

ANÁLISE DE ELEMENTOS DE PAREDE DE BETÃO ARMADO



J. A. O. BARROS
Professor Auxiliar
Esc. Eng^a da U. Minho
Guimarães



J. A. FIGUEIRAS
Professor Catedrático
Fac. Eng^a da U. Porto
Porto

SUMÁRIO:

O modelo desenvolvido e aplicado no presente trabalho simula o comportamento elasto-plástico do betão e das armaduras e modela o amolecimento em tracção e em compressão do betão. É possível simular com rigor adequado o comportamento de zonas de ocorrência simultânea de fendilhação e amolecimento por compressão. Um painel ensaiado experimentalmente é analisado e os resultados discutidos.

1- INTRODUÇÃO

Apesar do considerável número de modelos desenvolvidos nos últimos anos [1], são escassos aqueles que tratam adequadamente as zonas de ocorrência simultânea de fendilhação e de compressão com comportamento elasto-plástico do betão entre fendas [2]. A simulação numérica dos painéis ensaiados por Maier e Thürlmann [3] é exemplo deste facto, dado ser bastante exigente conforme se conclui da análise das simulações numéricas efectuadas por Wang *et al.* [4] e Feenstra [2]. No presente trabalho um dos painéis ensaiados por Maier e Thürlmann é analisado com o modelo desenvolvido.

2 - MODELO

O modelo de fendas distribuídas desenvolvido no presente trabalho suporta-se no princípio de que o betão fendilhado é a associação em série de fendas e de betão entre fendas [5]. Os modos I e II de fractura [1] são simulados nas leis constitutivas que regem o comportamento das fendas. Estas leis são definidas por intermédio dos parâmetros de fractura: energia correspondente ao modo I de fractura, G_f [6], resistência à tracção uniaxial, f_{cm} , largura da banda de fendilhação, l_b [7,8,9], forma do diagrama de amolecimento e factor de retenção de tensões de corte, β [5]. O comportamento do betão entre fendas é simulado por intermédio da teoria convencional da plasticidade associada [10]. Para se assegurar a verificação simultânea das relações constitutivas estabelecidas para as fendas e betão entre fendas foram implementados os algoritmos que se descrevem sucintamente nos Quadro 1 e 2 [5].

Quadro 1 - Procedimento para que as leis constitutivas das fendas não sejam violadas (ver notação no rodapé do Quadro 2).

- (i) Transfere para um *array* local o estado de tensão corrente na fenda, no sistema local desta, $\hat{\underline{t}}_k^f = \hat{\underline{s}}_k^f$ (k é o número da iteração corrente). Na primeira iteração $\hat{\underline{s}}_k^f = \hat{\underline{s}}_0^f$ em que $\hat{\underline{s}}_0^f$ é o vector das tensões na fenda no último incremento de carga convergido.
- (ii) Calcula as extensões incrementais da fenda, $\Delta\hat{\underline{e}}_k^f = [\hat{\underline{D}}_{,k}^f + \hat{\underline{N}}^T \underline{D}_e^b \hat{\underline{N}}]^{-1} \hat{\underline{N}}^T \underline{D}_e^b \Delta\varepsilon$. Na primeira iteração $\hat{\underline{D}}_{,k}^f = \hat{\underline{D}}_0^f$, sendo $\hat{\underline{D}}_0^f$ a lei constitutiva da fenda no último incremento de carga convergido.
- (iii) Actualiza as extensões totais da fenda, $\hat{\underline{e}}_k^f = \hat{\underline{e}}_0^f + \Delta\hat{\underline{e}}_k^f$, em que $\hat{\underline{e}}_0^f$ é o vector das extensões da fenda no último incremento de carga convergido.
- (iv) Calcula as tensões incrementais da fenda, $\Delta\hat{\underline{s}}_k^f = \hat{\underline{D}}_{,k}^f \Delta\hat{\underline{e}}_k^f$. Na primeira iteração $\hat{\underline{D}}_{,k}^f = \hat{\underline{D}}_0^f$.
- (v) Actualiza as tensões totais da fenda, $\hat{\underline{s}}_k^f = \hat{\underline{s}}_0^f + \Delta\hat{\underline{s}}_k^f$, em que $\hat{\underline{s}}_0^f$ é o vector das tensões da fenda no último incremento de carga convergido.
- (vi) Calcula o incremento de tensões no betão fendilhado, $\Delta\underline{\sigma}_{,k} = [\underline{D}_e^b - \underline{D}_e^b \hat{\underline{N}} [\hat{\underline{D}}_{,k}^f + \hat{\underline{N}}^T \underline{D}_e^b \hat{\underline{N}}]^{-1} \hat{\underline{N}}^T \underline{D}_e^b] \Delta\varepsilon$. Na primeira iteração $\hat{\underline{D}}_{,k}^f = \hat{\underline{D}}_0^f$.
- (vii) Actualiza o estado de tensão no betão fendilhado, $\underline{\sigma}_{,k} = \underline{\sigma}_0 + \Delta\underline{\sigma}_{,k}$, em que $\underline{\sigma}_0$ é o vector das tensões do betão fendilhado no anterior incremento de carga convergido.
- (viii) A convergência do procedimento é assumida quando, simultaneamente, são verificadas as três relações seguintes: $|\Delta\hat{\underline{s}}_k^f - \hat{\underline{N}}^T \Delta\underline{\sigma}_{,k}| < 10^{-5}$, $|\hat{\underline{s}}_k^f - \hat{\underline{N}}^T \underline{\sigma}_{,k}| < 10^{-5}$, $|\hat{\underline{s}}_k^f - \hat{\underline{t}}_k^f| < 10^{-5}$. Se as três condições forem verificadas o ciclo interno termina, senão é calculada uma nova lei constitutiva para a fenda $\underline{D}_{,k}^f$ por intermédio do valor e_k^f obtido no passo (iii) e reinicia-se o processo (passo (i)).

Quadro 2 - Algoritmo de cálculo da tensão no betão comprimido e fendilhado em regime elasto-plástico.

- i) Cálculo da lei constitutiva tangente da(s) fenda(s), \hat{D}_0^f .
- ii) Ciclo iterativo (j é o número da iteração corrente)
- ii.1) Cálculo de $\Delta\hat{\varepsilon}_{.j}^f$, $\hat{\varepsilon}_{.j}^f$, $\Delta\hat{s}_{.j}^f$, $\hat{s}_{.j}^f$, $\Delta\sigma_{.j}$, $\underline{\sigma}_{.j}$ segundo os procedimentos descritos no quadro 1.
- ii.2) Por intermédio do cálculo da tensão efectiva correspondente a $\underline{\sigma}_{.j}$, $f(\underline{\sigma}_{.j})$, verifica-se se a superfície de cedência foi violada.
- ii.3) Se a superfície de cedência foi violada, isto é, se há escoamento plástico calcula-se as seguintes grandezas: $\Delta\varepsilon_{.j}^f = \hat{N}\Delta\hat{\varepsilon}_{.j}^f$, $\Delta\varepsilon_{.j}^b = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{.j}^f$, $\Delta\sigma_{.j} = D_e^b\Delta\varepsilon_{.j}^b$ e $\underline{\sigma}_{.j} = \underline{\sigma}_{.o} + \Delta\sigma_{.j}$, em que \hat{N} e $\Delta\hat{\varepsilon}_{.j}^f$ não incluem as grandezas das fendas completamente fechadas, $\Delta\varepsilon$ é o vector dos incrementos das deformações obtido no presente incremento de carga e $\underline{\sigma}_{.o}$ representa o estado de tensão no último incremento de carga convergido.
- ii.4) Cálculo do estado de tensão elasto-plástico [10,12,13]. Além do estado de tensão reduzido à superfície de resistência máxima obtém-se também o vector dos incrementos de deformação plástica, $\Delta\varepsilon_{p.j}$, a deformação plástica efectiva, $\bar{\varepsilon}_{p.j}$, e a tensão efectiva, $f(\underline{\sigma}_{.j})$.
- ii.5) Considerando $\Delta\varepsilon_{p.j}$ como uma deformação inicial calcula-se o novo incremento de deformação, $\Delta\varepsilon_{.j} = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{p.j}$.
- ii.6) O ciclo iterativo termina quando
- $$\frac{\|f(\underline{\sigma}_{.j}) - f(\underline{\sigma}_{.j-1})\|}{\|f(\underline{\sigma}_{.j})\|} < 1e-03 \quad \text{e} \quad \left| \hat{s}_{.j}^f - \hat{N}^T \underline{\sigma}_{.j} \right| < 1e-05.$$
- NOTA: As variáveis cumulativas que participam neste algoritmo adicionam as grandezas incrementais calculadas às respectivas grandezas obtidas no último incremento de carga convergido.

NOTAÇÃO: Δ - incremento; \hat{D}_0^f - matriz constitutiva da(s) fenda(s); $\hat{\varepsilon}^f$ - vector das deformações da(s) fenda(s), no referencial local; \hat{s}^f - vector das tensões da(s) fenda(s), no referencial local; \hat{N} - matriz que define a orientação das fendas relativamente ao referencial global; ε^f - vector das deformações da(s) fenda(s), no referencial global; $\hat{\sigma}$ - vector das tensões no betão fendilhado; ε^b - vector das deformações no betão entre fendas. $\underline{\varepsilon}_p$ - vector das deformações plásticas no betão entre fendas.

A capacidade de retenção de tensões de tracção do betão armado fendilhado é simulada por intermédio de um modelo que tem em conta as propriedades de fractura do betão e as características das armaduras que atravessam as fendas [11]. Neste modelo, um elemento de betão pode ser reforçado por um número qualquer de armaduras distribuídas ou discretas, com orientação arbitrária e propriedades diferentes. A relação tensão-extensão destas armaduras pode ser simulada por diagramas multilinear ou linear-parábola [5]. Em [5] encontra-se a descrição pormenorizada deste modelo.

3 - AFERIÇÃO DO MODELO

Dos painéis ensaiados experimentalmente por Maier e Thürlmann [3] seleccionou-se, para ser analisado com o presente modelo numérico, o painel designado por *S4*, representado na Figura 1. O painel está ligado na sua base a um bloco de betão, sendo a carga transmitida ao painel por intermédio de uma viga rigida no topo do painel. O painel foi inicialmente solicitado por uma carga vertical de 262 kN aplicada sob controlo de forças. Mantendo esta carga, o painel foi de seguida submetido a uma carga horizontal aplicada, sob controlo de deslocamentos, no bordo lateral da viga de encabeçamento do painel, até à sua rotura. O painel era armado com duas malhas ortogonais de varões de 8 mm de diâmetro e 100 mm de afastamento, uma em cada face do painel. O recobrimento das armaduras era de 10 mm.

Na Figura 2 apresenta-se a malha de elementos finitos adoptada na discretização do painel seleccionado. Esta malha é constituída por elementos de 8 nós de Serendipity com 3×3 pontos de integração. Considerou-se que o bloco da base do painel impede qualquer deslocamento da base deste, pelo que não foi incluído na malha de elementos finitos.

Na simulação numérica, a carga vertical inicial distribuída no bordo superior dos elementos da viga de encabeçamento do painel foi aplicada sob controlo de forças. Por sua vez, a carga horizontal foi aplicada por intermédio de uma força distribuída no bordo lateral do elemento da extremidade direita da viga de encabeçamento, conforme se representa na Figura 2. Na aplicação da carga horizontal utilizou-se o método do deslocamento controlado [13], tendo-se seleccionado o grau de liberdade horizontal, u_h , do nó assinalado na malha (ver Fig. 2).

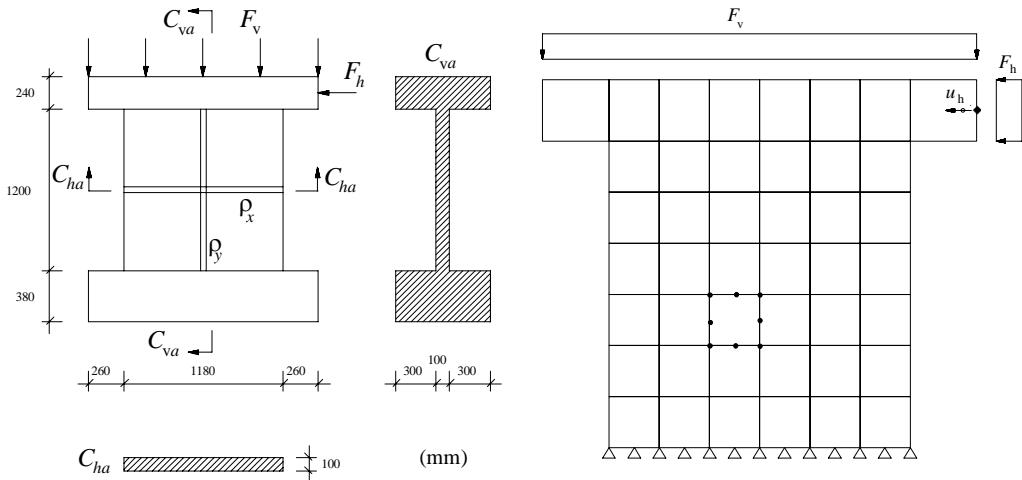


Figura 1 - Geometria e carregamento do painel. Figura 2 - Malha de elementos finitos.
A capacidade de retenção de tensões de tracção do betão fendilhado foi simulada por intermédio do modelo proposto neste trabalho, sendo o factor de retenção de rigidez de corte determinado segundo a expressão [14]

$$\beta = -\frac{\ln\left(\frac{e_{nn}^f}{C_1}\right)}{C_2} \quad (1)$$

em que e_{nn}^f é a extensão normal à fenda, no referencial desta,

$$C_1 = 7 + 5 \frac{\rho_{eq,ef}^e - 0.005}{0.015}, \quad C_2 = 10 - 2.5 \frac{\rho_{eq,ef}^e - 0.005}{0.015}. \quad (2)$$

e

$$\rho_{eq,ef} = \sum_{i=1}^{nr} \rho_{i,ef} \cos^4 \theta_i \quad (3)$$

é a percentagem efectiva de armadura equivalente, sendo $\rho_{i,ef}$ e θ_i a percentagem efectiva [15] e a orientação da armadura i , e nr é o número de feixes de armaduras que reforçam o elemento de betão.

As análises numéricas foram efectuadas com o modelo de multifendas fixas, tendo-se tomado para ângulo limite de abertura de nova fenda o valor de 90 graus. No Quadro 3 apresenta-se os valores das propriedades dos materiais utilizados na simulação numérica. Os valores contidos neste quadro foram retirados dos trabalhos de Wang *et al.* [4] e Feenstra [2].

Quadro 3 - Propriedades dos materiais utilizados na análise.

Betão		Aço	
E_c [MPa]	26000	ρ_x [%]	1.03
ν [-]	0.15	ρ_y [%]	1.05
f_{cm} [MPa]	30.0	E_s [MPa]	200000
f_{ctm} [MPa]	2.2	f_{sy1} [MPa]	574
ε_{cl} (extensão de pico)	3.5e-03	E_{s1} [MPa]	8744
G_f [N/mm]	0.07	f_{sy2} [MPa]	764
Diagrama bilinear de amolecimento [-]	$\alpha=0.30, \xi=0.15$	E_{s2} [MPa]	0.0
l_b [mm]	80	f_{sult} [MPa]	764

A largura de banda de fendilhação, l_b , foi considerada igual à distância média entre fendas, l_s , determinada segundo as recomendações do Eurocódigo 2 [16].

Na primeira análise numérica utilizou-se o diagrama $\sigma_c - \varepsilon_c$ proposto no código modelo *CEB-FIP 1990* para modelar o comportamento do betão à compressão uniaxial. Considerou-se

para extensão última um valor 15 vezes superior ao $\varepsilon_{c,\text{lim}}$ [15]. Na Figura 3 ilustra-se a relação $u_h - F_h$ (ver Figura 2) obtida numericamente e registada experimentalmente. Conclui-se que a simulação numérica prevê com bastante rigor a resposta deformacional registada experimentalmente.

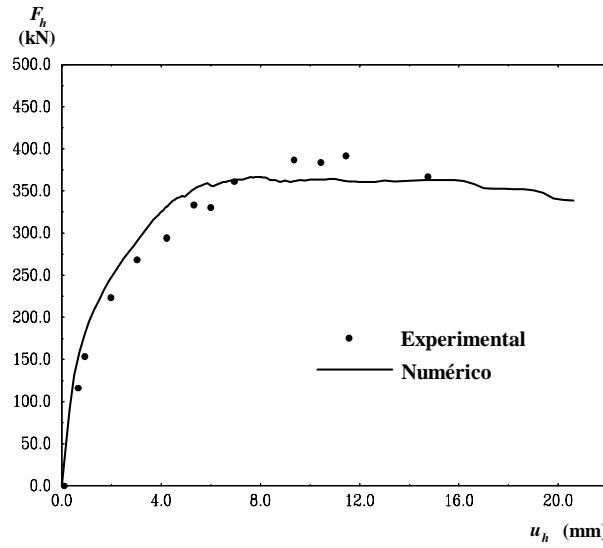


Figura 3 - (1^a análise) Relação $u_h - F_h$.

No ensaio experimental, o painel desenvolveu um comportamento dúctil após a carga máxima ter sido alcançada, o que foi devidamente captado na simulação numérica. Na Figura 4 representa-se a distribuição das tensões principais determinadas para $u_h = 4$ mm, 8 mm e 20 mm, respectivamente. Ilustra-se ainda o padrão de fendas para $u_h = 20$ mm. Para $u_h = 4$ mm inicia-se o amolecimento por compressão no ponto de amostragem sob maior estado de tensão por compressão ($\sigma_I = -32.3 \text{ MPa}$). Para a deformação correspondente à carga máxima ($u_h = 8$ mm) a tensão principal máxima de compressão neste ponto de amostragem (primeiro do elemento do canto inferior esquerdo do painel) é de -17.5 MPa , enquanto para $u_h = 20$ mm (último incremento de carga) $\sigma_I = -4.5 \text{ MPa}$. Verifica-se assim que com o aumento de u_h o estado de tensão nos elementos em amolecimento por compressão (canto inferior esquerdo do painel) diminui. A simulação do amolecimento do betão em compressão permite captar o amolecimento estrutural registado experimentalmente.

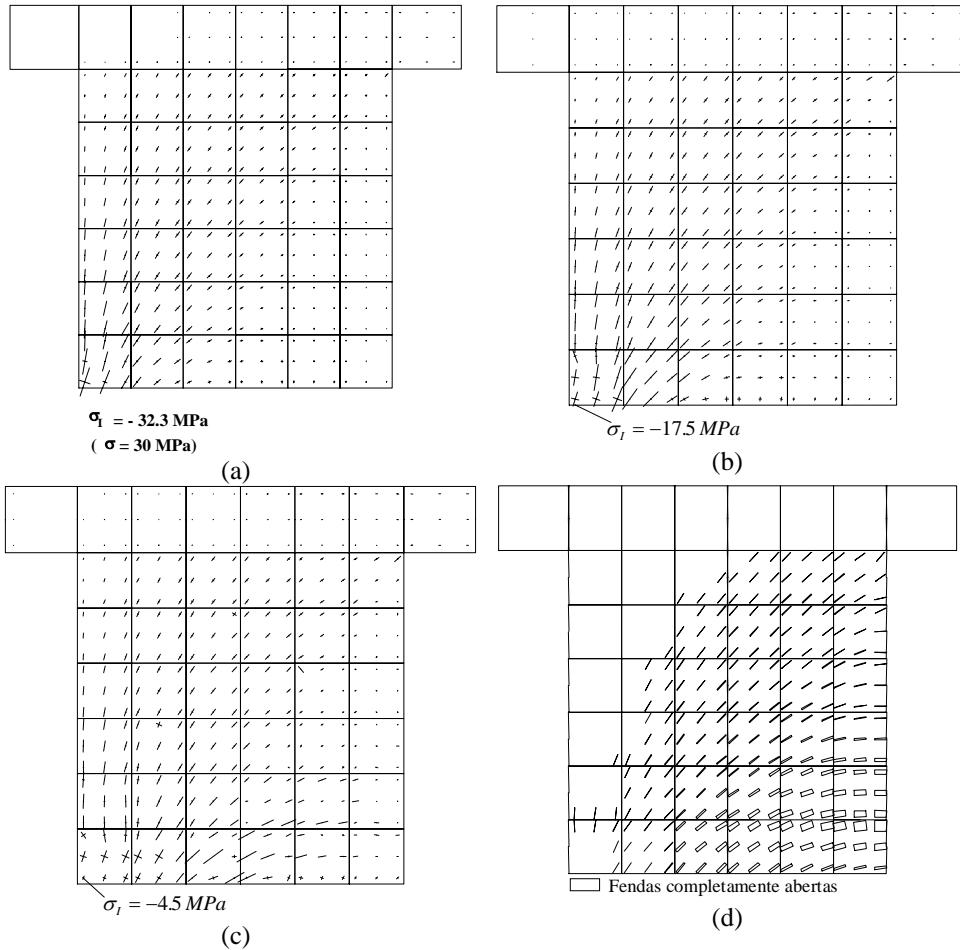


Figura 4 - (1^a análise) Tensões principais para $u_h=4$ (a), $u_h=8$ (b) e $u_h=20$ (c) mm. Padrão de fendilhação para $u_h=20$ mm (d).

A rotura do painel S4, observada experimentalmente, deu-se por esmagamento do betão do canto inferior esquerdo do painel, acompanhado de cedência da armadura de tracção e compressão. Este foi também o modo de rotura obtido na simulação numérica. Verifica-se da análise da Figura 4d que na parte inferior do lado traccionado do painel, as fendas abriram completamente, isto é, deixaram de ter capacidade de transferir tensões, representando o ocorrido experimentalmente [4].

Numa segunda análise considerou-se o diagrama linear-parábola, com $\alpha=0.3$ [13], para simular o comportamento do betão à compressão até ε_{c1} , isto é, até à extensão correspondente a f_{cm} . Acima desta extensão admitiu-se que o betão desenvolve comportamento perfeitamente plástico (sem limite da extensão última). Na Figura 5 apresenta-se a relação $u_h - F_h$ experimental e numérica.

Verifica-se que a resposta numérica é excessivamente rígida, sendo a capacidade de carga consideravelmente superior à registada experimentalmente. Isto mesmo se constata analisando a Figura 6, em que se representa a distribuição das tensões principais para $u_h = 20$ mm. Nos elementos submetidos a elevado estado de deformação por compressão (elementos do canto inferior esquerdo do painel), a tensão permanece constante após a tensão efectiva ter alcançado a resistência do betão à compressão. Assim, a não simulação do amolecimento em compressão impede a relaxação dos elementos submetidos a um estado de deformação equivalente superior a ε_{c1} , impossibilitando a captação do amolecimento estrutural registado experimentalmente.

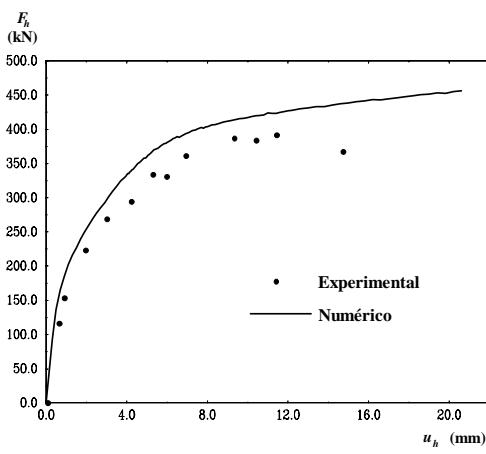


Figura 5 - (2^a análise) Relação $u_h - F_h$.

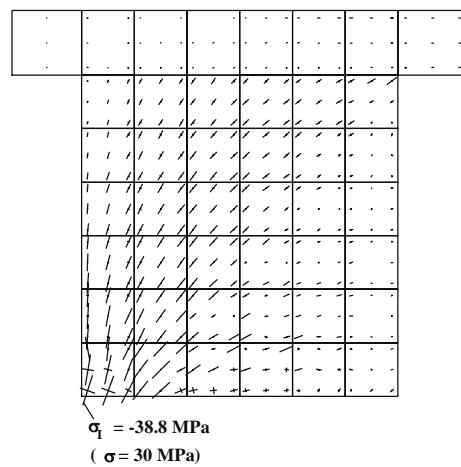


Figura 6 - (2^a análise) Tensões principais para $u_h=20$ mm.

Efectuou-se ainda outra análise que difere da anterior somente pelo facto de se limitar a rigidez e o estado de tensão no betão pela condição de rotura do betão por esmagamento. Assim, quando a extensão equivalente alcança a extensão última anula-se a rigidez e o estado de tensão no material representativo do ponto de integração em análise. Para extensão última considerou-se o valor de 0.005.

Na Figura 7 traça-se a relação $u_h - F_h$ numérica e experimental para esta análise. As quedas bruscas de carga registadas na simulação numérica correspondem ao esmagamento do betão (nos pontos de amostragem), dado que nesta análise o estado de tensão cai bruscamente para o valor nulo. A resposta numérica aproxima-se melhor da registada experimentalmente do que a obtida na análise anterior (ver Figura 5). Na Figura 8 apresenta-se a distribuição das tensões principais para $u_h = 20$ mm, onde se constata a anulação das tensões no betão considerado esmagado, isto é, em que a extensão equivalente é superior à extensão última. Além das referidas quedas bruscas de carga verificadas na resposta deformacional, este comportamento tem ainda o inconveniente de ser necessário estimar o valor da extensão última que limita a

capacidade deformacional do betão em compressão, que é difícil de ser avaliado correctamente. O recurso a modelos que simulam tanto o amolecimento em tracção como em compressão, de que é exemplo, o do presente trabalho, evita este tipo de problemas, permitindo simular de forma mais realista o amolecimento estrutural.

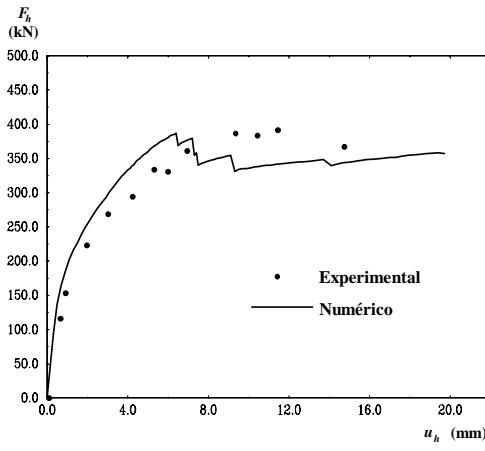


Figura 7 - (3^a análise) Relação $u_h - F_h$.

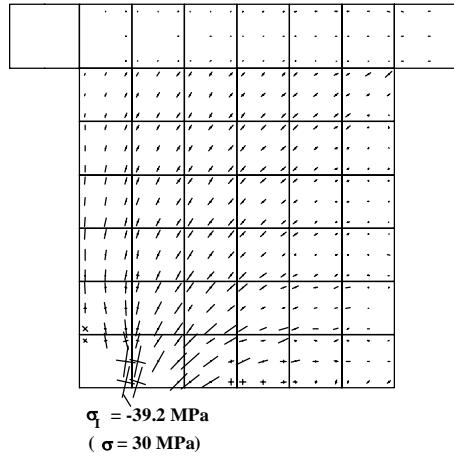


Figura 8 - (3^a análise) Tensões principais para $u_h=20$ mm.

4 - CONCLUSÕES

O modelo de análise não linear material desenvolvido para simular o comportamento de estruturas laminares de betão foi aplicado à simulação da resposta de um dos painéis ensaiados por Maier e Thürlmann. Este modelo simula o comportamento elasto-plástico do betão e armaduras, modela o amolecimento em tracção e em compressão do betão, traçando o comportamento do betão armado fendilhado. A capacidade de absorção de energia do betão é directamente tida em conta, intervindo na lei constitutiva das fendas. O modelo contempla os casos em que o betão é reforçado com diversas armaduras de diferente orientação e propriedades.

Nos ensaios experimentais efectuados por Maier e Thürlmann verificou-se o desenvolvimento de zonas de ocorrência simultânea de fendilhação e amolecimento por compressão no betão, difíceis de simular numericamente. O modelo desenvolvido simula com rigor suficiente o comportamento destas zonas. Demonstrou-se que a não simulação do amolecimento em compressão conduz a comportamentos mais afastados dos observados experimentalmente.

5 - BIBLIOGRAFIA

- [1] Barros, J.A.O.; Figueiras, J.A. “*Modelos de fendilhação para o betão*”, Relatório Técnico, Dep. Engª Civil da Faculdade de Engª da Universidade do Porto, 1996, 48 p.
- [2] Feenstra, P.H. “*Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*”, Tese de doutoramento, Delft University of Technology, 1993.
- [3] Maier, J.; Thürlmann, B. “*Bruchversuche an stahlbetonscheiben*”, Report 8003-1, Eidgenossische Technische Hochschule Zürich, Zürich, Switzerland, 1985.
- [4] Wang, et al., “*Failure of reinforced concrete panels - how accurate the models must be*”, Proc. Second Intern. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell am See, Austria, 1990, p. 153-163.
- [5] Barros, J.A.O. “*Comportamento do betão reforçado com fibras - análise experimental e simulação numérica*” Tese de Doutoramento, Faculdade de Engª da Universidade do Porto, 1995.
- [6] RILEM TC 50-FMC “*Determination of fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams*” Materials and Structures, Vol. 18, Nº 106, 1985, p. 285-290.
- [7] Bazant, Z.P.; Oh, B.H. “*Crack band theory for fracture of concrete*”, Materials and Structures, RILEM, Vol. 16, Nº 93, 1983, p. 155-177.
- [8] Rots, J.G., “*Computational modeling of concrete fracture*”, Tese de doutoramento, Delft University of Technology, 1988.
- [9] Oliver, J. “*Modelado de la fisuración en estructuras de hormigón*”, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1990, 99 p.
- [10] Owen, D.R.J.; Hinton, E. “*Finite elements in plasticity: theory and practice*”, Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K, 1980.
- [11] Barros et al., “*Modelos constitutivos para o betão armado fendilhado*”, Encontro Nacional Betão Estrutural, 1994, p. 55-70.
- [12] Marques, J.M.M.C.; Owen, D.R.J. “*Some reflections on elastoplastic stress calculation in finite element analysis*”, Computers & Structures, Vol. 18, Nº 6, 1986, p. 1135-1139.
- [13] Póvoas, R.H.C.F. “*Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos*”, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1991.
- [14] Cervenka et al., “*Computer simulation of anchoring technique and design of concrete structures*”, Proc. Second Intern. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell am See, Austria, 1990, p. 1-19.
- [15] CEB-FIP Model Code 1990. Comité Euro-International du Beton, Bulletin d'Information nº 213/214, Ed. Thomas Telford, 1993.
- [16] Eurocódigo 2 "Design of concrete structures part 1 - general rules and rules to buildings", Pré-norma Europeia, LNEC, CT 115 - Eurocódigos Estruturais, 1991.