

BE2008 – Encontro Nacional Betão Estrutural 2008  
Guimarães – 5, 6, 7 de Novembro de 2008

## Cálculo orgânico de secções quaisquer em flexão desviada segundo o Eurocódigo 2



Hélder Miranda<sup>1</sup>



Álvaro Azevedo<sup>2</sup>



José Sena-Cruz<sup>3</sup>

### RESUMO

Neste trabalho são apresentados os resultados do desenvolvimento de um código computacional destinado à resolução de problemas de verificação e dimensionamento de secções compósitas genéricas, sujeitas a flexão composta desviada, de acordo com o Eurocódigo 2.

É efectuada a sintetização da informação relativa ao comportamento dos materiais correntemente utilizados em secções compósitas. Foram estudados modelos estruturais do comportamento de vigas sujeitas a esforços normais e de flexão, incluindo modelos propostos pela regulamentação existente. A informação recolhida permitiu estabelecer um modelo de cálculo baseado num sistema de equações não lineares correspondente ao equilíbrio estático da peça. Para evitar a manipulação de expressões demasiado complexas e para que o modelo possa ser aplicado a qualquer caso, foi concebido um algoritmo simplificado que avalia o erro associado a cada equação do sistema. Este procedimento é utilizado pelo método de Newton-Raphson, que constitui um processo iterativo destinado a calcular a solução do problema.

O modelo de cálculo e a interface gráfica foram desenvolvidos com recurso à linguagem de programação C++ e à biblioteca Microsoft Foundation Classes (MFC), tendo toda a implementação sido efectuada com base em objectos. Como resultado obteve-se um programa de utilização simples, em que a quase totalidade dos dados pode ser introduzida pela interface gráfica, e pode em seguida ser guardada em ficheiro. As fases de cálculo e de visualização dos resultados encontram-se também integradas na interface gráfica. Os resultados obtidos foram validados com base em tabelas e ábacos de situações correntes, bem como em alguns resultados publicados que correspondem a casos de flexão composta desviada em secções não correntes.

### PALAVRAS-CHAVE

Software em C++, cálculo orgânico, Eurocódigos.

<sup>1</sup> Universidade do Porto. Departamento de Engenharia Civil, Rua Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465 Porto. [david.feup@yahoo.com](mailto:david.feup@yahoo.com)

<sup>2</sup> Universidade do Porto. Departamento de Engenharia Civil, Rua Dr. Roberto Frias, s/n 4200-465 Porto. [alvaro@fe.up.pt](mailto:alvaro@fe.up.pt)

<sup>3</sup> Universidade do Minho. Departamento de Engenharia Civil, 4800-058 Guimarães. [jsena@civil.uminho.pt](mailto:jsena@civil.uminho.pt)

## 1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de um código computacional, para cálculo de secções compósitas à ruptura, sujeitas a esforços normais e de flexão. Em certos casos simples é possível deduzir expressões analíticas que permitem resolver o referido problema. Existem expressões, tabelas e ábacos adequados a casos particulares de secções de betão armado [1,2], calculados quer de acordo com o REBAP [3], quer segundo o EC2 [4]. No entanto é necessário referir que este tipo de problema na sua forma mais genérica, i.e., em casos de flexão composta desviada em secções de geometria qualquer, não tem solução analítica, nem seria viável construir tabelas ou ábacos que abrangessem todos os casos possíveis. Esta situação torna-se ainda mais evidente se as relações tensões-extensões e, conseqüentemente, os tipos de material não forem fixados à partida, sendo um dado do problema.

Compreende-se assim o interesse inerente ao desenvolvimento de um programa de cálculo automático que permite efectuar cálculos em elementos como vigas caixão de pontes, núcleos rígidos de edifícios ou ainda em secções que utilizem materiais menos convencionais.

O presente programa de cálculo automático não deixa no entanto de facilitar a resolução dos problemas mais convencionais e de se encontrar preparado para respeitar quer a regulamentação do REBAP [3], quer a regulamentação do EC2 [4]. Por outro lado, pretendia-se um software que pudesse ser utilizado na prática com grande simplicidade e que apresentasse uma elevada portabilidade. Deste modo justifica-se o inevitável envolvimento de conceitos relacionados com o desenho assistido por computador ou a aplicação do paradigma da programação orientada por objectos, de forma a conseguir-se uma maior facilidade para o utilizador na definição dos problemas, bem como uma eficaz representação das soluções obtidas.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO

### 2.1 Introdução

O equilíbrio estático de uma secção compósita genérica (e.g. betão armado) sujeita à flexão composta desviada pode ser traduzido matematicamente pelo sistema (1), que consiste no equilíbrio de esforços axiais ( $N$ ), momentos flectores na direcção  $x$  ( $M_x$ ) e na direcção  $y$  ( $M_y$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum N = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

No âmbito do presente trabalho são sempre consideradas como incógnitas a inclinação do eixo neutro e o tipo de rotura que ocorre na secção, definidas com recurso a duas variáveis,  $\beta$  e  $D$ , respectivamente. É necessário escolher uma terceira incógnita, que pode ser a área de armaduras a dimensionar ou um dos esforços resistentes, dado que o sistema dispõe três equações.

Uma vez que as equações que constituem o sistema (1) não são lineares, utiliza-se um método iterativo para a sua resolução numérica com base em aproximações sucessivas (método de Newton-Raphson).

No âmbito do software desenvolvido, apenas é necessário criar uma subrotina que fornece os três desequilíbrios ( $\Delta N$ ,  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ) e juntá-la ao programa genérico de resolução de um qualquer sistema de equações não lineares. Os referidos desequilíbrios são calculados a partir das resultantes das tensões nos materiais e respectivos pontos de aplicação para cada conjunto de valores das incógnitas.

Assim, fornecendo ao programa as características dos materiais utilizados, bem como os contornos da secção e posicionamento das armaduras, obtêm-se os esforços resistentes ou a área total da armadura.

## 2.2 Definição da secção e materiais

O modelo desenvolvido aplica-se a uma secção qualquer, a qual deve estar definida pelos vértices constituintes dos polígonos que a delimitam e pela posição das armaduras. Estas coordenadas podem ser apresentadas segundo um qualquer referencial cartesiano, tendo em atenção que os esforços são aplicados na sua origem. São considerados como positivos os esforços axiais de tracção e os momentos que possuam o respectivo vector no sentido positivo dos eixos, segundo a regra do “sacacrolhas”. São consideradas positivas as extensões de alongamento.

No modelo utilizado define-se material base como o material pelo qual a secção é essencialmente constituída. Assim, por exemplo, no caso de uma secção em betão armado, o material base é o betão. Um dado material base é caracterizado pela sua curva tensão-extensão.

Os materiais que constituem as armaduras da secção (por exemplo aço ou FRP) são igualmente caracterizados por curvas tensão-extensão. O modelo adoptado permite definir diagramas bi-lineares. O modelo à tracção pode ser distinto do modelo à compressão.

Se as armaduras em causa estiverem sob o efeito de uma tensão inicial, correspondente a um pré-esforço, é igualmente possível estabelecer esse valor na altura em que se define a secção a calcular.

## 2.3 Equações de equilíbrio

Para satisfazer a condição de dimensionamento em Estado Limite Último é necessário resolver o sistema de equações (2), que pode ser traduzido como um sistema não linear.

$$\begin{cases} N = \sum F_c + \sum F_s + \sum F_p \\ M_x = \sum F_{ci} z_{cxi} + \sum F_{sj} z_{sxj} + \sum F_{pk} z_{pxk} \\ M_y = \sum F_{ci} z_{c yi} + \sum F_{sj} z_{syj} + \sum F_{pk} z_{pyk} \end{cases} \quad (2)$$

Este sistema tem como incógnitas o domínio,  $D$ , a inclinação do eixo neutro,  $\beta$ , e um esforço resistente,  $N$ ,  $M_x$  e  $M_y$ , ou a área de armadura,  $A_s$  (ver Figs 1 e 2). As componentes principais do sistema são:  $F_c$  a força resultante das tensões no material base,  $F_s$  a força resultante na armadura e  $F_p$  a força resultante nas armaduras pré-esforçadas e,  $(z_{cx}, z_{cy})$ ,  $(z_{sx}, z_{sy})$  e  $(z_{px}, z_{py})$  as coordenadas das resultantes no material base, na armadura e nas armaduras pré-esforçadas, respectivamente.

## 2.4 Domínios de deformação

O conjunto dos campos de extensão compatíveis com a ruptura da secção (domínios de deformação) é parametrizado recorrendo a uma variável real  $D$ . Esta toma valores entre um e quatro, representando cada valor inteiro a transição entre diferentes tipos de rotura [5].

O domínio 1 é aquele onde a rotura ocorre por tracção simples, quando se atinge a extensão última em algum dos pontos em que esteja colocada armadura. O domínio 2 ocorre quando as extensões da secção atingem os valores últimos tanto na zona comprimida como na zona traccionada. O domínio 3 corresponde a uma transição em que a secção deixa de estar parcialmente em tracção e passa a estar totalmente comprimida. Finalmente, o domínio 4 corresponde à rotura por compressão simples, estando limitada a um determinado valor que depende do material base. No Quadro 1 são apresentados os valores limite das extensões para cada valor inteiro de  $D$ .

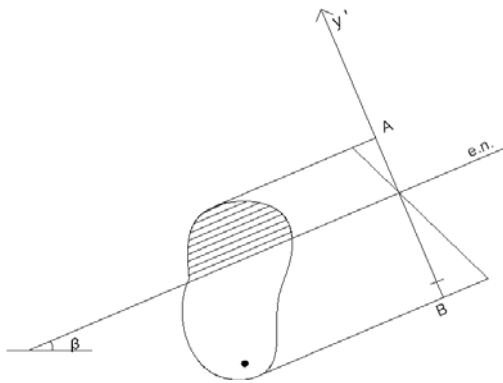


Figura 1. Secção genérica com diagrama de extensões.

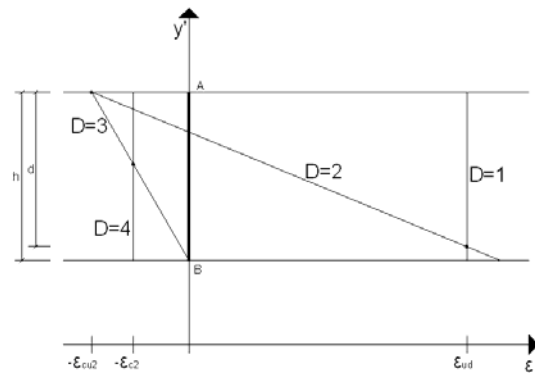


Figura 2. Diagrama dos domínios de deformação.

Quadro 1. Domínios de deformação.

| $D$ | $\epsilon_{sup}$ | $\epsilon_{inf}$ |
|-----|------------------|------------------|
| 1   | $\epsilon_{ud}$  | $\epsilon_{ud}$  |
| 2   | $\epsilon_{cu2}$ | $K$              |
| 3   | $\epsilon_{cu2}$ | 0                |
| 4   | $\epsilon_{c2}$  | $\epsilon_{c2}$  |

O valor de  $K$  é determinado como sendo a maior extensão de tracção possível na fibra do material base mais abaixo do eixo neutro, sem que nenhuma das armaduras ultrapasse o seu valor limite da extensão de tracção. Note-se que o valor de  $K$  não é forçosamente condicionado pela armadura em tracção mais abaixo do eixo neutro.

## 2.5 Esforços resultantes

A força e os momentos correspondentes ao funcionamento mecânico do material base resultam da actuação de um campo de tensões. As suas resultantes são assim calculadas recorrendo a integrais de superfície, referidos nas expressões que se seguem.

$$F_x = \int_A \sigma(x, y) dA \quad (3)$$

$$M_x = \int_A y \sigma(x, y) dA \quad (4)$$

$$M_y = - \int_A x \sigma(x, y) dA \quad (5)$$

As curvas tensão-extensão do material base não são definidas à partida por expressões analíticas e o domínio de integração limitado pelos contornos da secção pode ser irregular. Esta situação leva a que os integrais referidos nas expressões (3), (4) e (5) sejam calculados recorrendo a processos numéricos. Detalhes sobre o processo numérico adoptado no presente caso podem ser encontrados noutra publicação [6].

Os esforços resultantes nas armaduras são calculados com base nas relações tensão-extensão de cada material. Assim, conhecida a extensão em cada ponto em que a armadura é colocada é possível obter a tensão. Multiplicando o valor da tensão pela área obtém-se a respectiva força actuante no ponto. O momento correspondente a cada ponto calcula-se multiplicado a força pelo respectivo braço.

No caso de a armadura em causa ser pré-esforçada, a força resultante é composta por duas parcelas, uma devida à tensão aplicada inicialmente e outra causada pela variação de extensão (variação da tensão do pré-esforço efectivo). Tendo em atenção que o pré-esforço aplicado está na sua totalidade no lado da resistência e que se trata de um dimensionamento ou verificação de uma estrutura hiperestática, no momento actuante ( $M_{Ed}$ ) deve ser adicionada a parcela correspondente ao momento hiperestático de pré-esforço.

## 2.6 Resolução do sistema de equações de equilíbrio

Para a resolução do sistema de equações não lineares recorre-se a um processo numérico iterativo baseado no método de Newton-Raphson. Tendo em vista um aumento da robustez do algoritmo foi implementada uma técnica de “line-search”. Mais detalhes sobre a implementação destes algoritmos podem ser encontrados noutra publicação [6].

## 3. PROGRAMA CSANALYSIS

O programa desenvolvido foi designado por CSAnalysis. Para além de incluir o modelo numérico descrito na secção anterior, este programa apresenta um certo nível de complexidade, inerente ao modo de interacção do utilizador com o núcleo de cálculo e à necessidade de gerir diversas estruturas de dados. Assim, para além de um núcleo de cálculo robusto, o programa possui ainda as seguintes características:

- permite abrir e guardar as secções em ficheiros;
- permite criar e utilizar materiais armazenados em ficheiros;
- apresenta uma arquitectura baseada num programa de CAD, permitindo a introdução e modificação de dados segundo uma ordem o mais arbitrária possível, quer pelo rato, quer pelo teclado;
- mostra uma grelha de apoio à introdução de coordenadas e mecanismos de controlo das condições de visualização;
- permite o cálculo e a representação das soluções correspondentes ao Estado Limite Último;
- permite o cálculo da posição do centro de gravidade da secção considerando apenas o material base, bem como outras características geométricas da secção;
- dispõe de um assistente para a criação rápida das secções mais correntes (circular, rectangular ou em T).

Detalhes sobre a implementação da interface com o utilizador essencialmente estruturada segundo uma lógica de objectos podem ser encontradas noutra publicação [6]. O aspecto geral do programa encontra-se na Fig. 3.

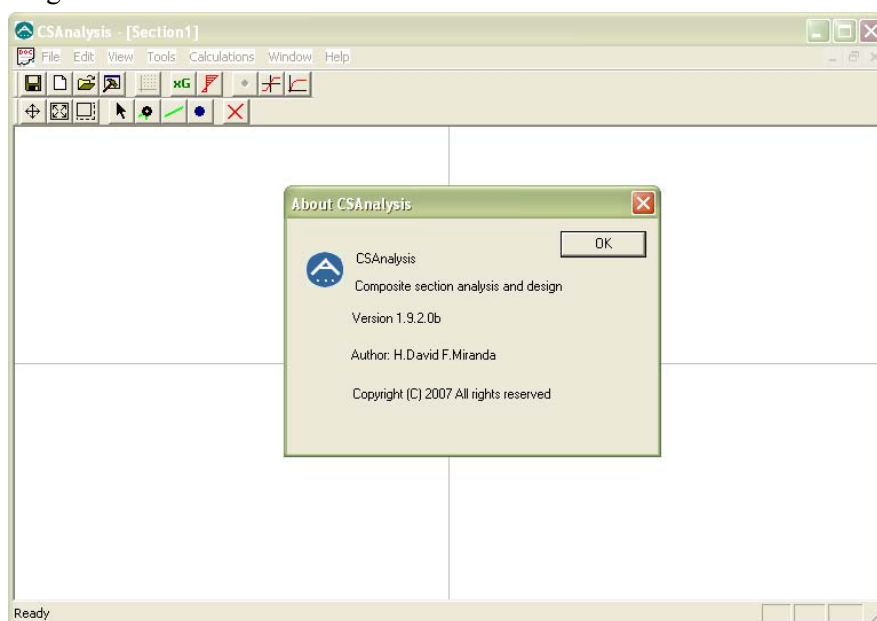


Figura 3. Interface do programa CSAnalysis

#### 4. EXEMPLOS DE CÁLCULO

Nesta secção apresentam-se alguns exemplos de cálculo, procurando-se escolher secções realistas do ponto de vista da engenharia civil. Os exemplos apresentados exploram as potencialidades do programa CSAnalysis e permitem comprovar os seus resultados.

##### 4.1 Dimensionamento de uma secção rectangular em flexão simples

Pretende-se fazer o dimensionamento das armaduras de uma secção rectangular, nas condições da Fig. 4. O material base utilizado é o betão da classe C20/25 e o material das armaduras é o aço S400 B. Os varões de armadura devem ser dispostos de modo que 80% da área total de armadura fique localizada no banzo inferior e os restantes 20% no banzo superior. A secção deverá resistir a um momento flector de cálculo relativamente ao eixo horizontal de 250 kN·m.

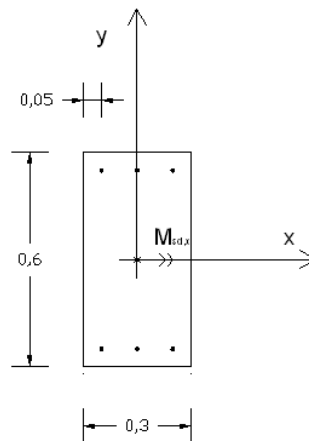


Figura 4. Secção rectangular cuja armadura se pretende dimensionar. Nota: as cotas encontram-se em metros.

Para obter a solução recorrendo ao programa CSAnalysis, modelou-se uma secção nas condições da Fig. 4, com armadura 3Ø16 na face inferior e 3Ø8 na face superior. O resultado do dimensionamento e os correspondentes diagramas de extensões e tensões no material base são indicados nas Fig. 5 e Fig. 6, respectivamente.

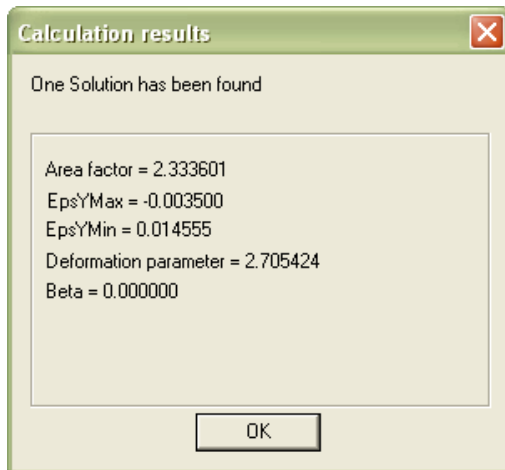


Figura 5. Resultados do dimensionamento da secção com o programa CSAnalysis.

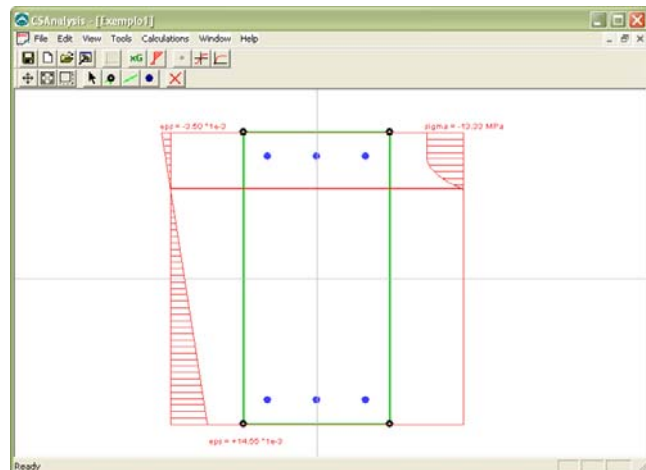


Figura 6. Diagramas de extensões e tensões no material base para a secção dimensionada.

Concluiu-se que é necessária uma área total de armadura 2.334 vezes superior à adoptada inicialmente. Sendo assim é necessária uma área total de 17.61 cm<sup>2</sup> de armadura. Concluiu-se igualmente que a ruptura ocorre com o aço do banzo inferior em situação de cedência.

#### 4.2 Verificação da capacidade resistente de uma secção circular em compressão simples

Pretende-se verificar a capacidade resistente da secção circular indicada na Fig. 7. A secção fica sujeita a um esforço axial de compressão simples. Os materiais utilizados são o betão da classe C25/30 e o aço S500 C.

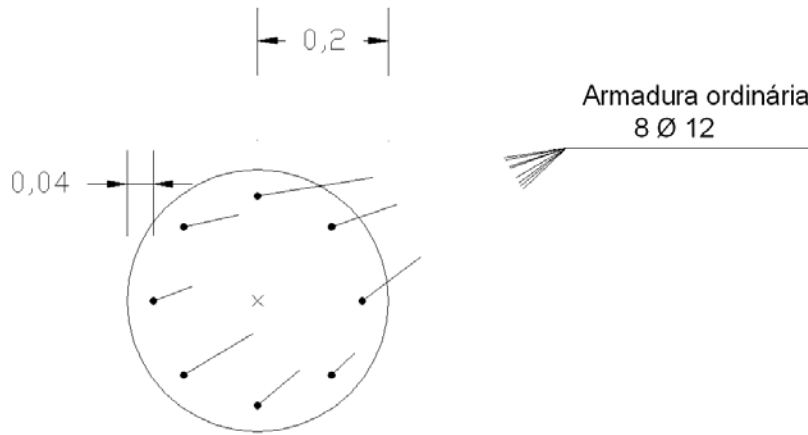


Figura 7. Secção circular. Nota: as cotas encontram-se em metros.

O programa CSAnalysis forneceu duas situações extremas em que a secção atinge o limite da capacidade resistente, tal como se encontra indicado nas Figs 8 e 9.

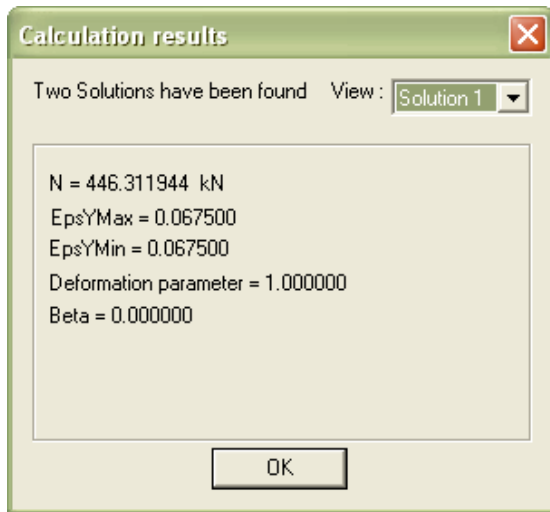


Figura 8. Primeira solução obtida com o programa CSAnalysis.

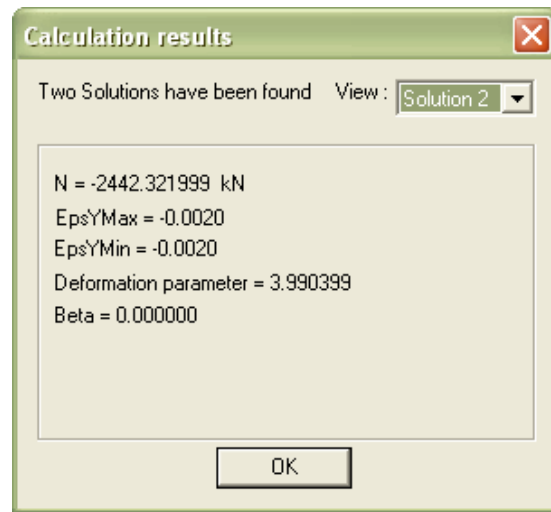


Figura 9. Segunda solução obtida com o programa CSAnalysis.

A primeira solução (ver Fig. 8) corresponde ao funcionamento da peça como tirante, i.e., em tracção simples. A correspondente força de tracção máxima é de 446 kN.

A segunda solução (ver Fig. 9) corresponde a um funcionamento em compressão simples, sendo suportado um esforço axial de compressão máxima de 2442 kN. Os correspondentes diagramas de extensões e tensões no material base encontram-se na Fig. 10. Como se pode verificar, em toda a área abrangida pelo material base é atingido o limite de extensão em compressão simples permitido pelo EC2 [4].





Conclui-se que para os esforços  $N_{Ed} = 0$  kN e  $M_{Ed,y} = -25\,000$  kN·m, o momento  $M_x$  pode variar entre 4 236 kN·m e -59 975 kN·m verificando-se sempre a existência de segurança.

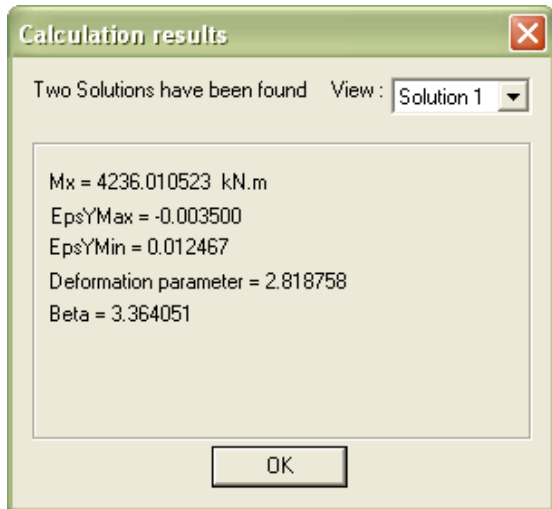


Figura 13. Primeira solução obtida com o programa.

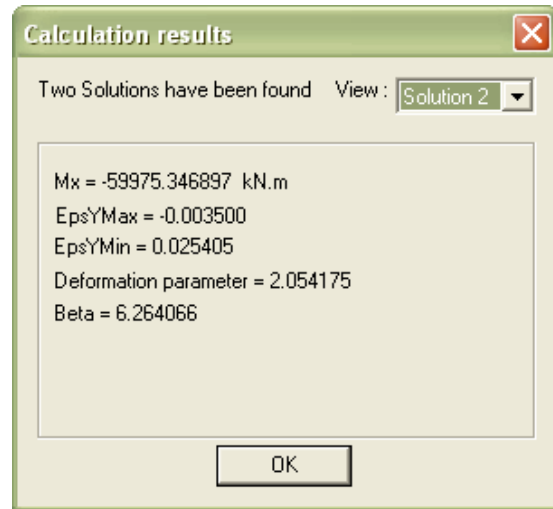


Figura 14. Segunda solução obtida com o programa.

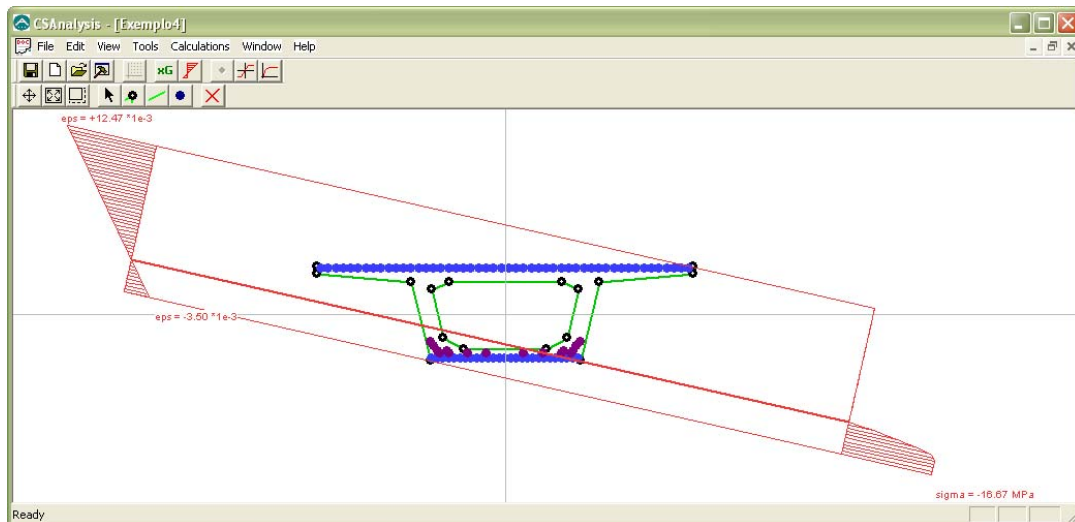


Figura 15. Diagramas de extensões e tensões no material base correspondentes à primeira solução.

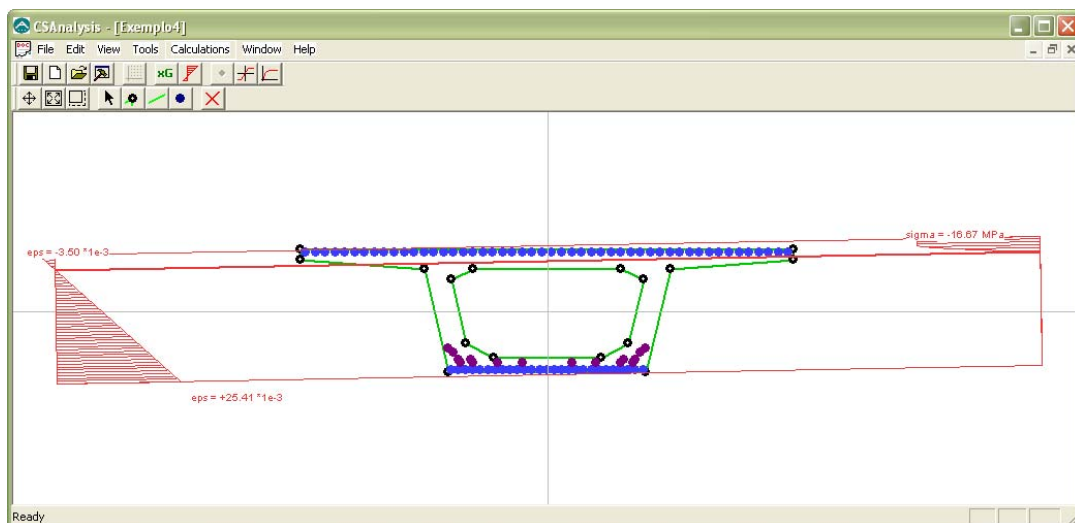


Figura 16. Diagramas de extensões e tensões no material base correspondentes à segunda solução.

## **5. CONCLUSÕES**

O programa CSAnalysis apresenta mais de 7500 linhas de código distribuídas por 138 ficheiros e ainda outros ficheiros de apoio que não contêm código computacional propriamente dito. O facto de o código ter sido escrito com base num paradigma orientado por objectos permite uma fácil adaptação a novas situações que não tenham sido previstas no código original, adicionando e/ou adaptando classes de objectos utilizadas pelo programa. Se se pretender rescrever o programa de tal forma que os materiais de reforço apresentem curvas tensão-extensão que não se encontrem definidas por troços lineares, mas sim por uma função parametrizada, é suficiente modificar a classe de objectos correspondente ao material. Algumas das classes podem além disso ser reaproveitadas para outros programas orientados por objectos. Assim, se por exemplo existir a necessidade de relacionar dois sistemas de coordenadas no plano, é possível reaproveitar na íntegra a classe que foi escrita no âmbito deste programa, adicionando-lhe, se necessário, novas funcionalidades.

O programa desenvolvido cumpre todos os requisitos de robustez, generalidade de problemas que pode resolver e facilidade de utilização para os quais foi concebido. Apresenta ainda tempos de execução muito baixos na resolução do problema de flexão composta desviada, sendo esta a fase mais exigente em termos de cálculo. Alguns módulos podem ser incorporados em outras aplicações, como por exemplo em programas de cálculo de estruturas reticuladas, podendo inclusive ser adoptados por outras plataformas e sistemas operativos, uma vez que se encontram escritos em linguagem C++, que é uma das linguagens mais utilizadas em software comercial, encontrando-se amplamente divulgada.

## **REFERÊNCIAS**

- [1] D'ARGA E LIMA, J. [et al.] - Betão Armado – Esforços normais e de flexão. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1991.
- [2] SENA-CRUZ, J.M.; LOURENÇO, P.B. - Flexão simples: análise comparativa REBAP vs. EC2. Actas das 4<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 2006. 15 p.
- [3] REBAP. 1983 - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado. Imprensa Nacional Casa da Moeda, Lisboa.
- [4] Eurocode 2. 2004 - Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Comité Européen de Normalisation (CEN), EN 1992-1-1:2004: E, Brussels.
- [5] FERREIRA, A.; AZEVEDO, A. - Cálculo da capacidade resistente e dimensionamento de armaduras de secções quaisquer de betão armado e pré-esforçado sujeitas a flexão composta desviada. Actas do 2º Encontro Nacional de Estruturas Pré-Esforçadas, Porto, 1988. 12 p.
- [6] MIRANDA, H. - Cálculo orgânico de secções quaisquer em flexão desviada segundo o Eurocódigo 2. Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de Mestre em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2008. 106 p.