

Dimensionamento de estruturas de betão reforçado com fibras de aço  
Joaquim Barros, Pierre Rossi, Bruno Massicotte (Eds.)  
DEC-UM, Portugal 28/11/2003

## ESTRATÉGIA PARA DETERMINAR A LEI TENSÃO-ABERTURA DE FENDA DO BRFA

### STRATEGY TO EVALUATE THE STRESS-CRACK OPENING RELATIONSHIP OF THE SFRC

Alberto Ribeiro<sup>1</sup>, Joaquim Barros<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado do Departamento de Eng.<sup>a</sup> Civil, da Escola de Eng.<sup>a</sup> da Universidade do Minho

<sup>2</sup>Prof. Auxiliar do Departamento de Eng.<sup>a</sup> Civil da Escola de Eng.<sup>a</sup> da Universidade do Minho

**Resumo:** No presente trabalho é descrita a metodologia desenvolvida para a determinação dos parâmetros de fractura do betão reforçado com fibras de aço, designadamente, a forma da relação tensão-abertura de fenda e a energia subjacente ao processo de fendilhação deste compósito. Para tal recorreu-se a resultados experimentais obtidos em ensaios de flexão efectuados segundo as recomendações do TC 162-TDF da RILEM e foram desenvolvidos dois modelos numéricos, um com base num modelo de secção e o outro utilizando elementos finitos de interface para modelar a progressão da fenda.

**Palavras chave:** Abertura de fenda; Análise inversa; BRFA; Elementos de interface.

**Abstract:** The methodology developed to determine the fracture parameters of the steel fibre reinforced concrete is described in the present work. The shape of the stress-crack opening displacement relationship and the fracture energy were assessed. For this purpose, the force-deflection relationships obtained in experimental tests carried out according to the recommendations of the RILEM TC 162-TDF were taken and two numerical approaches were developed, one based on the cross-section layer model and the other using interface finite elements to model the crack opening propagation.

**Keywords:** Steel fiber reinforced concrete; crack opening; inverse analysis; interface finite elements.

## 1. INTRODUÇÃO

A investigação desenvolvida nos últimos vinte anos revela que o principal benefício da adição de fibras ao betão é o aumento da resistência residual após a fendilhação do betão (ACI 1996). Assim, enquanto no betão simples (BS) a resistência à tracção é desprezada, dado que após a sua fendilhação a tensão resistente diminui bruscamente para valor marginal, no betão reforçado com fibras de aço (BRFA) deve-se considerar que este material desenvolve uma certa capacidade resistente em tracção, dado que os mecanismos de reforço proporcionados pelas fibras que atravessam as fendas permitem reter níveis de resistência significativos, mesmo para abertura de fenda correspondentes aos estados limites de utilização (Barros e Antunes 2003). Assim, em estruturas hiperestáticas essa capacidade resistente em tracção do BRFA conduz a que a carga última dessas estruturas seja significativamente superior à sua carga de início de fendilhação (Barros e Figueiras 2001), pelo que os níveis de segurança podem ser consideravelmente mais elevados. Deste facto também resulta que as cargas resistentes correspondentes aos estados limites de utilização são mais elevadas.

No entanto, apesar do elevado número de trabalhos científicos publicados na área do BRFA, são reduzidos os trabalhos que, suportados em resultados obtidos em ensaios experimentais cujo layout tenha aceitação generalizada, proponham formulações adequadas para uso em projecto. Este facto conduz a que a utilização de BRFA tenha estado praticamente reduzida a aplicações consolidadas pela experiência e por considerações económicas, como são os casos dos pavimentos de edifícios industriais e os túneis. No entanto, a investigação tem indiciado que a utilização do BRFA pode ser alargada a componentes estruturais (Filiatrault *et al.* 1994, Bélanger 2000, Massicotte *et al.* 2000, Moffatt 2001), sendo no entanto necessário estabelecer, de forma sustentada, quais os parâmetros que caracterizam o comportamento pós-fendilhação do BRFA, bem como o estabelecimento de formulações a serem utilizadas em projecto.

Na tentativa de dar resposta à primeira destas duas necessidades, a RILEM TC 162-TDF propôs uma metodologia de caracterização do comportamento em flexão do BRFA (RILEM 2002b, RILEM 2003). Nestes trabalhos, ao abrigo do formato proposto pelo modelo código CEB-FIP 1990 (1993), são propostas formulações para dimensionamento de estruturas de BRFA. Em simultâneo, utilizando conceitos da fractura não linear (Karihaloo 1995), este grupo de investigadores designado pela RILEM, propôs uma metodologia de simulação do comportamento pós-fendilhação do BRFA a ser utilizada em projecto (RILEM 2002a). Esta abordagem está mais próxima do processo físico da abertura e progressão das fendas em estruturas de materiais cimentícios, pelo que foi a adoptada no presente trabalho.

Assim, neste artigo descreve-se toda uma estratégia desenvolvida para caracterizar o comportamento pós-fendilhado do BRFA. Para tal, utilizaram-se as relações força-flecha obtidas em ensaios experimentais (Barros *et al.* 2002, Antunes e Barros 2002) e desenvolveram-se duas ferramentas de cálculo automático por forma a se determinar os

parâmetros de fractura do BRFA utilizado na investigação experimental (concebido para pavimentos de edifícios industriais). O primeiro modelo, designado por modelo de secção, está devidamente descrito no artigo intitulado "Modelo de secção para dimensionamento à flexão de peças de betão armado" incluído no presente livro. Este modelo foi utilizado por forma a que, recorrendo a análise inversa, fossem determinados os parâmetros que permitem definir uma lei trilinear tensão-abertura de fenda ( $\sigma - w$ ), que garanta elevados níveis de aproximação aos resultados experimentais (Cunha *et al.* 2003).

Em seguida esta lei foi utilizada na modelação do modo I de fractura da lei constitutiva da fenda, no quadro do método dos elementos finitos (MEF), onde a progressão da fenda foi simulada por intermédio de elementos de interface. Esta metodologia permitiu verificar que a utilização do modelo de secção e a análise inversa possibilita a determinação, com rigor suficiente, dos parâmetros que definem a lei  $\sigma - w$  do BRFA. Utilizando o MEF foi determinada a energia de fractura,  $G_f$ , do BRFA, de difícil obtenção por intermédio de ensaios experimentais, dado que o BRFA tem capacidade de absorção de energia até elevado valor de abertura de fenda, valor este só possível de ser alcançado em ensaios uniaxiais efectuados com equipamentos de elevada sofisticação (RILEM 2001, Hordijk 1991, Barragán 2002). No entanto, a energia de fractura é um parâmetro necessário nos modelos de fendilhação distribuída (Barros 1995), pelo que há todo o interesse em relacionar este parâmetro com um outro de mais fácil obtenção experimental, como é o caso da tensão equivalente em tracção por flexão,  $f_{eq}$ , proposto pela RILEM (2002b). Assim, na parte final do presente trabalho é efectuada a correlação entre  $G_f$  e  $f_{eq}$ .

## 2. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LEI $\sigma - w$ COM BASE NA ANÁLISE INVERSA

Os parâmetros  $\sigma_i$  e  $w_i$  que definem o diagrama trilinear,  $\sigma - w$ , utilizado na simulação da capacidade de resistente do betão fendilhado, representado Figura 1, foram determinados de modo a que a relação força-flecha,  $F - \delta$ , obtida numericamente se aproximasse, com o menor erro possível, das respostas registadas em ensaios experimentais. A investigação experimental pode ser consultada em (Barros *et al.* 2002, Antunes e Barros 2002) e a numérica está devidamente descrita em outro trabalho (Cunha *et al.* 2003). A estratégia numérica utilizada designa-se geralmente por análise inversa, e o modelo numérico utilizado está descrito em outro trabalho publicado no presente livro (Ribeiro *et al.* 2003). Segundo este modelo, a relação  $F - \delta$  do provete obtém-se por intermédio da relação momento-curvatura de uma secção ( $M - \chi$ ) discretizada em camadas, ver Figura 2. O modelo baseia-se nas equações de equilíbrio, de compatibilidade de deformações e atende às leis constitutivas dos materiais intervenientes. A viga entalhada utilizada nos ensaios experimentais e cujo comportamento foi simulado numericamente, foi assumida como podendo ser discretizada um tramo central com comprimento de  $h_{sp}/2$  ( $h_{sp}$  = altura da viga acima do entalhe), onde se processam todos os fenómenos de não linearidade material, ladeado por dois tramos com comportamento linear-

elástico. Com base na curvatura de cada um dos dois tramos tipo que discretizam a viga, e recorrendo às equações da linha elástica, determinou-se a relação  $F-\delta$ .

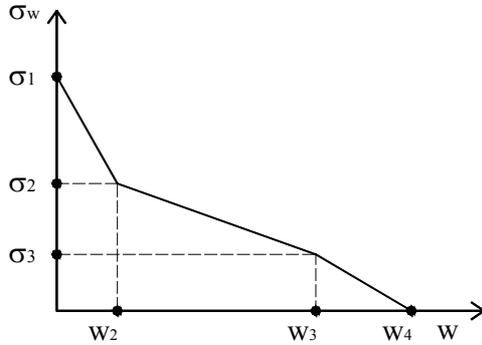


Figura 1 – Relação  $\sigma-w$  utilizada na simulação numérica.

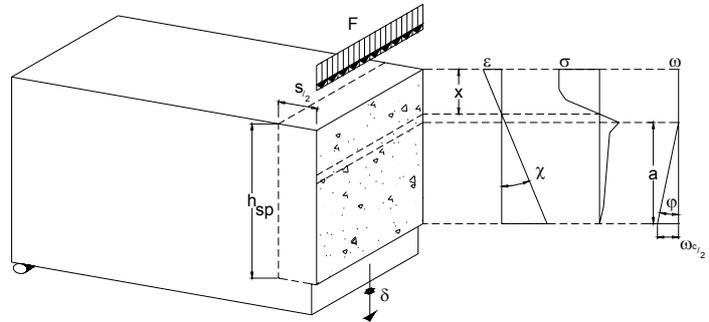


Figura 2 – Modelo de secção adoptado na determinação dos parâmetros da lei  $\sigma - w$ , pela análise inversa.

A título exemplificativo, representa-se na Figura 3 algumas das simulações obtidas com a estratégia numérica desenvolvida, donde se pode concluir que o diagrama trilinear  $\sigma - w$  permite simular, como rigor elevado, as respostas  $F-\delta$  registadas experimentalmente. Nas restantes séries foi obtido um grau de aproximação às curvas experimentais similar ao observado nas séries apresentadas.

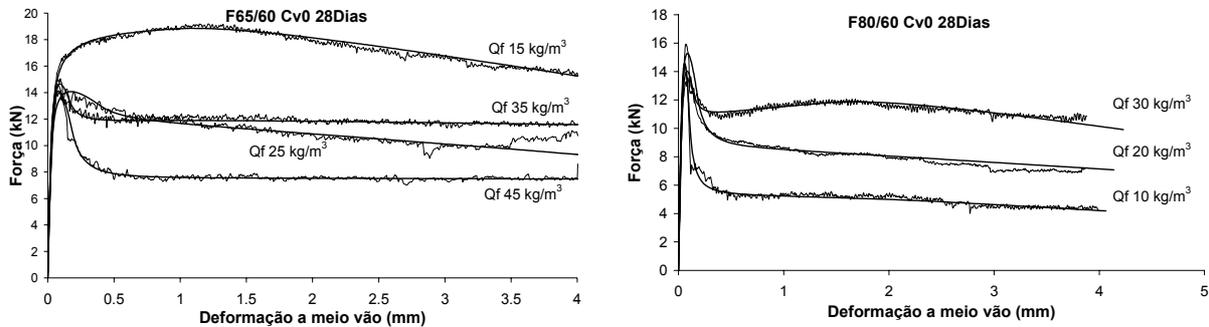


Figura 3 – Curvas experimentais e respectivas simulações numéricas com lei  $\sigma-w$  optimizada.

A Figura 4 representa a variação de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  com  $Q_f$ , nas séries de provetes com 28 dias de idade. Para as restantes idades observou-se uma tendência similar. Da análise desta figura verifica-se que  $\sigma_2$  aumenta de forma aproximadamente linear com  $Q_f$ . O aumento de  $\sigma_1$  só é significativo para  $Q_f > 35 \text{ Kg/m}^3$ , para as séries com fibras F65/60. Nestas séries,  $\sigma_3$  permanece praticamente constante até  $35 \text{ kg/m}^3$ , aumentando para  $Q_f > 35 \text{ Kg/m}^3$ . Na Figura 5 representa-se a variação de  $w_2$  e  $w_3$  com  $Q_f$ , nas séries de provetes com 28 dias de idade.

Constata-se uma tendência para uma diminuição do valor destes parâmetros com  $Q_f$ , havendo contudo larga dispersão nos valores obtidos. Esta constatação é sustentada pela análise da Figura 6a, em que se verifica uma diminuição da importância do primeiro tramo da curva trilinear, e uma tendência para que o segundo tramo se mantenha constante com o aumento de  $Q_f$  (Figura 6b). O valor de  $w_4$  não foi determinante nas simulações efectuadas, dado terem sido raros os casos em que a abertura de fenda ultrapassou o valor correspondente a  $w_3$ .

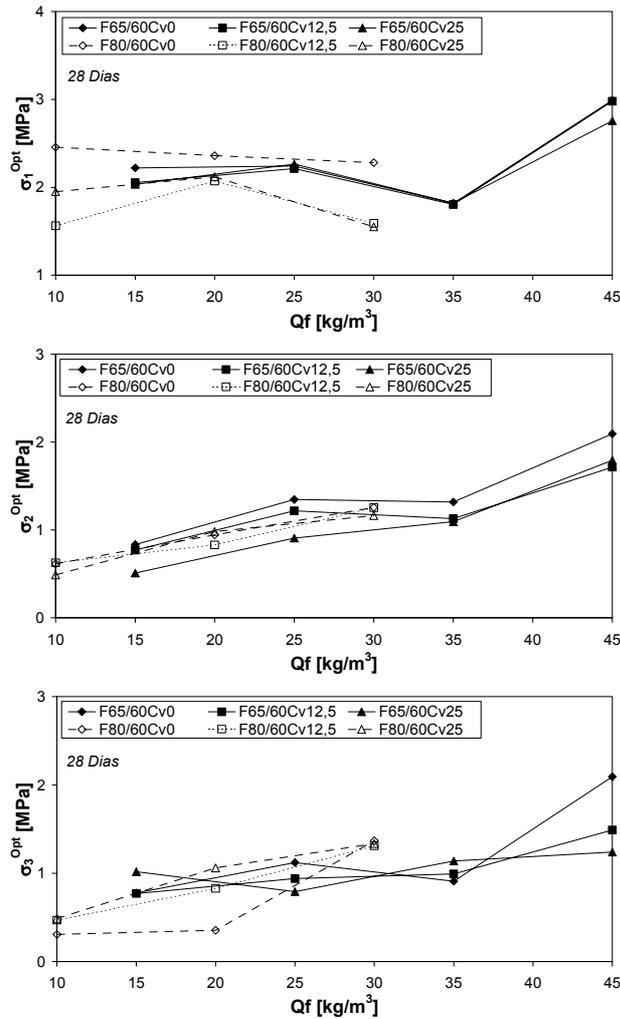


Figura 4 – Influência da quantidade de fibras nos parâmetros de tensão.

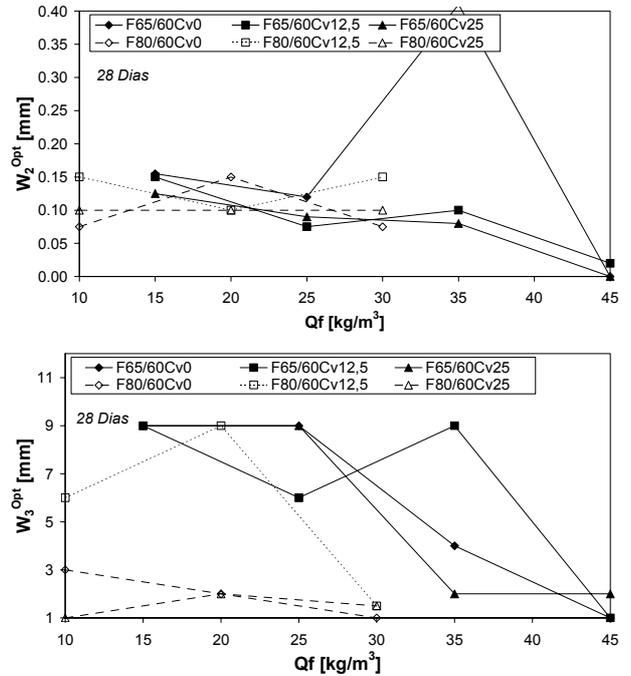


Figura 5 – Influência da quantidade de fibras nos parâmetros de abertura de fenda.

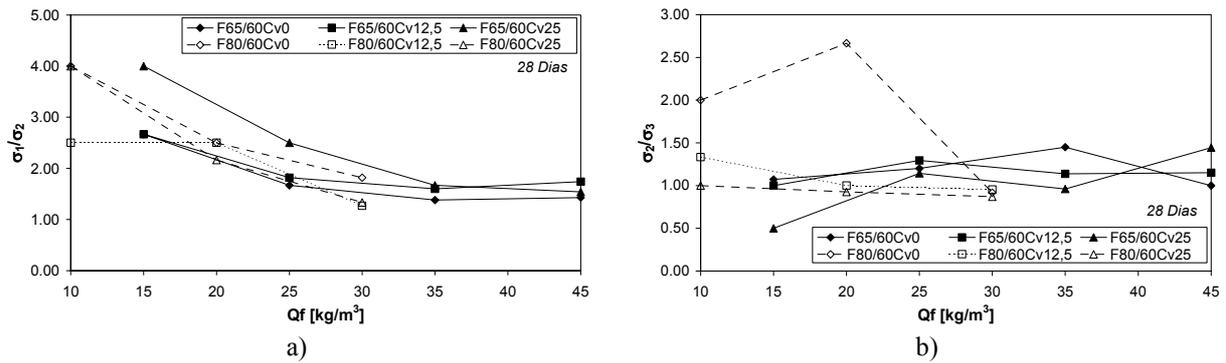


Figura 6 – Relação entre os parâmetros de tensão e sua evolução com  $Q_f$ .

### 3. ELEMENTOS FINITOS DE INTERFACE

#### 3.1 Introdução

Para avaliar da capacidade do modelo descrito na secção anterior em definir a lei  $\sigma - w$ , os parâmetros determinados foram utilizados na caracterização da lei constitutiva que simula o modo I de fractura em elementos de interface aplicados na modelação da progressão da fenda. Para tal, a secção acima do entalhe foi discretizada em elementos de interface de linha de seis nós e o restante volume do provete por elementos de Serendipity de oito nós de estado plano de tensão com comportamento linear e elástico. Na secção seguinte efectua-se uma breve descrição do elemento de interface considerado. A malha de elementos finitos está representada na Figura 7.

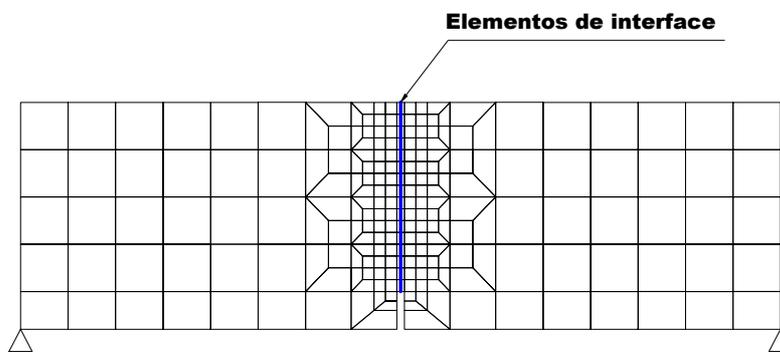


Figura 7 – Malha de elementos finitos adoptada na simulação numérica.

#### 3.2 Formulação

Na Figura 8 representa-se o elemento linear de seis nós considerado. O campo de deslocamentos do elemento de junta começa por ser definido no sistema local do elemento,  $x'_i$   $c/$   $i=1,2$ , sendo  $x'_1$  e  $x'_2$  os eixos tangente e normal ao elemento de junta:

$$\underline{u}' = [u'_{B1} \quad u'_{B2} \quad u'_{T1} \quad u'_{T2}]^T \quad (1)$$

em que  $u'_{Bi}$  e  $u'_{Ti}$  correspondem, respectivamente, ao deslocamento na face inferior e superior do elemento. Os deslocamentos nodais do elemento são definidos pelo vector  $\underline{a}'$ ,

$$\underline{a}' = [a'_{11} \quad a'_{12} \quad a'_{21} \quad a'_{22} \quad a'_{31} \quad a'_{32} \quad a'_{41} \quad a'_{42} \quad a'_{51} \quad a'_{52} \quad a'_{61} \quad a'_{62}]^T, \quad (2)$$

em que  $a'_{ij}$  é o deslocamento do nó  $i$  segundo o eixo  $x'_j$ .

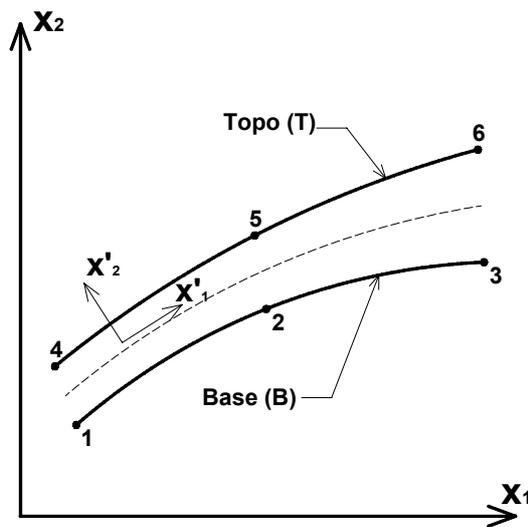


Figura 8 – Elemento de interface de linha de seis nós.

O campo de deslocamentos do elemento é obtido por intermédio dos deslocamentos dos seus nós:

$$\underline{u}' = \underline{N} \cdot \underline{a}', \quad (3)$$

em que  $\underline{N}$  é a matriz das funções de força do elemento. Expandindo (3) obtém-se

$$\begin{bmatrix} u'_{B1} \\ u'_{B2} \\ u'_{T1} \\ u'_{T2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ a'_{21} \\ a'_{22} \\ a'_{31} \\ a'_{32} \\ a'_{41} \\ a'_{42} \\ a'_{51} \\ a'_{52} \\ a'_{61} \\ a'_{62} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

em que  $N_i$  é a função de forma do nó  $i$  de um elemento linear de três nós, representada na Figura 9.

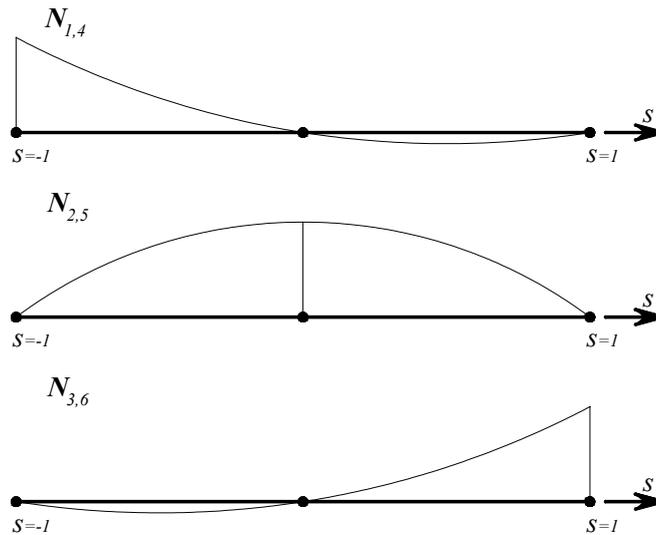


Figura 9 – Funções quadráticas de interpolação para um elemento de três nós.

As componentes do vector dos deslocamentos relativos,  $\Delta \underline{u}'$ , representam o deslizamento e a abertura das faces que constituem o elemento de interface, por forma a simular os modos II e I de fractura, respectivamente, sendo obtidas a partir do vector  $\underline{u}'$  :

$$\underline{\Delta u'} = \begin{bmatrix} s \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u'_1 \\ \Delta u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_{T1} - u'_{B1} \\ u'_{T2} - u'_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{B1} \\ u'_{B2} \\ u'_{T1} \\ u'_{T2} \end{bmatrix} = \underline{L} \cdot \underline{u}'. \quad (5)$$

Substituindo (3) em (5) obtém-se,

$$\begin{aligned} \underline{\Delta u'} &= \underline{L} \cdot \underline{N} \cdot \underline{a}' \\ &= \underline{B} \cdot \underline{a}' \end{aligned} \quad (6)$$

em que

$$\underline{B} = \underline{L} \cdot \underline{N}, \quad (7)$$

é a matriz de deformação,

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

A lei constitutiva do elemento de interface de linha apresenta o seguinte formato:

$$\underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} = \underline{D} \cdot \underline{\Delta u}', \quad (9)$$

em que  $\underline{\sigma}'$  é o vector das tensões com componentes tangencial e normal ao elemento de interface e  $\underline{D}$  é a matriz constitutiva:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

sendo  $k_t$  e  $k_n$  a rigidez tangente e normal do elemento de interface, respectivamente.

A matriz de rigidez,  $\underline{K}$ , do elemento obtém-se por intermédio da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Assim, o trabalho interno de deformação é dado por:

$$W_{\text{int}} = \int_S \delta(\underline{\Delta u}'^T) \cdot \underline{\sigma}' dS . \quad (11)$$

em que  $\delta(\underline{\Delta u}'^T)$  é o vector dos deslocamentos virtuais. Os deslocamentos nodais definidos no referencial local,  $\underline{a}'$ , relacionam-se com os deslocamentos nodais no referencial geral,  $\underline{a}$ , por meio da relação:

$$\underline{a}' = \underline{T} \cdot \underline{a} . \quad (12)$$

em que  $\underline{T}$  é a matriz de transformação. Substituindo (12) em (6):

$$\underline{\Delta u}' = \underline{B} \cdot \underline{a}' = \underline{B} \cdot \underline{T} \cdot \underline{a} \quad (13)$$

e (13) em (9)

$$\underline{\sigma}' = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{T} \cdot \underline{a} \quad (14)$$

que substituídas em (11) resulta em,

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \int_S \delta \underline{a}'^T \cdot \underline{T}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{T} \cdot \underline{a} dS \\ &= \delta \underline{a}'^T \cdot \int_S \underline{T}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{T} dS \cdot \underline{a} \end{aligned} \quad (15)$$

O trabalho externo é traduzido por:

$$W'_{\text{ext}} = \delta \underline{a}'^T \cdot \underline{F}' \quad (16)$$

em que

$$\underline{F}' = \underline{T} \cdot \underline{F} . \quad (17)$$

Substituindo (12) e (17) em (16) obtém-se

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \delta \underline{a}^T \cdot \underline{T}^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{F} \\ &= \delta \underline{a}^T \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad (18)$$

pelo que do PTV resulta,

$$W_{ext} = W_{int}, \quad (19)$$

i.e.,

$$\int_S \underline{T}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{T} dS \cdot \underline{a} = \underline{F}, \quad (20)$$

ou

$$\underline{K} \cdot \underline{a} = \underline{F}, \quad (21)$$

em que

$$\underline{K} = \int_S \underline{T}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{T} dS. \quad (22)$$

é a matriz de rigidez do elemento e  $\underline{F}$  é o vector das forças nodais equivalentes às acções que actuam sobre o elemento.

Conhecidos os deslocamentos num determinado elemento, as forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado nesse elemento obtêm-se da seguinte relação:

$$\begin{aligned} \underline{F}'_{int} &= \int_S \Delta \underline{u}'^T \cdot \underline{\sigma}' dS \\ &= \int_S \underline{a}'^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}' dS \\ &= \int_S \underline{a}'^T \cdot \underline{T}^T \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}' dS \end{aligned} \quad (23)$$

que após assemblado no vector  $\underline{F}'_i$  da estrutura permite determinar o vector resíduo a ser utilizado como vector solicitação na próxima iteração do processo incremental e iterativo do método de Newton-Raphson empregue na resolução das equações não lineares que regem o fenómeno da progressão da fenda (Barros 1995).

### 3.3 Desempenho da simulação

A malha de elementos finitos representada na Figura 7 foi a utilizada na avaliação do desempenho do modelo. A rigidez  $k_n$  da lei constitutiva do elemento de interface, (ver eq. (10)), i.e., o modo I de fractura foi definido por intermédio da relação  $\sigma - w$  obtida na análise inversa com modelo de secção.

A formulação do elemento de interface requer particular cuidado quanto à selecção do valor a ser adoptado para a rigidez inicial ( $k_t, k_n$ ), isto é, a rigidez do elemento antes da formação da fenda. Trabalhos realizados neste âmbito, (Rots, 1988; Schellekens, 1992), indicam que, dependendo do valor da rigidez e do tipo de integração usada no cálculo, podem surgir oscilações nos esforços obtidos. No presente trabalho adoptou-se  $10^4 \text{ N/mm}^3$  para valor inicial de  $k_n$ . Quanto ao valor inicial de  $k_t$  este não é relevante para o presente problema. No cálculo da matriz de rigidez e das forças nodais equivalentes ao estado de tensão utilizou-se a integração de Gauss – Lobatto com três pontos de amostragem.

Na Figura 10, a relação  $F-\delta$  obtida com o modelo de secção e com o MEF é comparada com a registada experimentalmente, nas séries de provetes reforçados com fibras 80/60 e 65/60.

Da análise desta figura constata-se que a lei determinada segundo a análise inversa com o modelo de secção, quando utilizada na modelação do modo I de fractura do elemento de interface, permite que, no âmbito da simulação da progressão da fenda segundo o MEF, se obtenha uma relação  $F-\delta$  muito próxima da registada experimentalmente. No entanto, constata-se que essa resposta estima uma resistência ligeiramente superior à experimental, facto este também observado por outros investigadores (RILEM 2002a), o que sugere que o modelo de secção conduz a uma lei  $\sigma - w$  a que corresponde uma capacidade de absorção de energia superior à que realmente o material apresenta.

### 3.4 Avaliação da energia de fractura

A capacidade de absorção de energia de um material em tracção é normalmente avaliada por intermédio do conceito de energia de fractura,  $G_f$ , que se define como sendo a energia despendida na formação de uma fenda de área unitária (Hillerborg *et al.* 1976):

$$G_f = \int \sigma . dw \quad (24)$$

A energia de fractura pode ser quantificada por meio de ensaios de tracção uniaxial ou de flexão, ambos sob controlo de deslocamentos (Petersson 1980a, Petersson 1980b, Hordijk 1991, RILEM 1985). Para que não se dissipe energia fora da zona de fractura, os provetes devem ser entalhados (Petersson 1980a, Hordijk 1991). A energia despendida até à formação

da zona de fractura não deve ser incluída na quantificação da energia de fractura, pois trata-se de energia dissipada na deformação elástica (ou elasto-plástica) de todo o provete. Na Figura 11 representa-se o procedimento para obter a energia de fractura por intermédio de um ensaio de tracção uniaxial.

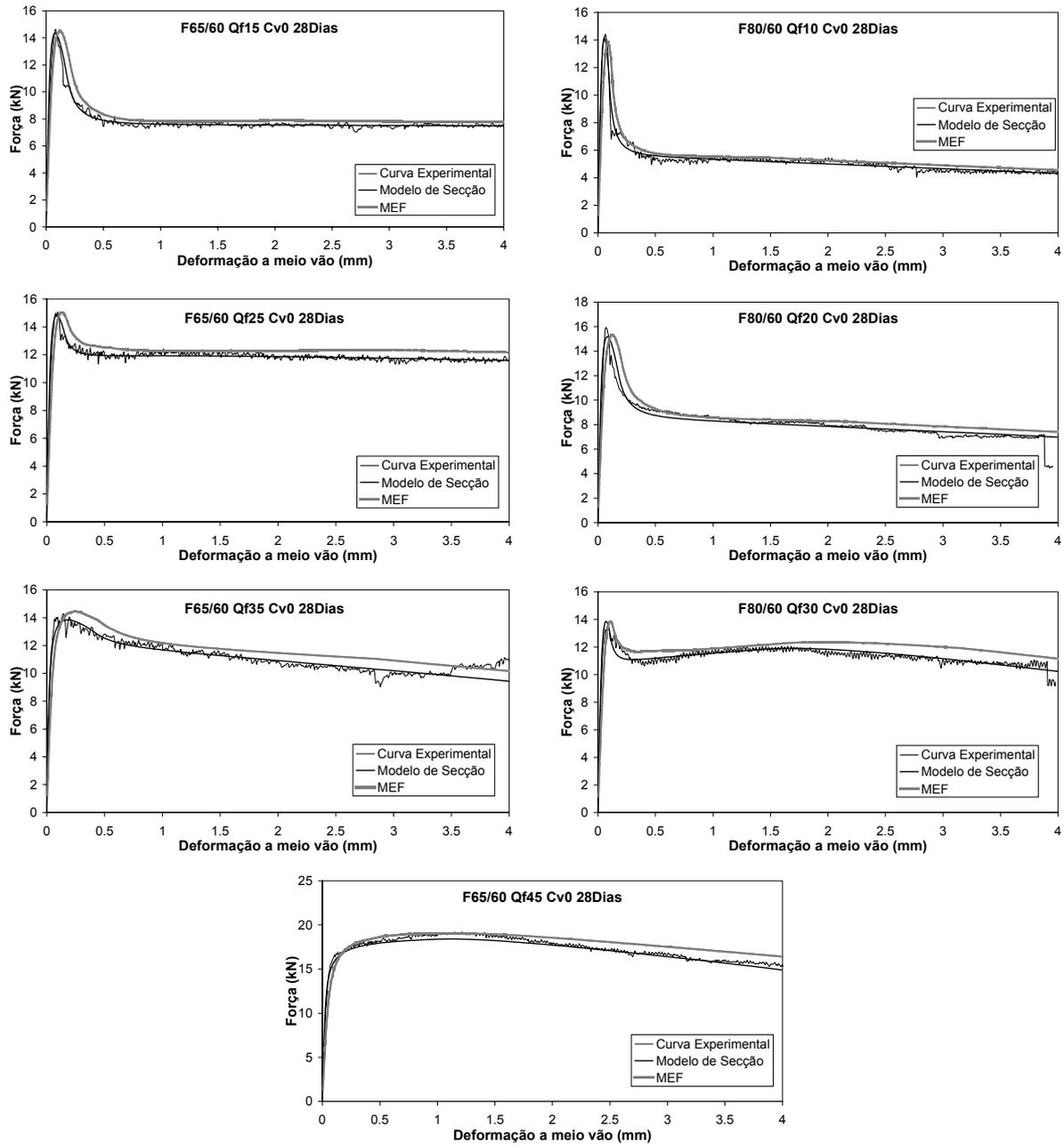


Figura 10 – Curvas experimentais e numéricas obtidas na modelação.

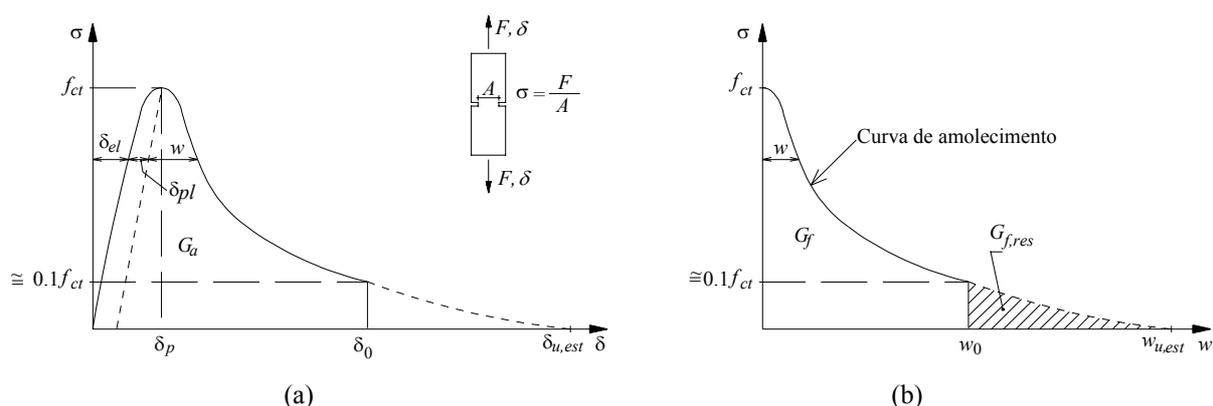


Figura 11 - Processo de determinação da energia de fractura,  $G_f$ , num ensaio de tracção uniaxial sob controlo de deslocamentos ( $\delta_{el}$  - componente elástica;  $\delta_{pl}$  - componente plástica;  $w$  - abertura de fenda).

Quando se ensaia um provete em tracção uniaxial, o teste termina para valores de tensão de aproximadamente  $0.1 f_{ct}$ , dado que abaixo deste valor a sensibilidade das células de carga, normalmente utilizadas neste tipo de ensaios, não garante leitura de forças sem erros consideráveis (Hordijk 1991). Assim, a deformação máxima para a qual a tensão no provete se anula,  $\delta_{u,est}$ , é usualmente estimada. A energia de fractura residual,  $G_{f,res}$  (ver Figura 11b) e, conseqüentemente, a energia de fractura total,  $G_f$ , depende do valor estimado para  $\delta_{u,est}$  e da forma assumida para o tramo entre  $\delta_0$  e  $\delta_{u,est}$ . Nos materiais de matriz cimentícia a curva de amolecimento (ramo pós pico) apresenta uma longa cauda na parte final do ensaio de tracção uniaxial. Este fenómeno acentua-se nos betões reforçados com fibras (Barros, 1995). Hordijk (1991) demonstrou que a energia de fractura do material depende consideravelmente do valor estimado para a energia de fractura residual.

O ensaio de tracção uniaxial sob controlo de deslocamentos é o teste mais adequado para quantificar a energia de fractura do material (Hordijk 1991). Contudo, a estabilidade destes ensaios exige equipamentos bastante rígidos (Wang e Li 1990, Hordijk 1991). Petersson (1980b) mostrou que para se assegurar a estabilidade do ensaio, a rigidez do equipamento deve ser superior ao maior declive da curva de amolecimento. Dado que este tipo de equipamento não está disponível na maior parte dos laboratórios, Petersson propôs, em 1980, um método de quantificação da energia de fractura baseado num ensaio de flexão em viga com entalhe a meio vão, submetida a três pontos de carga, semelhante ao utilizado na campanha experimental subjacente ao presente trabalho.

Como nos ensaios de flexão efectuados experimentalmente a flecha máxima (e abertura de fenda) não ultrapassou os 5 mm, a energia dissipada até essa flecha é bastante inferior à energia de fractura do compósito. Para determinar essa energia de fractura aplicou-se o modelo baseado no FEM, descrito nas anteriores secções deste capítulo, aproximando a resposta numérica à experimental, com o menor erro possível. Os valores obtidos foram de seguida comparados com a resistência equivalente em tracção por flexão, correspondente à verificação aos estados limites de utilização,  $f_{eq,3}$ , (RILEM, 2002b):

$$f_{eq,3} = \frac{3}{2} \frac{D_{BZ,3}^f}{2.50} \frac{L}{bh_{sp}^2} \quad (25)$$

por forma a verificar se existe uma correlação entre estes dois parâmetros. Se a  $G_f$  poder ser determinada por intermédio de  $f_{eq,3}$ , esta última de fácil obtenção por intermédio do ensaio proposto pela RILEM (2002b), tal seria um contributo de valor significativo para os modelos que necessitam do conhecimento da energia de fractura do material que constitui a estrutura em análise, como é o caso dos modelos de fendilhação distribuída (Barros e Figueiras 2001). Na expressão (25)  $D_{BZ,3}^f$  corresponde à área representada na Figura 12,  $b$  representa à largura do provete de ensaio,  $L$  é a distância entre os apoios da viga e  $h_{sp}$  corresponde à altura da secção a meio vão (acima do entalhe).

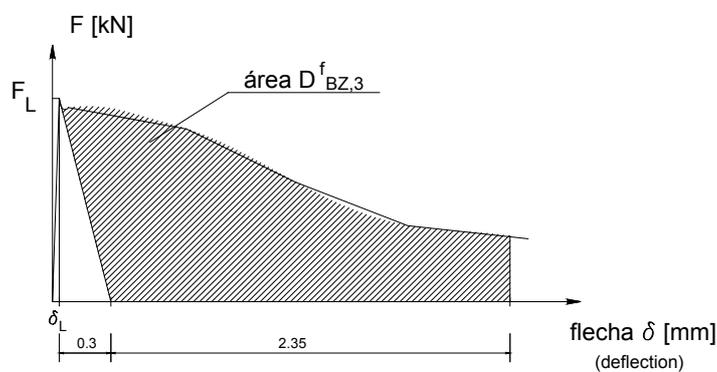
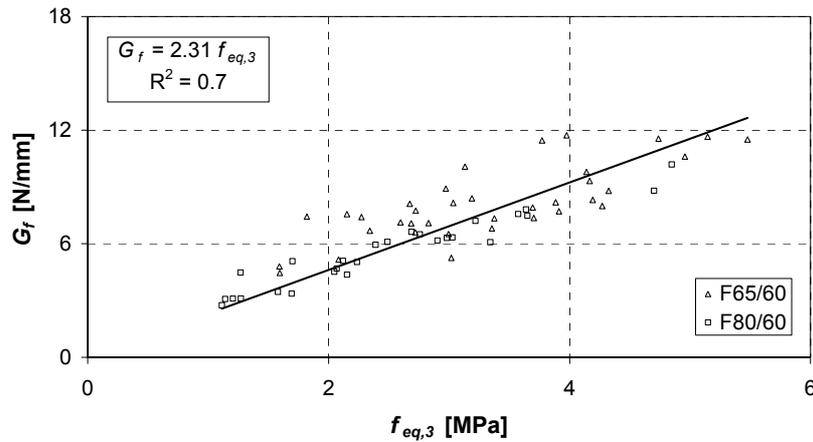


Figura 12 – Resistência equivalente em flexão.

Na Figura 13 apresenta-se a relação obtida, verificando-se uma tendência linear, apesar da dispersão de valores ser elevada. Na série com fibras 65/60 a dispersão foi muito superior à encontrada na série com fibras 80/60. A constante que relaciona  $G_f$  com  $f_{eq,3}$  tem a dimensão de um comprimento. Tendo por base resultados obtidos em outros trabalhos (Barros e Figueiras 1999) era de prever que, para o tipo e percentagens de fibras utilizadas na campanha experimental, o valor do parâmetro que permite determinar  $G_f$  a partir de  $f_{eq,3}$  fosse significativamente mais baixo. Barragán (2002) na sua tese de doutoramento (Figura 5.29) indica ter registado situação similar, dado que, utilizando a relação tensão-abertura de fenda determinada com análise inversa e modelo de secção, simulou ensaios de tracção uniaxial tendo obtido níveis de carga residual significativamente superiores aos registados experimentalmente, i.é, segundo a simulação numérica os provetes deveriam ter apresentado uma capacidade de absorção de energia superior à registada experimentalmente. Em outro trabalho do presente livro, intitulado "Modelação do comportamento à flexão do BRFA com base em lei tensão-extensão", verificou-se que  $G_f$  é aproximadamente igual  $f_{eq,3}$ , que está mais de acordo com resultados obtidos em anteriores campanhas experimentais (Barros 1995).


 Figura 13 – Relação entre  $f_{eq,3}$  e  $G_f$ .

A evolução de  $G_f$  com a quantidade de fibras,  $Q_f$ , é representada na Figura 14. Verifica-se uma tendência de aumento de  $G_f$  com  $Q_f$ , porém a tendência é marcadamente linear somente nas séries reforçadas com fibras 80/60. Nas séries reforçadas com fibras 65/60 a dispersão é muito elevada, o que deverá estar relacionado com a elevada dispersão do número de fibras,  $N_f$ , encontrado na secção de fractura dos provetes desta série (Antunes e Barros 2002). A relação entre  $G_f$  e  $N_f$  está representada na Figura 15, de onde se denota uma tendência linear entre estas duas grandezas, mas a dispersão também é muito elevada, principalmente na série com fibras 65/60, em consonância com o acabado de assinalar. Assim, as correlações indicadas nas Figuras 14 e 15 apenas devem ser consideradas a título qualitativo. De notar que estas relações deveriam fornecer a energia de fractura do betão simples (próximo de 0.1 N/mm para o tipo de betão em análise) quando  $Q_f = 0$  e  $N_f = 0$ , o que tal não acontece, sintoma de que as relações têm apenas valor qualitativo no intervalo do  $Q_f$  considerado. Além disto,  $G_f$  não assume igual valor para  $Q_f = 0$  e  $N_f = 0$ , o que não é aceitável. Por tudo isto, conclui-se ser necessário alargar a estratégia desenvolvida a provetes de betão de outras classes de resistência e reforçados com outras quantidades e tipos de fibras.

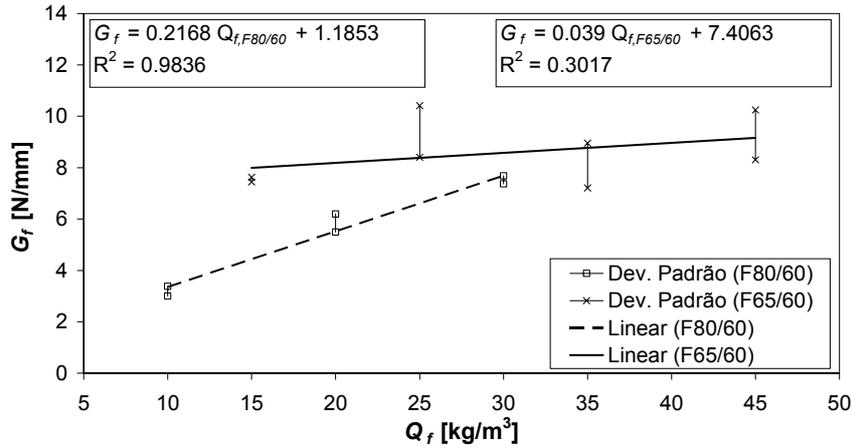


Figura 14 – Relação entre  $Q_f$  e  $G_f$ .

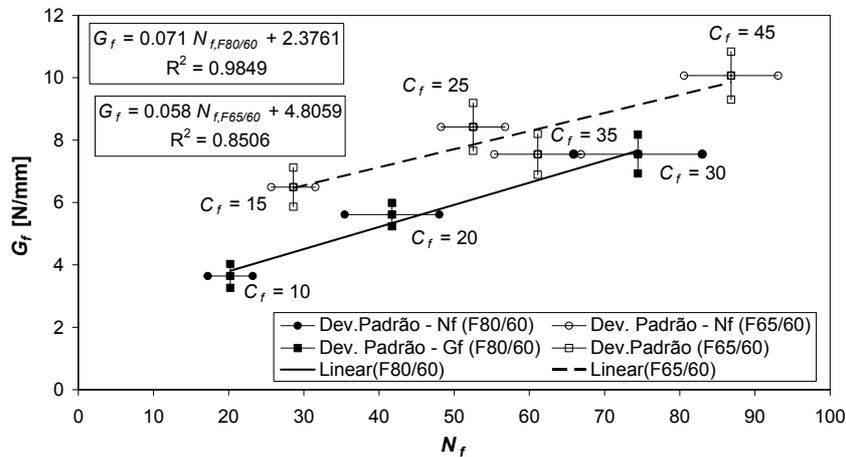


Figura 15 – Relação entre  $N_f$  e  $G_f$ .

#### 4. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentada uma estratégia numérica para determinar os parâmetros de fractura de um betão de custo competitivo reforçado com fibras de aço (BRFA) concebido para aplicações em pavimentos de edifícios industriais. Esta estratégia envolveu dois modelos de complexidade distinta. Um primeiro, de formulação mais simples, designado por modelo de secção, foi aplicado no âmbito de uma análise inversa, por forma a se determinar os valores dos parâmetros que definem a lei tensão-abertura de fenda,  $\sigma - w$ , que permite simular, com o desejado rigor, a relação força-flecha,  $F - \delta$ , registada nos ensaios experimentais. Em seguida, essa lei foi utilizada na modelação do modo I de fractura da lei constitutiva de elementos de interface de linha. No quadro do método dos elementos finitos (MEF), estes elementos foram utilizados na discretização da secção do provete acima do

entalhe, por forma a simular a progressão da fenda. Comparando as respostas  $F-\delta$  obtidas com o modelo de secção e com o modelo baseado no MEF constatou-se que a estratégia numérica suportada no primeiro modelo permite obter leis  $\sigma-w$  ajustadas à sua utilização na modelação segundo o MEF. Utilizando o modelo baseado no MEF, determinou-se a energia de fractura,  $G_f$ , do betão reforçado com fibras simulado, parâmetro de fractura este que se utiliza nos modelos de análise não linear material de estruturas de materiais de matriz cimentícia. Por fim,  $G_f$  foi relacionada com a resistência equivalente em tracção por flexão,  $f_{eq,3}$ , a qual é determinada em ensaios de flexão segundo as recomendações da RILEM. Dado que este ensaio é relativamente simples de executar, enquanto o ensaio que permite determinar a energia de fractura do BRFA exige equipamentos de elevada sofisticação, uma eventual relação entre  $G_f$  e  $f_{eq,3}$  seria de todo oportuna. No entanto, constatou-se existir uma dispersão significativa nessa relação, pelo que será necessário estender a estratégia desenvolvida a provetes de betões de outras classes de resistência, reforçados com outros tipos e quantidades de fibras. Além disto, segundo a relação  $G_f-f_{eq,3}$ , a energia de fractura de um betão reforçado com percentagem corrente de fibras é bastante superior à obtida em ensaios de tracção uniaxial, pelo que a referida relação é de duvidosa utilidade.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o financiamento concedido pelo programa POCTI, “POCTI/34793/99 – Cost competitive steel fibre reinforced concrete for industrial pavements”, FCT, e às empresas que gentilmente forneceram os materiais usados previamente na campanha experimental, nomeadamente, SECIL, Bekaert, Bettor MBT Portugal, Central de Betão Pronto de Moreira de Cónegos, Central Termo-Eléctrica do Pego e Pisonort. Também agradecem a colaboração prestada pela Civitest, pelo equipamento laboratorial disponibilizado. O segundo autor agradece a bolsa SFRH/BD/3259/2000 concedida pela FCT e FSE.

## 6. REFERÊNCIAS

- ACI 544.1R-96. “State-of-the-Art Report on fiber reinforced concrete”, ACI, 1997.
- Antunes, J. A. B; Barros, J. A. O.. “Influência da quantidade de fibras, percentagem de cinzas volantes e idade no comportamento à flexão de betão reforçado com fibras de aço Dramix RC-65/60-BN”, Relatório 02-DEC/E-17, 79 pp., Dezembro 2002.
- Barragán, B.E., “Failure and Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete Under Tension and Shear”, PhD Thesis, Laboratorio de tecnología de estructuras da UPC, Espanha 2002.
- Barros, J.A.O., Antunes, J.A.B., "Experimental characterization of the flexural behaviour of steel fibre reinforced concrete according to RILEM TC 162-TDF recommendations",

- RILEM TC 162 TDF Workshop, pp. 77-89, 20-21 March 2003.
- Barros, J.A.O., Antunes, J.A.B, Amorim, J.A.S.B.A., “Influência da quantidade de fibras, percentagem de cinzas volantes e idade no comportamento à flexão de betão reforçado com fibras de aço Dramix RC-80/60-BN”, Relatório 02-DEC/E-11, 87 pp., Julho 2002.
- Barros, J.A.O., Figueiras, J.A. “Nonlinear analysis of steel fibre reinforced concrete slabs on grade”, *Computers & Structures*, Vol.79, No.1, pp. 97-106, January 2001.
- Barros, J.A.O., Figueiras, J.A. “Flexural behavior of steel fiber reinforced concrete: testing and modelling”, *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 11, N° 4, pp 331-339, 1999.
- Barros, J. A. O.. “Comportamento do betão reforçado com fibras - análise experimental e simulação numérica”, Tese de Doutoramento, FEUP, Dezembro de 1995.
- Bélanger, A., "Conception de dalles de ponts avec armature réduite et béton de fibres d'acier", M.Sc.A. thesis, École Polytechnique de Montréal, 2000. (em Francês).
- CEB-FIP Model Code, Design code, Bulletin d'Information CEB Lausanne, Switzerland, 1993.
- Cunha, V.M.C.F.; Ribeiro, A.F.; Barros, J.A.O.; Antunes, J.A.B., "Betão Reforçado com Fibras de Aço: Recomendações Normativas, Investigação Experimental e Numérica ", V Simpósio EPUSP Estruturas Concreto, Brasil, Junho de 2003.
- Filiatrault, A., Ladiciani, K. and Massicotte, B., "Seismic performance of code designed fibre reinforced concrete joints", *ACI Structural Journal*, Vol. 91, No. 5, pp.564-571, 1994.
- Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P.E., “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
- Hordijk, D.A., “Local approach to fatigue of concrete”, Dissertation, Delft University of Technology, 1991.
- Karihaloo, B. L., “Fracture mechanics and structural concrete, Concrete Design and Construction Series”, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England, 1995.
- Massicotte, B., Bélanger, A. and Moffatt, K., "Analysis and design of SFRC bridge decks". Proceeding of the Fifth RILEM Symposium of Fibrer-Reinforced Concrete, Lyon, France, Septembre 13-15 2000, pp. 263-272, 2000.
- Moffatt, K. "Calcul des dalles de pont avec béton de fibres d'acier". M.Sc.A Thesis, École Polytechnique de Montréal, 2001. (em Francês).
- Petersson, P.-E. (1980a), “Fracture energy of concrete. Method of determination”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, N° 1, pp. 79-89, January, 1980a.
- Petersson, P.-E., “Fracture energy of concrete. Practical performance and experimental results”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, N° 1, pp. 91-101, January, 1980b.

- Ribeiro, A.F.; Cunha, V.M.C.F.; Barros, J.A.O.; Antunes, J.A.B., “Modelo de secção”, Seminário sobre dimensionamento de estruturas de betão reforçado com fibras, Dep. Eng<sup>a</sup> da Escola de En<sup>a</sup> da Univ. Minho, 28 Novembro de 2003.
- RILEM, Draft Recommendation, 50-FMC Committee Fracture Mechanics of Concrete, “Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bending tests on notched beams”, Materials and Structures, Vol. 85, N<sup>o</sup> 85, pp. 285-290, 1985.
- RILEM TC 162-TDF, “Test and design methods for steel fiber reinforced concrete. Recommendations for uni-axial tension test”, (Chairlady L. Vandewalle), Mater. Struct. 34 (235) pp. 3-6, , January-February 2001.
- RILEM TC 162-TDF, “Test and design methods for steel fiber reinforced concrete. Design of steel fibre reinforced using  $\sigma$ -w method: principles and applications”, Material and Structures Vol. 35, pp. 262-278, June 2002a.
- RILEM TC 162-TDF, “Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - Final Recommendation”, Materials and Structures, Vol. 35, pp. 579-582, November 2002b.
- RILEM TC 162-TDF, “Test and design methods for steel fibre reinforced concrete -  $\sigma$  -  $\epsilon$  design method - Final Recommendation”, Materials and Structures, Vol.36, pp. 560-567, October 2003.
- Rots, J.G., “Computational modeling of concrete fracture”, Dissertation, Delft University of Technology, 1988.
- Schellekens, J.G.J., “Computational strategies for composite structures”, Dissertation, Delft University of Technology, 1992.
- Wang, Y. ; Li, V.C. ; Backer, S., “Experimental determination of tensile behaviour of fibre reinforced concrete”, ACI Materials Journal, Vol. 87, N<sup>o</sup> 5, pp. 461-468, September-October, 1990.

**ANEXOS**

**6.1 Parâmetros obtidos da análise inversa.**

Tabela 1 – Parâmetros otimizados da lei trilinear  $\sigma$ - $w$  para as fibras DR-F65/60.

Qf [kg/m <sup>3</sup> ]	Cinzas [%]	Idade [dias]	$E$ [GPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_3$ [MPa]	$w_2$ [mm]	$w_3$ [mm]	$w_4$ [mm]
<b>F65/60</b>									
15	0	7	29.53	1.450	0.725	0.363	0.1750	9.0	10.0
		28	31.48	2.221	0.833	0.777	0.1550	9.0	10.0
		90	32.62	2.301	0.978	0.518	0.1600	9.0	10.0
	12.5	7	28.77	1.650	0.660	0.908	0.1450	9.0	10.0
		28	30.81	2.054	0.770	0.770	0.1500	9.0	10.0
		90	32.29	2.689	0.874	0.538	0.0600	9.0	10.0
	25	7	27.22	1.599	0.520	0.480	0.1200	9.0	10.0
		28	30.67	2.035	0.509	1.017	0.1250	9.0	10.0
		90	32.80	3.133	0.627	0.313	0.0550	9.0	10.0
25	0	7	29.59	2.037	0.968	1.120	0.0900	3.0	10.0
		28	32.23	2.243	1.346	1.121	0.1200	9.0	10.0
		90	33.72	1.796	1.122	0.988	0.1050	7.0	10.0
	12.5	7	28.63	1.700	0.935	1.063	0.0950	2.5	10.0
		28	30.84	2.212	1.217	0.940	0.0750	6.0	10.0
		90	33.05	2.269	1.475	0.908	0.1450	7.0	10.0
	25	7	27.05	1.762	0.881	1.057	0.0900	4.0	10.0
		28	30.15	2.265	0.906	0.793	0.0900	9.0	10.0
		90	33.20	3.028	1.060	0.984	0.0550	6.0	10.0
35	0	7	28.39	1.675	1.173	0.335	0.0950	6.0	10.0
		28	30.82	1.817	1.317	0.909	0.4100	4.0	10.0
		90	31.84	1.854	1.205	0.324	0.3900	9.0	10.0
	12.5	7	29.18	1.981	1.263	1.263	0.0650	2.5	10.0
		28	32.56	1.804	1.128	0.992	0.1000	9.0	10.0
		90	33.62	2.256	1.495	0.846	0.1150	6.0	10.0
	25	7	27.80	1.735	0.911	1.041	0.1150	3.0	10.0
		28	30.55	1.821	1.093	1.138	0.0800	2.0	10.0
		90	31.42	2.542	1.303	1.144	0.0600	3.0	10.0
45	0	7	31.16	2.988	1.942	1.942	0.0000	2.0	10.0
		28	32.78	2.990	2.093	2.093	0.0000	1.0	10.0
		90	33.61	3.000	1.800	1.500	0.0250	2.0	10.0
	12.5	7	29.81	2.729	1.364	1.228	0.0000	3.0	10.0
		28	31.58	2.979	1.713	1.490	0.0200	1.0	10.0
		90	32.11	2.530	1.834	1.012	0.0600	6.0	10.0
	25	7	26.75	1.755	1.273	1.141	0.1000	9.0	10.0
		28	30.77	2.756	1.791	1.240	0.0000	2.0	10.0
		90	31.28	2.275	1.593	1.024	0.1000	8.0	10.0

Tabela 2 – Parâmetros otimizados da lei trilinear  $\sigma$ - $w$  para as fibras DR-F80/60.

Qf [kg/m <sup>3</sup> ]	Cinza s [%]	Idade [dias]	$E$ [GPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_3$ [MPa]	$w_2$ [mm]	$w_3$ [mm]	$w_4$ [mm]
<b>F80/60</b>									
10	0	7	30.87	2.021	0.505	0.455	0.1000	3.0	10.0
		28	32.48	2.457	0.614	0.307	0.0750	6.0	10.0
		90	33.15	2.544	0.509	0.636	0.1250	7.0	10.0
	12.5	7	27.75	1.386	0.416	0.225	0.1500	9.0	10.0
		28	31.68	1.562	0.625	0.469	0.1500	3.0	10.0
		90	32.83	2.325	0.523	0.407	0.1000	9.0	10.0
	25	7	27.43	1.433	0.430	0.215	0.1500	9.0	10.0
		28	30.61	1.950	0.488	0.488	0.1000	1.0	10.0
		90	33.14	2.942	0.809	0.735	0.0750	1.5	10.0
20	0	7	31.38	2.147	0.859	0.429	0.1000	9.0	10.0
		28	31.79	2.360	0.944	0.354	0.1500	9.0	10.0
		90	35.28	2.405	0.842	0.241	0.1000	9.0	10.0
	12.5	7	29.93	1.899	0.665	0.759	0.1000	2.0	10.0
		28	32.21	2.072	0.829	0.829	0.1000	2.0	10.0
		90	34.30	2.846	1.281	0.854	0.0750	2.5	10.0
	25	7	27.60	1.755	0.702	0.790	0.0750	2.0	10.0
		28	30.85	2.120	0.981	1.060	0.1000	2.0	10.0
		90	33.46	2.925	0.951	1.170	0.0750	1.5	10.0
30	0	7	29.03	2.363	1.742	1.772	0.0700	1.5	10.0
		28	29.16	2.280	1.254	1.368	0.0750	1.5	10.0
		90	30.66	1.697	0.975	1.060	0.1000	2.0	10.0
	12.5	7	26.10	1.558	1.013	1.091	0.1500	2.0	10.0
		28	27.23	1.590	1.252	1.311	0.1500	1.0	10.0
		90	29.35	1.711	1.454	1.540	0.1000	1.5	10.0
	25	7	23.73	1.305	1.044	1.109	0.1250	1.0	10.0
		28	26.80	1.550	1.163	1.337	0.1000	1.5	10.0
		90	31.84	2.080	1.248	1.300	0.1250	1.5	10.0