno de linearidade é resistente, persistente e reaparece independentemente da faixa etária e do nível académico dos alunos.

Os exemplos de aplicação incorrecta da linearidade são múltiplos. O equívoco mais conhecido proveniente de um modelo da linearidade é que se uma figura geométrica é ampliada k vezes, a sua área e/ou o seu volume tornam-se também k vezes maiores. Alguns autores (e.g., Freudenthal, 1983; NCTM, 1991; Rouche, 1989) referem que os alunos (e até mesmo professores) aderem a este princípio e são enganados pela ilusão de linearidade. Por exemplo, "muitos estudantes acreditam que se os lados de uma figura são duplicados para produzir uma figura similar, a área, bem como o seu volume será duplicado" (NCTM, 1991, pp. 114-115). Assim, os alunos aplicam um factor de escala linear em vez do seu quadrado ou cubo para determinar a área de uma figura ou o volume de um sólido ampliados ou reduzidos, respectivamente.

Recentemente, a crença geométrica de que a área de uma figura e o volume de um sólido ampliados através do factor k são também ampliados k vezes tem sido extensivamente estudada por De Bock e colaboradores (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren & Claes, 2003). Nos últimos anos, esses pesquisadores estudaram a tendência que os estudantes têm para lidar de forma linear com tarefas não-proporcionais e sugeriram maneiras de superá-la.

Em particular, De Bock et al. (1998, 2002) mostraram uma tendência forte e alarmante entre os estudantes, com idades compreendidas entre os 12 e 16 anos, de aplicarem o raciocínio proporcional para situações-problema relativamente às áreas, para as quais não era adequado. A inclusão de um suporte visual para os problemas não-proporcionais não tem revelado um efeito benéfico no desempenho dos alunos, pois a maioria, muitas vezes, invoca estratégias formais como a utilização de fórmulas (De Bock et al., 1998). Neste caso, os alunos, em alguns casos, põem de parte os resultados obtidos a partir da aplicação correcta de fórmulas de cálculo da área de uma dada figura e do volume de um sólido a favor da aplicação do modelo linear (Modestou & Gagatsis, 2007).

As estratégias de resolução e os mecanismos utilizados pelos alunos na resolução de problemas não-proporcionais foram esclarecidos por meio de entrevistas (De Bock et al., 2002; Van Dooren, De Bock, Janssens & Verschafel, 2007, 2008). Parece que os elementos explicativos do fenómeno de "ilusão da linearidade" (crença explícita numa relação linear entre comprimentos, áreas e volumes de figuras e sólidos ampliados ou reduzidos na mesma proporção) também podem ser encontrados na natureza intuitiva e heurística do modelo linear, nas deficiências do conhecimento geométrico e nos hábitos inadequados, tornando a linearidade profundamente enraizada no conhecimento intuitivo dos alunos (De Bock et al., 2002).

A maioria dos investigadores que tem estudado o raciocínio dos alunos na resolução de problemas sobre área e volume, e especificamente sobre a forte tendência de tratar de forma linear tarefas não-proporcionais, concorda que o obstáculo da linearidade é muito difícil de ser superado pelos alunos (De Bock et al, 2002; Modestou & Gagatsis, 2006). Outros estudos mostraram mesmo que não existem diferenças nas resoluções apresentadas por alunos de diferentes níveis de escolaridade nesses tipos de problemas (Modestou & Gagatsis, 2007).

Os alunos deverão ser capazes de distinguir que, por exemplo, num paralelepípedo o volume é proporcional ao comprimento somente quando a largura e a altura são mantidos constantes, e à semelhança de largura (ou altura) somente quando as outras duas variáveis são mantidas constantes. É conceptualmente importante e essencial que os alunos entendam a diferença entre o produto de duas variáveis em tarefas pseudo-proporcinais e o produto de uma variável por uma constante em problemas de proporção simples (Vergnaud, 1997). Os alunos têm que quebrar o padrão de linearidade, tornando-se conscientes do impacto multi-dimensional do aumento/diminuição.

3. Metodologia

Com este estudo pretendeu-se investigar o uso da linearidade por alunos do ensino básico, especificamente do 6.º e do 9.º anos de escolaridade, procurando responder à seguinte questão de investigação: – Que processos/abordagens de resolução são utilizados pelos alunos em tarefas que envolvam relações entre os conceitos de perímetro, área e volume?

Participaram no estudo 52 alunos do 6.º ano e do 9.º ano (26 alunos de cada ano) de uma escola básica do concelho de Santiago do Cacém. Destes alunos, 63,5% eram do sexo feminino e os restantes 36,5% do sexo masculino. As médias de idades dos alunos do 6.º ano era 12 anos e dos alunos do 9.º ano era 15 anos. O nível de desempenho na disciplina de Matemática, classificado em *Fraco*, *Satisfatório* e *Bom*, distribuía-se pelas percentagens 23%, 50% e 27%, respectivamente, em ambos os anos escolares.

Os dados foram recolhidos através de um teste, administrado aos alunos em pequenos grupos (2 a 3 elementos), tendo sido pedido aos alunos para verbalizarem os seus pensamentos e a investigadora, sempre que considerou pertinente, questionou-os no sentido de aprofundar a sua compreensão. Nas questões do teste não eram fornecidos quaisquer dados relativos às dimensões das figuras ou dos sólidos considerados.

Os dados recolhidos foram analisados através do programa *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS), versão 13.0 para Windows, considerando a classificação das respostas em correctas e incorrectas e a categorização das estratégias de resolução em lineares e não lineares.

4. Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se as respostas dadas (correctas e incorrectas) e as estratégias usadas pelos alunos na resolução das tarefas envolvendo relações entre perímetros, áreas e volumes, classificadas em: "Lineares", que correspondem à afirmação de uma relação linear; e "Não lineares", que incluem a elaboração de desenhos, concretização de variáveis e aplicação de fórmulas de cálculo. Finalmente, na categoria "Outras" incluíram-se as justificações não inteligíveis dos alunos.

4.1. Relação entre perímetros

Neste tipo de relação foram incluídas três questões: 1a), 2a) e 3a)[2], que se apresentam a seguir.

1a) Se o comprimento do lado do quadrado B é o dobro do comprimento do lado do quadrado A, o perímetro do quadrado B quantas vezes é o perímetro do quadrado A? Porquê?
2a) Se os comprimentos dos lados do rectângulo B são o triplo dos comprimentos dos lados do rectângulo A, o perímetro do rectângulo B quantas vezes é o perímetro do rectângulo A? Porquê?
3a) Se o comprimento do diâmetro do círculo B é o triplo do comprimento do diâmetro do círculo A, o perímetro do círculo B quantas vezes é o perímetro do círculo A? Porquê?

Na Tabela 1 apresentam-se os resultados obtidos nestas três questões.

Tabela 1 – Número de respostas (respostas correctas) dos alunos nas questões envolvendo a relação entre perímetros, por estratégia e ano escolar

Estratégias	1a)		2a)		3a)	
	6.º ano	9.º ano	6.º ano	9.º ano	6.º ano	9.º ano
Linear	23(23)	26(26)	24(24)	25(25)	24(24)	24(24)
Não linear	3(3)	0(0)	2(2)	0(0)	2(2)	2(0)
Outra	0(0)	0(0)	0(0)	1(0)	0(0)	0(0)
Total	**26(26)**	**26(26)**	**26(26)**	**26(25)**	**26(26)**	**26(24)**

Por observação da Tabela 1, verificamos que, na questão 1a), a totalidade dos alunos do 6.º e 9.º anos respondeu correctamente. Quanto ao tipo de estratégia utilizada, constatamos que 100% dos alunos do 9.º ano e 88,5% dos do 6.º ano recorreram à aplicação da linearidade, estabelecendo dessa forma uma relação linear entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro. Os restantes 11,5% dos alunos do 6.º ano recorreram a uma estratégia não linear, nomeadamente à aplicação de fórmulas de cálculo, concretização de variáveis e elaboração de desenhos para justificarem a sua resposta, obtendo também a resposta correcta.

Já no caso da questão 2a), a resposta correcta foi dada por todos os alunos do 6.º ano e por 96,2% dos alunos do 9.º ano. Destes, 92,3% do 6.º ano e 96,2% do 9.º ano basearam as suas respostas na aplicação de uma estratégia linear, afirmando uma relação linear entre os comprimentos dos lados do rectângulo e o seu perímetro. Os restantes alunos do 6.º ano (7,7%) recorreram a uma estratégia não linear, nomeadamente, ao uso de fórmulas, à concretização de variáveis e à elaboração de desenhos, obtendo, dessa forma, também a resposta correcta. No caso dos alunos do 9.º ano, apenas um (3,8%) respondeu incorrectamente, apresentando uma justificação ininteligível incluída na categoria Outra.

Finalmente, na questão 3a), todos os alunos do 6.º ano e 92,3% dos alunos do 9.º ano responderam correctamente, dos quais 92,3% do 6.º ano e do 9.º ano basearam as respostas na aplicação da linearidade, afirmando uma relação linear entre o diâmetro do círculo e o seu perímetro. Consequentemente, foram muito

[2] Em todas as questões consideradas nesta secção e nas secções seguintes foram omitidas as respectivas figuras incluídas nos enunciados.

poucos os alunos (7,7% em ambos os grupos) que apresentaram respostas baseadas numa estratégia não linear, as quais conduziram à resposta correcta apenas no caso do aluno do 6.º ano.

Neste tipo de questões, que relacionam um comprimento com o perímetro, esperava-se, de um modo geral, que os alunos ao basearem as suas respostas no uso da linearidade chegassem a uma resposta correcta, o que veio a verificar-se. Nas três questões aqui contempladas, o uso desse tipo de estratégia conduziu a uma elevada percentagem de respostas correctas (do intervalo 88,5%−92,3% no 6.º ano e do intervalo 92,3%−100% no 9.º ano), não se registando diferenças significativas entre os dois grupos de alunos em estudo.

4.2. Relação entre áreas

Neste tipo de relação foram incluídas quatro questões: 1b), 2b), 3b) e 4a), que se apresentam a seguir.

1b) Se o comprimento do lado do quadrado B é o dobro do comprimento do lado do quadrado A, a área do quadrado B quantas vezes é a área do quadrado A? Porquê?
2b) Se os comprimentos dos lados do rectângulo B são o triplo dos comprimentos dos lados do rectângulo A, a área do rectângulo B quantas vezes é a área do rectângulo A? Porquê?
3b) Se o comprimento do diâmetro do círculo B é o triplo do comprimento do diâmetro do círculo A, a área do círculo B quantas vezes é a área do círculo A? Porquê?
4a) Se o comprimento da aresta do cubo B é o dobro do comprimento da aresta do cubo A, a área do cubo B quantas vezes é a área do cubo A? Porquê?

Na Tabela 2 podem observar-se os resultados obtidos nestas quatro questões.

Tabela 2 – Número de respostas (respostas correctas) dos alunos nas questões envolvendo a relação entre áreas, por estratégia e ano escolar

Estratégias	1b)		2b)		3b)		4a)	
	6.º ano	9.º ano	6.º ano	9.º ano	6.º ano	9.º ano	6.º ano	9.º ano
Linear	20(0)	20(0)	22(0)	22(0)	22(0)	25(0)	24(0)	25(0)
Não linear	6(6)	6(6)	4(4)	3(3)	3(2)	1(0)	2(1)	1(1)
Outra	0(0)	0(0)	0(0)	1(0)	1(0)	0(0)	0(0)	0(0)
Total	**26(6)**	**26(6)**	**26(4)**	**26(3)**	**26(2)**	**26(0)**	**26(1)**	**26(1)**

Pela Tabela 2 verificamos que, na questão 1b), a percentagem de alunos que apresentaram a resposta correcta é, em ambos os anos, baixa e igual (23,1%), tendo sido sempre baseada em estratégias não lineares, tais como a aplicação de fórmulas de cálculo, concretização de variáveis e elaboração de desenhos. Complementarmente, constatamos que 76,9% dos alunos de ambos os anos basearam as suas respostas incorrectas na adopção da linearidade. Neste caso, a aplicação da linearidade dá origem a uma resposta incorrecta pelo facto de o comprimento do lado do quadrado não ser proporcional à sua área. Também nesta questão não se verificaram diferenças entre os dois grupos, quer na percentagem de respostas correctas quer no tipo de estratégia utilizada.

No caso da questão 2b), a adesão à linearidade, por 84,6% dos alunos em ambos os grupos, conduziu sempre a respostas incorrectas. Somente 15,4% e 11,5% dos alunos do 6.º ano e do 9.º ano, respectivamente, apresentaram a resposta correcta, baseando a sua justificação em estratégias não lineares (uso de fórmulas, concretização de variáveis e elaboração de desenhos). Mais uma vez se verifica que a grande maioria dos alunos recorreu a uma estratégia linear para obter a sua resposta, não se salientando grandes diferenças entre os dois grupos relativamente à percentagem de respostas correctas nem às estratégias utilizadas.

Na questão 3b), a grande maioria dos alunos, 84,6% do 6.º ano e 96,2% do 9.º ano, recorreu também à linearidade, o que conduziu sempre a respostas incorrectas, já que o diâmetro do círculo não é directamente proporcional à sua área. Complementarmente, constatamos que uma minoria dos alunos, 11,5% do 6.º ano e 3,8% do 9.º ano, recorreu a uma estratégia não linear (elaboração de desenhos, concretização de variáveis e aplicação de fórmulas de cálculo). Por fim, apenas um aluno (3,8%) do 6.º ano apresentou a uma justificação ininteligível incluída na categoria Outra. A percentagem de alunos que apresentou a resposta correcta é muito baixa no 6.º ano (7,7%) e mesmo nula no 9.º ano, tendo sido sempre baseado numa estratégia não linear. Nesta questão verificamos, ainda, que existe uma ligeira diferença nos grupos em estudo, quer no tipo de estratégia utilizada, quer na percentagem de respostas correctas, sendo essa percentagem ligeiramente mais elevada no grupo do 6.º ano.

Por último, na questão 4a), a percentagem de respostas correctas é muito baixa (3,8%) em ambos os grupos, o que corresponde apenas a um aluno em cada grupo. Qualquer destes dois alunos recorreu a uma estratégia não linear, nomeadamente ao uso de desenhos, à concretização de variáveis e à aplicação de fórmulas de cálculo. No entanto, salienta-se uma ligeira diferença entre os dois grupos no que se refere à adesão a estratégias não lineares, com 7,7% dos alunos do 6.º ano a recorrerem a esse tipo de estratégia, comparativamente com 3,8% dos alunos do 9.º ano. Os restantes alunos, 92,3% do 6.º ano e 96,2% do 9.º ano, recorreram à linearidade e, desse modo, apresentaram uma resposta incorrecta. Nesta questão, mais uma vez podemos verificar que existe uma ligeira diferença nos grupos em estudo, mas apenas no que diz respeito ao tipo de estratégia utilizada.

Nas questões relativas à relação entre áreas, conjecturou-se que, de um modo geral, os alunos recorreriam, tal como nas questões relativas ao perímetro, ao uso da linearidade para justificar as suas respostas nas questões 1b), 2b), 3b) e 4a), o que conduziria sempre, contrariamente ao caso dos perímetros, a respostas incorrectas. Neste tipo de estratégia, o comprimento do lado/diâmetro/aresta sendo directamente proporcional à área da figura/ sólido, levaria os alunos a aplicaram um factor linear em vez do seu quadrado para determinar a área de uma figura ampliada (reduzida) ou de um sólido ampliado (reduzido). Esta hipótese acabou por se confirmar para a maioria dos alunos de ambos os anos escolares, não se registando diferenças significativas entre ambos os grupos, quer no tipo de estratégia utilizada, quer na percentagem de respostas correctas.

4.3. Relação entre volumes

Neste tipo de relação foi apenas incluída a questão 4b), que se apresenta a seguir.

4b) Se o comprimento da aresta do cubo B é o dobro do comprimento da aresta do cubo A, o volume do cubo B quantas vezes é o volume do cubo A? Porquê?

Na tabela 3 apresentam-se os resultados obtidos nesta questão.

Tabela 3 – Número de respostas (respostas correctas) dos alunos na questão envolvendo a relação entre volumes, por estratégia e ano escolar

Estratégias	4b)	
	6.º ano	9.º ano
Linear	23(0)	25(0)
Não linear	3(1)	1(1)
Total	**26(1)**	**26(1)**

Pela Tabela 3 verifica-se que a percentagem de respostas correctas (3,8%) é novamente muito baixa em ambos os anos escolares, pois apenas um aluno de cada ano escolar respondeu correctamente. Tal como nas questões envolvendo a relação entre áreas, também nesta questão a grande maioria dos alunos recorreu à linearidade (88,5% do 6.º ano e 96,2% do 9.º ano), a qual conduziu sempre a respostas incorrectas. Os restantes alunos (11,5% 6.º ano e 3,8% do 9.º ano) recorreram a estratégias não lineares, nomeadamente, à utilização de fórmulas de cálculo, à concretização de variáveis e à elaboração de desenhos, o que permitiu a dois deles (um de cada um dos grupos) darem a resposta correcta. Mais uma vez, também nesta questão não há diferenças significativas entre os dois grupos em estudo, quer relativamente à percentagem de respostas correctas, quer em relação ao tipo de estratégia utilizada para obter a sua resposta.

Também, nesta questão, se esperava que, de um modo geral, os alunos recorressem ao uso da linearidade para obter as suas respostas e, em consequência, apresentassem uma resposta incorrecta uma vez que o comprimento da aresta do cubo não é directamente proporcional ao seu volume. Ou seja, os alunos aplicariam um factor linear em vez do seu cubo para determinar o volume de um sólido ampliado (reduzido). Tal como previsto, verificou-se que praticamente a totalidade dos alunos, de ambos os anos escolares, aderiram a essa estratégia e apresentaram esse tipo de resposta.

5. Conclusão

No presente estudo verificámos que a maioria dos alunos, do 6.º e 9.º anos, adoptou a estratégia de linearidade para responder a todas as questões. Em consequência, quando esta estratégia era adequada para a resolução das questões, como era o caso das relações entre perímetros, verificaram-se elevadas percentagens de respostas correctas, chegando mesmo a 100% nas questões 1a), 2a) e 3a) para os alunos do 6.º ano. Diferentemente, nas questões onde eram tratadas relações entre os conceitos de área e de volume, verificaram-se percentagens de respostas correctas muito baixas, sendo mesmo nula na questão 3b) para os alunos do 9.º ano. Ainda nestas últimas relações, verificou-se que a adesão à estratégia de linearidade conduziu sempre a respostas erradas, enquanto as poucas respostas correctas resultaram da aplicação de estratégias não lineares: fórmulas de cálculo, concretização de variáveis e elaboração de desenhos.

Entre os alunos dos dois anos escolares, envolvidos no estudo, não se salientaram diferenças significativas, quer em relação ao tipo de resposta, quer relativamente ao tipo de estratégia adoptada. Ora, este resultado não deixa de ser surpreendente pois ao maior tempo de aprendizagem de Geometria dos alunos do 9º ano não correspondeu um melhor desempenho.

Também Van Dooren, De Bock, Janssens e Verschaffel (2008) verificaram que, de um modo geral, os alunos usaram processos de raciocínio típicos e erróneos, todos baseados numa aplicação inadequada da proporcionalidade directa (ou inversa), nomeadamente sobre o efeito da ampliação ou redução de uma figura geométrica na sua área ou volume. Tal como no presente estudo, os alunos recorreram ao uso excessivo da linearidade, pensando que se uma figura geométrica/ sólido geométrico é aumentada(o) ou reduzida(o) k vezes, a sua área e o seu volume tornam-se k vezes maior ou menor, em vez de k^2 para a área e k^3 para o volume. Neste caso, os autores do estudo constataram que a maioria dos estudantes recorreu a um método intuitivo de proporcionalidade.

Van Dooren, Block, Weyers & Verschaffel (2004) sugeriram uma ligação entre o uso excessivo da linearidade e a teoria das regras intuitivas de Stavy e Tirosh (Stavy & Tirosh, 1996, 2000; Tirosh & Stavy, 1999), pois, por um lado, muitos dos alunos inquiridos alegaram que uma figura ampliada tem maior área porque os comprimentos dos lados aumentam (quantidade A), donde a sua área também aumenta (quantidade B), que se traduz na regra intuitiva $mais\ A - mais\ B$; e, por outro, uma vez que a figura ampliada (ou reduzida) mantém a sua forma inicial, então tudo é ampliado na mesma razão, que traduz a regra intuitiva $mesmo\ A - mesmo\ B$.

Referências

De Bock, D. (2002). The illusion of linearity: *An empirical analysis of secondary school students' improper proportional reasoning in geometry problems*. Doctoral dissertation, University of Leuven, Leuven, Belgium.

De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 311-314.

De Bock, D., Verschaffel, K., Janssens, D., Van Dooren., W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students; performance? Negative evidence from a study on modeling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13* (4), 441-463.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35,* 65-85.

Fainguelernt, E. (1999). *Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel, Dordrecht.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2004). Linear or not linear? Students' improper proportional reasoning. In G. Makrides, A. Gagatsis & K. Nicolaou (Eds.), *Proceedings of the CASTME International and CASTME Europe Conference (21-33).* Nicosia, Cyprus.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2006). Can the spontaneous and uncritical application of the linear model be questioned?. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka and N.Stehlikova (eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, Prague, Czech Republic, 169-176.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007).Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology 27*(1), 75-92.

Modestou, M., Gagatsis, A. & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: the case of area and volume of rectangular figures. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 345-352. Bergen: Norway.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE (edição original em inglês de 1989).

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (edição original em inglês de 2000).

Rouche, N. (1989). Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implications?. In Commission inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques (Ed.), La demonstration dans l'histoire (pp. 8–38). Lyon: IREM.

Stavy, R. & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: the case of "more A – more B". *International Journal of Science Education,* 18(6), 653-667.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2000). *How studentes (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: a way to explain and predict student's reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 1(3), 79-194.

Van Dooren, W. (2005). The linear imperative: A search for the roots and an evaluation of the impact of the overuse of linearity (doctoral dissertation). Leuven, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14,* 485-501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Ups and downs' is students' over-reliance on proportional methods. *Cognition and Instruction, 23* (1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). Students' over-reliance on linear methods: A scholastic effect? *British Journal of Educational Psychology, 77,* 307-321.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 311-342.

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D., & Verschaffel, L. (2004). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of 'more a-more b' and 'same a-same b'. *Educational Studies in Mathematics, 56* (3), 179-207.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. At T. Nunes, & P. Bryant (Eds.). Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective (5-28). K.: Psychology Press.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.