

Dimensionamento de estruturas de betão reforçado com fibras de aço

Joaquim Barros, Pierre Rossi, Bruno Massicotte (Eds.)

DEC-UM, Portugal 28/11/2003

## MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO À FLEXÃO DO BRFA COM BASE EM LEI TENSÃO-EXTENSÃO

## MODELLING THE SFRC FLEXURAL BEHAVIOR USING A STRESS- STRAIN RELATIONSHIP

Vítor Cunha<sup>1</sup>, Joaquim Barros<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado do Departamento de Eng.<sup>a</sup> Civil, da Escola de Eng.<sup>a</sup> da Universidade do Minho

<sup>2</sup>Prof. Auxiliar do Departamento de Eng.<sup>a</sup> Civil da Escola de Eng.<sup>a</sup> da Universidade do Minho

**Resumo:** *No presente trabalho foi desenvolvida uma estratégia numérica de forma a avaliar a possibilidade de ser definida uma lei tensão-extensão capaz de simular o comportamento fendilhado do betão de custo competitivo reforçado com fibras de aço (BRFA) concebido no âmbito de um projecto de investigação. Essa estratégia englobou dois modelos de complexidade distinta. O primeiro, designado por modelo de secção, foi utilizado para, com recurso a análise inversa e utilizando respostas força-flecha registadas em ensaios experimentais, se determinarem os parâmetros que definem uma lei trilinear tensão-extensão capaz de reproduzir as respostas experimentais com o rigor desejado. De seguida, esta lei foi utilizada para definir o modo I de fractura da lei constitutiva da fenda, no âmbito de um código computacional de análise não linear material de estruturas submetidas a estado plano de tensão, suportado no método dos elementos finitos, onde o processo de fendilhação é simulado por um modelo de fendilhação distribuída. Da aplicação dos dois modelos constatou-se que o modelo de secção não permite definir a lei tensão-extensão pós pico (lei de amolecimento) com o rigor necessário. Enquadrado numa análise inversa, o modelo baseado no MEF foi de seguida utilizado para se determinar a lei de amolecimento do BRFA, tendo-se constatado que essa lei não pode ser explicitada unicamente em função do conceito de resistência equivalente, tal como sugere o RILEM TC 162-TDF.*

**Palavras-chave:** *Betão reforçado com fibras de aço, lei de amolecimento, modo I de fractura, método dos elementos finitos, modelo de fendas distribuídas, energia de fractura.*

**Abstract:** *To assess the post-cracking stress-strain relationship for a developed cost competitive steel fibre reinforced concrete (SFRC), a numerical strategy involving two numerical models of distinct complexity was carried out. Inserted into an inverse analysis framework, a cross-sectional-layer-model (CSLM) was used to evaluate the post-cracking stress-strain relationship able of reproducing, with the desired accuracy, the force-deflection relationship recorded in three-point bending tests carried out according to the RILEM TC 162-TDF recommendations. This relationship was used as the strain softening law of the fracture mode I crack constitutive law of a smeared crack model based on the strain decomposition concept, under the framework of the finite element method (FEM). Applying this model it was verified that the CSLM couldn't define a strain softening law able of simulating, with the necessary accuracy, the fracture mode I of the SFRC. Using an inverse analysis and the FEM model, the softening law for the SFRC analysed was evaluated. From the values obtained for the definition of this law it was concluded that this law cannot be exclusively dependent on the concept of equivalent flexural tensile strength, as RILEM TC 162-TDF recommends.*

**Keywords:** *Steel fibre reinforced concrete; softening law, fracture mode I, finite element method, smeared crack model, fracture energy.*

## 1. INTRODUÇÃO

Na simulação do comportamento até à rotura de estruturas hiperestáticas de betão reforçado com fibras de aço (BRFA) é corrente utilizarem-se modelos de fendas distribuídas, dado que, devido aos mecanismos de reforço das fibras, ocorrem, geralmente, várias fendas de reduzida abertura (Barros e Figueiras 1998; Barros e Figueiras 2001). Assim, neste tipo de estruturas, de que são exemplo as lajes apoiadas em solo, não é prático utilizar modelos de fendas discretas (Rots 1998), dado que requerem o conhecimento antecipado das eventuais superfícies de fractura, de forma a disporem-se elementos de interface nessas superfícies.

Para que os resultados da simulação numérica não sejam dependentes do grau de refinamento da malha de elementos finitos utilizada na discretização da estrutura, a lei constitutiva que governa o comportamento da fenda deve ser definida com base nos parâmetros de fractura do material que a constitui, designadamente, forma da relação tensão-extensão correspondente ao modo I de fractura, energia de fractura,  $G_f$ , e largura da banda de fendilhação,  $l_b$ . Esta última entidade está relacionada com a geometria do elemento finito utilizado na malha de elementos finitos (Barros 1995), enquanto a energia de fractura define-se como sendo a energia despendida na formação de uma fenda de área unitária (Hillerborg *et al.*, 1976).

É, contudo, reduzido o número de trabalhos dedicados à determinação dos parâmetros de fractura do BRFA, dado que estes dependem, não somente do tipo de betão, mas também, e fundamentalmente, do tipo e quantidade de fibras e do método de aplicação do betão (influência da orientação das fibras). Além disto, em projecto, a abertura de fissura fica limitada a valores da ordem de 3 mm, pelo que a energia dissipada na progressão da fenda é bastante inferior à energia de fractura do material. No entanto, para que a simulação numérica não dependa da malha de elementos finitos é necessário conhecer o valor da energia de fractura do material.

Com este objectivo, no presente trabalho desenvolveu-se uma estratégia numérica de modo a verificar-se se os parâmetros de fractura utilizados nos modelos de fendas distribuídas (MFD) podem ser determinados por análise inversa e com recurso a modelos simples. Começou-se por desenvolver um modelo de secção, no sentido de se determinarem os parâmetros que definem a lei tensão-extensão,  $\sigma^{cr} - \varepsilon^{cr}$ , a ser utilizada na modelação do modo I de fractura da lei constitutiva da fenda. Utilizando um modelo de análise não linear material de estruturas submetidas a estado plano de tensão, em que o betão fendilhado é assumido como um conjunto de fendas distribuídas com betão intacto entre fendas, verificou-se que a lei de amolecimento definida por intermédio do modelo de secção foi incapaz de simular, com rigor suficiente, as respostas força-flecha,  $F-\delta$ , registadas experimentalmente. Efectuando uma análise inversa com o MFD determinaram-se novas leis de amolecimento tendo-se verificado não ser possível explicitar esta lei apenas em função da resistência equivalente à tracção em flexão,  $f_{eq,3}$ , tal como propõe o comité da RILEM, TC 162-TDF (RILEM 2002b). Finalmente, avalia-se a possibilidade de relacionar  $G_f$  com  $f_{eq,3}$ , dado que a existência dessa eventual relação facilitaria a avaliação de  $G_f$  com base num ensaio de relativa simples execução.

## 2. MODELO DE SECÇÃO

Para simular a resposta  $F-\delta$  registada em ensaios experimentais efectuados segundo as recomendações da RILEM TC 162-TDF (Barros *et al.* 2002, Antunes e Barros 2002), o provete foi discretizado em três blocos (ver Figura 1): central, designado por rótula não linear, onde todos os fenómenos de não linearidade material são processados; laterais, em que se admite que o material se encontra em regime linear e elástico. Adoptando a recomendação do TC 162-TDF (2002a) a dimensão da rótula não linear,  $s$ , é metade da altura da secção de fractura ( $s=h_{sp}/2$ ). A relação  $F-\delta$  do provete foi obtida por recurso a um modelo que permite determinar a relação momento-curvatura ( $M-\chi$ ) de uma secção que é discretizada em camadas. Este modelo está descrito em outro trabalho publicado no presente livro (Ribeiro *et al.* 2003).

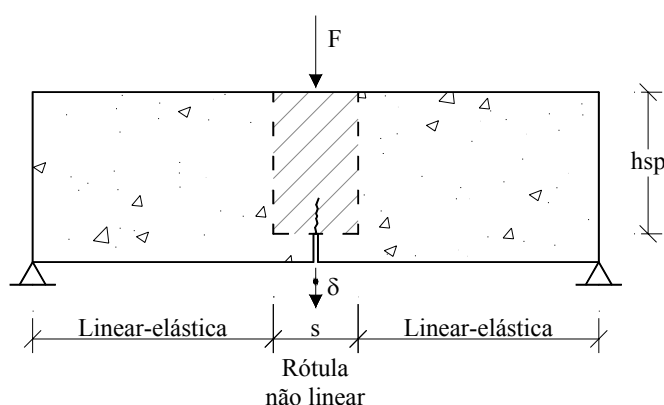


Figura 1 – Modelo assumido na simulação numérica do provete tipo ensaiado experimentalmente.

### 2.1 Avaliação do desempenho das leis constitutivas propostas pela RILEM TC 162-TDF

Na Figura 2 representa-se a lei  $\sigma-\varepsilon$  proposta pela RILEM TC 162-TDF para simular o comportamento em flexão do BRFA (RILEM 2002b). Os pontos que definem o diagrama pós-pico em tracção são determinados pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.7f_{ctm,fl} (1.6-d); \quad \sigma_2 = 0.45f_{R,1}\kappa_h; \quad \sigma_3 = 0.37f_{R,4}\kappa_h \\ E_c &= 9500(f_{cm})^{1/3}; \quad \varepsilon_1 = \sigma_1/E_c; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 0.1\%; \quad \varepsilon_3 = 25\% \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $f_{ctm,fl}$  e  $E_c$  são, respectivamente, a tensão média de tracção em flexão e o módulo de elasticidade do BRFA, enquanto  $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$  são as resistências residuais à tracção em flexão para uma flecha de  $\delta_{R,1} = 0.46$  mm e de  $\delta_{R,4} = 3.0$  mm, respectivamente,  $d$  é a altura útil do provete e  $\kappa_h$  é um parâmetro que simula a influência da altura da secção do provete ensaiado no comportamento pós-fissurado, obtido por intermédio do diagrama representado na Figura 3 (RILEM 2002b).

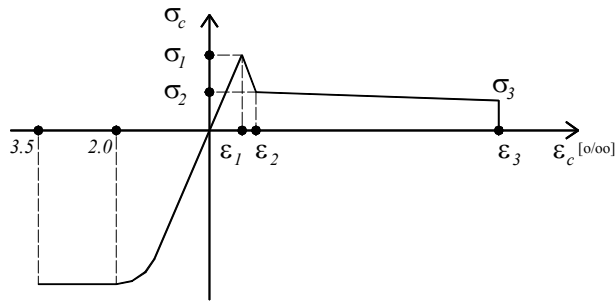


Figura 2 – Lei constitutiva  $\sigma$ - $\varepsilon$  para o BRFA, de acordo com a RILEM TC 162-TDF.

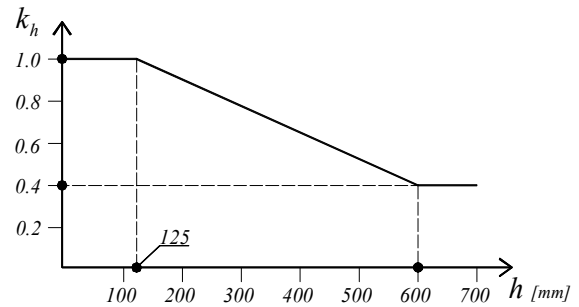


Figura 3 – Efeito de escala,  $\kappa_h$ , de acordo com a RILEM TC 162-TDF.

Com o intuito de avaliar o desempenho da lei  $\sigma$ - $\varepsilon$  pós pico em tracção, na simulação da resposta  $F$ - $\delta$  registada em ensaios de flexão efectuados segundo as recomendações da RILEM TC 162-TDF, foi utilizado o referido modelo de secção. Na Figura 4 encontram-se as simulações das séries reforçadas com fibras de aço 65/60 (Figura 4a) e 80/60 (Figura 4b) constituídas por provetes de betões com 28 dias de idade (Id) e sem substituição de cimento por cinzas volantes (Cv). A deficiente simulação registada nestas séries foi, igualmente,

observada nas restantes séries. Da análise das simulações, constatou-se que, de um modo geral, a carga de pico numérica foi superior à experimental. Em algumas séries verificou-se que, após a carga de pico ter sido atingida, a queda de carga obtida na simulação numérica foi mais abrupta que a registada experimentalmente. Para flechas inferiores a 2 mm, a resistência residual prevista numericamente é significativamente superior à registada experimentalmente. Para flechas superiores a 2 mm ocorreu uma queda abrupta de carga na curva numérica, não observada experimentalmente (Cunha *et al.* 2003).

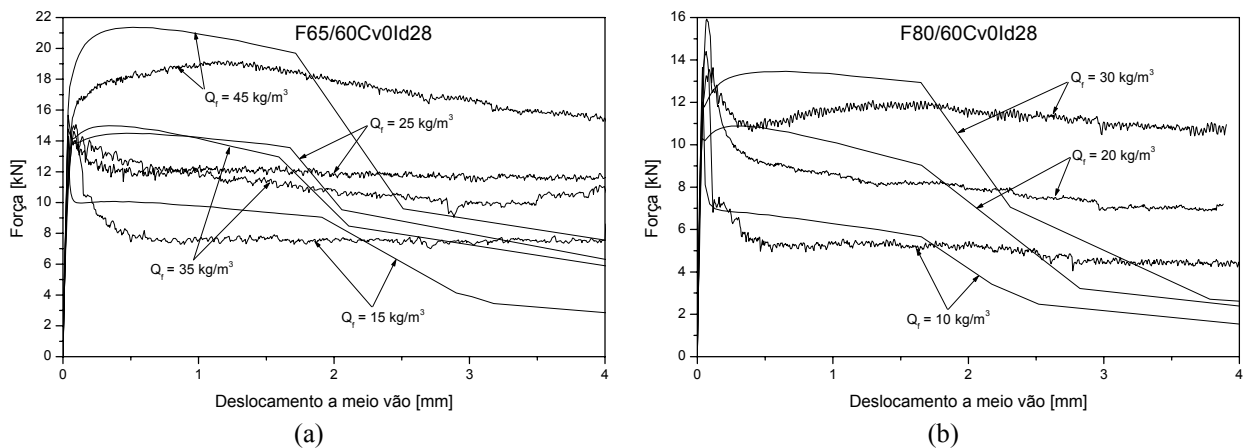


Figura 4 – Curvas experimentais e respectivas simulações numéricas com a lei proposta pela RILEM: a) serie com fibras 65/60, b) series com fibras 80/60.

## 2.2 Determinação dos parâmetros da lei $\sigma$ - $\varepsilon$ com base na análise inversa

Dada a deficiente simulação das curvas experimentais com a utilização da lei ( $\sigma$  -  $\varepsilon$ ), proposta pela RILEM TC 162-TDF, efectuou-se uma análise inversa de modo a obter os valores de  $\sigma_i$  e  $\varepsilon_i$  da lei pós pico em tracção, de modo a que, a relação  $F$ - $\delta$  numérica fosse, a menos de uma tolerância, igual à registada experimentalmente. Essa tolerância foi determinada por intermédio de:

$$erro = \left| A_{F-\delta}^{exp} - A_{F-\delta}^{num} \right| / A_{F-\delta}^{exp} \quad (2)$$

em que  $A_{F-\delta}^{exp}$  e  $A_{F-\delta}^{num}$  são a área sob a curva  $F$ - $\delta$  experimental e numérica, respectivamente. Na Figura 5 as curvas obtidas numericamente por este processo são comparadas com as registadas experimentalmente, para as séries Cv0Id28. No Anexo A1 pode-se constatar que nas restantes séries foram alcançados níveis de simulação similares aos verificados na Fig. 5.

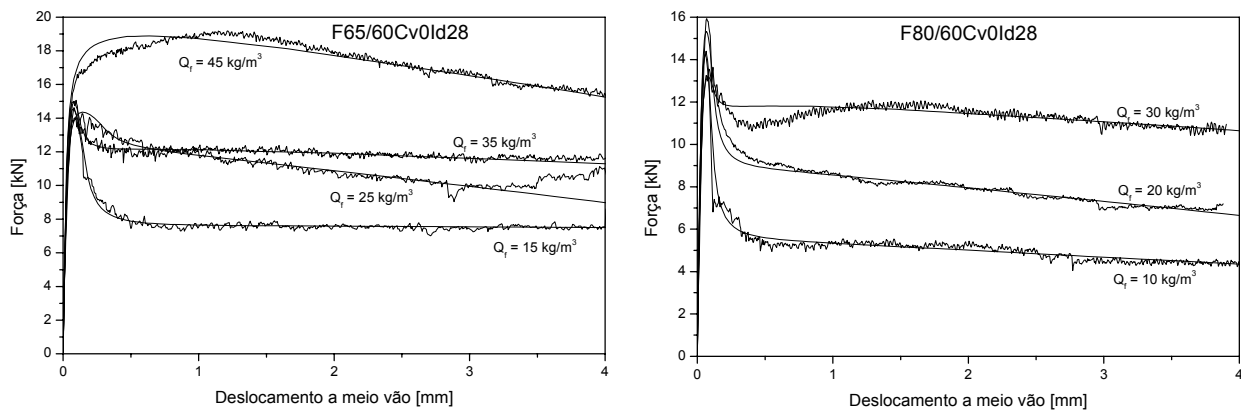


Figura 5 – Curvas experimentais e respectivas simulações numéricas obtidas com modelo de secção no âmbito de análise inversa.

Tendo por base os resultados obtidos nas simulações numéricas efectuadas, determinaram-se os parâmetros indicados na Tabela 1, onde se constata ser significativa a dispersão de resultados obtidos (elevado desvio padrão), a que não é alheio o facto de se ter incluído na mesma análise os resultados obtidos com tipos e quantidades distintos de fibras.

Tabela 1 – Parâmetros que definem a lei  $\sigma$ - $\varepsilon$ , obtidos com o modelo de secção e efectuando análise inversa.

$\sigma_i$ [MPa]	$s_d^*$	$\varepsilon_i$ [‰]	$s_d$
$\sigma_1 = 0.52 f_{ctm,fl} (1.6-d)$	0.09	$\varepsilon_1 = \sigma_1 / E_c$	-
$\sigma_2 = 0.36 f_{R1} \kappa_h$	0.04	$\varepsilon_2 = 1.2$	0.5
$\sigma_3 = 0.27 f_{R4} \kappa_h$	0.10	$\varepsilon_3 = 104$	26

\*desvio padrão

### 3. MODELO DE FENDILHAÇÃO DISTRIBUÍDA

#### 3.1 Introdução

O modelo de fendas distribuídas adoptado suporta-se no princípio de que o betão fendilhado é a associação, em série, de fendas mais betão entre fendas (Barros 1995), ver Figura 6.

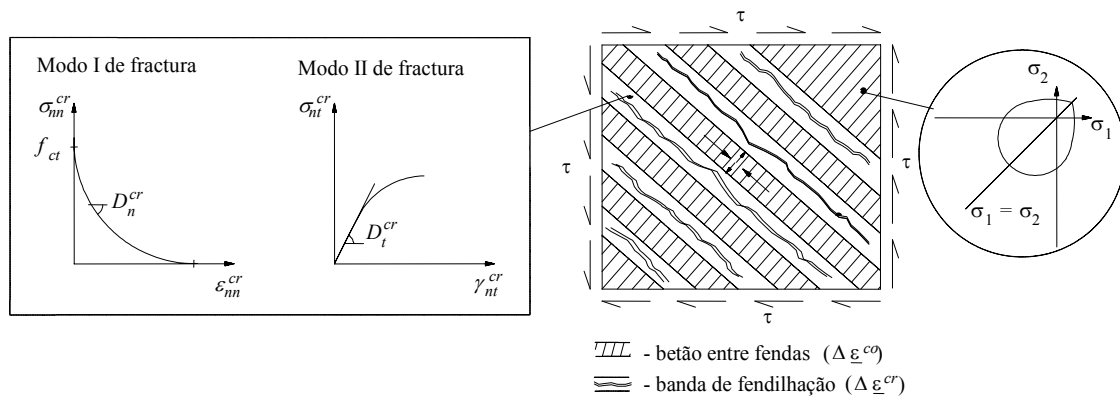


Figura 6 - O betão fendilhado como a associação de fendas mais betão entre fendas.

Neste modelo, o incremento de deformação no betão fendilhado é o resultado da soma do incremento de deformação nas fendas, ou mais propriamente na banda fendilhada, com o incremento de deformação no betão entre fendas (material exterior à banda de fendilhação). Os modos I e II de fractura são simulados nas leis constitutivas atribuídas às fendas. Este modelo, ao incluir a lei constitutiva da fenda na sua formulação, permite simular de forma directa os principais benefícios das fibras, nomeadamente, a maior capacidade de absorção de energia em modo I de fractura e a maior, capacidade de transferir tensões de corte entre as faces da fenda. Parece assim, ser um modelo apropriado para as estruturas de *BRF*.

Por ponto de amostragem pode-se desenvolver mais que uma fenda de direcção fixa, não necessariamente ortogonais (modelo de multifendas fixas). Cada fenda é caracterizada por uma lei constitutiva própria definida no seu sistema local.

#### 3.2 Formulação

Para que a progressão da fendilhação se aproximasse, o mais possível, da realidade observada nos provetes ensaiados, o desenvolvimento de fendas ficou limitado aos elementos finitos dispostos acima do entalhe, ver Figura 7. Para que o comportamento deformacional do provete não ficasse dependente do modo II de fractura, nestes elementos finitos utilizaram-se dois pontos de integração por elemento, dispostos no eixo de simetria do provete. Desta forma, apenas é possível ocorrer uma fenda por ponto de integração (PI), com direcção vertical. Assim, a formulação que se apresentará de seguida admite o surgimento de uma fenda por ponto PI, sendo contudo fácil o alargamento da formulação a mais do que uma

fenda por PI (Barros 1995).

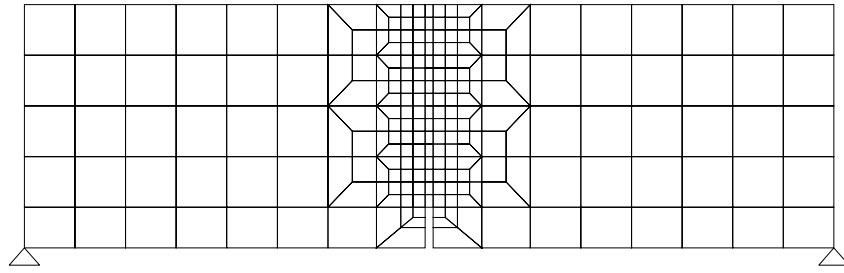


Figura 7 - Malha de elementos finitos considerada na simulação numérica.

Segundo o conceito da decomposição das deformações aplicado ao betão fendilhado,

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e^{co} + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{cr} \quad (3)$$

em que  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e^{co}$  e  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{cr}$  são os vectores dos incrementos das componentes de deformação no betão fendilhado, no betão entre fendas e nas fendas, respectivamente, relativamente ao sistema geral de eixos, significando os índices *co*, *e* e *cr*, betão, elástico e fenda, respectivamente. Para estruturas submetidas a estado plano de tensão, como é o caso considerado no presente trabalho, o vector  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{cr}$  é caracterizado pelas seguintes componentes:

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{cr} = \left[ \Delta \varepsilon_1^{cr} \quad \Delta \varepsilon_2^{cr} \quad \Delta \gamma_{12}^{cr} \right]^T \quad (4)$$

em que *I*, *2* são os eixos do referencial geral. As componentes de deformação da fenda no referencial geral e no referencial local da fenda relacionam-se por intermédio da seguinte expressão:

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{cr} = \underline{\underline{T}}^T \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_l^{cr} \quad (5)$$

em que  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_l^{cr}$  é o vector dos incrementos das deformações da fenda relativamente ao seu referencial local, sendo constituído pelas seguintes componentes (Figura 8):

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_l^{cr} = \left[ \Delta \varepsilon_{nn}^{cr} \quad \Delta \gamma_{nt}^{cr} \right]^T \quad (6)$$

em que  $\Delta \varepsilon_{nn}^{cr}$  e  $\Delta \gamma_{nt}^{cr}$  são as deformações normal e tangencial à fenda, correspondentes aos modos I e II de fractura, respectivamente. A matriz  $\underline{\underline{T}}$  que define a orientação da fenda relativamente ao referencial geral, possui a seguinte constituição:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre o eixo geral  $x_I$  e a direcção normal ao plano da fenda, sendo o sentido anti-horário considerado positivo. No modelo de fenda fixa  $\underline{\underline{T}}$  é constante, dado que a



orientação da fenda permanece invariável durante todo o processo de cálculo.

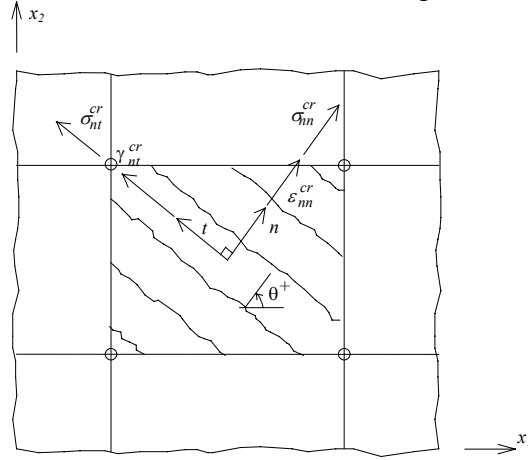


Figura 8 - Tensões e deformações da fenda no seu referencial.

A lei constitutiva da fenda é definida no seu referencial pela seguinte relação:

$$\Delta \underline{\sigma}_l^{cr} = \underline{D}^{cr} \Delta \underline{\varepsilon}_l^{cr} \quad (8)$$

em que  $\Delta \underline{\sigma}_l^{cr}$  é o vector dos incrementos de tensão,

$$\Delta \underline{\sigma}_l^{cr} = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{nn}^{cr} & \Delta \tau_{nt}^{cr} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

cujas componentes  $\Delta \sigma_{nn}^{cr}$  e  $\Delta \tau_{nt}^{cr}$  são as tensões normal e tangencial à fenda, respectivamente, (ver Figura 8) e

$$\underline{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D_n^{cr} & 0 \\ 0 & D_t^{cr} \end{bmatrix} \quad (10)$$

é a matriz de rigidez da fenda no seu referencial local, sendo  $D_n^{cr}$  e  $D_t^{cr}$  os módulos de rigidez correspondentes aos modos I e II de fractura, respectivamente.

O vector dos acréscimos de tensão no referencial geral relaciona-se com o vector dos acréscimos de tensão na fenda através da seguinte relação:

$$\Delta \underline{\sigma}^{cr} = \underline{T} \Delta \underline{\sigma} \quad (11)$$

Admitindo-se que o betão entre fendas encontra-se em regime linear elástico, a lei constitutiva

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D}_e^{co} \Delta \underline{\varepsilon}^{co} \quad (12)$$

modela o seu comportamento, em que  $\underline{D}_e^{co}$  é a matriz de elasticidade linear para estruturas submetidas a estado plano de tensão,

$$\underline{D}_e^{co} = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que  $E_c$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do betão. A lei constitutiva que rege o comportamento do betão fendilhado determina-se substituindo as equações (3) e (5) em (12) e fazendo intervir as equações (8) e (11) obtendo-se,

$$\Delta \underline{\varepsilon}_l^{cr} = \left[ \underline{D}^{cr} + \underline{T} \underline{D}_e^{co} \underline{T}^T \right]^{-1} \underline{T} \underline{D}_e^{co} \Delta \underline{\varepsilon} \quad (14)$$

e

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D}_{ecr}^{co} \Delta \underline{\varepsilon} \quad (15)$$

em que

$$\underline{D}_{ecr}^{co} = \underline{D}_e^{co} - \underline{D}_e^{co} \underline{T}^T \left[ \underline{D}^{cr} + \underline{T} \underline{D}_e^{co} \underline{T}^T \right]^{-1} \underline{T} \underline{D}_e^{co} \quad (16)$$

é a matriz elasto-fendilhada.

Dado  $D^{cr}$  ser simulado pela lei trilinear representada na Figura 9, o cálculo da equação (15) poderá não ser directo, dado que a matriz  $\underline{D}_{ecr}^{co}$  fica, conseqüentemente, não linear. Assim, a resolução de (15) é efectuada por um procedimento iterativo descrito em (Barros 1995).

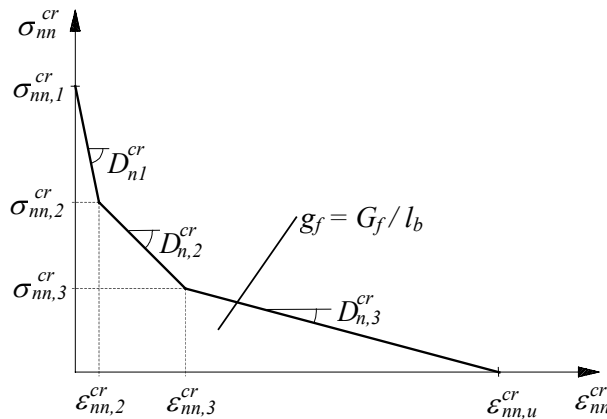


Figura 9 - Diagrama que simula o modo I de fractura.

### 3.3 Avaliação do desempenho da lei $\sigma - \varepsilon$ obtida com o modelo de fendilhação distribuída

A lei tensão-extensão pós-pico obtida na análise inversa com o modelo de secção foi utilizada na definição da relação  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  que caracteriza o modo I de fractura da lei da fenda do modelo de fendilhação distribuída descrito na anterior secção (ver Figura 9). Pretende-se desta forma verificar se um modelo tão simples como o de secção, juntamente com uma análise inversa, é capaz de definir leis  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  que possam ser utilizadas para simular o modo I de fractura no âmbito de modelos de fendilhação distribuída. Na análise numérica com o modelo de elementos finitos, o provete foi discretizado com a malha representada na Figura 7 onde, à excepção dos elementos do alinhamento do entalhe, todos os restantes são elementos de 8 nós de Serendipity com  $2 \times 2$  pontos de integração, representativos de material com comportamento linear e elástico. No Anexo A2 indicam-se os valores do módulo de elasticidade longitudinal considerado para os betões dos provetes simulados. Para coeficiente de Poisson considerou-se o valor de 0.2. Dado que nos ensaios experimentais a progressão da fractura ocorreu, geralmente, ao longo do plano de simetria do provete, os únicos elementos em que se admitiu ocorrer fendas foram os dispostos acima do entalhe. Nesta zona dispuseram-se elementos de 8 nós com  $1 \times 2$  pontos de integração, para que o plano da fenda coincidisse com o eixo de simetria do provete. Seguindo as recomendações de Rots (1988), para largura de banda de fendilhação,  $l_b$ , considerou-se a largura do elemento, i.e., 5 mm, igual à largura do entalhe.

Na Figura 10 estão representadas algumas das simulações efectuadas, de onde se pode concluir que a estratégia indicada não é adequada para definir a lei constitutiva que rege o modo I de fractura deste tipo de materiais. A carga de pico é muito subestimada, bem como a força residual.

### 3.4 Determinação dos parâmetros da lei $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$ com base na análise inversa

Para se obter uma lei  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  capaz de simular o modo I de fractura dos ensaios experimentais em análise, utilizou-se uma estratégia numérica baseada numa análise inversa com recurso ao modelo de fendilhação distribuída descrito na secção 3.2. Na Figura 11 estão representadas algumas das simulações efectuadas, de onde se pode concluir que a estratégia adoptada foi adequada.

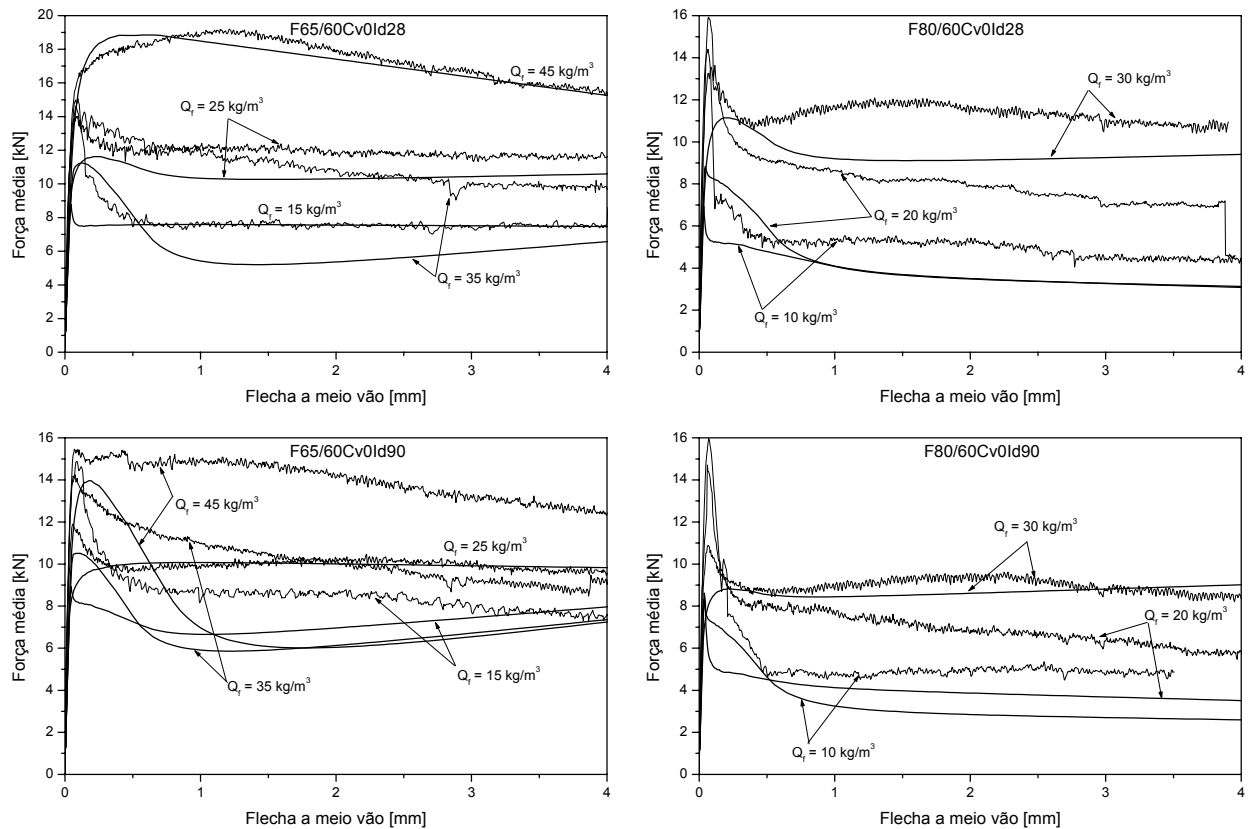


Figura 10- Curvas experimentais e respectivas simulações numéricas utilizando a lei  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  obtida na análise inversa com o modelo de secção

Com base em todas as simulações efectuadas, incluídas no Anexo A3, determinaram-se os parâmetros indicados nas Tabelas 2 e 3. A elevada dispersão de valores indica que, mesmo para um betão reforçado com o mesmo tipo de fibra, o diagrama  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  não pode ser definido somente com base nos parâmetros  $f_{cm,fl}$ ,  $f_{R,1}$  e  $f_{R,3}$ . Notar que os resultados de cada uma das tabelas 2 e 3 resultam de ensaios efectuados com provetes de betões com distintas idades e com distintas percentagens de cimento substituído por cinzas volantes (Barros *et al.* 2002, Antunes e Barros 2002), factores estes que afectam os mecanismos de reforço das fibras.

Assim, os valores indicados nas tabelas 2 e 3 devem ser encarados como uma primeira aproximação ao fenómeno que se pretende caracterizar (comportamento pós pico em tracção com base em conceito de extensão), devendo a lei  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  ser para cada composição, i.e., para um determinado betão, reforçado com um determinado tipo e quantidade de fibras, aplicado sob um determinado método. Assim, para cada BRFA existirá uma determinada lei  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$ .

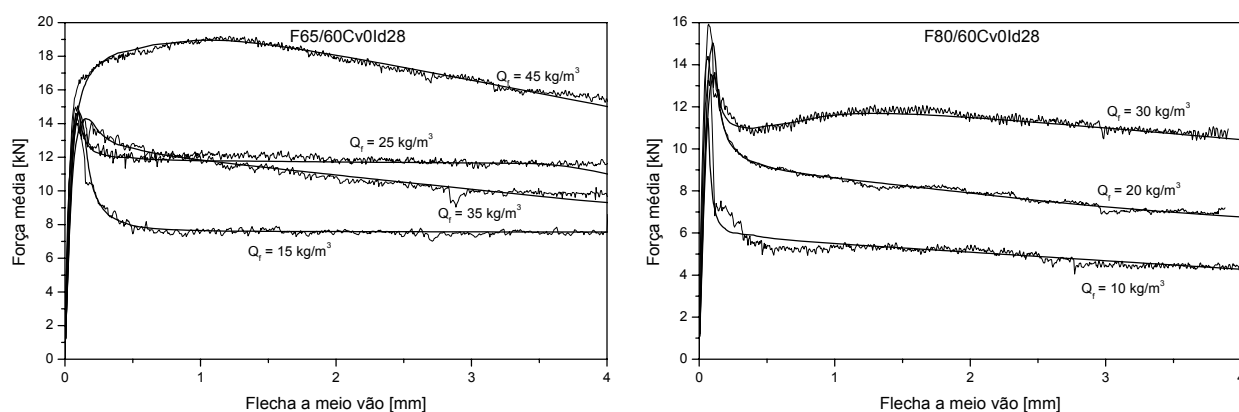


Figura 11- Curvas experimentais e respectivas simulações numéricas com a optimização da lei  $\sigma$ - $\epsilon$

Tabela 2 – Parâmetros que definem a lei  $\sigma_{nn}^{cr} - \epsilon_{nn}^{cr}$  para as séries reforçadas com fibras 80/60.

$\sigma_{nn,i}^{cr}$ [MPa]	$s_d^*$	$\epsilon_{nn,i}^{cr}$ [‰]	$s_d$
$\sigma_{nn,1}^{cr} = 0.56 f_{ctm,fl} (1.6-d)$	0.25	$\epsilon_{nn,2}^{cr} = 12$	6
$\sigma_{nn,2}^{cr} = 0.38 f_{R1} \kappa_h$	0.19	$\epsilon_{nn,3}^{cr} = 408$	180
$\sigma_{nn,3}^{cr} = 0.34 f_{R4} \kappa_h$	0.23	$\epsilon_{nn,u}^{cr} = 923$	241

\* desvio padrão

Tabela 3 – Parâmetros que definem a lei  $\sigma_{nn}^{cr} - \epsilon_{nn}^{cr}$  para as séries reforçadas com fibras 65/60.

$\sigma_{nn,i}^{cr}$ [MPa]	$s_d^*$	$\epsilon_{nn,i}^{cr}$ [‰]	$s_d$
$\sigma_{nn,1}^{cr} = 0.54 f_{ctm,fl} (1.6-d)$	0.15	$\epsilon_{nn,2}^{cr} = 13$	7
$\sigma_{nn,2}^{cr} = 0.39 f_{R1} \kappa_h$	0.22	$\epsilon_{nn,3}^{cr} = 473$	187
$\sigma_{nn,3}^{cr} = 0.31 f_{R4} \kappa_h$	0.21	$\epsilon_{nn,u}^{cr} = 997$	144

\* desvio padrão

### 3.5 Estimativa da energia de fractura

Nos códigos computacionais que permitem simular o comportamento não linear material de estruturas de betão, em que o processo de fendilhação é formulado por intermédio de modelos de fendilhação distribuída, é necessário conhecer o valor da energia de fracturado material,  $G_f$ , de modo que os resultados da simulação numérica sejam independentes do refinamento da malha de elementos finitos. A forma mais apropriada para determinar  $G_f$  passa pela realização

de ensaios de tracção uniaxial sob controlo de deslocamentos, sendo necessário dispor de equipamento bastante rígido e de elevada sofisticação ao nível do controlo de ensaio. No caso dos BRFA, dada a elevada capacidade de transferência de tensões entre as faces da fenda, mesmo para elevada abertura de fenda, determinar  $G_f$  exige executar o ensaio até abertura de fenda de vários milímetros. Assim, determinar  $G_f$  por intermédio de um ensaio de maior simplicidade seria de todo oportuno. Com este propósito, verificou-se a possibilidade de relacionar  $G_f$  com  $f_{eq,3}$ , este último determinado no âmbito do ensaio de flexão recomendado pela RILEM TC 162-TDF (2002b) e representando a tensão equivalente de tracção em flexão para uma flecha de aproximadamente 2.65 mm (ver Figura 12). Este parâmetro é determinado por intermédio da seguinte expressão,

$$f_{eq,3} = \frac{3 D_{BZ,3}^f L}{2 \cdot 2.50 b h_{sp}^2} \quad [\text{N/mm}^2] \quad (17)$$

em que  $b$  é a largura do provete e  $h_{sp}$  é a distância da extremidade interior do entalhe à superfície superior do provete e  $D_{BZ,3}^f$  é a contribuição das fibras para a energia absorvida entre o pico de carga e a flecha de  $\delta = \delta_3 = 2.5$  mm.

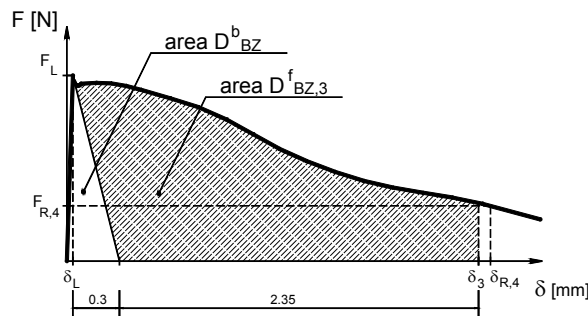


Figura 12 - Conceito de  $f_{eq,3}$  com base na resposta força-flecha de um ensaio de flexão.

Na Figura 13 apresenta-se a relação obtida que, apesar da elevada dispersão de valores, denota uma tendência linear entre aquelas duas propriedades do material, em que o parâmetro de relação, com valor de 1.04, tem a dimensão de um comprimento, de modo que a referida relação fique dimensionalmente consistente. Assim, idealizando que o BRFA tenha um comportamento rígido-plástico, a energia de fractura do BRFA real é igual ao produto de uma flecha de 1.04 mm pelo valor de  $f_{eq,3}$  do material.

Em trabalho anterior constatou-se que o comportamento pós-pico era consideravelmente dependente da quantidade de fibras,  $Q_f$ , (Cunha *et al.* 2003). A relação entre  $G_f$  e  $Q_f$  está representada na Figura 14, de onde se conclui haver uma deficiente correlação, devido ao facto de  $G_f$  ser fortemente dependente do número efectivo de fibras na secção de fractura e da orientação dessas fibras, entidades estas que podem ser bastante distintas em provetes com o mesmo  $Q_f$  (Barragán, 2002).

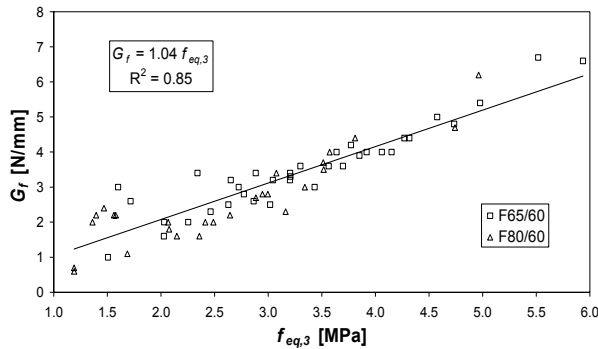


Figura 13- Relação entre a energia de fractura  $G_f$  e a tensão residual  $f_{eq,3}$ .

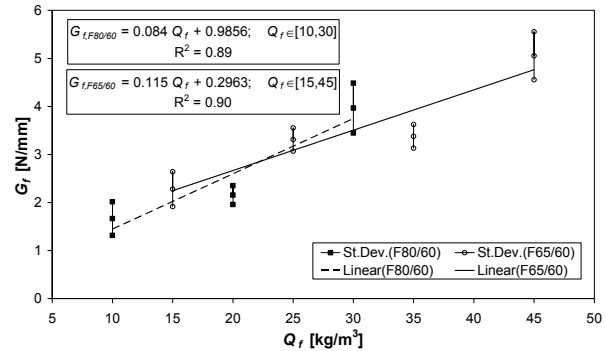


Figura 14- Relação entre a energia de fractura  $G_f$  e a quantidade de fibras  $Q_f$ .

#### 4. CONCLUSÕES

Tendo por base as simulações numéricas efectuadas com um modelo de secção, verificou-se que a lei  $\sigma - \varepsilon$  proposta pela RILEM conduz a deficientes simulações das respostas força-flecha registadas em ensaios experimentais efectuados segundo as recomendações da RILEM. Usando este modelo e recorrendo a análise inversa obtiveram-se parâmetros que permitiram definir uma lei trilinear  $\sigma - \varepsilon$  capaz de simular adequadamente aquelas respostas. Da comparação entre os valores destes parâmetros e os propostos pela RILEM constatou-se (ver Equação 1 e Tabela 1) que a análise inversa conduziu a uma redução das constantes que relacionam  $\sigma_1$  com  $f_{cm,fl}$ ,  $\sigma_2$  com  $f_{R1}$  e  $\sigma_3$  com  $f_{R4}$  e a um aumento das extensões  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ .

Os parâmetros obtidos na análise inversa com o modelo de secção foram utilizados na definição da lei constitutiva que simula o modo I de fractura da fenda. Esta lei,  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$ , foi implementada num modelo de fendas distribuídas inserido num código computacional baseado no método dos elementos finitos (MEF). Da simulação numérica verificou-se que esta estratégia é incapaz de simular com o rigor desejado as respostas obtidas experimentalmente. De um modo geral, a carga de pico e tensão residual registadas experimentalmente são subestimadas.

A aplicação do modelo baseado no MEF inserida numa estratégia de análise inversa permitiu definir leis  $\sigma_{nn}^{cr} - \varepsilon_{nn}^{cr}$  capazes de simular com elevado rigor as respostas experimentais. No entanto constatou-se a existência de uma elevada dispersão nos valores dos parâmetros que definem essa lei, pelo que estes não devem ser determinados exclusivamente com base nos parâmetros  $f_{cm,fl}$ ,  $f_{R1}$  e  $f_{R4}$ , tal como recomenda a RILEM.

A variabilidade do comportamento à flexão do BRFA, devido à multiplicidade de factores intervenientes nos mecanismos de reforço das fibras, faz com que não seja verosímil a determinação de uma lei generalizada na caracterização do modo I de fractura dos BRFA. No entanto, a estratégia numérica envolvendo análise inversa e um modelo de fendas distribuídas

em que a fenda tem a sua própria lei constitutiva, permite determinar, com rigor suficiente, a lei que simula o processo de abertura de fenda de um determinado BRFA.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o financiamento concedido pelo programa POCTI, “POCTI/34793/99 – Cost competitive steel fibre reinforced concrete for industrial pavements”, FCT, e às empresas que gentilmente forneceram os materiais usados previamente na campanha experimental, nomeadamente, SECIL, Bekaert, Bettor MBT Portugal, Central de Betão Pronto de Moreira de Cónegos, Central Termo-Eléctrica do Pego e Pisonort. Também agradecem colaboração prestada pela Civitest, pelo equipamento laboratorial disponibilizado. O segundo autor agradece a bolsa SFRH/BD/3259/2000 concedida pela FCT e FSE.

## 6. REFERÊNCIAS

- Antunes, J. A. B; Barros, J. A. O.. “Influência da quantidade de fibras, percentagem de cinzas volantes e idade no comportamento à flexão de betão reforçado com fibras de aço Dramix RC-65/60-BN”, Relatório 02-DEC/E-17, 79 pp., Dezembro 2002.
- Barragán, B.E., “Failure and toughness of steel fiber reinforced concrete under tension and shear”, PhD Thesis, Technical University of Catalunya, Barcelona, Spain 2002.
- Barros, J.A.O., Antunes, J.A.B, Amorim, J.A.S.B.A., “Influência da quantidade de fibras, percentagem de cinzas volantes e idade no comportamento à flexão de betão reforçado com fibras de aço Dramix RC-80/60-BN”, Relatório 02-DEC/E-11, 87 pp., Julho 2002.
- Barros, J.A.O., Figueiras, J.A. “Nonlinear analysis of steel fibre reinforced concrete slabs on grade”, *Computers & Structures*, Vol.79, No.1, pp. 97-106, January 2001.
- Barros, J.A.O., Figueiras, J.A. “Experimental behaviour of fiber concrete slabs on soil”, *Journal Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, Vol. 3, pp. 277-290, 1998.
- Barros, J. A. O.. “Comportamento do betão reforçado com fibras - análise experimental e simulação numérica”, Tese de Doutoramento, FEUP, Dezembro de 1995.
- Cunha, V.M.C.F.; Ribeiro, A.F.; Barros, J.A.O.; Antunes, J.A.B., “Betão Reforçado com Fibras de Aço: Recomendações Normativas, Investigação Experimental e Numérica ”, V Simpósio EPUSP Estruturas Concreto, Brasil, Junho de 2003.
- Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P.E., “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.



- Ribeiro, A.F.; Cunha, V.M.C.F.; Barros, J.A.O.; Antunes, J.A.B., “Modelo de secção”, Seminário sobre dimensionamento de estruturas de betão reforçado com fibras, Dep. Eng<sup>a</sup> da Escola de En<sup>a</sup> da Univ. Minho, 28 Novembro de 2003.
- RILEM TC 162-TDF, “Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - Final Recommendation”, Materials and Structures, Vol. 35, pp. 579-582, November 2002b.
- Rots, J.G. (1988), “Computational modeling of concrete fracture”, Dissertation, Delft University of Technology.

## ANEXO A1

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM O MODELO DE SECÇÃO

Nas Figuras A2.1 a A2.3 representam-se as simulações numéricas e respectivas curvas experimentais obtidas pela análise inversa com o modelo de secção.

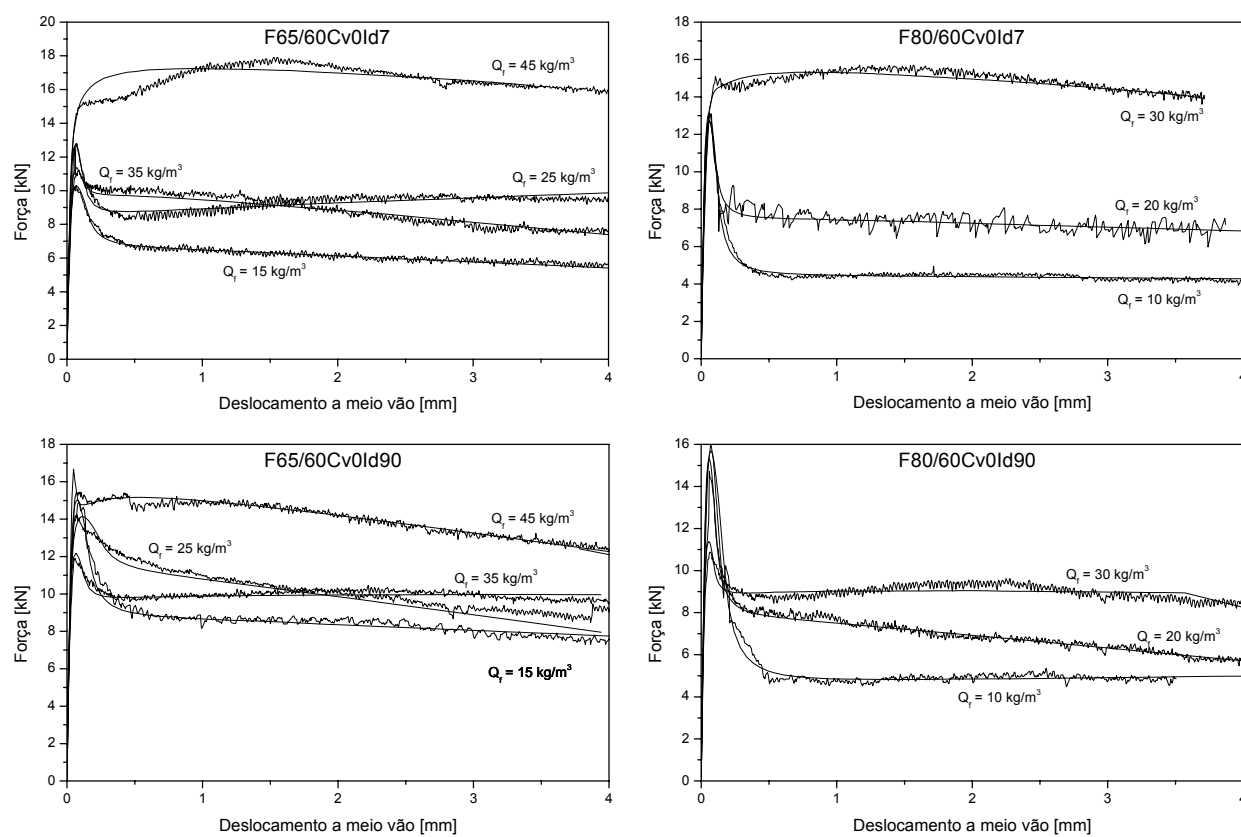


Figura A1.1 – Simulações numéricas e curvas experimentais das séries com 0% de cinzas volantes

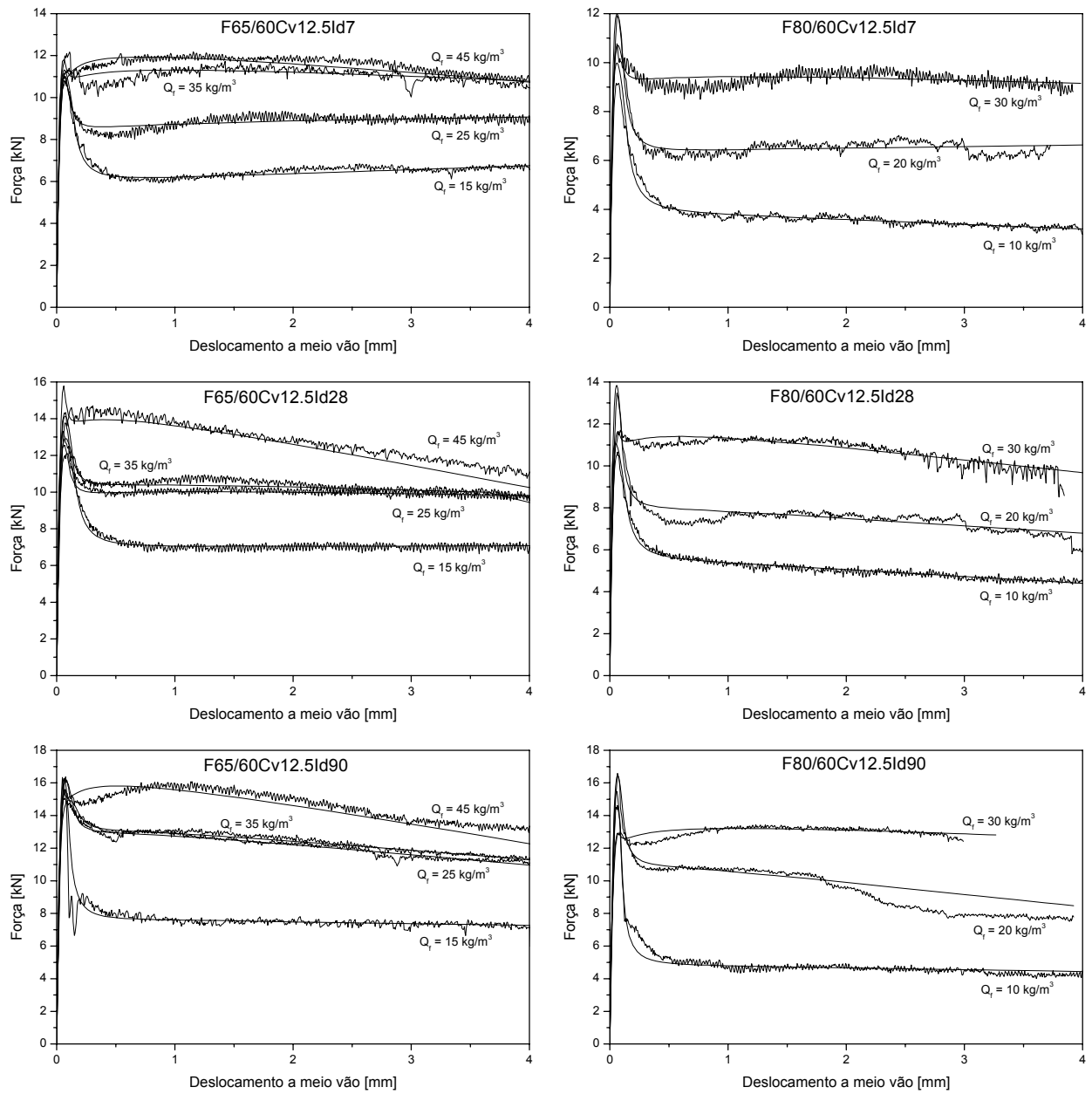


Figura A1.2 – Simulações numéricas e curvas experimentais das séries com 12.5% de cinzas volantes

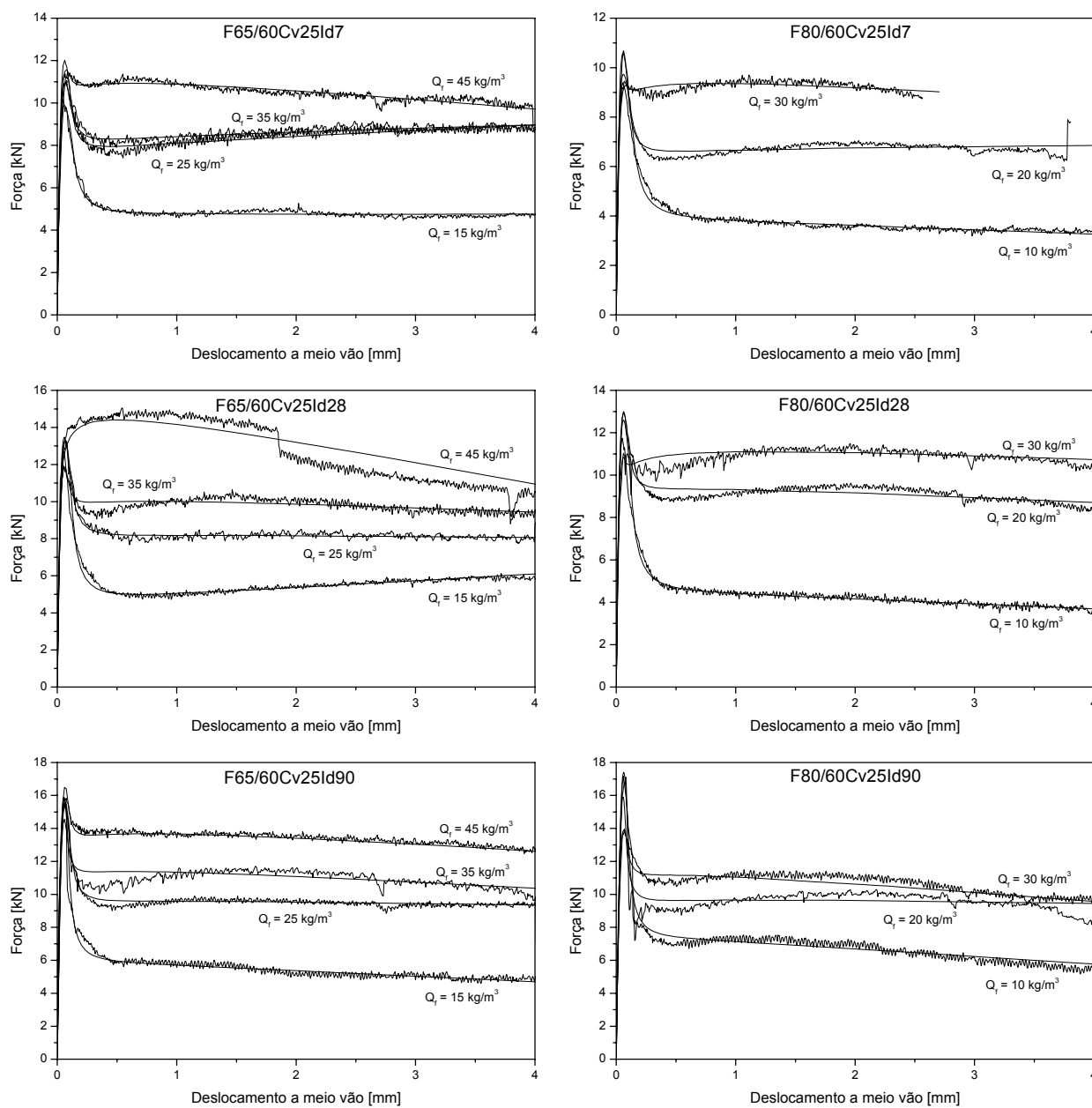


Figura A1.3 – Simulações numéricas e curvas experimentais das séries com 25% de cinzas volantes

## ANEXO A2

### VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE $E_c$

Nas Tabelas A2.1 a A2.3 encontram-se os valores do módulo de elasticidade utilizados no modelo de fendas distribuídas.

Tabela A2.1- Valores do módulo de elasticidade dos provetes com 7 dias de idade.

$Q_f$ [m <sup>3</sup> ]		F65/60				F80/60		
		15	25	35	45	10	20	30
Cv0	$E_c$ [GPa]	30.98	31.04	29.92	32.53	30.87	31.38	29.03
Cv12.5		30.27	30.14	30.65	31.24	27.75	29.93	26.10
Cv25		28.83	28.67	29.37	28.39	27.43	27.60	23.73

Tabela A2.2- Valores módulo de elasticidade dos provetes com 28 dias de idade.

$Q_f$ [m <sup>3</sup> ]		F65/60				F80/60		
		15	25	35	45	10	20	30
Cv0	$E_c$ [GPa]	32.83	33.55	32.20	34.08	32.48	31.79	29.16
Cv12.5		32.20	32.22	33.86	32.93	31.68	32.21	27.23
Cv25		32.06	31.57	31.95	32.15	30.61	30.85	26.80

Tabela A2.3- Valores módulo de elasticidade dos provetes com 90 dias de idade.

$Q_f$ [m <sup>3</sup> ]		F65/60				F80/60		
		15	25	35	45	10	20	30
Cv0	$E_c$ [GPa]	33.92	34.98	33.18	34.87	33.15	35.28	30.66
Cv12.5		33.61	34.33	34.89	33.43	32.83	34.30	29.35
Cv25		34.09	34.49	32.77	32.64	33.14	33.46	31.84

## ANEXO A3

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM O MODELO DE FENDILHAÇÃO DISTRIBUÍDA

Nas Figuras A3.1 a A3.3 representam-se as simulações numéricas e respectivas curvas experimentais obtidas pela análise inversa com o modelo multi-fendas fixas.

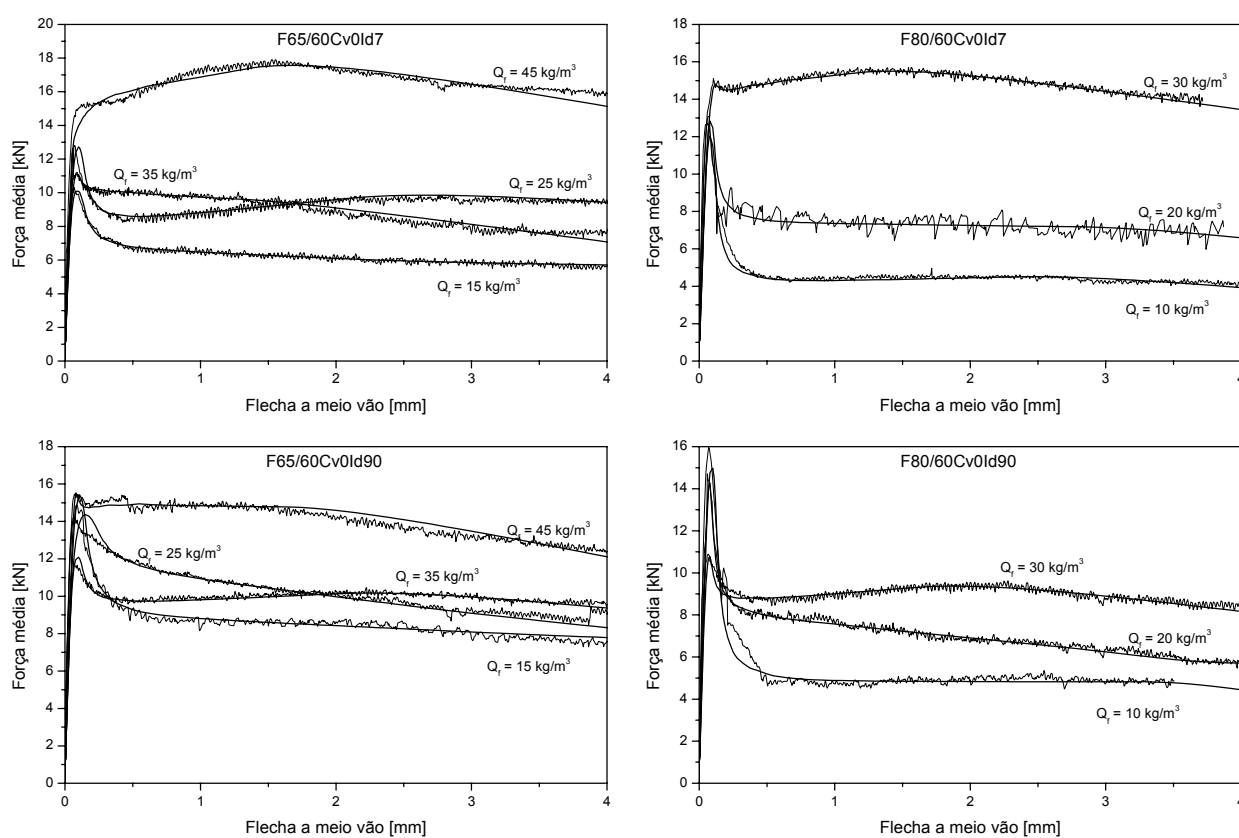


Figura A3.1 – Simulações numéricas e curvas experimentais das séries com 0% de cinzas volantes

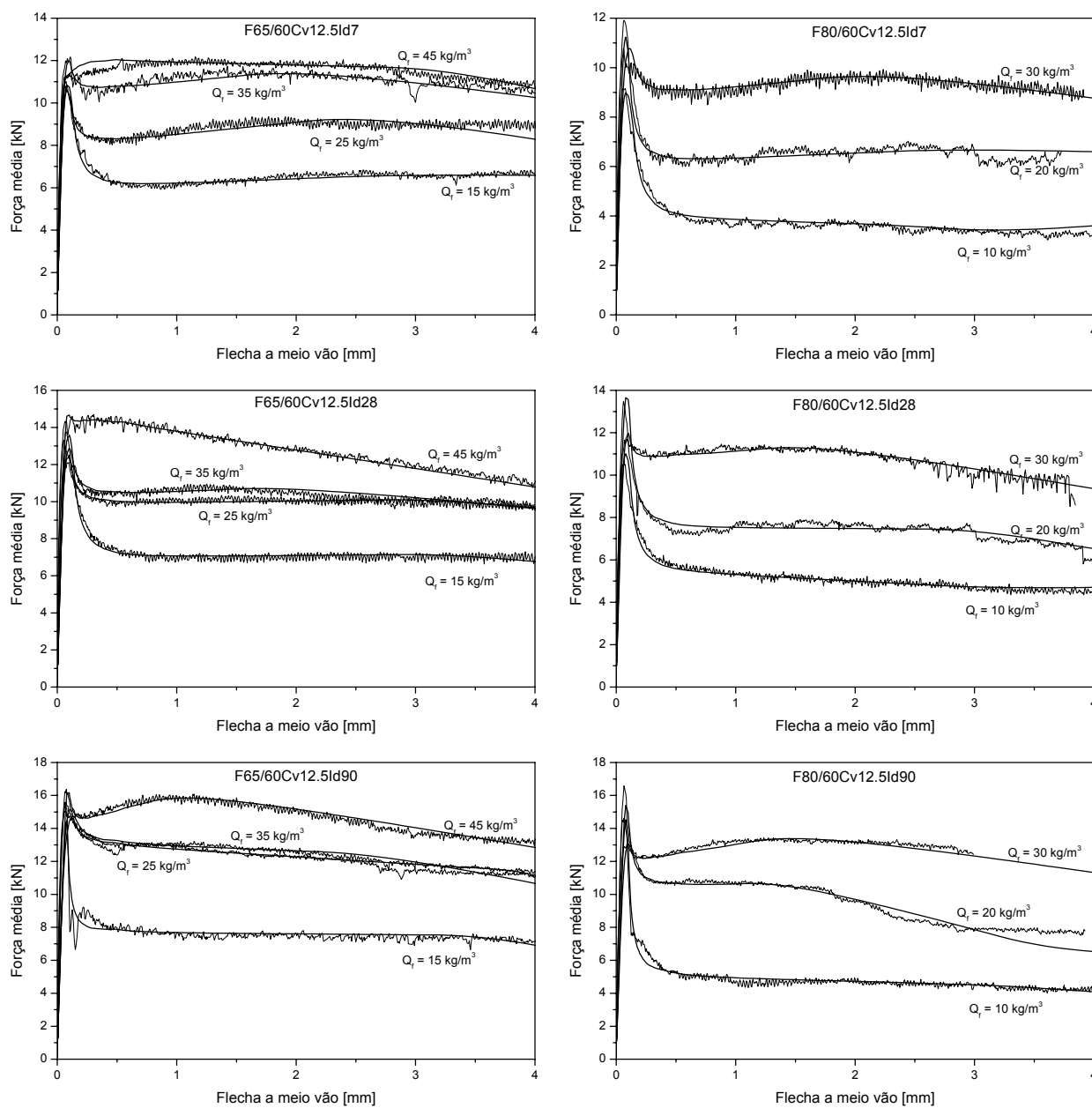


Figura A3.2 – Simulações numéricas e curvas experimentais das séries com 12.5% de cinzas volantes

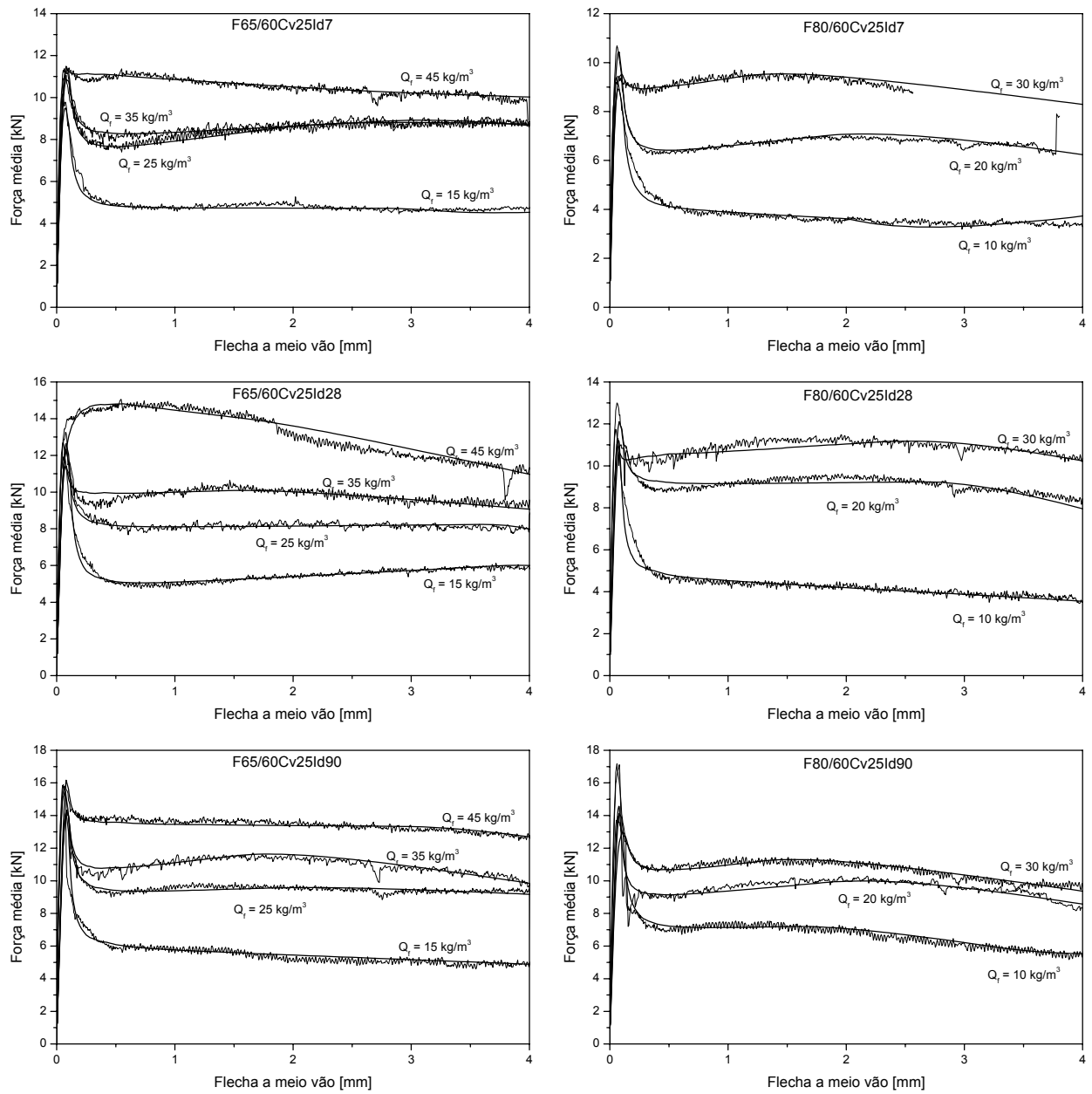


Figura A3.3 – Simulações numéricas e curvas experimentais das séries com 25% de cinzas volantes



## ANEXO A4

VALORES DA ENERGIA DE FRACTURA  $G_F$ 

Nas Tabelas A4.1 a A4.3 encontram-se os valores da energia de fractura obtidos pela análise inversa com o modelo de multi-fendas fixas.

Tabela A4.1- Valores da energia de fractura dos provetes com 7 dias de idade.

$Q_f$ [m <sup>3</sup> ]		F65/60				F80/60		
		15	25	35	45	10	20	30
Cv0	$G_f$ [N/mm]	1.6	3.4	2.5	6.7	2.2	2.0	6.2
Cv12.5		2.0	2.8	4.0	4.0	0.7	2.0	3.4
Cv25		1.0	3.2	3.0	4.2	0.6	1.8	3.0

Tabela A4.2- Valores da energia de fractura dos provetes com 28 dias de idade.

$Q_f$ [m <sup>3</sup> ]		F65/60				F80/60		
		15	25	35	45	10	20	30
Cv0	$G_f$ [N/mm]	2.3	3.9	3.6	6.6	2.2	2.2	4.4
Cv12.5		2.0	3.6	3.4	4.4	1.1	2.0	3.7
Cv25		1.0	2.5	3.3	4.4	2.0	2.7	4.0

Tabela A4.3- Valores da energia de fractura dos provetes com 90 dias de idade.

$Q_f$ [m <sup>3</sup> ]		F65/60				F80/60		
		15	25	35	45	10	20	30
Cv0	$G_f$ [N/mm]	2.6	3.2	3.0	4.8	2.2	1.6	2.8
Cv12.5		3.4	4.0	4.0	5.4	2.4	2.3	4.7
Cv25		2.6	3.2	3.6	5.0	1.6	2.8	3.5