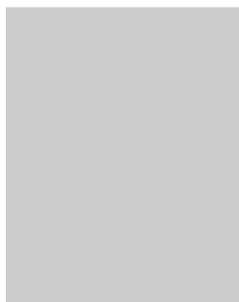


*BE2008 – Encontro Nacional de Betão Estrutural 2008  
Guimarães – 5, 6, 7 de Novembro de 2008*

## **Comparação de programas comerciais para dimensionamento de lajes em betão armado**



**Paulo B. Lourenço<sup>1</sup>**



**João Pereira<sup>2</sup>**



**Joaquim O. Barros<sup>3</sup>**

### **RESUMO**

Devido à evolução contínua de programas de cálculo, é impensável efectuar projectos de estabilidade nos dias de hoje sem o auxílio destas ferramentas. As dificuldades associadas à análise e dimensionamento automático de lajes em betão armado parecem representar um cenário de interesse significativo para a comunidade técnica. No presente trabalho comparam-se os resultados de três programas comerciais de cálculo de lajes em termos de deslocamentos, esforços e armadura. Para esse efeito são consideradas uma laje quadrada simplesmente apoiada, uma laje em L (descontinuidade geométrica) e uma laje fungiforme (descontinuidade de carga devido ao apoio isolado), apresentando-se recomendações a adoptar na modelação. As possíveis estratégias de modelação para lajes contínuas fungiformes são discutidas, tendo em vista uniformizar os esforços associados a forças pontuais.

### **PALAVRAS-CHAVE**

Cálculo automático; Benchmarking; Dimensionamento de lajes; Lajes fungiformes; Método dos elementos finitos.

<sup>1</sup> ISISE, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, 4800-058 Guimarães. [pbl@civil.uminho.pt](mailto:pbl@civil.uminho.pt)

<sup>2</sup> ISISE, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, 4800-058 Guimarães. [jpereira@bragatel.pt](mailto:jpereira@bragatel.pt)

<sup>3</sup> ISISE, Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, 4800-058 Guimarães. [barros@civil.uminho.pt](mailto:barros@civil.uminho.pt)

## **1. INTRODUÇÃO**

A revista oficial do Instituto Britânico de Engenheiros Civis, “The Structural Engineer”, possui a seguinte definição: “A engenharia de estruturas é a ciência e a arte de projectar e realizar, com economia e elegância, edifícios, pontes e outras estruturas de forma a que possam resistir às forças a que estão submetidas”. Esta definição é discutível mas a declaração que a engenharia é simultaneamente arte e ciência é muito interessante, uma vez que estes adjectivos não são correntemente aplicados a esta actividade.

De facto, a concepção de uma estrutura pode envolver a mesma imaginação, síntese da experiência adquirida e conhecimento que um artista utiliza, necessitando posteriormente da aplicação de um método científico para a análise [1]. A definição acima inclui ainda as ideias das restrições económicas introduzidas pelo mercado, baseado no princípio do melhor uso dos recursos, da elegância auto-imposta pelos melhores projectistas, e da segurança, uma vez que se a estrutura sofrer colapso, todos os restantes aspectos perdem o significado.

De uma forma pragmática, é possível entender o projecto como um processo com as seguintes fases: Definição, concepção, dimensionamento, e especificação e comunicação [2]. A definição inclui a análise e formulação do problema; a concepção inclui a proposta de uma solução para o problema; representando a parte mais nobre o processo; o dimensionamento inclui a análise estrutural; a especificação e comunicação incluem as peças desenhadas e as especificações relativas à execução e aos materiais. Obviamente que iterações são possíveis e, muitas vezes, as diferentes fases do projecto decorrem em simultâneo [3]. Todas as fases referidas são importantes para o sucesso da engenharia de estruturas, ainda que a formação universitária se concentre na análise estrutural e dimensionamento. No entanto, a Comissão de Ciência e Tecnologia da “U.S. House of Representatives” identificou seis factores críticos para prevenir erros: (a) Comunicação e organização; (b) Inspeção; (c) Qualidade do projecto; (d) Pormenorização das ligações e desenhos; (e) Equipa técnica; (f) Distribuição atempada da informação. A redução de tempo associada à utilização de programas de cálculo automático deveria permitir mais tempo para a criação e análise de resultados mas, em geral, parece apenas permitir que os engenheiros produzam maior volume de trabalho com menor pensamento criativo.

Devido à evolução contínua de programas de cálculo, é impensável efectuar projectos de estabilidade nos dias de hoje sem o auxílio destas ferramentas. A utilização de programas adequados é, então, uma condição necessária para um bom projecto, não sendo no entanto condição suficiente. A Universidade do Minho dedicou especial atenção à validação de estruturas porticadas em betão armado [4,5] e, mais recentemente, para estruturas de alvenaria [6]. As dificuldades associadas à análise e dimensionamento automático de lajes em betão armado parecem representar um cenário de interesse significativo para a comunidade técnica. De facto, desde 2005, o primeiro autor participou num conjunto de cinco cursos de formação contínua sobre este tema, realizados na Holanda e na Bélgica e coordenados pelo Professor J. Blaauwendraad da Universidade Técnica de Delft, que totalizaram um total de 170 formandos.

No presente trabalho comparam-se os resultados de três programas comerciais de cálculo de lajes, em termos de deslocamentos, esforços e armadura. Para esse efeito são consideradas uma laje quadrada simplesmente apoiada, uma laje em L (descontinuidade geométrica) e uma laje fungiforme (descontinuidade de carga devido ao apoio isolado). Discute-se ainda as possíveis estratégias de modelação a adoptar em lajes contínuas fungiformes.

## **2. DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS DE CÁLCULO ADOPTADOS**

As propriedades de uma laje dependem da relação entre a sua espessura e as restantes dimensões [7], podendo classificar-se em dois tipos relevantes para este trabalho: Lajes “delgadas” e “espessas”. Nas lajes delgadas admite-se que: (i) a superfície média da laje apenas se desloca segundo um eixo

perpendicular ao plano do elemento; (ii) as normais à superfície média indeformada permanecem rectilíneas, o que é equivalente a dizer que se despreza o efeito de corte na deformação da laje; (iii) as tensões ortogonais à superfície média da estrutura são desprezáveis. Com estas hipóteses, é possível escrever as extensões a partir dos deslocamentos, que são função das coordenadas no plano da laje. Pelo contrário, as lajes espessas assemelham-se a um problema elástico tridimensional.

As teorias de Mindlin/Reissner e de Kirchhoff são as mais utilizadas na simulação por elementos finitos do comportamento de estruturas laminares. Na teoria de Kirchhoff é necessário garantir a continuidade do deslocamento transversal e das suas primeiras derivadas entre elementos adjacentes. Na teoria de Mindlin/Reissner, que contempla a deformação por corte, a rotação é independente do deslocamento transversal podendo-se utilizar funções de forma mais simples para assegurar a continuidade do campo dos deslocamentos [8].

O dimensionamento estrutural corrente inclui duas etapas. Numa primeira etapa, obtêm-se os esforços assumindo comportamento linear, recorrendo neste caso a um programa de elementos finitos. Numa segunda fase, procede-se ao dimensionamento, que se traduz numa análise à rotura ao nível da secção, calculando a quantidade de armadura e verificando o esmagamento do betão. No caso de vigas e pilares, os modelos de dimensionamento estão consolidados. Pelo contrário, no caso de lajes, os modelos de dimensionamento parecem ainda estar pouco consolidados. A EN 1992 relegou este aspecto para a parte de pontes, EN 1992-2:2005 [9], tendo-o retirado das regras gerais e regras para edifícios, e eliminou as regras de dimensionamento para lajes da pré-norma europeia. Neste artigo não serão referidos os modelos para dimensionamento, recomendando-se a leitura de [10-12] para uma ampla discussão.

Os programas comerciais utilizados na presente análise comparada são os seguintes: CYPECAD, ROBOT MILLENIUM e SAP 2000. Adopta-se ainda na comparação o programa FEMIX, desenvolvido por docentes da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, e da Universidade do Minho, uma vez que permite maior controlo dos elementos finitos utilizados e possui implementada a formulação de dimensionamento de lajes de Lourenço e Figueiras [10,11].

## **2.1 CYPECAD**

Para o cálculo efectuado por este software, a laje é substituída por uma grelha de 0.25 m de lado. As hipóteses de deformação por corte e diafragma rígido nos pisos são assumidas. A solução para o cálculo da armadura é baseada nos momentos Wood-Armer.

O programa apresenta como resultados os diagramas de esforços, os deslocamentos verticais, as quantidades de armaduras, e a pormenorização das armaduras. Relativamente aos diagramas de esforços, o programa apresenta o diagrama de momentos flectores, de momentos torsores, de esforço transversal e de esforço transversal total. Apresenta ainda um diagrama de deslocamentos verticais e os diagramas de quantidades de armadura.

## **2.2 ROBOT MILLENIUM**

Neste programa, adopta-se um elemento de laje com deformação por corte. A discretização da laje é obtida através de uma malha de elementos finitos, com um nível de refinamento personalizado pelo utilizador. Os elementos utilizados são do tipo quadrangulares ou triangulares, e quadráticos ou lineares. A solução para o cálculo da armadura pode seguir três metodologias distintas detalhadas no respectivo manual.

O ROBOT apresenta como resultados as colorações para os esforços e deslocamentos verticais. No que respeita aos esforços, apresenta colorações de momentos flectores, momentos torsores, esforço transversal e esforço transversal total.

### **2.3 SAP 2000**

A discretização de uma laje neste programa é obtida através de uma malha de elementos finitos, com nível de refinamento personalizado pelo utilizador. Os elementos utilizados por este programa são do tipo quadrangulares ou triangulares lineares, de quatro ou três nós, respectivamente. Neste programa, a laje pode ser representada por elementos de Kirchhoff (“Thin”) ou de Mindlin/Reissner (“Thick”). O método sanduíche de três camadas é adoptado no cálculo da armadura.

O SAP2000 apresenta como resultados as colorações para os esforços e deslocamentos verticais. Em relação aos esforços, apresenta colorações de momentos flectores, momentos torsores, esforço transversal e esforço transversal total.

### **2.4 FEMIX**

Neste programa, adopta-se um elemento de laje com deformação por corte. A discretização da laje é obtida através de uma malha de elementos finitos, com um nível de refinamento personalizado pelo utilizador. Os elementos utilizados são do tipo quadrangulares ou triangulares, e quadráticos ou lineares. A solução para o cálculo da armadura está de acordo com Lourenço e Figueiras [10,11].

O FEMIX apresenta como resultados as colorações para os esforços, deslocamentos verticais e armaduras. Em relação aos esforços, apresenta colorações de momentos flectores, momentos torsores e esforços transversos.

## **3. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EM PAINÉIS ISOLADOS DE LAJES MACIÇAS**

Nesta secção é feita a comparação de resultados em três painéis de laje maciça: (i) uma laje  $6 \times 6 \text{ m}^2$  simplesmente apoiada; (ii) uma laje em “L” simplesmente apoiada; (iii) uma laje  $6 \times 6 \text{ m}^2$  fungiforme maciça. Com excepção do CYPECAD, que impõe ligações próprias com vigas ou pilares de contorno, no caso das lajes simplesmente apoiadas foram impedidos os deslocamentos verticais em todo o contorno e as rotações segundo o eixo perpendicular a cada alinhamento do contorno. No caso da laje fungiforme, os pilares foram modelados com molas nos cantos do pilar, com rigidez axial de  $\frac{1}{4}$  da rigidez axial do pilar.

### **3.1 Laje $6 \times 6 \text{ m}^2$ simplesmente apoiada**

A laje indicada é quadrada, simplesmente apoiada em todo o seu contorno, com uma espessura de 0.16 m e constituída por betão da classe C25/30 e aço da classe A500. Foi adoptado uma acção de cálculo  $p_{sd}=15.5 \text{ kN/m}^2$ . Inicialmente procedeu-se a um estudo relativamente ao refinamento da malha a utilizar, com excepção do CYPE que não permite alterar a malha, ver o Quadro 1. Os modelos adoptados para análise foram os modelos com 500 mm de largura do elemento. A diferença máxima foi obtida para o esforço de corte no modelo SAP-Thin com 25.3% de diferença relativamente à referência, ver Quadro 2. Este modelo afasta-se dos restantes no esforço de corte, enquanto os restantes modelos são muito próximos. Quanto às diferenças nos deslocamentos, o CYPE (diferença de 24.5% relativamente à referência) não utiliza o MEF para a discretização de lajes de betão armado, conduzindo a um valor maior, enquanto que nos restantes modelos as diferenças não atingem um ponto percentual.

As Figuras 1 e 2 apresentam as colorações de deslocamentos, esforços e quantidades de armadura para esta laje, as quais possuem forma semelhante em todos os programas. Para mais fácil comparação apresentam-se gráficos que traduzem a evolução de esforços a meio vão.

Quadro 1. Valores máximos de esforços e deslocamentos para a laje 6×6 em função da malha.

	Largura do elemento [mm]	Vx [kN/m]	Mx [kNm/m]	Mxy [kNm/m]	Uz [mm]	Asb [cm <sup>2</sup> /m]
SAP- Thick	125	30.48	24.74	20.73	7.55	5.52
	250	29.54	24.83	20.68	7.55	5.58
	300	29.24	24.89	20.65	7.56	5.61
	500	29.66	25.26	20.50	7.57	5.75
	600	35.99	25.31	20.41	7.58	5.82
SAP- Thin	125	26.10	24.71	20.70	7.52	5.51
	250	25.19	24.74	20.59	7.52	5.54
	300	24.84	24.74	20.52	7.52	5.60
	500	23.51	24.81	20.22	7.52	5.64
	600	22.88	24.86	20.03	7.52	5.68
FEMIX	250	31.45	24.75	20.86	7.55	4.51
	300	31.45	24.78	20.90	7.55	4.62
	500	31.45	24.90	21.09	7.55	4.65
	600	31.45	24.99	21.20	7.55	4.67
ROBOT	250	31.45	24.75	20.86	7.55	5.06
	300	31.45	24.78	20.90	7.55	5.10
	500	31.45	24.90	21.09	7.55	5.13
	600	31.45	24.99	21.20	7.55	5.15

Quadro 2. Valores máximos de esforços e deslocamentos para a laje 6×6 nos diferentes programas. A percentagem indicada em parêntesis é a diferença relativamente a [7] ou a média dos programas na ausência de referência bibliográfica

	Vx [kN/m]	Mx [kNm/m]	Mxy [kNm/m]	Uz [mm]	Asb [cm <sup>2</sup> /m]	Ast [cm <sup>2</sup> /m]
CYPE	30.37 (3.5%)	24.33 (9.1%)	23.97 (12.1%)	9.37 (24.5%)	4.81 (7.5%)	4.55 (0.2%)
SAP-Thick	29.66 (5.8%)	25.26 (5.6%)	20.50 (4.1%)	7.57 (0.6%)	5.75 (10.6%)	4.87 (6.8%)
SAP-thin	23.51 (25.3%)	24.81 (7.3%)	20.22 (5.4%)	7.52 (0.0%)	5.64 (8.5%)	4.49 (1.5%)
Femix	31.45 (0.1%)	24.90 (7.0%)	21.09 (1.3%)	7.55 (0.4%)	4.65 (10.6%)	4.64 (1.8%)
Robot	31.45 (0.1%)	24.90 (7.0%)	21.09 (1.3%)	7.55 (0.4%)	5.13 (1.3%)	4.24 (7.0%)
<b>Referência</b>	<b>31.48</b>	<b>26.77</b>	<b>21.37</b>	<b>7.52</b>	<b>5.20</b>	<b>4.56</b>

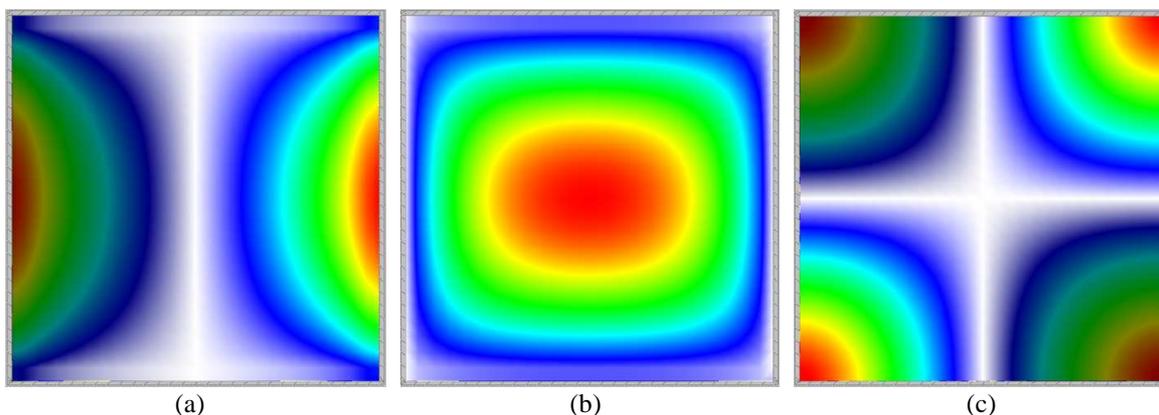


Figura 1. Distribuição típica de: (a) esforço de corte  $V_x$ ; (b) momento flector  $M_x$ ; (c) momento torsor  $M_{xy}$ .

O esforço de corte é máximo a meio dos bordos apoiados, sendo a configuração semelhante em todos os programas, com excepção do SAP-Thin, ver Figura 3a. As diferenças registadas ao nível dos momentos flectores e torsores são muito reduzidas, ver como exemplo a Figura 3b. Finalmente,

verifica-se que as diferenças registadas ao nível das armaduras são significativamente mais elevadas que ao nível dos momentos flectores, ver Figura 4.

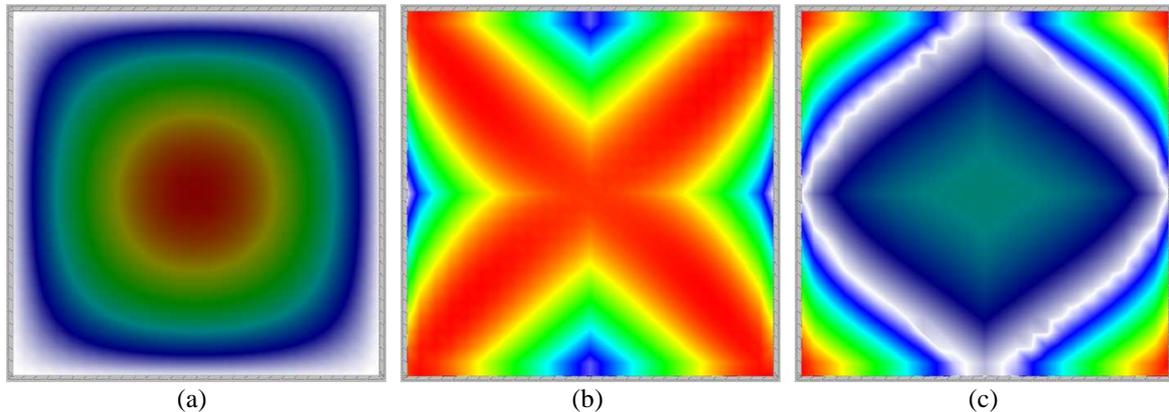


Figura 2. Distribuição típica de: (a) deslocamento vertical  $U_z$ ; (b) armadura inferior na direcção  $x$   $A_{sbx}$ ; (c) armadura superior na direcção  $x$   $A_{stx}$ .

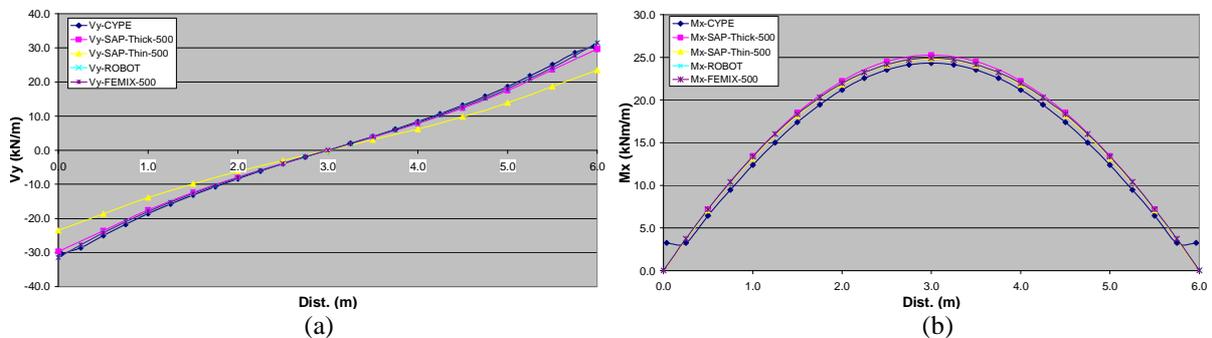


Figura 3. Resultados seleccionados de esforços no  $1/2$  vão: (a) corte  $V_y$ ; (b) momento flector  $M_x$ .

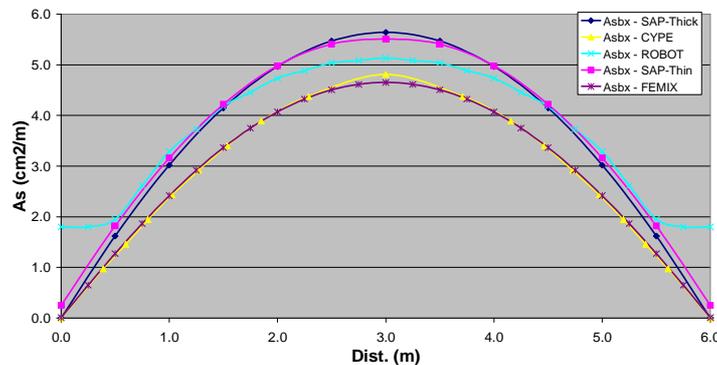


Figura 4. Armadura inferior na direcção  $x$  ( $A_{sbx}$ ) no meio vão.

### 3.2 Laje em “L” simplesmente apoiada

A laje representada na Figura 5 é em L, simplesmente apoiada em todo o seu contorno, com uma espessura de 0.18 m e constituída por betão da classe C25/30 e aço da classe A500. Foi adoptado uma acção de cálculo  $p_{sd}=13.5$  kN/m<sup>2</sup>. Os modelos do SAP com 500 mm de largura foram alterados para modelos com 250 mm de largura, face à irregularidade da malha, e o modelo do ROBOT com oito nós foi alterado para quatro nós, uma vez que o seu desempenho é melhor [13].

A análise, excluindo a singularidade introduzida pela reentrância da laje, mostra que os programas são semelhantes, tendo sido a máxima diferença obtida no esforço de corte com o programa ROBOT

(22% de diferença em relação à média), ver Quadro 3. Com oito nós, o ROBOT e o FEMIX apresentam resultados iguais mas com quatro nós passaram a ser muito distintos, com um desvio significativo no FEMIX. O modelo do ROBOT com quatro nós aproxima-se dos modelos do SAP2000, também com quatro nós. Na reentrância da laje as diferenças entre os programas são muito significativas em termos de esforços. Por exemplo, o esforço de corte no canto é muito elevado face à descontinuidade geométrica introduzida, sendo os valores mais elevados obtidos no FEMIX e no SAP-Thin, ver Figura 6a. A armadura necessária nessa zona atinge também valores muito elevados, ver Figura 6b. O valor máximo é obtido com os modelos SAP-Thin e FEMIX, e o valor mínimo é obtido com o CYPE. A necessidade de armadura fornecida pelo FEMIX na proximidade do canto nem sequer foi desenhada pois atinge valores excessivamente elevados.

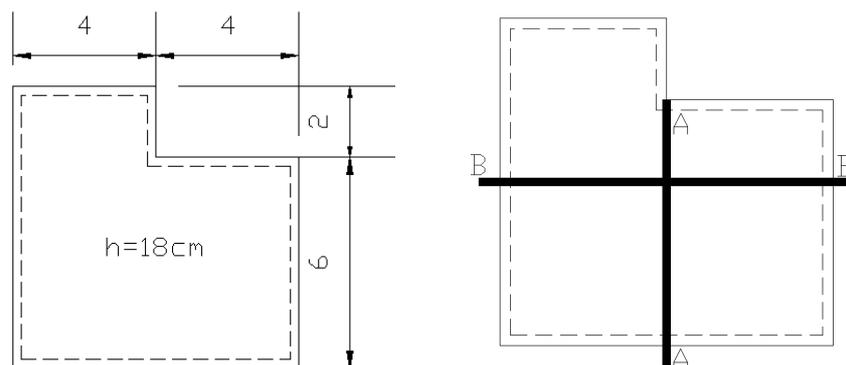


Figura 5. Laje em L simplesmente apoiada com geometria e alinhamentos considerados na análise (dimensões em metros).

Quadro 3. Valores máximos de esforços e deslocamentos para a laje em L (valores do alinhamento BB) nos diferentes programas. A percentagem indicada em parêntesis é a diferença relativamente a média dos programas

	Vx [kN/m]	Mx [kNm/m]	Mxy [kNm/m]	Uz [mm]	Asbx [cm <sup>2</sup> /m]
CYPE	24.36 (4.5%)	18.22 (2.4%)	9.78 (9.4%)	5.64 (8.7%)	5.40 (15.1%)
SAP-Thick	25.06 (7.6%)	18.28 (2.1%)	8.59 (3.9%)	4.77 (8.1%)	4.88 (4.1%)
SAP-thin	22.00 (5.6%)	18.68 (0.1%)	8.73 (2.3%)	5.00 (3.8%)	4.79 (2.1%)
Femix-500-8n	26.29 (12.8%)	19.22 (2.9%)	8.90 (0.4%)	5.18 (0.3%)	4.06 (13.4%)
Robot-250-4n	18.18 (22.0%)	18.93 (1.4%)	8.72 (2.5%)	5.39 (3.8%)	4.33 (7.7%)
<b>Referência</b>	<b>23.30</b>	<b>18.67</b>	<b>8.94</b>	<b>5.18</b>	<b>4.69</b>

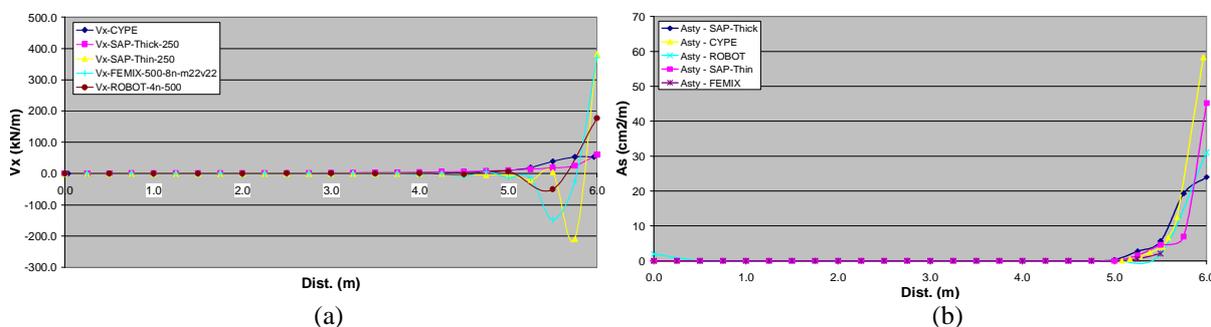


Figura 6. Resultados seleccionados no alinhamento AA: (a) Esforço de corte  $V_x$  ao longo do alinhamento AA; (b) Armadura superior na direcção y ( $A_{sty}$ ).

### 3.3 Laje 6×6 m<sup>2</sup> fungiforme

A laje adoptada é quadrada, apoiada em quatro pilares quadrados com 0.30×0.30 m<sup>2</sup>, com uma espessura de 0.30 m e constituída por betão da classe C25/30 e aço da classe A500. Foi adoptada uma acção de cálculo  $p_{sd}=18.0$  kN/m<sup>2</sup>. Os pilares possuem comprimento igual a 3 metros e foram utilizados as mesmas malhas que para a laje simplesmente apoiada.

A análise, excluindo a singularidade introduzida pelo apoio dos pilares, mostra que os programas são semelhantes, com excepção do corte que possui enormes variações, ver Quadro 4, tendo as menores diferenças sido registadas no FEMIX. No esforço de corte as diferenças são elevadas e a configuração dos diagramas é diferente consoante a teoria utilizada, ver Figura 7a. Em relação ao bordo exterior, vemos que o programa que se afasta mais dos restantes é o FEMIX em termos do esforço de corte, Figura 7b. Nos momentos flectores os programas são semelhantes. No entanto, em relação à armadura, os diagramas apresentam a mesma configuração mas com diferenças ao nível dos valores máximos, chegando a atingir diferenças de 23% relativamente à média de todos os programas, ver Figura 8.

Quadro 4. Valores máximos de esforços e deslocamentos para a laje fungiforme (valores a meio vão) nos diferentes programas. A percentagem indicada em parêntesis é a diferença relativamente a média dos programas

	Vy [kN/m]	My [kNm/m]	Uz [mm]	Asby [cm <sup>2</sup> /m]
CYPE	13.00 (17.5%)	53.94 (1.0%)	6.87 (18.7%)	5.00 (5.8%)
SAP-Thick	8.42 (46.5%)	54.68 (0.4%)	5.52 (4.7%)	5.10 (2.0%)
SAP-thin	21.02 (33.5%)	54.92 (0.8%)	5.46 (5.7%)	6.15 (23.0%)
Femix	16.28 (3.4%)	54.04 (0.8%)	5.61 (3.1%)	5.15 (3.0%)
Robot	20.02 (27.1%)	54.77 (0.6%)	5.18 (4.7%)	5.03 (0.6%)
<b>Referência</b>	<b>15.75</b>	<b>54.47</b>	<b>5.79</b>	<b>5.29</b>

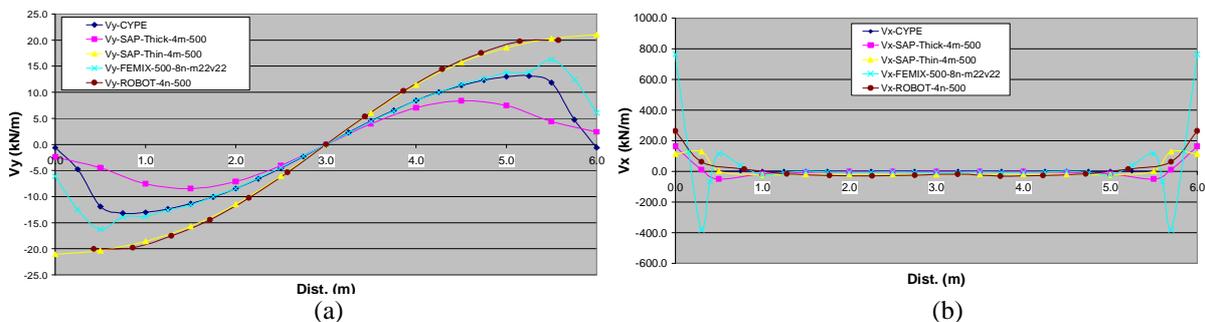


Figura 7. Resultados seleccionados de esforços de corte: (a)  $V_y$  no meio vão; (b)  $V_x$  no bordo.

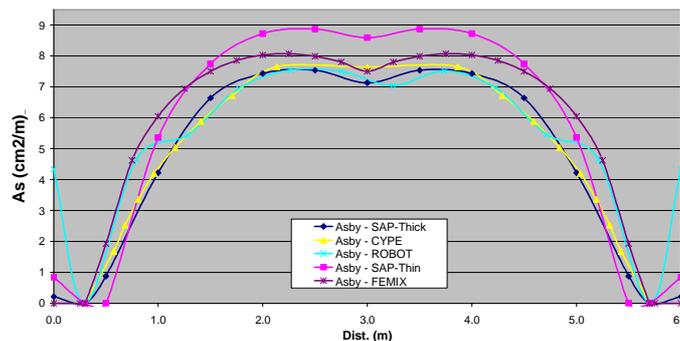


Figura 8. Armadura inferior na direcção y ( $A_{sby}$ ) no bordo.

#### 4. MODELAÇÃO DE PAINÉIS CONTÍNUOS DE LAJES FUNGIFORMES

Tal como se verificou na secção anterior é possível obter esforços altamente não uniformes na presença de apoios singulares e descontinuidades geométricas. Esta realidade implica que o dimensionamento automático de armadura se revela impossível, com a presença de esmagamento do betão ou quantidades de armadura localizada inaceitáveis. Obviamente que “picos” de esforços muito elevados não são realistas, face ao comportamento não-linear das estruturas. Uma solução possível para solucionar o problema é desenvolver ferramentas de pós-processamento de uniformização de esforços que mantenham o equilíbrio. Analisam-se nesta secção possibilidades alternativas.

A estrutura adoptada para análise inclui quatro painéis de laje quadrada com 8 m de vão e com uma espessura de 0.30 m, apoiados em quatro pilares quadrados com  $0.30 \times 0.30 \text{ m}^2$ , e constituídos por betão da classe C25/30 e aço da classe A500. Foi adoptado uma acção de cálculo  $p_{sd}=15.0 \text{ kN/m}^2$ . Os pilares possuem comprimento de 4 metros, não sendo necessária armadura de punçoamento. A Figura 9 apresenta o modelo de elementos finitos adoptado, com os pilares representados por elementos de viga (Modelo 1) e por elementos sólidos (Modelo 2). Verifica-se uma diferença significativa nos esforços máximos (neste caso momento flector  $M_x$ ) devido à simulação, sendo que no 1º caso as reacções são concentradas e no 2º caso as reacções são distribuídas, ver também Figura 10.

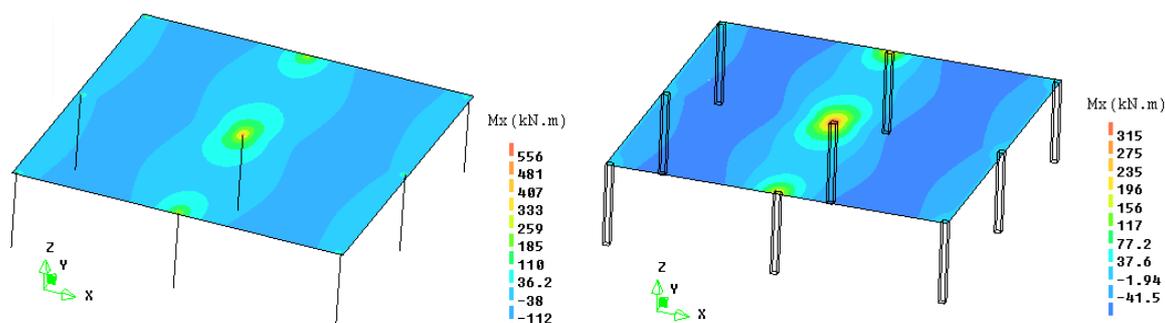


Figura 9. Resultados típicos da estrutura com, com pilares em elemento de viga e sólidos.

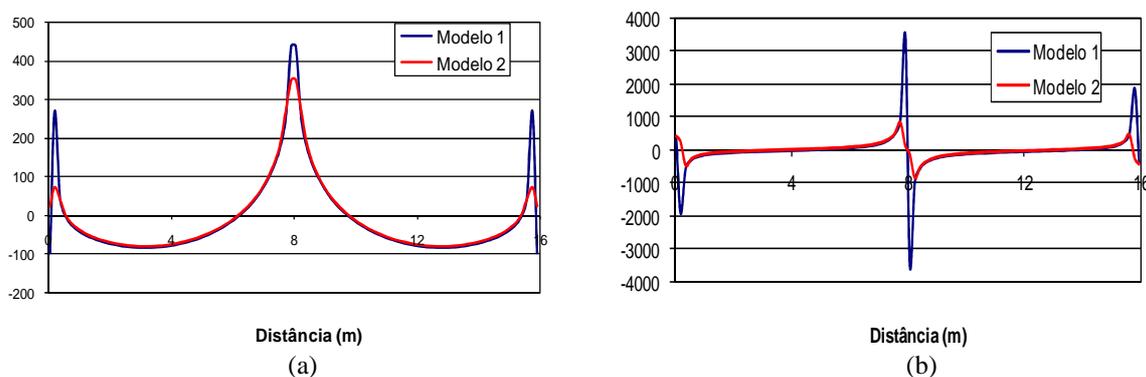


Figura 10. Esforços sobre eixo central: (a) Momento flector (kN.m/m); (b) Corte (kN/m).

Calculando agora as armaduras de acordo com o modelo de Lourenço e Figueiras [10,11] corrigido com a formulação de corte de Marti [12], ver Figura 11, verifica-se que o Modelo 1 conduz a resultados inaceitáveis em termos de armaduras de flexão e corte, enquanto que o Modelo 2 conduz a resultados mais uniformes. Uma vez que a utilização de elementos sólidos para os pilares é inexequível do ponto de vista de modelação de estruturas reais, recomenda-se a utilização de uma das seguintes estratégias: (a) a modelação dos pilares com quatro molas (uma em cada canto); (b) a criação de um elemento com altura significativamente maior na zona do pilar; (c) a duplicação do elemento na zona do pilar, criando um elemento rígido de outro material (por exemplo metálico). As opções (b,c) conduzirão a momentos negativos ligeiramente mais elevados na zona do pilar, face ao aumento de rigidez, mas a armadura calculada é adequada, ver Figura 11 (Modelo 3).

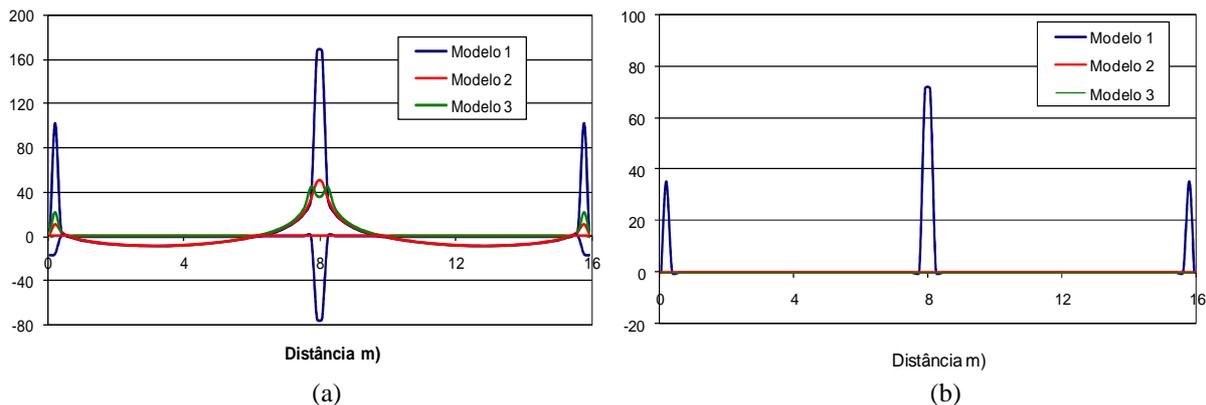


Figura 11. Quantidade de armadura ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ): (a) longitudinal; (b) transversal. O Modelo 3 é um modelo em que o elemento finito na zona do pilar possui o triplo da espessura da laje.

## 5. CONCLUSÕES

Os resultados da comparação efectuada entre três programas comerciais de elementos finitos mostram que o refinamento da malha, a teoria utilizada e o tipo de elemento (quadrático ou linear) influenciam a resposta, sendo esta influência significativa em zonas de descontinuidades geométricas ou de cargas concentradas. Os resultados obtidos parecem permitir recomendar o seguinte tendo em vista a uniformização de esforços: (a) a utilização de malhas relativamente largas, o que também conduz a menor tempo de processamento; (b) a utilização de elementos baseados na teoria de Mindlin. Nota-se que as diferenças registadas nos valores de armaduras indicam a necessidade clara de normativa sobre modelos de dimensionamento. Finalmente, propõem-se soluções para o problema das tensões não uniformes nas lajes apoiadas em pilares (ou fungiformes): molas, aumento da altura da laje ou duplicação de elementos na zona do pilar.

## REFERÊNCIAS

- [1] PETROSKI, H., *To engineer is human: The role of failure in successful design*, Vintage Books (1992)
- [2] CROSS, N., *Engineering design methods*, Wiley (1989)
- [3] FERGUSON, E.S., *Engineering and the mind's eye*, MIT Press (1992)
- [4] LOURENÇO, P.B. [et al.], *Sobre o cálculo automático no projecto de estruturas de betão armado*, *Ingenium*, 34(2), p. 66-74 (1999)
- [5] OLIVEIRA, A.F.M., LOURENÇO, P.B., *Comparação de programas comerciais de cálculo automático para estruturas porticadas*, *Engenharia Civil*, 12, p. 31-40 (2001)
- [6] MACIEL, I., LOURENÇO, P.B., *Análise de programas de cálculo para estruturas de alvenaria resistente*, *Construção Magazine*, 21, p. 19-24 (2007)
- [7] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York (1959)
- [8] BARROS, J., *Lajes e cascas*, Universidade do Minho, 1998.
- [9] EN 1992-2:2005, *Eurocode 2 - Projecto de estruturas de betão - Pontes de betão - Dimensionamento e regras de pormenorização*, 2005.
- [10] LOURENÇO, P.B., FIGUEIRAS, J.A., *Automatic design of reinforcement in concrete plates and shells*, *Engineering Computations*, 10 (6), p. 519-541 (1993)
- [11] LOURENÇO, P.B., FIGUEIRAS, J.A., *Solution for the design of reinforced concrete plates and shells*, *J. Struc. Engrg.*, ASCE, 121(5), p. 815-823 (1995)
- [12] MARTI, P., *Dimensioning and Detailing IABSE*, Colloquium on. *Structural Concrete*, Stuttgart, Vol. 62, p. 411-443 (1991)
- [13] PEREIRA, J., *Estudo comparado para o dimensionamento automático de lajes em betão armado*, *Relatório de Projecto Individual* (2008)