

MODELO DE FENDILHAÇÃO PARA ESTRUTURAS DE BETÃO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Joaquim A. O. Barros, Depart. de Eng^a Civil da Escola de Eng^a da Universidade do Minho
Joaquim A. Figueiras, Depart. de Eng^a Civil da Faculdade de Eng^a da Universidade do Porto

RESUMO

A capacidade de absorção de energia, a ductilidade, o comportamento sob fendilhação e a resistência às acções dinâmicas e estáticas são melhoradas pela adição de fibras à composição do betão. Foi desenvolvido um modelo de fendilhação para estruturas laminares constituídas por materiais de matriz cimentícia, quer sejam ou não reforçados com armaduras convencionais e/ou fibras. Este modelo baseia-se no princípio da decomposição das deformações para o betão fendilhado. A validação do modelo é efectuada através da simulação numérica do comportamento registado em ensaios de flexão sobre prismas entalhados.

ABSTRACT

The energy absorption capacity, the ductility, the cracking behavior and the dynamic and static strength of cementitious materials are significantly improved by fibre adition. A computational code was developed for non-linear analysis of concrete structures reinforced with conventional steel bars or/and fibers. This model is based on the strain decomposition concept for cracked concrete. The model performance was assessed by comparing the numerical and experimental behavior of three-point-bending notched beams specimens.

1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos as aplicações em betão reforçado com fibras (BRF) têm crescido acentuadamente. Tal facto deve-se ao aumento significativo de ductilidade, de capacidade de absorção de energia e de resistência introduzido pelos mecanismos de reforço das fibras, resultando num compósito com melhor desempenho e menor custo em certas aplicações (Barros 1994b, Barros 1995a). No presente trabalho descreve-se sumariamente um modelo de análise não linear material de estruturas de betão reforçado com fibras de aço (BFRA). Este modelo baseia-se no princípio da decomposição das deformações para o betão fendilhado (Rots 1988), nos conceitos da mecânica da fractura não linear e na teoria da plasticidade associada. A fendilhação é idealizada com base no conceito de fendilhação distribuída (Figueiras 1983). Ensaios sobre provetes e elementos estruturais de BRFA permitiram evidenciar os aspectos mais relevantes introduzidos pelos mecanismos das fibras (Barros 1995b). Os ensaios experimentais permitiram ainda aferir o modelo desenvolvido.

2 - MODELO CONSTITUTIVO

Segundo o conceito de decomposição das deformações (Borst 1986), num elemento de betão fendilhado as deformações do betão e das fendas consideram-se associados em série. Assim, um incremento de deformação aplicado ao betão fendilhado é a soma do incremento de deformação no betão entre fendas mais o incremento de deformação nas fendas, que em termos vectoriais se traduz por,

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \Delta \underline{\varepsilon}^b + \Delta \underline{\varepsilon}^f \quad (1)$$

em que $\Delta \underline{\varepsilon}$, $\Delta \underline{\varepsilon}^b$ e $\Delta \underline{\varepsilon}^f$ são, respectivamente, o vector dos incrementos das deformações totais, no betão e nas fendas relativamente ao sistema global de eixos, significando as siglas *b*, e *f*, betão e fenda, respectivamente. A deformação nas fendas deve ser encarada como a soma da abertura das fendas distribuídas na banda de fendilhação (Bazant 1983a), dividida pela largura desta banda. A decomposição das deformações modela de forma transparente o comportamento do betão fendilhado, dado que permite, de forma directa, incluir no modelo constitutivo as leis que governam o comportamento das fendas e do betão entre fendas. O incremento da deformação na banda de fendilhação é governado pelos parâmetros de fractura associados aos modos I e II de fractura, enquanto o comportamento elasto-plástico do betão entre fendas é simulado pela teoria da plasticidade associada (ver Fig. 1).

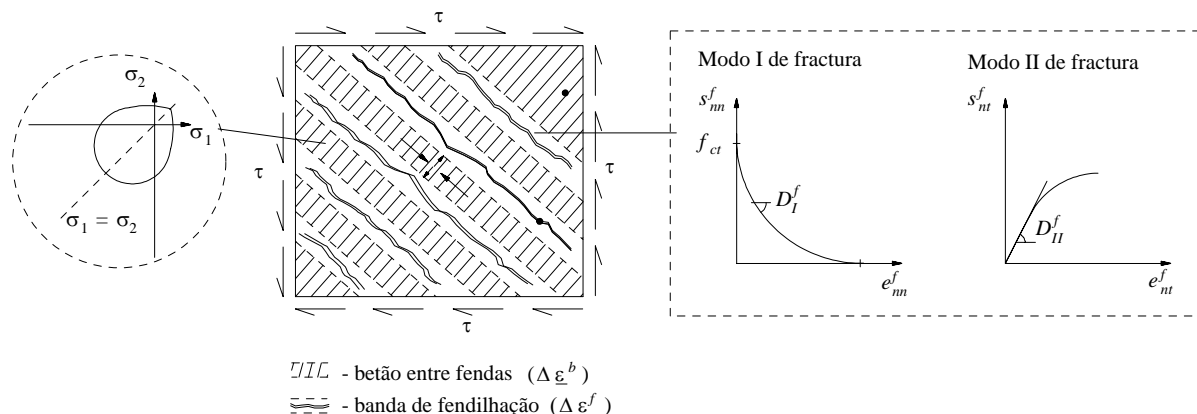


Figura 1: Elemento de betão fendilhado.

O programa de calculo desenvolvido dispõe de um modelo de multifendas fixas e de um modelo de fendas rotativas.

2.1 - Modelo de multifendas fixas.

Neste modelo de fendilhação considera-se que num ponto de amostragem podem desenvolver-se diversas fendas não necessariamente ortogonais, mantendo a sua orientação durante todo o carregamento. As componentes de tensão e de deformação da fenda no seu referencial relacionam-se através da lei constitutiva que governa o comportamento das fendas,

$$\Delta \underline{\hat{s}}^f = \underline{\hat{D}}^f \Delta \underline{\hat{e}}^f \quad (2)$$

em que $\Delta \underline{\hat{s}}^f$ e $\Delta \underline{\hat{e}}^f$ são os vectores que incluem o incremento das componentes de tensão e extensão, respectivamente, de todas as fendas existentes num determinado ponto de amostragem e $\underline{\hat{D}}^f$ é a matriz diagonal que assembla as leis constitutivas de todos os conjuntos de fendas dispersas no referido ponto de amostragem. A matriz constitutiva de cada fenda é caracterizada pelos módulos de rigidez correspondentes ao modo I e II de fractura, D_I^f e D_{II}^f , respectivamente. A investigação experimental (Divakar 1986) revela que a opção por $\underline{\hat{D}}^f$ diagonal é de facto uma simplificação, tomada para não aumentar desmesuradamente a complexidade do modelo, pois este formato de matriz não simula nem a história da fendilhação ocorrida nem a interacção entre as fendas. Esta interacção é simulada através da determinação dos parâmetros de fractura que caracterizam os módulos D_I^f e D_{II}^f da nova fenda. O modelo de fendilhação suporta-se ainda numa restrição cinemática,

$$\Delta \underline{\varepsilon}^f = \underline{\hat{N}} \Delta \underline{\hat{e}}^f \quad (3)$$

numa restrição estática,

$$\Delta \underline{\hat{s}}^f = \underline{\hat{N}}^T \Delta \underline{\sigma} \quad (4)$$

e na lei que rege o comportamento do betão entre fendas,

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D}^b \Delta \underline{\varepsilon}^b \quad (5)$$

em que \underline{D}^b é a matriz constitutiva que simula o comportamento do betão entre fendas. A matriz $\underline{\hat{N}}$ é uma matriz diagonal que assembla as matrizes que definem a orientação das fendas existentes num determinado ponto de amostragem em relação ao sistema global de eixos. Substituindo-se (1) e (3) em (5), premultiplicando a equação resultante por $\underline{\hat{N}}^T$ e fazendo intervir as relações (2) e (4) obtém-se (Rots 1988),

$$\Delta \underline{\sigma} = \left\{ \underline{D}^b - \underline{D}^b \underline{\hat{N}} \left[\underline{\hat{D}}^f + \underline{\hat{N}}^T \underline{D}^b \underline{\hat{N}} \right]^{-1} \underline{\hat{N}}^T \underline{D}^b \right\} \Delta \underline{\varepsilon} \quad (6)$$

que define a lei constitutiva do betão fendilhado. Se o betão entre fendas estiver em regime linear, em (6) a matriz \underline{D}^b será substituída pela matriz de elasticidade linear do betão, \underline{D}_e^b . Se o betão entre fendas desenvolver deformações plásticas, em (6) \underline{D}^b será substituída pela matriz elasto-plástica, \underline{D}_{ep}^b ,

$$\underline{D}_{ep}^b = \underline{D}_e^b - \frac{\underline{D}_e^b \underline{a} \underline{a}^T \underline{D}_e^b}{h + \underline{a}^T \underline{D}_e^b \underline{a}} \quad (7)$$

em que \underline{a} é o vector fluxo, obtido a partir da derivação da função de resistência máxima, $f(\underline{\sigma})$, em relação às componentes de tensão $\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ e h é um escalar dependente das características do endurecimento estabelecido para o material (Figueiras 1983). Alguma investigação experimental efectuada sobre elementos de BRF submetidos a estado multiaxial de tensão (Uyan 1986) revela que a forma da superfície de resistência máxima nos BRF é semelhante à dos correspondentes BS. No entanto, comparativamente com a resistência uniaxial em compressão, a resistência biaxial em compressão parece aumentar mais nos BRF que nos BS e tanto mais quanto maior for a percentagem de fibras. Contudo, enquanto forem escassos os resultados experimentais utiliza-se, no presente trabalho, a superfície de resistência máxima proposta por Drucker-Prager e alterada por Figueiras (1983). Para determinar o estado de tensão nas fendas e no betão entre fendas quando este está em regime elasto-plástico utiliza-se um algoritmo similar ao proposto por Borst e Nauta (1985).

2.2 - Modelo de fendas rotativas

Se não for colocada qualquer restrição à formação de novas fendas (Borst 1985) o modelo de multifendas fixas degenera no modelo de fendas rotativas desde que o factor de retenção de rigidez de corte, β , (Figueiras 1983) seja deduzido a partir da condição de coaxialidade entre as tensões e as extensões principais (Bazant 1983b),

$$\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)G_c} \quad (8)$$

obtendo-se segundo o princípio da decomposição das deformações (ver a expressão (14))

$$D_{II}^f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)G_c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)G_c - (\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (9)$$

em que σ_1 , σ_2 e ε_1 , ε_2 são as tensões e extensões principais, respectivamente, e G_c é o módulo de elasticidade transversal do betão intacto.

3 - PARÂMETROS DE FRACTURA

3.1 - Modo I de fractura

No módulo que caracteriza o modo I de fractura, D_I^f , intervêm os seguintes parâmetros de fractura: resistência do material à tracção, f_{ct} ; energia de fractura do material, G_f ; forma da lei de amolecimento; largura da banda de fendilhação.

A resistência à tracção só aumenta significativamente nos betões reforçados com elevada percentagem de fibras ($V_f > 3$) e realizados com técnicas que disponham as fibras segundo direcções o mais próximo possível da direcção das tracções (Barros 1994a). A energia correspondente ao modo I de fractura, G_f , é a energia dissipada na formação de uma fenda com superfície com área unitária, sendo esta a principal propriedade beneficiada pelos mecanismos de reforço das fibras. Na secção seguinte descreve-se sucintamente os resultados dos ensaios efectuados para quantificar G_f em BRFA. Para simular o modo I de fractura o código computacional desenvolvido dispõe de diagramas linear, bilinear, trilinear e exponencial. A comparação entre respostas obtidas numericamente e registadas em ensaios experimentais efectuados sobre faixas de laje de BRFA revelou que o diagrama trilinear (ver Fig. 2) é o mais adequado para simular o amolecimento deste compósito (Barros 1994b).

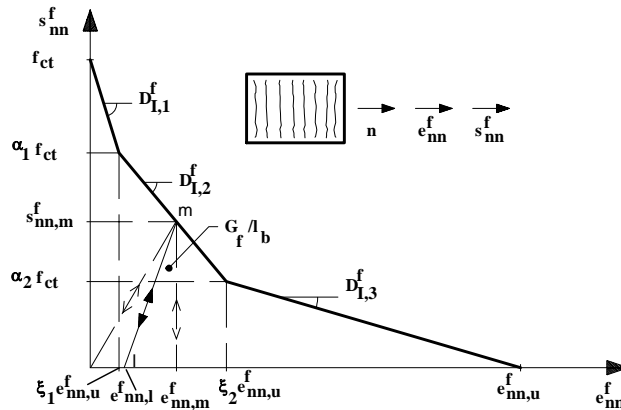


Figura 2: Diagrama de amolecimento adequado para simular o modo I de fractura dos BRFA.

O diagrama trilinear caracteriza-se pelas seguintes expressões:

$$D_{I,1}^f = -k_1 \frac{l_b f_{ct}^2}{G_f}; \quad D_{I,2}^f = -k_2 \frac{l_b f_{ct}^2}{G_f}; \quad D_{I,3}^f = -k_3 \frac{l_b f_{ct}^2}{G_f}; \quad e_{nn,u}^f = k_4 \frac{G_f}{f_{ct} l_b} \quad (10.a)$$

em que

$$k_1 = \frac{(1-\alpha_1)(\xi_1 + \alpha_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2)}{2\xi_1}, \quad k_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\xi_1 + \alpha_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2)}{2(\xi_2 - \xi_1)}, \quad (10.b)$$

$$k_3 = \frac{\alpha_2(\xi_1 + \alpha_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2)}{2(1-\xi_2)} \quad e \quad k_4 = \frac{2}{\xi_1 + \alpha_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2}.$$

Os parâmetros α_i e ξ_i ($i=1,2$) também devem ser função das características das fibras, principalmente da sua percentagem e esbelteza (l_f/d_f -razão comprimento diâmetro da fibra). Contudo são escassos os resultados de investigação experimental que permitam estabelecer a dependência das características das fibras, pelo que, um dos objectivos do presente trabalho

consiste na determinação da referida dependência, através da simulação numérica de respostas experimentais.

No presente modelo a descarga-recarga em modo I de fractura pode ser simulada por um ramo linear, secante ou intermédio a estes dois casos, conforme se representa na Fig. 2. Nos BRF a deformação residual na fenda após a sua completa descarga deve ser maior que nos correspondentes betões simples, dado que além da maior rugosidade das faces da fenda, a rigidez das fibras e o atrito entre estas e o material envolvente constituem um obstáculo suplementar ao fecho da fenda. No presente modelo é proposta para os BRF a seguinte expressão

$$e_{nm,l}^f = \eta e_{nm,m}^f, \quad (11.a)$$

em que

$$\eta = \left[1 - \exp(-e_{nm,m}^f) \right] \left[1 - \exp\left(-C \frac{l_f}{d_f} V_f\right) \right] \quad (11.b)$$

entrando em (11.b) $e_{nm,m}^f$ em ‰ e V_f em ‰ (percentagem das fibras em volume) e sendo C uma constante. Segundo esta expressão, quanto maior for $e_{nm,m}^f$, l_f/d_f e V_f maior será a deformação residual em descarga, o que está em consonância com o comportamento observado em ensaios experimentais. O valor da constante C vem sendo aferido através da análise comparativa entre resultados experimentais e numéricos, verificando-se que $C=0.02$ permite obter resultados satisfatórios.

A largura da banda de fendilhação é a zona do material que entra em amolecimento. A dimensão desta banda deve ser maior nos betões reforçados com fibras que nos correspondentes betões simples e aumenta com os mecanismos de reforço das fibras. Para que os resultados da análise sejam independentes da malha adoptada na discretização da estrutura, l_b deve estar relacionado com as características do elemento finito e com a orientação das fendas (Bazant 1983a, Rots 1988). No entanto, ainda não foi proposto um modelo de avaliação de l_b com aceitação universal. No presente trabalho o valor de l_b é quantificado com base na área do ponto de amostragem. Para que não ocorram instabilidades numéricas l_b deve respeitar a seguinte condição (Rots 1988),

$$l_b \leq \frac{G_f E_c}{K f_{ct}^2} \quad (12)$$

em que k é o maior dos k_i definidos em (10) e E_c é o módulo de elasticidade longitudinal do betão intacto.

3.2 - Modo II de fractura

Aplicando o princípio da decomposição das deformações o módulo que caracteriza o modo II de fractura, D_{II}^f , é definido pela seguinte expressão (Rots 1988)

$$D_{II}^f = \frac{\beta}{1-\beta} G_c \quad (13)$$

em que β é o factor de retenção de rigidez de corte (Figueiras 1983). Segundo a investigação experimental, a capacidade de transferência de tensões de corte diminui com o aumento da deformação extensional, dado que diminui o embricamento entre as faces da fenda. No presente modelo este comportamento pode ser simulado através seguinte expressão

$$\beta = \left[1 - \frac{e_{nm}^f}{e_{nm,u}^f} \right]^p \quad c/ p=1,2 \text{ ou } 3. \quad (14)$$

A análise experimental realizada sobre provetes e estruturas de BRF revela que a extensão de tracção correspondente ao momento em que o betão deixa de ter capacidade de carga, $e_{nm,u}^f$, aumenta substancialmente com a percentagem e esbelteza das fibras. Utilizando-se a expressão anterior para simular o módulo de rigidez correspondente ao modo II de fractura para os BRF, a capacidade de transferência de tensões de corte atribuída ao betão fendilhado pode ser demasiado alta para estados de fendilhação elevados. Para atender a este facto propõe-se para simular o modo II de fractura dos BRF a seguinte expressão alternativa

$$\beta = \exp\left(-F \frac{d_f}{V_f l_f} \frac{e_{nm}^f}{e_{nm,u}^f}\right) \quad (15)$$

em que $F=300$ é um factor avaliado a partir da análise comparativa entre as respostas experimentais e numéricas.

4 - ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Com o objectivo de quantificar a energia de fractura em BRFA foram efectuados ensaios de flexão sob três pontos de carga em provetes prismáticos de $525 \times 150 \times 150 \text{ mm}^3$ com 450 mm de vão e com entalhe a meio vão de 4 mm de largura, em conformidade com os procedimentos recomendados pelo RILEM (1995) - ver Fig.3. Na Fig. 4 apresenta-se os diagramas carga-flecha ($F-\delta$) registados em provetes com as seguintes características de composição: razão água/cimento (a/c) igual a 0.45; razão cimento/inertes (c/i) igual a 0.25; 0, 30, 45 e 60 Kg/m^3 fibras de aço Dramix ZP30/.50 e ZX60/.80 (Bekaert 1991). Constata-se que G_f aumenta significativamente com a percentagem e esbelteza das fibras. Na Fig. 5 apresenta-se os valores de G_f/G_{f0} em função da percentagem, em peso, de fibras (W_f), relativos aos ensaios efectuados com provetes reforçados com fibras ZX60/.80, sendo G_{f0} a energia de fractura dos correspondentes provetes de betão simples (BS) - mesma composição mas sem fibras. G_{f0} variou entre 140 a 180 N/mm . Nos provetes reforçados com fibras ZP30/.50 o aumento de G_f/G_{f0} com W_f não é tão significativo como o ocorrido nos provetes reforçados com fibras ZX60/.80. Aos resultados obtidos aplicou-se o método dos mínimos quadrados obtendo-se as seguintes expressões,

$$G_f / G_{f0} = \exp\left(3.408 - \frac{0.376}{W_f}\right) + 0.10 \text{ p/ } W_f > 0\% \quad (16)$$

para as fibras ZP30/.50, e

$$G_f / G_{f0} = \exp\left(5.494 - \frac{3.182}{W_f}\right) + 0.10 \text{ p/ } W_f > 0\% \quad (17)$$

para as fibras ZX60/.80.

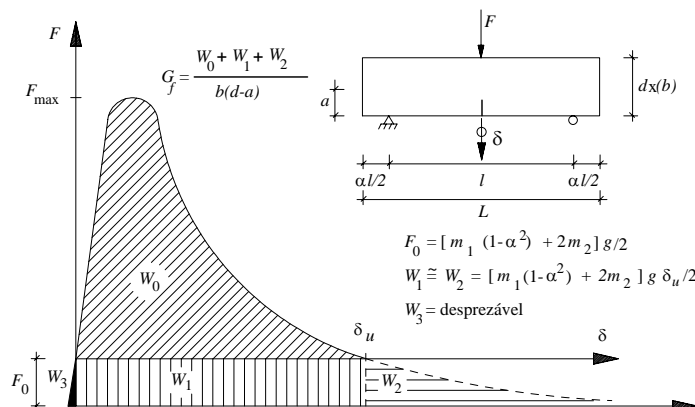


Figura 3 - Quantificação da energia de fractura segundo o RILEM [RILEM 1985].

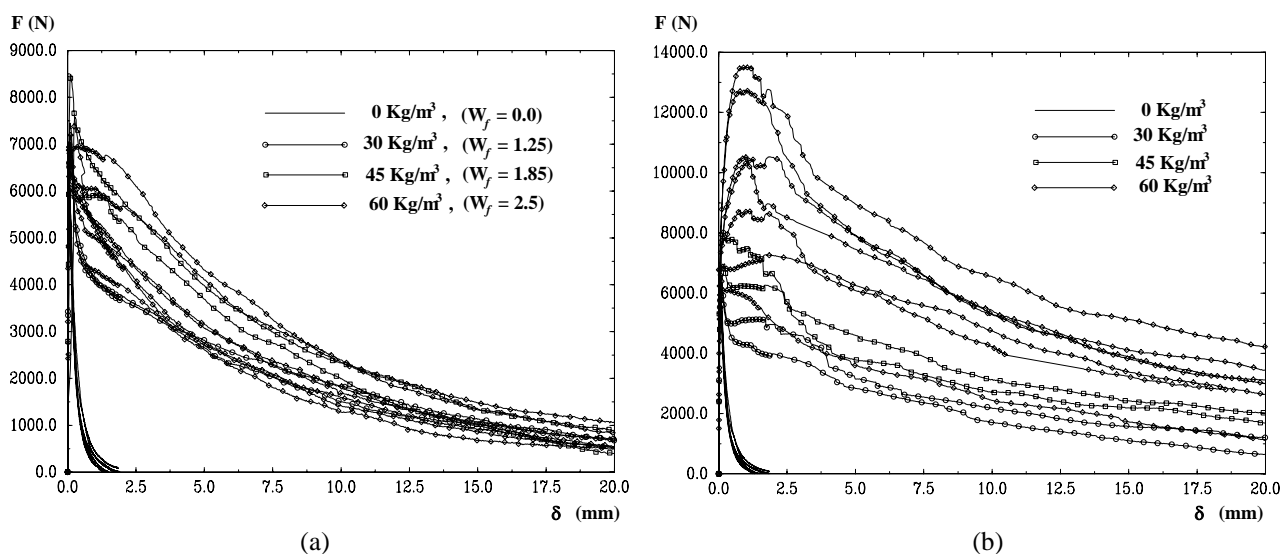


Figura 4 - Curvas F- δ em provetes reforçados com fibras ZP30/.50 (a) e ZX60/.80 (b).

5 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Apenas se resume a simulação numérica dos ensaios experimentais efectuados sobre provetes de BS, de betão reforçado com 30 Kg/m³ de fibras ZP30/.50 (BR30-ZP30/.50) e de betão reforçado com 30 Kg/m³ de fibras ZX60/.80 (BR30-ZX60/.80), com $a/c=0.45$. Dos ensaios de compressão uniaxial obteve-se directa e indirectamente $f_{cm}=32$ MPa, $E_c=30$ GPa, $f_{ct}=3.0$ MPa, tendo-se tomado $\nu=0.2$. Os provetes foram discretizados em elementos finitos isoparamétricos de Serendipity de oito nós, através da malha representada na Fig. 7. A análise foi efectuada com integração reduzida (Figueiras 1983) e segundo o modelo de fendas rotativas. Considerou-se para banda de fendilhação a raiz quadrada da área do ponto de amostragem. Na Fig. 6 apresentam-se as curvas F- δ experimentais e numéricas obtidas nos provetes de BS, BR30-ZP30/.50 e BR30-ZX60/.80. Nesta figura inclui-se a energia de fractura utilizada na análise, bem como os valores dos pontos característicos do diagrama trilinear utilizado na simulação do modo I de fractura. Na Fig. 7 apresenta-se a malha deformada versus malha indeformada, a distribuição das tensões principais e o padrão de fendilhação no último incremento da análise efectuada sobre os provetes de BS. Inclui-se ainda o padrão de fendilhação nos provetes BR30-ZX60/.80.

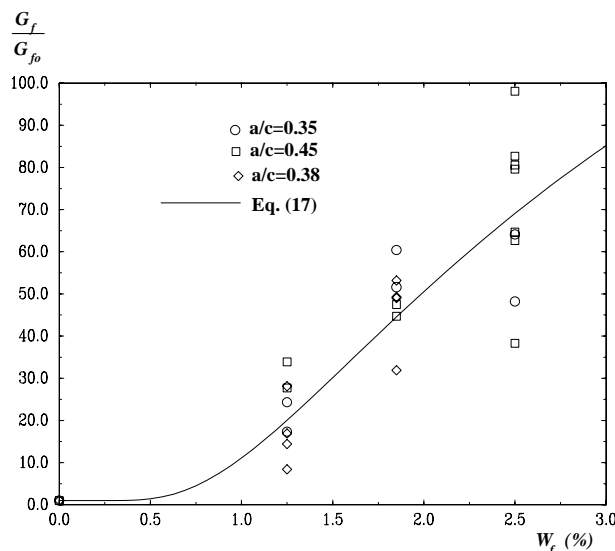


Figura 5 - Relação $G_f/G_{f0} - W_f$ nos provetes reforçados com fibras ZX60/.80.

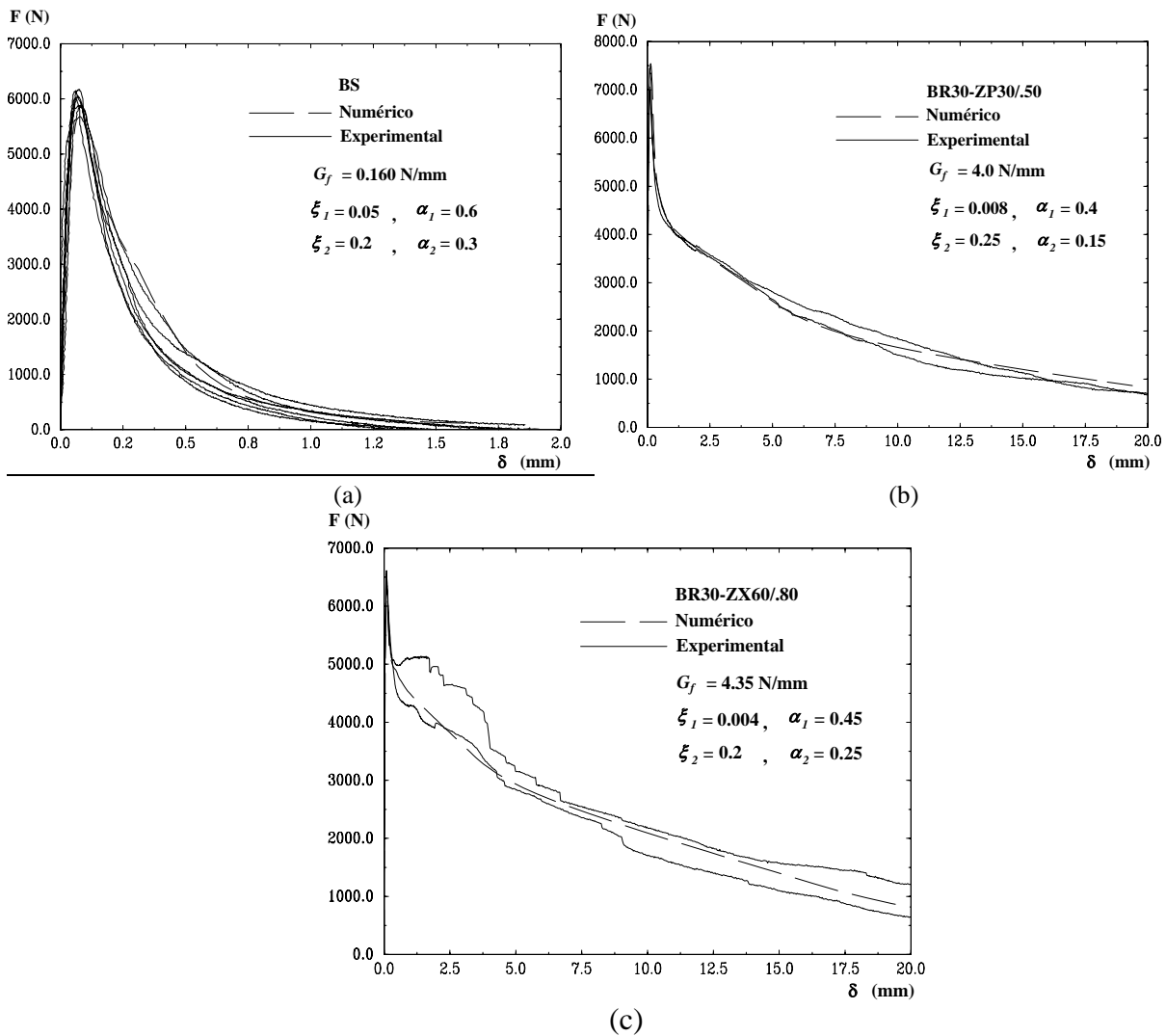
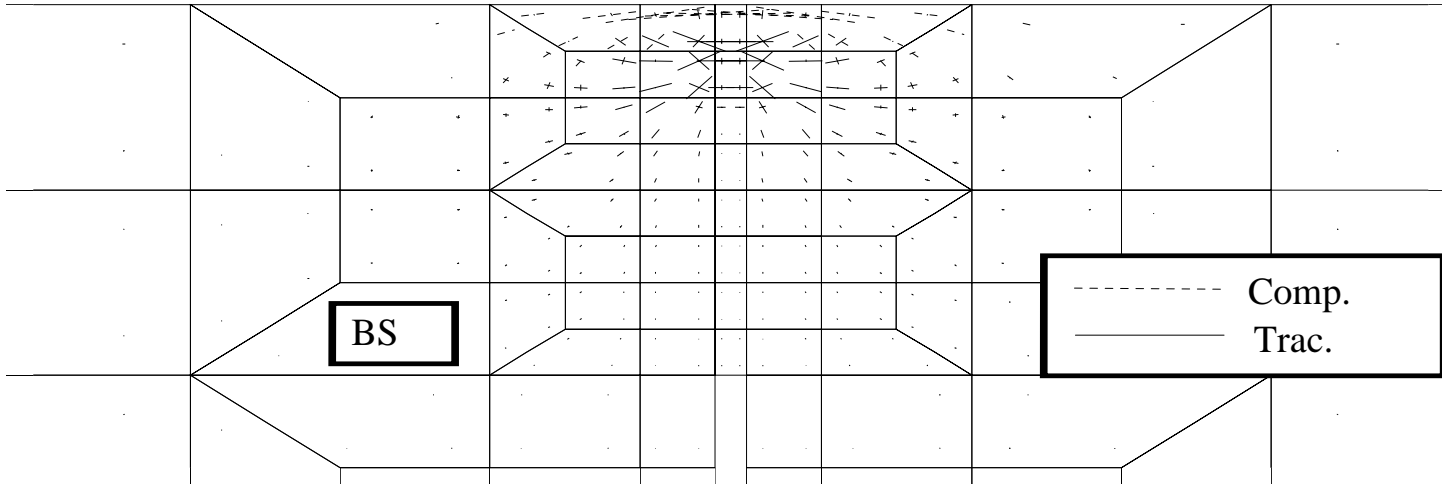
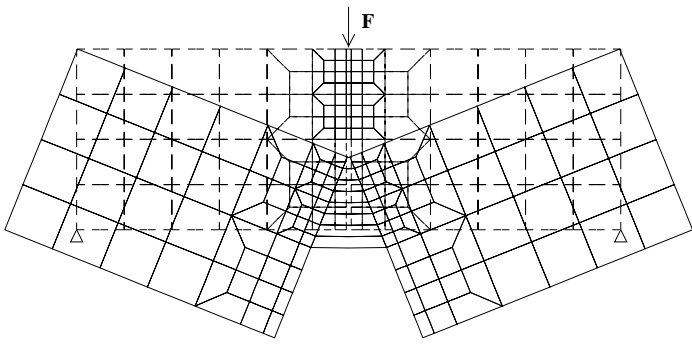


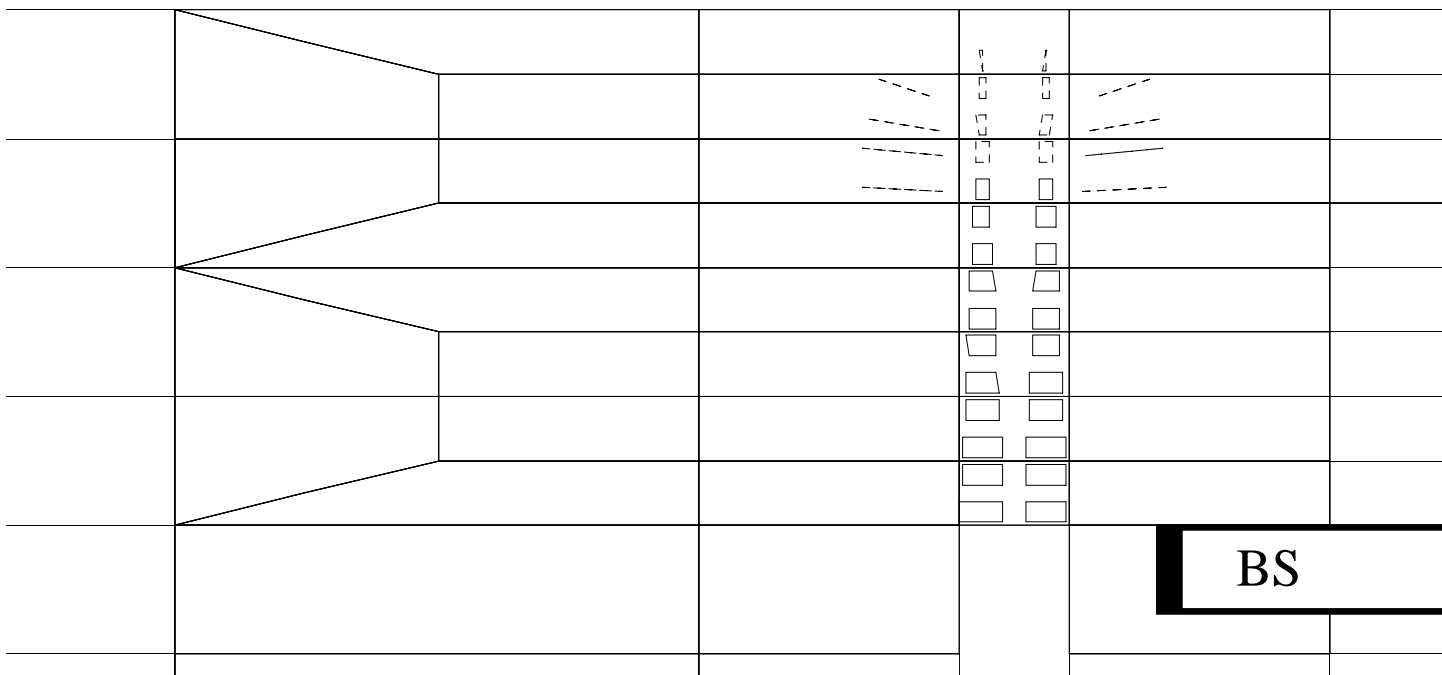
Figura 6 - Curvas carga-flecha nos provetes de BS (a), BR30-ZP30/.50 (b) e BR30-ZX60/.80 (c).




Verifica-se através da distribuição das tensões principais que o modelo simula devidamente a relaxação de tensões com a abertura das fendas que progridem ao longo dos elementos acima do entalhe. Na Fig. 8 representam-se os diagramas trilineares de amolecimento utilizados na simulação numérica dos provetes analisados. Verifica-se que para 30 Kg/m^3 de fibras os mecanismos de reforço proporcionado pelas fibras não evitam uma queda acentuada de carga no início da fendilhação. A amplitude deste ramo diminui com a percentagem e com a esbelteza das fibras. O surgimento destas fendas espúrias pode ser evitado utilizando-se acima do entalhe elementos com pontos de integração somente sobre o eixo de simetria da estrutura (Rots 1988). Nos modelos de fendilhação distribuída isto só é possível utilizando-se um diagrama apropriado de amolecimento que evite a difusão de fendas pelos elementos vizinhos aos acima do entalhe. Devido ao ligeiro viés das fendas que se desenvolvem nos elementos acima do entalhe, surgem fendas nalguns pontos de amostragem dos elementos mais próximos, que tendem contudo a fecharem-se com o progresso da fendilhação (ver Fig. 7c).

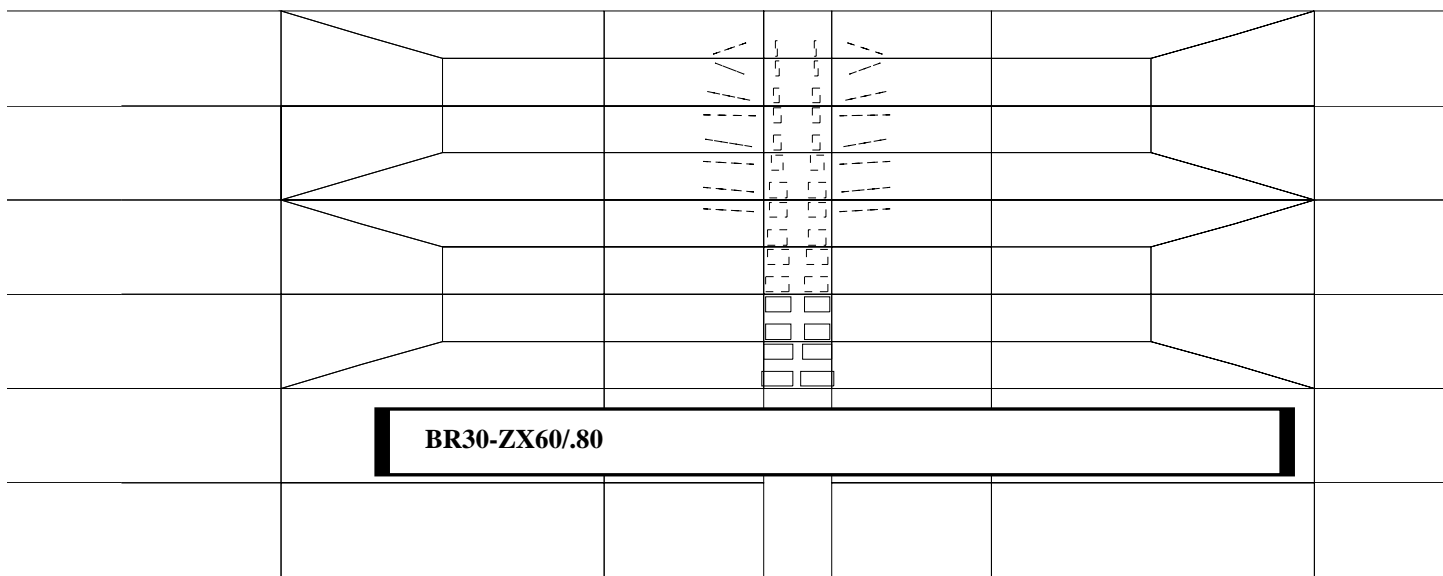


(a)

(b)



-  Fenda em abertura
-  Fenda aberta
-  Fenda em fecho



(c)

Figura 7 - Malha e deformada (a), distribuição de tensões principais (b) e padrão de fendilhação (c) típicos no fim dos ensaios dos provetes analisados.

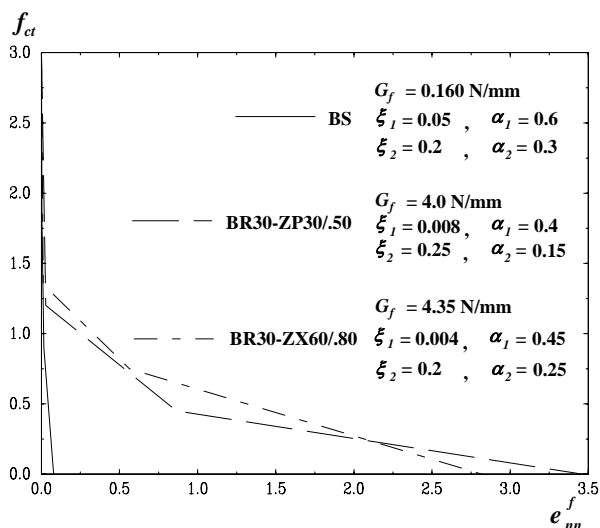


Figura 8 - Diagramas de amolecimento.

6 - BIBLIOGRAFIA

- Barros, J.A.O.; Figueiras, J.A.; Veen, C.V.D., "Tensile behaviour of glass fibre reinforced concrete", Recent Advances in Experimental Mechanics, eds. J.F. Silva Gomes et al., Vol. 2, pp.1073-1080, (1994a).
- Barros, J.A.O.; Figueiras, J.A., "Comportamento de Elementos Estruturais de Betão Reforçado com Fibras de Aço", Encontro Nacional Betão Estrutural, pp. 209-224, (1994b).
- Barros, J.A.O.; Silva Cardoso, A.; Figueiras, J.A., "Análise experimental de lajes de betão apoiadas em solo", 5 Encontro de Geotecnia, Vol. 3, pp. 75-88, Abril de 1995a.
- Barros, J.A.O.; Figueiras, J.A., "Experimental Behavior of Concrete Beams and Slabs Reinforced with Steel Fibers", ICCE/2-Second International Conference on Composites Engineering, August, (1995b)
- Bazant, Z.P. ; Oh, B.H., "Crack band theory for fracture of concrete", Materials and Structures, RILEM, 16(93), pp. 155-177, (1983a).
- Bazant, Z.P. "Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials", J. Engng. Mech., ASCE, 109(3), pp. 849-865, (1983b).
- BEKAERT N.V., "Dramix Fibras Hors Fils d'Acier pour Reinforcement de Beton et Mortier", Specification, BEKAERT N.V., October 1991.

- De Borst, R. ; Nauta, P., "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model", Eng. Comput., Vol. 2 pp. 35-46, March, (1985).
- De Borst, R., "Non-linear analysis of frictional materials", Dissertation, Delft Univ. of Technology, (1986a).
- Divakar, M.P. ; Fafitis, A. ; Shah, S.P., "Constitutive model for shear transfer in cracked concrete", Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 5, pp. 1047-1062, May, (1987).
- Figueiras, J.A., "Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells", Ph. D. Thesis, C/Ph/72/83, Uni. College of Swansea (1983).
- RILEM Draft Recommendation, 50-FMC Committee Fracture Mechanics of Concrete, "Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point ending tests on notched beams", Matériaux et Constructions, vol. 85, n°85, pp. 285-290, (1985).
- Rots, J.G., "Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach", Dissertation, Delft University. of Technology, (1988).
- Uyan, M.; Atan, Y.; Ali-Tasdemir, M., "Behaviour of GFR mortars under uni- and bi-axial loading", RILEM Symposium FRC 86, Developments in Fibre Reinforced Cement and Concrete, Vol. 1, paper 4.3, (1986)